UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

El método analítico en la solución de problemas de la geometría: una propuesta didáctica para el bachillerato

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

JOEL CHÁVEZ BERNA

DIRECTOR DE TÉSIS: Dr. Carlos Álvarez Jiménez
Facultad de Ciencias

MÉXICO, D.F. FEBRERO 2014

Índice

Introducción

El objetivo de este proyecto es atender la problemática en la enseñanza de la Geometría Analítica en el bachillerato, de manera muy particular en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. Aunque la educación institucionalizada se nutre para su buena consecución de factores de toda índole, también ésta se ve mermada en su función por otros tantos, uno sustancial y que en el caso de este proyecto hemos acogido como fundamental, radica en la ***fragmentación*** de usos, conceptos, métodos e ideas matemáticos en la enseñanza de este campo del saber a nivel medio superior. Este factor educativo se puede considerar dentro del triángulo didáctico de Chevallard[1], como el lado comprendido entre los polos Profesor-Saber -savoir savant-; en estos términos, el problema abordado y la respectiva propuesta didáctica asumida en este proyecto corresponden al ámbito de la Enseñanza y contribuyen por tanto al diseño de una mejor *transposición didáctica*[2]

Por otro lado, **esta *fragmentación en la enseñanza del conocimiento matemático,* obedece en buena medida a una omisión en el aspecto histórico** del mismo, ya que al no considerarse de manera más efectiva el origen -génesis- de los contenidos temáticos -conceptos, métodos e ideas- de los programas de estudio para su enseñanza, el estudiante encuentra fuera de contexto los diversos aprendizajes y no percibe en consecuencia el proceso a través del cual se han construido los objetos matemáticos, teniendo en consecuencia un detrimento en la utilización de los mismos y de los métodos que a ellos subyacen. Cabe resaltar que el desarrollo histórico de los conceptos matemáticos obedece a su vez a un desarrollo secuencial que busca la estructuración de dichos objetos a lo largo de los siglos.

En concordancia con lo anterior, esta propuesta plantea hacer uso de la historia de la matemática como apoyo en la enseñanza de esta ciencia en el bachillerato, particularmente se pretenden desarrollar: ***los aprendizajes que corresponden a la geometría analítica en el bachillerato de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, estableciendo un contexto que enriquezca la solución de problemas y con ello el estudiante tenga una comprensión más significativa de esta rama de***

[1] Los lados restantes de este triángulo de la didáctica son: profesor-estudiante y estudiante-saber.

[2] Véase, Chevallard, Y., *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Aique, Buenos Aires, 1991.

las matemáticas, todo ello a través de un acercamiento mejor contextualizado y que sea acorde con su desarrollo cognitivo.

Es importante destacar que todos y cada uno de los contenidos temáticos y por ende los aprendizajes escolares en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades en el área de las matemáticas están asociados a un proceso de desarrollo histórico, el cual no ha sido bien aquilatado; en su lugar se ha intentado *propiciar* en los estudiantes una serie de aprendizajes sustentados en un cúmulo de contenidos sin contexto o problematización ficticia y que es apreciada como *irreal* para muchos jóvenes que cursan el bachillerato. Resulta pues, que el proceso histórico tiende un puente en la construcción y desarrollo de conceptos e ideas matemáticas; dicho sea de paso, este desarrollo histórico se asemeja al de las capacidades cognitivas de los individuos[3] y es por ello que esta propuesta pugna por extender investigaciones como la presente en los distintos contenidos del bachillerato de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades para el área de matemáticas.

En el caso de esta propuesta se ha considerado la Geometría Analítica como *pretexto* para reestructurar muchas de las ideas propias de esta área del saber matemático, ya que es a partir de ellas que se desarrollan los aprendizajes correspondientes en el bachillerato de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. En este sentido, es importante puntualizar que la solución de problemas[4] en geometría implica el empleo de procedimientos, los cuales abarcan no solo la disciplina matemática sino otras ramas del saber humano; este conjunto de procedimientos constituyó en la antigüedad un método que permitió abordar la geometría: el *Método del Análisis o el Método Analítico.*

De esta manera, este proyecto se sustenta esencialmente en mostrar al lector los elementos históricos y conceptuales que han contribuido de manera significativa en la construcción de lo que hoy día conocemos como una rama de la matemática denominada Geometría Analítica, y propone en este sentido una propuesta didáctica sustentada en un marco didáctico-psicopedagógico muy particular e innovador en el que se ha tratado de incorporar, al sustento teórico, aspectos relevantes de la Didáctica de la Matemática, entendida ésta como la ciencia que tiene por objetivo último llevar a buen término la *Transposición Didáctica,* para lo cual es insalvable emplear una buena dosis de historia y epistemología de las matemáticas[5].

---

[3] Véase García, R., Piaget, J., *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*, Siglo XXI, México 2008.

[4] En este caso "*La solución de Problemas"* se plantea de un modo genérico que implica en el contexto de la geometría antigua la solución -construcción- de problemas y la demostración de teoremas.

[5] D'Amore, B*,* Épsilon *El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria*, núm. 60, España, 2004, p. 413 – 434.

Por otro lado, el diseño de esta planeación didáctica se llevó a cabo para poder aplicar diversos conceptos de la enseñanza estratégica[6], la cual recupera muchos de los elementos de la psicología educativa así como de las investigaciones de diversos autores comprometidos con la enseñanza auto regulada.

La esencia de esta planeación consistió en el planteamiento de estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación. Para ello también se consideró que el profesor idóneo se aproxima mucho al profesor estratégico el cual busca que sus estudiantes sean capaces de auto regular su proceso de adquisición de conocimientos, habilidades y actitudes.

En este mismo sentido, se ha considerado la teoría psicogenética de J. Piaget, la cual descubre los *estadios* de desarrollo cognitivo desde la infancia a la adolescencia y nos permite comprender que el estudiante-adolescente se encuentra en el *Estadio de las Operaciones Formales*, etapa en la que el joven logra la abstracción sobre conocimientos concretos observados que le permitirán emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo.

[6] Véase Quesada, R., *Cómo planear la enseñanza estratégica*, Limusa, México, 2008.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y TESIS

Problemática que se pretende resolver

El objetivo de esta propuesta es atender la *fragmentación* de usos, conceptos, métodos e ideas matemáticos en la enseñanza de este campo del saber a nivel medio superior. *Esta fragmentación del conocimiento matemático, obedece en buena medida a una omisión en el aspecto histórico del mismo*, y el docente, al no considerar el origen -génesis- de los contenidos temáticos de los programas de estudio -conceptos, métodos e ideas-, propicia que el estudiante encuentre fuera de contexto los mismos y no perciba el proceso a través del cual se han construido los objetos matemáticos; este proceso obedece a un desarrollo secuencial en la búsqueda de la estructuración de dichos objetos matemáticos a lo largo de los siglos.

En el caso de esta propuesta se ha considerado la Geometría Analítica -la cual en sus orígenes es una reinterpretación de la geometría euclidiana o geometría clásica-, como *pretexto* para reestructurar muchas de las ideas propias de esta área del saber matemático, ya que es a partir de ellas que se desarrollan los aprendizajes correspondientes en el bachillerato general; en este sentido, es importante puntualizar que la resolución de problemas[7] en geometría implica el empleo de procedimientos, -los cuales no solo han abarcado la disciplina matemática sino otras ramas del saber humano, como ejemplo de ello la filosofía analítica- ello implica la utilización de conceptos conocidos con lo cual se estimula la interacción del estudiante con situaciones que lo obligan a poner en juego dichos conocimientos, a explorarlos, a modificarlos o desecharlos y con ello formar un conocimiento nuevo. En el caso de esta propuesta, el objetivo es que el estudiante revalore y ponga en juego los conceptos de la geometría elemental (euclidiana), y con ello acceda de una manera natural y consciente a las ideas que implica la nueva geometría: la Geometría Analítica.

Partiendo de este hecho, la ruptura o *fragmentación* entre ambas geometrías no será tal ya que los procedimientos y formas de abordar la geometría desde la antigüedad a través del *Método Analítico o Método del Análisis,* al ser expuestas e identificadas permitirán por una parte, desmitificar los fundamentos de la Geometría Analítica (lo que atañe a la formación docente) y allanar el terreno de lo cognitivo para el estudiante de bachillerato.

---

[7] Véase nota núm. 4.

Tema: Hacer uso de la Historia de la Matemática como apoyo en la enseñanza de las matemáticas de bachillerato, en el caso de esta propuesta se pretenden desarrollar: ***los aprendizajes que corresponden a la geometría analítica en el bachillerato, a través de diversas situaciones en donde el estudiante este en contacto con las ideas y conceptos que contribuyeron al desarrollo de esta rama de la matemática, es decir, que el estudiante identifique y reconozca al método analítico desde sus orígenes en la resolución de problemas geométricos***; estos aprendizajes se ubican en la distintas asignaturas del área de matemáticas de los bachilleratos generales en México, destacando el bachillerato de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades.

Es importante destacar que todos y cada uno de los contenidos temáticos y por ende los aprendizajes escolares del bachillerato general en el área de las matemáticas, están asociados a un proceso de desarrollo histórico, el cual ha sido soslayado o poco reconocido en los programas de estudio y también por nosotros los docentes; en su lugar se ha intentado *propiciar* en los estudiantes, una serie de aprendizajes, los cuales resultan ser en el mejor de los casos, solo un cúmulo de contenidos sin contexto o problematización real y clara para los jóvenes.

En este punto conviene hacer un alto y plantear una reflexión: El problema matemático-escolar del bachillerato, por lo regular exige del protagonista emplear aspectos puramente aritméticos[8]y en el mejor de los caso algebraicos, en menoscabo de argumentos geométricos, combinatorios o lógicos. Los problemas que se proponen son *de la vida real* o hacen alusión a situaciones que se ubican en el contexto social, económico, geográfico, etc. del estudiante, incluso en ocasiones, se plantean situaciones que ocurren en el terreno de la *ficción*; sin embargo los problemas *puramente* matemáticos no son reconocidos por lo regular como problemas de interés. Consideramos que esta lógica en el planteamiento de los problemas en la matemática escolar debe ser revertida y abogamos en esta propuesta por revalorar el proceso de resolución de problemas en matemáticas, como un medio para desarrollar el *razonamiento matemático* y una actitud positiva hacia la matemática en general y en la geometría en particular.

En este sentido, el proceso histórico es sustancial en la construcción y desarrollo de conceptos e ideas matemáticas, ya que el desarrollo del pensamiento científico se ha sucedido en diferentes *estadios secuenciales*[9]*,* a la manera del desarrollo psicogenético en los individuos, es decir, una serie de conceptos logrados y acabados los cuales se

[8] Véase, Parra, B., *Dos Concepciones De Resolución De Problemas De Matemáticas*, Educación Matemática, vol. 2, núm. 3, Grupo Editorial Iberoamérica, México 1990.

[9] García; Piaget; op. cit.

edificaron sobre la base de otros tantos, ahora se conforman como cimiento de construcciones nuevas, ejemplo de ello es el desarrollo histórico de la misma Geometría Analítica; es por ello que esta propuesta podría extenderse a los distintos contenidos del bachillerato general para el área de matemáticas.

Capítulo 1

El objetivo de este primer capítulo es mostrar los elementos históricos y conceptuales que han contribuido de manera significativa en la construcción de lo que hoy día conocemos como Geometría Analítica -GA-; su constitución se atribuye principalmente al filósofo y matemático de origen francés René Descartes 1596-1650; como se puede constatar en diversos libros de texto sobre esta rama de las matemáticas[10]; estos fundamentos nos muestran en qué medida algunos *mitos* sobre la GA que han permeado y que se encuentran muy arraigados en la comunidad científica y docente de los diversos niveles educativos resultan ser falaces; el objetivo de este trabajo será exponer estos aspectos fundamentales, que a mí parecer merecen ser revalorados desde la perspectiva histórica-conceptual, y con ello plantear una propuesta didáctica como consecuencia de este examen.

Las dos ideas que tradicionalmente se muestran como la esencia de la GA y que de suyo son falsas son:

- La GA *se contrapone y es contraria* al método deductivo, conocido este último como Método Sintético y atribuido a la geometría griega antigua.[11]
- Las expresiones algebraicas son la esencia de la GA

En un primer momento haremos referencia a la primera de estas dos premisas falaces, trayendo a discusión el Método del Análisis o Método Analítico como la contraparte del Método Sintético y como fundamento de la GA. Dejaremos la parte correspondiente al álgebra para su discusión en la sección 1.6 de este documento.

1.1 El método del análisis: sus orígenes y una descripción general

Es bien sabido que las contribuciones de la civilización griega abarcaron muchos campos del saber humano. Esta cultura ancestral se dedicó a la búsqueda de la verdad en todas sus formas, teniendo como meta principal descubrir el *porqué* de todo hecho o fenómeno aprehensible por el ser humano. Muchos de los conocimientos generados por el pueblo heleno constituyeron paradigmas hasta ya muy entrada la Alta Edad Media; en este contexto, la matemática no fue la excepción.

Una parte esencial del pensamiento helénico lo constituye el desarrollo de una ciencia deductiva, la que se desarrolló a la par de otras maneras y formas de hacer ciencia en lo

---

[10] Oteyza de Oteyza, E., *Geometría Analítica y Trigonometría*, Pearson, México 2007, p. 55, entre otros textos.

[11] Lehmann, C., *Geometría Analítica*, UTEHA , México 2001, p.10, entre otros textos.

general y matemáticas en lo particular[12], este modelo deductivo rechazaba el aspecto empírico de las cuestiones y sustentaba sus descubrimientos y creaciones en el rigor del pensamiento lógico, cabe mencionar que tal modelo se constituyó como el paradigma científico -matemático- durante muchos siglos. Sin ser pretenciosos en esta somera exposición del pensamiento matemático helénico podemos establecer de manera muy puntual el *paradigma* de la matemática en la antigua Grecia: *los Elementos* de Euclides. Es esta obra la que condensa toda la fuerza y la belleza de los encadenamientos lógicos y del método empleado por los geómetras griegos de la antigüedad.

los Elementos, fueron el canon del Método Sintético -lógico-deductivo- durante más de un milenio; su característica principal es la aplicación de un robusto modelo de demostración, pero sobre todo, un modelo de *Exposición*, el cual oculta el verdadero camino heurístico y de descubrimiento que subyace en cada una de las proposiciones que conforman la obra.

Como es bien sabido, *Los Elementos* de Euclides son la culminación de una primera etapa del desarrollo de la matemática helénica, la cual estuvo plagada de descubrimientos y aportaciones de distintos matemáticos. Dichos conocimientos lograron ser organizados por el fundador de la escuela de Alejandría[13] y alumno de la Academia Platónica de Atenas: Euclides. En este sentido, Euclides es el *Gran organizador* de diversas teorías del saber matemático desde Tales de Mileto -siglo V a.C.-, Pitágoras –siglo IV a.C.-, y otros geómetras menos conocidos, entre los cuales resulta pertinente mencionar a Hipócrates de Quios, quien resolvía problemas geométricos: "*retrotrayendo la prueba de unas proposiciones iniciales a la prueba de otras más básicas*"[14]. El proceder de este geómetra antiguo era el planteamiento de una hipótesis en cada uno de los problemas que pretendía solucionar, es decir, una suposición o condición de la cual dependería la solución de la cuestión a resolver.

Por estos hechos, seguramente Proclo alude a Hipócrates de Quios en sus Comentarios al Libro I de *los Elementos* y en relación con la invención de un *Método* que permite ir más allá de la mencionada exposición de un teorema o un problema geométrico: "la apagogé

---

[12] Un ejemplo de esta variedad de formas de hacer matemáticas giran en torno a la solución de los problemas clásicos de la antigüedad -duplicación del cubo, cuadratura del círculo y trisección del ángulo- y la construcción de dos medias proporcionales.

[13] Euclides, *Los Elementos, Libros I-IV,* Introducción de Luis Vega. Traducción de María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos, Biblioteca Clásica Gredos, Madrid 1991, p. 11.

[14] Ibidém p. 31.

es una reducción de un teorema a otro que es conocido o determinado, lo cual conduce a la solución de la cuestión propuesta"[15].

Testimonios como el anterior hacen suponer la existencia de un método -*El Método del Análisis o Método Analítico*-, el cual no fue expresado ni explicitado en *los Elementos* de Euclides. En estos términos, es imprescindible remontarnos a los orígenes de la GA, intentando identificar lo que hace que la GA sea *Analítica*.

En esta recuperación preliminar del origen de lo *Analítico* en la geometría y el pensamiento griego antiguo, podemos rescatar el siguiente pasaje tomado de la obra platónica *La República*, en el cual se muestra de manera patente la presencia de un *Método* -el del *análisis* o *analítico*-, en el quehacer de los matemáticos y geómetras helenos que precedieron a Euclides y sus *Elementos*:

"Creo que sabes que los que se ocupan de geometría y del cálculo suponen lo par e impar, las figuras y tres clases de ángulos………, como si las conocieran, las adoptan como supuestas………, y partiendo de ellas atraviesan el resto de modo consecuente, para concluir aquello que proponían al examen"[16].

El punto culminante de este tipo de investigación que combinaba el *Análisis* y la *Síntesis*, lo podemos encontrar en la obra de Pappus[17] *la Colección Matemática*, en particular en el capitulo referente al *Dominio del Análisis* -τόπος ἀναλυόμενος-[18] en él nuestro autor realiza una descripción pormenorizada de la comprobación y validez necesarias para encontrar la prueba de un teorema o la resolución de un problema -en general una construcción-. Para ello, nos dice, se procede *Analíticamente.*

El objetivo, entonces, es regresar a los fundamentos de algo, pero puede haber distintos modos de hacer esto, cada uno de los cuales podría ser llamado *Análisis*. Este último hecho da pie para establecer una caracterización más específica de lo que es el *Análisis*.

---

[15] Véase González, P., Los o*rígenes de la geometría analítica,* Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, Tenerife, 2003.

[16] Platón, *La República. Libro VI,* Gredos, Madrid 2000, p. 340.

[17] Hintikka, R., Remes, U., *The Method Of Analisys: Its Geometrical Origin and Its General Significance*, Dordrecht, Holland 1974, p. 9.

[18] Véase Jones, A., *Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection*, Springer-Verlag, New York 1986.

1.2 Caracterización del Análisis

Etimológicamente la palabra *Análisis* se deriva del término griego antiguo *analusis*[19]. El prefijo *ana* significa "arriba" o "enteramente", y *lysi* significa "soltar, liberar o separar"; de modo que *Analusis s*e puede identificar con la "disolución o separación entera o completa de algo". El término fue ampliado a la solución o la disolución de un problema geométrico[20] filosófico en la antigüedad griega.

Al preguntar hoy día lo que el *Análisis* significa, la mayor parte de las personas inmediatamente piensan en separar algo en sus componentes; es de esta manera como el análisis tiende a ser oficialmente caracterizado[21]. El análisis también es definido como la resolución en elementos más simples -opuesto a la *Síntesis*-[22], por otro lado, el análisis también es caracterizado como el *proceso de fragmentar* un concepto o un razonamiento en partes más simples, de modo que su estructura lógica se muestre[23]. En las anteriores definiciones podemos destacar una caracterización común: *Fragmentar algo;* a esta forma de concebir el análisis la llamaremos *Concepción Descomposicional*[24] del análisis; notamos también una identificación del análisis enfocada a *Retroceder*, partiendo de un hecho dado, hacia elementos más simples.

Cabe destacar que el Análisis fue, al principio, utilizado en un sentido metodológico en la geometría griega, y aunque l*os Elementos* de Euclides datan aproximadamente del año 300 A.C., y son posteriores a Platón y a Aristóteles, es claro que en esta obra se encuentra el trabajo de muchos geómetras anteriores, entre ellos Teeteto y Eudoxo, quienes trabajaron estrechamente con Platón[25]. Incluso se ha creído que el propio Platón fue el inventor del método del análisis; sin embargo, lo que se puede afirmar categóricamente es la influencia que la geometría tuvo en el pensamiento platónico, lo cual se empieza a mostrar en algunos de sus diálogos *-el Menón, la República y el Teeto-*, de igual manera se puede afirmar que Platón seguramente alentó el desarrollo de la geometría en su Academia y con ello el desarrollo del método del análisis.

---

[19] Ediciones Universidad de Salamanca, *Diccionario* Médico-Biológico, Histórico Y *Etimológico*, Universidad de Salamanca, en http://dicciomed.eusal.es/ Véase Ibídem., p. 5.

[20] En este caso *"La solución de Problemas"* se plantea de un modo genérico que implica en el contexto de la geometría antigua, la solución -construcción- de problemas y la demostración de teoremas.

[21] Real Academia Española, *Diccionario de la lengua española*, 23ª edición, en http://www.rae.es, apartado "diccionario".

[22] Sykes*, J.B.,* The Concise Oxford Dictionary*, 6ª ed.,* Oxford: Oxford University Press, 1976.

[23] Blackburn, S., *The Oxford Dictionary of Philosophy*, 1ª ed., Oxford: Oxford University Press, 1996.

[24] Beaney, M., Analysis, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy , Summer 2011.*

[25] Véase Heath, T., *A History of Greek Mathematics*, Vol. I, Dover, New York, 1981.

Como podemos notar, el Análisis siempre ha estado en el centro de la actividad geométrica desde la antigüedad; sin embargo, éste ha sido entendido y practicado de formas diferentes. Una de ellas corresponde, como ya se mencionó, a un *Proceso o Funcionamiento en Retroceso*, en dirección hacia lo más fundamental. Este hecho implica que ese *Algo* que es buscado es tomado como *Dado o Conocido* al comienzo de la indagación.

Una vez que se justifica la existencia de ese *Algo* podrá ser explicado o reconstruido, la explicación o la reconstrucción a menudo son expuestas, como se mencionó al principio de este capítulo, en un proceso de *Síntesis*.

En el pensamiento griego antiguo el análisis se refirió principalmente a este proceso de *trabajar hacia atrás,* en *Retroceso*, hacia los principios elementales por medio de los cuales algo podría ser demostrado, a esta concepción la llamaremos: *Concepción Regresiva* del análisis. Por otra parte, el trabajo de Frege y Russell indica que antes de que ocurra el proceso de descomposición, primero tienen que ser *Interpretadas* lógicamente las declaraciones por analizar. Esto sugiere que el análisis también implica una *Dimensión Transformativa o Interpretativa*. Esta última concepción también tiene sus raíces en el pensamiento antiguo -desde la geometría griega antigua hasta la filosofía medieval-.[26]

Por lo anteriormente expuesto podemos caracterizar el análisis desde tres perspectivas:

- Perspectiva Descomposicional
- Perspectiva Regresiva
- Perspectiva Interpretativa o Transformativa.

En la práctica del análisis estas tres concepciones son reflejadas en diferentes grados y de diferentes maneras, es decir, no compiten entre sí, sino que se complementan y operan en colaboración mutua.

A manera de esquema inicial y como preámbulo a una exposición más rigurosa del análisis geométrico en la antigüedad, podemos mencionar una de las proposiciones de l*os Elementos* de Euclides, la proposición 47 del libro I. En ella se demuestra que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construidos en los lados restantes. En consecuencia y con base en lo detallado en este preámbulo, podemos asumir como *dados* los tres cuadrados en sus correspondientes lados. En la investigación de las propiedades de esta figura compleja podemos dibujar líneas adicionales -líneas auxiliares- entre puntos particulares y

[26] Véase Beaney, M., Analysis*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy , Summer 2011.*

encontrar que hay varios triángulos congruentes en los cuales podemos comenzar a descubrir la relación entre las áreas relevantes. El Teorema de Pitágoras, visto así, depende de teoremas sobre triángulos congruentes, y una vez que se enlazan éstos con otros teoremas que han sido identificados y demostrados, el Teorema de Pitágoras puede ser probado**.** Es de capital importancia destacar que en cada una de las proposiciones de l*os Elementos* de Euclides hay un proceso de análisis que antecede su exposición, pese a ello Los Elementos constituye una obra de corte sintético ajena en sí al método del análisis, el cual es desplegado en otras obras euclidianas y de otros geómetras griegos.
En la siguiente sección se profundizará en las características del análisis en la geometría de los antiguos y se proporcionarán algunos ejemplos concretos.

1.3 El análisis en la geometría griega antigua

El análisis en la geometría antigua consistía en un método de *descubrimiento* y no de demostración directa. Es en el *análisis* de los antiguos geómetras griegos que se presupone cierto aquello que hay que probar y se razona en base a ello hasta llegar a alcanzar un resultado cierto; una vez que se ha llegado a esto último se inicia con el proceso inverso, es decir, con la síntesis de la proposición en cuestión; el objetivo de este último procedimiento era *exponer* la prueba legítima de aquello que había que probar. Por lo tanto, el *análisis* es un procedimiento sistemático -método- que permite descubrir las condiciones necesarias para que un teorema sea cierto o un problema pueda ser resuelto. Sin ahondar en una caracterización del proceso de Síntesis, podemos comentar que la síntesis es también un método que supone al último resultado alcanzado a través del análisis como algo con lo que se cuenta, qu se ue se ha hecho ya -algo conocido-. Y al organizar en su orden natural como resultados -epomena- los antecedentes previos, y uniéndolos uno con el otro, al final llegamos a la construcción de la cosa buscada. A esto llamamos la síntesis -composición-[27] a este respecto, es de destacar la explicación que Platón presenta en su República:

"la síntesis no solo consiste en exponer sino también en establecer principios -aserciones-, de las cuales ya no es posible dar más razón ni considerar otras posibilidades; estos principios son obvios para cualquiera y a partir de ellos se deduce el resto".[28]

---

[27] Véase Beaney, M., Analysis, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy , Summer 2011.*
[28] Euclides, op. cit., p. 32.

Retomando nuestra exposición referente al análisis geométrico antiguo tenemos que la fuente clásica para su mejor comprensión es l*a Colección Matemática de Pappus*, en particular el *Libro VII*; esta obra fue compuesta aproximadamente en el año 300 d. C., y recopila seis siglos de trabajo en la geometría a partir de la época de *los Elementos* de Euclides:

"… el análisis es el camino hacia lo que se busca -como si fuese admitido- a través de sus consecuencias -akolouthôn- a fin de ser admitido en un proceso de síntesis. Para el análisis suponemos que lo que se busca se ha hecho ya, y preguntamos qué resulta, nuevamente nos preguntamos por el antecedente de esto último, hasta que en este camino hacia atrás se haga la luz cuando encontremos algo ya conocido y siendo lo primero en orden. Y llamamos a tal método Análisis, entendido como una solución en retroceso o regresiva -anapalinlysin-"[29]*.*

De acuerdo con lo expuesto en la sección anterior, podemos inferir de lo dicho por Pappus en el Libro VII de su *Colección* que el análisis geométrico antiguo se caracterizó principalmente por ser un Análisis Regresivo y, en cierta medida, Descomposicional. Pappus nos habla del Dominio del Análisis, haciendo alusión al método del análisis, como un recurso extraordinario para aquellos que quieren adquirir destreza y capacidad en la solución de problemas de la geometría. Este método tiene dos vertientes:

- *Análisis Teoremático*
- *Análisis Problemático*

En ambos casos el *Análisis* consiste en aceptar como *Dado* lo que se está buscando y *averiguar* de dónde proviene, procediendo de esta forma hasta alcanzar *algo ya conocido.* A continuación se presenta un desglose de las características de estos tipos de análisis.

Análisis Teoremático: Supone que lo que se pretende demostrar es Cierto o Verdadero y se procede de manera regresiva a través de las consecuencias derivadas -a través de lo que llamaremos Construcciones Auxiliares- de la suposición inicial, de manera tal que estas consecuencias se asumen como hipótesis, las que en última instancia se tendrán que validar; sí se llega a algo que sea verdadero, la premisa a demostrar será verdadera. Pero si transitamos hacia algo falso e inaceptable, la demostración de lo deseado será también falsa. Al invertir este proceso de análisis tendremos la demostración de la premisa inicial considerada como verdadera.

[29] Hintikka, Remes, op. cit., p. 8.

Cabe destacar que los ejemplos de análisis teoremático son escasos en los textos antiguos,[30] posiblemente porque este método no garantiza que un teorema sea correcto, ni la validez de la demostración al invertir los pasos de la argumentación analítica.

Análisis Problemático: Supone la construcción deseada como Conocida y se transita de forma regresiva hacia los objetos geométricos relacionados con la suposición inicial. Si el objeto inicial puede ser construido -a través de Construcciones Auxiliares-, es decir, si ocurre lo que los matemáticos griegos llamaban δοθέν -originarias del donante-, o en otras palabras, si en las condiciones iniciales -*los datos*- del problema a resolver esta dada la solución al mismo, el problema será resuelto; pero si transitamos hacia algo imposible de ser aceptado, la construcción del objeto deseado será también imposible.[31]
En contraste con el análisis teoremático, en el análisis problemático los ejemplos abundan en los textos antiguos, ya que existía un amplio repertorio de operaciones *reversibles,* las cuales conformaban los pasos a seguir en las construcciones auxiliares; adicionalmente este tipo de análisis proporciona información acerca de las condiciones que hacen posible la solución de un problema.
Las ideas de Pappus expresadas en el Libro VII de su *Colección Matemática*, nos muestran las características del Análisis geométrico practicado en la antigüedad, en donde destacan tres aspectos sustanciales de este método antiguo:

- Es un *Análisis Regresivo* y en cierta medida *Análisis Descomposicional.*
- El uso de *Construcciones Auxiliares.*
- Los *Datos* son relevantes para descubrir la solución del problema o la demostración del teorema.

El primero de estos puntos coincide con lo planteado en la sección anterior de este capítulo, es decir, la perspectiva regresiva del análisis en un sentido general.
En lo que respecta a las Construcciones Auxiliares, éstas juegan un papel sustancial en el análisis antiguo y su desarrollo se va dando en el transcurrir del proceso mismo; un hecho relevante es que las construcciones requeridas por un teorema o problema para ser resueltos o construidos, no siempre están determinadas de manera previa al desarrollo del proceso analítico.
Debido a este hecho el método del análisis antiguo es un tanto incierto como método de descubrimiento, ya que la necesidad de este tipo de construcciones es en sí una

[30] Al mencionar estos textos antiguos, nos referimos en todo momento a los que el propio Pappus alude en su *Colección Matemática* y que son obras del Análisis antiguo: obras de Euclides, Apolonio de Perga y Aristeo.
[31] Hintikka, R., Remes, U., op. cit., p. 23.

limitación heurística que impide establecer una camino para alcanzar lo deseado en un problema o teorema geométrico; lo anterior obedece principalmente al hecho de que las más de las veces el proceso de análisis está centrado en el estudio de estas configuraciones en sí mismas, sin hacer uso de un medio interpretativo relevante.

Este medio *interpretativo* será desarrollado posteriormente y tendrá como lenguaje el álgebra, el cual, dicho sea de paso, es producto de las técnicas analíticas de los matemáticos griegos retomadas en periodos históricos posteriores.

Los *datos* o condiciones iniciales de un problema bien planteado -entiéndase problema geométrico o teorema geométrico- que se pretende resolver, necesariamente implican, por sí mismas, condiciones no explícitas, las cuales se pueden dar esencialmente en términos de tres propiedades geométricas básicas: la Magnitud, la Posición y la Especie.

Para una comprensión cabal de estos términos, es imprescindible retomar otra obra euclidiana: *los Datos*. En ella se vislumbra la concepción de *Lo Dado* en el método del análisis de la matemática griega: "los datos pueden definirse como un conjunto de partes de una figura, tales que si todas menos una están dadas, entonces la restante queda determinada"[32]; por ejemplo, si es conocida la magnitud A y también la razón A/B, entonces está determinada B. Este hecho nos da luz en lo que concierne al *análisis* previo que el geómetra ejecutaba para llegar a una construcción o demostración.

Las proposiciones de esta obra muestran qué *cosas* pueden ser descubiertas de aquello que por hipótesis se da por conocido. Sus cuatro definiciones iniciales son las siguientes:

"Definición1: Están dados en magnitud, líneas, ángulos y figuras si de ellos podemos proporcionar otros iguales.

Definición 2: Una razón está dada si podemos proporcionar otra igual.

Definición 3: Las figuras rectilíneas están dadas en especie, si cada ángulo es dado en magnitud y las razones entre sus lados están dadas una a una.

Definición 4: La posición de puntos, líneas y ángulos están dados, si estos mantienen el mismo lugar."[33].

El término *proporcionar* de las definiciones anteriores hace alusión a una construcción geométrica -hecho por demás relevante para el ulterior desarrollo del método analítico-. Los teoremas de esta obra euclidiana tan estrechamente vinculada con el Análisis,

---

[32] Eves, H, *Estudio de las geometrías,* tomo I, UTHEA, México 1963, p.26.

[33] Euclid, *Data,* by Richard J., London 1756.

establecen que si algún objeto se asume como *Dado*, las afirmaciones, construcciones y aserciones que de él se hagan llevarán a buen término la investigación acerca del problema por vía del Análisis.

Finalmente cabe destacar que la mayor parte de los textos antiguos del Análisis contemplan problemas de *Lugar,* y cinco de estos textos pertenecen a Apolonio. Por tanto podemos suponer que el objetivo a propósito de este geómetra griego al desarrollar estos trabajos era ampliar aún más el *Dominio del Análisis*; sin embargo, *las Cónicas* obra también de Apolonio, es incluida por Pappus dentro del Análisis. Este hecho resulta extraño ya que este texto está dedicado a establecer las propiedades de estas curvas y no atañe propiamente a la solución de los problemas de Lugar; pese a ello el mismo Pappus nos orienta[34] del porqué esta obra pertenece al Dominio del Análisis, al sugerir que *Las Cónicas* son el preámbulo, sin el cual muchos de los teoremas de Lugar que se presentan en otras obras del análisis no se podrían justificar.

Este último hecho nos permite plantear que el análisis antiguo tuvo su veta de desarrollo en los problemas de Lugar, y que estos fueron el arquetipo en el uso y desarrollo del método analítico. En ellos las propiedades de las curvas llamadas cónicas juegan un papel fundamental, por ello la importancia de su estudio como parte de la Geometría Analítica moderna -siglo XVII-, el cual fue retomado por matemáticos de este periodo histórico, preeminentemente por René Descartes.

A continuación mostramos el proceso de análisis que antecede a la exposición o Síntesis de algunas proposiciones de *los Elementos* de Euclides, apegándonos a las dos vertientes del análisis geométrico antiguo enunciadas por Pappus en su *Colección Matemática*.

1.4 Ejemplo del Análisis Problemático

Proposición IV-11 *los Elementos*, Euclides

Inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado, (Fig. 1).

[34] Jones, A., op. cit., p. 114.

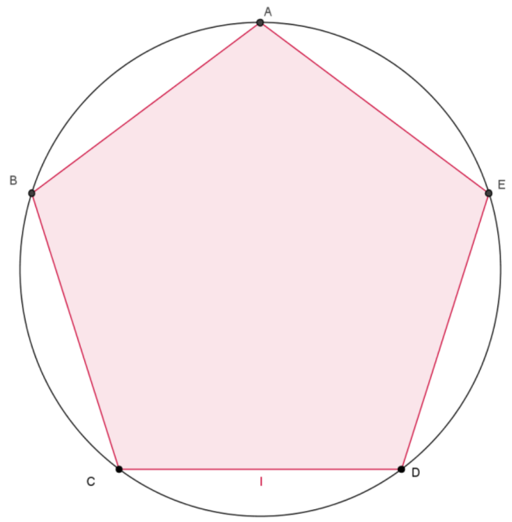


Fig.1

Análisis:

Dada la circunferencia, suponemos en ella inscrita -*Dado*- un pentágono equilátero y equiángulo:

Primera construcción auxiliar:

- Construir el segmento AC y el segmento AD, lo que implica la construcción del triángulo ACD, (Fig. 2).

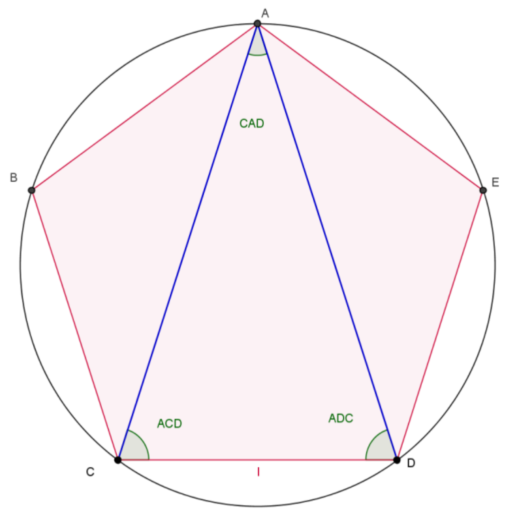


Fig. 2

- Por otro lado, los arcos subtendidos por cada una de las cuerdas que forman las aristas del pentágono inscrito son congruentes entre sí.
- Por lo tanto en el triángulo ACD los ángulos $\angle ACD$ y $\angle ADC$ son congruentes entre sí, ya que las cuerdas AD y AC subtienden arcos iguales, esta conclusión implica una proposición conocida de *los Elementos*, la III-24; por ello el triángulo ACD es un triángulo isósceles ya que también es conocida la proposición I-5 de los *Elementos*.

- Además, cada uno de los ángulos $\angle ACD$ y $\angle ADC$ son en magnitud el doble del ángulo $\angle CAD$, ya que la cuerda CD subtiende un arco que es la mitad de los arcos subtendidos por AD y AC. Es decir nuestro triángulo ACD, además de ser isósceles, es un triángulo 2, 1, 2, porque sus ángulos congruentes duplican en magnitud al ángulo restante (Fig. 3).

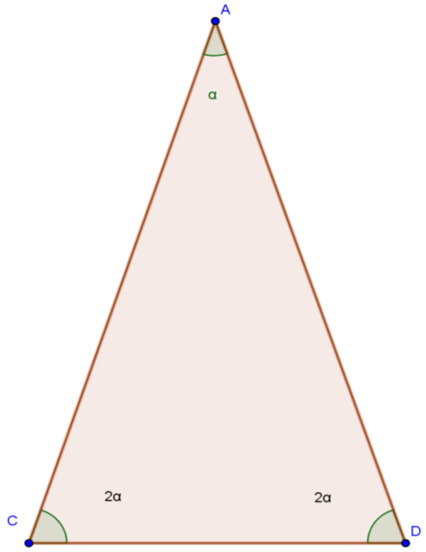


Fig. 3

Segunda construcción auxiliar:

- Al bisecar cada ángulo $\angle ACD$ y $\angle ADC$, tenemos que las cuerdas $CD, DE, EA, AB\ Y\ BC$ son congruentes; por lo tanto, para inscribir un pentágono regular en una circunferencia, primero se inscribirá un triángulo isósceles 2, 1, 2 en la circunferencia dada.

Hasta este punto del análisis quedan patentes dos hechos:

1. Se supone como dado el pentágono inscrito -equilátero y equiángulo-
2. Se hace uso de construcciones auxiliares, dos en este caso

De estos hechos resulta que para inscribir un pentágono equilátero y equiángulo es necesario:

1. **Construir un triángulo isósceles 2, 1, 2**
2. **Inscribir un triángulo 2, 1, 2 en una circunferencia dada en *magnitud* y *posición***

Correspondería ahora hacer el *análisis* para cada una de estas proposiciones. A continuación mostraremos el análisis para el primer problema

Análisis de la construcción de un triángulo isósceles 2, 1, 2:

Suponemos *Dado* un triángulo isósceles 2, 1, 2

Primera construcción auxiliar:

- Construir el segmento AB el cual biseca al ángulo $\angle ACD$ y genera con ello los ángulos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, con este segmento hemos construido entonces, los triángulos BCD y ABC, (Fig.4)

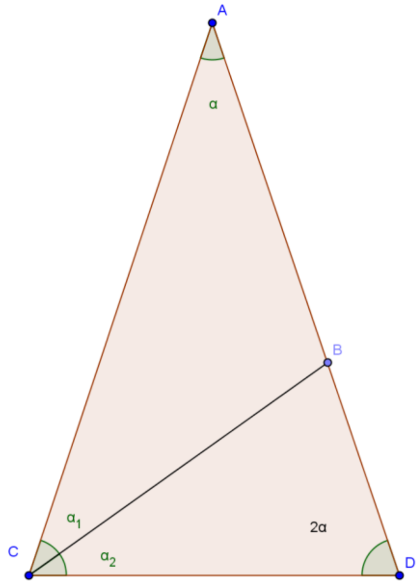


Fig.4

Para el triángulo BCD tenemos que:

- El ángulo $\angle BCD = \alpha$, el ángulo $\angle CDB = 2\alpha$, por tanto el ángulo restante $\angle CBD = 2\alpha$ ya que en todo triángulo la suma de las magnitudes de sus ángulos internos es igual a dos rectos; esta aseveración es conocida y está probada por el teorema I-32 en los *Elementos*; en este caso para nuestro triángulo principal ACD, la suma de sus ángulos internos es igual a 5α.

- Producto de lo anterior, el triángulo BCD es un triángulo isósceles ya que $\angle CBD = \angle CDB = 2\alpha$ por lo que:

$$CD = BC$$

- Como resultado de esta última construcción podemos afirmar que los triángulos BCD y ACD son semejantes, luego:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{CD}{BD}$$

Por tanto $\frac{AD}{BC} = \frac{CD}{BD}$ se transforma en

$$\frac{AD}{BC} = \frac{BC}{BD} - - - - - - a)$$

Para el triángulo ABC tenemos que:

- El ángulo $\angle ACB = \alpha$, al igual que el ángulo $\angle BAC = \alpha$, y el ángulo restante $\angle ABC = 3\alpha$, por tanto el triángulo en cuestión es isósceles, en donde

$$AB = BC - - - - - b)$$

Combinando las expresiones a) y b), tenemos que:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BD}$$

Esta expresión implica que para construir un triángulo isósceles 2, 1, 2 es necesario dividir un segmento AD en Razón Extrema y Media; esta última proposición nos obligaría a realizar un nuevo análisis. Resulta obvio que el análisis de esta proposición -problema- nos llevará a otra más, *ad infinitum*.

Por ende, el análisis que hemos realizado a la proposición inicial -inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado-, muestra fehacientemente que el método analítico antiguo conduce a una encadenamiento de proposiciones que requieren, a su vez ser *analizadas*. Lo anterior corrobora un hecho de sobrada importancia: detrás de cada una de las proposiciones euclidianas de los *Elementos* se encuentra un proceso de análisis que permite descubrir -resolver o demostrar- una determinada proposición, la que posteriormente será expresada en un proceso de síntesis.

1.5 Ejemplo del Análisis teoremático

Proposición I-32 Los *Elementos*, Euclides

En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos del triángulo son iguales a dos rectos.

En primera instancia consideremos la (Fig.5) y analicemos la primera parte de la proposición: el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos.

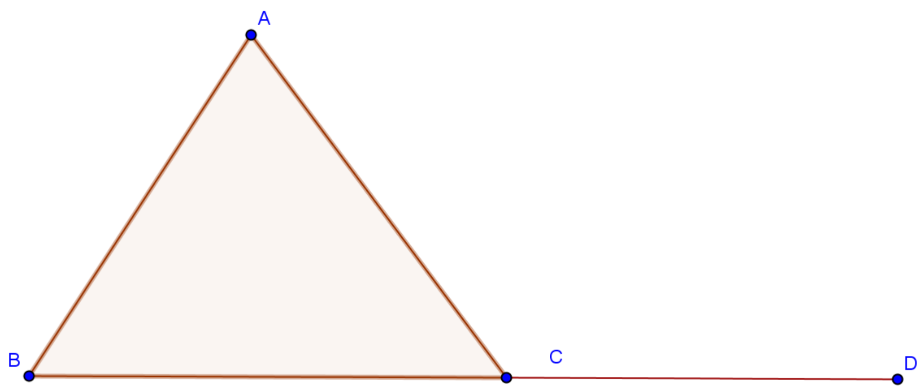


Fig. 5

Análisis:

Primera construcción auxiliar:

- **Damos por hecho que el ángulo $\angle ACD$ es igual a los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BAC$.** En otras palabras, suponemos verdadera la proposición. Por lo tanto debe existir una recta que pase por C y que divida al ángulo $\angle ACD$ de manera tal que una de ellas sea el ángulo $\angle ABC$ y la otra el ángulo $\angle BAC$.
- La única recta que cumple esa condición es aquella recta CE que es paralela a la recta AB, ya que de esta manera al ser $AB \parallel CE$, la recta AC se transforma en una recta transversal para las rectas AB, CE $\therefore$ **los ángulos $\angle BAC$ y $\angle ACE$ son ángulos alternos internos en esta nueva construcción auxiliar**. Este último resultado está dado en la proposición I-29 de los *Elementos*, en consecuencia:

$$\angle BAC = \angle ACE \quad \ldots\ldots 1)$$

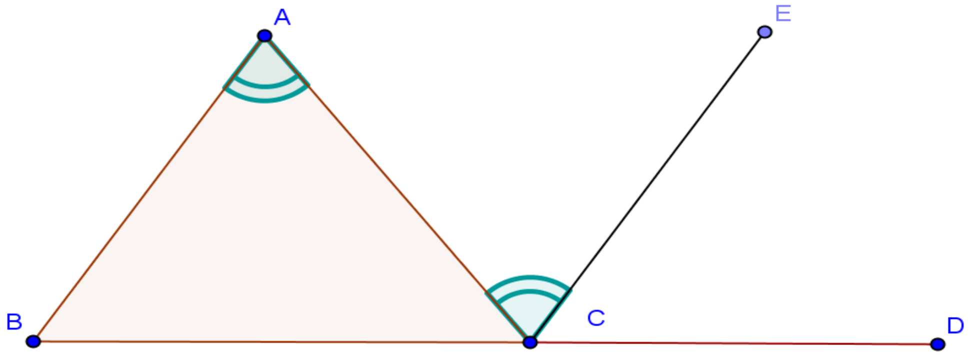


Fig. 6

- Recurriendo a esta misma construcción auxiliar (Fig. 7), podemos notar que la recta BD es también una transversal a las rectas paralelas AB, CE; en consecuencia, el ángulo $\angle ABC$ es ángulo correspondiente con el ángulo $\angle DCE$, es decir:

$$\angle ABC = \angle DCE \quad \ldots\ldots 2)$$

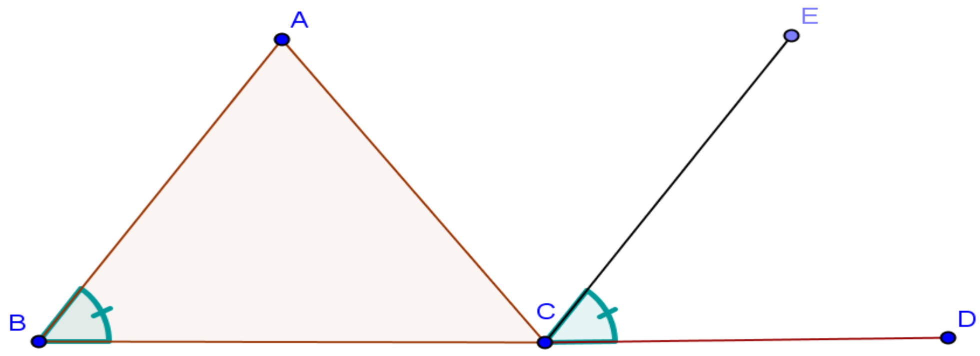


Fig. 7

- Combinando las relaciones 1 y 2 tenemos que:

$$\angle ACE + \angle DCE = \angle ACD \ldots \ldots .3)$$

- En donde, el ángulo $\angle ACD$ es el ángulo externo; pero hemos descubierto a partir de la construcción auxiliar de la (Fig. 6), la relación 1 y a partir de la (Fig. 7) la relación 2, por tanto la expresión 3 se transforma en:

$$\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$$

Por tanto, podemos concluir que el ángulo externo de un triángulo es igual a los dos ángulos internos y opuestos.

Para la segunda parte de esta proposición euclidiana: a saber que, los tres ángulos del triángulo son iguales a dos ángulos rectos, tenemos la (Fig. 8):

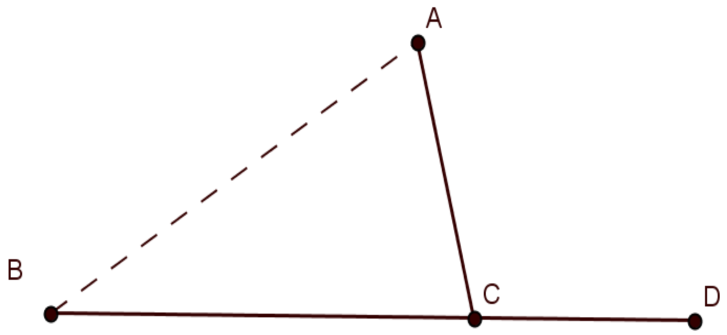


Fig. 8

Segunda construcción auxiliar

- Si consideramos únicamente la recta BD y la recta CA levantada en C, **sabemos** por la proposición I-13 de los *Elementos* que $\angle BCA$ y $\angle ACD$ forman un ángulo completo de magnitud igual a dos ángulos rectos es decir:

$$\angle BCA + \angle ACD = 2R$$

- Adicionalmente, en términos del Análisis de la primera parte, y de nuestra proposición euclidiana I-32, hemos ***descubierto*** que para el triángulo ABC -ver (Fig. 5)-, se cumple que $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$, por lo tanto $\angle BCA + \angle BAC +$

$\angle ABC = 2R$, por lo que las magnitudes de los tres ángulos internos de un triángulo son iguales a dos ángulos rectos.

Finalmente para concluir este breve sumario del análisis antiguo y teniendo como referencia nuestros ejemplos de análisis problemático y análisis teoremático, es pertinente enfatizar lo siguiente: las proposiciones IV-11 Y 1-32 *exponen* en los E*lementos* por medio del Método Sintético la manera en que se resuelve y se demuestra este problema y este teorema en particular, sin embargo, no *muestran* el camino a través del cual se llega a la solución y a la demostración respectivas, este método analítico que permite solucionar y demostrar permanecerá oculto por varios siglos y será el filósofo y matemático de origen francés René Descartes -1596-1650-, quien retome en su obra *La Géométrie* un problema geométrico de la antigüedad parcialmente resuelto por los geómetras griegos de aquel momento, y con ello dé un giro al incorporar nuevos elementos al antiguo Método del Análisis. En las siguientes secciones de este capítulo se expondrán estos nuevos elementos que Descartes agrega al antiguo método del análisis, dotándolo de mejores componentes *Interpretativos y Transformativos*, así como priorizando el enfoque *Descomposicional* sobre la perspectiva *Regresiva* que predominó en el análisis antiguo.

1.6 Álgebra y Geometría antes de Descartes

En un primer momento resulta pertinente establecer que Descartes es depositario de lo que algunos llaman la tradición algebraica, iniciada esta por Diofanto -siglo II d.C.-. Es en el periodo que comprende el año 1590 a 1650, cuando la *Colección Matemática* de

Pappus[35] se vuelve un punto de discusión permanente -en 1588 aparece la traducción al latín de esta obra hecha por Federico Commandino-, y a partir de este hecho diversos matemáticos coinciden en que el estilo clásico de resolver problemas en geometría necesitaba *conciliar* el método a través del cual se encuentra o descubre la solución a un problema geométrico determinado con el método que expone la solución del mismo, es decir, explicitar el análisis a la par de la síntesis.

A partir de los trabajos de François Viète -1540-1603- es que el Álgebra se conformaría en un instrumento *Interpretativo y Transformativo* válido dentro del método analítico en geometría -la reducción de un problema geométrico a una ecuación, generalmente en una incógnita, en donde la solución de la ecuación corresponde con una construcción geométrica estándar-, pese a que de alguna manera este vínculo entre álgebra y geometría ya se había hecho patente para algunos matemáticos del Renacimiento. Es François Viète quien lo llevaría a un punto culminante en su *Introduction en L'art Analytic,* para que posteriormente Descartes lo ampliara aún más.[36]

En su obra, Viète establece el uso del álgebra -una estructura algebraica- en dos contextos, a saber: uno numérico y otro para cantidades abstractas. Es en esta última categoría donde tienen cabida las magnitudes geométrica; para ello Viète sustituye el álgebra de números o, como él la llama, *logistica numérica,* por una *logistica especiosa*, siendo esta última la que está vinculada a las especies -formas-, muy particularmente las magnitudes geométricas. En esta logística especiosa las operaciones no dependen del carácter ontológico de sus elementos y las reglas se definen para las operaciones de las cantidades; para esta *nueva álgebra,* Viète establece reglas de operación entre cantidades abstractas, cantidades que no necesariamente son números como tales -enteros y fracciones-, sino que son validas para cualquier cantidad *abstracta*, en este nuevo contexto las cantidades quedarán subordinadas al carácter enteramente formal de las reglas que rigen las operaciones que con dichas cantidades es posible realizar. Es necesario precisar que para este autor al igual que para los geómetras antiguos, sigue siendo válida y necesaria la diferencia entre magnitud discreta y magnitud continua, por otro lado podemos destacar que para Descartes y su moderno enfoque del Análisis es de especial interés la ley de operación entre cantidades homogéneas modelada por Viète ; esta ley implica que:

---

[35] Se comentó la importancia de este texto en la sección 1.3 del presente capítulo.

[36] Bos, H., *Redefining Geometical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer Verlag, New York, 2001 p. 98.

- Solo las cantidades del mismo tipo, es decir aquellas que tienen la misma dimensión, pueden ser añadidas, sustraídas y comparadas.[37]

De esta manera la ley de homogeneidad, establece que:

- La suma y la resta solo son posibles entre cantidades de la misma especie, líneas rectas con líneas rectas, magnitudes angulares con magnitudes angulares, etc.
- La multiplicación y la división no necesariamente se pueden dar entre cantidades homogéneas -de la misma especie-, sin embargo el producto y el cociente de cantidades homogéneas no resultará en una de la misma especie, es decir la multiplicación involucra un cambio de dimensión, sin embargo, como es bien sabido, en la geometría antigua la máxima dimensión aceptada era la dimensión espacial. La concepción de *cantidad abstracta*, asumida por Viète le permitió salvar este inconveniente.
- La comparación entre dos cantidades de la misma dimensión -especie- se establece a través de una razón, y esta última satisface las reglas de transformación para las razones y proporciones de la siguiente manera:

$$a:b = c:d \iff ad = cb$$

Con esta ley de operación entre cantidades homogéneas Viète asocia a la geometría euclidiana una estructura algebraica formal con la cual se explicitan y reinterpretan las operaciones geométricas válidas en los *Elementos;* de igual manera, este autor introduce también el álgebra simbólica correspondiente -símbolos para cantidades indeterminadas e incógnitas-, con la incorporación de esta herramienta simbólica Viète contribuye a la formación de la matemática moderna con los medios esenciales para la comunicación del argumento matemático correspondiente.

Sin hacer más hincapié en la obra de Viète solo mencionamos que él no aplicó esta *nueva álgebra* al estudio de curvas. Serán Fermat y Descartes quienes exploten sus beneficios décadas después.

1.7 El aporte Cartesiano

Con el antecedente de la obra de Viète, será el propio Descartes quien establezca para los magnitudes geométricas una estructura algebraica -operaciones formales y homogeneidad- que supera a la de su antecesor, para ello, define a los segmentos de

[37] Álvarez, C.; Martínez, R.; *Descartes y la ciencia del siglo XVII*, Siglo XXI, UNAM México 2000, p. 34.

recta como la magnitud homogeneizadora para el resto de las magnitudes geométricas, es decir, que cualquier otra magnitud -magnitudes angulares, áreas y volúmenes- podrá ser expresada en términos de líneas rectas. Este hecho es crucial y marca una diferencia sustantiva con Viète, ya que al introducir una U*nidad* -elemento neutro para la multiplicación-, se deja a un lado la necesidad de que las expresiones algebraicas o fórmulas tengan que ser homogéneas; es por ello que en la interpretación cartesiana para las operaciones con magnitudes geométricas, la expresión

$$ab + c$$

en donde *a, b* y *c* son segmentos de recta, no se denote la suma de un área y un segmento de recta, sino la simple suma de dos segmentos de recta, al ser ab un segmento de recta al igual que c. En las expresiones siguientes *u* representa la *unidad* y es a través de este parámetro que se puede establecer el tamaño relativo de a y b con respecto a *u*, además, en el caso del producto Descartes rompe con la idea tradicional de que el resultado de esta operación arroja una cantidad no homogénea, como se había concebido desde la antigüedad -el producto de segmentos de recta implicaba el área de un rectángulo-. En este nuevo contexto al ser *u* un elemento neutro, así definido por nuestro autor, tenemos que el producto de dos segmentos sigue siendo un segmento, en otras palabras, el producto de segmentos es una cantidad homogénea, y con ello Descartes supera a su antecesor al suprimir las dificultades de la *dimensión* en las operaciones. En este sentido, la interpretación cartesiana de las operaciones geométricas no equipara de ninguna manera el número y la longitud.

Es en estos términos como Descartes define a través de construcciones geométricas la estructura algebraica en la que quedan inmersas las magnitudes geométricas, a saber:

- Suma y Resta: Descartes no hace alusión explicita al respecto, sin embargo, Euclides en la proposición I-3 de los Elementos nos plantea la solución del problema.
- Producto y División: en este caso nuestro autor plantea éstas operaciones en términos del Teorema de Tales o como lo expone Euclides en la proposición VI-12 de los *Elementos*, en ella se determina la cuarta proporcional dadas tres líneas rectas:

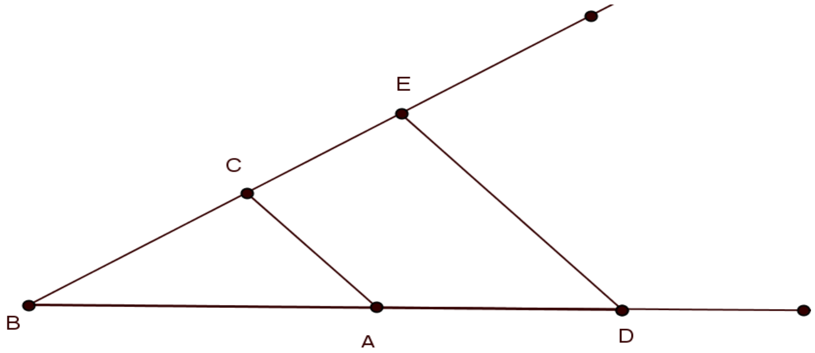


Fig. 9

Producto: $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE}$, si consideramos el segmento $AB = u$, tenemos que $u \cdot BE = BD \cdot BC$ por lo tanto $BE = BD \cdot BC$

División $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{AB}$, es decir $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{u}$, por lo tanto $BC = \frac{BE}{BD}$

- Raíz cuadrada:

  $\frac{FG}{IG} = \frac{IG}{GH}$, es decir $\frac{u}{IG} = \frac{IG}{GH}$, por lo que $IG = \sqrt{GH}$

Fig.10

Es esta estructura para los segmentos la que permite a Descartes proponer la construcción de problemas geométricos a través de planteamientos algebraicos, ya que estos últimos permiten incluir en una expresión -algebraica obviamente- cantidades conocidas y desconocidas, todas ellas en términos de segmentos de recta:

“si se quiere resolver algún problema, debe de considerarse de antemano como ya hecho y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las

desconocidas como a las otras… hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: …una ecuación”[38]

Es en este contexto que Descartes nos muestra fehacientemente la *Concepción Regresiva* del método del análisis antiguo -ya descrito en la secciones anteriores de este capítulo - y del cual él es depositario; a la par de este hecho, nuestro autor incorpora dos elementos novedosos al ya tradicional método del análisis, a saber:

1. Descartes incorpora una estructura algebraica que no prioriza la homogeneidad en las operaciones para las magnitudes geométricas, *los problemas pueden dividirse en problemas más simples* ya que se pueden expresar en términos de líneas rectas individuales, con lo cual Descartes revalora e incorpora con mayor peso la perspectiva *Descomposicional* del Análisis
2. Se incorpora también una perspectiva *Interpretativa y Transformativa* más robusta al usar el álgebra simbólica y una estructura algebraica de los segmentos de recta como instrumento capaz de traducir a un lenguaje más *asequible* un problema geométrico; este hecho desemboca en una propiedad suprema del álgebra: incluir en una sola expresión -Ecuación- cantidades conocidas y desconocidas, siendo esta expresión la que a posteriori da solución al problema geométrico planteado.

Es el propio Descartes quien advierte que los antiguos geómetras no habían desarrollado plenamente la perspectiva *Interpretativa y Transformativa* del propio método del análisis ya que una vez que él muestra la manera de encontrar geométricamente la solución -raíces- para la ecuación de segundo grado agrega:

“No creo que los antiguos lo hayan observado, pues en tal caso ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos en el que solo el orden de las proposiciones nos muestra que no poseían el verdadero método…”[39]

Y Descartes amplia lo anterior:

…el escrúpulo que tenían los antiguos en emplear los términos de la aritmética en la geometría, no podía provenir de no ver ellos claramente su relación...[40]

---

[38] Descartes, R.; *La Geometría*, Traducida por Pedro Rossell Soler. Espasa - Calpe. Argentina, Buenos Aires - México. 1947. p. 53.
[39] Ibídem., p. 59.
[40] Ibídem., p. 62.

En este sentido sabemos que la geometría euclidiana es fundamentalmente no homogénea; ejemplo de ello son los problemas clásicos de la antigüedad:

- Trisección del ángulo: el cual implica, en términos de una estructura algebraica, la no *División* del ángulo en $2n-1$ partes
- Duplicación del cubo: la No *Suma* de volúmenes conlleva en términos de una estructura algebraica a que no se satisfaga la propiedad de cerradura,[41]

Y es precisamente la fuerza del álgebra la que robustece al método del análisis antiguo y con ello el camino para descubrir la solución de un problema geométrico resulta menos sinuoso.

1.8 El problema de Pappus

Precisamente es un problema presentado por Pappus en el *Libro VII -El Dominio del Análisis-* de su *Colección Matemática*[42], el cual ni Euclides ni Apolonio pudieron resolver enteramente, el que da pie para que Descartes ensaye el nuevo *Método del Análisis:*

"Pero ese Lugar de Tres o Cuatro Líneas, del que Apolonio dice en su Libro III, que el mismo Euclides no lo ha tratado enteramente, como tampoco lo hizo ningún otro"[43]

El programa propuesto por Descartes para la transformación algebraica de un problema geométrico, y que aplica al dar solución al Problema de Pappus -problema de lugar para tres o cuatro Líneas-, comprende cuatro etapas:

1. Formular una ecuación que represente al problema geométrico
    - Se supone el punto C conocido: Descartes recurre al análisis antiguo y supone que el punto cumple con las condiciones geométricas del problema y por ende, es una solución al mismo.
    - En términos de magnitudes conocidas y desconocidas.
    - El diagrama que representa las condiciones del problema juega un papel relevante en la deducción la ecuación.
2. A partir de la ecuación generada en la etapa anterior

[41] En términos de las técnicas euclidianas al sumar rectas se obtienen rectas, esto ocurre también para ángulos y áreas pero no para el caso de magnitudes espaciales -volúmenes-.
[42] Jones, A., *Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection*, Springer-Verlag, New York 1986, p. 120.
[43] Descartes, op. cit., p. 60.

- Se reconoce la relación funcional que la ecuación expresa entre dos cantidades variables x e y.
- Se establecen las condiciones bajo las cuales se resuelve la ecuación -de segundo grado-, es decir, si $y = x^2 + bx + c$ y damos un valor de y, una construcción geométrica estándar permite resolver la ecuación $x^2 + bx + d = 0$.

3. Desarrollo de la ecuación obtenida en la primera etapa, de manera que una variable se exprese en función de la otra -y en función de x-
4. Regreso a la figura geométrica para reconocer las magnitudes geométricas involucradas en la expresión algebraica y construir el lugar geométrico.

Cabe destacar algunos aspectos relevantes dentro de la propuesta cartesiana para la solución de problemas en la geometría.

- Las primeras tres etapas corresponden al desarrollo del *análisis* para descubrir y encontrar la solución al problema geométrico planteado, y la última de estas cuatro etapas es la *síntesis* del problema; esta última inicia a partir del resultado obtenido del análisis del problema. Resulta obvio que en el método cartesiano el propio método del análisis juega un papel preponderante ya que se explicita la manera en que se descubre la solución al problema en cuestión, a diferencia de la geometría antigua, en la que la *síntesis* jugaba un papel dominante al exponer la solución de un problema o teorema.
- Descartes elige al álgebra -en un contexto amplio- como herramienta del método analítico.
- Como parte del nuevo método analítico Descartes asocia una ecuación en dos incógnitas a una curva, lo que posibilitará el estudio de una curva en términos de las propiedades de la ecuación asociada a dicha curva.
- En la etapa uno la ecuación que representa el problema geométrico se deduce apoyándose en la figura geométrica, al igual que en la etapa cuatro -síntesis- y se lleva a cabo una construcción geométrica a la manera de la tradición euclídea.
- En el análisis de la etapa tres y cuatro se da un desapego respecto a la figura geométrica ya que el álgebra sustituye a las construcciones auxiliares del antiguo método del análisis.

1.9 Las Etapas de la Propuesta Cartesiana

Etapa 1: Formular una ecuación que represente al problema geométrico

Planteamiento del problema para el caso particular de cuatro rectas dadas en posición:

Dadas cuatro líneas en posición, encontrar un punto desde el cual se puedan trazar otras tantas que formen ángulos dados con las cuatro líneas dadas, y que satisfagan la condición de que el paralelogramo formado por dos de estas líneas se encuentre en una razón dada con el paralelogramo formado por las otras dos:

L_1, L_2, L_3, L_4 Rectas dadas en posición

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ Ángulos dados en magnitud

Encontrar los puntos C tales que las rectas R_i trazada desde C hacia las rectas L_i y formando con ellas los ángulos $\propto_i$, de modo que:

$$\frac{R_1}{R_2} = \mathrm{K} \cdot \frac{R_3}{R_4}$$

Si se considera $\mathrm{K} = 1$ tenemos que:

$$R_1 \times R_4 = R_2 \times R_3$$

A continuación se muestra un diagrama que representa el planteamiento que Descartes realizó para el Problema de *Lugar de Tres o Cuatro Líneas* –rebautizado por el propio Descartes como Problema de Pappus-

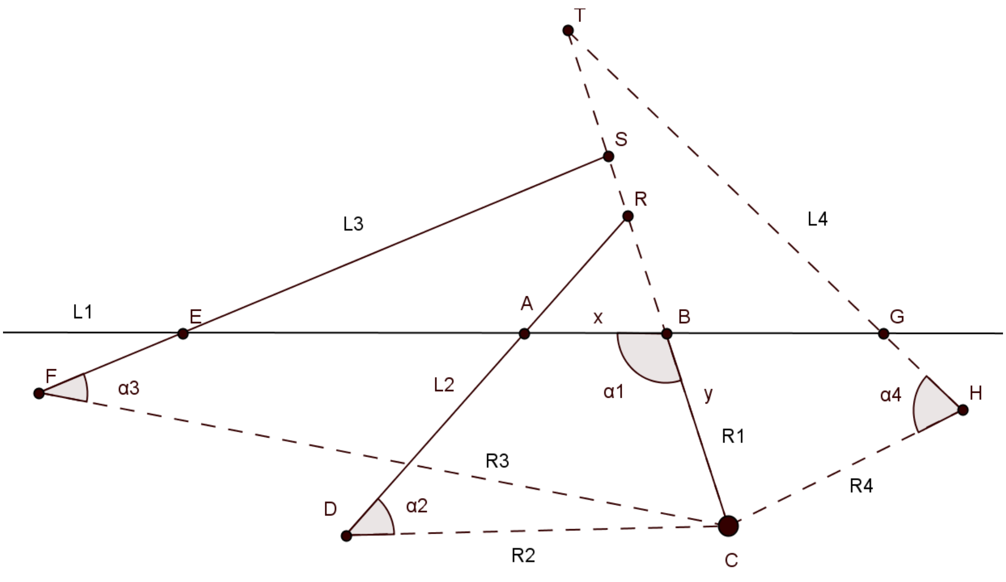


Fig.11

En la Fig.11

$R_1 = CB$ $R_2 = CD$ $R_3 = CF$ $R_4 = CH$, de igual manera $\alpha_1 = \measuredangle CBA$ $\alpha_2 = \measuredangle CDA$ $\alpha_3 = \measuredangle CFE$ $\alpha_4 = \measuredangle CHG$ y el punto C cumple las condiciones geométricas del problema, es decir:

$$CB \times CH = CD \times CF$$

Es de destacar en la (Fig. 11) la manera en que Descartes nombra a los segmentos AB y CB -una de las rectas dadas y la otra desconocida respectivamente- como *rectas principales* y las designa:

$$AB = x$$

$$CB = y$$

En otra palabras, las rectas AB y CB se constituyen como rectas de *Referencia* para el resto de las rectas involucradas en el problema, es en este sentido que Descartes se plantea la idea de un *Sistema de Referencia* en una configuración geométrica y también con ello se vislumbran ya las *Coordenadas* de un punto de la curva que da solución al problema, es decir, las coordenadas del punto C.

En este par de rectas, la recta dada en posición $L_1 = AB$ y la recta $R_1 = CB$, ambas se prolongan de manera tal que se intersequen con las otras rectas dadas en posición L_2, L_3, L_4, generando con ellos seis puntos de intersección: $A, E, G, R, S\ y\ T$.

Una vez constituido el planteamiento anterior Descartes emplea la semejanza de seis triángulos involucrados en la figura y plantea lo siguiente:

En el triángulo ARB, son conocidas las magnitudes de sus tres ángulos:

$\measuredangle BAR$ Está formado por dos de las rectas dadas en posición, por ello es un *dato;* es dado en magnitud.

$\measuredangle ABR$ Es el suplemento de$\measuredangle CBA = \alpha_1$, en consecuencia también es un dato.

$\measuredangle ARB$ Es el suplemento de $\measuredangle BAR + \measuredangle ABR$ por lo anterior se conoce la *Especie* -la forma- de los triángulos ARB, de ahí que la razón $\frac{AB}{BR}$ es conocida y Descartes la indica como $\frac{z}{b}$, es decir tenemos la proporción:

$$\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b} \text{ En consecuencia el segmento } BR = \frac{x \cdot b}{z}$$

Este hecho resulta de suma importancia ya que esta última expresión solo es válida en el contexto de las operaciones homogéneas para los segmentos de recta y que fueron definidas previamente en el mismo Libro I de *La Géométrie*; en este caso el producto y el cociente permiten transformar la proporción en una *Ecuación*.

En términos de esta última ecuación tenemos al segmento desconocido $CR = y + \frac{x \cdot b}{z}$, en este punto Descartes, aunque no lo explicita, ahonda aún más en la idea de un *Sistema de Referencia,* al hacer alusión a las diferentes opciones de signo que se pueden asignar a los términos de nuestra ecuación, lo que nos lleva a concluir que esta expresión algebraica no solo implica la magnitud de segmentos sino también el *Sentido o Dirección* del segmento en función de un punto de referencia.

Para el triángulo CDR tenemos que el ángulo $\measuredangle ARB$ es conocido de la configuración previa -triángulo ARB-, de igual manera, es conocido el ángulo $\measuredangle RDC = \alpha_2$, en consecuencia los tres ángulos del triángulo en cuestión son conocidos; por lo anterior está *dada* la *Especie* de los triángulos CDR, de ahí que la razón $\frac{CR}{CD}$ es conocida y Descartes la indica como $\frac{z}{c}$, es decir tenemos la proporción:

$$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$$

Por lo tanto

$CD = \frac{C \cdot CR}{z}$, pero sabíamos que $CR = y + \frac{x \cdot b}{z}$ por lo que, finalmente podemos expresar a CD como:

$$CD = \frac{bcx + czy}{z^2}$$

Otro aspecto relevante del planteamiento cartesiano, ocurre cuando nuestro autor remite al lector nuevamente al método del análisis antiguo al tener *dadas* en posición a las rectas AB, AD y EF, por lo que el segmento AE está *dado* en magnitud. En términos de esto último podemos designar a la magnitud de la recta AE como k, lo que da como resultado que la recta EB se pueda denotar como $k + x$. Descartes construye con esta última expresión y la proporción $\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}$, ya que la especie del triángulo BES está dada, lo siguiente:

$$BS = BE \cdot \frac{d}{z}, \text{ es decir, } BS = \frac{d(x+k)}{z},$$

Lo que trae como consecuencia que el segmento completo CS se pueda designar como $CS = \frac{zy + dx + dk}{z}$. Siguiendo un procedimiento análogo a lo realizado para los triángulos ARB, CDR y BES, Descartes obtiene expresiones algebraicas para las rectas desconocidas CF y CH, teniendo como dato la razón que se genera para cada especie de los triángulos FSC, BGT y CHT.

En términos del planteamiento inicial del Problema de Pappus, lo que ha logrado Descartes hasta este punto es encontrar una expresión algebraica para cada una de las rectas $R_1 = CB$ $R_2 = CH$ $R_3 = CF$ $R_4 = CD$, en donde cada expresión manifiesta la longitud respectiva de cada recta:

$R_1 = CB = y$

$$R_2 = CH = \frac{-fgh + gzy + fgl}{z^2}$$

$$R_3 = CF = \frac{dex + ezy + dek}{z^2}$$

$R_4 = CD = \frac{bcx + czy}{z^2}$

Las expresiones anteriores son de la forma $R_i = Ax + By + C$, sin embargo como se mencionó líneas atrás, estas ecuaciones lineales denotan longitudes de recta, y se generaron en términos de lo establecido en las operaciones con segmentos de recta.

Al haber considerado que C satisface las condiciones geométricas del problema de Pappus teníamos que:

$$CB \times CH = CD \times CF$$

Y siendo cada expresión de las rectas $CB, CH, CD\ y\ CF$ de la forma $R_i = Ax + By + C$, necesariamente la ecuación que deviene de ello será de segundo grado con dos variables, ya que como lo explica el propio Descartes:

"…las cantidades x e y que se encuentran en el producto, no pueden tener cada una más que tantas dimensiones como líneas haya. De modo que ellas no tendrán más de dos dimensiones cuando no se trate más que de la multiplicación de dos líneas"[44]

Por otro lado, estas expresiones algebraicas están en términos de las magnitudes x e y, es decir, que todas las rectas involucradas en la construcción geométrica son referidas a un par ellas y la longitud de las rectas desconocidas $R_1, R_2,\ R_3\ y\ R_4$.

Finalmente, para concluir esta primera etapa, Descartes nos plantea:

"…para determinar el punto C, no hay más que una sola condición requerida, a saber, que el producto de un cierto número de líneas sea igual...al producto de la multiplicación de las otras…"[45]

Y agrega:

"Puede tomarse a discreción una de esta cantidades desconocidas x ó y, y buscar la otra por la ecuación"[46]

Etapa 2: A partir de la ecuación generada en la etapa anterior

[44] Ibídem., p. 69.
[45] Ibídem., p. 69.
[46] Ibídem., p. 69.

- Se reconoce la relación funcional que la ecuación expresa entre dos cantidades variables x e y, estableciendo las condiciones bajo las cuales se resuelve la ecuación -de segundo grado con dos incógnitas- para un valor dado de y, es decir para $y = x^2 + bx + c$ tenemos:

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

- Esta expresión es simplificada por Descartes de la siguiente manera:

$$2m = \frac{cfglz - dekz^2}{ez^3 - cgz^2}$$

$$\frac{2n}{z} = \frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2}$$

Con estas sustituciones tenemos que la ecuación del punto anterior se expresa como:

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfg}{ez^3 - cgz^2}x^2$$

Etapa 3: Desarrollo de la ecuación obtenida en la primera etapa, de manera que una variable se exprese en función de la otra -y en función de x-

De la última expresión algebraica obtenida en la etapa anterior, Descartes resuelve para y a partir de una construcción geométrica, la que implica completar cuadrados, y como resultado de ello tenemos que

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 - \frac{2mn}{z}x + \frac{n^2}{z^2}x^2 + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}$$

Finalmente al considerar

$$o = \frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2}$$

Y también

$$-\frac{p}{m} = \frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}$$

Y hacer las sustituciones pertinentes Descartes obtiene:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

Con esta última expresión algebraica Descartes culmina la etapa del análisis, ya que, sin mencionarlo se ha llegado a un resultado conocido, a la manera que se planteó en el

Método del Análisis Antiguo; en este caso, nuestro autor identifica la última expresión con las construcciones clásicas detalladas en la obra del geómetra griego Apolonio: *Las Cónicas.*

Una vez expuesta la solución al Problema de Pappus para cuatro rectas, y antes de continuar con la última de las cuatro etapas del programa cartesiano -la Síntesis-, como preámbulo a esta cuarta etapa, podemos mencionar que ésta define un hecho fundamental y que identifica plenamente lo que hoy día entendemos por Geometría Analítica: asociar una curva y sus propiedades geométricas con una ecuación o expresión algebraica. Este hecho será puntualizado en secciones posteriores de este capítulo. Por otro lado, conviene hacer un alto y una reflexión en relación con las expresiones dadas por el propio Descartes en la primera etapa de su programa, las cuales son de la forma $R_i = Ax + By + C$; y como se mencionó en su momento, estas expresiones denotan longitudes de recta.

La importancia de este último hecho radica en que las expresiones lineales obtenidas contribuyen a cumplir con el objetivo supremo de *La Géométrie: Caracterizar* cualquier curva geométrica. Lo anterior es de capital importancia para este trabajo ya que Descartes pone en juego para resolver un problema geométrico -el Problema de Pappus-, el método del análisis -el método antiguo y las contribuciones que él aporta- y con ello establecer a través de las expresiones algebraicas -una estructura algebraica en geometría y uso del álgebra simbólica- una *Perspectiva Interpretativa*[47] más *rica* que la contendida en el antiguo análisis, de tal manera que a partir de expresión algebraica -Ecuación- obtenida a partir de las condiciones del problema, se pueden obtener las propiedades del objeto geométrico.

1.10 La Recta y La Ecuación que la caracteriza

A continuación expondremos de qué manera se caracteriza la más elemental de las curvas geométricas: la línea recta, apelando a la solución del Problema de Pappus para dos rectas; Descartes no menciona nada al respecto en *La Géométrie,* sin embargo en la *Colección Matemática* de Pappus se alude a este hecho:

"Ahora bien, si -se dibujan- en sólo dos -líneas- el lugar tiene que ser plano…"[48]

[47] Véase en las secciones previas de este trabajo: Caracterización del Análisis.
[48] Jones, op. cit., p. 120.

Es decir, que la solución para dos rectas al Problema de Pappus es un lugar plano, lo que implica que el conjunto de puntos que satisfacen la condición geométrica del problema se ubican en una línea recta o en una circunferencia.

Ahora bien, partiendo del problema para cuatro rectas sabemos que:

La ecuación $d_i = Ax + By + C$:

- Proporciona la distancia de un punto a una recta en su caso general, es decir, cuando se considera la distancia entre un punto dado en posición y cualquier punto de una recta dada en posición.
- *Caracteriza* cualquier línea recta cuando la distancia es considerada nula

Estos dos aspectos salen a la luz una vez que explicitamos el problema de Pappus para el caso de dos rectas dadas en posición, a través de la siguiente configuración:

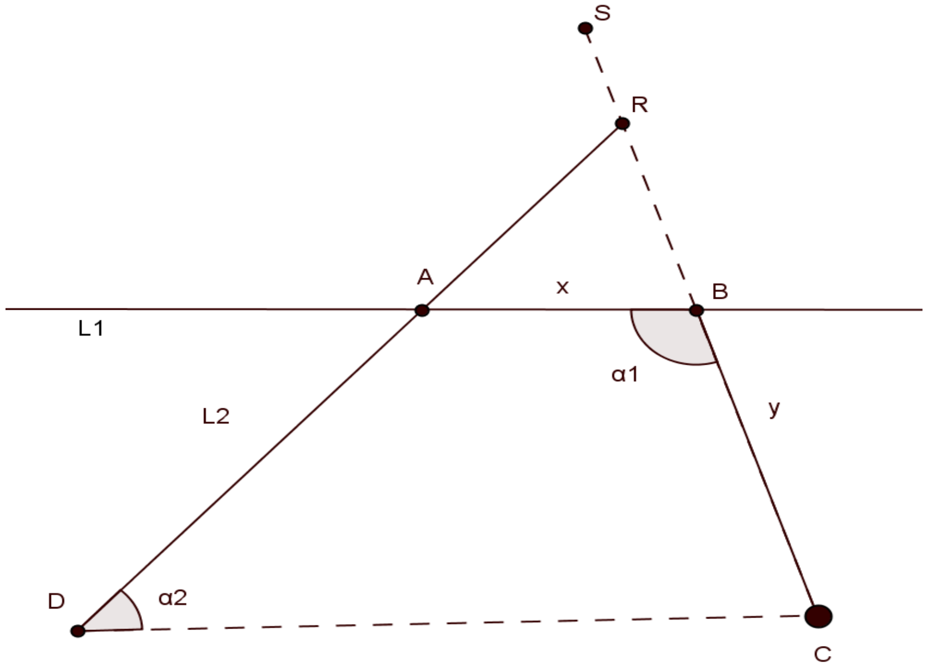


Fig. 12

En el caso general del Problema de Pappus para dos rectas dadas en posición, el cual se muestra en la Fig. 4, se debe determinar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen:

$$CB = \mathrm{K} \times CD$$

Si

- $\alpha_1 = \sphericalangle ABC$
- $\alpha_2 = \sphericalangle ADC$

Ahora nombramos a las líneas involucradas en el problema

- AB: segmento de L_1 lo llamamos x

- CB: segmento de L_2 lo llamamos y

Triángulo ARB

Tenemos que el ángulo $\measuredangle BAR$ es un dato, al ser el ángulo que forman las rectas dadas en posición L_1y L_2, por otro lado, el ángulo $\measuredangle ABC = \alpha_1$, es decir es un dato del problema, así que el ángulo $\measuredangle ABR$ es su suplemento, de lo anterior, el ángulo $\measuredangle ARB$ también es conocido.

En consecuencia podemos plantear que:

$\frac{AB}{BR} = \kappa_1$, por lo tanto $BR = \frac{x}{\kappa_1}$ ya que $AB = x$, por lo tanto la recta completa CR que está formada por CB y BR es:

$$CR = y + \frac{x}{\kappa_1}$$

Esta última expresión denota:

- La longitud de la recta CR, es decir, la distancia de un punto -el punto C- a una recta -la recta L_2-, en su caso general.
- Si $CR = 0$ implica que C es un punto de la recta L_2, por lo tanto:
  $y = -\frac{x}{\kappa_1}$ expresión que *Caracteriza* algebraicamente a la recta L_2

Triángulo DCR

El ángulo $\measuredangle CDR = \alpha_2$, es decir, es un dato del problema, de igual manera el ángulo $\measuredangle ARB$ es un dato ya que su magnitud fue encontrada de la configuración del triángulo ARB, por tanto el ángulo $\measuredangle DCR$ es también conocido.

En consecuencia podemos plantear que:

$\frac{CD}{CR} = \kappa_2$, por lo tanto $CD = \kappa_2 \times CR$, pero $CR = y + \frac{x}{\kappa_1}$, por lo tanto:

$$CD = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}x + \kappa_2 y$$

Esta última expresión denota, al igual que la obtenida para el triángulo ARB:

- La longitud de la recta CD, es decir, la distancia de un punto -el punto C- a una recta -la recta L_2-, en su caso general.
- Si $CD = 0$ implica que C es un punto de la recta L_2, por lo tanto:
  $y = -\frac{x}{\kappa_1}$ Expresión que también *Caracteriza* algébricamente a la recta L_2

Finalmente, sabemos que la condición geométrica a cumplir por el punto C es:

$$CB = K \times CD$$

Si consideramos $K = 1$, $CB = CD$ es decir:

$$CB = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}x + \kappa_2 y$$

Esta última expresión denota, al igual que la obtenida para los triángulos ARB y CDR

- La longitud de la recta CB, es decir, la distancia de un punto -el punto C- a una recta -la recta L_1-, en su caso general.

Pero al nombrar las rectas de la configuración designamos $CB = y$ por lo que:

$$y = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}x + \kappa_2 y$$

Es decir

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1}x + (\kappa_2 - 1)y = 0$$

Esta expresión es de la forma $Ax + By + C = 0$ y da solución al Problema de Pappus para dos rectas, y también caracteriza algebraicamente a la Línea Recta, en este caso a la recta L_1.

En el caso más trivial del Problema de Pappus para dos rectas tenemos la configuración de la Fig. 5.

Fig. 13

En ella las rectas L_1, L_2 son perpendiculares, los ángulos α_1, α_2 son ángulos rectos, es decir, la configuración determina al rectángulo $ABCD$, por ello $AB = CD$, $AD = CB$, nombramos también a las rectas:

$AB = x$

$CB = y$

Finalmente la condición geométrica a cumplir por el punto C es:

$$CB = K \times CD$$

Si $K = 1$ tenemos que la solución al Problema de Pappus es:

$$y = x$$

1.11 Construcción de la solución al Problema de Pappus para dos rectas -Síntesis-

Este último ejemplo resulta muy pertinente para establecer en un principio y someramente, el vínculo que hay entre el objeto geométrico y el objeto algebraico y con ello plantear la construcción del lugar geométrico que satisface la condición del Problema de Pappus para dos rectas, es decir, en términos del programa cartesiano establecer la síntesis del problema.

Dadas en posición las rectas L_1 y L_2, con L_1 perpendicular a L_2

- Construir el cuadrado $OXCY$, Fig. 14

Fig. 14

- Construir la diagonal OC
- Ubicar un punto X' sobre la recta L_1 y construir un segmento paralelo al segmento CX que interseque a la diagonal CO en el punto C', Fig. 15

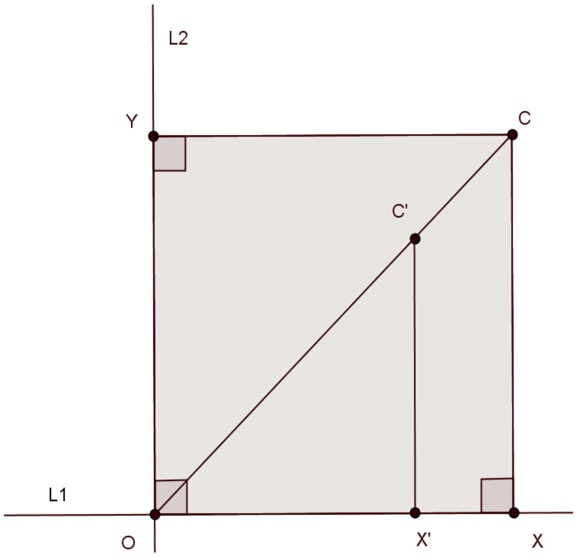


Fig. 15

- De la construcción anterior tenemos que los triángulos OXC y $OX'C'$ son semejantes -Teorema de Tales-, en consecuencia:

$$\frac{OX'}{X'C'} = \frac{OX}{XC} = k$$

Si llamamos $OX = x$ y $XC = y$ tenemos que:

$$\frac{x}{y} = k$$

Por lo tanto si $k = 1$:

$$y = x$$

Es decir que cualquier punto C de la recta OC satisface la condición geométrica

$$CB = K \times CD, \text{ en donde } \quad K = 1$$

Y en la que las rectas L_1, L_2 son perpendiculares y los ángulos α_1, α_2 son ángulos rectos.

1.12 El análisis de problemas planos y problemas sólidos

Antes de continuar con la síntesis del Problema de Pappus para cuatro rectas dada por Descartes, conviene enfatizar que el método del análisis desde la antigüedad tuvo como veta primaria para su desarrollo lo siguiente:

- Solución de problemas, y esto por encima de la demostración de teoremas
- Solución de problemas sólidos, por encima de la solución de problemas planos

Y es justamente esta tradición clásica del análisis la que *La Géométrie* continúa ahondando y ampliando, toda vez que Descartes da solución a un problema y es precisamente éste un problema solido cuya solución involucra secciones cónicas.

Por otro lado, en el desarrollo histórico del método del análisis en geometría, la introducción del álgebra como herramienta transformativa genera dos maneras de llevar a cabo el análisis de problemas geométricos; en ambos casos, a la manera del análisis antiguo, se considera que el problema está resuelto y se procede de la siguiente manera:

1. Encontrando una ecuación con una incógnita que involucre las condiciones geométricas del problema; ésta se equipara con una construcción geométrica estándar que permita encontrar la solución al problema
2. Se encuentra una ecuación con una incógnita que a su vez permita establecer ecuaciones en dos variables, las cuales implican la intersección de cónicas. Estos puntos de intersección ofrecen la solución al problema[49]

Es en este contexto que *La Géométrie* aparece incorporando como aspecto fundamental para la validación del método del análisis moderno la síntesis necesaria que vincula de manera indisoluble una curva y su ecuación correspondiente.

1.13 Construcción de la solución al problema para cuatro rectas -Síntesis-

En la etapa final del programa cartesiano nuestro autor regresa al dibujo y agrega algunas rectas auxiliares cuyo objetivo final es construir una sección cónica en donde la posición y parámetros de esta última dependan de los coeficientes de la ecuación obtenida en la etapa tres:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

En este momento de la propuesta cartesiana se formula una alusión directa a las construcciones clásicas antiguas para las secciones cónicas; para ser precisos, refiriéndose a *Las Cónicas* de Apolonio. Es en estos términos que Descartes demuestra la *coincidencia* entre una ecuación de segundo grado en dos incógnitas y el estándar clásico para estas curvas. Y es precisamente en el Libro I de *Las Cónicas,* en las proposiciones 52 a 60, en donde *Dados* ciertos elementos geométricos es posible construir las secciones cónicas. Estos elementos son:

1. Vértice o centro -punto dado en posición-
2. Dirección de un diámetro -ángulo dado en magnitud-

[49] Bos, op. cit., p. 112.

3. Lado recto -segmento dado en magnitud-
4. Lado transversal -segmento dado en magnitud-
5. Ángulo de ordenadas -ángulo dado en magnitud-

Por lo anterior, la síntesis de lugares sólidos consiste en determinar, a partir de los puntos mencionados -del uno al cinco-, la naturaleza de la cónica -parábola, elipse o hipérbola-. Esto último es lo que le permitió a Descartes dar la solución definitiva al problema de Pappus.

1.14 Análisis y Síntesis en la Geometría Cartesiana

Uno de los objetivos de este trabajo es rescatar y quitar el velo que ha cubierto el propósito, el método, y con ello las consecuencias de orden cognitivo-didáctico que se dan por sentadas en la enseñanza de la geometría del nivel bachillerato; en otras palabras, la banalización que subyace al *asociar* a una curva geométrica -una cónica o una línea recta- *su correspondiente* expresión algebraica, y lo que ello implica.

Es precisamente Descartes quien en esta última etapa de la aplicación de su Método a la geometría nos invita a prescindir de la construcción geométrica, o dicho en mejores términos, a prescindir de la Síntesis como complemento de la etapa analítica en la solución de un problema geométrico. Como se detalló en el primer capítulo de este documento, en la geometría antigua la síntesis estaba asociada a la exposición del problema o teorema en cuestión, es decir, nos indica a través de un proceso deductivo la construcción a seguir para resolver el problema o la secuencia lógica que valida el teorema; es la síntesis el complemento a la labor realizada por el geómetra en la etapa del análisis. Expresado en términos de los antiguos, la geometría está conformada por dos caras de la misma moneda: el análisis que descubre y la síntesis que expone.

En este contexto es que la solución al Problema de Pappus dada por Descartes y dotada de un mejor método analítico al estar enriquecido por el Álgebra -una estructura y su propia simbología- conforma en sí una mejor herramienta interpretativa[50] que avasalla al método antiguo, unificando como *un solo ente* al análisis y la síntesis por vía de una expresión algebraica, la cual hace las veces de la antigua síntesis -la construcción geométrica- al contener en sus invariantes -entiéndase coeficientes de la expresión algebraica- todas las propiedades de la curva en cuestión.

Por lo mencionado en los párrafos anteriores resulta conveniente recorrer la ruta que llevó a Descartes a establecer esta nueva visión del quehacer geométrico.

---

[50] Véase el capítulo 1 de este trabajo: Caracterización del Análisis

1.15 Apolonio y las cónicas

Pappus, en su *Colección Matemática* hace alusión al problema del lugar de tres y cuatro líneas, especificando que cualquier punto que cumpla con las condiciones geométricas de este problema tocará un lugar sólido dado en posición, esto es, una de las tres cónicas[51]; sin embargo esta solución dada por Pappus para el problema que centurias más tarde llevará su nombre, no incluye la demostración correspondiente. Será Descartes que empleando la teoría de cónicas de Apolonio establece la síntesis para la solución encontrada por su propio *Método Analítico* al problema de tres y cuatro líneas -Problema de Pappus- demostrando que efectivamente el lugar geométrico de los puntos que satisfacen al Problema son puntos de una sección cónica. Pero no solo ello, está implícita en la demostración -síntesis-, dada por Descartes algo de importancia suprema y que constituye un idea fundamental en la matemática moderna, a saber: a toda ecuación de segundo grado en dos variables se asocia una sección cónica, y de manera inversa, a toda sección cónica se asocia una ecuación de segundo grado en dos variables. Una revisión del trabajo realizado por Apolonio nos dará luz acerca de este hecho.

Apolonio, en *Las Cónicas,* establece lo siguiente:

- Construye el **cono**: si una línea de longitud indefinida pasa siempre a través de un punto fijo y se le hace mover alrededor de la circunferencia de un círculo que no se encuentra en el mismo plano que el punto fijo, de manera tal que dicha línea pase por cada uno de los puntos de la circunferencia, su desplazamiento trazará la superficie de un cono doble; en otras palabras, dos conos que se encuentran situados en direcciones opuestas y que comparten el punto dado en posición fija. Dicho punto es el **vértice** del cono. El círculo sobre el cual se construye el cono será la **base** del cono. El **eje** del cono es la línea recta que une el vértice con el centro de la circunferencia, es decir, el centro de la base.
- Construye el **triángulo axial**: es la sección resultante de cortar el cono con un plano que pasa por su vértice y por el eje del cono; por ello dos de los lados de este triángulo están situados en la superficie del cono y el tercer lado del triángulo es la intersección de esta sección con el plano de la base del cono. Este último es necesariamente un diámetro de la base del cono.
- Demuestra que las secciones paralelas a la base son circunferencias, en términos de la semejanza de triángulos (proposición I-4).

[51] Jones, op. cit., p. 120.

- Si la sección no es paralela a la base del cono, implica que la sección sea finita (elipse), secciones infinitas (parábola e hipérbola) (proposición I-9)-
- Define ordenada como la mitad de una cuerda perpendicular al diámetro de la sección
- Define abscisa como el segmento de diámetro asociado a una determinada ordenada
- El ángulo constante entre un diámetro de la curva y sus respectivas ordenadas se define como el **ángulo de ordenadas ω** ver Fig.16.
- Construye y define el diámetro de una sección cónica: línea recta que biseca un conjunto de cuerdas paralelas en la sección de un cono (proposición I-7); un caso particular ocurre cuando el ángulo de ordenadas -ω- es ángulo recto en cuyo caso el diámetro se llamará **eje de la cónica** ver Fig.16.

Fig. 16

Posteriormente en las proposiciones 11, 12 y 13 del libro I de *Las Cónicas*, Apolonio emplea la técnica de aplicación de áreas y la teoría de proporciones que son expuestas en los libros I, II y V y VI de los *Elementos* de Euclides, con el objetivo de establecer las condiciones geométricas que determinan cada una de las tres secciones cónicas: parábola, hipérbola y elipse.

A continuación detallaremos las proposiciones 11 y 13 que describen respectivamente a la parábola y a la elipse -para los fines de este trabajo es viable considerar a ambas según los programas de estudio sobre los que este documento pretende incidir mayormente-[52].

[52] Colegio de Ciencias y Humanidades, *Programa de matemáticas semestres I a IV*, Comisión de revisión y ajuste de programas. Área de Matemáticas, 2005, p. 53.

Proposición I-11[53]: Sea PM el diámetro de una sección paralela a uno de los lados del triángulo axial, digamos AC y sea QV cualquier ordenada del diámetro PM. Entonces si una línea recta PL se traza perpendicular a PM en el plano de la sección, de manera tal que $\frac{PL}{PA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}$ -ver Fig. 17-, Demostrar que:

$$QV^2 = PL \cdot PV$$

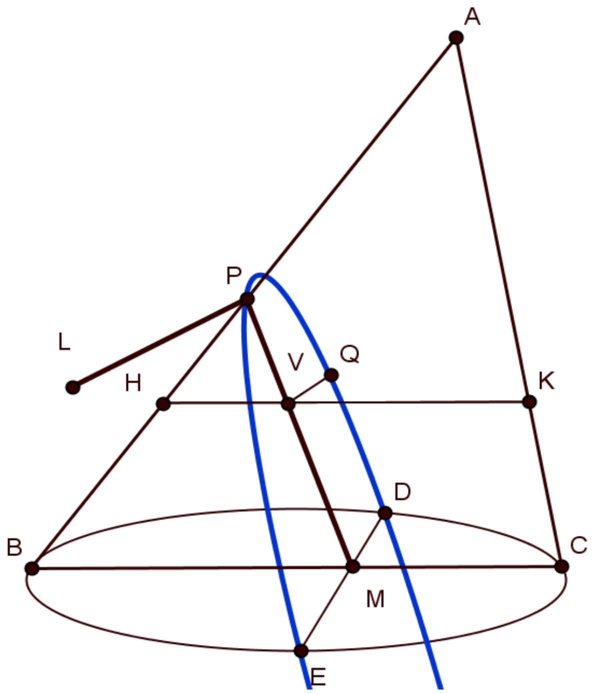


Fig. 17

Para ello se hace lo siguiente:

- Se dibuja la recta HK y que pase a través del punto V y que sea paralela a la recta BC
- Por lo tanto QV también es paralela a DE
- Esto implica que el plano que contiene a los puntos H, Q, K es paralelo a la base del cono
- La sección que genera este plano al incidir sobre el cono es un circulo
- Uno de sus diámetros es la recta HK

Como resultado de todo lo anterior y en términos de la teoría de proporciones tenemos que:

$HV \cdot VK = QV^2$, se sigue entonces que QV es media proporcional de los segmentos HV y VK

[53] Heath, T., *Apollonius, Treatise on Conic Sections*, Cambridge, 1896, p. 8.

Los triángulos HPV y BAC son semejantes

$$\therefore \frac{HV}{PV} = \frac{BC}{AC}$$

Los triángulos HAK y BAC son semejantes

$$\therefore \frac{VK}{PA} = \frac{HK}{HA}$$

También tenemos que los triángulos HAK y BAC son semejantes $\therefore \frac{HK}{HA} = \frac{BC}{BA} = \frac{VK}{PA}$, es decir

$$\frac{VK}{PA} = \frac{BC}{BA}$$

Al combinar las proporciones $\frac{HV}{PV} = \frac{BC}{AC}$ y $\frac{VK}{PA} = \frac{BC}{BA}$, tenemos que:

$$\frac{HV \cdot VK}{PV \cdot PA} = \frac{BC^2}{AC \cdot BA}$$

Pero la construcción nos llevo a que QV es media proporcional de los segmentos HV y VK, y también como supuesto inicial teníamos que $\frac{BC^2}{BA \cdot AC} = \frac{PL}{PA}$, en consecuencia:

$$\frac{QV^2}{PV \cdot PA} = \frac{PL}{PA}$$

Esta ultima proporción, el tercero y cuarto términos se pueden combinar con la razón $\frac{PV}{PV}$ y obtenemos:

$$\frac{QV^2}{PV \cdot PA} = \frac{PL \cdot PV}{PA \cdot PV}$$

De esta última expresión obtenemos finalmente:

$$QV^2 = PL \cdot PV$$

Apolonio asocia a esta última expresión lo que podríamos considerar en primera instancia como la condición geométrica que en una sección cónica deben satisfacer la ordenada QV, la abscisa PV y un parámetro que denomina lado recto o parámetro de ordenadas PL. Para el caso que ocupa a esta proposición nuestro autor detalla:

"De la expresión anterior se sigue que el cuadrado construido en cualquier ordenada asociada al diámetro fijo PM, es igual al rectángulo aplicado a la línea fija PL que fue trazada perpendicular a PM y la correspondiente abscisa PV. A esta sección se le llama PARÁBOLA"[54]

[54] Ibídem, p. 9.

Proposición I-13: Si PM interseca AC en P' y a la recta BC en M, trazamos la recta AF paralela a PM y que interseca a la recta BC en F, se traza también la recta PL perpendicular a PM en el plano de la sección, de manera tal que $\frac{PL}{PP'} = \frac{BF \cdot FC}{AF^2}$ Unimos ahora el punto P' con el punto L y trazamos VR paralela a PL de manera tal que interseque a $P'L$ en R ver Fig. 18. Demostrar que:

$$QV^2 = PV \cdot VR$$

Fig. 18

- Se dibuja la recta HK que pase a través del punto V y que sea paralela a la recta BC
- Por las mismas razones que en la proposición I-11 y con base en la teoría de proporciones tenemos que:

  $HV \cdot VK = QV^2$, donde QV es media proporcional de los segmentos HV y VK

Los triángulos BAF y HPV son semejantes

$$\therefore \frac{HV}{PV} = \frac{BF}{AF}$$

Los triángulos $P'VK$ y CAF son semejantes

$$\therefore \frac{VK}{P'V} = \frac{FC}{AF}$$

Al combinar las proporciones $\frac{HV}{PV} = \frac{BF}{AF}$ y $\frac{VK}{P'V} = \frac{FC}{AF}$, tenemos que:

$$\frac{HV \cdot VK}{PV \cdot P'V} = \frac{BF \cdot FC}{AF^2}$$

La construcción inicial nos llevó a que QV es media proporcional de los segmentos HV y VK, y también en el supuesto inicial teníamos que $\frac{PL}{PP'} = \frac{BF \cdot FC}{AF^2}$, en consecuencia:

$$\frac{QV^2}{PV \cdot P'V} = \frac{PL}{PP'}$$

Tenemos también que los triángulos LPP' y RVP' son semejantes y por consiguiente

$$\therefore \frac{PL}{PP'} = \frac{VR}{P'V}$$

Por lo que:

$$\frac{QV^2}{PV \cdot P'V} = \frac{VR}{P'V}$$

En esta ultima proporción, el tercero y cuarto términos se pueden combinar con la razón $\frac{PV}{PV}$ y obtenemos:

$$\frac{QV^2}{PV \cdot P'V} = \frac{PV \cdot VR}{PV \cdot P'V}$$

De esta última expresión obtenemos finalmente:

$$QV^2 = PV \cdot VR$$

Al igual que en la proposición I-11, Apolonio asocia a esta última expresión: ordenada QV, abscisa PV, el lado recto o parámetro de ordenadas PL y agrega el diámetro transverso o latus transversum -eje de la sección cónica-:

"De la expresión anterior se sigue que el cuadrado construido en cualquier ordenada es igual al rectángulo que tiene por altura la abscisa y cuya base cae a lo largo de la recta fija PL pero se queda corta en una longitud igual a la diferencia entre las rectas VR y PL. . A esta sección se le llama ELIPSE"[55]

Esta definición de Apolonio describe al rectángulo PR tal como se aplica sobre el lado recto PL, sin embargo dicho rectángulo es deficiente con respecto al rectángulo PL en un rectángulo semejante y que satisface la razón de las rectas PP' y PL, en este caso la deficiencia corresponde a la diferencia entre las rectas PL y VR.

Si nombramos

$QV = y$, ordenda

$PV = x$, abscisa

$PL = p$, lado recto

[55] Ibídem, p. 12.

$$PP' = d, \text{ diámetro}$$

Tenemos que:

$$y^2 = px - \frac{p}{d}x^2$$

Esta última expresión resulta de singular importancia ya que será retomada por Descartes para llevar a cabo la síntesis al Problema de Pappus y que detallaremos posteriormente.

Es de esta manera como Apolonio caracteriza a través de una propiedad fundamental de la geometría plana o symptoma -síntoma- las secciones cónicas y las nombra en consecuencia, en este caso empleando la técnica de aplicación de áreas. Sin ahondar más en el estudio de esta caracterización dada por Apolonio, podemos destacar en las proposiciones detalladas líneas arriba lo siguiente:

- La noción de parábola implica la igualdad de áreas entre dos figuras, un cuadrado y rectángulo.
- La elipse implica que el área de un rectángulo es deficiente con respecto a la de un cuadrado.
- La hipérbola implica que el área de un rectángulo excede a la de un cuadrado.

Es ésta la caracterización dada por Apolonio para las secciones cónicas, y es la que dará sustento a las proposiciones aludidas por Descartes en *La Géométrie* y que le permitieron plantear la síntesis para el Problema de Pappus (Proposiciones -problemas- I-52 a I-59). Al respecto Descartes concluye expresando:

"…*después de lo cual es fácil encontrar la sección por vía de el segundo y tercer problema del libro de Apolonio.*"[56]

En las proposiciones I-52 a I-59 Apolonio muestra la manera en que se construyen cada una de las tres secciones cónicas, a partir de los siguientes Datos:

- Un diámetro
- La longitud del correspondiente parámetro
- La magnitud del ángulo en las ordenadas y el diámetro dado

En la construcción de cada una de las secciones, Apolonio asume en primera instancia que el ángulo dado es un ángulo recto, lo que implica que el diámetro dado es el Eje de la cónica. Para ello nuestro autor construye el cono en el cual habita la sección a construir. En el caso restante, en el que el ángulo es oblicuo, las construcciones respectivas están

[56] Descartes, op. cit., p. 90.

encaminadas a reducir el problema al primer caso; dicho de otra manera, se construye el Eje de la cónica y el parámetro que corresponde a este diámetro principal o eje de la cónica.

Para resolver el problema de reducir el caso del ángulo oblicuo al caso del ángulo recto, Apolonio echa mano de las proposiciones I-41 a I-50; sin pretender hacer un estudio pormenorizado de estas últimas proposiciones, ya que el objetivo primordial de este trabajo es develar a través de la revisión histórica los fundamentos conceptuales que subyacen en los contenidos programáticos de los programas de bachillerato y con ello plantear esta propuesta didáctica innovadora, por ello estableceremos grosso modo el alcance que estas proposiciones del libro I de *Las Cónicas* tienen en el contexto de la solución dada por Descartes al Problema de Pappus.

En las proposiciones I-41 a I-50 Apolonio se encamina a demostrar que dado cualquier diámetro de una cónica la propiedad que la caracteriza -symptoma-, entiéndase cualquiera de las proposiciones detalladas líneas arriba -proposiciones I-11, I-12 o I-13-, ésta se preserva con respecto al diámetro principal; en un contexto más general, la propiedad que caracteriza a la cónica, el symptoma, es invariante con respecto al diámetro de referencia.

A continuación daremos el detalle de las proposiciones aludidas por Descartes en la última etapa de la solución al Problema de Pappus[57] para el caso particular de la construcción de la elipse, asumiendo que la construcción de la parábola y la hipérbola se dan de manera análoga, *mutatis mutandis*.

Proposición I-56: Dados el diámetro de una elipse, su correspondiente parámetro y el ángulo de inclinación entre dicho diámetro y sus ordenadas, construir la elipse si tal ángulo de inclinación es ángulo recto y la longitud del diámetro es mayor que la de su parámetro.

Como es obvio Apolonio considera la construcción de la elipse dados:

- El diámetro de la elipse
- Su correspondiente parámetro
- El ángulo de inclinación entre dicho diámetro y sus ordenadas

Sin embargo, estos elementos pueden variar de diversas maneras. El primer caso que estudiaremos -proposición I-56- tiene las siguientes características:

- El diámetro es mayor que el parámetro

[57] Descartes, R., *La Geometría*, Traducida por Pedro Rossell Soler. Espasa - Calpe. Argentina, Buenos Aires - México 1947. p. 90.

- El ángulo de inclinación entre el diámetro y sus ordenadas es ángulo recto

Esta proposición -problema- contiene 3 momentos, en los que Apolonio hace lo siguiente:

1. Se construye el cono y la sección contenida en él, en este caso la elipse; como el diámetro está dado -AA'- y el ángulo entre este segmento y sus ordenadas -ángulo de ordenadas- es ángulo recto, el diámetro dado corresponde entonces al eje de la elipse -en proposiciones posteriores del Libro II de *Las Cónicas*, Apolonio demuestra que toda cónica central tendrá a los más dos ejes-[58].
2. En una segunda etapa se demuestra que la *existencia* del cono construido como consecuencia de ello, la existencia de la elipse, para esta demostración se emplean teoremas de la geometría plana -los *Elementos*, Euclides-.
3. En la última etapa de esta proposición se demuestra que en términos de lo expresado en la proposición I-13 la sección construida en la primera etapa es una elipse.

1. **Construcción del cono y la sección**
   - El diámetro AA' es perpendicular a la línea recta AL; este par de rectas definen un plano Π_1.
   - En un plano Π_2 ortogonal al plano Π_1 se construye un arco de circunferencia a que pasa por los extremos de la recta AA'.
   - Se traza la recta AD igual a la recta dada -parámetro- AL sobre AA'.
   - En el punto de intersección de la mediatriz de AA' y el arco a se trazan las rectas AE y $A'E$.
   - Se dibuja la recta DF paralela a la recta $A'E$, de manera tal que la primera interseque a AE en el punto F.
   - Se traza una recta paralela a AA' que pase por F y que interseque al arco a en el punto O.
   - Se construye el segmento de recta EO y se prolonga hasta la intersección con la recta AA' en el punto T.
   - Se prolonga el segmento OA y en un punto H cualquiera de esta recta se construye otra recta paralela a OE y que pase por los puntos H, K, M, N, siendo los puntos K, M, N las intersecciones que resultan de prolongar las rectas $OA', AA'\ y\ OF$ respectivamente.

[58] Heath, T., *A History of Greek Mathematics*, Vol. II, Dover, New York 1981. p. 147.

Fig. 19

2. Demostración de la *existencia* del cono construido

Como resultado de la construcción de la etapa uno tenemos que:

- El ángulo $\angle TOA$ es el ángulo externo del ángulo en el vértice O del triángulo AOE; por ello es igual a la suma de los ángulos $\angle OEA$ y $\angle OAE$.
- Por otro lado, tenemos que el cuadrilátero $AOEA'$ es un cuadrilátero cíclico, en consecuencia el ángulo $\angle TOA$ es igual al ángulo $\angle AA'E$
- El ángulo $\angle AA'E$ subtiende el arco y la cuerda AE, de igual manera el ángulo $\angle EAA'$ subtiende el arco y la cuerda $A'E$, pero por construcción $AE = A^{'}E$ (E es un punto de la mediatriz que tiene por extremos a los puntos A y A'), por lo tanto $\angle AA^{'}E = \angle EAA'$
- El ángulo $\angle EOA^{'}$ subtiende el arco y la cuerda $A^{'}E$, de igual manera el ángulo $\angle EAA^{'}$ subtiende el arco y la cuerda $A^{'}E$, en consecuencia $\angle EOA^{'} = \angle EAA^{'}$
- Como resultado de todo lo anterior tenemos que $\angle EOA^{'} = \angle TOA$
- Por construcción tenemos que la recta HK es paralela a la recta OE y como $\angle EOA^{'} = \angle TOA$, se concluye que $\angle OHK = \angle OKH$
- Por lo tanto el triángulo HOK es un triángulo isósceles y de ello se deriva que $OH = OK$

En términos de la proposición I-13 el triángulo isósceles HOK es un triángulo axial que secciona al cono que tiene por vértice el punto O y como base el diámetro de la circunferencia HK, la que a su vez se encuentra en un plano perpendicular al del triangulo HOK.

3. **Demostración: la sección construida es una elipse**

En esta última etapa de la proposición I-56 de *Las Cónicas*, se demuestra que la sección que contiene el diámetro AA', y que tiene por parámetro la recta PL, es una elipse:

- Por construcción sabemos que $AL = AD$, entonces se cumple que:

$$\frac{AL}{AA'} = \frac{AD}{AA'}$$

- Al ser paralelas las rectas FD y EA' e intersecar a las rectas EA y AA', se tiene por el Teorema de Tales que:

$$\frac{AD}{AA'} = \frac{AF}{AE}$$

- Al ser paralelas las rectas TA y OF e intersecar a las rectas EA y TE, se tiene por el Teorema de Tales que:

$$\frac{AF}{AE} = \frac{TO}{TE}$$

- En esta ultima proporción el tercero y cuarto términos se pueden combinar con la razón $\frac{TO}{TO}$ y obtenemos:

$$\frac{AF}{AE} = \frac{TO^2}{TO \cdot TE}$$

$$\therefore \frac{AL}{AA'} = \frac{TO^2}{TO \cdot TE}$$

- Esta última expresión se puede transformar en:

$$\frac{AL}{AA'} = \frac{TO^2}{TA \cdot TA'}$$

  Al ser los puntos $A, O, E\ y\ A'$ puntos del arco de circunferencia a, los triángulos TEA' y TOA son semejantes (potencia del punto T).

- Por otro lado, para los triángulos TOA y HON tenemos que:

  Rectas paralelas $TE \parallel HN$ y $ON \parallel TM$

  En consecuencia los ángulos $\angle TOA = \angle OHN$ y $\angle ATO = \angle ONH$

  Por el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo, los triángulos TOA y HON son semejantes, de lo que resulta:

$$\frac{TO}{TA} = \frac{HN}{NO}$$

- Por las mismas razones, los triángulos TOA' y ONK son semejantes, por ello:

$$\frac{TO}{TA'} = \frac{NK}{NO}$$

- Al combinar las proporciones $\frac{TO}{TA} = \frac{HN}{NO}$ y $\frac{TO}{TA'} = \frac{NK}{NO}$ se obtiene:

$$\frac{TO^2}{TA \cdot TA'} = \frac{HN \cdot NK}{NO^2}$$

Pero sabíamos que

$$\frac{AL}{AA'} = \frac{TO^2}{TA \cdot TA'}$$

Finalmente tenemos que

$$\frac{AL}{AA'} = \frac{HN \cdot NK}{NO^2}$$

Esta proporción es el equivalente de la proposición I-13, en la que PP' y PL corresponden a un diámetro principal -eje de la elipse- y al parámetro o *latus rectum* respectivamente, y son rectas perpendiculares, de manera tal que se cumple la proporción:

$$\frac{PL}{PP'} = \frac{BF \cdot FC}{AF^2}$$

Por lo que la sección construida corresponde a una elipse.

Como se mencionó al inicio del análisis de esta proposición de *Las Cónicas*, Apolonio considera la construcción de la elipse dados el diámetro de una elipse, su correspondiente parámetro y el ángulo de inclinación entre dicho diámetro y sus ordenadas. No obstante, estos elementos pueden variar de diversas maneras.

Un segundo caso propuesto por nuestro autor tiene la siguiente característica: El ángulo de inclinación entre el diámetro y sus ordenadas es ángulo oblicuo.

Este segundo caso corresponde a lo detallado al comienzo del análisis de las proposiciones citadas por Descartes (proposiciones I-52 a I-59), en particular cuando Apolonio resuelve el problema de reducir el caso del ángulo oblicuo al caso del ángulo recto y que ya fue detallado líneas arriba.

Proposición I-58: Construir la elipse si el ángulo de inclinación entre el diámetro y sus ordenadas no es ángulo recto. Obviamente al igual que en la proposición I-56, están dados el diámetro, su correspondiente parámetro y el ángulo de inclinación entre dicho diámetro y sus ordenadas.

El objetivo de esta proposición es construir un eje de la elipse, sea éste AA', así como su parámetro correspondiente, en este caso AM, En otras palabras, lo que Apolonio hace es reducir este caso general -caso en el que el ángulo de ordenadas no es un ángulo recto- al caso particular de la proposición I-56.

Fig. 20

- Sean PP', PL y $\angle CPT$, el diámetro, parámetro y ángulo de ordenadas, respectivamente, de manera tal que el punto C sea el punto medio del diámetro principal (eje de la elipse)
- Tomar el punto N en la circunferencia de diámetro CP.
- Construir la recta NH paralela a la recta PT, de manera tal que[59]

$$\frac{NH^2}{CH \cdot HP} = \frac{PL}{PP'}$$

- Construir la recta CN y prolongar hasta el punto T.
- Tomar el punto A sobre la recta CT, de manera tal que $CT \cdot CN = CA^2$; por lo tanto CA es media proporcional de las rectas CT y CN.
- Prolongar AC hasta A' tal que $AC = A'C$
- Construir PN y prolongar hasta K de manera que $AN \cdot NK = PN^2$; en este caso PN es media proporcional de las rectas AN y NK.
- Construir $A'K$.
- Prolongar PP' hasta el punto E, de manera tal que al trazar la recta EA ésta sea perpendicular a CA. Por lo tanto $CA \parallel NK,\ EA$ interseca PT en O.

[59] Apollonius, op. cit., p. 51.

- Prolongar $A'K$ de manera tal que se interseque con la prolongación de EA en el punto M.

Con estas construcciones auxiliares tenemos que la recta AA' es el eje de la elipse y la recta AM es el parámetro correspondiente a dicho diámetro. Teniendo estas dos rectas Apolonio construye la elipse deseada, en términos de lo ya hecho en la proposición I-56, la cual nos resuelve el problema de construir una elipse dados el diámetro, el parámetro correspondiente y el ángulo de inclinación de las ordenadas con respecto al diámetro dado, puesto que el ángulo dado es ángulo recto.

1.16 La Síntesis Cartesiana del Problema de Pappus

Como se mencionó en el capítulo anterior, el programa cartesiano -Método- para dar solución a los problemas en geometría está conformado por cuatro etapas, de las cuales la última corresponde a lo que los antiguos geómetras denominaban la síntesis del problema. Para ello Descartes sustenta su construcción en las proposiciones I-52 a I-59 de *Las Cónicas* de Apolonio. En esta sección expondremos la ruta que tomo Descartes y que cambiaría de manera definitiva la forma de hacer geometría, inaugurando de esta manera la geometría en su sentido moderno. Muchos son los aspectos en los que la obra cartesiana marcó paradigmas; sin embargo, para el objetivo y alcance de este documento señalaremos que la relación entre una curva geométrica -sus propiedades- y su correspondiente ecuación fue crucial en el desarrollo de las matemáticas después de Descartes y es este hecho el que se encuentra plasmado en los contenidos en los programas de estudio de nivel bachillerato.

El objetivo explícito de Descartes en esta cuarta etapa de su programa es demostrar que el resultado obtenido por vía del análisis -una ecuación de segundo grado en dos variables- es efectivamente una sección cónica; esto se da a través de la construcción de la cónica en cuestión. Sin embargo, de manera velada y a través de su construcción, Descartes asocia de manera indisoluble los elementos geométricos que caracterizan la sección cónica -el estándar vigente en ese momento lo proporcionan *Las Cónicas* de Apolonio- a los elementos algebraicos obtenidos por vía del análisis moderno -la ecuación obtenida-, de manera tal que, la geometría en este nuevo contexto cartesiano no necesitará ya más de la síntesis en el sentido de la geometría antigua, ya que la expresión algebraica que deviene del análisis condensa todas las propiedades del objeto geométrico.

Esta cuarta etapa se lleva a cabo desde dos perspectivas:

1. Perspectiva geométrica: en la cual se recurre a la construcción de la sección cónica, teniendo como referente directo las proposiciones I-52 a I-59 de *Las Cónicas*.

En la construcción geométrica de la sección cónica Descartes emplea la configuración para cuatro rectas del Problema de Pappus; no obstante en esta ocasión destaca únicamente los segmentos AB y CB, es decir, una de las rectas dadas y la otra desconocida respectivamente e incorpora los siguientes elementos:

- La recta IK, paralela a la recta dada AB, es decir $L_1{}' \parallel L_1$.
- Se construye el punto K sobre la recta BC; de esta manera queda determinado el segmento de recta BK.
- Por el punto I se traza la recta L_0 que interseca al segmento de recta BK en el punto L.
- La recta LC corresponde a la ordenada genérica asociada al eje de la sección y juega un papel fundamental en los argumentos algebraicos dados por Descartes en esta última etapa de su programa.

Con estos nuevos elementos Descartes tiene los datos geométricos necesarios para apelar a los *problemas* de *Las Cónicas* de Apolonio, entiéndase las proposiciones I-52 a la I-59, y con ello hacer la construcción -síntesis- para el Problema de Pappus para cuatro rectas; en este caso la recta AB hace las veces de un diámetro de la sección cónica por construir, mientras que la recta BC es el parámetro de ordenadas asociado al diámetro AB; un tercer dato es el ángulo de ordenadas $\angle BAI$ (véase la Fig. 21).

Vale la pena destacar que la recta L_0 hace las veces de uno de los ejes de la sección cónica por construir.

Fig. 21

2. Perspectiva algebraica. Los elementos algebraicos se asocian a los elementos geométricos que caracterizan la sección:
   - $BK = AI = m$
   - $IK = AB = x$
   - $BC = y$
   - En el punto I ocurre que $x = 0$, $y = m$; en consecuencia el punto A hace las veces de origen de un sistema de coordenadas oblicuo.
   - El ángulo $\angle BAI = \theta_1$ es una magnitud dada como condición geométrica inicial, ya que es el ángulo dado entre la recta L_1 y la recta d_1.

Con estos elementos algebraicos Descartes propone lo siguiente:

$$\frac{IK}{KL} = \frac{z}{n}$$

Al ser $IK = x$, tenemos que

$$KL = \frac{n}{z}x$$

Sucede también que

$$\frac{KL}{IL} = \frac{n}{a}$$

Pero sabemos que

$$KL = \frac{n}{z}x$$

Por lo tanto

$$IL = \frac{a}{z}x$$

Por otro lado -ver Figura 4- sabemos que

$$BL = BK - KL \therefore BL = m - \frac{n}{z}x$$

Al ser $BC = y$, podemos expresar la recta LC de la siguiente manera:

$$LC = y - BL$$

$$\therefore LC = y - m + \frac{n}{z}x$$

Esta última expresión algebraica representa a la ordenada genérica asociada al eje de la sección; cabe recordar que en la etapa del análisis nuestro autor finaliza con una expresión algebraica que identifica con las construcciones para las secciones cónicas dadas por Apolonio:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

En consecuencia LC se puede expresar como:

$$LC = \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

Esta última expresión algebraica es la que permite a Descartes identificar el tipo de curva que está asociada con la ecuación $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$ de la siguiente manera:

- Si $LC = 0$ implica que el punto C esta sobre la recta IL (ver Fig. 21) y en consecuencia el lugar geométrico que da solución al Problema de Pappus en este caso es una recta.
- Si LC es una recta paralela a IL sucede que el término $\frac{p}{m}x^2 = 0$, en cuyo caso el lugar geométrico que resuelve el Problema de Pappus es una parábola.
- Si el término $\frac{p}{m}x^2$ es positivo, el lugar geométrico que soluciona el Problema de Pappus es una hipérbola.
- Si el término $\frac{p}{m}x^2$ es negativo el lugar geométrico que ofrece una solución al Problema de Pappus es una elipse.

Construcción de la elipse

1. El centro de la elipse es el punto M y pertenece a la recta L_0.
2. El ángulo de ordenadas es el ángulo $\angle BAI$.
3. Dado que $KL = \frac{n}{z}x$ tenemos que $IL = \frac{a}{z}x$; esta expresión corresponde a la abscisa que se ubica a lo largo de la recta L_0, en cuyo caso $IM = \frac{aom}{2pz}$.
4. El punto N corresponde a uno de los vértices de la elipse, y si M es el centro de la elipse tenemos que NM es la mitad del eje de la elipse L_0, es decir, la mitad del lado transverso.
5. Se asocia el lado recto de la sección con la expresión

$$r = \sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2} + \frac{4mpz^2}{a^2}} = \frac{z}{a}\sqrt{o^2 + 4mp}$$

6. Se asocia el lado transverso de la sección con la expresión

$$t = \sqrt{\frac{a^2 o^2 m^2}{p^2 z^2} + \frac{4a^2 m^3}{pz^2}} = \frac{ma}{pz}\sqrt{o^2 + 4mp}$$

es con esta información que Descartes tiene los elementos necesarios para la construcción de la elipse en términos de expresiones algebraicas. Para ello es importante recordar que la proposición I-13 de *Las Cónicas* se puede interpretar como

$v^2 = ru - \frac{r}{t}u^2$, en la que

$v = LC$, ordenda

$u = NL$, abscisa

r, lado recto

t, lado transverso

Por lo tanto, al remitirnos a la Fig. 22, tenemos que

Fig. 22

$u = NL$; pero $NL = NM - LM$. De igual manera podemos expresar $LM = IM - IL$, y por lo tanto

$$u = NL = NM - IM + IL$$

Si sustituimos $NM = {}^1\!/_2\, t$, ya que NM es la mitad del lado transverso, y las expresiones correspondientes para IM e IL, tenemos que

$$u = \frac{1}{2}t - \frac{aom}{2pz} + \frac{a}{z}x$$

Al reemplazar esta ecuación, así como las correspondientes a r y a t, en $v^2 = ru - \frac{r}{t}u^2$, obtenemos que

$$v^2 = m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2$$

Por lo tanto

$$LC = v = \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

Finalmente, al recordar que $LC = y - m + \frac{n}{z}x$ resulta que:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

Esta última expresión coincide con el resultado final obtenido por Descartes en la etapa del análisis.

1.17 Conclusión

Para concluir con esta exposición histórica del desarrollo y génesis de la Geometría Analítica -transformación y desarrollo del método del análisis desde la antigüedad- podemos agregar y enfatizar algunos puntos que consideramos de sustancial importancia:

- Descartes, siguiendo con la tradición clásica en geometría, requería como complemento la parte del Análisis geométrico que desarrolló para dar solución al Problema de Pappus, para los que tuvo como herramienta primordial al Álgebra -en un sentido amplio del término-, y con base en ella desplegar la Síntesis, es decir, la construcción del objeto obtenido por el método del análisis.
- A diferencia de la geometría antigua en la que, si bien es cierto la Síntesis y Análisis son dos etapas del quehacer geométrico, cada una se llevaba a cabo en procesos muy bien diferenciados, circunstancia muy obvia ya que coexistían obras de corte sintético -*Los Elementos* el ejemplo por antonomasia- y otras varias de corte analítico -el propio Euclides establece todo un cuerpo teórico en relación con el análisis en *Los Datos*-. Con la Síntesis Cartesiana esta diferencia de la antigüedad es superada: ahora -a partir de *La Géométrie*- el Análisis *contiene* ya la Síntesis, ya que esta última etapa del proceso geométrico está incorporada en los parámetros de la expresión algebraica obtenida vía el Método del Análisis Moderno que permite determinar la curva en cuestión; en el caso de Descartes, esto se da al obtener una ecuación de segundo grado en dos variables, la que contiene -en sus parámetros- las propiedades geométricas que determinan el lugar geométrico de

los puntos que satisfacen las condiciones geométricas del Problema de Pappus, a saber: el ángulo de ordenadas, el lado recto y el lado transverso.

- Es precisamente a este respecto que se ha forjado una sobrada banalización en el ámbito educativo, y que de manera casi instintiva establece el binomio ecuación-curva, y pocas veces esclarece de manera lúcida este hecho tan sutil, incluso hasta para el pionero y fundador de esta ciencia -la GA-, el propio Descartes, quien en *La Géométrie* no se ve en la necesidad de pormenorizar la etapa sintética y solo la menciona, dejando al lector la tarea de establecer por sus propios medios este vínculo hoy tan banalizado. Parte de este documento ha sido dedicado a esclarecer esta obviedad cartesiana.
- En este sentido, y de acuerdo con el propio Descartes, cuya visión de la geometría estaba asociada con el arte de resolver problemas, y que desemboca en el programa expuesto en *La Géométrie* cuya premisa fundamental fue la de proporcionar un método amplio para la solución de problemas en geometría, y que al incorporar el álgebra como lenguaje interpretativo, *Unifica* de manera definitiva Análisis y Síntesis.
- En lo que respecta al aporte didáctico y de la enseñanza en el nivel medio superior universitario, podemos concluir que esta reconstrucción epistemológica de la génesis de la Geometría Analítica permite, en primer término, que el docente desarrolle sobre bases disciplinarias más sólidas sus estrategias de enseñanza y con ello enriquezca los aprendizajes del programa de estudios. En segundo término el estudiante de bachillerato tiene mayores posibilidades de establecer estructuras cognitivas más solidas con respecto a la geometría, ya que si la enseñanza se da en este contexto histórico-epistemológico será manifiesta la continuidad en el desarrollo de los conceptos geométricos y su eventual consecución en la nueva geometría: la Geometría Analítica.

Finalmente Las dos ideas centrales en torno de las cuales se ha dado la discusión de este documento muestran:

- Que la GA tiene como cimiento incuestionable el método del análisis de la antigua geometría, es decir, que la Geometría Analítica no se *contrapone* al método deductivo -síntesis-, sino por el contrario, éste yace implícito en la solución de un problema geométrico que es resuelto con este nuevo método analítico llamado Geometría Analítica. La síntesis cartesiana expresa de manera diáfana cómo los parámetros de una cónica expuestos por Apolonio en *Las Cónicas* están *presentes* en la ecuación de segundo grado obtenida vía el Análisis Moderno; como consecuencia de ello es posible estudiar las propiedades de las curvas geométricas en términos de las propiedades de sus ecuaciones.

- En lo que respecta al hecho de que las expresiones algebraicas son la esencia de la Geometría Aanalítica, queda de manifiesto que el álgebra simbólica, pero sobretodo la estructura algebraica, es el medio a través del cual se justifica cada operación realizable en términos de una construcción geométrica bien determinada. En este sentido la obra cartesiana se despide del canon antiguo e incorpora una estructura algebraica que no prioriza la homogeneidad en las operaciones para las magnitudes geométricas, en consecuencia *los problemas pueden dividirse en problemas más simples* ya que se pueden expresar en términos de líneas rectas individuales; estos hechos contribuyeron a enriquecer las técnicas del método analítico antiguo dotándolo de esta poderosa herramienta *Transformativa* -el álgebra-, a grado tal que el análisis y la síntesis antiguas se funden indisolublemente en una expresión algebraica, que da solución al problema geométrico pero también caracteriza y con ello posibilita la construcción de la curva geométrica.

Capítulo 2 Marco didáctico y psicopedagógico

Cuatro son las áreas esenciales de *Conocimiento* que el docente de cualquier asignatura debe considerar para llevar a cabo su práctica cotidiana:

- Conocimientos de la disciplina que imparte.
- Conocimientos específicos del contenido pedagógico -didáctica de la disciplina, didáctica de la matemática en nuestro caso-.
- Conocimiento pedagógico general.
- Conocimiento de los estudiantes.

Todas y cada una de estas asignaturas constituyen en si disciplinas muy vastas y con diversos derroteros a su interior; este documento no minimiza ninguna de ellas, sin embargo hemos priorizado el mostrar aquellos aspectos vinculados y que justifican con mucho la necesidad de la perspectiva histórica como fundamento de la enseñanza de la matemática y particularmente en esta propuesta didáctica para el bachillerato; por ello consideramos que los Conocimientos de la Disciplina y la Didáctica de la Matemática son los elementos sustantivos que dan validez a esta propuesta, no obstante, los otros dos aspectos también son considerados en el desarrollo de este documento, iniciaremos esta discusión planteando aquellos aspectos cognitivos que caracterizan al estudiante de bachillerato: el adolescente.

2.1 El Conocimiento de los Estudiantes un contexto general: Jean Piaget y la Teoría Psicogenética

Como es bien sabido la Teoría Psicogenética de Jean Piaget fue una propuesta encaminada a responder la pregunta: ¿cómo se pasa de un estadio de menor conocimiento a un estadio de mayor conocimiento?, el interés de la obra piagetiana consistió por tanto, en investigar el pensamiento racional y de qué manera se dan las operaciones de ese pensamiento, en otras palabras, su teoría se desarrolló en el ámbito epistemológico; sus investigaciones pedagógicas se llevaron a cabo en un nivel más bien secundario, sin embargo, de su obra podemos rescatar algunos aspectos que dan luz al contexto educativo del nivel medio superior:

- Aporta una respuesta sólida a la manera en que se construye el conocimiento científico.

- Puntualiza como se da el desarrollo intelectual desde el nacimiento hasta la adolescencia, mediante la génesis de nociones y conceptos, lo que va muy a la par en el desarrollo de contenidos escolares, sobre todo en ciencias (matemáticas).
- El desarrollo de las capacidades mentales se da a partir de la construcción de *Estructuras* intelectuales progresivamente más equilibradas, las cuales tienen un fundamento biológico, y ese desarrollo se concreta mediante las *Acciones* que el individuo realiza sobre los objetos, siendo este hecho intransferible.
- Este desarrollo se caracteriza por la aparición de *Estadios Evolutivos.*
- En el *Estadio Operatorio Formal, el* adolescente logra la *abstracción* sobre conocimientos concretos observados, que le permiten utilizar el razonamiento lógico inductivo y deductivo.
- Piaget distingue tres tipos de conocimiento que el sujeto puede poseer, éstos son: social, físico y lógico-matemático.
- El conocimiento lógico-matemático no existe por sí mismo en la realidad concreta -no se percibe de manera directa de los objetos que nos rodean-, el germen de este razonamiento está en el sujeto y éste lo construye a partir de una abstracción reflexiva y de las acciones que realiza con los objetos, siempre de lo más simple a lo más complejo.
- Los tres tipos de conocimiento interactúan entre sí y el conocimiento lógico-matemático constituye la materia necesaria para la construcción de las *estructuras y esquemas* del sistema cognitivo, y sin él los conocimientos físico y social no se podrían incorporar o asimilar; para Piaget, el razonamiento lógico-matemático no puede ser enseñado.
- El aprendizaje no debe entenderse como una recepción pasiva del conocimiento, sino como un proceso activo de elaboración, es por ello que la adquisición del conocimiento debe plantearse de manera tal que favorezca las *interacciones -la Acción-* entre el estudiante y los contenidos, de tal suerte que se esté favoreciendo la *Actividad* del adolescente[60].

Al estar dirigida nuestra propuesta para la educación de nivel medio superior, resulta importante valorar que los estudiantes de este nivel se encuentran en mayor medida en el Estadio de las Operaciones Formales, aunque aún no consolidado, por ello, corresponde a la educación de nivel medio superior propiciar los medios para fortalecer este Estadio; así mismo en esta etapa de la vida, el pensamiento operacional se encuentra reafirmado,

[60] Coll, C., *Psicología genética y aprendizajes escolares,* Siglo XXI, México 1983, p. 224.

es por ello, que consideramos que el estudiante de nivel medio superior cuenta ya con las Estructuras cognitivas que le permitirán por un lado:

- **Seguir construyendo e incrementando mejores formas de pensamiento, en particular desarrollar el razonamiento lógico-matemático, en un sentido general.**
- **Iniciarse en una cabal comprensión del *quehacer* matemático y en consecuencia desarrollar una actitud favorable hacia la matemática y la geometría particularmente.**

Ambas premisas son cruciales en la formación del estudiante y los docentes no podemos perder de vista que en el caso de la educación media superior más de la mitad de los bachilleratos del país son un bachillerato general[61], cuyo principal objetivo no es el de formar especialistas sino formar mentes a través de las distintas especialidades, y también, porque no decirlo, propiciar actitudes, creencias y emociones[62] favorables hacia las diferentes disciplinas en las que el adolescente se involucra; en lo que a nosotros los docentes del área de matemáticas en el nivel bachillerato corresponde, nuestra meta no será la de formar matemáticos sino de formar mentes a través de la matemática, para ello se requiere mostrar al estudiante no problemas ficticios sino problematizarlo en un contexto verdaderamente matemático que muestre en la medida de lo posible el proceso evolutivo del desarrollo de la matemática, en lo que atañe a este proyecto esto aplica al desarrollo de la geometría analítica y con ello se alienta al joven estudiante para despertar en él, el gusto por esta disciplina.

Para lograr este último cometido los docentes nos apoyamos en los contenidos programáticos de los distintos bachilleratos generales, los que reflejan el papel pragmático de la acción educativa, ya que a través de los programas escolares es como la sociedad refleja el molde o modelo de ciudadano que esta última necesita reproducir para seguir existiendo, pues “la sociedad no puede subsistir más que si existe entre sus miembros una homogeneidad suficiente: la educación perpetúa y refuerza dicha homogeneidad”[63]. Por otro lado, los programas de estudio -contenidos programáticos- nos remiten a la especificidad de una disciplina en particular, en nuestro caso de interés, el saber matemático.

---

[61] Proyecto de Creación “Programa de Maestría en Docencia para la Educación MediaSuperior (MADEMS)”, UNAM. Septiembre 2003, p.7.

[62] Véase Gómez, I., *Matemática Emocional. Los Afectos en el Aprendizaje matemático*, Narcea, Madrid 2000.

[63] Durkheim, E., *Educación y sociología.* Ediciones Coyoacán, México D,F. 2009, p.114.

Este saber matemático le ha llevado a la humanidad miles de años en su edificación en donde el desarrollo y construcción de métodos, conceptos e ideas han transitado por un proceso histórico; en lo que corresponde al desarrollo de la Geometría Analítica -GA- se puede considerar a esta última como la culminación de un etapa en el desarrollo de la Geometría, ya que la GA determina propiedades de una infinidad de curvas a partir de una sola *fórmula algebraica*, hecho que trasciende al método analítico empleado por los geómetras de la antigüedad; es entonces como esta nueva geometría -la GA- culmina con un proceso que generaliza en buena medida los conceptos ya formulados por la geometría euclidiana, a través de un método más robusto y más certero, el cual en todo momento se nutre del método antiguo.

Lo que resulta relevante es la manera en que ocurre la *aparición* de esta nueva geometría, la cual no surge *espontáneamente*, sino que es producto de una transición que va de un *estado* a *otro* en el desarrollo del pensamiento geométrico, muy particularmente en el desarrollo del método analítico. En esta metamorfosis son los *Mecanismos de Pasaje* involucrados en el paso del antiguo método del análisis a la GA en su sentido moderno, que se dan de manera seriada, es decir, bajo la forma de *Estadios* al igual que ocurren en el desarrollo cognitivo de los individuos -como lo detalla y explica Piaget en su Teoría Psicogenética-.

Podemos destacar dos características importantes de estos *Mecanismos de Pasaje:*

- En todo progreso cognitivo y/o científico lo que fue rebasado está incorporado en lo rebasante
- Estos transcurren de lo *intra-objetal* -examen de los objetos- a lo *inter-objetal* o estudio de las relaciones y las transformaciones, y finalmente de este último punto a lo *trans-objetal*, en donde se da la construcción de las estructuras[64]

El primero de estos aspectos del progreso científico-cognitivo resulta relevante para el planteamiento de nuestra propuesta ya que si en el desarrollo histórico de la GA los mecanismos de pasaje ocurren así, resulta conveniente el diseño de actividades que evidencien y pongan en juego este hecho, lo cual resulta ser de suma congruencia con los mecanismos de pasaje a nivel cognitivo que se dan en los estudiantes de bachillerato. Por otro lado, la teoría genética de Piaget plantea que la formación de *Estructuras* intelectuales cada vez más equilibradas, se logra por parte del individuo, mediante las *acciones* que este último realiza sobre los objetos, y este acto no puede ser delegado por parte de quien desea conocer; por ello en esta propuesta se plantea el desarrollo de

[64] García, R.; Piaget, J., *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*, Siglo XXI, México 2008, p.251.

secuencias didácticas encaminadas a que el estudiante de bachillerato lleve a cabo estas *acciones,* a partir de actividades que impliquen la resolución de problemas- entiéndase problemas y teoremas- de la geometría euclidiana, en un contexto más amplio y que enriquezca los contenidos y aprendizajes contemplados en los programas de estudio para esta asignatura, propiciando de esta manera la construcción de:

- **Estructuras mentales más sólidas**
- **Los fundamentos que subyacen en la geometría analítica moderna, a la manera en que esta se desarrolló a través de aproximadamente 1300 años**

2.2 Conocimientos específicos del contenido pedagógico: Didáctica e Historia de las Matemáticas

Una cuestión sustancial para el docente en matemáticas radica en el hecho de que no es suficiente para él conocer la Matemática como tal, como ciencia que Es, pese a ello él debe ser un *experto* en matemáticas siendo este un hecho insalvable para quién pretenda enseñar esta disciplina, en otros términos, conocer la Matemática es una condición mínima necesaria para llevar a cabo su labor. Por otro lado, el docente debe ser vigilante de un elemento sustantivo y fundamental en su labor: llevar a cabo lo que Y. Chevallard llama la *Transposición Didáctica,* que consiste en el proceso transformativo del *Saber Sabio* -el conjunto de conocimientos propios de la matemática, entendidos como aquellos saberes específicos y bien determinados que caracterizan a la Matemática como tal- por un *Saber de Enseñar*, es decir, aquel saber adecuado a las características cognitivas de los jóvenes estudiantes con quien desarrolla su práctica cotidiana, es importante recalcar que esta transformación implica aspectos en los que el docente tiene menor o ninguna influencia:

- Currículo de la institución
- Expectativas sociales -incluyendo las de los padres de familia-
- Las necesidades y exigencias de los estudiantes

Lo anterior lo podemos esquematizar en el llamado Triángulo de la Didáctica:

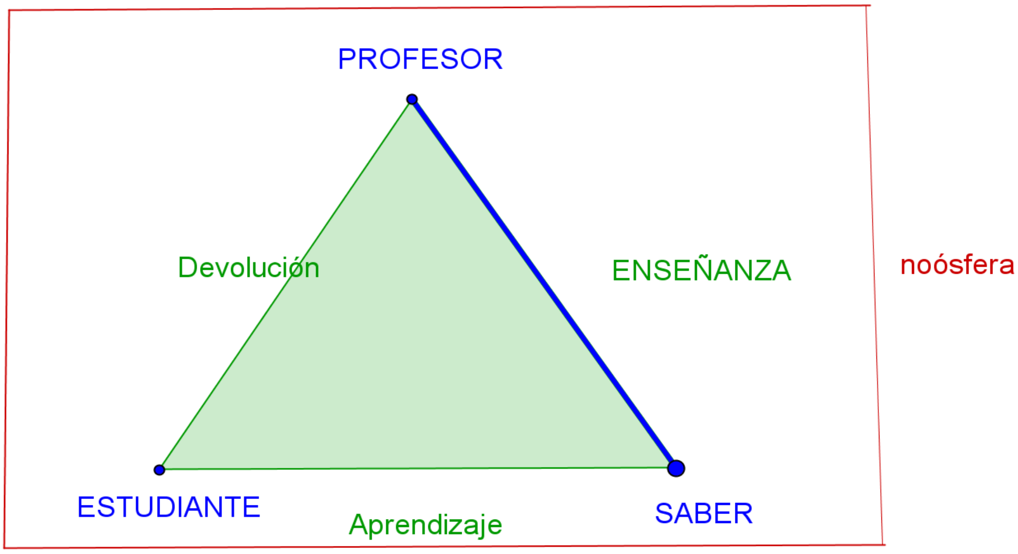


Fig.1

En términos de la figura anterior podemos destacar lo siguiente:

Del sistema didáctico conformado por los tres vértices del triángulo: saber, estudiante y profesor, podemos notar que estos últimos están inmersos en el rectángulo de la Noósfera, concepto que el didacta Chevallard identifica con la sociedad -padres, mundo político, medios de comunicación, medio académico, etc.-, el vértice *saber* representa el polo ontológico o epistemológico, el vértice *estudiante* es el polo genético o psicológico, a su vez el vértice profesor es el polo pedagógico o polo funcional; en lo que respecta a los lados que conforman el triángulo y acorde a los fines que se propone esta propuesta debemos destacar el lado *Saber-Profesor* al que podemos referir con la acción de enseñar, es decir este lado del triangulo didáctico conlleva toda la problemática de la transposición didáctica y es precisamente en esta etapa en la que el profesor puede desarrollar su creatividad como artífice de la transmisión del conocimiento y guía en el desarrollo de aprendizajes por parte de los estudiantes.

La *Transposición Didáctica* implica por tanto concebir a la matemática no solo como el conjunto de conocimientos acabados e inmutables, todo lo contrario, requiere la reinvención de estos *conceptos y métodos*, para ello el docente debe contar con una *visión* amplia y clara de la génesis de estos últimos. Es esta *visión* que se forja el docente la que le permitirá comunicar de la mejor manera posible y según sus propias capacidades aquellos conocimientos que el estudiante empleará para construir sus propios aprendizajes y desarrollar sus propias habilidades.

Una aportación en este sentido es sugerida por O. Toeplitz[65] quien nos plantea su *Método Genético Indirecto,* en él se detalla que al emplear la historia de las matemáticas para su enseñanza no hay necesidad de mencionar explícitamente detalles históricos, como regularmente se entendería el uso de la *historia* -el relato histórico-, nos plantea que el desarrollo histórico sólo actúa como una guía y muestra al profesor los aspectos de un concepto que son relevantes para el diseño de su planeación didáctica y a la vez rescatan hechos relevantes dentro de la matemática misma, en este sentido, el desarrollo histórico muestra también que la comunidad de los grandes matemáticos necesitan mucho tiempo, para construir un marco conceptual determinado. El método genético indirecto tiene mayores potencialidades, según Toeplitz una ventaja del método consiste en la posibilidad de que el maestro haga un paralelismo con el desarrollo histórico visible y con ello orientar el sentido de la enseñanza.

En contraparte, podemos distinguir un modelo tradicional o comúnmente empleado en las aulas del bachillerato para la enseñanza de la matemática, en el cual, el profesor desempeña el papel principal, el paradigma de este tipo de enseñanza es una conferencia, durante la cual el maestro muestra a los estudiantes las nociones, definiciones y métodos matemáticos y sus respectivos ejemplos a manera de aplicaciones. La tarea principal del estudiante es llegar al conocimiento de estos contenidos y sus aplicaciones, para en un segundo momento, utilizarlas en ejercicios típicos. Este modelo tiene en cuenta sólo las conexiones lógicas entre los conceptos matemáticos, tratados sincrónicamente -es decir, con independencia de la evolución en el tiempo, en otras palabras sin considerar el desarrollo histórico de los contenidos que se pretenden enseñar-.

Un modelo alternativo muy recurrente y que ha surgido en términos de la teoría psicogenética de J. Piaget y que a grandes rasgos se fundamenta en lo expuesto por este documento líneas arriba, consiste en que los estudiantes aprenden matemáticas de una manera más activa, al construir paso a paso, su propio conocimiento matemático; en este modelo alternativo, el papel del profesor es muy diferente ya que ahora desempeña el rol de tutor, asesor, observador y ayudante, de esta manera el docente contribuye con los estudiantes en la dirección y orientación de sus propias capacidades. Es precisamente en este modelo ya consolidado y consensado en el que es posible implementar cambios que lo potencialicen aún más, por lo que resulta necesario reconocer que la enseñanza, así

[65]Fauvel, J.; Maanen, J., *History in Mathematics Education The ICMI Study,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000, p.71.

como el desarrollo histórico-epistemológico no obedecen sustantivamente al aspecto lógico y formal, sino también tienen en cuenta una serie de altibajos previos a la formación de los conceptos matemáticos[66], este último punto resulta crucial y definitorio en la enseñanza de la matemática, ya que muchas modificaciones a los programas de estudio han sido resultado de un debate acerca del papel que debe jugar la formalidad y el rigor al momento de enseñar matemáticas.

2.3 Algunos argumentos en apoyo de la integración de la historia de las matemáticas en la enseñanza

Existe dos visiones acerca de la naturaleza de las matemáticas, por un lado, se les considera como un cuerpo de conocimiento abstracto que está disponible para ser aprendido o descubierto y luego mejorado por cualquier persona; por otro lado, las matemáticas surgen de problemas, que se expresan en las necesidades de las personas en un momento en particular. Se ha argumentado que estas dos formas generales de la relación matemática pueden ser fundamentalmente incompatibles: las matemáticas como un conjunto de verdades eternas pueden ser realmente inconsistente con las matemáticas como un producto cultural situado en contextos sociales.

Este conocimiento -saberes matemáticos- son en realidad una síntesis y abstracción de las respuestas a las preguntas y problemas que un determinado momento de la historia del hombre requerían ser resueltos, estos problemas eran esencialmente *prácticos*, en un momento posterior muchos de estos problemas y sus soluciones se transformaron progresivamente en entes abstractos, y la matemática entró en un mundo intelectual que algunos filósofos consideran como algo separado de las personas.

Teniendo en cuenta la naturaleza de las matemáticas a partir de un contexto de la historia de las matemáticas cambia nuestra forma de concebir los problemas epistemológicos del desarrollo del conocimiento matemático en el individuo -en nuestro caso en el estudiante-, el enfoque histórico alienta y nos permite considerar las matemáticas no como un producto estático, con una existencia *a priori*, sino como un proceso intelectual, no como una estructura completa disociada del mundo, sino como una actividad intelectual permanente de las personas, el reconocimiento de esta actividad es importante para el establecimiento de parámetros científicos para cualquier teoría didáctica.

Es de destacar que la incorporación de la historia de las matemáticas en el ámbito educativo ha sido apoyada por reconocidos matemáticos: H. Poincaré, F. Klein, I. Lakatos,

[66] Véase Kline, M., *El fracaso de la matemática moderna*, Siglo XXI, México 2007.

M. Kline, así como distintas asociaciones vinculadas a la enseñanza de las matemáticas: NCTM -Consejo Nacional para la Enseñanza de las Matemáticas- de los EUA.

Muchos de estos autores contraponen la enseñanza de la matemática con una orientación deductiva y que muestra solo la culminación de los procesos que subyacen al quehacer matemático a manera de conceptos acabados, argumentando que el desarrollo histórico de las matemáticas demuestra que este estilo de enseñanza de la disciplina matemática viene sólo después de que esta disciplina ha alcanzado la madurez, por lo que se hace necesario dar una presentación *a posteriori* de su estructura lógica y completitud, Freudenthal lo plantea de la siguiente manera:

"Ninguna idea matemática ha sido publicada en la forma en que fue descubierta"

Es decir, las preguntas y los problemas que constituyen motivaciones básicas para el desarrollo de una idea matemática, así como las dudas que se generan en el camino, permanecen ocultos bajo una forma lineal organizada: el cuerpo deductivo, en el que los nuevos resultados parecen ser simplemente añadidos de manera acumulativa.

En este sentido, la integración adecuada de la historia en la educación matemática puede desempeñar un papel importante al ayudar a descubrir cómo nuestros conceptos matemáticos, las estructuras, los métodos, las ideas se han inventado y desarrollado.

La historia de las matemáticas ofrece una vasta reserva de preguntas relevantes, problemas y planteamientos que pueden ser muy valiosos tanto en términos de su contenido y su potencial para motivar el interés y atraer al aprendiz[67]. En este sentido, los ejercicios de inspiración histórica pueden estimular el interés del estudiante y contribuir a la mejora curricular.

2.4 Los alcances didácticos para los docentes

Mediante el estudio de la historia y tratando de reconstruir aspectos de la evolución histórica en determinados temas de la matemática, los docentes pueden: Identificar las motivaciones detrás de la introducción del *nuevo* conocimiento matemático, mediante el estudio de ejemplos que sirvieron como prototipos en su desarrollo histórico; por otro lado, el estudio de la historia de la matemática, le permitirá al docente tomar conciencia de los obstáculos que aparecieron en el desarrollo de un concepto o método, los que en un momento dado pueden reaparecer en el aula; consideramos también que la historia de las matemáticas puede ayudar al maestro a tomar conciencia de los pros y los contras al introducir al estudiante en un tema matemático.

[67] Van Maanen 1991; Friedelmeyer 1990, 1; 1996, 121; Ernest 1994, 237-238.

De manera adicional, el docente que se involucra con el desarrollo histórico de las matemáticas, se encuentra en una postura más consciente del proceso creativo de *hacer matemáticas.* Así, los profesores -y en este sentido, los estudiantes también-, no sólo pueden enriquecer su formación matemática, sino también apreciar mejor la naturaleza de la actividad matemática. Finalmente, el docente enriquecerá su repertorio didáctico: explicaciones, ejemplos y enfoques alternativos para presentar un tema o para resolver problemas.

En conclusión, conviene destacar que las reelaboraciones sucesivas de las diversas teorías opacan las teorías precedentes, atenúan su historia, y aquí hay que buscar una de las principales razones que provocan el que las matemáticas sean, en un alto grado negadoras de su propia historia, es decir, el carácter acumulativo de la matemática supone que todo el trabajo útil del pasado está incorporado de alguna manera en las teorías actuales, de modo que se prescinde de la obra original y con ello toda su riqueza heurística.

Capitulo 3 Propuesta de enseñanza y secuencias didácticas

El objetivo de estas actividades consistió en que el estudiante verificara tres métodos: el método de la síntesis, el método analítico antiguo y el método analítico moderno -geometría analítica-, de manera tal que al contrastarlos y verificar las características de cada uno, el estudiante estableciera la complementariedad de ambos para el caso de la síntesis y el análisis antiguo, de manera tal, que la *aparición* del método moderno del análisis deviene en la continuación y enriquecimiento de las técnicas antiguas en la solución y demostración de problemas geométricos a grado tal que el estudiante estuviera en condiciones de observar la unificación de los métodos antiguos -síntesis y análisis- *fusionados* en el método moderno del análisis, mejor conocido como Geometría Analítica. Estas actividades contemplan algunos de los teoremas y problemas que se discutieron a lo largo de la exposición correspondiente al marco teórico disciplinario, destacando la importancia de considerar los *datos* que se tienen al plantear un problema geométrico:

- Dados dos puntos en posición, está dada una recta en posición y magnitud
- Dados tres condiciones: puntos, rectas y sus combinaciones, está dada una circunferencia en posición y magnitud -centro y radio-

3.1 Planeación

El diseño de esta planeación se llevó a cabo aplicando diversos conceptos estudiados en las asignaturas MADEMS, particularmente en la asignatura Psicopedagogía de la Enseñanza y el Aprendizaje, destacando ante todo la idea de Enseñanza Estratégica[68] la cual recupera muchos de los elementos de la psicología educativa así como de las investigaciones de diversos autores comprometidos con la enseñanza auto regulada.

De igual manera este diseño intenta estar apegado a la realidad de un profesor de bachillerato CCH, el cual tiene que atender 30 horas semanales repartidas en 6 grupos de 25 alumnos cada uno, así como algunos grupos en otra escuela. Hago mención a este hecho ya que un profesor con esta carga de trabajo está imposibilitado para realizar una práctica docente demasiado personalizada, por la misma razón los métodos de enseñanza deben ser acordes a dicha situación. Lo anterior no soslaya el compromiso que un docente debiera mostrar ante su labor, por el contrario la planeación está diseñada para que en los hechos sea puesta en práctica de manera cotidiana y sirva de modelo para cubrir con los restantes contenidos temáticos del curso.

Esta planeación se llevó a cabo en términos del programa del programa de estudios de Matemáticas I-IV de La Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, en particular para la asignatura Matemáticas Álgebra Y Geometría III. Cuyo objetivo general en cuanto a la geometría analítica es:

---

[68] Véase Quesada, R., *Cómo planear la enseñanza estratégica*, Limusa, México. 2008.

“hacer énfasis en el método analítico que permite representar y analizar a través del álgebra, a las curvas y los objetos geométricos, que desde el punto de vista euclidiano sólo admiten formas particulares de construcción, estudio y análisis de sus elementos”[69]

3.2 Estrategias de enseñanza y aprendizaje

- Preguntas intercaladas.- Preguntas insertadas en la situación de enseñanza o en un texto. Mantienen la atención y favorecen la práctica, la retención y la obtención de información relevante. Estas preguntas se insertaron en las actividades del material didáctico diseñado para la sesión (anexos)
- Resumen y cuadro sinóptico.- Síntesis que enfatiza conceptos clave, principios, y términos. El profesor pone en práctica esta estrategia, permitiendo que los alumnos identifiquen las características, ventajas y desventajas
- Mapas conceptuales.- Representación gráfica de esquemas de conocimiento (indican conceptos, proposiciones y explicaciones). El profesor pone a disposición del estudiante el material que sustenta la elaboración de esta herramienta poderosa, la cual permite evidenciar y estructurar de mejor manera los distintos aprendizajes. En este sentido el docente es el encargado de modelar dicha estrategia

Instrumentos de evaluación

- Técnica de evaluación: Prueba Objetiva en la evaluación diagnóstica anexo 1 “Conocimientos Previos”
- Instrumento de evaluación: Rúbrica para evaluar la etapa de inicio y de desarrollo

El objetivo de esta evaluación consistió en identificar y decidir qué contenidos principales se requieren para abordar/construir los nuevos contenidos. En particular el instrumento diseñado, cae dentro de instrumentos formales: pruebas objetivas, cuestionarios abiertos y cerrados, pruebas de desempeño, resolución de problemas, informes personales, etcétera.

En el diseño de esta planeación didáctica se contempló el desarrollo y la implementación de la evaluación formativa, esta se realiza a la par del proceso de enseñanza-aprendizaje por lo que debe considerarse como una parte reguladora y sustancial del proceso. La finalidad de la evaluación formativa es estrictamente pedagógica; regular el proceso de

---

[69]Colegio de Ciencias y Humanidades, *Programa de matemáticas semestres I a IV*, Comisión de revisión y ajuste de programas. Área de Matemáticas, 2005, p. 51.

enseñanza-aprendizaje para adaptar o ajustar las condiciones pedagógicas -estrategias, actividades- en favor del aprendizaje de los estudiantes.

Por tanto, no importa tanto valorar los resultados, sino comprender el proceso, supervisarlo e identificar los posibles obstáculos o fallas que pudiera haber en el mismo, y en qué medida es posible remediarlos con nuevas adaptaciones didácticas

Sesión 1

Duración: 2 horas

Objetivos:

Que el estudiante:

- Bosquejé por cuenta propia alternativas de solución para un problema geométrico dado.
- Identifique los aspectos fundamentales que estructuran las proposiciones de Los Elementos, particularmente las proposiciones que resuelven un Problema

Plan:

Como se discutió en los capítulos correspondientes al marco teórico disciplinario, el método sintético y el método analítico son dos caras de la misma moneda, en este contexto, la obra clave que nutre los contenidos programáticos del curso de geometría del Colegio de Ciencias y Humanidades se encuentran en Los Elementos de Euclides, por ello, es pertinente que el estudiante tenga una noción clara de las características y la estructura general de esta obra, desde nuestro punto de vista, el estudiante de bachillerato está en condiciones de comprender y alcanzar[70] con mayor éxito los aprendizajes correspondientes al cuso de Matemáticas III si se le ofrece la oportunidad de acercarse de manera directa al texto euclidiano, sin mayores pretensiones que las de ofrecer un contexto *Real* dentro de la enseñanza de esta ciencia.

Para ello en un primer momento el estudiante pondrá en juego conceptos, métodos y estrategias propias y particulares para resolver un problema geométrico. Posteriormente, apoyado en esta *andamio* el estudiante hará una inmersión en las proposiciones euclidianas, de manera tal que elabore una caracterización de estas y de la estructura del método subyacente en Los Elementos, entiéndase esta estructura como la identificación y uso de postulados, definiciones y nociones comunes, así como el encadenamiento de proposiciones que dan validez a la solución de un problema.

---

[70] Véase el capítulo: marco teórico metodológico y práctico.

Puesta en práctica:

APERTURA

1. El profesor se presentará de manera breve
2. El profesor indicará al grupo el contenido temático de la clase, así como la ubicación del tema en el contexto del curso, también indicará el objetivo de las actividades del anexo 1 “Conocimientos previos”
3. El profesor repartirá el material del anexo 1 “Conocimientos Previos” y solicitará a los estudiantes que trabajen en diadas, permitirá que discutan la actividad y planteen conclusiones
4. El profesor solicitará a los diferentes equipos que se involucren y que participen en el pizarrón
5. El profesor iniciará la recapitulación correspondiente, propiciando una lluvia de ideas en el grupo
6. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente haciendo uso de un resumen

DESARROLLO

1. El profesor indicará al grupo el objetivo de las actividades del anexo 2 “Los Elementos: su estructura”
2. El profesor repartirá el material del anexo 2 “Los Elementos: su estructura” y solicitará a los estudiantes que trabajen en diadas, permitirá que discutan las actividades 1 y 2 y con ello planteen conclusiones
3. El profesor solicitará a los diferentes equipos que se involucren y que participen en el pizarrón
4. El profesor solicitará a través de una lluvia de ideas, las palabras claves y conceptos que se fueron desarrollando a lo largo de la sesión en relación a los contenidos temáticos

CIERRE

1. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente haciendo uso de un resumen
2. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá
3. El profesor indicará al grupo el objetivo de las actividades del anexo 2 “Los Elementos: su estructura”: actividad extra clase

Nota.- reagrupar a los equipos

Sesión 2

Duración: 2 horas

Objetivos:

Que el estudiante:

- Identifique los aspectos fundamentales que estructuran las proposiciones de Los Elementos
- Caracterice el método sintético expuesto en Los Elementos

Plan:

Una vez que el estudiante se ha familiarizado con la estructura de las proposiciones de Los Elementos, tendrá que identificar de manera clara los distintos componentes que conforman tales proposiciones, entre estos tenemos: los postulados, las nociones comunes y las definiciones. Por otro lado el estudiante explorará en estas proposiciones el Método que subyace en cada una de ellas; como se explicó en el marco disciplinario de este documento Los Elementos son una obra de corte sintético, en consecuencia el estudiante al enfrentarse a una proposición euclidiana identificará:

- **Que una proposición -en este caso un problema- SOLO *EXPONE* las construcciones necesarias para dar solución al problema en cuestión**
- **Justifica dichas construcciones en términos de un encadenamiento deductivo, a partir de proposiciones anteriormente justificadas -demostradas- en la obra.**

Puesta en práctica:

APERTURA

1. El profesor retomará la actividad extra clase del anexo 2 “Los Elementos: su estructura”
2. El profesor solicitará a los estudiantes que se involucren propiciando una lluvia de ideas en el grupo
3. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente haciendo uso de un resumen
4. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá.

DESARROLLO

1. El profesor repartirá el material del anexo 3 “Los problemas geométricos en Los Elementos” y solicitará a los estudiantes que trabajen en diadas, permitirá que discutan la actividad y planteen conclusiones
2. El profesor indicará al grupo el objetivo de las actividades del anexo 3 “Los Elementos: su estructura”
3. El profesor solicitará a los diferentes equipos que se involucren y que participen ordenadamente en el pizarrón
4. El profesor solicitará a través de una lluvia de ideas, las palabras claves y conceptos que se fueron desarrollando a lo largo de la sesión

CIERRE

1. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente haciendo uso de un resumen.
2. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá.

Sesión 3

Duración: 1 hora

Objetivos:

Que el estudiante:

- Reconozca a los mapas conceptuales o mapas de conceptos como un medio para visualizar ideas o conceptos y las relaciones jerárquicas entre los mismos.
- Elabore mapas conceptuales
- Reconozca que los mapas conceptuales facilitan el aprendizaje al rescatar la estructura lógico-deductiva del material estudiado
- Identifique los aspectos fundamentales que estructuran las proposiciones de Los Elementos
- Siga explorando el método sintético expuesto en Los Elementos

Plan:

Una vez que el estudiante se ha familiarizado con la estructura de las proposiciones de Los Elementos y de igual manera con la estructura que determina dichas proposiciones, a saber: cada proporción se sustenta en proposiciones anteriores, postulados, nociones comunes y definiciones, consideramos que el estudiante cognitivamente está en condiciones de establecer en sus *propios términos* dicha estructura presente en las proposiciones que implican la solución de un problema geométrico, en consecuencia se promoverá este hecho a través de un recurso como los mapas conceptuales y el resumen.

Puesta en práctica:

APERTURA

1. El profesor repartirá el material del anexo 4 “mapas conceptuales” y solicitará a los estudiantes que trabajen en diadas, permitirá que lean discutan el texto y que planteen conclusiones
2. El profesor solicitará a los diferentes equipos que se involucren y que participen propiciando una lluvia de ideas en el grupo.

DESARROLLO

1. El profesor elaborará en el pizarrón, junto con los estudiantes el mapa conceptual correspondiente a las sesiones uno y dos.

CIERRE

1. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente.
2. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá.

Sesión 4

Duración: 2 horas

Objetivos:

Que el estudiante:

- Identifique los aspectos fundamentales que estructuran las proposiciones de Los Elementos, particularmente las proposiciones que demuestran un Teorema
- Caracterice el método sintético expuesto en Los Elementos

Plan:

Los Elementos de Euclides están constituidos primordialmente por proposiciones, a través de las cuales se expone la *Solución de un Problema* o en su caso *la Demostración de un Teorema,* por ello, es pertinente que el estudiante una vez que ha clarificado las características y la estructura general de Los Elementos, identifique las características de un teorema en el contexto euclidiano

Para ello en un primer momento el estudiante pondrá en juego sus conceptos, métodos y estrategias propias y particulares para demostrar un teorema geométrico. Posteriormente, apoyado en esta *base* hará una inmersión en las proposiciones euclidianas, de manera tal que elabore una caracterización de estas últimas y de la estructura de la obra, como complemento a lo que se ha establecido en las sesiones anteriores, en este caso, priorizando las proposiciones que involucran la demostración de un teorema.

Puesta en práctica:

APERTURA

1. El profesor repartirá el material del anexo 5 “Los teoremas en Los Elementos” y solicitará a los estudiantes que trabajen en diadas, permitirá que lean discutan el texto y que planteen conclusiones
2. El profesor indicará al grupo el objetivo de las actividades del anexo 5 “Los teoremas en Los Elementos”

DESARROLLO

1. El profesor solicitará a los diferentes equipos que se involucren y que participen propiciando una lluvia de ideas en el grupo.
2. El profesor solicitará a través de una lluvia de ideas, las palabras claves y conceptos que se fueron desarrollando a lo largo de la actividad 1

CIERRE

1. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente.
2. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá.

Sesión 5

Duración: 2 horas

Objetivos:

Que el estudiante:

- Identifique como característica fundamental en las proposiciones de Los Elementos, a los problemas y a los teoremas
- Caracterice el método sintético expuesto en Los Elementos

    - **Identifique que el método sintético NO MUESTRA NI ESTABLECE *LA MANERA EN QUE SE LLEGA* A LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA Ó A LA DEMOSTRACIÓN UN TEOREMA.**

- **Plan**:

  Los Elementos de Euclides están constituidos primordialmente por proposiciones, las que a su vez pretenden *Resolver un Problema* o en su caso *Demostrar un Teorema,* por ello, es pertinente que el estudiante una vez que ha clarificado las características y la estructura general de Los Elementos en este contexto exprese en sus *propios términos* dicha estructura para ello se promoverá este hecho a través de un recurso como los mapas conceptuales y el resumen.

  Puesta en práctica:

  APERTURA

  1. El profesor retomará la actividad extra clase del anexo 5 “Los teoremas en Los Elementos”
  2. El profesor solicitará a los estudiantes que se involucren propiciando una lluvia de ideas en el grupo
  3. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente haciendo uso de un resumen
  4. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá.

  DESARROLLO

  1. El profesor elaborará en el pizarrón, junto con los estudiantes el mapa conceptual correspondiente a las sesiones uno, dos, cuatro y cinco, **destacando y reiterando** que:
     - En las sesiones mencionadas se trató con Problemas y Teoremas, como característica de las proposiciones euclidianas en Los Elementos
     - Que en cada una de ellas se manifiesta el encadenamiento de otras proposiciones, definiciones, postulados y nociones comunes, se muestra entonces un método deductivo que justifica cada proposición
     - El punto anterior permite establecer la existencia de un **Método que permite EXPONER** la solución de problemas y la demostración de teoremas: el **Método Sintético**

- **En este sentido el método sintético NO MUESTRA NI ESTABLECE *EL COMO* SE ENCONTRÓ LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA Ó A LA DEMOSTRACIÓN UN TEOREMA.**

CIERRE

1. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente.
2. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá.

Sesión 6

Duración: 1 hora

Objetivos:

Que el estudiante:

- **Identifique que el método sintético NO MUESTRA NI ESTABLECE EL COMO SE ENCUENTRA LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA Ó A LA DEMOSTRACIÓN UN TEOREMA.**
- Identifique algunas características del MÉTODO ANALÍTICO o MÉTODO DEL ANÁLISIS ANTIGUO

Plan:

Una vez que el estudiante ha clarificado y expresado en sus *propios términos* las características y la estructura general de Los Elementos y el método sintético que subyace en esta obra, es importante que también identifique un método que no solo ***exponga la solución o la demostración*** de una determinada proposición, sino un método que permita establecer, por el contrario, ***el camino heurístico*** que conduce al objetivo deseado, es decir a la solución o la demostración.

Puesta en práctica:

APERTURA

1. El profesor repartirá el material del anexo 6 “El análisis: el camino heurístico en geometría” y solicitará a los estudiantes que trabajen en diadas, permitirá que lean discutan el texto y que planteen conclusiones
2. El profesor solicitará a los diferentes equipos que se involucren y que participen propiciando una lluvia de ideas en el grupo.

DESARROLLO

1. El profesor solicitará a los estudiantes que elaboren el resumen correspondiente al anexo 6 “El análisis: el camino heurístico en geometría”, destacando que:

PARA PROCEDER ANALÍTICAMENTE EN GEOMETRÍA SE TIENE QUE *ASUMIR* o SUPONER QUE EL PROBLEMA O TEOREMA EN CUESTIÓN ESTÁ RESUELTO ES VERDADERO, RESPECTIVAMENTE.

CIERRE

1. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente por medio de una lluvia de ideas
2. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá
3. El profesor indicará al grupo el objetivo de las actividad extra clase del anexo 6 “El análisis: el camino heurístico en geometría”

Sesión 7

Duración: 2 horas

Objetivos:

Que el estudiante:

- Identifique como característica principal del **Método Analítico ó Método del Análisis Antiguo, EL SUPONER QUE EL PROBLEMA O TEOREMA EN CUESTIÓN ESTÁ RESUELTO Ó ES VERDADERO, RESPECTIVAMENTE.**
- Resuelva problemas geométricos, empleando para ello el método del análisis antiguo

Plan:

Que el estudiante identifique y haga uso de la característica principal del método del análisis antiguo, a saber: **ASUMIR O SUPONER QUE EL PROBLEMA EN CUESTIÓN ESTÁ RESUELTO.** Y reconozca con ello al método del análisis antiguo como ***el camino heurístico*** que conduce a la solución de un problema.

Puesta en práctica:

APERTURA

1. El profesor retomará la actividad extra clase del anexo 6 “El análisis: el camino heurístico en geometría”
2. El profesor solicitará a los estudiantes que se involucren propiciando una lluvia de ideas en el grupo

3. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente haciendo uso de un resumen
4. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá.

DESARROLLO

1. El profesor repartirá el material del anexo 7 “El método analítico en la solución de problemas geométricos I” y solicitará a los estudiantes que trabajen en diadas, permitirá que discutan la actividad y planteen conclusiones
2. El profesor indicará al grupo el objetivo de las actividades del anexo 7 “El método analítico en solución de problemas geométricos I”
3. El profesor solicitará a los diferentes equipos que se involucren y que participen ordenadamente en el pizarrón
4. El profesor solicitará a través de una lluvia de ideas, las ideas claves que se fueron desarrollando a lo largo de las actividades, destacando lo siguiente:

- **Asumir o suponer que el problema en cuestión está resuelto.**
- **Verificar si la solución propuesta implica algún postulado de Los Elementos**
- **Identificar qué magnitudes geométricas están involucradas y cuáles son Dadas**

CIERRE

1. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente haciendo uso de un resumen
2. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá
3. El profesor indicará al grupo el objetivo de las actividades del anexo 7 “El método analítico en la solución de problemas geométricos I”: actividad extra clase

Sesión 8

Duración: 2 horas

Objetivos:

Que el estudiante:

- Identifique como característica principal del **Método Analítico ó Método del Análisis Antiguo, EL ASUMIR QUE EL PROBLEMA ESTÁ RESUELTO.**

- Identifique como característica principal del **Método Analítico ó Método del Análisis Antiguo, que magnitudes están Dadas, es decir, con qué datos se cuentan para iniciar la solución del problema geométrico**

- Resuelva problemas geométricos, empleando para ello el método del análisis antiguo

Plan:

Que el estudiante identifique y haga uso de la característica principal del método del análisis antiguo, a saber: **asumir o suponer que el problema en cuestión está resuelto, así como identificar los Datos del problema que permitan plantear su solución.** Y reconozca con ello al método del análisis antiguo como ***el camino heurístico*** que conduce a la solución de un problema.

Puesta en práctica:

APERTURA

1. El profesor retomará la actividad extra clase del anexo 7 “El método analítico en la solución de problemas geométricos I”
2. El profesor solicitará a los estudiantes que se involucren propiciando una lluvia de ideas en el grupo
3. El profesor destacar las diferentes alternativas de solución propuestas por los estudiantes, de manera tal que sean contextualizadas y referidas en la medida de lo posible, a las proposiciones euclidianas de Los Elementos
4. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente haciendo uso de un resumen
5. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá.

DESARROLLO

1. El profesor repartirá el material del anexo 8 “El método analítico en la solución de problemas geométricos II” y solicitará a los estudiantes que trabajen en diadas, permitirá que discutan la actividad y planteen conclusiones
2. El profesor indicará al grupo el objetivo de las actividades del anexo 8 “El método analítico en solución de problemas geométricos II”
3. El profesor solicitará a los diferentes equipos que se involucren y que participen ordenadamente en el pizarrón
4. El profesor solicitará a través de una lluvia de ideas, las ideas claves que se fueron desarrollando a lo largo de las actividades, destacando lo siguiente:

- **Asumir o suponer que el problema en cuestión está resuelto.**

- **Verificar si la solución propuesta implica algún postulado, proposición, definición o noción común de Los Elementos**
- **Identificar qué magnitudes geométricas están involucradas y cuáles son Dadas**

CIERRE

4. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente haciendo uso de un resumen
5. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá

Sesión 9

Duración: 1 hora

Objetivos:

Que el estudiante:

- Identifique como característica principal del **Método Analítico ó Método del Análisis Antiguo: EL ASUMIR QUE UN TEOREMA ES VERDADERO,**
- Identifique la vía para la demostración de teoremas geométricos, empleando para ello el método del análisis antiguo.

Plan:

Que el estudiante identifique y haga uso de la característica principal del método del análisis antiguo, a saber: **ASUMIR O SUPONER QUE EL TEOREMA EN CUESTIÓN ES VERDADERO.** Y reconozca con ello al método del análisis antiguo como ***el camino heurístico*** que conduce a la demostración de un teorema.

Puesta en práctica:

APERTURA

1. El profesor repartirá el material del anexo 9 “El método analítico en la demostración de teoremas” y solicitará a los estudiantes que trabajen en diadas, permitirá que discutan la actividad y planteen conclusiones
2. El profesor indicará al grupo el objetivo de las actividades del anexo 9 “El método analítico en la demostración de teoremas”

DESARROLLO

1. El profesor solicitará a los diferentes equipos que se involucren y que participen ordenadamente en el pizarrón
2. El profesor solicitará a través de una lluvia de ideas, las ideas claves que se fueron desarrollando a lo largo de las actividades, destacando lo siguiente:

- **Asumir o suponer que el teorema es verdadero.**
- **Verificar si la solución propuesta implica algún postulado o proposición de Los Elementos**
- **Identificar qué magnitudes geométricas están involucradas y cuáles son dadas**

CIERRE

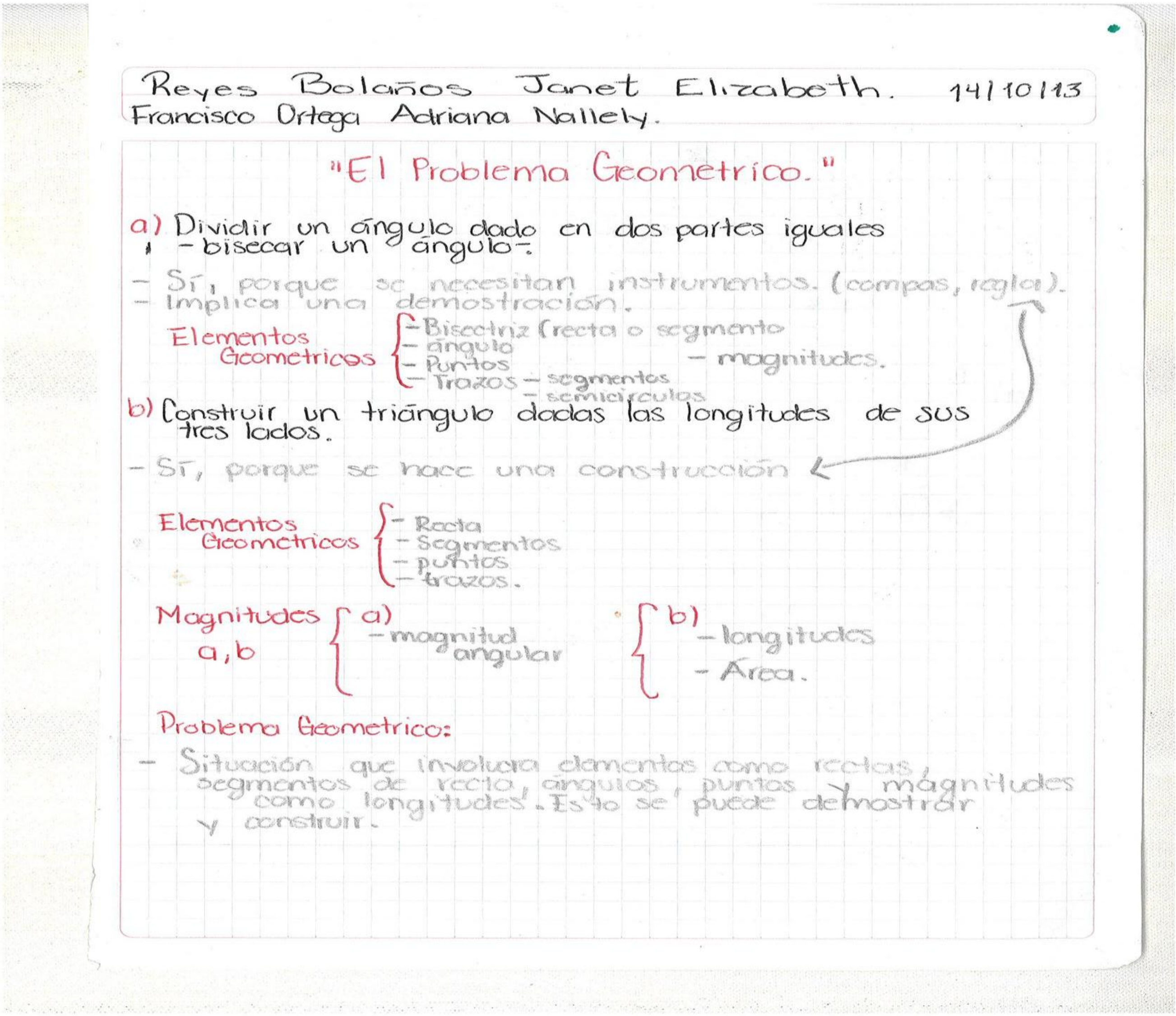
1. El profesor llevará a cabo la recapitulación correspondiente haciendo uso de un resumen
2. En caso de existir dudas el profesor aclarará y concluirá
3. El profesor indicará al grupo el objetivo de las actividades del anexo 9 “El método analítico en la demostración de teoremas”: actividad extra clase

Capítulo 4 Análisis de práctica docente

4.1 Evidencia de actividades

Sesión 1:

- Los estudiantes en su mayoría establecieron que un problema geométrico implica el uso de instrumentos -regla y compás-
- Con ello se determinaron construcciones que dieron solución al problema geométrico planteado
- En algunos equipos, aventuraron la definición de problema geométrico
- De manera generalizada asociaron magnitudes geométricas con cantidades -números-
- En la primera actividad del anexo 2 “Los Elementos: su estructura”, los estudiantes hicieron uso de regla y compás para dar solución al problema
- La descripción verbal que muestra la manera -método- para resolver esta primera actividad solo refleja las construcciones realizadas por el estudiante pero no refleja una *justificación o prueba de validez* que evidencie que el problema ha sido resuelto, en otras palabras el estudiante no considera necesario *Demostrar* una proposición geométrica.



Reyes Bolaños Janet Elizabeth. 14/10/13
Francisco Ortega Adriana Nallely.

"El Problema Geometrico."

a) Dividir un ángulo dado en dos partes iguales
- bisecar un ángulo.

- Sí, porque se necesitan instrumentos. (compas, regla).
- Implica una demostración.

Elementos Geometricos
- Bisectriz (recta o segmento
- ángulo
- Puntos
- Trazos - segmentos
  - semicirculos

- magnitudes.

b) Construir un triángulo dadas las longitudes de sus tres lados.

- Sí, porque se hace una construcción

Elementos Geometricos
- Recta
- Segmentos
- puntos
- trazos.

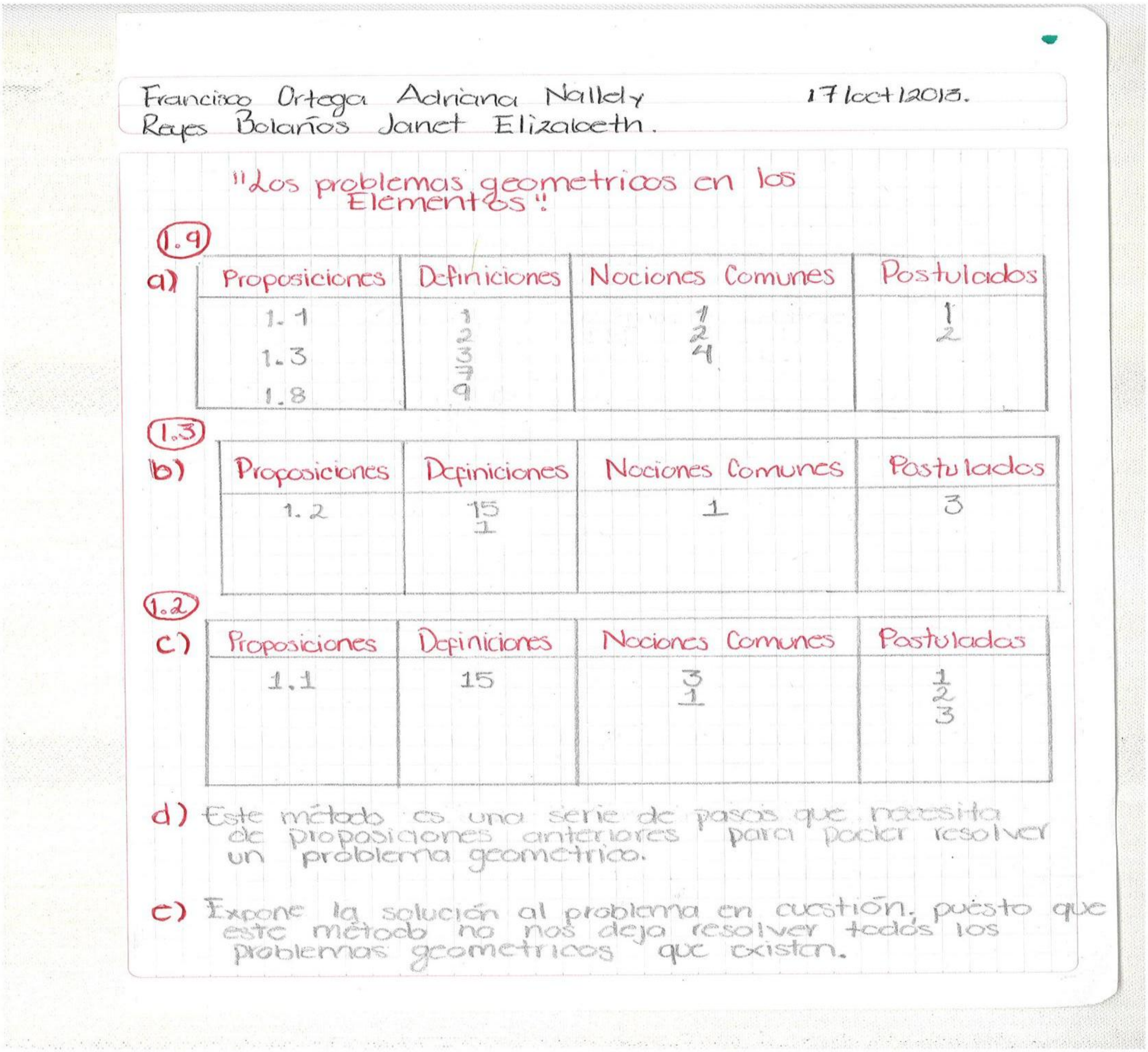
Magnitudes a, b
a) - magnitud angular
b) - longitudes
- Área.

Problema Geometrico:

- Situación que involucra elementos como rectas, segmentos de recta, ángulos, puntos y magnitudes como longitudes. Esto se puede demostrar y construir.

Sesión 2:

- En lo que respecta a la actividad 1 del anexo 3 “Los problemas geométricos en Los Elementos”, los estudiantes lograron identificar que una proposición -en este caso un problema- solo *expone* las construcciones necesarias para dar solución al problema en cuestión
- De igual manera lograron identificar una serie de pasos que *justifican* dichas construcciones en términos de un encadenamiento deductivo, a partir de proposiciones anteriormente justificadas -demostradas- en la obra Los Elementos.



Francisco Ortega Adriana Nallely 17/oct/2018.
Reyes Bolaños Janet Elizabeth.

"Los problemas geometricos en los Elementos"

1.9

a)

Proposiciones	Definiciones	Nociones Comunes	Postulados
1.1 1.3 1.8	1 2 3 7 9	1 2 4	1 2

1.3

b)

Proposiciones	Definiciones	Nociones Comunes	Postulados
1.2	15 1	1	3

1.2

c)

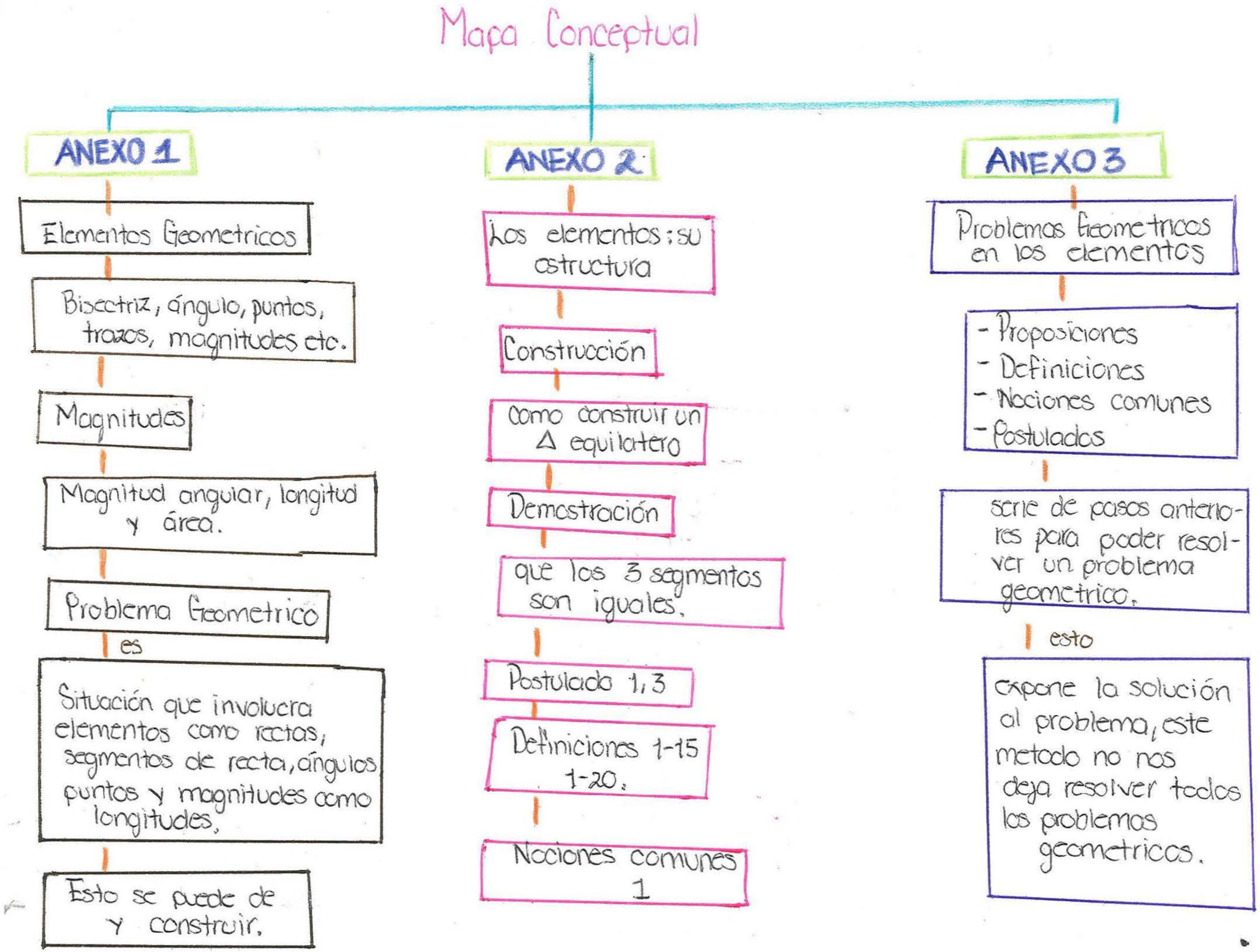
Proposiciones	Definiciones	Nociones Comunes	Postulados
1.1	15	3 1	1 2 3

d) Este método es una serie de pasos que necesita de proposiciones anteriores para poder resolver un problema geometrico.

e) Expone la solución al problema en cuestión, puesto que este método no nos deja resolver todos los problemas geometricos que existen.

Sesión 3:

- En esta sesión los estudiantes identificaron en los mapas conceptuales o mapas de conceptos un medio para visualizar ideas o conceptos y las relaciones jerárquicas entre los mismos.
- En este sentido los mapas conceptuales facilitaron el aprendizaje al rescatar la estructura lógico-deductiva del material estudiado
- Como consecuencia de lo anterior los estudiantes identificaron los aspectos fundamentales que estructuran las proposiciones de Los Elementos, lo que permitió sentar las bases del método sintético expuesto en Los Elementos


Mapa Conceptual
ANEXO 1
Elementos Geometricos
Bisectriz, ángulo, puntos, trazos, magnitudes etc.
Magnitudes
Magnitud angular, longitud y área.
Problema Geometrico
es
Situación que involucra elementos como rectas, segmentos de recta, ángulos puntos y magnitudes como longitudes,
Esto se puede de y construir.
ANEXO 2
Los elementos: su estructura
Construcción
como construir un Δ equilatero
Demostración
que los 3 segmentos son iguales.
Postulado 1, 3
Definiciones 1-15 1-20.
Nociones comunes 1
ANEXO 3
Problemas Geometricos en los elementos
- Proposiciones
- Definiciones
- Nociones comunes
- Postulados
serie de pasos anteriores para poder resolver un problema geometrico.
esto
expone la solución al problema, este metodo no nos deja resolver todos los problemas geometricos.

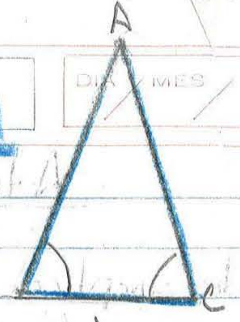
Sesión 4:

- En la actividad 1 del anexo 5 “Los teoremas en Los Elementos” los estudiantes mostraron solvencia al demostrar que en todo triángulo isósceles los ángulos de la base son congruentes y hacer uso de lo estudiado en el curso de geometría.
- Hicieron uso de construcciones auxiliares que les permitieron plantear la demostración
- Hubo cierta confusión al identificar el criterio de congruencia que les permitiera llegar a la demostración
- En lo que respecta a la actividad 3 del anexo 5 “Los teoremas en Los Elementos”, permitió que los estudiantes aclararan y distinguieran entre su propio método y el método sintético de Euclides.
- Los estudiantes determinaron una similitud en ambos métodos, el empleado por ellos y el expuesto en Los Elementos
- De manera análoga los estudiantes plantearon la demostración de la actividad extraclase: si dos segmentos se cortan entre sí, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Podemos considerar que con la utilización de un cuadro sinóptico los estudiantes lograron identificar que las proposiciones euclidianas no muestran ni establecen *la manera en que se llega* a la demostración un teorema, tan solo exponen la demostración.

Lozcano Toriz Edvardo Rafael

Preciado Galindo Elizabeth 326-B

Actividad 1



a) ¿Que es un triangulo isosceles?

Figura geometrica con dos rectas iguales y una distinta.

Verdad $\boxed{AB = ACB}$

b) ¿Que otra caracteristica tienen los triangulos isosceles?

los dos angulos de su base son iguales.

Hipotesis $\boxed{\measuredangle ABC = \measuredangle ACB}$

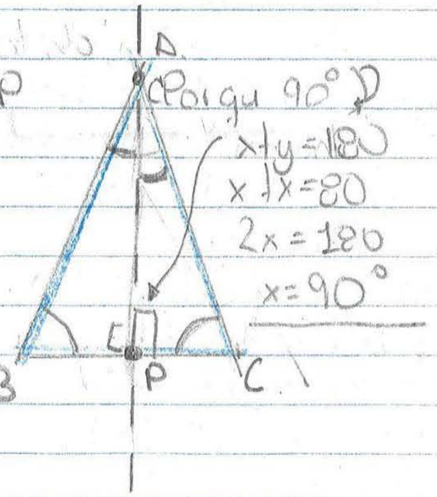
c) ¿Podrías demostrar esta ultima afirmacion?

Sí, se puede.

d) Describe detalladamente que pasos te permiten demostrar esta afirmacion?

(1) Bisecar (dividir) el triangulo BAC por lo tanto $\measuredangle BAP = \measuredangle CAP$

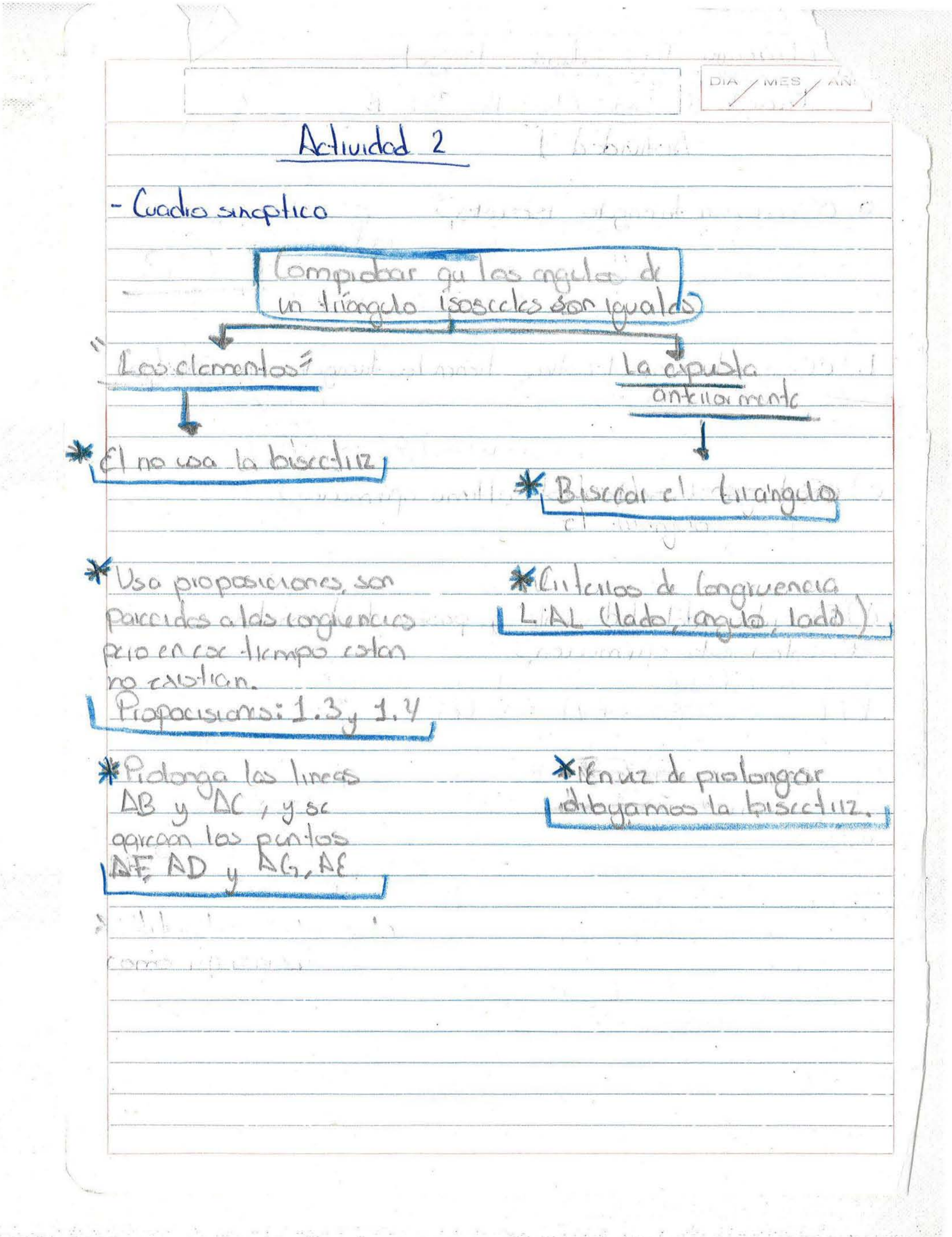
(2) Por lo tanto el triangulo ABP y el triangulo ACP tendrian que ser iguales.



(3) Criterio de congruencia: LAL (lado angulo, lado)

C. Por criterio LAL $\Delta BAP = \Delta CAP$

$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$



Sesión 5:

- Al retomar el anexo 5 “Los teoremas en Los Elementos”, los estudiantes lograron identificar como característica fundamental en las proposiciones de Los Elementos al método sintético, el cual además de exponer la solución de un problema también expone la demostración de teoremas

- Con lo anterior los estudiantes establecieron que el método sintético no muestra ni establece la manera en que se llega a la solución de un problema ó a la demostración un teorema.

DIA / MES / AÑO

Actividad Extraclase.
Proposicion 1-15.

- ¿Podrías demostrar esta ultima afirmacion?
Si.

- Describe detalladamente que pasos te permiten demostrar esta afirmacion.

(1.) Al marcarse la diagonal DC se forman dos angulos adyacentes.

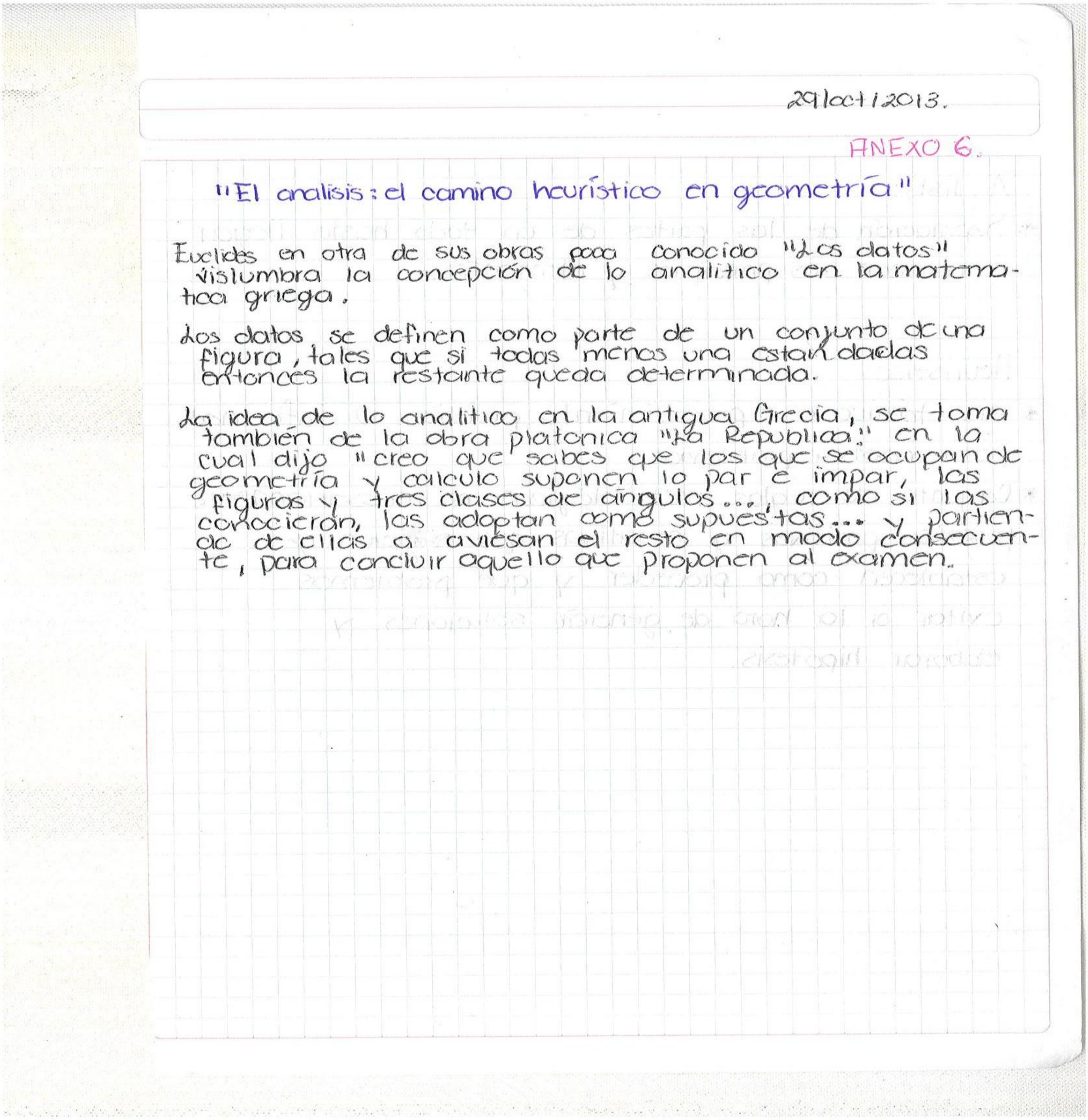
Por lo tanto
∡AΘC = ∡DΘB
∡AΘD = ∡CΘB

(2.) Ya que ambos segmentos se parten entre si, y la suma de los angulos:

∡AΘC + ∡AΘD = 180°   ∡AΘD + ∡DΘB = 180°
∡CΘB + ∡BΘD = 180°   ∡AΘC + ∡CΘB = 180°

Sesión 6:

- Con la lectura del anexo 6 “El análisis: el camino heurístico en geometría” los estudiantes identificaron algunas características del método analítico o método del análisis antiguo y lo asociaron como la contraparte al método sintético.



29/oct/2013.

ANEXO 6.

"El analisis: el camino heurístico en geometría"

Euclides en otra de sus obras poco conocido "Los datos" vislumbra la concepción de lo analítico en la matemática griega.

Los datos se definen como parte de un conjunto de una figura, tales que si todas menos una están dadas entonces la restante queda determinada.

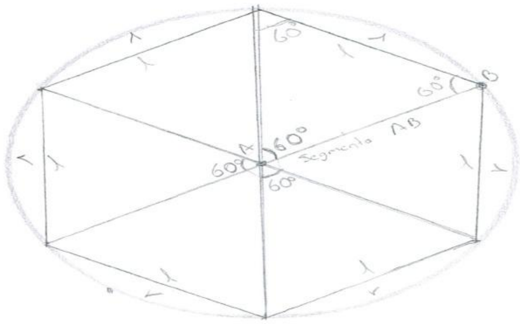
La idea de lo analítico en la antigua Grecia, se toma también de la obra platonica "La Republica" en la cual dijo "creo que sabes que los que se ocupan de geometría y calculo suponen lo par e impar, las figuras y tres clases de ángulos..., como si las conocieran, las adoptan como supuestas... y partiendo de ellas a aviésan el resto en modo consecuente, para concluir aquello que proponen al examen.

Sesión 7:

- Los estudiantes lograron establecer un vínculo entre los elementos identificados en la sesión 6, a saber: Asumir o suponer que el problema en cuestión está resuelto e identificar en la suposición las magnitudes geométricas involucradas y cuáles de ellas están dadas.
- La actividad extraclase del anexo 7 "El método analítico en la solución de problemas geométricos I": inscribir el hexágono regular en una circunferencia dada, resultó de sumo interés para los estudiantes ya que al hacer uso del método del

análisis lograron establecer mas allá de lo estrictamente geométrico -haciendo uso de la cantidad- y combinando lo anterior con sus conocimientos geométricos la solución al problema

Actividad Extraclase.



$a + b + 60° = 180°$

$2a + 60° = 180°$

$a = 60°$

Criterio AAA

Triangulos Equilateros.

Sesión 8:

En esta sesión el estudiante logró establecer dos hechos importantes:

- Al hacer uso del método del análisis en una proposición en particular de los Elementos, este análisis nos conduce a resolver otro problema y al intentar resolver este último tendremos que hacer el análisis de otro más, de esta manera ad infinitum.
- Como consecuencia de lo anterior los estudiantes percibieron que toda proposición euclidiana de Los Elementos está precedida de un análisis el cual no es explicitado por Euclides.

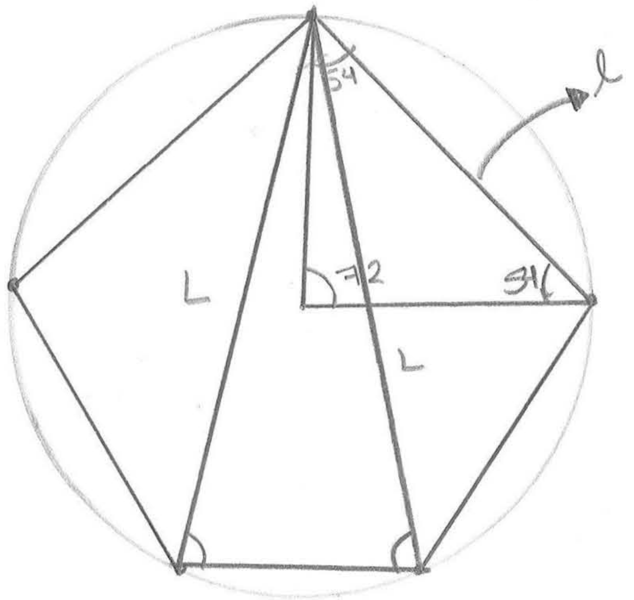
- Una vez los estudiantes realizaron el análisis de la actividad 1 del anexo 8 “El método analítico en solución de problemas geométricos II” se lograron plantear una relación funcional entre la longitud del lado del pentágono a construir y el radio de la circunferencia dada en términos de la ley de senos.

Francisco Ortega Adriana Nallely
Reyes Bolaños Janet Elizabeth.

"El método Analítico en la Solución de problemas geométricos II"

Anexo 8

Actividad 1



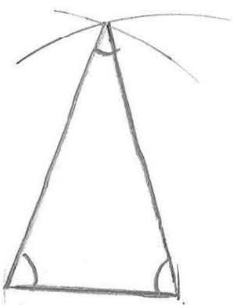
$r=1$

$r=5$

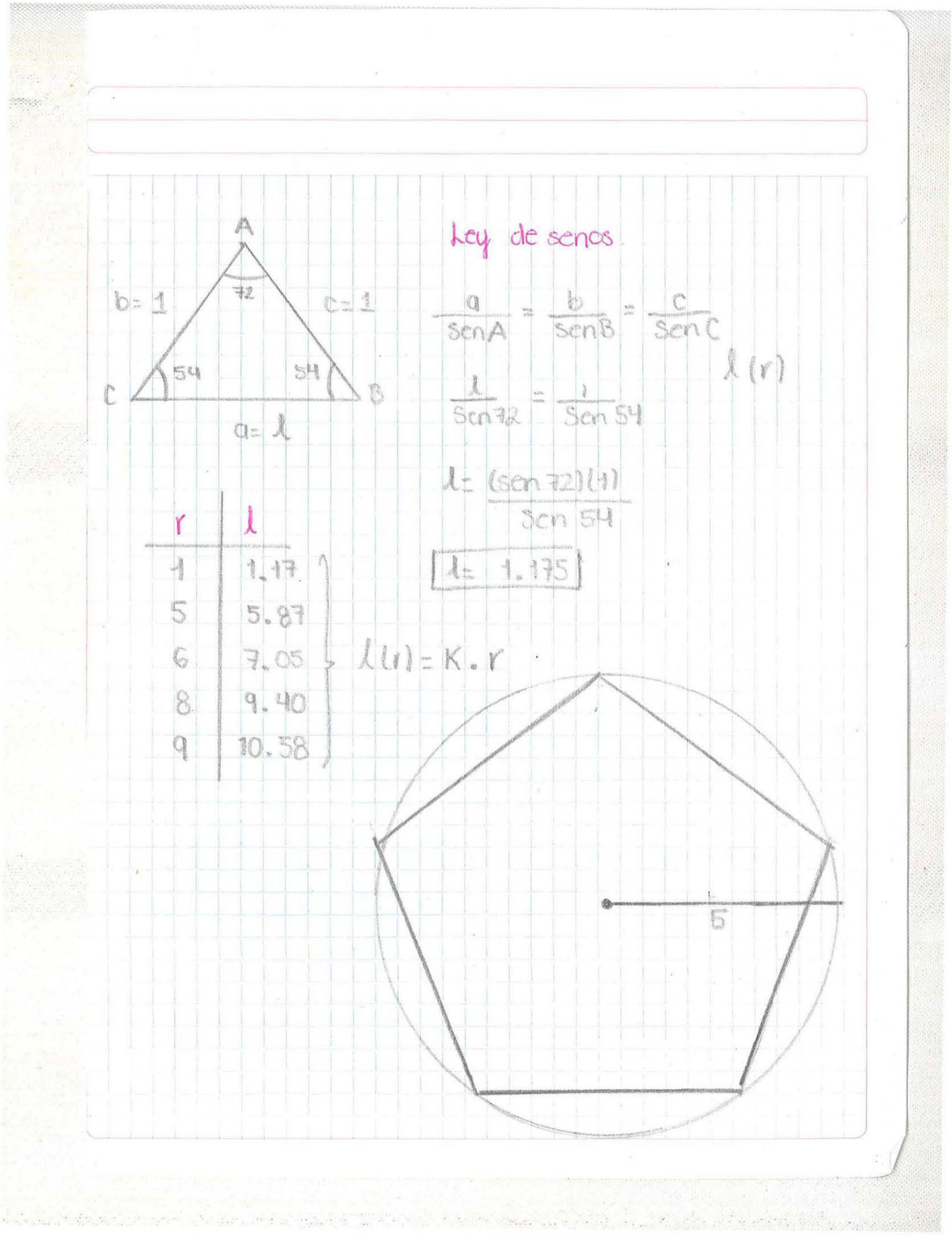
$r=6$

$\ell(r)$

Actividad 2.



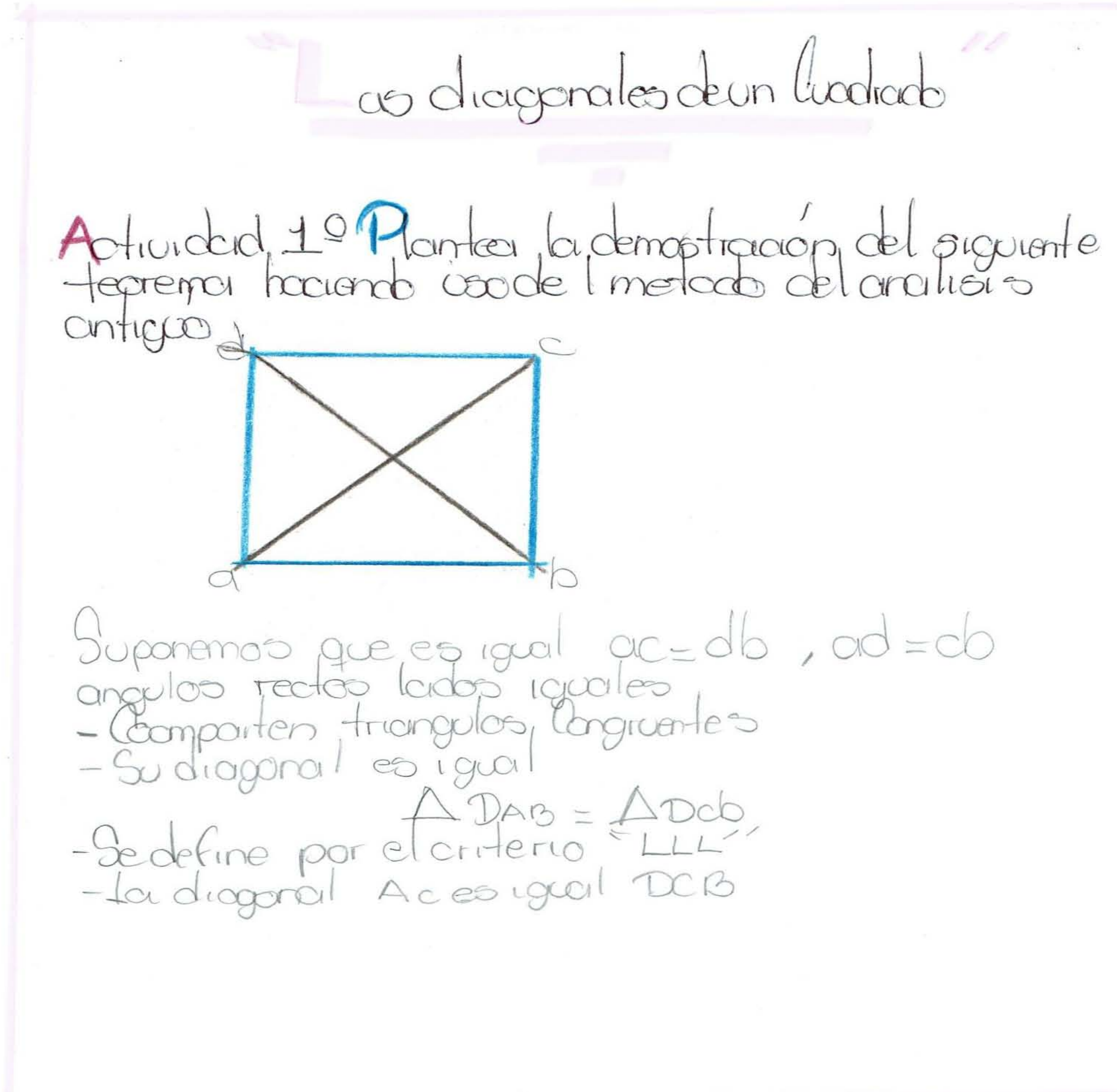
- Proposición 1.3
- " 1.5
- " 1.6
- " 1.7
- " 1.15



Sesión 9:

- Una vez que los estudiantes aplicaron el método del análisis antiguo en la búsqueda de la solución de un problema geométrico, extra polaron la aplicación de este método a la demostración de teoremas, al asumir que el teorema a demostrar es verdadero

- Identificaron que a través del método del análisis antiguo es posible la demostración de teoremas geométricos



4.2 Evaluación de la aplicación de la propuesta

La aplicación de esta propuesta estuvo centrada en que el estudiante lograra identificar y aplicar en la solución de problemas, a través de sus conocimientos previos y habilidades propias, desarrollados ambos en el curso previo de matemáticas en el bachillerato:

geometría euclidiana -Matemáticas II-, aspectos relevantes del método analítico y descubriera con ello que la geometría analítica es una extensión y consecuencia de esa rama del pensamiento matemático antiguo; estas bases y conceptos no le son ajenos del todo al estudiante, de manera tal que el tránsito entre geometría euclidiana y geometría analítica tuviera como intermediario al método analítico o método del análisis, esto último en términos del programa del programa de estudios de Matemáticas I-IV de La Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, en particular para la asignatura Matemáticas Álgebra Y Geometría III. Cuyo objetivo general en cuanto a la geometría analítica es:

"hacer énfasis en el método analítico que permite representar y analizar a través del álgebra, a las curvas y los objetos geométricos, que desde el punto de vista euclidiano sólo admiten formas particulares de construcción, estudio y análisis de sus elementos"[71]

Debemos destacar que el uso del álgebra y en consecuencia del vinculo entre magnitudes geométricas y números, el estudiante lo percibió a través de las actividades propuestas en esta planeación didáctica de manera muy espontanea y como consecuencia de un contexto más coherente e integrador de sus propios conocimientos previos en geometría, es decir a través de identificar y aplicar un método heurístico que le permitió hacer pleno uso de esos conceptos y habilidades en el terreno del álgebra, trigonometría, incluso el pensamiento variacional.

En este sentido el estudiante logro identificar que en la geometría euclidiana, se dan dos etapas: la síntesis y el análisis, siendo este último método el que permite indagar y ulteriormente llegar a la solución de un problema o a la demostración de un teorema. En consecuencia estas actividades permitieron que el estudiante revalorara diversos conceptos y métodos matemáticos adquiridos previamente y con ello integrarlos de manera significativa a la geometría y con ello tener una idea de la Matemática como una ciencia -asignatura- unificada e interdependiente en sus distintas ramas y no *Fragmentos* inconexos.

---

[71]Colegio de Ciencias y Humanidades, *Programa de matemáticas semestres I a IV*, Comisión de revisión y ajuste de programas. Área de Matemáticas, 2005, P.p. 51

Conclusiones y alcances del proyecto

Como resulta evidente, este proyecto plantea que para la enseñanza de las matemáticas a nivel medio superior, no es necesario maquillar la matemática a través del diseño de una matemática-ficción, sin embargo, esto solo se puede dar en un contexto histórico-epistemológico suficientemente sólido, el cual involucra los tres componentes del sistema didáctico. En el caso del docente se han mostrado algunos de los muchos elementos que justifican con suficiencia la relevancia del hecho histórico como fundamento de la formación docente en el capítulo dos del presente documento; para la vertiente del estudiante podemos mencionar que lo atractivo que puede resultar abordar un problema geométrico o matemático en general, depende desde nuestro punto de vista de lo siguiente:

- Que el estudiante reconozca de manera indiscutible que en matemáticas y particularmente en geometría, *Justificar* una demostración o la solución de un problema constituyen un hecho fundamental en la actividad matemática.
- Que estas justificaciones, se generan en términos de un encadenamiento de razonamientos lógicos que conducen en última instancia a considerar la demostración de un teorema o la solución de un problema como verdades irrefutables.

De acuerdo a lo anterior consideramos que en los dos primeros semestres del bachillerato universitario es conveniente que el estudiante sea problematizado por parte del docente a través situaciones que involucren actividades que impliquen la *experimentación matemática*, de tal suerte que de manera natural y espontanea el estudiante sea conducido de hechos particulares y experimentales a situaciones de carácter general y que se justifiquen en términos de razonamientos lógicos; en este sentido para el caso particular de la geometría, un hecho fundamental consiste en que el estudiante de bachillerato logre responderse algunas preguntas que tocan la cuestión anterior: ¿Para qué hace falta demostrar?, ¿Qué es una demostración?, entre otras preguntas de similar interés para los fines que se pretenden en este proyecto; lo anterior puede ser desarrollado a través de distintas actividades diseñadas por el docente. Este tipo de secuencias didácticas son muy viables en el caso de la geometría, rama de las matemáticas que incluso es el pretexto para caracterizar los fundamentos de la actividad matemática en general; debemos reconocer que sin este antecedente y su constante énfasis, se estará sembrando en terreno poco fértil y el estudiante se encontrará nuevamente extraviado en el sinsentido de la clase de matemáticas.

En lo que respecta a una investigación histórica como la realizada en este documento, consideramos que esta última constituye una veta que merece ser explotada por los docentes del bachillerato universitario, por un lado en su formación y profesionalización docente y también como piedra de toque para el diseño de estrategias didácticas que enriquezcan y contribuyan a cumplir con los objetivos de los modelos educativos vigentes en los dos bachilleratos universitarios. En el caso de nuestra investigación y su relación con el diseño y aplicación de la propuesta didáctica correspondiente, solo se hizo énfasis en la primera parte de ella, es decir, una descripción general del Método del Análisis o Método Analítico antiguo en un contexto familiar para el estudiante -la geometría euclidiana-, sin embargo, se priorizo en todo momento una de las premisas del modelo educativo de la Escuela Nacional Colegio del Ciencias y Humanidades: Aprender a hacer, en otras palabras, a partir de los conocimientos previos del estudiante se abordaron los aprendizajes correspondientes, alentando en todo momento el uso y aplicación de los diversos conceptos y métodos ya consolidados por el propio estudiante.

Finalmente consideramos que la lectura y la respectiva revaloración y discusión por parte de los docentes de textos clásicos que contienen la génesis de conceptos y métodos vertidos ambos en los programas de estudio del bachillerato universitario, resulta de capital importancia, ya que de esta manera los docentes de este nivel educativo, nos encontraremos en posibilidades de contribuir y proporcionar elementos más genuinos de la matemática, que permitirán el mejor desarrollo de nuestros estudiantes en esta ciencia, la que como expresión humana ha contribuido en buena medida a consolidar los afanes civilizatorios de nuestra especie.

Bibliografía

1. Acerbi, F., *The language of the "Givens": its forms and its use as a deductive tool in Greek mathematics,* Archive for history of exact sciences, Vol. 65, Nº 2, Springer, 2011
2. Álvarez, C; Martínez, R.; *Descartes y la ciencia del siglo XVII* , Siglo XXI, UNAM México 2000
3. Apollonius, Heath, T.L., *Treatise on Conic Sections*, Cambridge, 1896
4. Beaney, Michael, *Analysis,* the Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2011
5. Behboud, A., *Greek Geometrical Analysis*, Centaurus 37, 1994
6. Blackburn, S., *The Oxford Dictionary of Philosophy*, Oxford University Press, 1996
7. Bos, Henk J. M*. Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York, Berlín, Springer-Verlag, 2001
8. Boyé, A., *¿François Viète inventor del álgebra?,* Los orígenes de la ciencia moderna, Consejería de Educación del Gobierno de Canarias, 2004
9. Chevallard, Y., *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Aique, Buenos Aires, 1991
10. Colegio de Ciencias y Humanidades, *Programa de matemáticas semestres I a IV*, Comisión de revisión y ajuste de programas. Área de Matemáticas, 2005
11. Coll, Cesar, *Psicología genética y aprendizajes escolares,* Siglo XXI, México, 1983
12. Collette, J. P., *Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI, México, 2003
13. Courant, R., Robbins, H., *¿Qué es la matemática?* FCE, México, 2010
14. D'Amore, B*., El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria*, Épsilon, España 2004
15. De Guzmán, M., *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática,* Revista Iberoamericana de Educación, Núm. 4, 2007
16. Descartes, René and David Eugene Smith (traductor) and Marcia L. Latham (traductor), *The Geometry of Rene Descartes*, Dover, New York, 1954
17. Descartes, René; *La Geometría*, Traducida por Pedro Rossell Soler Espasa-Calpe. Argentina, 1947
18. *Diccionario Médico-Biológico, Histórico Y Etimológico*, Universidad de Salamanca, Ediciones Universidad de Salamanca, en http://dicciomed.eusal.es/
19. Durkheim, Emile. *Educación y sociología.* Ediciones Coyoacán, México, 2009
20. Euclid, *Data,* by Richard Jack teacher of mathematics*,* A. Millar, London, 1756

21. Euclides, *Elementos, Libros I-IV,* Introducción de Luis Vega. Traducción de María Luisa Puertas Castaños. Gredos, Madrid, 1991
22. Eves, Howard; *Estudio de las geometrías,* tomo I, UTHEA, México, 1963
23. Fauvel, J.; Maanen, J., *History in Mathematics Education The ICMI Study,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000
24. García, Rolando; Piaget, Jean; *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*, Siglo XXI, México, 2008
25. Gómez, Chacón I. *Matemática Emocional. Los Afectos en el Aprendizaje matemático*, Narcea, Madrid, 2000
26. González, Pedro; Los o*rígenes de la geometría analítica,* Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, Tenerife 2003
27. Hartshorne, R., *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics, 2000
28. Heath, T.; *A History of Greek Mathematics*, Vol. I, Dover, New York, 1981
29. Heath, T.; *A History of Greek Mathematics*, Vol. II, Dover, New York, 1981
30. Hintikka, R.; Remes, U.; *The Method Of Analisys: Its Geometrical Origin and Its General Significance*, Dordrecht- Holland 1974
31. Jiménez, D., *El problema del área en Los Elementos de Euclides*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XVII, No. 2, Venezuela, 2010
32. Jones, A., *Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection*, Springer-Verlag, New York, 1986
33. Kline, Morris, *El fracaso de la matemática moderna*, Siglo XXI, México, 2007
34. Lehmann, Charles H.; *Geometría Analítica*, UTEHA , México, 2001
35. Oteyza De Oteyza, Elena; *Geometría Analítica y Trigonometría*, Pearson, México, 2007
36. Parra, Blanca, *Dos Concepciones De Resolución De Problemas De Matemáticas*, Educación Matemática, vol. 2, núm. 3, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990
37. Platón; *La República. Libro VI,* Gredos, Madrid, 2000
38. Proyecto de Creación *Programa de Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS*), UNAM. Septiembre 2003
39. Quesada, Castillo, R., *Cómo planear la enseñanza estratégica*, Limusa, México, 2008
40. Real Academia Española, *Diccionario de la lengua española*, 23ª edición, en http://www.rae.es, apartado "diccionario"

41. Skemp, R., *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* Morata, Madrid, 1999
42. Sykes, J.B., *The Concise Oxford Dictionary*, 6ª ed., Oxford: Oxford University Press, 1976
43. Tarski, A. *What is Elementary Geometr*y?, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, *27*, 16-29. 1959
44. Wentworth, J. y Smith, D. J., *Geometría Plana y del Espacio*. Ginn y cía., EUA, 1915

“El Problema Geométrico”

Joel Chávez Berna
Anexo 1

Conocimientos previos

Objetivo: Que identifiques y señales características de un problema geométrico y los elementos que lo conforman

Lee con atención cada actividad y discute con tu compañero de equipo tus respuestas

ACTIVIDAD 1

Indica si los siguientes enunciados corresponden con tú concepción de problema geométrico y proporciona algunos argumentos que justifiquen tu respuesta

a) Dividir una ángulo dado en dos partes iguales -bisecar un ángulo-
b) Construir un triángulo dadas las longitudes de sus tres lados

Identifica y menciona para cada uno de los incisos anteriores que:

- Elementos geométricos están involucrados
- Magnitudes geométricas están involucradas

ACTIVIDAD 2

Elabora un dibujo que represente los problemas planteados en los incisos a) y b) de la actividad 1

“Los Elementos: su estructura”

Joel Chávez Berna

Anexo 2

Objetivo: Que resuelvas un problema geométrico y ubiques su solución en el contexto de la obra: Los Elementos

Lee con atención cada actividad, plantea lo que se te solicita y discute con tu compañero de equipo tus respuestas

ACTIVIDAD 1

Define con tus propias palabras:

a) ¿Qué es un triángulo equilátero?____

Construye un segmento de recta que tenga por extremos los puntos A y B y resuelve lo siguiente:

b) Construye un triángulo equilátero que tenga por lado la longitud del segmento AB

c) Describe detalladamente que pasos te permitieron dar solución a este problema

ACTIVIDAD 2

A continuación se muestra la solución propuesta en Los Elementos de Euclides, léela con atención y contesta lo siguiente:

PROPOSICIÓN I.1: Construir un triángulo equilátero sobre un segmento de recta dado.

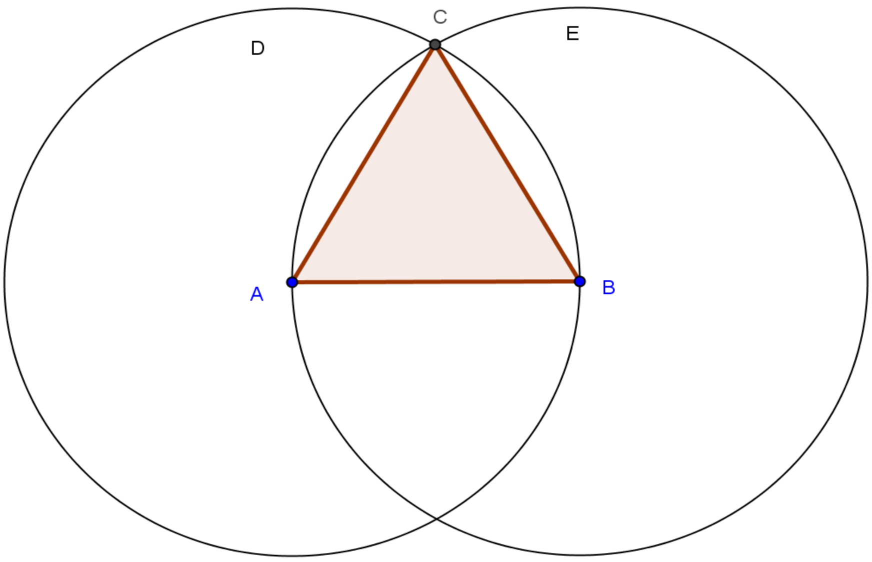
Hipótesis: Sea **AB** el segmento dado.

- Por el Postulado 3, con centro en **A** y radio **AB** describimos el círculo **BCD**.
- Nuevamente por el Postulado 3, con centro en **B** y radio **BA** describimos el círculo **ACE**.

- Y desde el punto **C**, en que los círculos se cortan, por el Postulado 1, trazamos el segmento **AC**.
- Por el Postulado 1, trazamos el segmento **CB**.
- Afirmamos que el triángulo **ABC**, de lados **AB**, **AC** y **CB** es un triángulo equilátero.

Demostración:

1. Puesto que **A** es el centro del triángulo **BCD** entonces, por la Definición I.15, los segmentos **AC** y **AB** son iguales, es decir, **AC = AB**.
2. Y como **B** es el centro del **ACE** entonces, por la Definición I.15, los segmentos **CB** y **AB** son iguales, es decir, **CB = AB**.
3. Por lo tanto, **AC = AB** y **CB = AB**.
4. Y por la Noción común 1, como cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, entonces **CA = CB**.
5. Por lo tanto, los tres lados **CA**, **AB**, y **CB** del triángulo son iguales entre sí, es decir, **CA = CB = AB**.
6. Por la Definición I.20, esto significa que el triángulo **ABC** es un **triángulo equilátero**.
7. Por lo tanto, *el triángulo **ABC** es equilátero, y ha sido construido sobre el segmento **AB***.



- ¿Qué semejanzas encuentras en relación con la solución que tú propusiste?
- ¿Qué diferencias encuentras en relación con la solución que tú propusiste?

ACTIVIDAD 3

Con ayuda del profesor elabora un cuadro sinóptico que contenga las características de la solución dada en Los Elementos y compara tu solución con la de Euclides.

ACTIVIDAD EXTRACLASE

Investigar en Los Elementos los:

- Postulados
- Definiciones
- Nociones comunes

Elabora un listado en cada caso.

Puedes consultar la siguiente liga electrónica para esta actividad:

http://132.248.17.238/geometria/t_1_000/t_1_000_m.html

“Los problemas geométricos en Los Elementos”

Joel Chávez Berna

Anexo 3

Objetivo: Que identifiques los aspectos fundamentales que estructuran las proposiciones de Los Elementos y con ello, identifiques también las características del método sintético expuesto en Los Elementos

Lee con atención cada actividad, plantea lo que se te solicita y discute con tu compañero de equipo tus respuestas

ACTIVIDAD 1

Revisa la proposición I-9 de Los Elementos destacando los siguientes aspectos:

a) Enlista cuales proposiciones, definiciones, nociones comunes y postulados se requieren para Bisecar un ángulo
b) Toma una de las proposiciones enlistadas y repite nuevamente el inciso a)
c) Toma una de las proposiciones enlistadas en el inciso b) y repite nuevamente el inciso a)
d) ¿Cómo describirías este **MÉTODO**?
e) ¿Consideras que Euclides en Los Elementos en su **MÉTODO**, **NOS MUESTRA LA *MANERA DE PROCEDER* PARA RESOLVER CUALQUIER PROBLEMA GEOMÉTRICO**? ¿O solo nos **EXPONE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS**? Justifica tu respuesta

Proposición I-9 Dividir en dos ángulos iguales un ángulo rectilíneo dado.

Hipótesis: Sea $\angle BAC$ el ángulo dado.

- Tomemos un punto arbitrario **D** sobre **BA** y formamos el segmento **AD**.
- Por la Proposición I.3, podemos construir el segmento de recta **AE** sobre **AC** tal que **AE = AD**.
- Construimos el segmento **DE**.
- Por la Proposición I.1, podemos construir el triángulo equilátero ΔDEF sobre **DE**. Por lo tanto, **DE = EF = DE**.
- Construimos el segmento **AF**.

Afirmamos que el ángulo $\angle BAC$ es bisecado por el segmento **AF**.

Demostración:

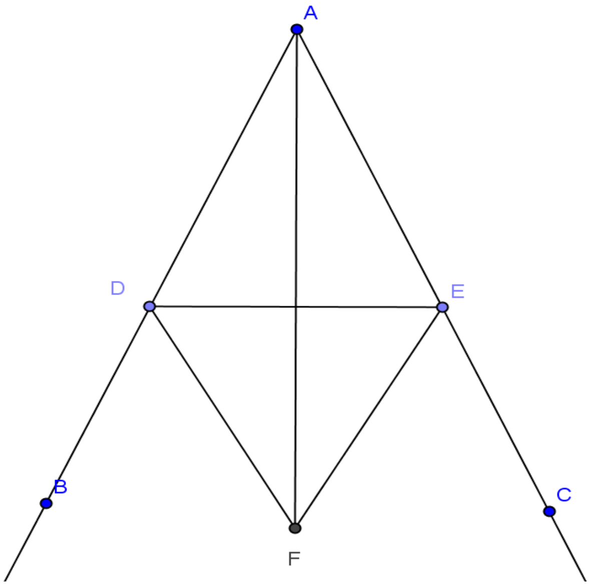
1. En los triángulos ΔDAF y ΔFAE, tenemos que **AD = AE**, y **AF** es un lado común, y la base **DF** es igual a la base **EF.**
2. Por lo tanto, los dos triángulos ΔDAF y ΔFAE son tales que
   - **AD = AE**,
   - **AF** es lado común
   - **DF = EF**.

Aplicando la Proposición I.8, concluimos que los triángulos **DAF** y **FAE** son iguales $\Delta DAF = \Delta FAE$

Por lo tanto, los ángulos $\angle DAF$ y $\angle FAE$ son iguales, esto es $\angle DAF = \angle FAE$.

3. En consecuencia **AF** es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y $\angle DAF$ y por tanto $\angle \mathrm{BAC} = \angle DAF + \angle FAE$

Por lo anterior, el ángulo $\angle \mathrm{BAC}$ es bisecado por el segmento **AF**.



"MAPAS CONCEPTUALES"

Anexo 4

Joel Chávez Berna

Los mapas conceptuales o mapas de conceptos son un medio para visualizar ideas o conceptos y las relaciones jerárquicas entre los mismos.

Con la elaboración de estos mapas se aprovecha la gran capacidad humana para reconocer pautas en las imágenes visuales, con lo que se facilitan el aprendizaje y el recuerdo de lo aprendido.

Desde luego que no se trata de memorizar los mapas y reproducirlos con todos sus detalles, sino de usarlos para organizar el contenido del material de estudio y que su aprendizaje sea exitoso.

Otra utilidad es que pueden servir para relatar oralmente o para redactar textos en los que se maneje lógica y ordenadamente cierta información; de ahí que sean considerables como organizadores de contenido de gran valor para diversas actividades académicas y de la vida práctica.

I. TÉCNICA DE CONSTRUCCIÓN DE LOS MAPAS CONCEPTUALES

Es muy sencilla pero compleja a la vez, porque requiere realizar varias operaciones mentales. Se puede utilizar didácticamente para desarrollar ideas y mostrar las relaciones que hay entre ellas.

La técnica, simplificada para usarla con propósitos didácticos, consta de los siguientes pasos.

1. Leer cuidadosamente el texto y entenderlo claramente. En caso de haber palabras que los alumnos no comprendan o no conozcan, habrá que consultarlas en el diccionario y comprobar cómo funcionan en el contexto en que se encuentran.
2. Localizar y subrayar las ideas o palabras más importantes —palabras clave— con las que se construirá el mapa; por lo general, son nombres o sustantivos.
3. Determinar la jerarquización de dichas ideas o palabras clave.
4. Establecer las relaciones entre ellas
5. Utilizar correctamente la simbología:

a) Ideas o conceptos: cada una se presenta escribiéndola encerrada en un óvalo o en un rectángulo; es preferible utilizar óvalos.

b) Conectores: la conexión o relación entre dos ideas se representa por medio de una línea inclinada, vertical u horizontal llamada conector o línea ramal que une ambas ideas.

c) Flechas: se pueden utilizar en los conectores para mostrar que la relación de significado entre las ideas o conceptos unidos se expresa primordialmente en un solo sentido; también se usan para acentuar la direccionalidad de las relaciones, cuando se considera indispensable.

d) Descriptores: son la palabra o palabras (1, 2 ó 3) que describen la conexión; se escriben cerca de los conectores o sobre ellos. Estos descriptores sirven para "etiquetar" las relaciones. Tiene gran importancia elegir la palabra correcta; o sea, la que mejor caracterice la relación de que se trate, de acuerdo con el matiz de significado que debe darse con precisión.

Procedimiento general para construir un mapa conceptual

Primero: Lea un texto e identifique en él las palabras que expresen las ideas principales o las palabras clave.

No se trata de incluir mucha información en el mapa, sino que ésta sea la más relevante o importante que contenga el texto.

Segundo: Cuando haya terminado, subraye las palabras que identificó; asegúrese que, en realidad, se trata de lo más importante y de que nada falte ni sobre.

Recuerde que, por lo general, estas palabras son nombres o sustantivos comunes, términos científicos o técnicos. **Tercero:** Identifique el tema o asunto general y escríbalo en la parte superior del mapa conceptual, encerrado en un óvalo o rectángulo.

Cuarto: Identifique las ideas que constituyen los subtemas ¿qué dice el texto del tema o asunto principal? Escríbalos en el segundo nivel, también encerados en óvalos.

Quinto: Trace las conexiones correspondientes entre el tema principal y los subtemas.

Sexto: Seleccione y escriba el descriptor de cada una de las conexiones que acaba de trazar.

Séptimo: En el tercer nivel coloque los aspectos específicos de cada idea o subtema, encerrados en óvalos.

Octavo: Trace las conexiones entre los subtemas y sus aspectos.

Noveno: Escriba los descriptores correspondientes a este tercer nivel.

Décimo: Considere si se requieren flechas y, en caso afirmativo, trace las cabezas de flecha en los conectores correspondientes.

Recomendaciones

- Es conveniente revisar su mapa varias veces para comprobar si las conexiones son verdaderamente importantes. Al revisarlo es necesario que tome en cuenta lo siguiente:
- Hay ocasiones en que es indispensable o conveniente ubicar juntos dos subtemas o aspectos específicos que lo requieran para no tener que "encimar" o superponer las líneas de conexión que deban figurar cruzadas en el mapa.
- Las ideas pueden estar correctamente representadas en mapas de varias maneras diferentes. De hecho, es poco usual que dos personas construyan mapas idénticos y partir de un mismo texto; por eso no puede haber un modelo único de mapa conceptual aplicable a cualquier texto.
- No obstante que su mapa no sea igual que los de sus compañeros, aunque todos hayan manejado la misma información, estará correcto si comprende las ideas o conceptos más importantes que aparecen en el texto, adecuadamente jerarquizados y con las relaciones entre ello bien caracterizadas.
- El mapa conceptual también puede estar correctamente construido si tiene significado para quien lo realiza y le ayuda a entender el material analizado.
- Un mapa conceptual será suficiente claro si cualquiera de sus términos —ideas o descriptores— fuera eliminado y pudiera ser repuesto siguiendo la lógica del mismo.
- En todo caso, es necesario construir varias veces el mapa de un mismo texto para suprimir los defectos que hubiesen aparecido en la primera versión; por lo general, en la segunda versión aparecen las relaciones en forma más clara y explícita

“Los teoremas en Los Elementos”

Joel Chávez Berna

Anexo 5

Objetivo: Que justifiques la validez de un teorema geométrico y ubiques su solución en el contexto de la obra: Los Elementos

Lee con atención cada actividad, plantea lo que se te solicita y discute con tu compañero de equipo tus respuestas

ACTIVIDAD 1

Define con tus propias palabras:

d) ¿Qué es un triángulo isósceles?_______________________________________

e) ¿Qué otra característica tienen los triángulos isósceles?______________________

f) ¿Podrías demostrar esta última afirmación?_______________________________

g) Describe detalladamente que pasos que te permiten demostrar esta afirmación

ACTIVIDAD 2

A continuación se muestra la solución propuesta en Los Elementos de Euclides, léela con atención:

PROPOSICIÓN I.5 En todo triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales, y si los lados iguales se prolongan, los ángulos por debajo de la base serán también iguales.

Hipótesis: **ABC** es un triángulo isósceles,
donde **AB = BC**.

Demostración.

1. Por el Postulado 2, sean **BD** y **CE** las prolongaciones de los lados **AB** y **AC**, respectivamente.
2. Sea **F** un punto arbitrario sobre **BD**.
3. Por la Proposición I.3, podemos trazar sobre **AE** un segmento **AG** tal que **AG = AF**.

4. Construimos, por el Postulado 1, el segmento **FC**. Formamos el triángulo $\Delta(AFC)$.
5. Construimos, por el Postulado 1, el segmento **GB**. Formamos el triángulo $\Delta(AGB)$
6. Según la Proposición I.4, como **AF = AG y AB = AC** y el ángulo $\angle FAG$ es común a ambos triángulos, entonces las bases son iguales, **FC = GB**, en consecuencia los triángulos son iguales: $\Delta(AFC) = \Delta(AGB)$ y los ángulos restantes de un triángulo son iguales a los ángulos restantes del otro.
7. En particular, los ángulos opuestos a los lados iguales, son iguales. Por lo tanto, $\angle ABG = \angle ACF$ $\angle BFC = \angle CGB$ y $\angle AFC = \angle AGB$
8. Por otro lado, tenemos formados otros dos triángulos, $\Delta(BFC)$ y $\Delta(CGB)$, que tienen como base común el lado **BC**.

   Además, **AF = AB + BF** y **AG = AC + CG**,

   pero **AF = AG**, y por hipótesis **AB = AC**.

   Por lo tanto **BF = CG**.

   Pero, también sabemos que **FC = BG**

   Por lo tanto, **BF = CG** y **FC = BG** y $\angle BFC = \angle CGB$ y la base **BC** es común a ambos triángulos.
9. Por lo tanto, nuevamente la Proposición I.4, los triángulos $\Delta(BFC)$ y $\Delta(CGB)$ son iguales, los ángulos restantes de un triángulo son iguales a los ángulos restantes del otro, a saber aquellos opuestos a los lados iguales.

   Por lo tanto, $\angle FBC = \angle BCG$ y también $\angle CBG = \angle BCF$
10. Por el punto 7 sabemos que $\angle ABG = \angle ACF$

    Pero, $\angle ABG = \angle ABC + \angle CBG$ y $\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF$

    Por lo tanto: $\angle ABC + \angle CBG = \angle ACB + \angle BCF$

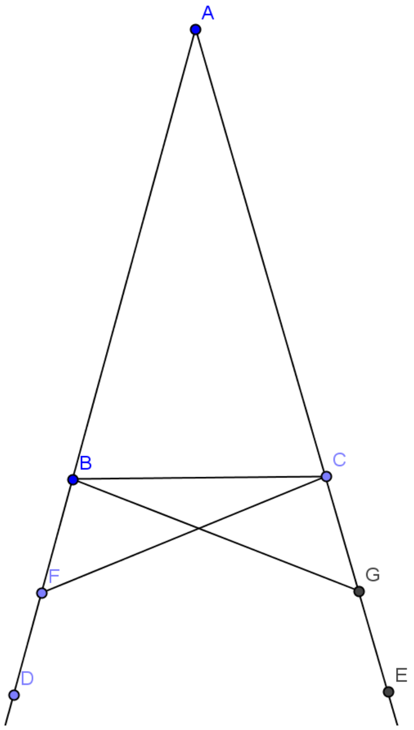
    Y también por el punto 7 sabemos que $\angle BFC = \angle CGB$.

    Por lo tanto: $\angle ABC = \angle ACB$ que son los ángulos que están en la base del triángulo **ABC.**

    También por el punto 9, sabemos que $\angle FBC = \angle BCG$**,** que son los ángulos que están por debajo de la base del triángulo ΔABC.

    Esto es: $\angle DBC = \angle BCE$

    Por lo tanto, en todo triángulo isósceles los ángulos en la base son iguales entre sí, y si los lados iguales se prolongan, los ángulos por debajo de la base serán también, iguales entre sí.



ACTIVIDAD 3

Con ayuda del profesor elabora un cuadro sinóptico que contenga las características de la solución dada en Los Elementos y compara tu solución -la que expusiste en la actividad 1- con la de Euclides.

ACTIVIDAD EXTRACLASE

Investigar en Los Elementos la proposición I-15: **Si dos segmentos se cortan entre sí, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.**

- ¿Podrías demostrar esta última afirmación?________________________________
- Describe detalladamente que pasos que te permiten demostrar esta afirmación
- Elabora un cuadro sinóptico que contenga las características de la solución dada en Los Elementos y compara tu solución con la de Euclides.

Puedes consultar la siguiente liga electrónica para esta actividad:
http://132.248.17.238/geometria/t_1_000/t_1_000_m.html

“El análisis: el camino heurístico en geometría”

Joel Chávez Berna

Anexo 6

Objetivo: Que identifiques algunas características del Método Analítico o Método del Análisis Antiguo

Lee con atención el siguiente texto y discútelo con tu compañero de equipo tus respuestas

“Es precisamente el propio Euclides en otra de sus obras, poco conocida: Los Datos, donde se vislumbra la concepción de lo *analítico* en la matemática griega: “los datos pueden definirse como un conjunto de partes de una figura, tales que si todas menos una están dadas, entonces la restante queda determinada”, por ejemplo, si es conocida la magnitud A y también la razón , entonces está determinada B, este hecho nos da luz en lo que concierne al *análisis* previo que el geómetra ejecutaba para llegar a una construcción o demostración.
Otro de los antecedentes que nos permitan identificar la idea de lo *analítico* en la antigua Grecia, se encuentra en el siguiente pasaje tomado de la obra platónica La República, en el cual se muestra de manera patente la presencia de un método -el analítico-, en el quehacer de los matemáticos y geómetras helenos que precedieron a Euclides y sus Elementos: **“creo que sabes que los que se ocupan de geometría y de cálculo suponen lo par e impar, las figuras y tres clases de ángulos………, como si las conocieran, las adoptan como supuestas………, y partiendo de ellas atraviesan el resto de modo consecuente, para concluir aquello que proponían al examen”.**
Resumiendo, el *análisis* de los antiguos presupone cierto aquello que hay que probar y se razona en base a esto hasta llegar a alcanzar un resultado cierto, al invertir el proceso el resultado -síntesis- se convierte en la prueba legítima de una proposición. Por lo tanto, el *análisis* es un procedimiento sistemático –método- que permite descubrir las condiciones necesarias para que un problema sea resuelto o un teorema sea cierto, de manera tal que si por medio de la síntesis se muestra que estas condiciones son también suficientes, se obtiene un argumento válido y legítimo de una proposición.
El punto culminante de este tipo de investigación que combinaba el a*nálisis* y la síntesis, la podemos encontrar en la obra de Pappus La Colección Matemática, en particular en el capitulo referente al Dominio del Análisis, en él, este autor realiza una descripción pormenorizada de la comprobación y validez necesarias para encontrar la prueba de un teorema o resolver un problema -en general una construcción-. **PARA ELLO SE PROCEDE ANALÍTICAMENTE, ASUMIENDO POR EL MOMENTO QUE EL TEOREMA EN CUESTIÓN ES VÁLIDO O QUE EL PROBLEMA ESTÁ RESUELTO.**

ACTIVIDAD 1

Elabora el resumen correspondiente de la lectura anterior

ACTIVIDAD EXTRACLASE

Investiga algunas definiciones del Análisis y formula con tus propias palabras TU DEFINICIÓN de Análisis

Investiga algunas definiciones de Heurístico y formula con tus propias palabras TU DEFINICIÓN de Heurístico.

“El método analítico en la solución de problemas geométricos I”

Joel Chávez Berna

Anexo 7

Objetivo: Que utilices el Método Analítico o Método del Análisis Antiguo en la solución de problemas geométricos.

Lee con atención cada actividad, plantea lo que se te solicita y discute con tu compañero de equipo tus respuestas

ACTIVIDAD 1

Plantea la solución del siguiente problema geométrico, haciendo uso del método del análisis antiguo: **ASUMIR O SUPONER QUE EL PROBLEMA EN CUESTIÓN ESTÁ RESUELTO**

Construir un triángulo equilátero **Dada** la longitud de un segmento AB

- **Asume que el problema en cuestión está resuelto**
- **Elabora un dibujo que represente esta suposición**
- **Que requieres *hacer* para que esta suposición se cumpla si solo está dado el segmento AB**
- **Que postulado de Los Elementos justificaría tu respuesta**

Postulado 1. Una recta puede trazarse de un punto cualquiera a otro.
Postulado 2. Una recta delimitada puede prolongarse continuamente en cualquiera de sus direcciones y hacerse una recta ilimitada.
Postulado 3. Un círculo puede describirse con un centro y un radio.
Postulado 4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
Postulado 5.
Si una recta que corta a otras dos, forma con éstas ángulos internos del mismo lado, que sumados sean menores que dos ángulos rectos, las dos rectas si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.

ACTIVIDAD 2

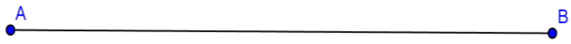
Identifica y responde cada uno de los siguientes incisos:

- ¿Qué magnitudes geométricas están involucradas?
- ¿Cuáles de estas son dadas?

ACTIVIDAD EXTRACLASE

Plantea la solución del siguiente problema geométrico, haciendo uso del método del análisis antiguo: **ASUMIR O SUPONER QUE EL PROBLEMA EN CUESTIÓN ESTÁ RESUELTO**

Construir un hexágono regular inscrito en una circunferencia que tiene por radio dado el segmento AB



- **Asume que el problema en cuestión está resuelto**
- **Elabora un dibujo que represente esta suposición**
- **Que requieres *hacer* para que esta suposición se cumpla si solo está dado el segmento AB**
- **Que postulados y proposiciones de Los Elementos justificarían tu respuesta**

Identifica y responde cada uno de los siguientes incisos:

- ¿Qué magnitudes geométricas están involucradas?
- ¿Cuáles de estas son dadas?

“El método analítico en la solución de problemas geométricos II”

Joel Chávez Berna

Anexo 8

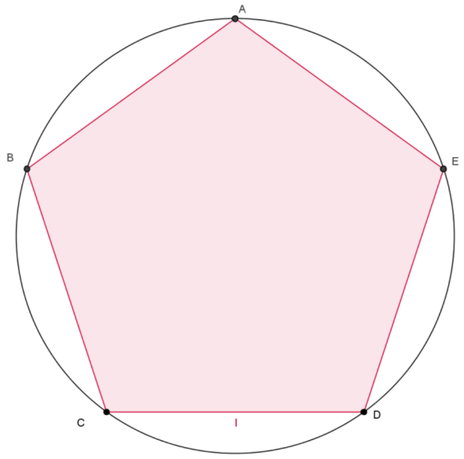
Objetivo: Que utilices el Método Analítico o Método del Análisis Antiguo en la solución de problemas geométricos.

Lee con atención cada actividad, plantea lo que se te solicita y discute con tu compañero de equipo tus respuestas

ACTIVIDAD 1

Discute con tu compañero de equipo la aplicación del método analítico antiguo en la solución de la Proposición IV-11 Los Elementos

Inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado

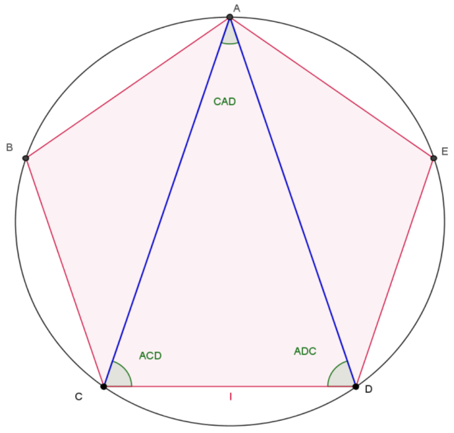


Análisis:

Dada la circunferencia, suponemos en ella inscrita -*Dado*- un pentágono equilátero y equiángulo:

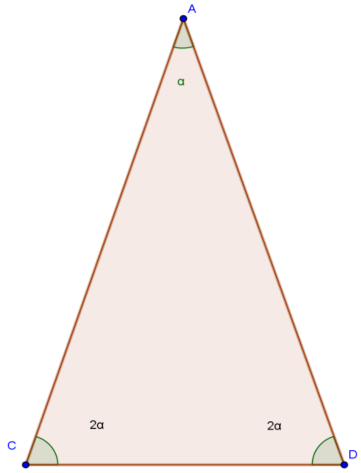
Primera construcción auxiliar:

- Construir el segmento AC y el segmento AD, lo que implica la construcción del triángulo ACD



- Por otro lado, los arcos subtendidos por cada una de las cuerdas que forman las aristas del pentágono inscrito son congruentes entre sí.

- Por lo tanto en el triángulo ACD los ángulos $\angle ACD$ y $\angle ADC$ son congruentes entre sí, ya que las cuerdas AD y AC subtienden arcos iguales, esta conclusión implica una proposición conocida expresada en Los Elementos III-24, por ello el triángulo ACD es un triángulo isósceles ya que también es conocida en términos de la proposición I-5 de Los Elementos.
- Además cada uno de los ángulos $\angle ACD$ y $\angle ADC$ son en magnitud, el doble del ángulo $\angle CAD$, ya que la cuerda CD subtiende un arco que es la mitad de los arcos subtendidos por AD y AC. Es decir nuestro triángulo ACD, además de ser isósceles es un triángulo 2, 1, 2, porque sus ángulos congruentes duplican en magnitud al ángulo restante



Segunda construcción auxiliar:

- Al bisecar cada ángulo $\angle ACD$ y $\angle ADC$, tenemos que las cuerdas $CD, DE, EA, AB\ Y\ BC$ son congruentes, por lo tanto, para inscribir un pentágono regular en una circunferencia, primero se inscribirá un triángulo isósceles 2, 1, 2 en la circunferencia dada.

Hasta este punto del análisis quedan patentes dos hechos:

3. Se supone como dado el pentágono inscrito -equilátero y equiángulo-
4. Se hace uso de construcciones auxiliares, dos en este caso

De estos hechos resulta que, para inscribir un pentágono equilátero y equiángulo es necesario:

3. **Construir un triángulo isósceles 2, 1, 2**
4. **Inscribir un triángulo 2, 1, 2 en una circunferencia dada en *magnitud* y *posición***

Correspondería ahora hacer el *análisis* de cada una de estas nuevas. Resulta obvio que el análisis de estas proposiciones nos llevará a otras más, ad infinitum.

Por ende, el análisis que hemos realizado a la proposición inicial -inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado-, muestra fehacientemente que el método analítico antiguo conduce a una encadenamiento de proposiciones que requieren, a su vez ser *analizadas*. Lo anterior, corrobora un hecho de sobrada importancia: detrás de cada una de las proposiciones euclidianas de Los Elementos se encuentra un proceso de análisis que permite descubrir -resolver o demostrar- una determinada proposición, la que posteriormente será expresada en un proceso de síntesis.

ACTIVIDAD 2

Considera los últimos dos problemas a resolver que resultaron del análisis de la actividad 1:

- **Construir un triángulo isósceles 2, 1, 2**
- **Inscribir un triángulo 2, 1, 2 en una circunferencia dada en *magnitud* y *posición***

Selecciona uno de ellos y elabora un listado de algunas las proposiciones necesarias para su solución, para ello consulta la dirección electrónica:
http://132.248.17.238/geometria/t_1_000/t_1_000_m.html

“El método analítico en la demostración de teoremas”

Joel Chávez Berna

Anexo 9

Objetivo: Que utilices el Método Analítico o Método del Análisis Antiguo en la demostración de teoremas.

Lee con atención cada actividad, plantea lo que se te solicita y discute con tu compañero de equipo tus respuestas

ACTIVIDAD 1

Plantea la demostración del siguiente teorema, haciendo uso del método del análisis antiguo: **ASUMIR O SUPONER QUE EL TEOREMA ES VERDADERO**

Las diagonales de un cuadrado tienen la misma longitud

- **Asume que el teorema es verdadero**
- **Elabora un dibujo que represente esta suposición**
- **Que se debe *satisfacer* para que esta suposición se cumpla si las diagonales del cuadrado tienen la misma longitud**

ACTIVIDAD 2

En relación con la actividad 1, identifica y responde cada uno de los siguientes incisos:

- ¿Qué magnitudes geométricas están involucradas?
- ¿Cuáles de estas son dadas?

ACTIVIDAD EXTRACLASE

Discute con tu compañero de equipo la aplicación del método analítico antiguo en la demostración de la Proposición I-32 Los Elementos

En todo triángulo si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos del triángulo son iguales a dos rectos.

En primera instancia consideremos la Fig.1 y analicemos la primera parte de la proposición: el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos.

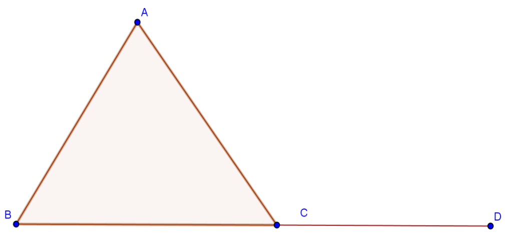


Fig. 1

Análisis

- **Damos por hecho que el ángulo $\angle ACD$ es igual a los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BAC$**, en otras palabras, suponemos verdadera la proposición. Por lo tanto debe existir una recta que pase por C y que divida al ángulo $\angle ACD$ en dos mitades, de manera tal que una de ellas sea el ángulo $\angle ABC$ y la otra el ángulo $\angle BAC$.
- La única recta que cumple esa condición es aquella recta CE que es paralela a la recta AB, ya que de esta manera al ser $AB \parallel CE$, la recta AC se transforma en una recta transversal para las rectas AB, CE $\therefore$ **los ángulos $\angle BAC$ y $\angle ACE$ son ángulos alternos internos en esta nueva construcción auxiliar** -ver Fig. 2-, este último resultado es conocido en la proposición I-29 Los Elementos, en consecuencia:

$$\angle BAC = \angle ACE \quad \ldots\ldots 1)$$

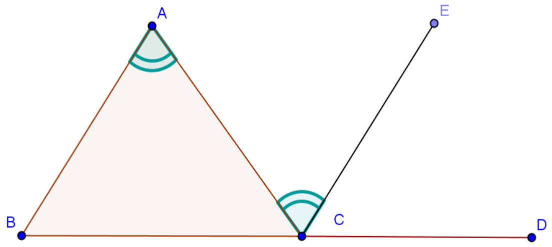


Fig. 2

- Por esta misma razón -ver Fig. 3-, podemos notar que la recta BD es también una transversal a las rectas paralelas AB, CE, en consecuencia, el ángulo $\angle ABC$ es ángulo correspondiente con el ángulo $\angle DCE$, es decir:

$$\angle ABC = \angle DCE \quad \ldots\ldots 2)$$

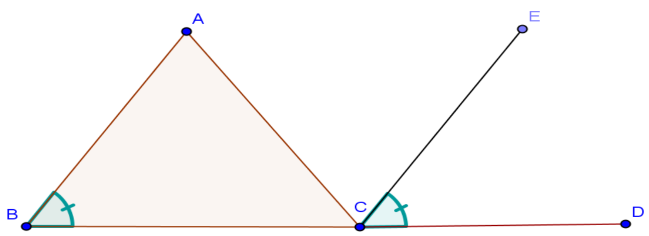


Fig. 3

- Combinando las relaciones 1 y 2 tenemos que:

$$\angle ACE + \angle DCE = \angle ACD \ldots\ldots 3)$$

- En donde, el ángulo $\angle ACD$ es el ángulo externo; pero hemos descubierto a partir de nuestra construcción inicial la de la Fig. 2 que:

$$\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$$

Por tanto, podemos concluir que el ángulo externo de un triángulo es igual a los dos ángulos internos y opuestos.

Para la segunda parte de esta proposición euclidiana: los tres ángulos del triángulo son iguales a dos ángulos rectos, tenemos la Fig. 4:

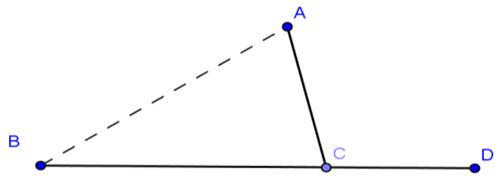


Fig. 4

Segunda construcción auxiliar

- Si consideramos únicamente la recta BD y la recta CA levantada en C, **sabemos** por la proposición I-13 de Los Elementos que $\angle BCA$ y $\angle ACD$ forman un ángulo completo de magnitud igual a dos ángulos rectos es decir:
$$\angle BCA + \angle ACD = 2R$$
- Adicionalmente, en términos del Análisis de la primera parte nuestra proposición euclidiana I-32, hemos ***descubierto*** que para el triángulo ABC -ver Fig. 3-, se cumple que $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$, por lo tanto $\angle BCA + \angle BAC + \angle ABC = 2R$, por lo que las magnitudes de los tres ángulos internos de un triángulo son iguales a dos ángulos rectos.

Rúbrica para evaluar las actividades en clase

	Excelente (10)	Bueno (9-8)	Satisfactorio (7-6)	No satisfactorio (5)	Comentarios
ativo	El equipo colabora activamente en la lectura, discusión y resolución de las actividades encomendadas	La colaboración es esporádica entre los integrantes del equipo	Se hace una “repartición” de las actividades y se trabajan de forma individual para después reunirlas	No realizó el trabajo	
ajo	La Información que utilizó fue pertinente. La información que recopiló tenía relación con el tema	La información que utilizó era pertinente pero incluyó algunos datos que no son relevantes o no tienen relación con el tema correspondiente	La Información que utilizó no fue pertinente. La información recopilada tenía poca relación con el tema.	La Información que utilizó no fue pertinente. La información recopilada no tenía relación con el tema.	
y	Presenta de manera detallada la argumentación y los procedimientos correspondientes que solicita cada actividad	Presenta de manera poco detallada la argumentación y los procedimientos correspondientes que solicita cada actividad	Presenta sin un orden coherente la argumentación y los procedimientos correspondientes que solicita cada actividad	No presentan argumentación ni procedimientos	
	Explican en lenguaje común sus planteamientos. Hacen uso de sus conocimientos previos de manera muy eficiente al plantear modelos matemáticos que conduzcan a las respuestas correspondientes en cada actividad	Explica en lenguaje común sus planteamientos. Hacen algún uso de sus conocimientos previos al no se plantean modelos matemáticos que conduzcan a las respuestas correspondientes en cada actividad.	No explican en lenguaje común sus planteamientos. No hacen uso de conocimientos previos, no se plantean modelos matemáticos que conduzcan a las respuestas correspondientes en cada actividad.	No hay planteamiento matemático alguno.	
	Todas las actividades están resueltas	Solo el 70% de las actividades están resueltas	Solo la mitad de las actividades están resueltas	Menos de la mitad de las actividades se resolvieron	
a	Se cuido orden y limpieza en la presentación de las actividades	Solo hay orden pero no limpieza en la presentación de las actividades	Solo hay limpieza pero no orden en la presentación de las actividades	No hay orden ni limpieza en la presentación de las actividades	
upo	Siempre trabajó para lograr las metas, cumplió con las normas y se adaptó a los cambios del equipo.	Casi siempre trabajó para lograr las metas, cumplir con las normas y adaptarse a los cambios del equipo.	Pocas veces trabajó para lograr las metas, cumplir con las normas y adaptarse a los cambios del equipo, y necesitó ser alentado.	Nunca trabajó para lograr las metas, muy pocas veces o nunca cumplió con las normas y se adaptó a los cambios del equipo.	
es	Siempre demostró habilidad para manejar las relaciones con su compañero de equipo y estableció lazos de comunicación. Trató con respeto y amabilidad a su compañero.	Casi siempre demostró habilidad para manejar las relaciones con su compañero de equipo y estableció lazos de comunicación. Casi siempre trató con respeto y amabilidad a su compañero	Pocas veces demostró habilidad para manejar las relaciones con su compañero de equipo y pocas veces estableció lazos de comunicación. Pocas veces trató con respeto y amabilidad a su compañero	Nunca demostró habilidad para manejar las relaciones con su compañero de equipo. Muy pocas veces o nunca estableció lazos de comunicación y también muy pocas veces o nunca trató con respeto y amabilidad a su compañero	
	Promueve la cooperación, participación e integración con su compañero de equipo.	Casi siempre promueve la cooperación, participación e integración con su compañero de equipo.	Pocas veces promueve la cooperación, participación e integración con su compañero de equipo	Muy pocas veces o nunca promovió la cooperación, participación e integración con su compañero de equipo	

Lista de cotejo para evaluar las actividades

Aspecto a evaluar	Si	No
1. Las actividades tienen los datos generales de los estudiantes de cada equipo 1 punto		
2. Se entregaron las actividades en el plazo establecido 2 puntos		
3. Se resolvieron todas las actividades en la sesión correspondiente 2 puntos		
4. Se mantuvo el orden y la limpieza en las actividades reportadas		
5. Se resolvieron correctamente las actividades 2 puntos		
6. Existió en cada actividad la argumentación y los procedimientos correspondientes. 3 puntos		
Puntaje máximo: 10		
Puntaje recibido		