



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

**TRATAMIENTO NO PERTURBATIVO DE LA QCD
A BAJAS ENERGÍAS**

**PROTOCOLO DE INVESTIGACIÓN
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:
DAVID ARTURO AMOR QUIROZ**

**TUTOR PRINCIPAL
DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT (ICN-UNAM)
MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. ROELOF BIJKER (ICN-UNAM)
DR. GENARO TOLEDO SANCHEZ (IF-UNAM)**

MÉXICO, D. F. ENERO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Desarrollo Histórico	1
1.2. Planes a Futuro	2
2. Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica	3
2.1. Mar de Dirac	5
2.2. Antecedentes del proyecto	6
2.2.1. Hamiltoniano de Coulomb	8
2.2.2. Hamiltonianos Cinético y de Masa	8
2.2.3. Hamiltoniano de Interacción	12
3. Diagonalización de los términos cinético y de masa de quarks	13
3.1. Incluyendo el término de masa	17
4. Traslación de los Operadores Fermiónicos	19
4.1. Energía del nuevo estado base	21
5. Plan de trabajo	23
5.1. Calendario de actividades	25
6. Conclusiones	26

1. Introducción

Una de las metas en la física de partículas elementales es encontrar modelos y teorías (de preferencia que partan de primeros principios) que sean capaces de predecir resultados experimentales.

En particular, se ha dedicado un gran esfuerzo a describir a las interacciones fuertes en el régimen de bajas energías, en donde la constante de interacción α_s es del orden de la unidad y por lo cual resulta imposible modelar la interacción de color como una perturbación.

Hasta ahora, principalmente el modelo de Cálculo en Redes (*Lattice QCD*) [1] es capaz de derivar resultados no perturbativos a partir de primeros principios, pero requiere de un gran esfuerzo numérico, lo cual se traduce en mucho tiempo máquina. Además, no permite calcular el espectro completo de energía y en dicho modelo es difícil asociar el espín.

Por otra parte, existen muchos modelos fenomenológicos exitosos que tienen la desventaja de tener varios parámetros, por ejemplo, el modelo de bolsa del MIT (*MIT Bag Model*) [2].

Otra forma de proceder en los cálculos no perturbativos de QCD es mediante el enfoque de la Teoría Cuántica de Campos, donde la solución de ecuaciones Dyson-Schwinger permite obtener el rompimiento de la simetría quirial de manera dinámica [3].

Es por todo lo anterior que en el presente protocolo se busca compilar algunos resultados obtenidos hasta ahora dentro del grupo de trabajo del Dr. Peter O. Hess [4–11], cuyo modelo representa una alternativa a los modelos no perturbativos antes mencionados. Los detalles de tal modelo serán expuestos en las siguientes secciones. Posteriormente se proponen los objetivos a realizarse a manera de proyecto de investigación como parte de mi candidatura al doctorado que ofrece el Posgrado en Ciencias Físicas PCF-UNAM.

1.1. Desarrollo Histórico

En [4] se propuso una separación del Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica (QCD) que permite describir a las interacciones fuertes a bajas energías utilizando una expansión en potencias de los campos gluónicos. Cada potencia de los campos representa gluones efectivos

con masa entre 600 y 800 MeV [9], aumentando cada uno la energía involucrada, por lo que truncar la expansión equivale a restringirse al límite de bajas energías.

El Hamiltoniano hadrónico mostrado en [4] dio origen a un modelo [5–11] que ha permitido la resolución analítica de diversos Hamiltonianos motivados por la QCD.

Un ejemplo de Hamiltoniano motivado por la QCD es el que se presenta en [5], en donde se diagonaliza a los términos cinético y de masa de quarks mediante una transformación denominada $\alpha\beta$ -BCS y se sustituye al término de Coulomb por una interacción de contacto.

En [5] se incluye además un término de interacción que pertenecía originalmente a la parte residual del Hamiltoniano propuesto en [4]; y el cual considera las contribuciones dinámicas de los gluones a primer orden en la expansión de potencias del campo gluónico. Sin embargo, [5] tiene la desventaja de utilizar la base de caja esférica para los campos bosónicos, mientras que se usa la base de oscilador armónico para los términos de quarks.

La principal aportación de mi tesis de licenciatura [6] consistió en analizar el efecto de la inclusión del antes mencionado término de interacción utilizando la norma de Coulomb y la base de oscilador armónico para quarks y gluones por igual. Además, en dicho documento se diagonaliza numéricamente a H_{int} junto con las energías cinética y de masa; las cuales habían sido previamente diagonalizadas en [5].

En [6] se introduce finalmente el uso de estados coherentes como una herramienta que permite sustituir a los operadores de creación y aniquilación bosónicos por su valor de expectación.

Como parte de mi seminario de investigación se exploró una mejora al método de prediagonalización de los términos cinético y de masa de quarks presentado en [5].

1.2. Planes a Futuro

El objetivo inmediato del proyecto es explorar la inclusión de un potencial fenomenológico de interacción entre quarks que simule la presencia de gluones. A pesar de que la inclusión de un potencial estático representa una mala aproximación en el régimen no perturbativo, donde

los quarks involucrados son ligeros, esta primera forma de proceder es evaluada por sencillez.

Como parte de mi tesis doctoral se propone además buscar una forma de tratar a los términos de interacción a órdenes superiores en la expansión de campos gluónicos.

Además, se propone el uso de la tecnología matemática presentada en [12] con el fin de utilizar métodos variacionales para minimizar el Hamiltoniano de interacción.

La base del oscilador armónico impone por ahora el confinamiento, pues el ancho del oscilador restringe el volumen a un espacio finito. El objetivo a futuro lejano del proyecto es extender el modelo para que requiera únicamente de dos parámetros: el ya mencionado de volumen finito y otro de interacción; planteando la posibilidad de deshacerse del primero de ellos de manera natural conforme se indague en el efecto de la inclusión de potencias superiores de los campos gluónicos y la extensión a un volumen cada vez más grande.

2. Hamiltoniano de la Cromodinámica Cuántica

En la notación covariante relativista, la densidad Lagrangiana dada por la ecuación de Dirac para partículas fermiónicas elementales con masa m es [13]

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)_{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{cc'} - m\delta_{cc'}) \psi_{c'f} , \quad (1)$$

donde $(\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ son las llamadas Matrices de Dirac y los subíndices c y f se refieren al color y sabor de los campos fermiónicos respectivamente.

Para requerir invariancia de norma local en el Lagrangiano \mathcal{L}_0 se debe introducir un campo $\mathbf{V}_\mu^a(x)$ donde $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$ son las componentes espacio-temporales, y $a = \{1, \dots, 8\}$ son los índices del octete de color del gluón. De esta manera, si se desea considerar al campo de norma como un campo físico, se tiene finalmente que el Lagrangiano de la Cromodinámica Cuántica (QCD) es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)_{cf} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{cc'} - m\delta_{cc'}) \psi(x)_{c'f} \\ &- g (\bar{\psi}(x)_{cf} \gamma^\mu T_{cc'}^a \psi(x)_{c'f}) \mathbf{V}_\mu^a(x) - \frac{1}{4} \mathbf{V}_{\mu\nu}^a(x) \mathbf{V}^{a,\nu\mu}(x) , \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$\mathbf{V}_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu \mathbf{V}_\nu^a(x) - \partial_\nu \mathbf{V}_\mu^a(x) + g f^{abd} \mathbf{V}_\mu^b(x) \mathbf{V}_\nu^d(x) . \quad (3)$$

En la expresión (2) se tiene que $T_{cc'}$ son los generadores de color de SU(3) mientras que las f^{abd} son las constantes de estructura de ese mismo grupo. Se tiene pues que dicha ecuación es el Lagrangiano para quarks ψ_{cf} y gluones \mathbf{V}_μ^a interactuando *fuertemente* con un acoplamiento dado por g .

Se puede hacer la analogía del Lagrangiano (2) con el que se obtiene en la Electrodinámica Cuántica, con la diferencia de que el primero incluye términos de *autointeracción* y que exhiben la presencia de vértices de tres y cuatro gluones.

Para pasar del Lagrangiano (2) al formalismo Hamiltoniano se utiliza la cuantización canónica, lo cual requiere escoger una norma específica que permita escribir relaciones de conmutación entre los campos y sus momentos conjugados para un tiempo dado [5]. La elección de la norma no debe cambiar la física, ya que las ecuaciones de movimiento son independientes de dicha elección.

En la llamada *norma axial temporal* ($\mathbf{V}_0^a = 0$), el Hamiltoniano de la QCD [14] es

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} (\mathbf{\Pi}^a \cdot \mathbf{\Pi}^a + \mathbf{B}^a \cdot \mathbf{B}^a) - g \int d\mathbf{r} \bar{\psi}_{cf} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{V}^a \mathbf{T}_{cc'}^a \psi_{c'f} \\ &+ \int d\mathbf{r} \bar{\psi}_{cf} (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi_{c'f} , \end{aligned} \quad (4)$$

donde $\bar{\psi}$ se relaciona con los campos ψ como $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ mientras que $\mathbf{\Pi}^a$ es el momento canónico conjugado a dichos campos.

Por otro lado, el campo *romo-magnético* \mathbf{B}^a está dado por

$$\mathbf{B}_i^a = \varepsilon_{ijk} \nabla_j \mathbf{V}_k^a + \frac{g}{2} \varepsilon_{ijk} f^{abd} \mathbf{V}_j^b \mathbf{V}_k^d , \quad (5)$$

donde ε_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita.

En cambio, el Hamiltoniano de la QCD en la norma de Coulomb ($\nabla_i \mathbf{A}_i^a(\mathbf{r}) = 0$) se obtiene tras realizar una transformación canónica a los campos $\mathbf{V}_\mu^a(x)$ de la siguiente manera [14]:

$$\mathbf{V}_i = \mathcal{U} \mathbf{A}_i \mathcal{U}^\dagger - \frac{i}{g} (\nabla_i \mathcal{U}) \mathcal{U}^\dagger ,$$

$$\mathbf{A}_0 = -\frac{i}{g}\mathcal{U}^\dagger\dot{\mathcal{U}}, \quad (6)$$

donde $\mathcal{U}(x) = e^{-i\alpha^a(x)T^a}$ es una transformación de norma local. Con ello el Hamiltoniano resulta ser

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} [\mathcal{J}^{-1}\Pi_i^{tr\ a}\mathcal{J}\Pi_i^{tr\ a} + \mathcal{B}_i^a\mathcal{B}_i^a] - \bar{\psi}_{cf}(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m)\psi_{cf} - g\bar{\psi}_{cf}\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}^a T_{cc'}^a \psi_{c'f} \right\} d\mathbf{r} \\ + \frac{1}{2}g^2 \int \mathcal{J}^{-1}\rho^a(\mathbf{r})\langle a, \mathbf{r} | \frac{1}{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathcal{D}}(-\nabla^2)\frac{1}{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathcal{D}}|a' \mathbf{r}' \rangle \mathcal{J}\rho^{a'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}d\mathbf{r}', \quad (7)$$

donde

$$\rho^a = \underbrace{\psi_{cf}^\dagger T_{cc'}^a \psi_{c'f}}_{\rho_q^a} + \underbrace{gf^{abd}\mathbf{A}_i^d \mathcal{E}_i^{tr,b}}_{\rho_g^a}, \quad (8)$$

es la densidad de carga de color con

$$\mathcal{E}_i^{tr,a} = -\dot{\mathbf{A}}_i^a - g(\delta_{ij} - \nabla^{-2}\nabla_i\nabla_j)f^{abd}\mathbf{A}_0^b\mathbf{A}_0^d, \quad (9)$$

la componente transversa del campo *romo-eléctrico*.

Por otro lado,

$$\mathcal{D}_i^{ab} = \delta^{ab}\nabla_i - gf^{abc}\mathbf{A}_i^c, \quad (10)$$

es la derivada covariante, la cual garantiza la invarianza de norma.

Por último, a $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathcal{D}$ se le conoce como el operador de Faddeev-Popov y se ha denotado a su determinante mediante el símbolo \mathcal{J} , es decir,

$$\mathcal{J} = \det(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathcal{D}). \quad (11)$$

2.1. Mar de Dirac

El Mar de Dirac es un esquema que considera al vacío como un mar infinito de partículas fermiónicas con energía negativa, al cual se le puede manipular mediante los operadores de creación \mathbf{b}_j^\dagger y aniquilación \mathbf{b}^i . Tal proceso se muestra en la figura 1, donde el producto $\mathbf{b}_{+\frac{1}{2}\mu}^\dagger \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}\mu}^{-\frac{1}{2}\mu}$

aniquila una partícula de energía negativa (pseudo-espín $\alpha = -\frac{1}{2}$) y números cuánticos μ , y crea una partícula de energía positiva ($\alpha = \frac{1}{2}$) con el mismo juego μ de números cuánticos.

En general, el producto $b_{+\frac{1}{2}\mu}^\dagger b_{-\frac{1}{2}\mu'}$ puede conectar estados con distintos números cuánticos, en cuyo caso se dice que la estructura de los operadores no es diagonal, por el contrario, si $\mu = \mu'$ se dice que la estructura es diagonal.

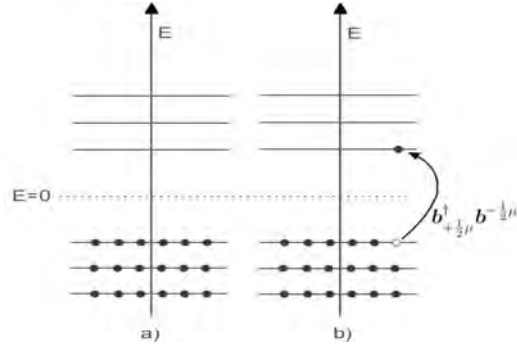


Figura 1: a) El Mar de Dirac con todos los estados de energía negativa ocupados , b) Excitación del Mar de Dirac, la cual se puede interpretar como la creación de pares.

2.2. Antecedentes del proyecto

A continuación se menciona el trabajo hasta ahora realizado a manera de resumen histórico.

En [4] se hace la separación

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_1, \\
 H_0 &= \int \left\{ \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}) - \mathbf{A} \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] + \psi^\dagger [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m] \psi(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r} \\
 &\quad + \frac{1}{2} g^2 \int \rho_a(\mathbf{r}) K^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho^a(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \\
 H_1 &= \int \frac{1}{2} [\boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r}) + \mathbf{A} \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} - g \int \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B \\
 &\quad + \frac{1}{2} g^2 \int \rho_a(\mathbf{r}) \left\{ \langle a, \mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a', \mathbf{r}' \rangle - \delta^{aa'} K^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right\} \rho^{a'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \tag{12}
 \end{aligned}$$

La parte dominante H_0 genera estados hadrónicos ligados, es relativista, singlete en color e incorpora grados de libertad gluónicos. Esta parte fija la escala de energías.

La parte residual H_1 contiene correcciones¹ a dichos estados hadrónicos debido al intercambio de gluones; interacciones entre tres y cuatro gluones; y conlleva al confinamiento.

En (12) se aproxima al término de Faddeev-Popov por el término cero de su expansión perturbativa.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g^2 \int \rho_a(\mathbf{r}) \langle a, \mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a' \mathbf{r}' \rangle \rho^{a'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \\ & \quad \longrightarrow \\ & \frac{1}{2}g^2 \int \rho_a(\mathbf{r}) K^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho^a(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' , \end{aligned} \quad (13)$$

pues en el límite abeliano $\mathcal{D} \rightarrow \nabla$, con lo cual

$$-g^2 \langle a, \mathbf{r} | \frac{1}{\nabla^2} | a' \mathbf{r}' \rangle = \frac{g^2 \delta^{aa'}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \equiv \delta^{aa'} K^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (14)$$

De este modo, una interacción análoga a la Coulombiana de la QED es recuperada.

Luego, se manda a la diferencia

$$\frac{1}{2}g^2 \int \rho_a(\mathbf{r}) \left\{ \langle a, \mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a' \mathbf{r}' \rangle - \delta^{aa'} K^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right\} \rho^{a'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' , \quad (15)$$

a la parte residual del Hamiltoniano. Las funciones \mathbf{V}_A y \mathbf{V}_B son definidas en [4] y contienen términos superiores de la expansión en potencias gluónicas del término de Faddeev-Popov.

El término $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$ contiene interacciones de 3 y 4 gluones, que pueden involucrar una gran variedad de acoplamientos. Por ello el término $-\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})$ intenta aproximar a $\mathbf{B}^2(\mathbf{r})$ análogamente a como hiciera $K^0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ con $H_{Coulomb}^{q-q}$.

En [5–10] se propone en cambio el siguiente Hamiltoniano dominante

$$\begin{aligned} H_0 = & \underbrace{\frac{1}{2} \int [\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) - \mathbf{A} \cdot \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})] d\mathbf{r}}_{\mathbf{H}_{K_g}} + \underbrace{\int \psi^\dagger(\mathbf{r}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla] \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}_{\mathbf{H}_{K_q}} + \underbrace{\int \psi^\dagger(\mathbf{r}) [\beta m] \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}_{\mathbf{H}_{m_q}} \\ & + \underbrace{\int \rho_a(\mathbf{r}) V_0 \rho^a(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'}_{\mathbf{H}_{Coulomb}} + \underbrace{g \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) [-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}] \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}_{\mathbf{H}_{int}} . \end{aligned} \quad (16)$$

¹Computacionalmente se ha encontrado que las correcciones debidas a H_1 son del orden de 20% de la escala de energía.

En la ecuación anterior se ha introducido un potencial $V_0 = \text{const}$ para sustituir al potencial tipo Coulomb como se explica en la subsección 2.2.1.

2.2.1. Hamiltoniano de Coulomb

Es posible observar que en la separación (16) se sustituye al término de Coulomb por una interacción promedio V_0 como una primera aproximación para describir a los gluones. El valor de V_0 depende explícitamente de la separación entre quarks, y por ende, del intervalo de energía en el cual nos interesa describir la interacción.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g^2 \int \rho_a(\mathbf{r})K^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho^a(\mathbf{r}')d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \\ \longrightarrow \\ \int \rho_a(\mathbf{r})V_0\rho^a(\mathbf{r}')d\mathbf{r}d\mathbf{r}' . \end{aligned} \quad (17)$$

Una vez más, la diferencia

$$\frac{1}{2}g^2 \int \rho_a(\mathbf{r})K^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho^a(\mathbf{r}')d\mathbf{r}d\mathbf{r}' - \int \rho_a(\mathbf{r})V_0\rho^a(\mathbf{r}')d\mathbf{r}d\mathbf{r}' , \quad (18)$$

es considerada parte del Hamiltoniano residual. Tal aproximación resulta en una interacción entre quarks proporcional al operador de Casimir de $SU(3)$, por lo que sus niveles de energía son dados por

$$E_{Coulomb}^{q-q}(V_0) = (2V_0) (\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu) , \quad (19)$$

de modo que separa energéticamente a los estados sin color $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ de los estados no físicos. Esto se puede interpretar como un remanente del confinamiento, pero *no* es confinamiento hasta no hacer tender a infinito el valor promedio de la interacción. En lugar de ello, se procederá a probar potenciales que consigan el confinamiento de formas más realistas.

2.2.2. Hamiltonianos Cinético y de Masa

En [5] se muestra que el término cinético de quarks definido en (16) como

$$\mathbf{H}_{K_q} = \int \psi^\dagger(\mathbf{r})[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}]\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} , \quad (20)$$

toma la siguiente forma al ser expandido en la base de oscilador armónico

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{K_q} = & \sqrt{\gamma} \sum_{NN'j} k_{NN'}^j \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j} \right. \\
& \left. + \mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j} \right] \\
& + \sqrt{\gamma} \sum_{NN'j} k_{NN'}^j \left[\mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j} \right. \\
& \left. + \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j} \right] , \tag{21}
\end{aligned}$$

donde el primer subíndice de los operadores se refiere al pseudo-espín $\alpha = \pm \frac{1}{2}$, los índices entre paréntesis a número cuántico principal N, N' y momento angular orbital $l = j \pm \frac{1}{2}$ acoplados a cierto espín total j . El producto escalar indica la suma sobre los índices de proyección de espín λ , color c y sabor f .

Los coeficientes $k_{NN'}^j$ resultan ser

$$k_{NN'}^j = \sqrt{\frac{N - j + \frac{3}{2}}{2}} \delta_{N', N+1} + \sqrt{\frac{N + j + \frac{3}{2}}{2}} \delta_{N', N-1} . \tag{22}$$

En [5] también se mostró que dicho término se puede escribir como una suma de operadores de ascenso y descenso de energía cinética $\mathbf{H}_{K_q} = \mathbf{K}_+ + \mathbf{K}_-$ que satisfacen entre sí un álgebra SU(2) para el caso de 2 y 3 niveles de número cuántico principal N .

La simetría SU(2) se rompe para sistemas de más de 3 niveles o incluyendo al término de masa \mathbf{H}_{m_q} ($m \neq 0$), en cuyo caso es posible obtener una solución semi-analítica simultáneamente para los términos cinético y de masa por medio de una *transformación* $\alpha\beta$, definida como

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{\pm \frac{1}{2}(N, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger & \equiv \sum_k (\alpha_{Nk}^j)^* \widehat{\mathbf{b}}_{\pm \frac{1}{2}(k, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger , \\
\mathbf{b}_{\pm \frac{1}{2}(N', j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger & \equiv \sum_q (\beta_{N'q}^j)^* \widehat{\mathbf{b}}_{\pm \frac{1}{2}(q, j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger , \tag{23}
\end{aligned}$$

la cual es una transformación canónica que cambia los números cuánticos principales N y N' por dos nuevos números cuánticos k y q que dan pasos de uno en uno ($k, q = 1, 2, 3, \dots$), a diferencia de N y N' que daban pasos de dos en dos. La idea de la transformación es diagonalizar a los índices N y N' , de manera que se impone la condición $k = q$.

Las matrices α_{Nk}^j y $\beta_{N'k}^j$ en (23) deben ser unitarias de manera que las reglas de anti-conmutación de los nuevos operadores se sigan satisfaciendo. Dichas matrices sólo mezclan estados con el mismo espín j .

Como es posible observar de (23), la transformación $\alpha\beta$ no modifica los números cuánticos j, λ, c, f de cada estado, por lo que el nuevo sistema conecta estados de momento angular $l = j - \frac{1}{2}$ con estados $l = j + \frac{1}{2}$ y sigue moviendo partículas de energía negativa a estados con energía positiva, lo cual todavía no permite obtener de forma analítica las energías de los estados posibles del sistema a considerar. Por ello, para conseguir una solución analítica del sistema, en [5] se hizo una transformación BCS generalizada de la forma

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} &= c_{j-\frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{(k, j)\lambda cf} - s_{j-\frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} , \\
\widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} &= s_{j+\frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{(k, j)\lambda cf} + c_{j+\frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} , \\
\widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= c_{j-\frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} - s_{j-\frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}(k, j)\lambda cf , \\
\widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k, j + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= s_{j+\frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} + c_{j+\frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}(k, j)\lambda cf , \\
\widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k, j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} &= c_{j+\frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{(k, j)\lambda cf} - s_{j+\frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} , \\
\widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k, j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf} &= s_{j-\frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{(k, j)\lambda cf} + c_{j-\frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} , \\
\widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}(k, j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= c_{j+\frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} - s_{j+\frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2}}(k, j)\lambda cf , \\
\widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}(k, j - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^{\dagger} &= s_{j-\frac{1}{2}, k} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2}}^{\dagger(k, j)\lambda cf} + c_{j-\frac{1}{2}, k} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2}}(k, j)\lambda cf ,
\end{aligned} \tag{24}$$

donde se usa la notación corta $c_{j\pm\frac{1}{2}, k} = \cos(\theta_{j\pm\frac{1}{2}, k})$ y $s_{j\pm\frac{1}{2}, k} = \sin(\theta_{j\pm\frac{1}{2}, k})$ con $\theta_{j\pm\frac{1}{2}, k}$ los ángulos de Bogoliubov.

En [6] se resume a la ecuación (24) en una sola expresión introduciendo el índice de pseudo-espín $\alpha = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ y un nuevo índice $\delta = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{b}}_{\alpha(k,j+\delta)j\lambda cf}^\dagger &= \cos\left(\Theta_{j-(2\delta\alpha),k} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{b}_{j+(2\delta\alpha),kj\lambda cf}^\dagger \\
&- \text{sen}\left(\Theta_{j-(2\delta\alpha),k} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{d}_{j-(2\delta\alpha),kj\lambda cf} .
\end{aligned} \tag{25}$$

Se puede observar que el producto $(2\delta\alpha) = \pm\frac{1}{2}$ da el signo correcto en los índices del ángulo de Bogoliubov $\Theta_{j\pm\frac{1}{2},k}$ y de los operadores fermiónicos $\mathbf{b}_{j\pm\frac{1}{2},kj\lambda cf}^\dagger$ y $\mathbf{d}_{j\mp\frac{1}{2},kj\lambda cf}$.

En [5] se muestra que tras aplicar la transformación BCS, los términos cinético y de masa definidos en (16) toman la forma

$$\begin{aligned}
H_{K_q} + H_{m_q} &= \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m_0] \psi(\mathbf{r}) , \\
H_{K_q}^{BCS} + H_{m_q}^{BCS} &= \sum_{jk} \left\{ \epsilon_{bkj+\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{b}_{j+\frac{1}{2},k} + \epsilon_{dkj+\frac{1}{2}} \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{d}_{j+\frac{1}{2},k} \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_{bkj-\frac{1}{2}} \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{b}_{j-\frac{1}{2},k} + \epsilon_{dkj-\frac{1}{2}} \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2},k}^\dagger \mathbf{d}_{j-\frac{1}{2},k} \right\} .
\end{aligned} \tag{26}$$

En (26) se ha omitido la suma sobre los números cuánticos magnéticos y la constante de energía correspondiente al vacío perturbativo, y se usa la notación corta

$$\begin{aligned}
\epsilon_{bkj\pm\frac{1}{2}} &= 2\tilde{k}_{kk} s_{j\mp\frac{1}{2},k} c_{j\mp\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j\pm\frac{1}{2}} c_{j\mp\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j\mp\frac{1}{2}} s_{j\mp\frac{1}{2},k}^2 , \\
\epsilon_{dkj\pm\frac{1}{2}} &= 2\tilde{k}_{kk} s_{j\pm\frac{1}{2},k} c_{j\pm\frac{1}{2},k} + m_{0,k,j\pm\frac{1}{2}} c_{j\pm\frac{1}{2},k}^2 - m_{0,k,j\mp\frac{1}{2}} s_{j\pm\frac{1}{2},k}^2 ,
\end{aligned} \tag{27}$$

donde $\epsilon_{bkj\pm\frac{1}{2}}$ y $\epsilon_{dkj\pm\frac{1}{2}}$ se relacionan con la energía subtotal debida al término cinético y de masa, mientras que $m_{0,k,j\pm\frac{1}{2}}$ es el parámetro de masa de los quarks.

Resumiendo, en [5–10] se realiza una transformación $\alpha\beta$ que diagonaliza al número cuántico principal. Posteriormente se aplica una transformación BCS que diagonaliza al momento angular orbital y cambia operadores del esquema de pseudoespín $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ al esquema de Dirac, es decir, introduce operadores de creación y aniquilación de quarks y antiquarks. Con ello ya se ha diagonalizado a la parte dominante H_0 del Hamiltoniano de QCD (12) sin incluir a los gluones.

En el capítulo siguiente se introduce una transformación distinta que diagonaliza simultáneamente al número cuántico principal y al momento angular orbital, de manera que una posterior transformación BCS tiene una estructura más sencilla, además de que el proceso completo de diagonalización es computacionalmente más rápido y sencillo de programar. Se pretende incluir a dicha transformación optimizada como los cimientos para el proyecto de tesis doctoral.

2.2.3. Hamiltoniano de Interacción

De la definición dada en (16) se tenía que el término de interacción lineal en la expansión de campos gluónicos es

$$H_{int} = g \int \psi^\dagger(\mathbf{r})[-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}]\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} . \quad (28)$$

En [6] se utiliza la base de estados coherentes de bosones para sustituir a los operadores gluónicos por tensores con entradas complejas. Con dicho formalismo se obtiene que la forma final del Hamiltoniano tras agregar a $H_q = H_{Coulomb} + H_{K_q} + H_{m_q}$ el término H_{int} resulta ser

$$H_q + H_{int} = \sum_{\mu\nu} \begin{pmatrix} b_\mu^\dagger & d_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu} + V_{\mu\nu} c_\mu c_\nu & -V_{\mu\nu} c_\mu s_\nu \\ -V_{\mu\nu} s_\mu c_\nu & \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu} + V_{\mu\nu} s_\mu s_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^\nu \\ d^{\dagger\nu} \end{pmatrix} + 2V_0 \mathcal{C}_2(SU(3)) , \quad (29)$$

con

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu} &= g \sum_{N'NL'LMC} \int r^2 dr R_{N_1, j_1 + \delta_1}(r) R_{N'L'}(r) R_{N_2, j_2 + \delta_2}(r) \frac{3\alpha_{N'NL'L}^{\Xi}}{\sqrt{4\pi}\Omega_N} \frac{1}{\sqrt{8(2L+1)}} \\ &\times \sqrt{(2j_2 + 2\delta_2 + 1)(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)(2j_1 + 2\delta_1 + 1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & j_2 + \delta_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & j_1 + \delta_1 & j_1 \\ 1 & L' & L \end{Bmatrix} \\ &\times (-1)^{\chi_{c_2} - \lambda_2 + \delta_2} \langle j_2 + \delta_2 0, j_1 + \delta_1 0 | L' 0 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | LM \rangle \langle (10)c_1, (01)\bar{c}_2 | (11)C \rangle \\ &\times (\kappa_{N_1 k_1}^{j_1})^* [(-1)^{L+L'+1+M+\chi_C} + 1] (\kappa_{N_2 k_2}^{j_2}) \delta_{f_1 f_2} . \end{aligned} \quad (30)$$

En [6] se compara a las energías BCS correspondientes al término H_q con los resultados numéricos obtenidos al agregar la interacción para un sistema de 4 niveles ($j = 1/2, 3/2, 5/2$), mostrando que se genera un desdoblamiento de los niveles debido a H_{int} . En dicho documento se concluye que a mayor momento angular total j , el desdoblamiento de los niveles es menor, hasta ser despreciable para $j = 5/2$.

El uso de estados coherentes bosónicos en [6] presenta una desventaja. Debido a su definición $|\mathbf{z}\rangle = e^{\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{b}^\dagger} |0\rangle$, los estados coherentes son una combinación lineal de todos los estados originales y por lo tanto la base así generada no tiene color ni momento angular total bien definidos en todo estado desdoblado.

Es por ello que se propone, como un primer paso a seguir, analizar la contribución de los gluones mediante la introducción de un potencial de Coulomb fenomenológico.

3. Diagonalización de los términos cinético y de masa de quarks

Como parte de mi seminario de investigación -y como un inicio de la tesis doctoral-, se exploró una mejora al método de diagonalización de los términos cinético y de masa de quarks $H_{K_q} + H_{m_q}$ presentado en [5]. Dicho proceder prediagonaliza al término H_0 de la ecuación (12) y fija la base de prueba para la diagonalización posterior.

De acuerdo a la ecuación (23), la transformación $\alpha\beta$ es dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger &= \sum_k (\alpha_{Nk}^j)^* \widehat{\mathbf{b}}_{\pm\frac{1}{2}(k, j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger, \\ \mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N', j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger &= \sum_q (\beta_{N'q}^j)^* \widehat{\mathbf{b}}_{\pm\frac{1}{2}(q, j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger. \end{aligned} \quad (31)$$

Primero se acorta la notación definiendo

$$\alpha_{(Nl)k}^j = \begin{cases} \alpha_{Nk}^j & \text{si } l = j + \frac{1}{2} \\ \beta_{Nk}^j & \text{si } l = j - \frac{1}{2} \end{cases} . \quad (32)$$

De modo que la transformación se reescribe como

$$\mathbf{b}_{\pm\frac{1}{2}(N,l,\frac{1}{2})j\lambda cf}^\dagger = \sum_k \left(\alpha_{(Nl)k}^j \right)^* \hat{\mathbf{b}}_{\pm\frac{1}{2}kj\lambda cf}^\dagger . \quad (33)$$

Imponiendo que los nuevos operadores conserven las relaciones de anticonmutación

$$\left\{ \hat{\mathbf{b}}^{\pm\frac{1}{2}k_1j\lambda_1c_1f_1}, \hat{\mathbf{b}}_{\pm\frac{1}{2}k_2j\lambda_2c_2f_2}^\dagger \right\} = \delta_{k_1k_2} \delta_{\lambda_1\lambda_2} \delta_{c_1c_2} \delta_{f_1f_2} , \quad (34)$$

se obtiene de nuevo una condición de unitariedad

$$\sum_k \left(\alpha_{(Nl)k}^j \right) \left(\alpha_{(N'l')k}^j \right)^* = \delta_{NN'} \delta_{ll'} . \quad (35)$$

La notación se acorta aún más al escribir explícitamente el valor de $l, l' = j \pm \frac{1}{2}$ en los subíndices de α de modo que, dados los valores de N y j , el momento angular orbital l queda completamente determinado.

Si se sustituye la transformación con notación acortada en la expresión para el término cinético mostrado en (21), se obtiene

$$\mathbf{H}_{K_q} = \sqrt{\gamma} \sum_{NN'j} k_{NN'}^j \left\{ \sum_{k_1k_2} \left[\begin{aligned} & \left(\alpha_{(N,j+\frac{1}{2})k_1} \right)^* \left(\alpha_{(N',j-\frac{1}{2})k_2} \right) \hat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}k_2j} \\ & + \left(\alpha_{(N',j-\frac{1}{2})k_1} \right)^* \left(\alpha_{(N,j+\frac{1}{2})k_2}^j \right) \hat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}k_2j} \\ & \left(\alpha_{(N,j+\frac{1}{2})k_1} \right)^* \left(\alpha_{(N',j-\frac{1}{2})k_2} \right) \hat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}k_2j} \\ & + \left(\alpha_{(N',j-\frac{1}{2})k_1} \right)^* \left(\alpha_{(N,j+\frac{1}{2})k_2} \right) \hat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}k_2j} \end{aligned} \right] \right\} . \quad (36)$$

donde $1/\sqrt{\gamma}$ es el ancho de la base del oscilador armónico. Reagrupando.

$$\mathbf{H}_{K_q} = \sqrt{\gamma} \sum_{jNN'k_1k_2} k_{NN'}^j \left\{ \begin{aligned} & \left(\alpha_{(N,j+\frac{1}{2})k_1} \right)^* \left(\alpha_{(N',j-\frac{1}{2})k_2} \right) \left(\hat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}k_2j} + \hat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}k_2j} \right) \\ & + \left(\alpha_{(N',j-\frac{1}{2})k_1} \right)^* \left(\alpha_{(N,j+\frac{1}{2})k_2} \right) \left(\hat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}k_2j} + \hat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}k_2j} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (37)$$

Se debe tener cuidado en el orden de los índices, ya que de (22) se tiene que $k_{NN'}^j \neq k_{N'N}^j$. Es posible agrupar aún más definiendo el coeficiente

$$k_{N_1l_1N_2l_2}^j = \begin{cases} k_{N_1N_2}^j & \text{si } l_1 \neq l_2 \\ 0 & \text{si } l_1 = l_2 \end{cases}, \quad (38)$$

donde N_1, N_2 se relacionan con N, N' de la siguiente manera

$$N_i = \begin{cases} N & \text{si } l_i = j + \frac{1}{2} \\ N' & \text{si } l_i = j - \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (39)$$

Con dicha identificación se garantiza que el orden de los subíndices es el correcto.

Con ello

$$\mathbf{H}_{K_q} = \sqrt{\gamma} \sum_{jk_iN_i l_i} k_{N_1l_1N_2l_2}^j \left(\alpha_{(N_1,l_1)k_1} \right)^* \left(\alpha_{(N_2,l_2)k_2} \right) \left(\hat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}k_2j} + \hat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}k_2j} \right), \quad (40)$$

puede identificarse con una multiplicación de matrices de la forma $\tilde{k} = \alpha^\dagger k \alpha$ tras definir los elementos de matriz de \tilde{k} como

$$\tilde{k}_{k_1k_2}^j = \sum_{N_i l_i} k_{N_1l_1N_2l_2}^j \left(\alpha_{(N_1,l_1)k_1} \right)^* \left(\alpha_{(N_2,l_2)k_2} \right). \quad (41)$$

Dado que los operadores no dependen de N_i, l_i , pueden ser factorizados de la siguiente manera

$$\mathbf{H}_{K_q} = \sqrt{\gamma} \sum_{jk_1k_2} \tilde{k}_{k_1k_2}^j \left(\hat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}k_2j} + \hat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}k_1j}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}k_2j} \right). \quad (42)$$

Tras diagonalizar \tilde{k} entonces las columnas de α corresponden a los eigenvectores de k y sus eigenvalores son las entradas diagonales de \tilde{k} , las cuales se denotan por ϵ_k^j . Dichos eigenvalores tendrán valores positivos y negativos pues aún conectan estados con distinto pseudo-espín. El siguiente paso es entonces diagonalizar al pseudo-espín mediante una transformación BCS.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}kj} &= c_{kj} \mathbf{b}^{kj} - s_{kj} \mathbf{d}^{\dagger kj}, \\ \hat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}kj}^\dagger &= c_{kj} \mathbf{b}_{kj}^\dagger - s_{kj} \mathbf{d}_{kj}, \\ \hat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}kj} &= s_{kj} \mathbf{b}^{kj} + c_{kj} \mathbf{d}^{\dagger kj}, \\ \hat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}kj}^\dagger &= s_{kj} \mathbf{b}_{kj}^\dagger + c_{kj} \mathbf{d}_{kj}, \end{aligned} \quad (43)$$

donde una vez más se usa la notación corta $c_{kj} = \cos(\theta_{kj})$ y $s_{kj} = \sin(\theta_{kj})$.

Sustituyendo lo anterior en la expresión (42) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{K_q} &= 2\sqrt{\gamma} \sum_{jk} \epsilon_k^j c_{kj} s_{kj} \left[\left(\mathbf{b}_{kj}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{kj} \right) - \left(\mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{d}^{\dagger kj} \right) \right] \\ &\quad + \sum_{kj} \epsilon_k^j \left[(c_{kj})^2 - (s_{kj})^2 \right] \left[\left(\mathbf{b}_{kj}^\dagger \cdot \mathbf{d}^{\dagger kj} \right) + \left(\mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{b}^{kj} \right) \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Aún no se ha agregado al término de masa. Sin éste, la energía cinética puede ser diagonalizada en el espacio de pseudo-espín simplemente requiriendo que $(c_{kj})^2 - (s_{kj})^2 = 0$. Es decir, se tiene una ecuación de brecha $c_{kj} = \pm s_{kj}$.

Las energías transformadas $\tilde{\epsilon}_k^j = 2\epsilon_k^j c_{kj} s_{kj}$ deben ser positivas. Entonces, para $\epsilon_k^j > 0$ se debe tomar el signo positivo $c_{kj} = s_{kj}$ y para $\epsilon_k^j < 0$ se ha de tomar el signo contrario $c_{kj} = -s_{kj}$. De otra forma la energía resultante sería menor que la energía del vacío (la cual se elige con valor cero.)

Tras estas consideraciones, la solución a la ecuación de brecha para el caso sin masa es

$$\theta_{kj} = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } \epsilon_k^j > 0 \\ -\pi/4 & \text{si } \epsilon_k^j < 0 \end{cases} . \quad (45)$$

Con lo cual $\tilde{\epsilon}_k^j = 2\epsilon_k^j c_{kj} s_{kj} = |\epsilon_k^j|$.

Finalmente, anticonmutar el término $\mathbf{d}\mathbf{d}^\dagger$ para un ordenamiento normal da por resultado

$$\mathbf{H}_{K_q} = \sum_{kj} |\epsilon_k^j| \left[\left(\mathbf{b}_{kj}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{kj} \right) + \left(\mathbf{d}^{\dagger kj} \cdot \mathbf{d}_{kj} \right) \right] + const . \quad (46)$$

3.1. Incluyendo el término de masa

Parte de los calculos mostrados a continuación fueron realizados en [5]. Sin embargo ahora se expone el tratamiento del término de masa bajo los estándares de la transformación mejorada expuesta al inicio de la presente sección.

Como se definió en la ecuación (16), el término de masa está dado por

$$\mathbf{H}_{m_q} = \int dx^4 \Psi^\dagger(x) \beta m_0 \Psi(x) , \quad (47)$$

donde $\beta = \gamma^0$ es la matriz cero de Dirac y m_0 es la *masa desnuda* del quark que rompe la simetría quiral.

Usando la expansión de los campos fermiónicos en la base del oscilador armónico, y dada la estructura diagonal del acoplamiento, el término de masa resulta

$$\mathbf{H}_{m_q} = m_0 \sum_{Nlj} \left[\mathbf{b}_{\frac{1}{2}(N,l,\frac{1}{2})j}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{\frac{1}{2}(N,l,\frac{1}{2})j} - \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}(N,l,\frac{1}{2})j}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{-\frac{1}{2}(N,l,\frac{1}{2})j} \right] , \quad (48)$$

donde una vez más, el producto escalar representa la suma sobre los elementos diagonales en color, sabor y proyección de espín.

Como la estructura de \mathbf{H}_{m_q} ya es diagonal en todos sus índices, entonces la transformación definida en (33) únicamente cambia los índices de suma $\sum_{N,l} \rightarrow \sum_k$, de modo que en la nueva notación

$$\mathbf{H}_{m_q} = m_0 \sum_{kj} \left[\widehat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}kj}^\dagger \cdot \widehat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}kj} - \widehat{\mathbf{b}}_{-\frac{1}{2}kj}^\dagger \cdot \widehat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}kj} \right]. \quad (49)$$

Para realizar la transformación anterior con formalidad se requirió usar la condición de unitariedad inversa a (35)

$$\sum_{Nl} \left(\alpha_{(Nl)k_1}^j \right)^* \alpha_{(Nl)k_2}^j = \delta_{k_1 k_2}. \quad (50)$$

Ahora se aplica la transformación BCS definida en (43) con la cual

$$\mathbf{H}_{m_q} = m_0 \sum_{kj} \left[(c_{kj}^2 - s_{kj}^2) \left(\mathbf{b}_{kj}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{kj} - \mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{d}^{\dagger kj} \right) - 2c_{kj}s_{kj} \left(\mathbf{b}_{kj}^\dagger \cdot \mathbf{d}^{\dagger kj} + \mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{b}^{kj} \right) \right], \quad (51)$$

por lo que agregando lo anterior a la energía cinética transformada (44) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{K_q} + \mathbf{H}_{m_q} = & \sum_{kj} \left[(2\epsilon_k^j c_{kj} s_{kj} + m_0 c_{kj}^2 - m_0 s_{kj}^2) \left(\mathbf{b}_{kj}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{kj} - \mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{d}^{\dagger kj} \right) \right. \\ & \left. + (\epsilon_k^j c_{kj}^2 - \epsilon_k^j s_{kj}^2 - 2m_0 c_{kj} s_{kj}) \left(\mathbf{b}_{kj}^\dagger \cdot \mathbf{d}^{\dagger kj} + \mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{b}^{kj} \right) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

La ecuación de brecha ahora resulta

$$\epsilon_k^j (c_{kj}^2 - s_{kj}^2) - 2m_0 c_{kj} s_{kj} = 0. \quad (53)$$

Usando algunas identidades trigonométricas, el ángulo de Bogoliubov es dado por

$$\theta_{kj} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\epsilon_k^j}{m_0} \right). \quad (54)$$

Es posible mostrar que dicha solución para θ_{kj} garantiza que las Energías BCS $\tilde{\epsilon}_k^j = m_0 \cos 2\theta_{kj} + \epsilon_k^j \sin 2\theta_{kj}$ sean siempre positivas.

Finalmente, anticonmutando el término $\mathbf{d}\mathbf{d}^\dagger$ como se hizo en el caso sin masa, se tiene

$$\mathbf{H}_{K_q} + \mathbf{H}_{m_q} = \sum_{kj} (m_0 \cos 2\theta_{kj} + \epsilon_k^j \sin 2\theta_{kj}) \left(\mathbf{b}_{kj}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{kj} + \mathbf{d}^{\dagger kj} \cdot \mathbf{d}_{kj} \right) + const. \quad (55)$$

La ecuación anterior se reduce a (46) en el límite quiral.

4. Traslación de los Operadores Fermiónicos

En [12] se propone un método variacional para la resolución general de problemas de muchos cuerpos, aunque su lenguaje es orientado al de a QCD. Dicho método consiste en una rotación y una translación de los operadores fermionicos (quarks y antiquarks) y bosónicos (gluones) involucrados en un Hamiltoniano dado.

El objetivo de esta sección es presentar algunos aspectos de la translación de los operadores fermiónicos como parte del método variacional antes mencionado, ya que dicha translación será la primera transformación a ser implementada en el proceso de minimizar al Hamiltoniano del modelo. Ello se debe a que la translación es más sencilla de manipular matemáticamente y es más prometedora en la búsqueda de un mínimo para el valor de expectación del Hamiltoniano en el vacío.

En lo siguiente se muestra el procedimiento aplicado a un único tipo de partículas fermiónicas representadas por los operadores \mathbf{b} , pero el procedimiento es completamente análogo al caso en que se introducen operadores correspondientes a un segundo tipo de operadores \mathbf{d} correspondientes a sus antipartículas.

Se define a la translación fermiónica como

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\mu^\dagger &= \mathbf{B}_\mu^\dagger + \eta_\mu \\ \mathbf{b}^\mu &= (\mathbf{b}_\mu^\dagger)^\dagger = \mathbf{B}^\mu + \eta_\mu^* \\ &= \mathbf{B}^\mu + \eta^\mu \quad . \end{aligned} \tag{56}$$

La única forma de que los nuevos operadores sigan satisfaciendo las reglas de anticonmutación es si los η_μ son números de Grassman. Luego, es posible relacionar a las variables η_μ con los números complejos a_μ , vía

$$\eta_\mu = a_\mu \Theta_\mu \quad , \tag{57}$$

donde

$$D_{\mu_1 \mu_2} = \Theta_{\mu_1} \Theta_{\mu_2} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu_1 < \mu_2 \\ -1 & \text{si } \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \quad . \tag{58}$$

Es por ello que para construir a la matriz antisimétrica $D_{\mu_1\mu_2}$ se requiere introducir una *orientación*, es decir, definir cuál índice es menor comparado con cualquier otro. En este caso basta con tomar la convención

$$\mu < \bar{\mu} \quad , \quad (59)$$

donde μ se refiere a todos los posibles índices de los operadores y $\bar{\mu}$ a sus índices conjugados.

Se asume que μ y $\bar{\mu}$ son siempre distintos. Por ejemplo, si μ corresponde a los índices de partículas, entonces $\bar{\mu}$ corresponde a las antipartículas y por tanto no tiene el mismo rango.

Así pues, cuando el primer índice se refiere al operador de creación de una partícula, o al operador de aniquilación de una antipartícula, entonces $D_{\mu_1\mu_2} = +1$ siempre, etc.

La forma de subir y bajar índices es dada por

$$\eta_{\mu}^* = \eta^{\mu} = (-1)^{\chi_{\mu}} \eta_{\bar{\mu}} \quad . \quad (60)$$

La fase $(-1)^{\chi_{\mu}}$ depende de la convención usada y su forma explícita es por ahora irrelevante.

Se introduce la siguiente notación

$$\bar{\eta}_{\bar{\mu}} = \eta_{\bar{\mu}} \quad , \quad (61)$$

con el fin de facilitar la distinción entre η_{μ} y $\eta_{\bar{\mu}}$ en las expresiones para los acoplamientos como se muestra a continuación.

Considérese el acoplamiento a cierta representación irreducible Γ de la forma $[\eta \otimes \bar{\eta}]_{\mu}^{\Gamma}$. Se tiene que

$$[\eta \otimes \bar{\eta}]_{\mu}^{\Gamma} = \sum_{\mu_1\mu_2} (1\mu_1, \bar{1}\bar{\mu}_2 | \Gamma\mu) a_{\mu_1} a_{\bar{\mu}_2} D_{\mu_1\bar{\mu}_2} \quad . \quad (62)$$

El 1 en el coeficiente de Clebsch-Gordan es una notación corta para la representación fundamental de una partícula y $\bar{1}$ para su representación irreducible conjugada. Como en esta construcción del acoplamiento $D_{\mu_1\bar{\mu}_2}$ siempre es +1, entonces

$$[\eta \otimes \bar{\eta}]_{\mu}^{\Gamma} = [a \otimes \bar{a}]_{\mu}^{\Gamma} \quad , \quad (63)$$

es decir, es un simple acoplamiento de los tensores complejos a .

4.1. Energía del nuevo estado base

Consideremos un Hamiltoniano, que antes de la traslación es de la forma

$$\mathbf{H} = \sum_{\gamma_1} \epsilon_{\gamma_1} \mathbf{n}_{\gamma_1} + \sum_{\gamma_i} V_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} \left[[\mathbf{b}_{\gamma_1}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{\gamma_2}]^\Gamma \otimes [\mathbf{b}_{\gamma_3}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{\gamma_4}]^\Gamma \right]_0^0 . \quad (64)$$

Los coeficientes ϵ_{γ_1} son las energías de una partícula con operador de número $\mathbf{n}_{\gamma_1} = [\mathbf{b}_{\gamma_1}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{\gamma_1}]^0$, mientras que los $V_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} \equiv V_{\gamma_i}$ son los coeficientes de interacción de dos partículas. Las γ_i denotan las diferentes representaciones irreducibles de una partícula y sus componentes magnéticas son denotadas por las μ_i .

La idea es que con el mapeo fermiónico construido al principio de la presente sección es posible calcular los valores de expectación de los acoplamientos con respecto del nuevo vacío $|\tilde{0}\rangle$ el cual es definido mediante la relación $\mathbf{B}^\nu |\tilde{0}\rangle = 0$

En este momento cabe observar que de la definición del nuevo vacío se tiene que $|\tilde{0}\rangle$ es eigenestado de los viejos operadores de aniquilación, es decir, se trata de un estado coherente de la base \mathbf{b}^ν .

Para el término correspondiente a las energías de una sólo partícula $[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}]^\Gamma$ se tiene que

$$\langle \tilde{0} | [\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}]_\mu^\Gamma | \tilde{0} \rangle \rightarrow \langle \tilde{0} | [(\mathbf{B}^\dagger + \eta) \otimes (\mathbf{B} + \bar{\eta})]_\mu^\Gamma | \tilde{0} \rangle , \quad (65)$$

pues los términos que contienen un operador de creación, uno de aniquilación o ambos se anulan al aplicarlos al vacío por la derecha o la izquierda. Lo que queda es entonces

$$\langle \tilde{0} | [\eta \otimes \bar{\eta}]_\mu^\Gamma | \tilde{0} \rangle = [\eta \otimes \bar{\eta}]_\mu^\Gamma . \quad (66)$$

Por otro lado, para la interacción del tipo

$$\left[[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}]^\Gamma \otimes [\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}]^\Gamma \right]_0^0 , \quad (67)$$

se tiene que tras realizar la traslación en los operadores fermiónicos y tomar el valor de expectación respecto de $|\tilde{0}\rangle$, uno de los términos que sobrevive es

$$\left[[\eta \otimes \bar{\eta}]^\Gamma \otimes [\eta \otimes \bar{\eta}]^\Gamma \right]_0^0 , \quad (68)$$

pues una vez más los términos que tienen un operador de aniquilación actuando a la derecha, o uno de creación actuando a la izquierda; se anulan.

El otro término que sobrevive, es entonces

$$\langle \tilde{0} | \left[[\eta \otimes \mathbf{B}]^\Gamma \otimes [\mathbf{B}^\dagger \otimes \bar{\eta}]^\Gamma \right]_0^0 | \tilde{0} \rangle = C^\Gamma [\eta \otimes \bar{\eta}]_0^0, \quad (69)$$

donde se ha escrito formalmente el resultado en el lado derecho de la igualdad, introduciendo a C^Γ . Su valor depende del problema particular considerado. Anticonmutar los operadores fermiónicos da origen a un término que es proporcional a un η y a un $\bar{\eta}$ acopladas a cero.

De este modo, el valor de expectación del Hamiltoniano (64) respecto al nuevo vacío resulta tener la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \langle \tilde{0} | \mathbf{H} | \tilde{0} \rangle = & \\ & \sum_{\gamma_1} \epsilon_{\gamma_1} (\eta_{\gamma_1} \cdot \bar{\eta}_{\gamma_1}) + \sum_{\gamma_i} V_{\gamma_i} \left\{ \left[[\eta_{\gamma_1} \otimes \bar{\eta}_{\gamma_2}]^\Gamma \otimes [\eta_{\gamma_3} \otimes \bar{\eta}_{\gamma_4}]^\Gamma \right] + C_{\gamma_i}^\Gamma [\eta_{\gamma_1} \otimes \bar{\eta}_{\gamma_4}]_0^0 \right\} = \\ & \sum_{\gamma_1} \epsilon_{\gamma_1} (a_{\gamma_1} \cdot \bar{a}_{\gamma_1}) + \sum_{\gamma_i} V_{\gamma_i} \left\{ \left[[a_{\gamma_1} \otimes \bar{a}_{\gamma_2}]^\Gamma \otimes [a_{\gamma_3} \otimes \bar{a}_{\gamma_4}]^\Gamma \right] + C_{\gamma_i}^\Gamma [a_{\gamma_1} \otimes \bar{a}_{\gamma_4}]_0^0 \right\}. \quad (70) \end{aligned}$$

Un método variacional es aplicado al valor de expectación anterior, con el fin de minimizar al Hamiltoniano con respecto de las variables a .

Se pueden hacer diversas suposiciones adicionales con el fin de reducir el espacio de variables y con ello el esfuerzo computacional para llevar a cabo la variación. Por ejemplo, es plausible suponer que los parámetros variacionales no dependen de los números cuánticos magnéticos μ , pues de lo contrario el nuevo vacío variacional no sería un escalar en -por mencionar algo-, color y espín.

Se ha demostrado que realizar una traslación en los operadores fermiónicos no presenta ningún problema. Aún cuando la traslación es descrita por variables de Grassmann, en las interacciones siempre aparecen pares de operadores fermiónicos (o potencias de pares). Así sólo aparecen pares de números de Grassman y el valor de expectación de la interacción es mapeado en expresiones que sólo involucran acoplamientos de los tensores a . Luego, el potencial se mapea en una función de dichos parámetros a ser determinados mediante la minimización del valor de expectación del Hamiltoniano en el vacío transformado.

Con ello no hay necesidad de introducir matrices antisimétricas $\eta_i \bar{\eta}_j$ de $n(n-1)/2$ componentes, sino que basta con usar las n componentes del tensor complejo a_i .

5. Plan de trabajo

En la presente sección se enlistan los objetivos a cumplir a manera de calendario de actividades. Esto como parte del proyecto de investigación correspondiente a la tesis de doctorado.

- I) El potencial de interacción derivado del operador de Faddeev-Popov es bastante complicado pero incluye a los gluones en el formalismo de la Teoría Cuántica de Campos, y con ellos el fenómeno de confinamiento. Una posibilidad es reemplazar al término de Faddeev-Popov por un potencial estático y que dependa únicamente de las posiciones de cada una de las densidades de carga interactuantes. En la literatura [15, 16] es muy conocido el potencial fenomenológico $-\frac{a}{r} + br$, el cual cumple las condiciones anteriores además de ser confinante.

Por lo anterior se propone olvidar por un momento la expansión en potencias del campo gluónico del operador Faddeev-Popov. En su lugar se introducirá a los gluones de manera efectiva a través de un potencial de la forma $-\frac{a}{r} + br$. Se requiere entonces calcular a los elementos de matriz V_{γ_i} -como son definidos en la ecuación (64)-, mediante una expansión multipolar de dicho potencial. Con ello se pretende conseguir de forma analítica el valor de las integrales correspondientes a dicha interacción entre densidades de carga de quarks.

- II) Una vez obtenidos los elementos de matriz V_{γ_i} se pretende aplicar los métodos variacionales del artículo [12]. En un principio sólo se ha de aplicar la traslación desarrollada en la Sección 4, pues es más sencilla de manipular matemáticamente y -como ya se mencionó antes-, es más prometedora en la búsqueda de un mínimo para el valor de expectación del Hamiltoniano en el vacío. La variación de los parámetros involucrados en la traslación dará entonces un valor determinado para la energía del estado $|\tilde{0}\rangle$.

III) Una vez obtenido el valor de expectación sobre el nuevo estado base se procede, como ejercicio más fácil, a calcular el valor de expectación del Hamiltoniano con respecto de estados de una partícula o una antipartícula

$$\begin{aligned} |\gamma\mu\rangle &= \mathbf{B}_{\gamma\mu}^\dagger |\tilde{0}\rangle , \\ |\bar{\gamma}\bar{\mu}\rangle &= \mathbf{D}_{\bar{\gamma}\bar{\mu}}^\dagger |\tilde{0}\rangle , \end{aligned} \quad (71)$$

Dicho valor de expectación puede ser calculado de forma directa con el formalismo usual, y de una manera completamente análoga al cálculo sobre el vacío desarrollado en la Subsección 4.1, con la diferencia de la inclusión de algunos términos provenientes de la anticonmutación de los operadores.

Posteriormente se calcula el estado de quark-antiquark en el mismo nivel orbital y acoplados a color cero, es decir,

$$|\Gamma\gamma\mu\rangle = \left[\mathbf{B}_\gamma^\dagger \otimes \mathbf{D}_\mu^\dagger \right]_{\mu}^{\Gamma(00)} |\tilde{0}\rangle . \quad (72)$$

Así pues, las energías sobre estados de una partícula estarán dadas por la aproximación armónica alrededor del nuevo vacío.

Para el caso de una partícula

$$\tilde{\epsilon}_\gamma \approx \langle \gamma\mu | \mathbf{H} | \gamma\mu \rangle - \langle \tilde{0} | \mathbf{H} | \tilde{0} \rangle . \quad (73)$$

O bien, asumiendo que la energía de una partícula es igual a la de su correspondiente antipartícula en el mismo nivel orbital, se tiene que para el caso quark-antiquark acoplados a color cero

$$\tilde{\epsilon}_{\gamma\Gamma} \approx \frac{1}{2} [\langle \Gamma\gamma\mu | \mathbf{H} | \Gamma\gamma\mu \rangle - \langle \tilde{0} | \mathbf{H} | \tilde{0} \rangle] . \quad (74)$$

Con lo anterior, el nuevo Hamiltoniano efectivo se puede escribir entonces como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{eff}} &= \sum_{\gamma} \tilde{\epsilon}_\gamma \mathbf{n}_\gamma , \\ \mathbf{n}_\gamma &= \mathbf{B}_\gamma^\dagger \mathbf{B}_\gamma + \mathbf{D}_\gamma^\dagger \mathbf{D}_\gamma . \end{aligned} \quad (75)$$

Los subíndices γ contienen la información sobre el estado orbital, espín, etc. De lo anterior, además, la forma de obtener los estados excitados es inmediata.

- IV) La información del potencial fenomenológico $-\frac{a}{r} + br$, se pretende utilizar para reintroducir a los gluones de forma dinámica, pues la expansión en campos gluónicas del operador de Faddeev-Popov

$$g^2 \langle a, \mathbf{r} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | a', \mathbf{r}' \rangle = \frac{g^2 \delta^{aa'}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathcal{O}(A) \quad (76)$$

ya es de la forma $V = -\frac{a}{r} + \mathcal{O}(A)$. Ello se puede aprovechar para reescribirle como $V = -\frac{a}{r} + br + (\mathcal{O}(A) - br)$ tal que la diferencia encerrada entre paréntesis pueda ser considerada como una corrección.

Esta forma de proceder tiene la ventaja de que el confinamiento no se ha impuesto fenomenológicamente. Sin embargo, el confinamiento sólo se espera observable tras la inclusión de todos los términos de la expansión en campos gluónicos, lo cual sale del régimen de bajas energías al que se orienta el actual proyecto.

Finalmente, se examinará la factibilidad de aplicar el método desarrollado en [12] para esta interacción dinámica.

5.1. Calendario de actividades

A continuación se muestra una estimación de los tiempos para cada uno de los puntos mostrados al inicio de la presente sección.

- I) Calcular los elementos de matriz V_{γ_i} para un potencial estático fenomenológico de la forma $-\frac{a}{r} + br$.

Tiempo estimado: Medio año.

- II) Aplicar a lo anterior la traslación fermiónica desarrollada en la Sección 4, para luego efectuar una variación de los parámetros introducidos por dicha transformación.

Este paso implica profundizar los conocimientos sobre programación.

Tiempo estimado: Medio año.

- III) Calcular el valor de expectación del Hamiltoniano con respecto de estados de una partícula o una antipartícula.

Posteriormente, calcular el estado de quark-antiquark en el mismo nivel orbital acoplados a color cero.

Tiempo estimado: Medio año.

- IV) Introducir a los gluones de forma dinámica mediante la inclusión del desarrollo en potencias del campo gluónico \mathbf{A} hasta segundo orden.

Examinar la factibilidad de aplicar el método desarrollado en [12] para esta interacción dinámica. De ser viable, aplicar el método variacional.

Durante este periodo se escribirá una versión de la tesis de manera paralela al proyecto de investigación.

Tiempo estimado: Un año.

El tiempo calendarizado da entonces un total de 3 años para finalizar el trabajo doctoral.

6. Conclusiones

A modo de conclusión, en la presente sección se da un breve resumen de los planes a seguir.

Se cuenta con una metodología general de resolución de problema de muchos cuerpos, la cual consiste de una traslación y una rotación [12]. Tales transformaciones mapean a un Hamiltoniano dado a un espacio de parámetros a ser variados en la búsqueda de un mínimo de la energía respecto al vacío de dicho espacio.

La viabilidad del método es primero evaluada en el tratamiento de un potencial fenomenológico $-\frac{a}{r} + br$ al aplicar cada una de las transformaciones por separado y, de ser necesario, ambas a la vez.

La metodología será luego aplicada a una interacción mediada por gluones dinámicos a través de la expansión de la interacción de Coulomb hasta segundo orden en potencias del campo bosónico.

Se espera que el procedimiento de calcular los elementos de matriz V_{γ_i} en ambos casos dé luz a posibles aproximaciones que hagan más sencillo el tratamiento e interpretación física de la interacción fuerte en el régimen de bajas energías.

La ventaja del proyecto doctoral aquí propuesto es que tiene la flexibilidad de adaptar la metodología de resolución dependiendo de lo satisfactoria que esta resulte para cada uno de los problemas a tratar.

Referencias

- [1] T. DeGrand and C. DeTar, **Lattice Methods for Quantum Chromodynamics**, World Scientific (2006).
- [2] C. E. Carlson, T. H. Hansson y C. Peterson, **Meson, baryon, and glueball masses in the MIT bag model**, Phys. Rev. D, 27, 1556-1564, (1983).
- [3] Adnan Bashir, Chang lei, Ian C. Cloët, et. all. **Collective Perspective on Advances in Dyson-Schwinger Equation QCD**, Commun. Theor. Phys. Vol. 58, No. 1 (2012).
- [4] A. P. Szczepaniak, E. S. Swanson, **Coulomb gauge QCD, confinement, and the constituent representation**, Phys. Rev. D 65, 025012 (2001).
- [5] T. Yépez-Martínez, **Un modelo motivado de la Cromodinámica Cuántica a bajas energías para los niveles orbitales S y P**, Tesis de Doctorado, PCF-UNAM (2011).
- [6] A. Amor, **QCD a bajas energías, usando métodos de muchos cuerpos**, Tesis de Licenciatura, FC-UNAM (2011).
- [7] T. Yépez-Martínez, P. O. Hess, **Solvable model for many-quark systems in QCD Hamiltonians**, Phys. Rev. C 81, 045204 (2010).

- [8] P. O. Hess, A. P. Szczepaniak, **Exactly solvable model of low energy QCD**, Phys. Rev. C 73, 025201 (2006).
- [9] T. Yépez-Martínez, P. O. Hess, et. all. **QCD at low energy: A many-body approach**, J. Phys. Conf. Ser., 322, 012016 (2011).
- [10] T. Yépez-Martínez, A. Amor, P. O. Hess, et. all. **Analytic Solutions of QCD motivated Hamiltonians at low energy**, Int. J. Mod. Phys. E 20, 192 (2011).
- [11] O. Civitarese, P. O. Hess, **Modelling the non-perturbative vacuum of QCD**, Int. Jour. Mod. Phys. E 15, 1233, (2006).
- [12] O. Civitarese, P. O. Hess, A. Amor **Generalized variational procedure: An application to non-perturbative QCD**, IJMPE Vol. 22 Issue No. 9 (2013).
- [13] W. Greiner, J. Reinhardt, **Field Quantization**, Springer-Verlag (1996).
- [14] N. H. Christ, T. D. Lee, **Operator ordering and Feynman rules in gauge theories**, Phys. Rev., D 22, 939 (1980).
- [15] F. Halzen, A. D. Martin, **Quarks and Leptons**, John Wiley (1984).
- [16] M. Aygun, O. Bayrak, I. Boztosum, **Solution of the Radial Schrödinger Equation for the Potential Family $V(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} + Cr$ using the Asymptotic Iteration Method**, J. Phys. B, 40, 537 (2007).