



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN INGENIERIA MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE TÓPICOS DE FLUJO SUPERSÓNICO:  
CHORRO SUPERSÓNICO SUBEXPANDIDO Y FLUJO SUPERSÓNICO SOBRE UN CUERPO  
CON PERFIL DE CÁPSULA ESPACIAL.

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
CARLOS ABRAHAM AGUILAR VERA

TUTOR PRINCIPAL  
DR MARTÍN SALINAS VÁZQUEZ  
INSTITUTO DE INGENIERIA

MÉXICO, D. F. FEBRERO DE 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz

Secretario: Dr. William Vicente y Rodriguez

Vocal: Dr. Martín Salinas Vázquez

1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Jaime Cervantes de Gortari

2<sup>d o.</sup> Suplente: Dr. Rogelio Gonzalez Oropeza

Ciudad Universitaria, Mexico DF, 2014

**TUTOR DE TESIS:**

Martín Salinas Vázquez

## **Objetivo**

### **Chorro Supersónico**

Simular las estructuras de choque en un chorro supersónico circular y analizar su comportamiento frente a la variación del número de Mach para encontrar un intervalo donde las ondas de choque no aumenten.

Validar el código numérico por medio de la comparación de frecuencias de oscilación con datos experimentales y numéricos.

### **Flujo supersónico sobre un cuerpo con perfil de cápsula espacial**

Simular las zonas características del flujo supersónico tales como ondas de choque y expansiones para el perfil aerodinámico de una cápsula espacial.

# Índice

<b>Objetivo</b>	<b>3</b>
-----------------	----------

<b>Resumen</b>	<b>6</b>
----------------	----------

## Capítulo I Introducción

### I- Chorro Supersónico Subexpandido

1.1 El problema en Combustión Supersónica.....	8
1.2 El Chorro Supersónico Subexpandido.....	1

0

### II- Flujo Supersónico Sobre un Cuerpo

2.1 Aerodinámica de una cápsula espacial.....	12
2.2 Geometrías del cuerpo romo.....	15

### III- Antecedentes fundamentales de Flujo Compresible

3.1 Ondas de Choque-----	16
3.2 Expansiones y flujo de Prandtl-Meyer-----	18
3.3 Características de las ondas de choque curvadas -----	19
3.4 Entropía de una onda de choque-----	20
3.5 Zona Sónica y Transónica-----	20
3.7 El método de las características-----	21
3.8 Transición de la capa límite.-----	23
3.9 Arrastre de Onda-----	23

## Capítulo II Ecuaciones de Gobierno de los Fluidos

2.1 Ecuaciones de Navier-Stokes.....	25
2.2 Esquemas compactos.....	27
2.3 Filtro Matemático.....	29
2.4 Simulación de Grandes Escalas.....	30

## Capítulo III Generalidades de las Simulaciones Numéricas

3.1 Dominio computacional.....	34
3.2 Parámetros Adimensionales.....	34
3.3 Velocidad de co-flow.....	34
3.4 Ruido Blanco.....	35
3.5 Condiciones de Frontera.....	35
3.6 El método NSCBC.....	36

3.7 Estimación por medio de LODI.....	39
3.8 Entrada Supersónica.....	40
3.9 Frontera de salida subsónica no reflejante.....	40
3.10 Pared Adiabática Deslizante.....	41

## **Capítulo IV Resultados y Visualización del Chorro Supersónico**

4.1 Caracterización del Chorro Supersónico.....	44
4.2 Vorticidad sobre las celdas de choques.....	48
4.3 Análisis Espectral.....	50
4.4 Zona de auto-semejanza.....	53

### **Resultados y Visualización del flujo Supersónico sobre un cuerpo**

4.5 Flujo Supersónico Sobre Cuerpo Romo.....	57
4.6 Superficie de Choque.....	57
4.7 Abanico de Expansión.....	58
4.8 Línea sónica.....	59

## **Capítulo V Conclusiones**

5.1 Conclusiones del chorro Supersónico.....	67
5.2 Conclusiones del Flujo Supersónico sobre Cuerpo Romo.....	68

## **VI Referencias.....59**

\*Multimedia

## Resumen

En el capítulo primero de este trabajo se estudia la aplicación del chorro supersónico en un sistema de combustión supersónica e independientemente se estudia el flujo supersónico sobre un cuerpo que tiene aplicación en una cápsula espacial. También se resaltan los fenómenos físicos asociados al flujo de un chorro supersónico con ondas de choque débil y expansiones en el núcleo del chorro. Cada fenómeno se detalla de manera que se fundamenta con bases establecidas en la teoría clásica de la mecánica de fluidos así como también en los resultados encontrados y publicados por distintas líneas de investigación. Entre las suposiciones que dan pie a la teoría clásica están: los efectos viscosos nulos, las corrientes isentrópicas y adiabáticas y las ondas con propiedades constantes. Se hace especial énfasis en la investigación de los efectos de la capa cortante de un chorro, el crecimiento de vórtices en el núcleo y la generación de ruido en bandas de alta frecuencia. Este último tópico es aquel que será analizado y corroborado con datos experimentales y numéricos para la presente simulación.

En el capítulo segundo se van a escribir las ecuaciones de gobierno de los fluidos en forma conservativa, mismas que son utilizadas en el código numérico y cuya resolución se detalla en el capítulo tercero. El carácter físico de los distintos términos son explicados, tales como: la deformación volumétrica, el gradiente de presión, el término viscoso y convectivo entre otros. Por último se detalla la teoría del modelo de turbulencia de grandes escalas, necesaria para resolver estructuras turbulentas.

En el capítulo tercero se muestran las generalidades de la simulación numérica, las cuales surgen como herramientas para la resolución de las ecuaciones no lineales de Navier-Stokes, y son una necesidad para obtener convergencia numérica adecuada. Los esquemas numéricos de sexto orden para valuar las derivadas espaciales con filtro fueron implementados y son prueba de la alta exactitud que se necesita para resolver términos convectivos no lineales. El método de Ruge-Kutta se usó para avanzar en el tiempo y valuar su derivada. Para las condiciones de frontera se muestra el método de LODI para fronteras no viscosas, compresibles, variables en el tiempo y el espacio. En este modelo las variables son dependientes del número de Mach.

En el capítulo cuarto se detallan los resultados obtenidos de la simulación de un chorro supersónico y del flujo sobre una cápsula espacial. Para el flujo supersónico se obtienen las estructuras de choque y el desarrollo de la turbulencia. Además se monitorizó la presión física para obtener, por medio de FFT, las frecuencias de oscilación que posteriormente son comparadas con los resultados obtenidos por diversas líneas de investigación. En el caso de la cápsula espacial se muestran visualizaciones explícitas de los fenómenos físicos para el perfil utilizado. Este fue proporcionado por el proyecto OREX (Orbital Re-entry Experiment).

En el capítulo quinto y último se dan a conocer las conclusiones para cada estudio y en general se evalúa si se obtuvieron buenas coincidencias para poder afirmar que dichos fenómenos fueron correctamente correlacionados con la evidencia experimental disponible. Aunado a esto se detallan las posibilidades para controlar el arrastre del vehículo así como también la capacidad de disminuir el ruido generado por el chorro supersónico en vehículos de alta velocidad.

Hay un anexo que muestra la deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes de manera breve y práctica. Sin embargo para el lector interesado en una deducción más detallada se puede dirigir a [4].

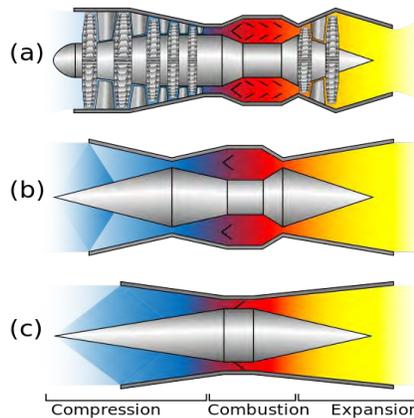
# Capítulo I

## Introducción

# I Aplicación del Chorro Supersónico Subexpandido

## 1.1 El problema en Combustión Supersónica

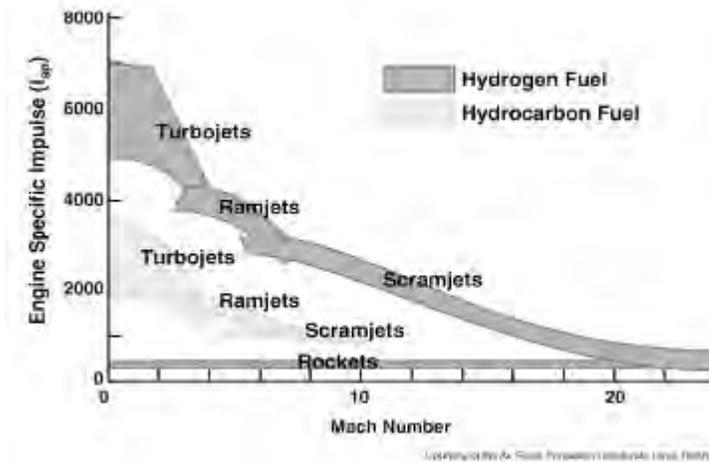
Para lograr la propulsión en aviones comerciales y militares, cohetes espaciales, o misiles se utilizan diferentes tecnologías, ya sea turbo reactor (turbojet), turbo ventilador (turbofan), turbo estator (ramjet) y turbo estator de combustión supersónica (scramjet) respectivamente. De aquí en adelante se usaran los términos en ingles para los diferentes sistemas de propulsión. En cuanto a turbofan y turbojet el aire es ingresado por un ventilador o compresor que envía aire comprimido hacia una cámara de combustión, y posteriormente estos gases, en su mayoría aire, son expandidos en una turbina de gas que produce trabajo. El aire sale como gases de descarga hacia la atmósfera por medio de una tobera, convirtiendo su energía cinética a fuerza que empuja el vehículo. En estos tipos de sistemas encontramos flujo a alta velocidad, toberas supersónicas convergentes divergentes, combustión supersónica o subsónica, compresión y expansión en compresores y turbinas, gases de descarga entre otros. La diferencia entre ramjet y scramjet de turbojet y turbofan es que estos sistemas no cuentan con partes móviles dentro de su funcionamiento, sólo dependen del movimiento de sí mismo para mantener una propulsión uniforme y están diseñados para vuelos supersónicos e hipersónicos [13]. Para un scramjet o un ramjet, al no tener un compresor para la succión de aire, este debe ser introducido por un conducto tipo difusor que lo comprime y lo envía directamente al combustor, vea Fig. 1 (c) . Para un vuelo supersónico es necesaria la disminución de la velocidad del flujo para ser quemado posteriormente en una cámara de combustión, aumentar su energía a los gases y posteriormente acelerar los gases por medio de una tobera convergente-divergente, entonces estos gases son descargados en un chorro de alta velocidad para producir propulsión.



*Fig. 1  
Comparación del funcionamiento de turbojet (a), ramjet (b) y scramjet(c)*

La diferencia entre un scramjet y un ramjet es que mientras el ramjet está diseñado para quemar la mezcla aire combustible a velocidades de flujo subsónicas, el scramjet lo hace a velocidades supersónicas. Esta configuración que se presenta en régimen supersónico es más eficiente por el hecho de contener más energía cinética en el chorro. Sin embargo es aquí donde se presenta el problema de quemar la mezcla a velocidades muy altas, digamos supersónicas, ya que la combustión por la velocidad del flujo se debe lograr en un lapso de tiempo muy breve.

Como el ramjet está diseñado para quemar combustible a altas velocidades y alcanzar velocidades hipersónicas se da una compresión del flujo que puede generar una auto-ignición y así surge el problema de tener esfuerzos excesivos adicionales que causan deformaciones y fatiga en los materiales. En ese sentido una solución para encender el combustible a tiempo, es el combustible en sí mismo, ya que su resistencia a la detonación puede evitar el deterioro prematuro de la cámara de combustión así como también su efectividad y seguridad en el vuelo. Diferentes combustibles a base de hidrógeno o hidrocarburos han sido usados, tales como JP7 que aunque no libera la misma cantidad de energía que el hidrógeno en la combustión y el empuje específico es menor, resulta ser bastante estable. Basta ver que los combustibles con base en el hidrógeno son más eficientes de acuerdo a [16] en Fig. 2



*Fig. 2*  
*Eficiencia de combustibles respecto a la velocidad de vuelo. Cortesía [16]*

En otro sentido una solución al problema ha provenido del uso de nuevos materiales compuestos a base de cerámicos y carbono, así como de su misma capacidad de manejar altos gradientes de temperatura y absorción de calor que junto a sistemas de enfriamiento consiguen enfriar suficientemente el flujo. Esto evita que el combustible detone antes de la combustión.

Otra respuesta ha sido dada por el diseño mismo del ramjet. Un conducto que controla la producción de ondas de choque oblicuas que parcialmente comprimen en menor grado, y disminuyen la velocidad en mayor grado, ha sido añadido. Por medio de investigaciones de la dinámica de fluidos es posible predecir cuanta presión es capaz de encender la mezcla y con la ayuda de un sistema de pre-combustión obtener una mezcla optimizada en un periodo breve y quemarlo en el combustor principal.

La combustión supersónica presenta uno de los problemas de mayor complejidad debido que la formación de ondas de choque en el chorro de inyección genera bajas eficiencias de mezclado. El problema de la presencia de choques y expansiones dentro del chorro, ha sido observado por medio de técnicas ópticas, experimentales, y son estudiadas de manera analítica y numérica. Es de vital importancia reducir la zona de choques ya que mientras más corta mejor porque el desarrollo de la turbulencia inicia más rápido y la generación de vórtices incrementa el mezclado. En ese sentido la generación de la combustión por medio de una corriente de aire supersónica es una prometedora área

para el mejoramiento de la combustión en sistemas ramjet y scramjet.

La longitud de la zona de choques está dada por una compleja interacción entre la capa cortante y las perturbaciones acústicas que recibe desde el núcleo de los choques supersónicos. Mientras estas perturbaciones aumenten o decaigan darán paso a la mezcla entre el chorro y la atmósfera [14]. El crecimiento de estas estructuras turbulentas a través de la capa cortante son una fuente que genera ondas de alta frecuencia. La longitud que se extiende en el núcleo de choques supersónicos, fue investigada experimentalmente por [15] y esta dada por:

$$L_c = \pi D (M^2 - 1)^{0.5} / 2.405 \quad (1)$$

Donde  $M$  es el número de Mach,  $D$  el diámetro del chorro y  $L_c$  el espaciamiento de cada choque. Esta expresión está basada en extensa evidencia experimental y numérica. La longitud total de todas las celdas está dada por [15] como sigue:

$$L_s / D = 0.57M^2 - 0.15 \quad (2)$$

La longitud total  $L_s$  es definida como la longitud desde la salida de la tobera hasta la última celda de choque sobre la línea central.

Una onda de choque que se origina en el núcleo de un chorro supersónico subexpandido produce ruido de alta frecuencia que no sería producido en régimen subsónico. Este ruido es proveniente de la radiación de ondas acústicas que tienen su fuente en las ondas de choque cuasi-periódicas. Estas ondas a su vez generan perturbaciones que garantizan la formación de inestabilidades en la capa cortante y con ello, eventualmente, la difusión de masa de la atmósfera. Las frecuencias tiene su origen en la formación natural de vórtices que surgen de la capa cortante. Sin embargo la interacción entre las dos zonas de alta y baja frecuencia es un fenómeno complejo que ha sido estudiado por [15].

## 1.2 El Chorro Supersónico Subexpandido

Para un chorro supersónico subexpandido uniforme que sale desde una tobera se puede observar de la Fig. 3, que tiene una presión mayor a la atmósfera y entonces se expande, zona (2) de Fig. 3. La atmósfera no se percata del movimiento del fluido y se mantiene imperturbable. Es necesario entonces, que el flujo disminuya su presión hasta la presión de la atmósfera para mantener el equilibrio. Posterior a la expansión del flujo, las líneas de corriente se desvían un cierto ángulo en la zona 2. Las ondas de expansión previamente generadas se reflejan al llegar a la línea central provocando, nuevamente una desviación de la corriente pero ahora contraria a la primera zona 3. Cuando las ondas reflejadas llegan a la frontera del chorro, éstas se convierten en una onda de choque que provoca un aumento de presión y temperatura del flujo, zona 4. Esta onda de choque axisimétrica se refleja posteriormente al encontrarse con otra onda de choque y causa nuevamente una compresión aun mayor a la anterior zona 5 de Fig. 3.

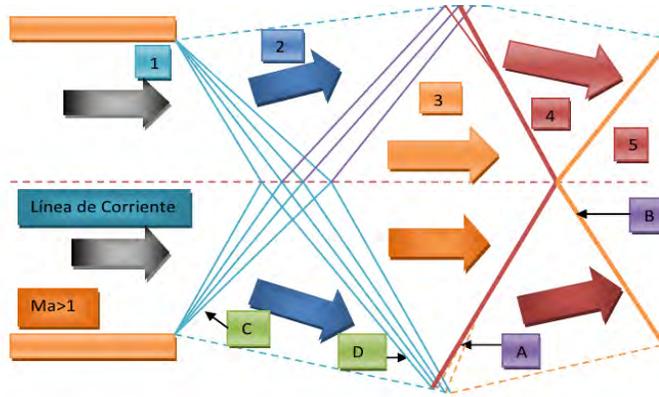


Fig. 3

**Esquema del chorro supersónico subexpandido. Se muestra internamente la compleja interacción de ondas de expansión y de choque (A) choque oblicuo, (B) Reflejo de choque sobre frontera física.**

La zona 4 de Fig. 3 tiene una presión igual a la atmósfera y a causa de la expansión el flujo acelera. La presión, la temperatura y la densidad disminuyen en la zona 2 de Fig. 3. Idealmente el flujo es isentrópico y es desviado un cierto ángulo.

A continuación se presentan las interacciones entre ondas de choque y expansiones:

- La reflexión sobre una frontera física de cualquier tipo de onda será una onda de ese mismo tipo. [2]
- La reflexión de una familia de ondas sobre una frontera libre será una familia opuesta a aquella familia incidente. [2]

En el primer caso, una onda de choque incidente sobre la frontera física como una pared dará como resultado una onda de choque y de manera semejante una onda de expansión incidente dará como resultado una onda de expansión.

En el segundo caso, una familia de ondas de choque que se refleja sobre una frontera libre dará como resultado una familia de ondas de expansión. Así como también una familia de ondas de expansión sobre una frontera libre dará una onda de choque.

Existen dos tipos de patrones en el chorro supersónico subexpandido: reflexiones regulares y reflexiones de Mach. El primero será estudiado en este trabajo, sin embargo del segundo cabe decir que es un flujo supersónico con por lo menos un choque fuerte dentro de su estructura [3] el cual es llamado disco de Mach y este patrón no será estudiado en esta tesis.

Las ondas de expansión deben reflejarse en la frontera libre (los límites del chorro) como una onda de choque.

## II- Flujo Supersónico Sobre un Cuerpo

### 2.1 Aerodinámica de una cápsula espacial

La teoría en la aerodinámica es sólida ya que está basada en una gran cantidad de observaciones experimentales, tanto en el túnel de viento como en la práctica, y sus efectos se han venido corrigiendo a través de los años. Con el avance de las nuevas tecnologías, las mediciones son más precisas y más confiables. Más recientemente la teoría también se ha alimentado de los resultados analíticos, es decir con la información proporcionada por las ecuaciones de gobierno de los fluidos. A partir de la solución de las ecuaciones de gobierno, con suposiciones razonables, se pueden obtener conclusiones tan precisas como aquellas obtenidas experimentalmente. La simulación numérica es una nueva y potencial técnica que se ha incorporado al campo del conocimiento de la aerodinámica, gracias a la exigencia de la industria aeronáutica. Las simulaciones numéricas sólo han sido posibles gracias al magnífico avance de la capacidad de cálculo de las modernas computadoras y su implementación de computadoras en conjunto o paralelización.

La aerodinámica del cuerpo como se ha venido investigando fuertemente en la aplicación sobre aeronaves, misiles transcontinentales y transbordadores espaciales. Estos últimos son capaces, de viajar a velocidades supersónicas e hipersónicas y estamos hablando que un misil transcontinental es capaz de salir de la atmósfera y en su trayectoria de regreso puede alcanzar números de Mach de hasta 10. En el caso de los transbordadores espaciales tienen un número de Mach de 15 en su trayectoria más crítica, entrando directamente a la tierra.

En el caso de los vehículos espaciales estos tienen trayectorias definidas de descenso y dependiendo del ángulo de ataque es posible variar la carga de calor total sobre el cuerpo. De acuerdo con la trayectoria de descenso de una cápsula espacial, el descenso inicia con un número de Mach de 16, y con un ángulo de  $14^\circ$ . Esta trayectoria ha sido considerada para obtener la menor carga de calor posible por efectos de seguridad del diseño, tales como la resistencia de materiales.

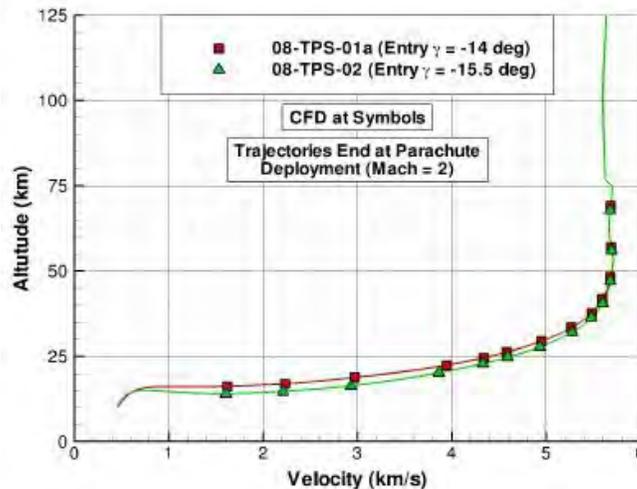


Fig. 4  
*Trayectoria crítica de descenso de la cápsula espacial típica.*

La física del problema de un vehículo entrando directamente desde la atmósfera, es simple cuando se considera desde un punto de vista energético. Cuando el vehículo espacial entra en el campo de gravedad de la tierra, la fuerza de atracción dota al cuerpo de energía potencial y eventualmente este cuerpo tendrá una velocidad alta. Esta energía cinética comenzará a ser importante en un descenso precipitado y la energía cinética se convertirá en calor. La conversión de energía tiene presencia en dos maneras: por medio de un choque supersónico y por medio de fricción del aire en la superficie del cuerpo.

El choque supersónico generará un aumento brusco de temperatura en una región del espacio muy pequeña y en un lapso de tiempo muy breve. El aumento de temperatura depende principalmente del número de Mach al cual el vehículo está viajando. Cuanto más grande es la velocidad, el choque será más intenso. La existencia de un gradiente de temperatura severo genera irremediamente una transferencia de calor también intensa. Esta carga puede ser tan intensa que puede repercutir en la resistencia de los materiales del cuerpo, sin embargo, no todo el calor generado se va directamente hacia el vehículo sino también existe una parte de esta carga que se dirige hacia el flujo circundante al mismo vehículo.

Estudios demuestran que la carga es inversamente proporcional al coeficiente de arrastre  $C_D$  de acuerdo a:

$$Q = \frac{1}{2} \frac{C_f}{C_D} \left( \frac{1}{2} m v_0^2 \right) \quad (3)$$

Si aumentamos el coeficiente de arrastre, la carga total suministrada al vehículo disminuye. Así mismo la velocidad  $v$  provoca que la carga aumente también. El coeficiente de fricción depende de la forma del cuerpo y puede ser despreciable en comparación con el coeficiente de presión para geometrías amplias.

La carga expresada en la relación (3) es una medida entre la velocidad del cuerpo y el coeficiente de arrastre, es decir, si aumentamos el coeficiente de arrastre la carga total disminuirá tanto como sea posible. Sin embargo, esto no es lo más apropiado para el buen diseño de un vehículo ya que lograr velocidades supersónicas para salir del campo de gravedad de la tierra requiere de combustible, así como también el aumento del área transversal puede atraer más carga hacia el vehículo. Es por ello que el diseño más apropiado para la geometría del cuerpo debe ser aquella más óptima que establezca un equilibrio entre la carga y el coeficiente de arrastre para determinada velocidad.

Un parámetro importante a medir será el número de Stanton que relaciona la transferencia de calor a los esfuerzos cortantes lo que significa que mide la carga respecto al coeficiente de arrastre en un fenómeno de convección forzada como lo es un vehículo en descenso.

$$St = \frac{h}{RePr} \quad (4)$$

Donde  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección.

No hay nada más problemático que el diseño de la geometría de los vehículos espaciales, es una tarea difícil tanto por la complejidad de los fenómenos como por su variabilidad con la geometría. La geometría es una parte esencial y fundamental para determinar la carga sobre el vehículo. Existen dos principales geometrías que tienen fenómenos muy característicos de cada uno: el cuerpo romo y el cuerpo agudo.

El campo del fluido en un cuerpo agudo, ya sean conos o cuñas, tiene un comportamiento que depende principalmente del número de Mach al cual el cuerpo viaja. Es decir, como se había mencionado ya anteriormente, la superficie de choque depende del número de Mach. Esto quiere decir que cuando la velocidad del flujo aumenta la onda de choque se acercará más al cuerpo agudo. Es por ello que los vehículos supersónicos e hipersónicos no suelen utilizar estas geometrías, a pesar de ser un choque oblicuo, ya que el gradiente de temperatura es tan alto que no hay materiales capaces de soportar esas condiciones tan agresivas.

Como no es posible usar geometrías agudas en el diseño de vehículos, la opción utilizada y más frecuente también, es el cuerpo romo. El cuerpo romo además de tener un  $C_D$  mayor, es capaz de generar una onda de choque des-adjunta del cuerpo (superficie de choque) es decir alejada del cuerpo. La desventaja de esto último es que la carga aumenta considerablemente. Como ya se mencionó en la parte inmediatamente enfrente del cuerpo la superficie de choque es muy intensa ya que es un choque fuerte Fig. 9. Y el flujo que está después de la onda, conocido como flujo de choque se dirige directamente hacia el cuerpo romo. Este flujo puede estar ionizado y crear una gran cantidad de carga que es absorbida por el cuerpo. Sin embargo las ventajas de tener la superficie de choque lejos son dos: la distancia hacia el cuerpo puede ser controlada con la geometría y que el flujo caliente puede ser desviado lejos del vehículo.

Aun cuando no todo el flujo es desviado, una buena parte de la carga es acarreada por el flujo mismo lejos del cuerpo y la otra parte es absorbida por el vehículo. Las ventajas de tomar el cuerpo romo como base de la geometría son claras.

Los diseños por medio de CFD son una herramienta bastante útil para encontrar los parámetros más óptimos entre geometría y carga. Sin embargo conlleva un gran esfuerzo y un tiempo considerable de cálculo. En resumen se puede decir que el problema de calentamiento en aeronáutica se reduce a distribuir el calor de la manera más eficiente posible minimizando la carga y considerando el impacto en el coeficiente de arrastre por medio de parámetros geométricos.

Recientemente se han probado distintos métodos para minimizar la carga. A saber por parte de algunos autores [5] han comprobado que una forma de resolver el problema de calentamiento es por medio de un chorro supersónico en contra-flujo desde la nariz del cuerpo romo. Esto último ha generado resultados satisfactorios ya que el chorro en contra-flujo genera una zona de recirculación en la nariz del cuerpo lo cual reduce la presión máxima y como consecuencia el coeficiente de arrastre es óptimo. Otro efecto que el chorro provoca es que aleja a la onda de choque del cuerpo y en ciertas condiciones disminuye su intensidad. De hecho se puede lograr que el arrastre de onda también sea mayor y que la carga hacia el cuerpo sea también menor. Aunque los mecanismos que gobiernan las interacciones entre ondas de choque y turbulencia, así como también entre la capa cortante y el flujo compresible no han sido bien comprendidas, el uso de estos métodos en aviones o misiles se han aplicado poco y con reserva.

## 2.2 Geometrías del cuerpo romo

El diseño geométrico de la cápsula espacial OREX (Orbital Re-entry Experiment), propuesto por [12] fue primeramente concebido y desarrollado por el proyecto HOPE de la agencia espacial Japonesa en Febrero de 1994, cuyo propósito fue un prototipo para acumular experiencia en diseño de vehículos de entrada así como datos e información que no se puede obtener en los laboratorios. Después de su aterrizaje en el Océano Pacífico, OREX proporcionó información sobre la carga de calor, resistencia estructural, interferencia de comunicación en fase de entrada y posicionamiento global. En cuanto al diseño de la geometría OREX fue desarrollado a partir de una curva cónica, cuyo frente es una porción de esfera. Esta parte fue fuertemente reforzada por materiales a base de carbono y cerámicos.

El diseño de una cápsula espacial está relacionado con la medida del radio de la nariz y mientras más grande sea, mejor. Sin embargo hay que tener cuidado con el aumento de la carga de calor ya que pueden fundirse los materiales o perder resistencia estructural. El coeficiente de presión depende de la pendiente de la curvatura, mientras más grande, la presión es mayor. El punto de estancamiento depende de la masa de aire, del Mach y del radio de la nariz. La forma de la onda de choque des adjunta depende del Mach y de la geometría.

La cápsula espacial tiene un peso de 865 kg al lanzamiento y es de 761 kg hacia la entrada a la atmósfera, el radio de la nariz es de 1.35 m, el diámetro total es de 3.4 m, la altura de 1.46 m.

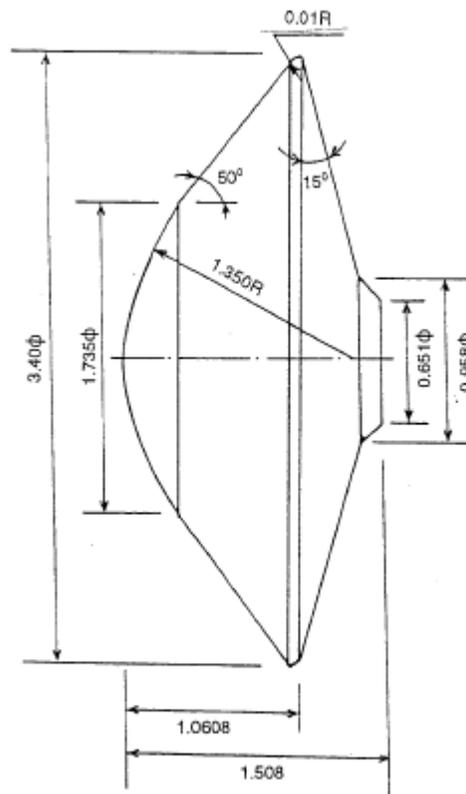


Fig. 5

*Perfil axisimétrico propuesto en el proyecto OREX. Básicamente consta de una esfera trunca y dos conos truncos contrapuestos y suavizados de bordes.*

Las geometrías que se han estudiado fuertemente son el cono esfera. Es decir un cono de cierto ángulo con la punta en forma de esfera. También es común encontrar formas como elipses achatadas u ojivas. Las coordenadas que localizan los principales puntos en el cono esfera son las siguientes:

$$x_t = \frac{L^2}{R} \sqrt{\frac{r_n^2}{R^2 + L^2}} \quad (5)$$

$$y_t = \frac{x_t R}{L} \quad (6)$$

$$x_0 = x_t + \sqrt{r_n^2 + r_t^2} \quad (7)$$

$$x_a = x_0 - r_n \quad (8)$$

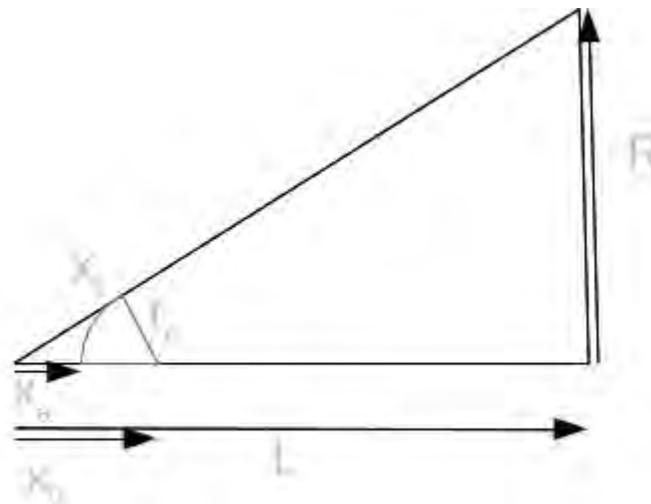


Fig. 6  
Esquema del perfil cono esfera y sus principales coordenadas.

### III Antecedentes Fundamentales de Flujo Compresible

#### 3.1 Ondas de Choque

En los fluidos compresibles la información de una propiedad dada se transmite al medio a través de ondas acústicas de presión, estas viajan a la velocidad del sonido [2]. Cuando el flujo se mueve con una velocidad superior a esta, entonces el medio no es capaz de captar la información inmediatamente y por lo tanto las ondas de presión tienden a acumularse en una región del medio hasta colapsar, dando lugar a una onda de choque. El efecto de este fenómeno provoca un aumento abrupto en las propiedades del medio y una disminución de la velocidad. Las ondas de choque también tienen relevancia en aviones militares donde la disminución del ruido es indispensable para condiciones de detectabilidad y cumplimiento de la normatividad internacional. Otro caso donde los choques aparecen, es en el pistón de un motor de combustión. Estos son algunos ejemplos de las áreas de interés de las investigaciones científicas sobre las ondas de choque.

El efecto de estas discontinuidades sobre el flujo es desviar las líneas de corriente a un mismo ángulo de deflexión. Aumentando las propiedades como la presión y la temperatura de forma drástica e inesperada y al mismo tiempo reduciendo la velocidad. Si el número de Mach es menor a la unidad después de pasar por la onda de choque entonces se dice que el choque es de tipo fuerte. En el presente trabajo sólo se predicen choques de tipo débil, es decir  $Ma < 1$ .

Considerando una zona cerca del borde de una cuña, cada partícula va cambiando de dirección ligeramente y al chocar con la cuña esta emite una onda de presión de manera continua, esta información viaja por el medio y perturba al resto de las partículas para ajustar su velocidad. Una vez que estas ondas se propagan para cada partícula, existirá una superficie donde todas las ondas de presión se colapsan tal como se muestra en Fig. 7.

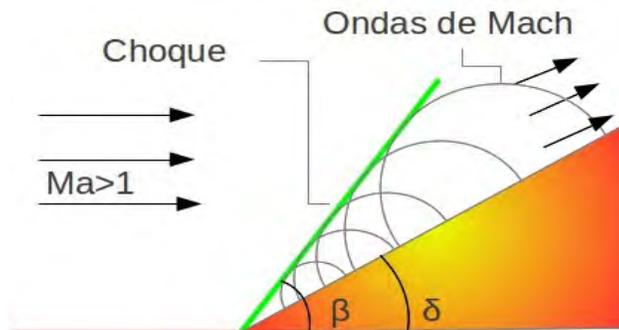


Fig. 7

***Choque oblicuo sobre una pared,  $\beta$  es el ángulo de onda y  $\delta$  es el ángulo de desviación. Movimiento de algunas de las ondas acústicas en analogía con el cono de Mach.***

El flujo supersónico sobre una cuña es la típica configuración que se analiza en la literatura de la dinámica de gases Fig. 7. En el estado 1 (aguas arriba) el flujo es supersónico con  $M > 1$  y las propiedades son conocidas. En el momento en que el flujo se encuentra con la cuña, se ve obligado a cambiar de dirección abruptamente y se genera una onda de choque oblicua. Como el flujo es informado demasiado tarde por las ondas acústicas, no se percata de la presencia de la cuña y el flujo choca consigo mismo, creando un aumento de presión, de temperatura y densidad. Esto significa que la onda de choque es la pequeña región que divide al flujo perturbado de aquel que no está perturbado. El flujo que se obtiene después del choque está desacelerado. El ángulo de inclinación de la onda de choque está asociado al número de Mach en la corriente libre, a la razón de compresión y principalmente al ángulo de la cuña

Cabe decir que existe un ángulo teórico de la cuña para el cual la onda de choque es de esta naturaleza y la solución se encuentra resolviendo la ecuación (9):

$$M_2^2 \sin(\beta - \delta) = \frac{1 + \gamma M_1^2 \sin^2 \beta}{\frac{2}{\gamma - 1} M_1^2 \sin^2(\beta - \delta)} \quad (9)$$

Cuando el ángulo del cuerpo o de la cuña es mayor a aquel señalado por la ecuación (9) entonces la onda de choque cambia de forma y su comportamiento es diferente. En este caso surge una onda de choque de forma curva y des-adjunta. La naturaleza curva de la onda de choque se muestra en Fig. 9 donde la curvatura es debido a que cerca de las fronteras del cuerpo el flujo debe disminuir violentamente su velocidad ya que está obligado a satisfacer la condición de no-deslizamiento y la onda de choque justamente enfrente del cuerpo debe ser lo más parecido a una onda de choque normal, es decir más intensa. Mientras nos alejamos de cuerpo, la ley de no deslizamiento ya no obliga al flujo a disminuir su velocidad severamente y la onda de choque será menos severa, tal como una de tipo oblicuo, que también disminuye la velocidad pero de manera más gradual. La distancia de la onda de choque al cuerpo está regida principalmente por la forma geométrica del cuerpo

### 3.2 Expansiones y flujo de Prandtl-Meyer

Una expansión es el fenómeno contrario a las ondas de choque, y es provocado por un cambio drástico en la dirección de la geometría, tal como un borde afilado Fig. 8. Estas ondas se manifiestan en un abanico de ondas que desvían las líneas de corriente lejos de la misma. Tal fenómeno afecta las propiedades de manera gradual y continua, disminuyendo la presión, densidad y temperatura, a la vez que aumenta la velocidad. Podemos tener la idea de un abanico de ondas, sólo tomando un Mach cada vez mayor en la ecuación de Mach ( $\text{Sen}(1/M^2)=\alpha$ ), es decir, el inverso del Mach se hará cada vez más pequeño y por lo tanto el ángulo de onda  $\alpha$  en Fig. 8 disminuirá hasta hacerse un valor cercano a cero. Aquel flujo que contiene estos tipos de fenómenos es el bien conocido flujo de Prandtl-Meyer. El ejemplo más estudiado de este flujo es cuando el fluido es desviado en dirección convergente, respecto a la dirección de la corriente no perturbada como se muestra en Fig. 8.

Del análisis básico unidimensional y bidimensional del flujo potencial surge una solución para el flujo después de la onda de choque. A esta fórmula se le conoce como la ecuación de Prandtl-Meyer (10).

$$\theta = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (Ma^2+1)} + \arctan \sqrt{Ma^2-1} + C \quad (10)$$

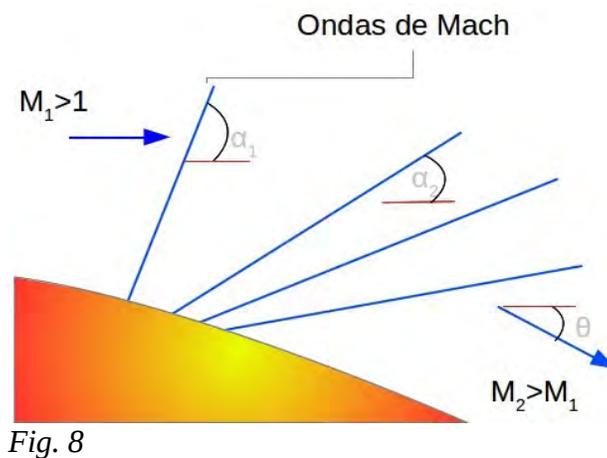


Fig. 8

***Acercamiento de un borde afilado donde se muestran las expansiones de ondas acústicas en el flujo conocido como flujo de Prandtl-Meyer (Abanico de expansión).***

### 3.3 Características de las ondas de choque curvadas

En la Fig. 9 se muestra un esquema arbitrario de una onda de choque des-adjunta sobre un cuerpo romo. Las principales características de una onda de choque curvada y des-adjunta son: la forma de la onda de choque o superficie de la choque, la distancia del cuerpo a la onda de choque, la zona subsónica, la zona transónica y supersónica.

La forma de la superficie se ha investigado tanto analítica como experimentalmente y recientemente con el aumento de la velocidad de cálculo de las computadoras, de manera numérica. La teoría nos dice que la forma depende más bien de dos parámetros: la geometría del cuerpo y del número de Mach en la corriente no perturbada es decir:

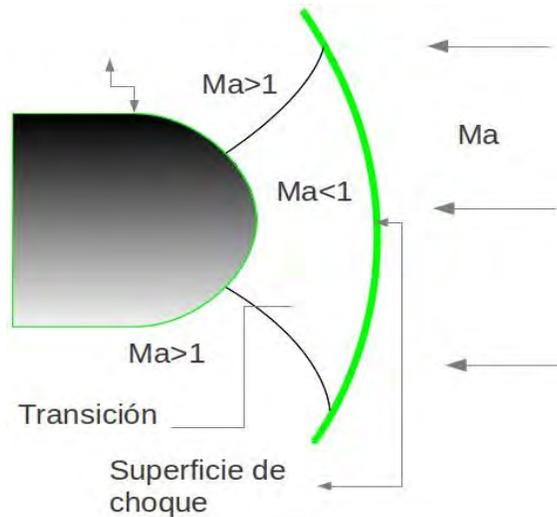


Fig. 9

Esquema de zonas en un choque supersónico sobre un cuerpo romo.

$$W = P(B, M_\infty) \quad (11)$$

Donde  $B$  es el parámetro que define que tipo de geometría estamos hablando. La forma de la función  $P$  es altamente no lineal y tratando de investigar su naturaleza mediante experimentación se ha llegado a la conclusión que  $W$  es débilmente dependiente de  $B$ , es decir que un cambio considerable en la geometría del cuerpo provocaría un pequeño cambio en la superficie de choque. Por el otro lado cuando el número de Mach tiende a infinito  $W$  mantiene una forma constante. Existen algunos métodos para resolver el campo de flujo basados en la forma de la superficie de choque, tal como la *solución inversa*. Sin embargo es frecuente encontrar que dichas soluciones obtenidas tienen una inconsistencia con las condiciones de frontera, lo cual demuestra la naturaleza compleja de la función  $P$ . Cualquier pequeña desviación de la superficie considerada para la solución, provocaría un campo de flujo considerablemente distinto ya que la familia de generatrices geométricas para  $W$  es amplia.

Entre los parámetros medibles de la superficie de choque se encuentra el radio de curvatura  $r_s$  y frecuentemente se divide entre la distancia entre la onda y el cuerpo.

Considerando un cono de semiángulo  $\theta(M_\infty)$ , tangente al cuerpo romo, con  $\delta$  que es la distancia del vértice del cono al cuerpo, podemos encontrar que la relación:

$$k(M_\infty) = \frac{\Delta}{\delta} \quad (12)$$

La relación (12) depende sólo de  $M$ ,  $\Delta$  la cual es la distancia entre la superficie de choque y el cuerpo.

### 3.4 Entropía de una onda de choque

Una onda de choque de cualquier tipo desempeña un proceso altamente irreversible, y puesto que no es posible erradicar su generación, sería útil saber el lugar en el espacio donde se hace máxima. Hablando específicamente del cambio de Entropía en un flujo supersónico sobre un cuerpo romo. Se ha demostrado de manera numérica que la entropía es máxima en la nariz del cuerpo romo, esto es, donde las líneas de corriente son normales a la superficie de choque. Sin embargo existe ciertas investigaciones que pueden contraindicar esto último, y en ese sentido este trabajo tratará de investigar y aportar información que pueda auxiliar a este tópico no resultado. Cabe mencionar que los esfuerzos viscosos en la superficie del cuerpo, debido a los efectos de la capa límite, son muy grandes y aseverar que la entropía puede aumentar o disminuir es una tarea difícil, aun cuando la velocidad sea nula.

### 3.5 Zona Sónica y Transónica

La zona sónica es una superficie que se forma justamente frente al cuerpo con  $M = 1$ . Esta formación depende de la forma de la punta del cuerpo, del cuerpo mismo y del número de Mach en la corriente no perturbada  $M_\infty$ . Debido a la condición de no deslizamiento que exige al flujo a disminuir su velocidad antes de llegar al cuerpo romo es necesario que exista una superficie en la cual el flujo sea sónico  $M=1$ . Cuando la línea sónica está presente entre el cuerpo y entre la superficie de choque, es decir si  $M < 1$ , entonces se puede clasificar a la superficie de choque como fuerte. La principal variable para que un choque fuerte tenga lugar en el flujo es la relación de presiones antes y después de la onda.

La zona de transición es una zona de una complejidad inigualable en el cuerpo romo. Hablar de la transición implica que no existe, a pesar de muchos esfuerzos a través de los años, una descripción consistente de lo que una zona transónica es, no sólo en el flujo compresible sino en cualquier flujo. Este trabajo no se sumergirá en detalles especializados, ya que no es ese el objetivo. Sin embargo por ser una zona que se le debe mencionar podemos decir que la zona transónica surge debido a perturbaciones en el flujo que se van propagando de un lugar a otro en el espacio y su mecanismo no ha sido comprendido todavía bien. Una perturbación también puede transmitirse en el tiempo ya sea en el mismo lugar o en otro y a su vez puede perturbar a otra zona.

La zona transónica es la parte donde el flujo se va convirtiendo desde subsónico hasta supersónico o viceversa. La forma de esta zona ha sido ampliamente estudiada y no necesariamente sus resultados coinciden. Sin embargo existen algunos parámetros que pueden indicar de manera aproximada la forma de la zona transónica. La relación reportada y que coinciden entre varios autores es el número de Mach paramétrico  $M(\gamma)$  el cual puede ser comparado con  $M_\infty$  y es definido como

$$M_0(\gamma) = \sqrt{\frac{\gamma^2 + 4\gamma + 5}{\gamma + 3}} \quad (13)$$

Algunos otros métodos se han establecido para saber la forma de esta zona tales como es el ángulo de

la zona sónica y la velocidad que está cruzando. Sin embargo aún después de innumerables esfuerzos de los investigadores puede considerarse a la zona transónica como un problema no resuelto.

En geometrías tales como cubos u otras que tengan bordes afilados se generan expansiones. Estas expansiones enfrían el flujo y lo aceleran tanto en flujo supersónico como en hipersónico. Posteriormente cuando el flujo atraviesa este fenómeno puede existir una recompresión del flujo ya que se puede presentar una onda de choque que sale desde la superficie del cuerpo.

En la estela turbulenta del cuerpo existe una disminución de la sección transversal del flujo, y tiene cierta analogía como una tobera. En caso de que la turbulencia sea supersónica, entonces el flujo empezará a aumentar su presión y una onda de choque se generará desde la estela, al igual como en la analogía con una tobera cuando se genera una onda de choque debido a la desviación del flujo Fig. 7. Estas ondas de choque, puede ser una o varias dependiendo de la intensidad del  $M_\infty$ , que emergen de la estela turbulenta y tienden a un ángulo de Mach  $\theta$  de acuerdo a [12].

### 3.7 El método de las características

El método de las características [2] es un método matemático aplicado principalmente a flujos compresibles, aquí no se desarrollará con rigurosidad el procedimiento, para ello se puede consultar las referencias en el apéndice si el lector está interesado. El método de las características funciona bajo la propiedad de que la derivada de la propiedad en una línea o región está indeterminada. Es decir en una región del flujo bajo la cual existe una discontinuidad. Su interpretación física es que una línea característica es similar a una onda que genera una discontinuidad ya sea una onda de choque o una onda acústica (onda de Mach) Fig. 7, en donde las propiedades no pueden ser evaluadas y su derivada está indeterminada. Es decir estas líneas se ven como la trayectoria de las perturbaciones que padece un flujo.

En la región donde existe la discontinuidad, generalmente una porción del espacio semejante a una línea, se puede considerar que los efectos viscosos son despreciables. Las ecuaciones de los fluidos se reducen a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, denominadas ecuaciones de compatibilidad, y que además pueden ser integradas numéricamente. De flujo potencial se obtiene

$$\left[1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2\right] U_{xx} + \left[\frac{-2uv}{a^2}\right] U_{xy} + \left[1 - \left(\frac{v}{a}\right)^2\right] U_{yy} = 0 \quad (14)$$

Y después de hacer álgebra podemos arreglar de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx_{car}} = \frac{\frac{-uv}{a^2} \pm \sqrt{Ma^2 - 1}}{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2} \quad (15)$$

En la ecuación (15) si el flujo es supersónico existen dos soluciones reales y la ecuación es hiperbólica. En el caso de que el flujo sea subsónico existen dos soluciones imaginarias donde la ecuación es de tipo elíptica y en el caso donde  $Ma=1$  la ecuación es parabólica. Luego de un gran trabajo de álgebra se puede demostrar que:

$$\frac{dy}{dx_{car}} = \tan(\delta \pm \alpha) \quad (16)$$

El método de las características está pensado para ser usado sobre una línea donde las propiedades no cambian con la longitud. En caso de que las propiedades del flujo sean variables, incluso en la línea característica, tal como en flujos axisimétricos no se deberá aplicar el método.

Para un flujo supersónico se demuestra que la relación (17) es válida sobre una línea.

$$\delta_1 \pm v(M_1) = \delta_2 \pm v(M_2) \quad (17)$$

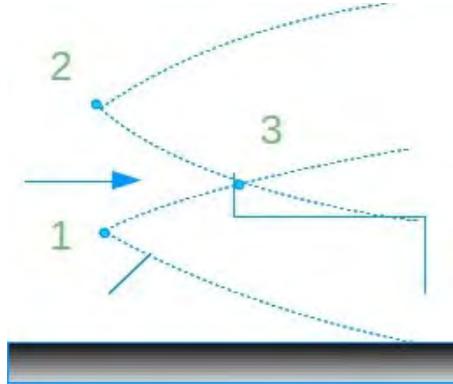


Fig. 10

***Esquema de las líneas características con sus dos posibles soluciones para cada una. La intersección de ambas asegura la posibilidad del estado 3***

Para resolver el flujo aguas abajo de la onda, se debe conocer al menos las propiedades de dos estados aguas arriba de la onda. Esto generará dos ondas características con pendiente positiva y negativa del flujo respectivamente. Entonces es posible localizar un punto donde las líneas se interconectan y además cae en el estado desconocido, aguas abajo de la onda. Esto se ve en la Fig. 10

El hecho de que existan dos líneas características que se cruzan, indica que las propiedades del estado 3 pueden ser calculadas como función de los estados 1 y 2.

La relación matemática de lo anterior se expresa por medio de (17) de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \delta_1 + v(M_1) &= \delta_3 + v(M_3) \\ \delta_2 - v(M_2) &= \delta_3 - v(M_3) \end{aligned} \quad (18)$$

Donde se expresa la pendiente negativa de la línea característica del estado 2.  $\theta$  es el ángulo de desviación del flujo que es conocido y  $v$  es el ángulo de Prandtl - Meyer para cada estado. En algunos casos  $v$  es función del número de Mach y está dado por la expresión para flujo de Prandtl- Meyer (19) y físicamente representa el ángulo de expansión del flujo cuando acelera y  $\alpha$  es el ángulo de Mach y está dado por la ecuación (10).

$$v = K \tan^{-1} \left( \cot \frac{\alpha}{K} \right) - \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (19)$$

Puesto que se conocen los estados dos y tres, esto es:  $\theta_1$  y  $v_1$  así como también  $\theta_2$  y  $v_2$  se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas en (18) y se puede conocer tanto  $\theta_3$  como  $v_3$ . Como consecuencia es posible obtener el número de Mach por medio de (19) y con ello de tablas para flujo isentrópico todas las propiedades pueden ser conocidas.

Cabe decir que este método descrito anteriormente es sólo aplicable a discontinuidades o rarefacciones donde se asegure que los gradientes y sus propiedades pueden mantenerse constantes a lo largo de líneas, o curvas en el caso más general. Debido a esta restricción no es posible aplicarlo en zonas alejadas de la onda de choque y precisamente por esto su aplicación en la aeronáutica ha venido disminuyendo. Sin embargo, ya en la práctica todos los métodos, pueden auxiliar y proporcionar resultados útiles e inmediatos a algún problema con choques supersónicos y expansiones.

### 3.8 Transición de la capa límite.

Al inicio cuando el flujo se percata de que existe un cuerpo, se genera una reducción de la velocidad y todo un perfil dentro de la capa límite se forma para cumplir con la exigencia de la condición de no deslizamiento en la superficie del cuerpo. A bajos números de Reynolds la capa límite se mantiene laminar sobre una gran distancia sin embargo cuando el Reynolds aumenta la capa límite comienza a perturbarse hasta que finalmente entra en una etapa de transición hasta llegar a ser turbulenta.

La naturaleza del mecanismo de la transición de la capa límite no es aún bien comprendida, sin embargo estudios experimentales y numéricos han hecho el esfuerzo por establecer un número de Reynolds al cual la transición comienza en determinada posición. Se ha demostrado que este es sensible a las perturbaciones acústicas que se presentan en el flujo.

Las perturbaciones que pueden desprender la capa límite son los gradientes de temperatura en la superficie ya que los gradientes grandes disminuyen el espesor de la capa límite y retrasan la transición. Otra forma de perturbación puede ser el gradiente adverso de presión, es decir la presión es capaz de perturbar el perfil de velocidad de la capa generando un flujo caótico que facilitará la transición. También se ha encontrado que las ondas acústicas de Mach pueden generar un aumento intensivo de las perturbaciones del flujo. Por último la rugosidad de la superficie también puede perturbar a la capa límite.

Teniendo en cuenta lo anterior mientras exista una zona de transición retrasada, el coeficiente de arrastre es menor que aquel generado por una capa límite turbulenta. Esto último es importante para el diseño eficiente de un vehículo a alta velocidad.

### 3.9 Arrastre de Onda

El arrastre de onda se genera desde el punto de vista del volumen de control por un desbalance en la cantidad de movimiento a causa de que cuando el flujo atraviesa la onda de choque disminuye su velocidad lo suficientemente como para contrarrestar la caída de densidad. Considerando un volumen de control, se puede demostrar que el flujo que atraviesa primero la onda de choque y posteriormente el cuerpo llega a estar en equilibrio con las fuerzas de presión (condición de equilibrio). Sin embargo existe una diferencia de momentum en la salida del volumen de control.

La expresión para la fuerza de arrastre de onda que es opuesta al movimiento del cuerpo se puede escribir como:

$$D \alpha (\rho_\infty v_\infty^2 - \rho_2 v_2^2) \quad (20)$$

# Capítulo II

Ecuaciones de Gobierno de los Fluidos

## 2.1 Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de gobierno en coordenadas cartesianas pueden ser escritas en su forma conservativa para flujo compresible y Newtoniano en forma adimensionalizada (21):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = S \quad (21)$$

El primer término de la izquierda es el término temporal y el siguiente término es la divergencia de los flujos expresada en notación indicial  $i=1,2,3$ .  $S$  corresponde al término fuente y en este caso es nulo. La expresión (21) significa que los cambios temporales y los espaciales son producidos por una fuente o perturbación en el fluido tal como un gradiente de presión. El vector  $U$  es definido como:

$$U = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho e)^T \quad (22)$$

Donde  $\rho$  es la densidad, y el vector velocidad se expresa de la siguiente manera:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w) \quad (23)$$

La energía  $\rho e$  es la energía que posee el fluido tal como la energía cinética (asociada al campo de velocidad) y la energía interna (asociada a la temperatura) (24)

$$\rho e = \frac{\rho T}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \gamma M^2 (u^2 + v^2 + w^2) \quad (24)$$

Donde  $\gamma$  es el índice adiabático para el aire. Los flujos que están expresados en forma adimensional (25) son:

$$F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \frac{p}{\gamma M^2} \delta_{i1} - \frac{2\mu}{Re} S_{i1} \\ \rho u_2 u_i + \frac{p}{\gamma M^2} \delta_{i2} - \frac{2\mu}{Re} S_{i2} \\ \rho u_3 u_i + \frac{p}{\gamma M^2} \delta_{i3} - \frac{2\mu}{Re} S_{i3} \\ (\rho e + p) u_i - \frac{2\mu \gamma M^2}{Re} u_j S_{ij} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k}{Re Pr} \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Las componentes del vector  $F$  de (25) representan a las ecuaciones de continuidad, momentum x, momentum y, momentum z, y ecuación de la energía. Para las ecuaciones de momentum los primeros términos de la izquierda son los convectivos, el siguiente término es el gradiente de presión y el último de la derecha es el término difusivo y en el caso de la ecuación de energía el primero de la izquierda representa el término convectivo y la energía de la entalpía, el siguiente es el trabajo viscoso y el último a la derecha está la transferencia de calor. La conductividad térmica es  $k$ .  $S_{ij}$  es el tensor de deformación

que está expresado en notación indicial de la siguiente manera:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij} \right) \quad (26)$$

La viscosidad molecular está dada por la fórmula empírica de Sutherland en función de la temperatura.

$$\mu(T) = \mu(T)_{ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 + \frac{S_f}{T_{ref}}}{1 + \frac{S_f}{T}} \right) \quad (27)$$

De la ecuación (27)  $S_f$  es un parámetro que depende del fluido. Las ecuaciones de los gases ideales en forma adimensional es:

$$p = \rho T \quad (28)$$

Para realizar la adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes se ha utilizado cantidades de referencia constantes las cuales convierten a las variables en cantidades universales y prácticas para hacer comparaciones experimentales.

Las velocidades adimensionales  $u, v, w$  están referidas a las velocidades de descarga de la tobera del chorro  $u_0$  donde  $\tilde{u}$  es la velocidad instantánea con dimensiones  $m/s$ .

$$u = \frac{\tilde{u}}{u_0}; v = \frac{\tilde{v}}{u_0}; w = \frac{\tilde{w}}{u_0} \quad (29)$$

Las variables  $p, T, \rho$  están adimensionalizadas respecto a las propiedades correspondientes al momento en que el chorro sale de la tobera  $p_0, T_0, \rho_0$  siendo  $\tilde{p}, \tilde{T}, \tilde{\rho}$  variables instantáneas con dimensiones.

$$p = \frac{\tilde{p}}{p_0}; T = \frac{\tilde{T}}{T_0}; \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}; \quad (30)$$

Las coordenadas espaciales están adimensionalizadas con el diámetro de la tobera  $D$ .

$$x = \frac{\tilde{x}}{D}; y = \frac{\tilde{y}}{D}; z = \frac{\tilde{z}}{D}; \quad (31)$$

El número de Mach aun cuando es adimensional, se adimensiona respecto al número de Mach que el chorro tiene a la salida de la tobera  $M_0$ . La doble igualdad se escribe como:

$$M = \frac{\tilde{M}}{M_0} = \frac{u}{\sqrt{T}} \quad (32)$$

La energía del fluido  $\rho e$  se adimensiona respecto a la presión de referencia  $p_0$ . De esta manera se puede escribir la igualdad:

$$\rho e = \frac{\tilde{\rho} e}{p_0} \quad (33)$$

En el caso de tiempo adimensional  $t$  se puede adimensionalizar con una velocidad de referencia y un diámetro de referencia.

$$t = \tilde{t} \frac{u_0}{D} \quad (34)$$

De la sustitución de las ecuaciones (29)-(34) en las ecuaciones de Navier-Stokes y de gas ideal podemos deducir las ecuaciones (21)-(26) en su forma adimensional y los números adimensionales se pueden agrupar de la siguiente manera:

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 D}{\mu_0}; Pr = \frac{\nu_0}{\alpha_0} \quad (35)$$

## 2.2 Esquemas compactos

Para obtener las derivadas espaciales de cada una de las expresiones de (21) y (25) es necesario usar esquemas compactos para minimizar el error que se obtiene de la discretización de una función  $\varphi$  y con ello mejorar la estabilidad de la solución en el modelo de turbulencia.

La discretización de escalas de alto orden necesita una gran cantidad de puntos, lo que nos lleva a utilizar una gran cantidad de valores para las derivadas. Para una derivada de orden dos necesitamos los valores de dos puntos, para las derivadas de orden cuatro necesitamos los valores para ocho puntos y así sucesivamente, esto nos genera un alto costo de memoria y tiempo computacional.

Los esquemas compactos utilizan los nodos de todo el dominio en una dirección y se resuelven simultáneamente exceptuando las condiciones de frontera. Con ello las variables en un nodo dependen del valor del resto de las variables.

La forma de los esquemas depende básicamente del orden de las derivadas, y en este caso se usarán esquemas de sexto orden con forma tri-diagonal. Esto se resume en la expresión (36)

$$\alpha \varphi'_{i-1} + \varphi' + \alpha \varphi'_{i+1} = b \frac{\varphi_{i+2} - \varphi_{i-2}}{4 \Delta x} + a \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (36)$$

Donde  $a$  y  $b$  son constantes que dependen del orden del esquema  $\Delta x$  es el espaciamiento entre nodos  $x$  y es constante. De la expresión (36) se genera un sistema de ecuaciones lineales simultáneas cuya diagonal principal es 1 y la diagonal superior y la inferior son  $\alpha$ . El resto de los elementos de la matriz son ceros. Los otros dos términos del lado derecho de la igualdad son el término independiente y su valor varía de acuerdo a los valores de la propiedad  $\varphi$  (una función cualquiera) en cada nodo. Observe la forma de diferencia centrada del término independiente ya que esta forma le resta difusividad numérica al esquema y es por ello que puede presentar mayor inestabilidad que los métodos comunes de diferencias finitas.

La expresión comienza en el nodo  $i=3$  y termina en el nodo  $n-2$  ( $n$  es el último nodo del dominio) ya que las fronteras deben calcularse con valores de la frontera y el esquema por su propia naturaleza está

incapacitado.

Iniciando con el nodo  $i=1$  tenemos la expresión

$$\varphi'_1 + \alpha_1 \varphi'_2 = \frac{1}{\Delta x} (a_1 \varphi_1 + b_1 \varphi_2 + c_1 \varphi_3 + d_1 \varphi_4 + e_1 \varphi_5) \quad (37)$$

Posteriormente para el nodo  $i=2$  tenemos la expresión

$$\alpha_2 \varphi'_1 + \varphi'_2 + \alpha_2 \varphi'_3 = \frac{1}{\Delta x} (a_2 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + c_2 \varphi_3 + d_2 \varphi_4 + e_2 \varphi_5) \quad (38)$$

De manera similar para el último nodo  $n$  los valores en la frontera deben ser calculados con diferencias de un sólo lado, esto es:

$$\alpha_n \varphi'_{n-1} + \varphi'_n = \frac{1}{\Delta x} (a_n \varphi_n + b_n \varphi_{n-1} + c_n \varphi_{n-2} + d_n \varphi_{n-3} + e_n \varphi_{n-4}) \quad (39)$$

En cuanto al nodo  $n-1$  la expresión de un sólo lado es la siguiente:

$$\alpha_{n-1} \varphi'_{n-2} + \varphi'_{n-1} + \alpha_{n-2} \varphi'_n = \frac{1}{\Delta x} (a_{n-1} \varphi_n + b_{n-1} \varphi_{n-1} + c_{n-1} \varphi_{n-2} + d_{n-1} \varphi_{n-3} + e_{n-1} \varphi_{n-4}) \quad (40)$$

Los coeficientes para las expresiones de un sólo lado son:

Utilizando entonces las expresiones (36), (37), (38), (39), (40) podemos escribir un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas donde las incógnitas son las derivadas de la función a tratar. Esto anterior se desglosa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha & 1 & \alpha & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} a_1 \varphi_1 + b_1 \varphi_2 + c_1 \varphi_3 + d_1 \varphi_4 + e_1 \varphi_5 \\ a_2 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + c_2 \varphi_3 + d_2 \varphi_4 + e_2 \varphi_5 \\ \frac{b}{4} (\varphi_{3+2} - \varphi_{3-2}) + \frac{a}{2} (\varphi_{3+1} - \varphi_{3-1}) \\ \vdots \\ a_{n-1} \varphi_n + b_{n-1} \varphi_{n-1} + c_{n-1} \varphi_{n-2} + d_{n-1} \varphi_{n-3} + e_{n-1} \varphi_{n-4} \\ a_n \varphi_n + b_n \varphi_{n-1} + c_n \varphi_{n-2} + d_n \varphi_{n-3} + e_n \varphi_{n-4} \end{pmatrix} \quad (41)$$

La solución para el sistema (41) se puede encontrar con el método de la matriz tri-diagonal resolviendo el vector solución de derivadas e invirtiendo la matriz de coeficientes. Es importante notar que el término independiente es aquel que está asociado al valor de la propiedad  $\varphi$  y depende de los valores vecinos al nodo y su valor está fuertemente influenciado por las condiciones de frontera en los nodos. El valor de estas condiciones de frontera deben ser impuestas de manera física en lugar de establecerlas con las ecuaciones (37)-(40) y estas pueden ser constantes o variables con el dominio, estas últimas son las utilizadas.

Los valores de las constantes para el esquema de sexto orden son:

$$a_1 = -17/6; b_1 = 3/2; c_1 = 3/2; d_1 = -1/6; e_1 = 0; \alpha_1 = 3; \alpha = 1/3; a = 14/9; b = 1/9 \quad (42)$$

$$\alpha_n = \alpha_1; a_n = -a_1; b_n = -b_1; c_n = -c_1; d_n = -d_1; e_n = -e_1 \quad (43)$$

$$\alpha_{n-1} = \alpha_2; a_{n-1} = -a_2; b_{n-1} = -b_2; c_{n-1} = -c_2; d_{n-1} = -d_2; e_{n-1} = -e_2 \quad (44)$$

### 2.3 Filtro Matemático

Las inestabilidades numéricas provenientes de la discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes son provocadas entre otras cosas, por la complejidad de los fenómenos físicos, las condiciones de frontera y la no linealidad del flujo. El esquema compacto de diferencias finitas tiene una susceptibilidad a dichas inestabilidades, de acuerdo a su semejanza a las diferencias finitas centradas, por ello es necesario utilizar un filtro matemático que tenga capacidad de mantener la precisión del cálculo de la solución y a su vez disipar las perturbaciones numéricas surgidas.

Es conveniente utilizar un filtro matemático con arquitectura tri-diagonal en conjunto con los esquemas compactos que también son tri-diagonales. Teniendo una función  $\phi$  proveniente de la solución directa de las ecuaciones de Navier-Stokes, podemos encontrar su función filtrada  $\Psi$  resolviendo el siguiente sistema tri-diagonal para un esquema de sexto orden.

$$\alpha_f \Psi_{i-1} + \Psi_i + \alpha_f \Psi_{i+1} = a_0 \phi_i + \frac{a_1}{2} (\phi_{i-1} + \phi_{i+1}) + \frac{a_2}{2} (\phi_{i-2} + \phi_{i+2}) + \frac{a_3}{2} (\phi_{i-3} + \phi_{i+3}) \quad (45)$$

Los coeficientes de los términos independientes y de la matriz de coeficientes se obtienen por la expansión de series de Taylor. Esto es:

$$a_0 = \frac{11}{16} + \frac{5}{8} \alpha_f; a_1 = \frac{15}{32} + \frac{17}{16} \alpha_f; a_2 = \frac{-3}{16} + \frac{3}{8} \alpha_f; a_3 = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} \alpha_f; \quad (46)$$

La constante  $\alpha_f$  debe encontrarse entre -0.5 o 0.5 para asegurar la convergencia del sistema de ecuaciones lineales. Se sugieren altos valores de  $\alpha_f$  para obtener una baja disipación, sin embargo de acuerdo a [8] por medio de experiencia numérica valores entre 0.3 y 0.5 son apropiados, aunque para mallas que tienen poca resolución se utiliza un valor menor a 0.1.

En el caso de las fronteras, es decir para los nodos 1, 2, 3 y 4 así como n-4, n-3, n-2, n-1 y n la ecuación (45) es incapaz de calcular el término independiente de sistema tri-diagonal y la función filtrada  $\Psi$  debe de calcularse de otra manera, similar a aquella de los esquemas compactos. En estos puntos frontera el filtrado es menos disipativo y para las condiciones de frontera generaría inestabilidades. Para ellos las ecuaciones que se deben usar para formar un sistema tri-diagonal es:

$$\alpha_f \Psi_{i-1} + \Psi_i + \alpha_f \Psi_{i+1} = a_{n,i} \phi_n + a_{n-1,i} \phi_{n-1} + a_{n-2,i} \phi_{n-2} + a_{n-3,i} \phi_{n-3} + a_{n-4,i} \phi_{n-4} + a_{n-5,i} \phi_{n-5} + a_{n-i} \quad (47)$$

Este filtrado debe ser aplicado a cada uno de los ejes coordenado y después del método explícito de Runge-Kutta una vez por iteración y no en los subpasos ya que esto presentaría una disipación excesiva y ficticia.

## 2.4 Simulación de Grandes Escalas

El modelo de turbulencia de grandes escalas (LES) modela las grandes escalas de la turbulencia del flujo, y las pequeñas son filtradas de tal manera que estas influyan en el movimiento de las grandes y a la vez queden fuera. Esto lo logra por la aplicación del filtro de convolución a las ecuaciones de Navier-Stokes. Así todas aquellas escalas filtradas son anuladas y el resto son calculadas.

La convolución se define como:

$$\bar{f}(x,t) = \int \bar{f}(y,t) G_{\Delta}(x-y) dy \quad (48)$$

Donde  $\Delta$  es el tamaño del filtro. La función sub-malla es la desviación respecto a la variable filtrada respecto a la variable instantánea. Esto es:

$$f(x,t) = \bar{f}(x,t) + f'(x,t) \quad (49)$$

Aplicando el filtro (49) a las ecuaciones de Navier-Stokes (21)-(28) obtenemos:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial x_3} = 0 \quad (50)$$

$$\bar{\rho e} = \frac{\bar{\rho T}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \gamma M_0^2 \overline{(u^2 + v^2 + w^2)} \quad (51)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho T} \quad (52)$$

Definiendo al promedio de Favre como el campo filtrado sobre el instantáneo:

$$\tilde{f} = \frac{\bar{\rho f}}{f} \quad (53)$$

$$\bar{U} = (\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{u}_1, \bar{\rho} \tilde{u}_2, \bar{\rho} \tilde{u}_3, \bar{\rho} \tilde{e})^T \quad (54)$$

La energía total se escribe como:

$$\bar{\rho e} = \frac{\bar{\rho} \tilde{T}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \gamma M^2 \overline{\rho (u^2 + v^2 + w^2)} \quad (55)$$

Y los flujos pueden expresarse como:

$$\tilde{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho u}_i \\ \bar{\rho u}_1 u_i + \frac{\bar{p}}{\gamma M^2} \delta_{i1} - \frac{2\mu}{Re} \bar{S}_{i1} \\ \bar{\rho u}_2 u_i + \frac{\bar{p}}{\gamma M^2} \delta_{i2} - \frac{2\mu}{Re} \bar{S}_{i2} \\ \bar{\rho u}_3 u_i + \frac{\bar{p}}{\gamma M^2} \delta_{i3} - \frac{2\mu}{Re} \bar{S}_{i3} \\ \overline{(\rho e + p) u_i} - \frac{2\mu \gamma M^2}{Re} \overline{u_j S_{ij}} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k}{Re Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (56)$$

Con las ecuaciones de estado filtrada:

$$\bar{p} = \bar{\rho} \tilde{T} \quad (57)$$

Utilizando la usual nomenclatura de tensor de esfuerzos sub-malla  $\tau$  con componentes

$$\tau_{ij} = -\bar{\rho} \overline{u_i u_j} + \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (58)$$

Dividiendo el tensor de esfuerzos sub-malla en su parte deviatorica e isotópica podemos escribir la igualdad:

$$\tau_{ij} = \underbrace{\tau_{ij}}_{\tau_{ij}} - \frac{1}{3} \tau_{ll} \delta_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{ll} \delta_{ij} \quad (59)$$

Las ecuaciones (56) pueden en leerse como:

$$\tilde{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \bar{\rho} \tilde{u}_1 \tilde{u}_i + \frac{\bar{p} - \frac{1}{3} \tau_{ll}}{\gamma M^2} \delta_{i1} - \tau_{i1} - \frac{2\mu}{Re} \overline{S_{i1}} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_2 \tilde{u}_i + \frac{\bar{p} - \frac{1}{3} \tau_{ll}}{\gamma M^2} \delta_{i2} - \tau_{i2} - \frac{2\mu}{Re} \overline{S_{i2}} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_3 \tilde{u}_i + \frac{\bar{p} - \frac{1}{3} \tau_{ll}}{\gamma M^2} \delta_{i3} - \tau_{i3} - \frac{2\mu}{Re} \overline{S_{i3}} \\ \overline{(\rho e + p) u_i} - \frac{2\mu \gamma M^2}{Re} \overline{u_j S_{ij}} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k}{Re Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (60)$$

Y

$$\bar{\rho} \tilde{e} = \frac{\bar{\rho} \tilde{T}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \gamma M^2 \bar{\rho} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2) - \frac{1}{2} \tau_{ll} \quad (61)$$

Los modelos típicos de sub-malla basados en una viscosidad turbulenta cierran el sistema. Estos son:

$$\tau_{ij} = \bar{\rho} C_p \nu_t S_{ij} \quad (62)$$

$$Q_{ij} = \bar{\rho} C_p \frac{\nu}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (63)$$

Cuando el número de Reynolds es alto, los términos difusivos tal como la viscosidad molecular son considerados de menor relevancia, entonces tenemos:

$$\tilde{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \bar{\rho} \tilde{u}_1 \tilde{u}_i + \bar{\omega} \delta_{i1} - 2(\mu + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i1} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_2 \tilde{u}_i + \bar{\omega} \delta_{i2} - 2(\mu + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i2} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_3 \tilde{u}_i + \bar{\omega} \delta_{i3} - 2(\mu + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i3} \\ (\bar{\rho} \tilde{e} + \bar{\omega}) \tilde{u}_i - 2(\mu + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{u}_j \tilde{S}_{ij} - (\bar{k} + \bar{\rho} C_p \frac{\nu_t}{Pr}) \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (64)$$

El modelo de LES, puede ser fácilmente deducido de las ecuaciones originales de Navier-Stokes para un flujo compresible viscoso realizando la transformación de variables de la manera que se muestra a continuación sin modificaciones severas.

Estos modelos están compuestos de acuerdo en [11], con la modificación de que utilizamos el promedio de Favre. El modelo sub-malla está considerado por [9] con la viscosidad molecular dada por:

$$\nu_t(x, \Delta, t) = C_{ssf} \Delta \sqrt{F_2(x, \Delta, t)} \quad (65)$$

Donde  $C_{ssf}$  está en función de la constante de Kolmogorov  $C_k$  ver [9] como:

$$C_{ssf} = f(C_k)^{3/2} \quad (66)$$

Con

$$C_{ssf} = 1.4 \quad (67)$$

$$\delta x = (\Delta x \Delta z \Delta y)^{(1/3)} \quad (68)$$

Donde  $\Delta x, \Delta z, \Delta y$ , es el tamaño local de malla en cada una de las direcciones espaciales respectivamente.

Donde  $F_2$  es la estructura de velocidad de segundo orden construida por medio del campo  $\tilde{u}$  es calculado en el punto  $\mathbf{x}$  con un promedio estadístico local de las diferencias de la velocidad de cuadro de los seis puntos más cercanos que rodean al punto  $\mathbf{x}$  en la malla computacional. La interpolación se basó sobre la ley de 2/3 de Kolmogorov que se usa para la función estructura de la velocidad. Según lo propuesto por [9], la viscosidad turbulenta se apaga cuando la turbulencia no es lo suficientemente tridimensional. El criterio para tres dimensiones es definido como sigue: considérese en un momento dado que el ángulo entre el vector de vorticidad en un punto dado de la malla y su medio aritmético de los seis puntos vecinos más cercanos. La viscosidad turbulenta se cancela en los puntos donde este ángulo es más pequeño que  $20^\circ$ . Finalmente, el número de Prandtl turbulento se toma igual a 0.6, con lo que cierra la ecuación de la energía.

# **Capítulo III**

## **Generalidades de la Simulación Numérica**

### 3.1 Dominio computacional

Puesto que las ecuaciones de gobierno están en forma adimensional se deben definir los parámetros característicos para tener una idea de las magnitudes en la simulación. La longitud característica  $D$  corresponde al diámetro del chorro.

La malla tridimensional fue construida con 150 nodos en  $x$ , 109 nodos en  $y$  y 109 nodos en  $z$ , lo cual significa que se calculan las propiedades 1 782 150 veces, con 12.5D en el eje  $x$ , 8D en el eje  $y$ , y 8D en el eje  $z$ .

Existe en la simulación una zona crítica que tiene un comportamiento que necesita mayor precisión y por tanto una cantidad de nodos mayor, esta zona es donde se desarrollan los esfuerzos cortantes que se forman cuando el chorro entra en contacto con la atmósfera estática.

### 3.2 Parámetros Adimensionales

Los parámetros adimensionales son establecidos con respecto a variables de referencia con la finalidad de poder adaptar simulaciones generales a casos particulares y con ello universalizar los resultados.

Las variables de referencia son las variables que el chorro tiene exactamente a la salida de descarga es decir en la entrada del dominio computacional. Esto aplica para la velocidad, la presión, la temperatura y la densidad.

Entre los parámetros adimensionales que se encuentran en las ecuaciones tenemos los siguientes casos.

- El número de Mach será variado en 1.1, 1.15, 1.19 tomando tres casos.
- El número de Reynolds es 30000.
- El número de Prandtl es de 0.7.
- El número de Prandtl turbulento es 0.6
- El fluido es aire  $\gamma=1.4$  constante

### 3.3 Velocidad de co-flow

El chorro supersónico tiene un perfil de velocidad uniforme a la salida del tubo y si consideramos que la atmósfera no está en movimiento, entonces tiene un perfil de velocidad nula. La simulación de la descarga del chorro con un perfil diferente a aquel de la atmósfera se vuelve un problema complejo debió a altos gradientes al inicio del tiempo. Este problema es causado por inestabilidades numéricas que hacen que el flujo adquiera gradientes de velocidad inversos a la dirección del flujo. Los altos gradientes provocarían que el flujo se regresara por la entrada y generaría inestabilidades con las condiciones de frontera debido a la necesidad de rapidez de cambio de unas condiciones a otras. Para aminorar las inestabilidades es necesario utilizar un flujo de apoyo en la atmósfera llamado co-flow, con un perfil de velocidad definido, no nulo. Este perfil de velocidad deberá contar con gradientes que tengan la capacidad de atenuar el cambio abrupto de velocidades y disipar las inestabilidades de velocidad de retroceso así como también deberá tener la capacidad de no alterar el cálculo de las variables de flujo calculados [7]. El perfil de co-flow propuesto es entonces:

$$u(0, y, z) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \tanh\left(\theta_0 \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r}\right)\right) \quad (69)$$

Donde

$$r = \sqrt{(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (70)$$

Donde  $r$  es el radio del chorro supersónico.

Este perfil de velocidad tendrá un 8% de la velocidad del chorro con lo cual desvanece las velocidades de retroceso y además no impacta el cálculo del campo de velocidad. Debemos notar que este perfil de co-flow estará en todo el dominio es decir a lo largo de las coordenadas espaciales  $(x,y,z)$ .

### 3.4 Ruido Blanco

El ambiente real donde el chorro se descarga sobre la atmósfera contiene perturbaciones que generalmente son difíciles de eliminar hasta en experimentos controlados. Estas perturbaciones no tienen un efecto importante sobre las propiedades, sin embargo sí impacta de manera sustancial el desarrollo de las estructuras turbulentas. En un ambiente controlado es casi inevitable el desarrollo de la misma, siendo un criterio el número de Reynolds para encontrar la transición. Este criterio presenta diversos inconvenientes en la práctica porque no establece con suficiente precisión el desarrollo de la turbulencia y sólo lo hace bajo restringidas condiciones [7].

En una simulación numérica el ambiente sobre el cual se descarga el chorro es ideal, sin perturbaciones ni inestabilidades que puedan alterar las variables turbulentas del mismo. Es por ello que sería difícil obtener el desarrollo de la turbulencia en una simulación que requiera visualizar sus estructuras en un dominio finito y restringido a longitud.

Para resolver este problema surge la idea de simular estas perturbaciones con el suficiente control de las inestabilidades para desarrollar las estructuras

Las fluctuaciones de cualquier variable son producidas por medio de la energía turbulenta y de esta forma llevar a cabo la transición a flujo turbulento. Debemos tener cuidado de que esta perturbación no altere la información de modelos sub-malla antes de llegar a la turbulencia totalmente desarrollada. El ruido blanco se incorpora en la zona de esfuerzos cortantes para acelerar el proceso y pueda ser calculado en menor tiempo. Esta técnica debe ser aplicada a cada una de las componentes de la velocidad. El ruido blanco no debe tener una frecuencia para que permita al modelo de turbulencia de grandes escalas generar una frecuencia fundamental, además que se aplicara sumando valores aleatorios entre un intervalo de -0.5 y 0.5 con un 10% de la velocidad del chorro.

### 3.5 Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera juegan un papel importante en la forma de la solución de las ecuaciones de gobierno, además de ello tienen una fuerte dependencia con la estabilidad del algoritmo numérico. La mayoría de problemas de interés práctico en la dinámica de fluidos son complejos, es por ello que la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales con sus condiciones de frontera es encontrada numéricamente y no analíticamente. Para este tipo de soluciones se pueden distinguir condiciones de frontera física y numérica. Las condiciones de frontera físicas están intrínsecamente ligadas a las imposiciones físicas del problema. En algunos problemas físicos descritos por las ecuaciones de Navier-Stokes tienen un número de condiciones de frontera inferior al número de variables primitivas, en estos casos el conjunto de condiciones de frontera son suficientes para encontrar la solución. Sin embargo esto no garantiza que el problema sea consistente, esto es que puede ser inconsistente, debido a la forma de discretización o a las oscilaciones del cálculo. Es necesario entonces abordar condiciones de fronteras numéricas, capaces de auxiliar a las condiciones de frontera físicas y de relajar la

incertidumbre de las variables que no están especificadas por las condiciones de frontera físicas. Un efecto benéfico de este tipo de fronteras es que evita la intervención de falsos cálculos tal como las reflexiones de ondas. Las condiciones de frontera en esta simulación son las siguientes:

1. Pared adiabática deslizante
2. Frontera supersónica a la entrada del flujo
3. Salida subsónica no reflejante

### 3.6 El método NSCBC

Es necesario darle un tratamiento especial a las condiciones de frontera, en tanto que los efectos acústicos sean estudiados, esto es cierto por ejemplo en el estudio de las inestabilidades de simulaciones de combustión numérica, así como cuando se busca una linearización de las condiciones de frontera. Para estos casos se ha desarrollado el método propuesto por Poinot y Lele conocido como *Navier-Stokes Characteristic Boundary Condition (NSCBC)*.

Este método surge como un intento, no obstante no el único, de resolver problemas de condiciones de frontera, utilizando relaciones de ondas características que atraviesan las fronteras. En un inicio son relaciones derivadas de las ecuaciones de Euler y posteriormente extendidas a las ecuaciones de Navier-Stokes. También podemos decir que este método tiene el potencial de controlar y evitar inestabilidades numéricas y falsos cálculos numéricos debido a la reflexión de ondas sobre las fronteras del dominio computacional. El método puede ser aplicado tanto a regímenes subsónicos como supersónicos y a diferentes tipos de condiciones de frontera, sin embargo en este trabajo sólo se trataran aquellas mencionadas anteriormente, tales son: paredes adiabáticas deslizantes, entrada supersónica y salida supersónica. Para un completo estudio de las diferentes condiciones a utilizar ver Poinot & Lele.

Las ecuaciones de gobierno para este método están en la forma mostrada:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m_i}{\partial x_i} = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} + \frac{\partial m_i u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (72)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p) u_i}{\partial x_i} = \frac{u_j \partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{u_j \partial q_i}{\partial x_i} \quad (73)$$

$$m_i = \rho u_i \quad (74)$$

$$\rho e = 0.5 \rho u_k u_k + \frac{P}{\gamma - 1} \quad (75)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right) \quad (76)$$

Donde  $p$  es la presión termodinámica  $m$  es la cantidad de movimiento para cada dirección  $i$ -ésima, y  $e$

es la energía cinética interna. El flujo de calor a lo largo de las coordenadas espaciales está dado por:

$$q_i = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (77)$$

$$\lambda = \mu \frac{C_p}{Pr} \quad (78)$$

Ahora consideremos una frontera en  $x=L$ , usando el análisis característico para modificar los términos hiperbólicos convectivos se tiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 + \frac{\partial m_2}{\partial x_2} + \frac{\partial m_3}{\partial x_3} = 0 \quad (79)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + d_1 \rho u_k u_k d_1 + \frac{\partial (\rho e + p) u_i}{\partial x_i} = \frac{u_j \partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{u_j \partial q_i}{\partial x_i} \quad (80)$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} + u_1 d_1 + \rho d_3 + \frac{\partial (m_1 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (m_1 u_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (81)$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} + u_2 d_1 + \rho d_4 + \frac{\partial (m_2 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (m_2 u_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial (p)}{\partial x_2} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (82)$$

$$\frac{\partial m_3}{\partial t} + u_3 d_1 + \rho d_5 + \frac{\partial (m_3 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (m_3 u_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial (p)}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (83)$$

Las ecuaciones (79)-(83) contienen derivadas para la dirección  $x_l$  en forma del vector  $d$  está dado por el análisis:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} (l_i + \frac{1}{2} (l_5 + l_1)) \\ \frac{1}{2(l_5 + l_1)} \\ \frac{1}{2\rho c(l_5 - l_1)} \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} \quad (84)$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(c^2 m_1)}{\partial x_1} + (1+\gamma)\mu \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (85)$$

Cada  $l$  es una amplitud de onda característica que se asocia con una velocidad característica, las cuales podemos escribir:

$$\lambda_1 = u_1 + c \quad (86)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u_1 \quad (87)$$

$$\lambda_5 = u_1 + c \quad (88)$$

De estas ecuaciones  $\lambda_1$  y  $\lambda_5$  son la velocidad del sonido moviéndose en dirección positiva, el resto son la velocidad a la cual la entropía se propaga, y las otras dos son las velocidad en la dirección  $x_1$ .

Para determinar la amplitud de onda características son validas las siguientes relaciones:

$$l_1 = \lambda_1 \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad (89)$$

$$l_1 = \lambda_2 \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \rho c \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \quad (90)$$

$$l_3 = \lambda_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (91)$$

$$l_4 = \lambda_4 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad (92)$$

$$l_5 = \lambda_5 \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad (93)$$

Otra expresión para la amplitud característica indica que está puede ser tomada como la variación de la amplitud de la onda en el tiempo, esto es:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + L_1 = 0 \quad (94)$$

Puesto que las expresiones (79)-(83) están en términos del vector  $\mathbf{d}$  y a su vez está en términos de la amplitud característica de las ondas que cruzan las fronteras, resultan ser una forma importante de determinar las condiciones de frontera no viscosas. Entonces tendremos una aproximación de las condiciones de frontera viscosas por medio de las no viscosas. Estas mismas expresiones nos ayudarán a obtener valores de variables de la frontera en el tiempo, si conocemos las amplitudes características.

En este punto debemos notar que podemos estimar las amplitudes características cuando no existe información alguna de ellas, utilizando el método de LODI.

### 3.7 Estimación por medio de LODI

Podemos aproximar los valores de las amplitudes características entrando por la frontera por medio de las ecuaciones de Euler en forma unidimensional, puesto que hacerlo multidimensional sería un problema muy complejo de resolver.

Las relaciones locales no viscosas unidimensionales (LODI) se obtienen tomando las expresiones (79)-(83) y despreciando los términos transversales y viscosos. Las expresiones obtenidas, dependiendo de las variables a considerar, resultan ser:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2} (l_2 + \frac{1}{2} (l_5 + l_1)) = 0 \quad (95)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} (l_5 + l_1) = 0 \quad (96)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c} (l_5 - l_1) = 0 \quad (97)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + l_3 = 0 \quad (98)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + l_4 = 0 \quad (99)$$

Otras formas de LODI en función de los gradientes normales a la frontera pueden ser de gran utilidad, véase [10].

Debido a que las ecuaciones de Navier–Stokes requieren más condiciones de frontera que las ecuaciones de Euler, debemos entonces proponer condiciones viscosas, las cuales deben complementar a las no viscosas, y su efecto cuando la viscosidad tiende a cero deberán ser insignificantes en las ecuaciones de Euler. Estas condiciones se utilizan para despreciar términos en las ecuaciones de conservación y calcular condiciones de frontera que no fueron especificadas por las condiciones no viscosas.

En seguida se realiza una aplicación del método NSCBC a las condiciones del chorro supersónico en las que estamos enfocándonos.

### 3.8 Entrada Supersónica

Las condiciones de frontera a la entrada será supersónica y se impondrán las tres componentes de la velocidad y la temperatura para  $x = 0$ , las cuales pueden variar con el tiempo y el espacio. Esto es:

$$u_2(0, x_2, x_3, t) = U(x_2, x_3) \quad (100)$$

$$u_2(0, x_2, x_3, t) = 0 \quad (101)$$

$$u_3(0, x_2, x_3, t) = 0 \quad (102)$$

Las ondas que están atravesando la frontera van todas en la misma dirección, esto es, puesto el flujo tiene una velocidad mayor a la del sonido la diferencia  $u-c$  es positiva. Esta condición nos dará la formación de estructuras características en la resolución de las variables de flujo. Siendo así, en este caso no será necesario calcular la amplitud de esta onda, por medio del valor de los puntos internos, puesto que está determinado por el mismo flujo.

Teniendo en cuenta estas condiciones de frontera, donde se impone la velocidad las ecuaciones (81)-(83) no son necesarias y la ecuación de energía (80) tampoco es necesaria. Del análisis con LODI tenemos de la ecuación (97):

$$l_5 = l_1 - 2\rho c \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad (103)$$

De las ecuaciones obtenidas por el análisis de LODI en forma de gradientes, tenemos:

$$l_2 = 0.5(\gamma - 1)(l_5 + l_1) + \frac{\rho c^2}{T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (104)$$

La densidad puede ser obtenida de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 \frac{\partial (\rho u_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (105)$$

Con su respectivo componente del vector  $d$ :

$$d_1 = \frac{1}{c^2} (l_2 + 0.5(l_5 + l_1)) \quad (106)$$

Note que las longitudes características en 3 y 4 respectivamente no son necesarias de calcular.

### 3.9 Frontera de salida subsónica no reflejante.

Si se construyera una frontera subsónica no reflejante totalmente perfecta obtendríamos las condiciones de frontera consistentes, sin embargo nuestro chorro no tendría como presión media a la atmosférica. El medio en el que se vacía el chorro funciona como una frontera que refleja información en forma de ondas y la proporciona al fluido. Es por ello que es necesario incorporar una frontera que no sea perfectamente no reflejante. El problema se resuelve haciendo una imperfecta transmisión de las ondas a través de la salida, permitiendo así pequeños niveles de transmisión. No obstante no podemos imponer una presión en la salida subsónica puesto que entonces estaríamos concluyendo que la frontera sería reflejante y ondas se reflejarían una y otra vez en el dominio.

En este caso vemos que todas las ondas están saliendo del dominio y atravesando la frontera no reflejante, también sólo una onda está entrando a una velocidad  $c - u$ . Para realizar esta operación,

debemos de considerar ecuaciones analíticas para la presión lejos del dominio y la presión en la frontera de salida no reflejante.

El hecho de fijar la presión a la salida del dominio, no desprecia ninguna ecuación de gobierno. Para calcular el valor de la amplitud que está entrando usamos la expresión:

$$l_1 = K(p - p_\infty) \quad (107)$$

Donde

$$K = \sigma(1 - M^2)c/D \quad (108)$$

Entonces cuando la constante  $\sigma = 0$ , obtenemos una frontera perfectamente no reflejante. En este caso debemos considerar condiciones viscosas, [13], con el objetivo mencionado anteriormente, esto es que los esfuerzos tangenciales en la superficie y la transferencia de calor normal a la misma, tienen derivadas espaciales nulas. Matemáticamente esto es:

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad (109)$$

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} = 0 \quad (110)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = 0 \quad (111)$$

Las amplitudes características del sistema, excepto la que está entrando, pueden ser calculadas por medio de los puntos interiores. La ecuación (106) nos dará la amplitud característica y las ecuaciones (79)-(83) pueden ser usadas para el avance en el tiempo sobre las fronteras.

Una condición de frontera alternativa es posible implementar a la salida del flujo, esto es, una frontera no reflejante supersónica. La posibilidad de esta condición está dada por la velocidad con la que el flujo alcanza dicha frontera, es decir si el número de Mach es mayor que la unidad, será necesario implementar este tipo de frontera. Esto nos obliga a visualizar el alcance de nuestra simulación, para poder acertar una condición de frontera adecuada. De lo contrario existirán problemas de convergencia numérica. En dicho caso, todas las ondas estarían atravesando la frontera en dirección saliente, por lo tanto, todas las ondas deberán ser calculas por medio de los puntos interiores.

### 3.10 Pared Adiabática Deslizante

Este tipo de frontera está caracterizada por sólo una condición no viscosa y tres condiciones viscosas. Estas son respectivamente: La velocidad normal a la pared es cero, esto se expresa de la siguiente manera:

$$u_1(L, x_2, x_3, t) = 0 \quad (112)$$

Las relaciones viscosas que complementan condiciones de frontera consistentes son esfuerzos tangenciales nulos y flujo de calor nulo. Las expresiones se distinguen de esta forma:

$$\tau_{23}=0 \quad (113)$$

$$\tau_{13}=0 \quad (114)$$

$$q_1=0 \quad (115)$$

En cuanto a las amplitudes características, podemos tomar las ecuaciones (91)-(93) las cuales indican, que puesto que la velocidad normal es cero, las amplitudes características de esas ecuaciones son cero también.

Si bien la velocidad es cero la ecuación (81) se cancela. Del análisis de LODI para las amplitudes características, tenemos de (97) lo siguiente:

$$l_1=l_5 \quad (116)$$

Como  $l_5$  está saliendo del dominio se puede calcular por medio de los puntos interiores. El resto de las variables (densidad, velocidades y temperaturas) son calculadas por medio de la integración de las ecuaciones (79)-(83)

## **Capítulo IV**

### **Análisis de Resultados**

## 4.1 Caracterización del Chorro Supersónico

La simulación del chorro supersónico es del tipo subexpandido en el cual la presión inmediatamente antes de la salida es mayor que la presión en la atmósfera sobre la cual se descarga el flujo.

En la Fig. 11 se muestran las iso-superficies con el campo de temperaturas. Podemos identificar fenómenos relevantes como la zona de choques y expansiones. Ambos fenómenos tienen un comportamiento axisimétrico por el hecho de que el flujo surge de una tobera circular.

Como el flujo sale con una presión mayor que la de la atmósfera de descarga, inmediatamente un abanico de expansión se genera, y es visible en Fig. 11. Esto genera una caída de presión y un aumento de la velocidad, Fig. 12 (zonas rojas).

Después de que el flujo se expande, la reflexión de estas ondas nuevamente aumenta la velocidad Fig. 12 y disminuye la temperatura del flujo aún más, Fig. 11 (zonas azules) respectivamente.

Después del abanico de expansión de Prandtl-Meyer y su reflexión sobre la frontera libre del chorro, existe una zona en la cual estas ondas colapsan entre sí generando una discontinuidad, la cual se manifiesta en un choque supersónico. Este choque es visible en su forma cónica en la Fig. 11. El efecto que tiene el choque sobre las propiedades se observa en el campo de temperaturas Fig. 11, el cual incrementa súbitamente a través de la discontinuidad. Otra forma de detectar este fenómeno es por medio de la Fig. 13, donde el campo de presiones aumenta de manera súbita (zonas naranjas). Podemos percatarnos de que la distancia a través de la discontinuidad es apenas mayor que  $1D$  en la figura Fig. 15. Por lo anterior la densidad también aumenta y entonces el flujo está comprimido.

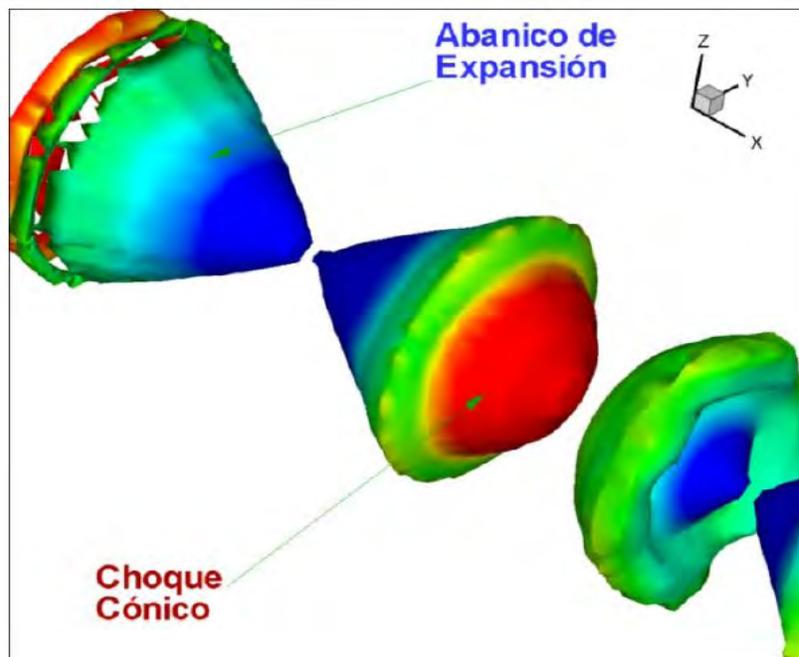


Fig. 11

*Isosuperficies de presión que muestran el comportamiento axisimétrico de los choques. Los contornos corresponden a la temperatura.*

El choque cónico genera una reflexión por medio de la línea central como un efecto similar a una pared sólida Fig. 14. Este choque comprime más el fluido y eleva así su temperatura. En la Fig. 12 el campo de velocidades es mostrado a través del choque y su reflexión, poniendo en evidencia que la velocidad disminuye en las zonas naranjas (choque incidente) y zonas amarillas (choque reflejado). Los fenómenos descritos anteriormente componen una celda de choque.

El fenómeno siguiente a la reflexión del choque, es un abanico de expansión de Prandtl-Meyer como el descrito al inicio de esta sección. La reflexión de la onda de choque sobre el límite libre del chorro se visualiza en la Fig. 11 (inferior derecha). Así sucesivamente volvemos a obtener los mismos fenómenos formando un patrón por medio de reflexiones regulares.

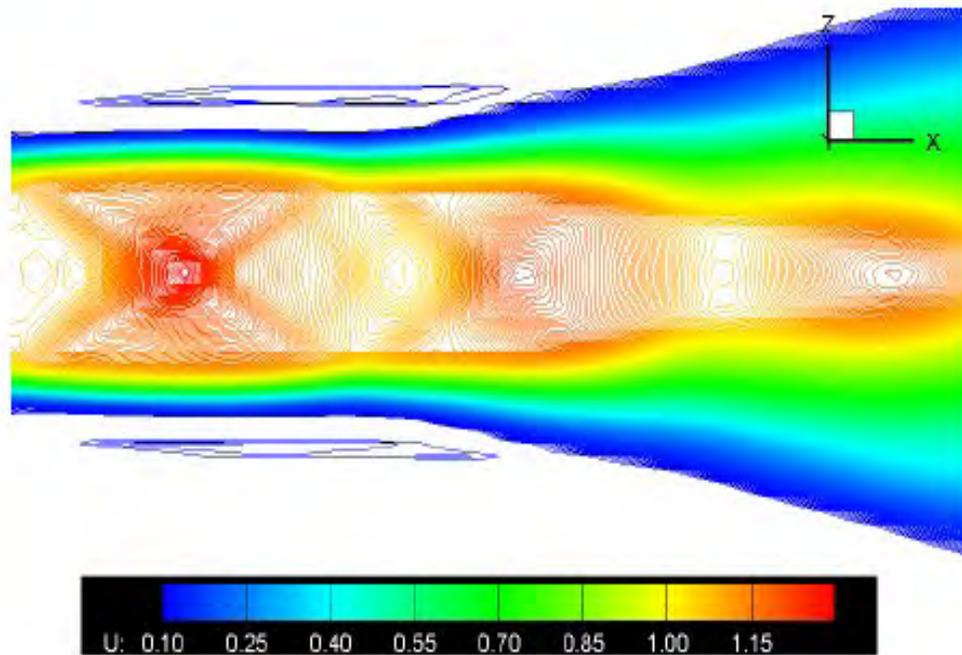


Fig. 12

*Campo de velocidades promediado mostrando la pérdida y ganancia de energía cinética en choques y expansiones respectivamente.*

En cuanto a la presión, podemos confirmar que esta cae abruptamente debido a que el flujo está acelerando a través del abanico de expansión. La presión es función del número de Mach y para flujo bidimensional e isentrópico tenemos:

$$\frac{p}{p_0} = (1 + 0.5(\gamma - 1)M^2) \quad (117)$$

Donde  $P_0$  es la presión de estancamiento y  $\gamma$  es la relación de calores específicos del fluido.

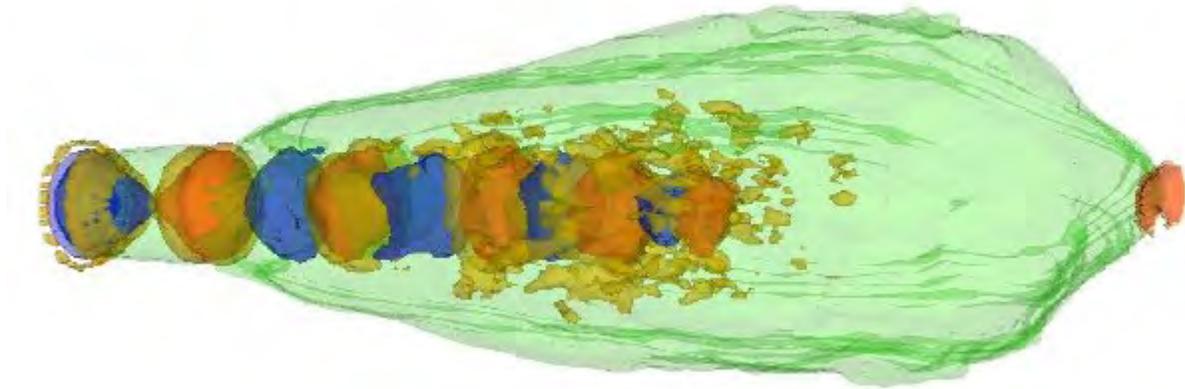


Fig. 13

*Campo de Presiones mostrando su variación sobre la zona de choques en iso-superficies. Las zonas azules y naranjas evidencian flujo expandido y comprimido respectivamente.*

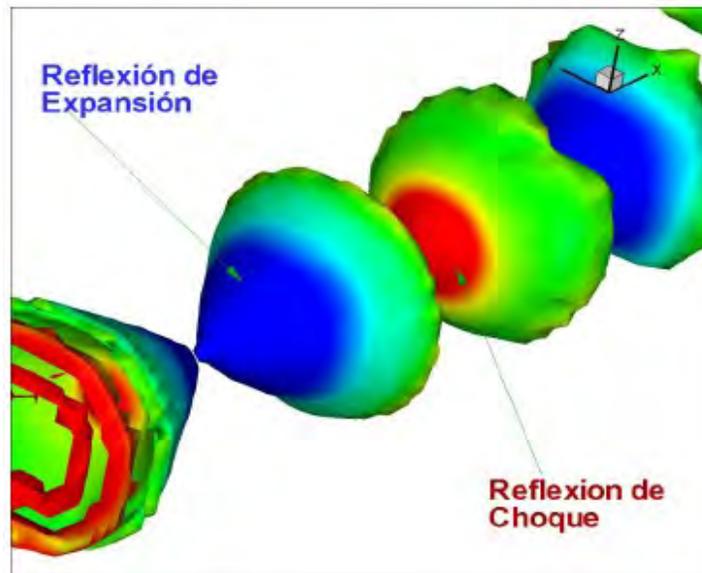


Fig. 14

*Se muestran las zonas de expansión y compresión reflejadas, estructurando las celdas de choque.*

Tomando la presión adimensionalizada a lo largo de la línea central obtenemos su variación respecto a la distancia y esto último se observa en Fig. 15. Podemos notar la naturaleza ondulatoria de la presión, la cual gradualmente va disminuyendo cuando el patrón de diamante se comienza a atenuar por la turbulencia. Se observa que cuando hay una cresta en la presión, existe un valle en la relación de velocidad (zona de expansión) para una misma posición y recíprocamente para la zona de compresión Fig. 16. También en la Fig. 15 se muestra la manifestación del choque supersónico de tipo incidente aproximadamente en  $x=d$  y su respectivo choque de tipo reflejante, así como también la expansión generada. En total hacen presencia 7 choques incidentes en la estructura de diamante.

En la Fig. 16 notamos que la simulación no presenta choques fuertes ya que para cualquier zona dentro del arreglo de diamante el número de Mach es mayor que la unidad. Esto también imposibilita la formación del conocido disco de Mach. También se observa que la turbulencia disipa el arreglo de choques al séptimo choque del chorro cerca de  $X/D=7$ ,  $M=1.19$ , perdiendo la capacidad de volver a ser supersónico.

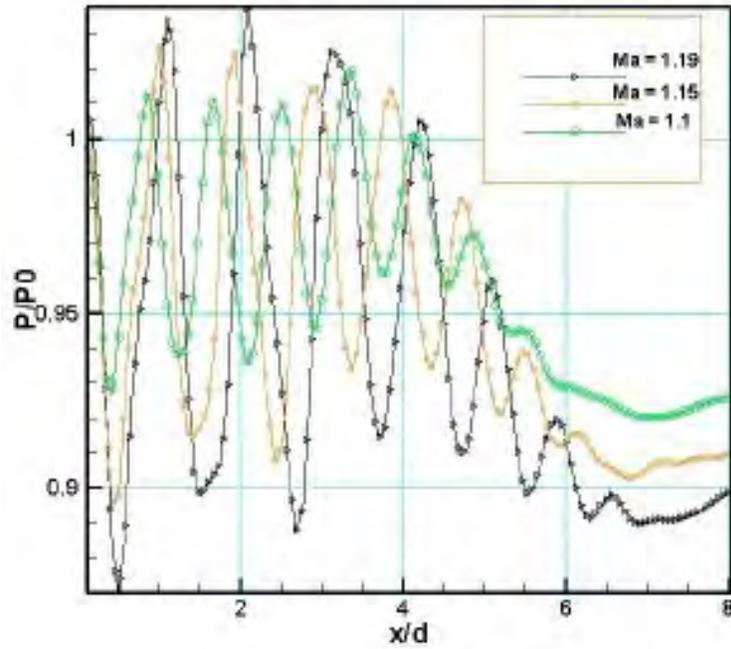


Fig. 15

Comparación de la presión en la línea central del chorro a diferentes números de Mach. Se puede ver el efecto de traslación a la derecha de la gráfica cuando el número de Mach aumenta.

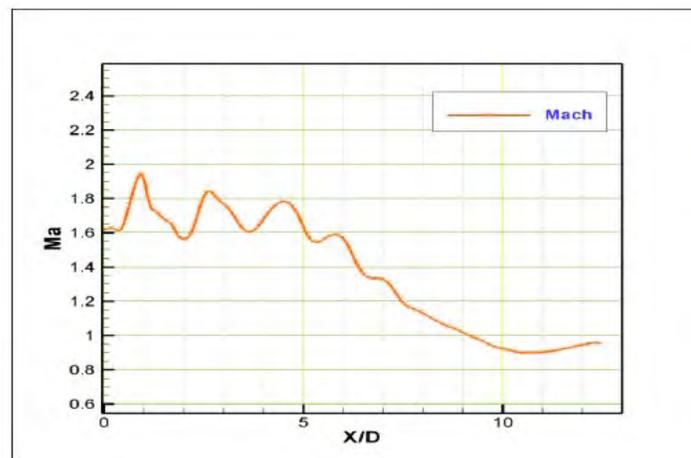


Fig. 16

Gráfico del número de Mach sobre la línea central del chorro. Observe que cuando los choques cesan el flujo se hace invariablemente subsónico.

#### 4.2 Vorticidad sobre las celdas de choques

Podemos observar la zona de choques, con el campo de presiones Fig. 18 (a), la cual se asocia a la vorticidad Fig. 18 (b). La vorticidad es prácticamente nula sobre los límites del chorro en el núcleo supersónico, por ello, esta zona es considerada no viscosa. También es visible que cuando los vórtices comienzan a interactuar cada vez más con los límites del chorro, estos van ganando resistencia a grandes escalas y se van recorriendo a lo largo del chorro. La formación de vórtices impiden la formación de nuevos choques y estructuran la turbulencia. Prácticamente el mecanismo de corrimiento de vórtices empieza en  $x=5D$  y tiene relevancia cuando los choques cesan como se puede confirmar en Fig. 18 donde prácticamente la presión media tiene un valor fijo.

Podemos observar en Fig. 17 estructuras turbulentas características de los chorros, tales como estructuras coherentes, trenzas y anillos las cuales indican un comportamiento de carácter transitorio. Estas estructuras son observadas por medio del gradiente de velocidades.



Fig. 17

*Iso-superficies del Gradiente de la velocidad mostrando estructuras coherentes en transición hacia la turbulencia. Se pueden ver una secuencia de anillos al inicio de la descarga que se alternan una con la otra debido al efecto de las celdas de choque.*

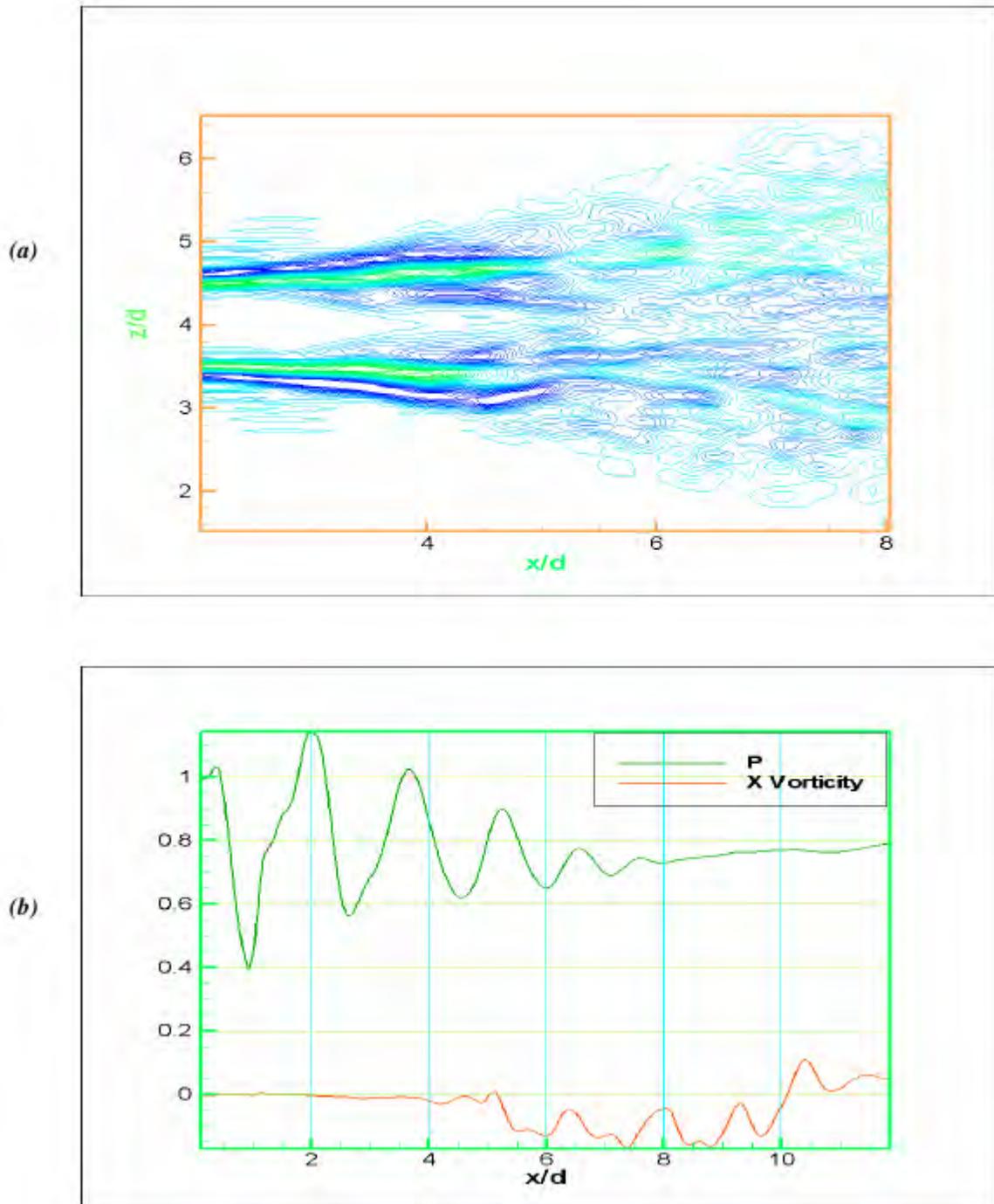


Fig. 18

(a) Contornos de Vorticidad. Existe un crecimiento lento de vórtices en la zona de choques; (b) Relación entre presión media y vorticidad a lo largo de la línea central del chorro.

### 4.3 Análisis Espectral

Se desarrolló, un análisis espectral de la evolución de la presión instantánea cerca de las celdas de choque. Tomado una serie de puntos en esta zona, se graba la presión en el tiempo y luego de aplicar la transformada de Fourier en forma discreta (FFT) se presenta únicamente el resultado del punto que tiene mejores coincidencias con la información recabada experimentalmente. Esto es contemplado así debido a la imprecisión en las coordenadas que pudieran presentarse en el experimento. En la Fig. 20 se muestra la forma irregular de la presión en el avance del tiempo, la cual, a simple vista no parece tener una frecuencia de oscilación específica o periódica, sin embargo, el análisis espectral revelará, la frecuencia de oscilación de la señal.

El análisis del espectro por medio de la transformada se implementó concretamente a tres casos de interés cambiando el número de Mach a la salida de la descarga esto es: 1.19, 1.15, 1.1. En el análisis espectral es necesario tomar en cuenta que de no existir un paso temporal de muestreo constante de la señal en la Fig. 20, sería erróneo aplicar el método de Fourier. Este es el caso de la simulación numérica presente ya que el método usado para la integración en el tiempo va variando el paso temporal. Dicho lo anterior, entonces se procedió a realizar una interpolación lineal, para un paso de tiempo de muestreo constante. Posteriormente se aplica la transformada de Fourier y se muestra la variación del espectro respecto a la frecuencia. El SPL (Sound Pressure Level) usa en el eje de las ordenadas del espectro.

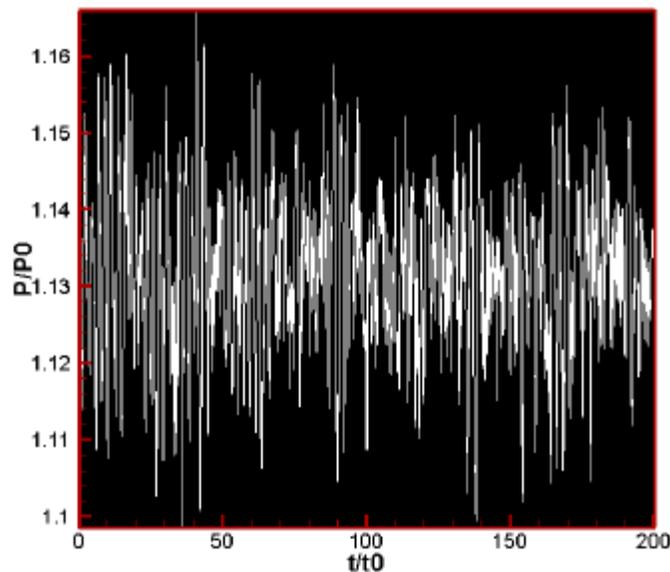


Fig. 20

*Se muestra la evolución de la presión instantánea a lo largo del tiempo para cuando Mach = 1.19, Observe los altos picos que se pueden llegar a alcanzar*

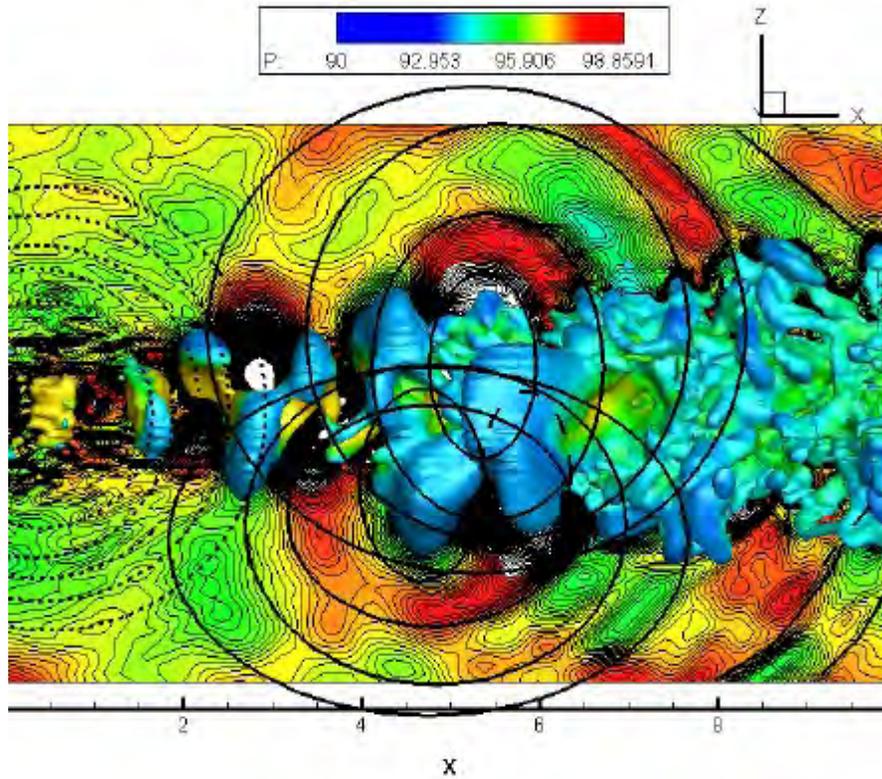


Fig. 21

*Observe la naturaleza ondulatoria y la división entre dos zonas frecuencia alta y baja*

El modelo estandarizado de SPL sirve para obtener los valores equivalentes de presión en decibelios. Esta unidad es usada para hacer referencia al sonido que puede existir en el umbral auditivo que el humano es capaz de percibir y se puede calcular por medio de la siguiente expresión:

$$SPL = 20 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} \quad (118)$$

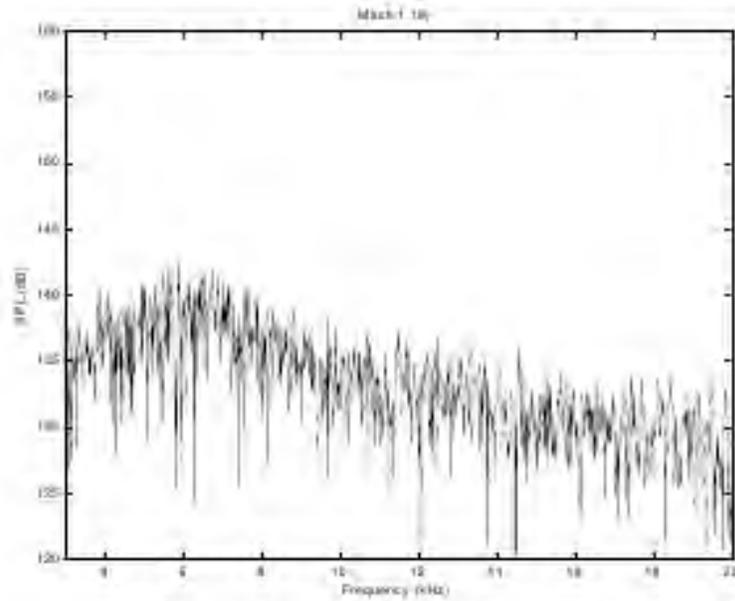


Fig. 22

*Espectro de Frecuencia a  $M=1.19$  cerca de la tobera:  $SPL_{max}=142.5$  dB,  $f_{max}=5.788$  kHz y  $SPL_{max}=141.1$  dB,  $f_{max}=6.88$  kHz*

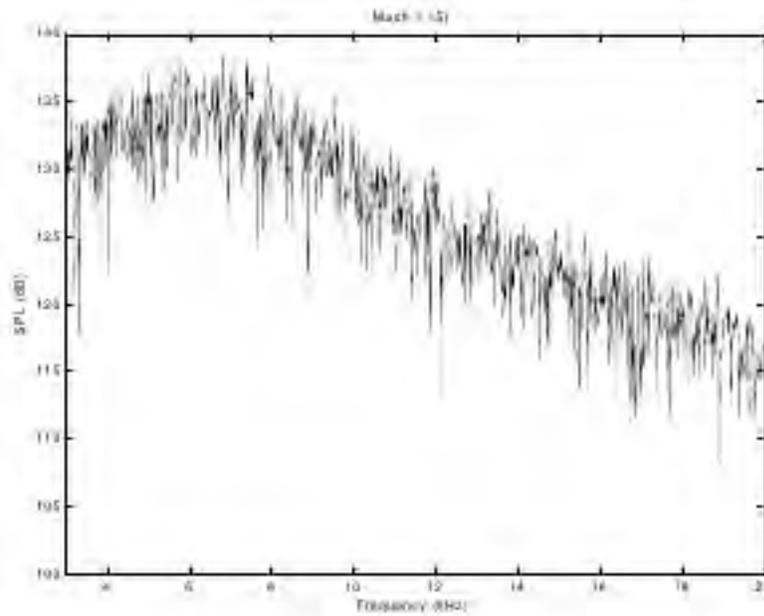


Fig. 23

*Espectro de Frecuencia a  $M=1.15$  cerca de la tobera:  $SPL_{max}=137$  dB,  $f_{max}=5.752$  kHz y  $f_{max}=6.7$  kHz*

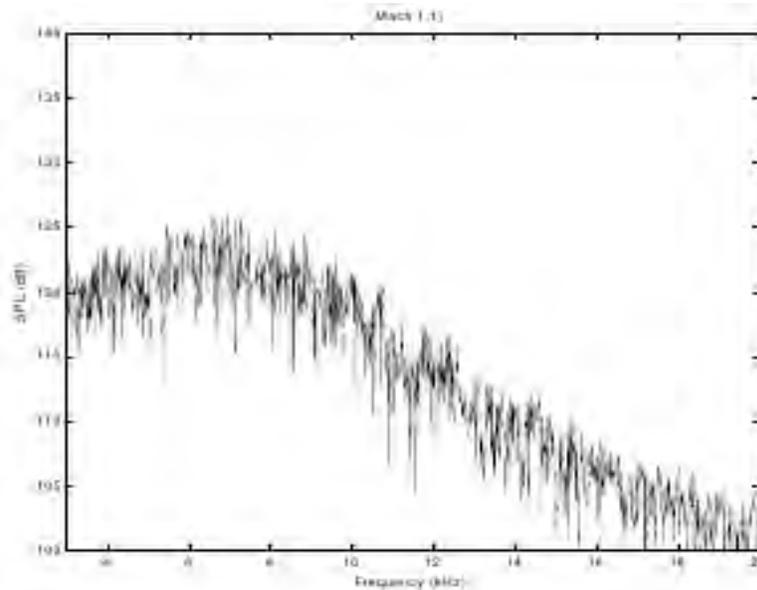


Fig. 24

*Espectro de Frecuencia a  $M=1.1$  cerca de la tobera:  $SPL_{max}=126$  dB,  $f_{max}=6.854$  kHz*

Donde la presión de referencia es  $20 \mu\text{Pa}$  de acuerdo a la ANSI. Las frecuencias obtenidas en el análisis se muestran en Fig. 22, Fig. 23 y Fig. 24. Dichas frecuencias coinciden favorablemente con los datos experimentales y numéricos presentados por [17]. En el espectro de frecuencias hay una zona donde se puede ubicar una protuberancia en el intervalo de 5 a 7 kHz, lo cual coincide con estudios numéricos y experimentales. El resumen de los resultados se pueden encontrar en la Tabla 1:

<b>Mach</b>	<b>Frecuencias kHz</b>	<b>Frecuencia kHz Ching [2001]</b>	<b>%e</b>
1.19	5.758 y 6.881	8.890 y 6.945	20.18
1.15	5.752 y 6.70	7.690 y 9.419	27.18
1.1	6.854	9.040	24.18

***Tabla 1 Comparación de las frecuencias entre Ching [2001] y el estudio presente para diferentes números de Mach***

#### 4.4 Zona de auto-semejanza.

La zona de auto-semejanza tiene características específicas que permiten comparar chorros generados bajo distintas condiciones y relacionarlos mediante un perfil universal. Una de estas es el perfil auto-semejante, el cual está dado básicamente por el inverso de la velocidad adimensionalizada sobre la línea central del núcleo del chorro. El resultado se muestra en Fig. 25.

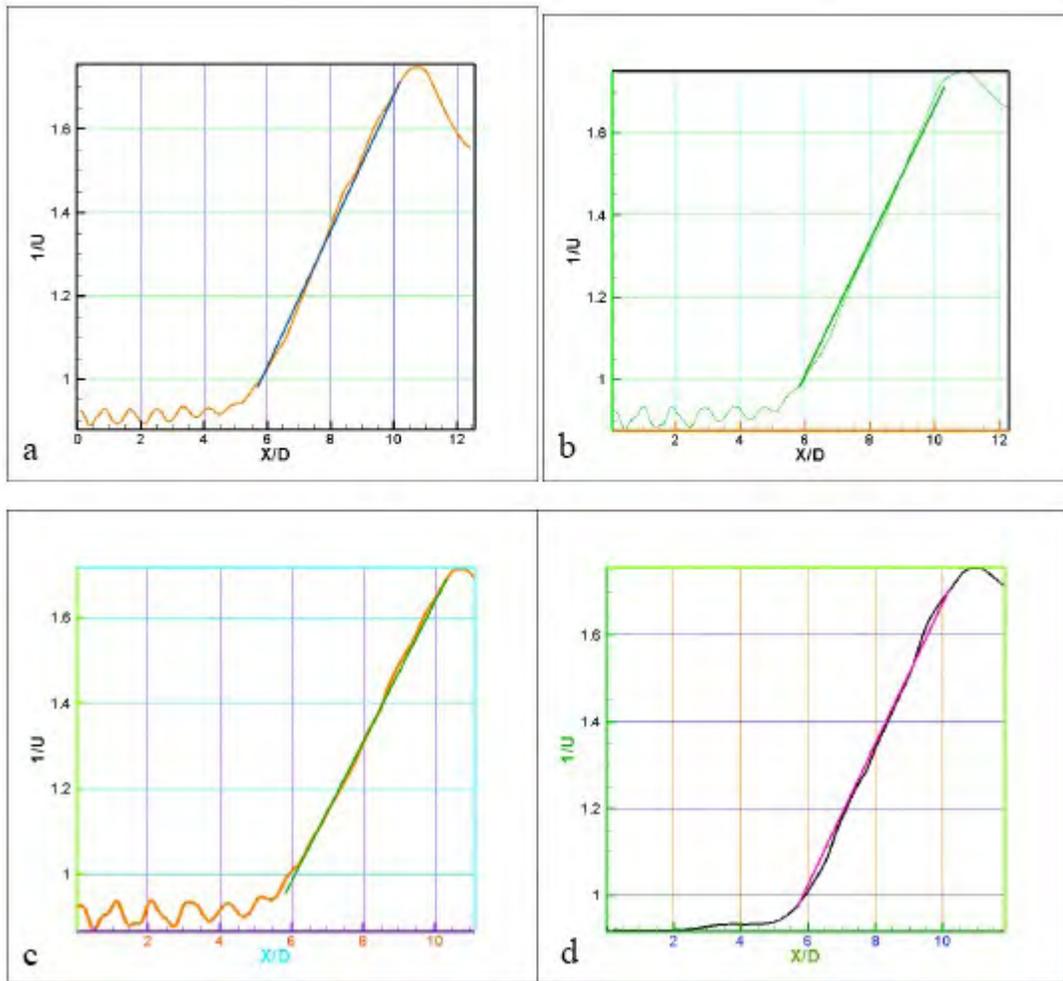


Fig. 25

Perfiles autosemejantes  $1/u=mx+b$  a diferentes Mach:  
 a) Mach=1.19; b) Mach=1.15; c) Mach=1.10; d) Mach=0.9 (subsónico)

Mach	m	b
1.19	0.163	0.075
1.15	0.163	0.025
1.10	0.167	-0.0167
0.9	0.163	0.056

Tabla 2 de resultados de la zona de auto-semejanza. Observe que la pendiente es siempre la misma y satisface el perfil auto-semejante

Los datos de la tabla 2 se obtuvieron mediante regresión lineal y así podemos ver que las pendientes entre los cuatro casos simulados son muy similares. En la teoría de auto semejanza se predice una pendiente constante y esto demuestra que al momento de que empieza esta zona, la turbulencia está completamente desarrollada. Podemos observar el efecto de la zona de auto semejanza en Fig. 18 (b) donde la vorticidad en la posición  $x = 6D$  empieza a fluctuar. Este es el sitio donde se inicia la zona de auto-semejanza en Fig. 25 en el chorro supersónico y subsónico radicaría en que por tener números de Mach diferentes generan diferentes ordenadas al origen del perfil auto-semejante. Esto se muestra en la tabla 2 de donde se puede decir que al disminuir el número de Mach también disminuye la ordenada al origen.

Se ha desarrollado un cálculo del perfil de auto-semejanza para un chorro subsónico con número de Mach de 0.9 con el mismo código con lo cual es posible percibir el efecto del número de Mach sobre la zona auto-semejante y más específicamente el efecto del flujo supersónico sobre la zona de auto-semejanza. El resultado de la tabla 2 se puede mostrar que para el caso de flujo subsónico su perfil de auto-semejanza es el mismo que para el caso supersónico, lo cual indica que el número de Mach no afecta el perfil auto-semejante. Sin embargo, vemos que en el caso subsónico la ordenada al origen tiene valores positivos y mayores al caso donde es supersónico.

#### 4.5 Flujo Supersónico Sobre Cuerpo Romo

La geometría del cuerpo romo es utilizada en cápsulas espaciales ya que este tipo de forma ofrece la posibilidad de frenar o desacelerar más rápido el vehículo y con ello el aterrizaje es más seguro.

Conocer los complejos fenómenos que se producen por viajar a altas velocidades es de gran ayuda en el diseño de vehículos supersónicos como cápsulas espaciales. No sólo basta con conocer la dinámica de los fluidos y las complejas interacciones entre turbulencia y compresibilidad sino también poder estimar los altos gradientes que se generan sobre la superficie del vehículo.

La forma en que podemos caracterizar las distintas zonas que se forman en el flujo a alta velocidad está plasmada en Fig. 26. Los fenómenos asociados al flujo supersónico son visibles sobre el campo del número Mach y se muestran enumerados; (1) onda de choque des-adjunta y curvada; (2) línea sónica; (3) abanico de expansión; (4) zona de recirculación (5) onda de choque de estela; (6) separación de capa cortante.

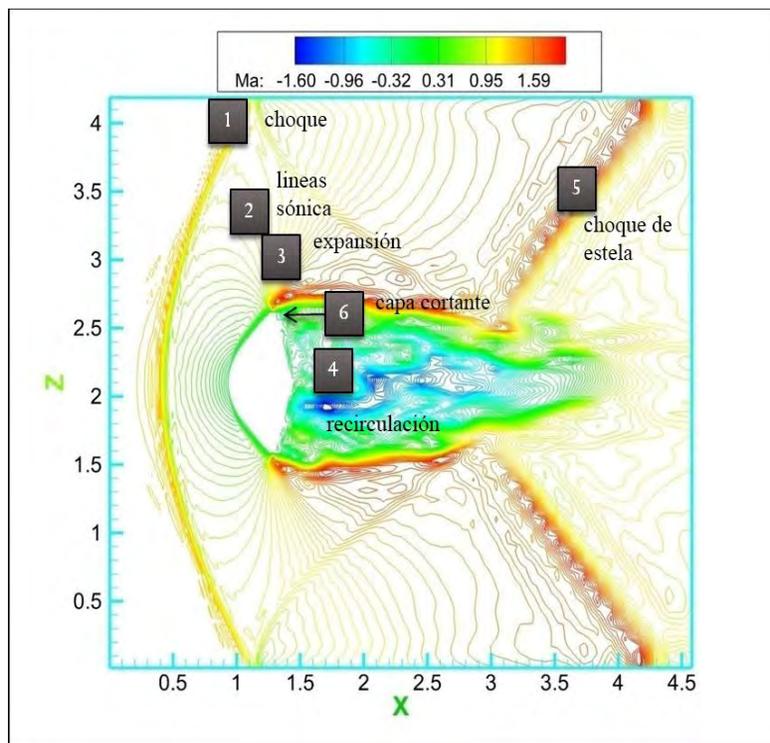


Fig. 26

*Zonas características del flujo supersónico sobre un cuerpo con perfil de cápsula espacial del proyecto OREX. Campos de número de Mach de 1.5*

## 4.6 Superficie de Choque

La zona 1 es conocida como la superficie de choque ya que es una onda de choque tridimensional y la mayoría de sus características son debidas a la geometría axisimétrica del vehículo y al número de Mach en la corriente libre.

En la Fig. 26 la onda de choque es curva y ofrece más severidad frente a la nariz del vehículo que lejos del vehículo. En la nariz del vehículo la onda de choque genera los gradientes más altos que en cualquier otro lugar. Esto se puede apreciar en Fig. 27 que muestra el campo de presiones.

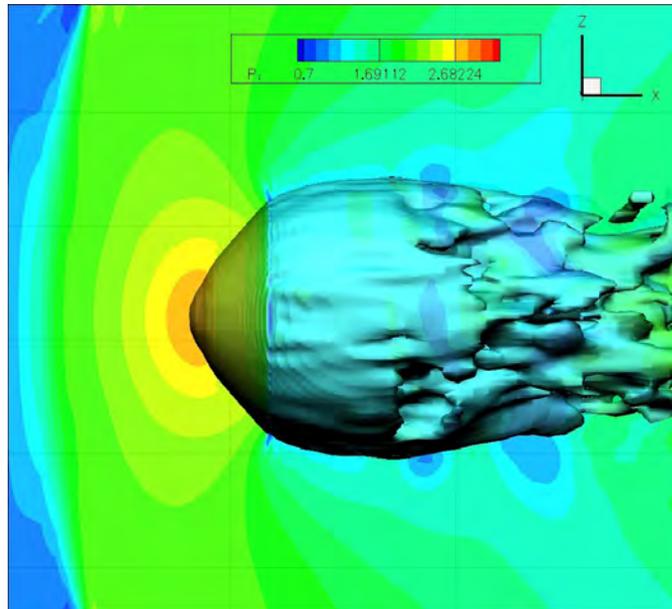


Fig. 27

*En la nariz del vehículo la onda de choque genera los gradientes más altos que en cualquier otro lugar.*

En la Fig. 27 la presión frente a la nariz sufre un cambio más abrupto que en el resto la onda de choque. Aquí la onda de choque es muy parecida a una onda choque normal. Esto concuerda con la teoría de onda de choque, ya que cuando la onda de choque se va doblando mientras se aleja del vehículo, su comportamiento es más parecido al de una onda de choque oblicua que depende de la ecuación (9). De acuerdo a la teoría, si el ángulo de onda va disminuyendo para un mismo número de Mach, el aumento de presión es menos severo. Esto se ve muy claramente en Fig. 27.

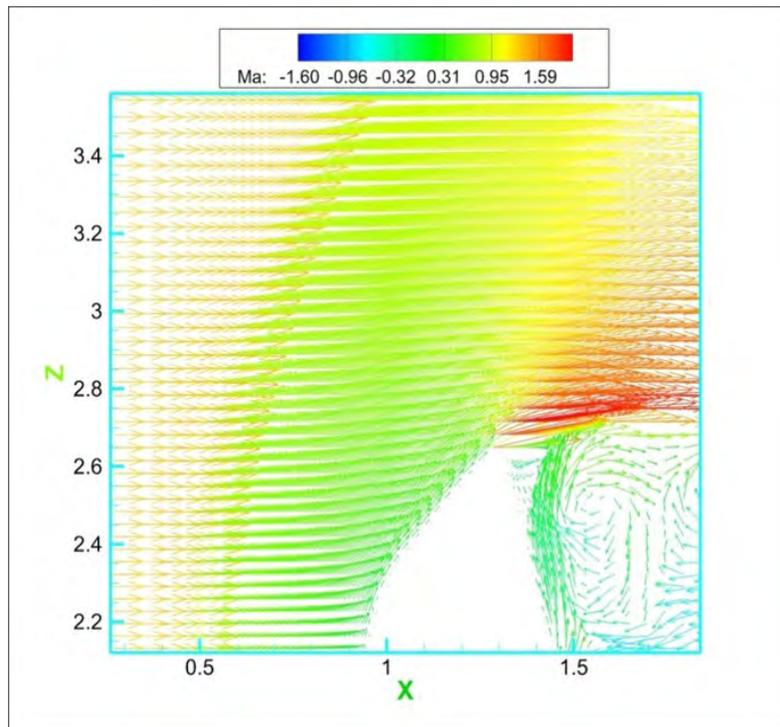


Fig. 28

*Los Vectores de velocidad, primeramente son horizontales y cambian gradualmente de dirección mientras nos movemos en dirección vertical cuando atraviesan la onda de choque.*

Otro efecto que produce la onda de choque curva y des-adjunta se puede ver en la Fig. 28. Este efecto, que tiene que ver puramente con la interacción onda-fluido, produce una desviación del flujo después de atravesar la onda de choque. En la Fig. 28 se pueden apreciar los vectores de velocidad que, primeramente son horizontales y cambian gradualmente de dirección mientras nos movemos en dirección vertical, es decir mientras la onda de choque se hace más curva, obteniéndose la máxima desviación en la parte más lejana del cuerpo. Sin embargo, este efecto sólo tiene presencia mientras la onda de choque este presente.

De acuerdo a lo anterior de la figura Fig. 28 y Fig. 27 se puede clasificar que la onda de choque genera dos zonas relevantes: la zona débil que está lejos del cuerpo y la zona fuerte que es producida por la onda de choque normal des-adjunta. Esta interacción entre zonas genera áreas de flujo subsónico y flujo supersónico, lo cual a su vez genera la zona de transición.

#### 4.7 Abanico de Expansión

La zona 3 de la Fig. 26 es donde se genera el abanico de expansión y se puede ver en el campo de presiones de la Fig. 29. Esta zona es caracterizada por la generación de ondas acústicas de manera continua sobre una superficie afilada. Este fenómeno es detectado en la Fig. 29 por medio de la presión, ya que una onda tiene la propiedad de que la presión no cambia a lo largo de una línea. Esto último genera líneas de presión constantes en la Fig. 29 que se van abriendo poco a poco por el efecto de la expansión.

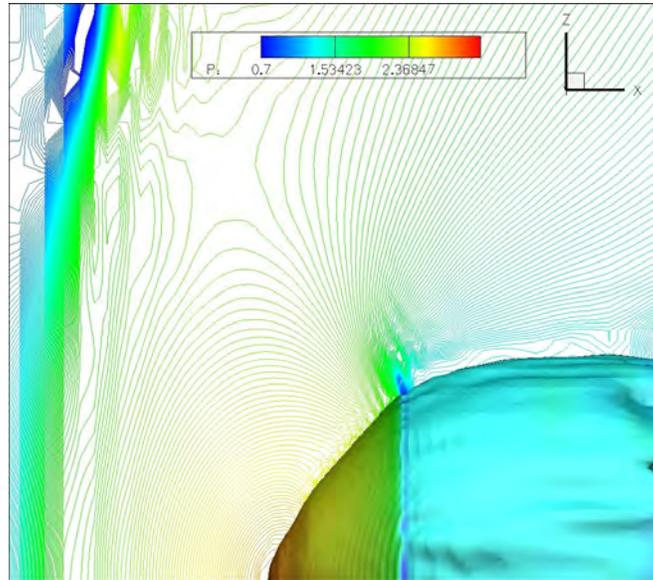


Fig. 29

*Esta zona es caracterizada por la generación de ondas acústicas de manera continua sobre una superficie afilada*

La expansión del flujo provoca es una caída de presión de manera continua y una aceleración del flujo como es observable en la Fig. 30: . Este flujo es el conocido flujo de Prandtl-Meyer cuya característica principal es que está basado en un proceso isentrópico o al menos donde el cambio de entropía es muy cercano a cero. La máxima aceleración del flujo se produce exactamente en el borde afilado (zonas rojas de Fig. 30: ) y va disminuyendo gradualmente cuando el flujo se aleja del borde.

La generación de un abanico de expansión depende de la geometría en sí misma, es decir, si el cuerpo tiene bordes divergentes suaves, la expansión es menos severa que aquella geometría con bordes afilados como el caso de la Fig. 29.

El aumento de la velocidad y la disminución de la presión por medio de un abanico de expansión provoca un cambio de dirección del flujo. Esto puede verse en la Fig. 30: donde los vectores de velocidad que salen del abanico, se ven alineados en una misma dirección, es decir, que las componentes de velocidad  $v$  y  $w$  son próximas a cero y tienen sus máximos valores en el borde afilado.

#### 4.8 Línea sónica

La línea sónica como ya se mencionó es una superficie que tiene la velocidad del sonido, y su posición está ligada a la forma del vehículo. Esta se muestra en la Fig. 31 en la acotación de  $M=1.0$ . La línea sónica es la onda que divide el flujo supersónico del subsónico, es decir, que a la línea sónica están asociados los efectos compresibles que a su vez pesan sobre las propiedades como la densidad y la presión. Esta interacción de la línea sónica y la presión es la que en gran medida determina el desprendimiento de la capa límite y a su vez el arrastre del vehículo.

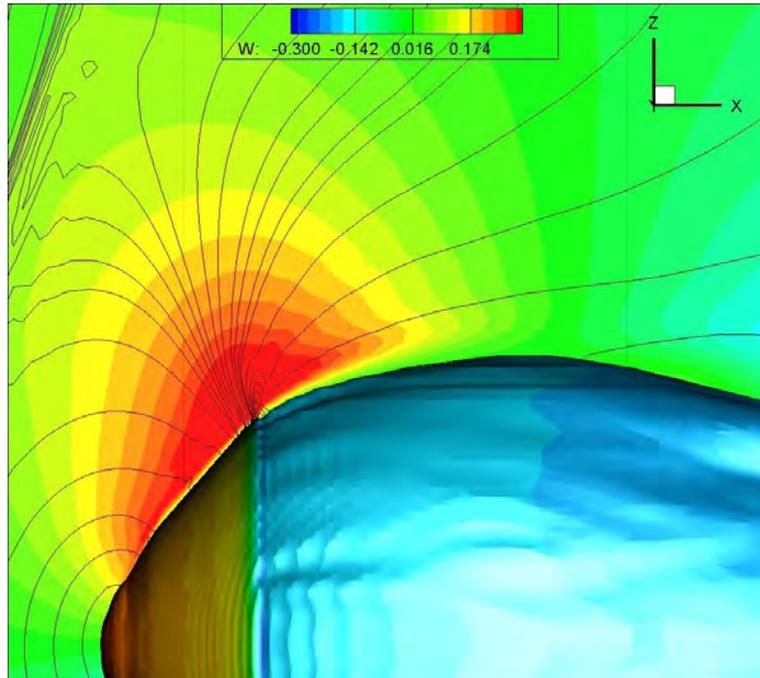


Fig. 30:

*Además de aumentar la velocidad y disminuir la presión, un abanico de expansión provoca un cambio de dirección del flujo.*

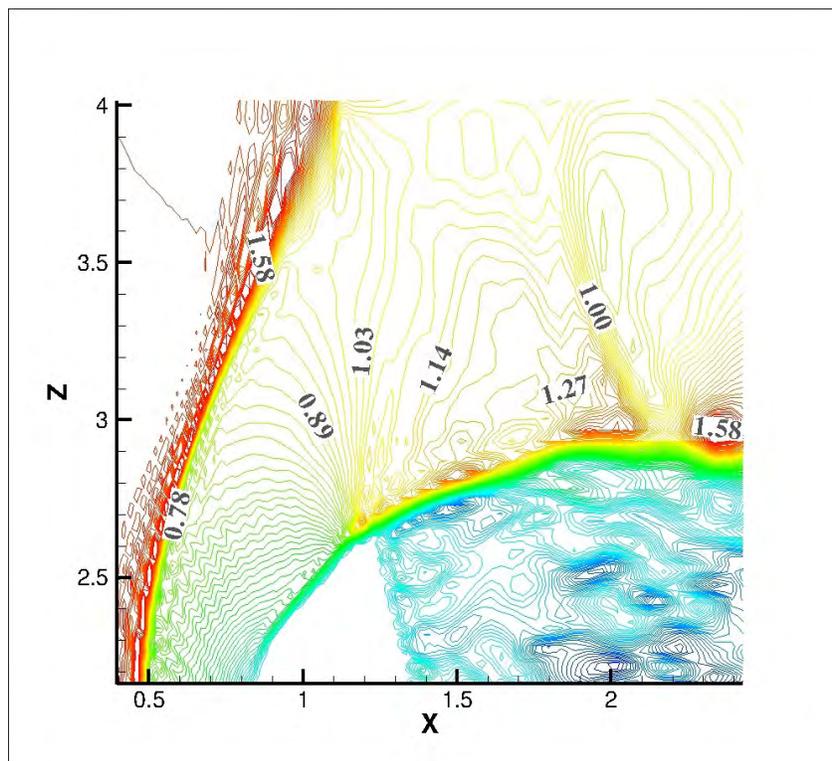


Fig. 31

*Líneas del número de Mach mostrando la posición de la línea sónica y a su vez el movimiento de una onda acústica  $M=1$  aguas abajo.*

Con el control de la posición de la línea sónica existen muy buenas posibilidades para disminuir o aumentar el coeficiente de arrastre. En la Fig. 31 se ve que la línea sónica está posicionada a la altura del borde afilado del vehículo y acelera el flujo por medio de la expansión. Es decir, que el aumento de velocidad incrementa la energía cinética del flujo y con ello la posibilidad de prolongar el desprendimiento de la capa límite. En la Fig. 32 se muestran las líneas de presión y su distribución en la superficie del vehículo. Cabe decir que en el momento en que el flujo se convierte a supersónico nuevamente, es decir, cuando atraviesa la línea sónica, la presión disminuye más. Este hecho es apuntado por algunos investigadores como [14] que establece que la posición de la línea sónica ayudaría a reducir el arrastre basado en el hecho de que se modifica el perfil de presión.

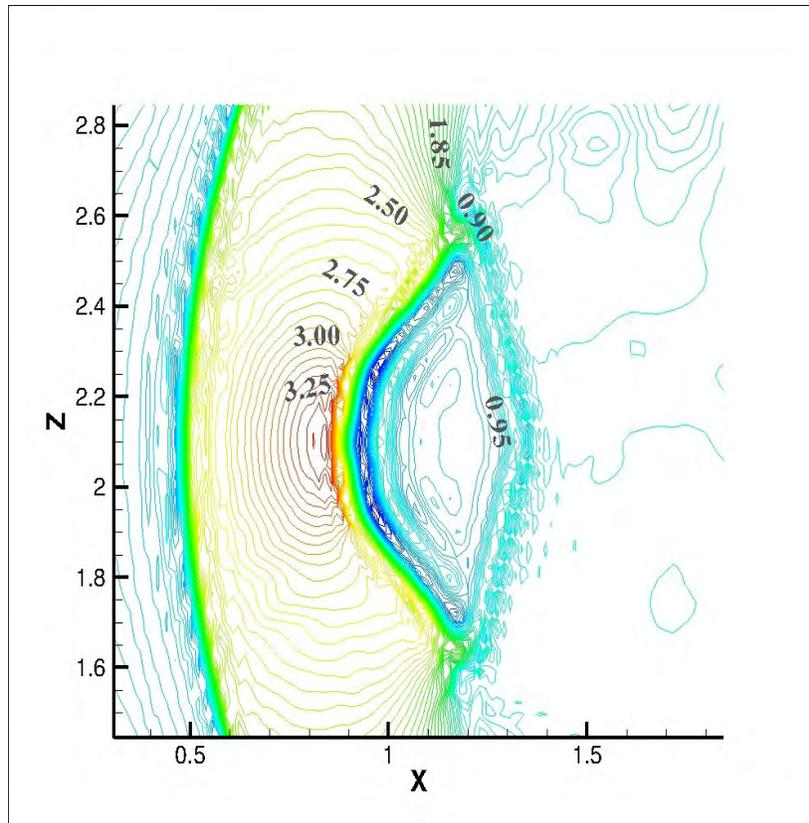


Fig. 32

*Las líneas de presión muestran que en el momento en que el flujo se convierte a supersónico en el borde, la presión se ve afectada y sigue disminuyendo.*

El hecho de modificar el perfil de presión por medio de acelerar el flujo indica que la capa límite puede ser retrasada al desprenderse y ayuda a controlar el arrastre [12].

## Desprendimiento de la capa límite

La capa límite es definida como la zona donde los efectos viscosos dominan el flujo. Es formada por la región de no deslizamiento y crea un perfil de velocidad. La presión en cuerpos romos no es constante y es variable a lo largo de su superficie por lo que esta variación puede iniciar un desprendimiento.

El desprendimiento de la capa límite se puede estimar por medio de la presión en la superficie, ya que se sabe que los gradientes adversos son los que la perturban y la desprenden. Para ello se muestra la Fig. 33 donde el perfil de presión tiene varias caídas y valles. La gráfica de Fig. 33 se obtuvo desde el punto de estancamiento y es ahí donde se obtiene la máxima presión, producto de la interacción de la condición de no deslizamiento y la onda de choque curva. Cuando vamos avanzando sobre la superficie, la presión va disminuyendo de manera gradual, es decir se obtiene un gradiente favorable. Cuando llega a la posición  $x=1.1D$  comienza la expansión y la presión cae más rápidamente. A la posición  $x=1.15D$  la presión cae más rápidamente porque es la posición de la línea sónica y se puede notar que se alcanza la mínima presión cuando llega en  $x=1.2D$ . En este intervalo se puede asegurar que se encuentra el desprendimiento de la capa. Después de  $x=1.2d$  la capa está desprendida por el hecho de que la presión está fluctuando sobre un valor promedio y esta fluctuación indica que nos encontramos en la zona de recirculación ya que la presión aumenta. En esta última zona de la Fig. 33 se da un gradiente adverso productor de arrastre aerodinámico.

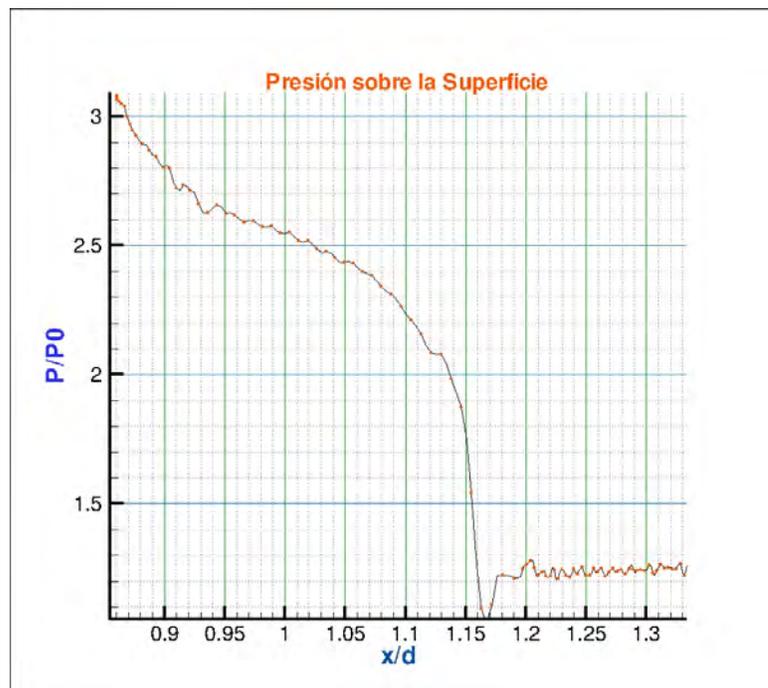


Fig. 33

*Perfil de presión sobre la superficie del vehículo, mostrando la caracterización del desprendimiento de la capa límite  $x=1.2D$  y su efecto sobre la presión media de la estela  $x>1.25D$*

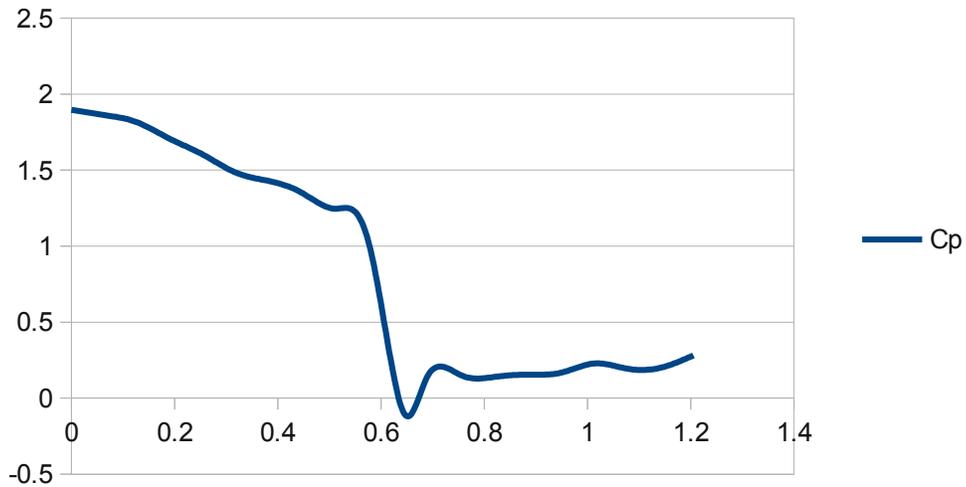


Fig. 34

*Perfil del coeficiente de presión donde el eje de las abscisas es el perímetro de la cápsula y el origen es el punto de estancamiento frente a la nariz.*

El  $C_p$  de la Fig. 34 tiene en el eje de las abscisas el eje  $L$  donde  $L=0$  equivale al punto de estancamiento en la nariz  $x=0.8D$  y  $L$  representa el perímetro de la superficie superior al eje de simetría de la cápsula de la Fig. 33. En la siguiente tabla se muestra la comparación del coeficiente de arrastre medio dado por [14].

<b>Cd [Mehta 2006]</b>	<b>Cd [Presente]</b>	<b>%e</b>
1.833	1.60199	12.6

El coeficiente de arrastre medio se calcula utilizando la expresión:

$$\bar{C}_D = \frac{1}{A_T} \int C_D dA \quad (119)$$

Donde  $A_T$  es la superficie total de la cápsula y el  $CD$  se toma exactamente en la superficie por medio del coeficiente de presión como se muestra en la siguiente expresión:

$$C_p = \frac{(P-1)}{0.5 \gamma Ma_0^2} \quad (120)$$

Donde  $P$  es la presión adimensionalizada y  $Ma_0$  es el número de Mach de referencia establecido a la entrada del dominio. Dado que el arrastre por fricción en cuerpos voluminosos es despreciable (del orden de  $10E-6$ ) el coeficiente de arrastre es puramente por presión  $CD=CP$ .

#### 4.10 Onda de choque de estela

Con el desprendimiento de la capa límite se produce un fenómeno en que el flujo está separado de la zona de recirculación. Este flujo adyacente a su vez produce una capa cortante ya que las velocidades entre ambas zonas son diferentes lo cual crea una línea de deslizamiento. El avance de esta zona y la dirección de esta línea de deslizamiento está gobernado por los esfuerzos viscosos y la inercia del fluido. Si la estela empieza con cierto espesor y gradualmente va disminuyendo, entonces el flujo en la corriente libre empieza a comprimirse y puesto que es supersónico es posible que se genere una onda de choque.

En la Fig. 31 se analizó el efecto de la línea sónica que actúa como un umbral entre flujo subsónico hacia flujo supersónico. Esta aceleración genera las condiciones propicias para que se genere una onda de choque en la estela. Esta onda de choque está vista en Fig. 35 y precisamente emerge de manera radial a  $x=4.2D$  de la estela.

En la Fig. 35 se presentan las líneas de presión y se puede aseverar que hay una onda de choque debido a que existe un cambio abrupto de presión y una caída en la energía cinética en Fig. 29. Ambas ondas de choque emergen a la misma distancia aun cuando existe una interacción entre el flujo supersónico y la turbulencia generada por la estela.

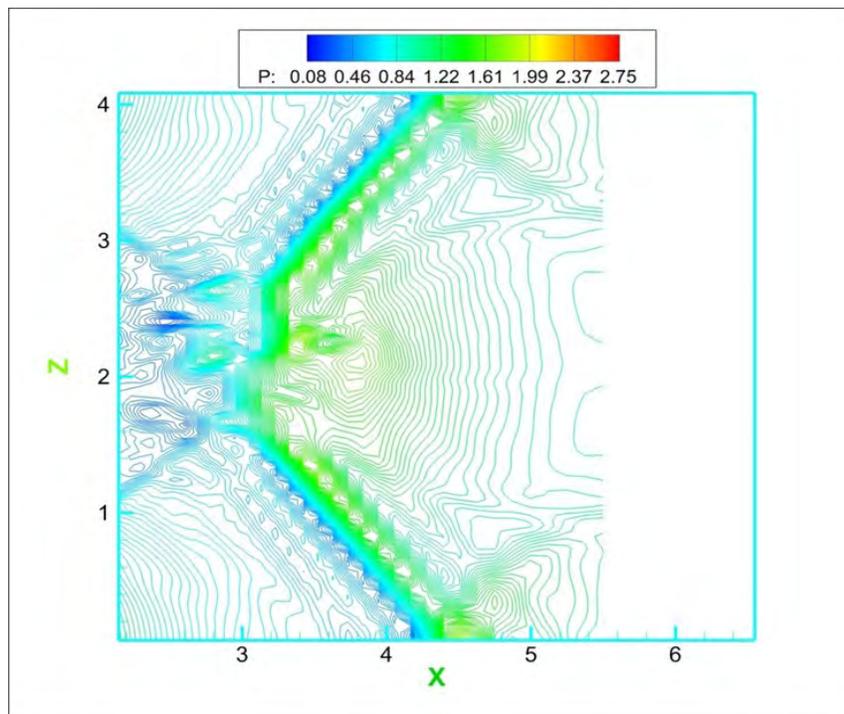


Fig. 35

*líneas de presión sobre la zona de la estela mostrando la onda de choque producida por la recompresión del flujo en la expansión aguas arriba.*

En cuanto al encuellamiento que se produce en la estela generada por el cuerpo se puede apreciar en la Fig. 36 por medio de las líneas de corriente. También se aprecia que cuando el encuellamiento termina para  $x=3D$  aproximadamente surge la onda de choque de estela cuya apariencia es de tipo oblicua.

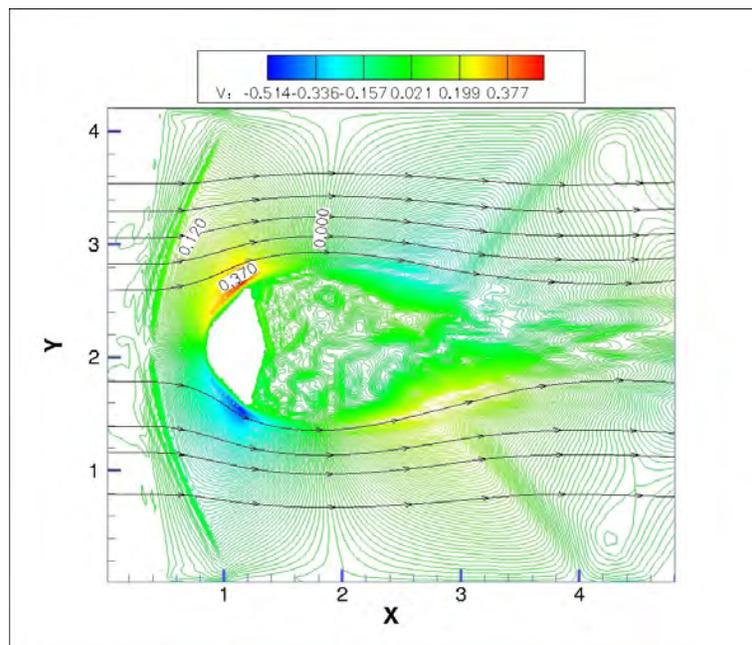


Fig. 36

*líneas de corriente muestran el encuellamiento de la estela y la producción de una onda de choque.*

# Capítulo V

## Conclusiones

## 5.1 Conclusiones del chorro Supersónico

Fue posible capturar adecuadamente las zonas de choques y expansiones con el código realizado puesto que la información recabada de estas en las visualizaciones tuvieron buenas coincidencias con aquellas observaciones experimentales y numéricas. También se concluye que las celdas de choques van disminuyendo cuando el número de Mach disminuye y es el número de Mach a la entrada del dominio que determina la magnitud oscilación de las variables de flujo. Existe un corrimiento de la posición de las celdas de choque aguas abajo cuando la velocidad aumenta a la entrada del dominio y no se genera una nueva celda de choque en el rango del número de Mach de 1.1 a 1.19.

El análisis espectral realizado arrojó buenas coincidencias con los estudios experimentales, indicando la veracidad de las frecuencias obtenidas. Esta simulación es capaz de auxiliar el diseño acústico apropiado del chorro supersónico. En el mismo orden de ideas, el control de ruido en aviones es también factible ya que la interacción de las ondas de choque y la expansión del flujo están directamente relacionadas con el ruido percibido. Aunado a esto también se diferenció el efecto de la turbulencia en el núcleo del chorro y su generación de ondas acústicas, las cuales al no tener valores axisimétricos de presión respecto al eje de simetría del chorro, provocan formas complejas de turbulencia más parecidas al fenómeno real. Esto último limita la aproximación axisimétrica del flujo supersónico.

De las imágenes mostradas se pudo percibir que el chorro supersónico subexpandido tiene claramente dos zonas características de interés acústico, la banda de alta frecuencia generadas por las celdas de choques y la banda de baja frecuencia en la zona de turbulencia como se explica en estudios experimentales.

Se concluye que es posible investigar el efecto del número de Mach sobre la ordenada al origen del perfil auto-semejante, abriendo la posibilidad de una nueva clasificación entre régimen subsónico y el supersónico. Resulta evidente que el perfil de auto-semejanza para los chorros se cumple, incluso bajo efectos de compresibilidad como choques y expansiones, ampliando la visión del chorro subsónico.

## 5.2 Conclusiones del Flujo Supersónico sobre Cuerpo Romo

La simulación numérica del flujo supersónico sobre un perfil romo fue obtenida de manera satisfactoria ya que los fenómenos encontrados fueron coherentes con la teoría estándar del flujo compresible. Las zonas características del flujo tales como ondas de choque y expansiones presentan una correcta variación de las propiedades del fluido.

Respecto a la onda de choque curva se pueden hacer una clara diferencia de dos subzonas: una donde la onda de choque es normal, clasificada como zona de choque normal donde los gradientes son más altos y la zona de choque débil donde la onda de choque es más parecida a una onda de choque oblicua. Como conclusión se puede decir que este fenómeno es la combinación de los dos tipos de onda de choque encontrados en el flujo compresible: oblicuo y normal.

La comparación de resultados entre [Mehta 2006] y este trabajo dio lugar a un error de 12% para el coeficiente de arrastre medio. Esto es atribuido a la implementación de condiciones de frontera simétricas por parte de [Mehta 2006] así como también a imprecisiones de la geometría en el borde afilado, lo cual modifica la presión en la zona de recirculación.

En la Fig. 31 se encontró evidencia de que hay una onda de choque transitoria que va moviéndose aguas arriba (dirección contraria al fluido) a la velocidad del sonido. Esta surge aparentemente de la onda de choque de la estela y termina disipándose cuando choca con la expansión del borde del perfil. Esta onda de choque podría causar serias variaciones de las propiedades sobre un cierto periodo de tiempo aun cuando sea breve. Otro efecto observable es que la onda acústica genera una perturbación de la capa cortante y desarrolla la turbulencia más rápidamente.

Se mostró con la Fig. 33 que la expansión del borde del perfil aerodinámico y más específicamente la posición de la línea sónica afectan la presión y el arrastre en el vehículo. Esto último se concluye ya que el área bajo la curva aumenta reduciendo más la presión al acelerar al flujo, sin embargo, en ciertos casos podría resultar contraproducente ya que la expansión también puede afectar la presión en la zona de recirculación (desprendimiento de capa). Esta última aseveración se debe tomar con precaución hasta que no se realice un estudio más detallado.

### Anexo 1 Deducción de las Ecuaciones de Navier-Stokes [4]

Las ecuaciones de Navier-Stokes gobiernan el movimiento de la mayoría de los fluidos. Aun cuando tienen una aparente sencillez estas modelan estructuras complejas como la turbulencia y otras inestabilidades. Las ecuaciones de Navier-Stokes son no lineales y la variable dependiente, la velocidad, aparece en forma cuadrática. Una de las formas en la que se conciben es la siguiente: De acuerdo a la segunda ley de Newton, las fuerzas inerciales son iguales a las fuerzas de presión más las fuerzas viscosas en un elemento de fluido, es decir:

$$dm = \frac{Du}{Dt} = -\nabla p dV + f_{\mu} \quad (121)$$

$$\rho dV = \frac{Du}{Dt} = -\nabla p dV + f_{\mu} \quad (122)$$

La masa multiplicada por la aceleración es igual a la presión ejercida sobre el elemento del fluido más las fuerzas viscosas debido a esfuerzos viscosos.

Obtenemos el término de la presión con el teorema de Gauss:

$$\int_S (-p) \vec{ds} = \int_V (-\nabla p) dV \quad (123)$$

Este término representa la suma de todas las fuerzas de presión  $-Pds$  sobre la superficie  $s$ . La tarea de evaluar el término viscoso es la que sigue. Considerando un elemento diferencial de fluido omitiendo los esfuerzos normales de presión podemos establecer:

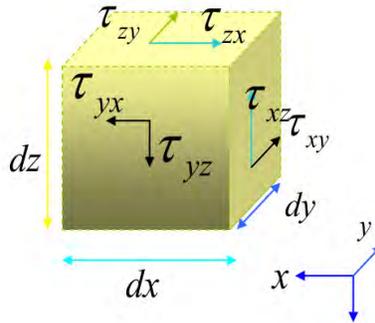


Fig. 37

Los esfuerzos viscosos influyen la trayectoria del elemento de fluido porque cualquier desbalance en los esfuerzos genera una fuerza viscosa actuando sobre el mismo. Las fuerzas viscosas se valúan haciendo suma de fuerzas en cada dirección:

$$f_x = (d\tau_{zx}) dx dy + (d\tau_{yx}) dz dx + (d\tau_{xx}) dy dz \quad (124)$$

Tomando la derivada total y factorizando la diferencial de volumen:

$$f_x = \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz \quad (125)$$

$$f_x = \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) dV \quad (126)$$

Generalizando en notación inicial para cada dirección tenemos:

$$f_i = \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV \quad (127)$$

Sustituyendo esta última expresión en la (118)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (128)$$

Hasta este punto hemos llegado tan lejos como podemos con la segunda ley de Newton, para continuar es necesario utilizar dos ecuaciones más: La conservación de masa y la ecuación constitutiva de la ley de viscosidad de Newton. Tales son respectivamente:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (129)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (130)$$

Para comprender un poco como proviene esta expresión es necesario considerar como se deforma un fluido, para simplificar el asunto, en dos dimensiones bajo la acción de esfuerzos cortantes. Considere por tanto los siguientes estados de esfuerzos:

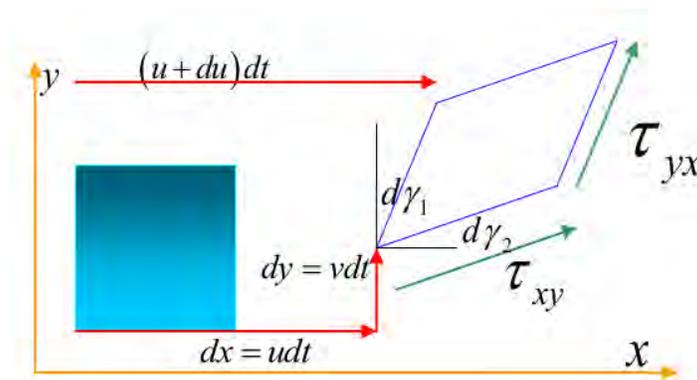


Fig. 38

De la figura podemos extraer los dos triángulos con ángulo de deformación  $\gamma$  y escribir:

$$\tan(d\gamma_1) = d\gamma_1 = \frac{du}{dy} \quad (131)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (132)$$

$$\tan(d\gamma_2) = d\gamma_2 = \frac{dv}{dx} \quad (133)$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{dv}{dx} \quad (134)$$

La suposición de Newton fue que en un fluido Newtoniano el esfuerzo cortante es proporcional a la suma de la razón de deformación del ángulo respecto al tiempo, donde la constante de proporcionalidad es la viscosidad. Esto es utilizando la ecuación (132) y (134) obtenemos:

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dx} \right) \quad (135)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (136)$$

La expresión (136) es idéntica a la expresión (130) y sirve para sustituir en la ecuación (128) donde queda como:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right) \quad (137)$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} \right) \quad (138)$$

Estas expresiones son validas considerando la hipótesis de Stokes donde se proponen que la suma de los esfuerzos normales sobre el elemento del fluido es nula. Usando la identidad y de inmediato la ecuación de la conservación (129) llegamos a:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u}) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (139)$$

Entonces sustituyendo la ecuación (139) en (129) tenemos:

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (140)$$

Con  $\nu$  la viscosidad cinemática. Este último resultado son llamadas las ecuaciones de Navier-

Stokes. La aceleración es el término izquierdo de la ecuación y es una derivada convectiva la cual expresa la razón de cambio de temporal y espacial de una partícula del fluido. Esto es el cambio de la velocidad es debida a la variación espacial en un cierto instante, por lo cual:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \quad (141)$$

Sustituyendo  $dx=udt$  en (141) podemos encontrar:

$$\delta \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} (udt) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} (vdt) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} (wdt) \quad (142)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (143)$$

Ahora tomando la ecuación en la ecuación (143) llegamos a la forma estándar de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (144)$$

## VI Referencias

1. Anderson John. Modern Compressible Flow. Mc Graw Hill 2002. Third Edition. pp. 12-18.
2. Zucker Biblarz Oscar. Fundamentals of gas dynamics. John Wiley & Sons. Second Editions 2002. pp. 193 – 196.
3. Sidebar 3, Steady-State Jets, Los Alamos Science 1985. pp. 46-49.
4. Davidson P. A. Turbulence, an Introduction for Scientist and Engineers Oxford, 2006
5. T. S. Cheng. K. S. Lee, Numerical Simulations of Underexpanded Supersonic Jet and free shear Layer using WENO schemes. 2005.
6. Seiner, J.M., Norum, T.D., 1979. Experiments of shock associated noise on supersonic jets. AIAA. pp. 79-1526.
7. García García Michelle Antonio, Simulación Numérica de una Fuga de Amoniaco en Aire, pp. 21
8. Miguel R. Visbal and Datta V. Gaitonde, On the Use of Higer-Order finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes, Journal Of Computational Physics 2002, pp 158-160.
9. D. V. Gaitonde & M. R. Visbal, Further Development of a Navier-Stokes Solution Procedure Based on High-Order formulas, Computational Physics, 1999.
10. Salinas Vazquez and Metais, Large-eddy simulation of the turbulent flow through a heated square duct. JFluid Mech. (2002), pp 203-207.
11. Comte P and Lesieur Large-eddy simulation of compressible turbulent flow, AGARD/VKI (1997), pp. 819.
12. Mehta R. C. “*Numerical simulation of supersonic flow past reentry capsules*” Shock Waves (2006)
13. Prudhomme S.M. & H. Haj-Harir, “Investigation of supersonic underexpanded jets using adaptive unstructured finite elements”, (1994)
14. Thomas S. Chyczewski, Jr . “*A TIME-DEPENDENT, THREE-DIMENSIONAL NUMERICAL STUDY OF SUPERSONIC RECTANGULAR JET FLOW AND NOISE USING THE FULL NAVIER STOKES EQUATIONS*”. The Pennsylvania State University . (1996)
15. Tam CKW, Jackson J, Seiner JM ”A multiple-scales model of the shock cell structure of imperfectly expanded supersonic jets”. J Fluid Mech 1985
16. Justin Smialek, ”*SUPERSONIC COMBUSTION RAMJET ENGINES: USHERING IN A NEW ERA OF HYPERSONIC FLIGHT*” University of Pittsburgh Swanson, 2013

17. Ching Y. Loh. *“Near Field Screech Noise Computation for an Underexpanded Supersonic Jet by the CE/SE Method ”* NASA 2001.

Multimedia de este trabajo:

<http://www.youtube.com/watch?v=vFIdC1k7OFs>

<http://www.youtube.com/watch?v=MIytTbx3Z94>