

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS DEL FLUJO
ELECTROOSMÓTICO DE UN FLUIDO
NEWTONIANO EN UN MICROCANAL DE
PAREDES ONDULADAS

TESIS PRESENTADA POR FREDY VELÁZQUEZ JIMÉNEZ

PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

Asesor Dr. Federico Méndez Lavielle

2013

Departamento de Termofluidos



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

A mi asesor para este trabajo.

A mis grandes apoyos de toda mi vida.

Índice general

Agradecimientos	2
1. Introducción	7
1.1. Antecedentes	9
2. Formulación matemática	14
2.1. Ecuaciones gobernantes	16
2.1.1. Adimensionalización de las ecuaciones	19
2.2. Metodología de solución	20
2.2.1. Análisis asintótico en el límite de $\beta \rightarrow 0$ y $Re \ll 1$	21
2.2.2. Solución en el límite de $\varepsilon \ll 1$	22
2.2.3. Vorticidad	29
2.2.4. Rapidez de flujo volumétrico	30
3. Análisis de resultados	32
Bibliografía	48

Índice de figuras

1.1. Esquema de la doble capa eléctrica (EDL) que se forma cerca a una superficie sólida cargada negativamente. En este diagrama ψ es el potencial electrocinético, ψ_0 es el potencial eléctrico de la superficie, ζ es el potencial zeta, y y es la distancia medida desde la pared. La longitud de Debye y el espesor de la EDL están representados por λ_D y EDL, respectivamente [4].	8
1.2. Esquema del modelo físico en estudio	9
3.1. Velocidad adimensional, \bar{u}_0 , como función de la coordenada transversal adimensional Y , evaluada en tres coordenadas longitudinales $\chi(= 0,1, 0,2197, 0,5)$. Los parámetros utilizados en esta gráfica son $\bar{\kappa} = 20, \varepsilon = 0,02$ y $n = 1$	33
3.2. Velocidad adimensional, $\bar{v}_{0,1}$ como función de la coordenada longitudinal adimensional χ , evaluada en cuatro coordenadas arbitrarias transversales $Y(= 0,01, 0,1, 0,2, 0,5)$. Los parámetros utilizados en esta gráfica son $\bar{\kappa} = 20, \varepsilon = 0,02$ y $n = 1$	35
3.3. Distribución de la presión adimensional P como función de la coordenada adimensional χ , para $\varepsilon = 0,02, \bar{\kappa} = 20$ y $n = 1$	36
3.4. Velocidad adimensional, \bar{u}_0 como función de la coordenada transversal adimensional Y , evaluada en tres coordenadas longitudinales $\chi(= 0,1, 0,5, 0,8)$. Los parámetros utilizados en esta gráfica son $\bar{\kappa} = 20, \varepsilon = 0,02$ y $n = 2$	37

3.5. Velocidad adimensional, $\bar{v}_{0,1}$ como función de la coordenada longitudinal adimensional χ , evaluada en cuatro coordenadas arbitrarias transversales $Y (= 0,01, 0,1, 0,2, 0,5)$. Los parámetros utilizados en esta gráfica son $\bar{\kappa} = 20, \varepsilon = 0,02$ y $n = 2$	39
3.6. Distribución de la presión adimensional como función de la coordenada adimensional χ , para tres diferentes valores del parámetro $\bar{\kappa} = 20, \varepsilon = 0,02$ y $n = 2$	40
3.7. Rapidez de flujo volumétrico adimensional como función de n , para dos valores de $\varepsilon (= 0,01, 0,05)$ y $\bar{\kappa} = 20$. En esta gráfica se han graficado valores impares de n	41
3.8. Rapidez de flujo volumétrico adimensional como función de ε con $n = 1$ y $\bar{\kappa} = 20$	42
3.9. Campos de vorticidad para $\varepsilon = 0,02, \bar{\kappa} = 20$ y $n = 1$	43
3.10. Campos de vorticidad para $\varepsilon = 0,02, \bar{\kappa} = 20$ y $n = 2$	44
3.11. Campos de vorticidad para $\varepsilon = 0,04, \bar{\kappa} = 20$ y $n = 2$	45
3.12. Campos de vorticidad para $\varepsilon = 0,04, \bar{\kappa} = 20$ y $n = 3$	46

Índice de cuadros

1.1. Parámetros físicos y electroquímicos usados en fenómenos electrocinéticos.	11
2.1. Propiedades de transporte y parámetros geométricos utilizados para estimar los parámetros adimensionales usados en este trabajo	21

Capítulo 1

Introducción

El flujo Electrosmótico (EOF, por sus siglas en inglés) o Electroósmosis, el cual fue reportado por F. F. Reuss en 1809, en un artículo titulado “Sur un novel effet de lé électricité galvanique” el cual apareció en *Proceedings of the Imperial Society of Naturalists of Moscow* [15]. En ese trabajo, Reuss demostró que el agua podrá percolar a través de un medio poroso mediante la aplicación de un campo eléctrico. No obstante el nombre, el mecanismo actuador de este fenómeno no está relacionado con la ósmosis, la cual consiste en el flujo de agua a través de una membrana semipermeable, y originado por un gradiente de concentración de un soluto. En lugar de esto, el mecanismo de la movilidad del agua es como sigue. Partículas de arcilla y otros materiales silicatos, tales como vidrio o silicio, adquieren una carga de superficie cuando se ponen en contacto con un electrolito tal como el agua, lo anterior debido a la disociación química de grupos iónicos de superficie. La cantidad de esta carga de superficie se determina por varios factores pero un valor típico para interfaces sílice-agua se encuentra en el rango de -4 a -60 mili-Coulomb (mC) por metro cuadrado. Esas cargas fijas sobre el sustrato atraen las cargas libres en la solución de signo contrario y repelen aquellas del mismo signo (las cargas libres en la solución son productos de disociación iónica de la molécula del agua por sí misma, así como iones de sal contenidos, aún, en agua pura). Lo anterior resulta en la formación de una región cargada delgada en el soluto que se encuentra en contacto con la superficie, la cual se conoce como *capa de Debye* o *doble capa eléctrica* (EDL, por sus siglas en inglés) (ver Fig. 1.1).

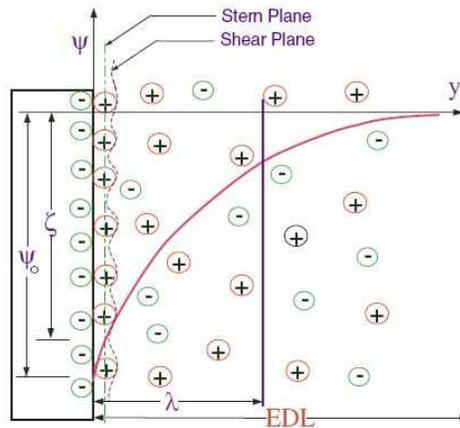


Figura 1.1: Esquema de la doble capa eléctrica (EDL) que se forma cerca de una superficie sólida cargada negativamente. En este diagrama ψ es el potencial electrocinético, ψ_0 es el potencial eléctrico de la superficie, ζ es el potencial zeta, y y es la distancia medida desde la pared. La longitud de Debye y el espesor de la EDL están representados por λ_D y EDL, respectivamente [4].

En la presencia de un campo eléctrico externo, el fluido en esta capa de Debye experimenta una fuerza de cuerpo y por lo tanto adquiere momentum, el cual se transmite a capas adyacentes de fluido debido a la viscosidad. Evidentemente el efecto causa un movimiento relativo entre el soluto y el substrato, ésto puede significar un flujo de líquido resultante (si la fase sólida es inmóvil) o el transporte de partículas (si la fase líquida es inmóvil) o el movimiento de ambas fases. La Fig. 1.2 ilustra este mecanismo. Un número de efectos físicos se encuentran muy relacionados a EOF los cuales de manera colectiva se les conoce como “efectos electrocinéticos”. Estos mecanismos son los siguientes:

1. Electro-ósmosis: es el movimiento de un líquido ionizado relativo a una superficie cargada y estacionaria, mediante la aplicación de un campo eléctrico.
2. Electroforesis: es el movimiento de superficies cargadas y macromoléculas relativo a un líquido en reposo mediante la aplicación de un campo eléctrico.
3. Potencial de corriente: es el campo eléctrico que se genera por el movimiento de un fluido ionizado a lo largo de una superficie cargada y estacionaria.

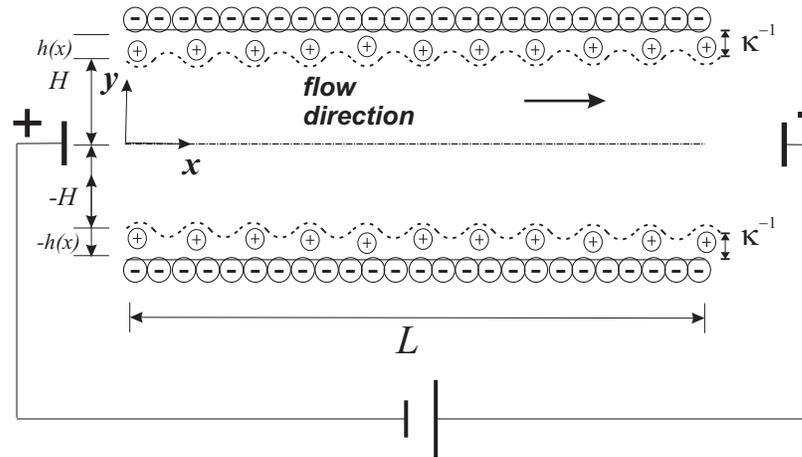


Figura 1.2: Esquema del modelo físico en estudio

- Potencial de sedimentación: es el campo eléctrico que se crea por el movimiento de partículas cargadas relativo a un líquido estacionario.

En la bibliografía especializada se puede consultar mayor información relacionada con los efectos mencionados [4, 8, 13, 19].

1.1. Antecedentes

Una de las primeras aplicaciones de EOF fué en la Ingeniería Civil, como un método para secar suelos. La aplicación de un campo eléctrico fuerte a un medio poroso, tal como arcilla, permite la extracción de agua por electro-ósmosis [12]. El flujo de agua accionado eléctricamente también se puede usar para limpiar de contaminantes suelos o en la desalinación de agua salada [14]. Estas primeras aplicaciones han sido el origen de aplicaciones modernas en el campo de la microfluídica.

La microfluídica es la ciencia de la manipulación de fluidos en escalas espaciales que se encuentran entre uno y cientos de micrómetros. El desarrollo tan rápido en la tecnología de la microfabricación han habilitado una gran variedad de sistemas microfluidicos que consisten de válvulas, bombas y mezcladores para que sean utilizados en aplicaciones medicas, farmaceuticas y monitoreo del medio ambiente. Entre los ejemplos que se pueden citar de este tipo de aplicaciones se encuentran la administracin de fármacos, análisis de DNA, sistemas de secuenciación y sensores

de detección de agentes químicos y biológicos en microchips. La fiabilidad y cumplimiento de esos componentes son importantes para el diseño exitoso y operación del sistema microfluidico completo. En particular, los subsistemas como microválvulas y microbombas con componentes móviles son complicados para diseñar y fabricar, y adicionalmente son propensos a fallar mecánicamente debido a la fatiga y a defectos de fabricación.

Otros aspectos importantes que se pueden mencionar relacionados con los efectos electrocinéticos para el transporte en escalas micrométricas son que éstos habilitan el bombeo de fluidos y controlan el flujo utilizando campos eléctricos, eliminando la necesidad de bombas mecánicas o válvulas con componentes móviles. Además, una comparación entre flujos originados de manera electrosmótica y por gradientes de presión revela diferencias importantes. Primeramente, el flujo volumétrico (por unidad de profundidad del canal) en flujos electrosmóticos varía linealmente con la altura del canal, lo que permite obtener rapidez de flujo en microcanales aplicando campos eléctricos bajos. Sin embargo, en el caso de flujos ocasionados por gradientes de presión varía como el cubo de la altura del canal. Ésto requeriría caídas de presión muy grandes y no realistas, de tal manera que los flujos originados por gradientes de presión sean impracticos en aplicaciones de conductos de escalas micrométricas. Segundo, los perfiles de velocidad para flujos electrosmóticos son (en su mayoría) uniformes (tipo tapón), mientras que los originados por gradientes de presión son parabólicos. Esta diferencia tiene efectos significantes en el transporte de especies y dispersión en aplicaciones microfluídicas. Algunas condiciones físicas y electroquímicas que se utilizan en flujos electrocinéticos se muestran en el cuadro 1.1 [4].

Un aspecto importante relacionado con la aplicación de flujos electrocinéticos se encuentra en el mezclado de fluidos en dispositivos de escalas micrométricas utilizando biochips. Por lo tanto, existe el requerimiento para realizar esquemas de mezclado que sean capaces de lograr un efecto de mezclado rápido con el fin de mejorar el tiempo de respuesta de dichos dispositivos.

Los primeros microchips se diseñaron con configuraciones de microcanales rectos; sin embargo, en tales sistemas el flujo del fluido está restringido al régimen de bajos números de Reynolds, i.e., flujo laminar, y de aquí que el mezclado de especies ocurra primeramente como un resultado de la difusión. Consecuentemente, el mezclado de

Parámetro	Rango del parámetro
Espesor típico de microcanales, $h(\mu\text{m})$	0.01 ~ 300
Concentración del electrolito, $n_0(\text{mM})$	10 ~ 0.001
Longitud de DEbye, $\lambda_D(\text{nm})$	1 ~ 100
Potencial Zeta, ζ (mV)	$\pm 1 \sim \pm 100$
Campor eléctrico, \mathbf{E} (V/mm)	1 ~ 100
Velocidad electroosmótica, U (mm/s)	< 2
Número de Reynolds, Re	$10^{-4} \sim 1$

Cuadro 1.1: Parámetros físicos y electroquímicos usados en fenómenos electrocinéticos.

especies es lento, y requeriría un canal muy largo. Por lo anterior, muchos investigadores han propuesto esquemas de micro-mezclado para mejorar la eficiencia de dispositivos microfluídicos.

En un sentido general, los micro-mezcladores se pueden clasificar como activos o pasivos, dependiendo de la estrategia de mezclado que se utilice. Típicamente los mezcladores activos aplican una fuerza actuadora externa o usan componentes mecánicos externos para aplicar perturbaciones periódicas o aperiódicas a los fluidos en el microcanal. Lee et al. [10] desarrollaron un mezclador activo en el cual se generó un efecto de mezclado caótico mediante la aplicación de perturbaciones de presión periódicas. Green et al. [6] desarrollaron un dispositivo experimental para examinar las características de EOF inducido por campos eléctricos no uniformes. Por su parte, Dutta y Beskok [3] determinaron soluciones analíticas de flujos electroosmóticos periódicos en canales rectos bidimensionales.

Los micromezcladores pasivos emplean configuraciones geométricas específicas de microcanales para incrementar el área de contacto interfacial entre las especies que se mezclan. Stroock et al. [17] presentaron un método pasivo para el mezclado de flujos 2D, estacionarios, originados por gradientes de presión, a bajos números de Reynolds, en microcanales los cuales contenían ranuras en su superficie interna. ellos demostraron que las ranuras indujeron circulaciones helicoidales en el fluido y lograron un mejoramiento importante en el rendimiento del mezclado. Chen y Cho [2] investigaron las características de mezclado de flujos electrocinéticos en microcanales con diferentes configuraciones de ondulaciones de la superficie. Ellos realizaron

simulaciones numéricas para analizar la influencia de la amplitud de onda y la longitud de la ondulación sobre la eficiencia del mezclado. Adicionalmente, en ese trabajo demostraron que la inclusión de patrones heterogéneos de carga sobre la superficie del microcanal mejoraba la eficiencia del mezclado. Por su parte, Hendy et al. [7] consideraron el flujo de un fluido newtoniano en micro y nanocanales con paredes que tienen patrones de deslizamiento en la pared. Ellos demostraron que se pueden utilizar patrones de la mojabilidad de la superficie para inducir trayectorias complejas en el flujo. Stroock et al. [18] cuantificaron la influencia de la anisotropía de ranuras en las paredes de un microcanal con flujos ocasionados por gradientes de presión, demostrando que se desarrollan componentes transversales de la velocidad. Este patrón de flujo da origen a trayectorias de recirculación helicoidales. Yang y Liu [21] estudiaron el EOF en un microcanal de placas paralelas con rugosidad sinusoidal. Las ecuaciones que describen el EOF se resolvieron mediante el método de elemento finito. En su trabajo demostraron que la rapidez de flujo volumétrico decrece lentamente con la altura de la rugosidad cuando la rugosidad relativa es muy pequeña ($\bar{\kappa} = \varepsilon/H < 0,05$) o muy grande ($\bar{\kappa} > 0,05$), decreciendo rápidamente cuando la rugosidad relativa es moderada ($0,05 \geq \bar{\kappa} \geq 0,005$). En los trabajos citados anteriormente, para llevar a cabo la solución y el análisis correspondiente, se han utilizado en su mayoría técnicas numéricas de solución. Es por ello que en el presente trabajo se estudia teóricamente el EOF en un microcanal de placas paralelas cuyas paredes tienen ondulaciones, en el que se determinan de manera semi-analítica las principales características del flujo. Aunque este tipo de configuración geométrica se podría utilizar como un método para realizar un mezclado, es preciso resaltar que en este trabajo se tiene como objetivo principal la implementación de un método matemático, llamado *método de perturbación de dominio* [9], que permite resolver problemas en que el dominio a estudiar tiene geometrías relativamente complejas. Como parte de la solución se determina de manera analítica el campo de flujo, como función de los parámetros involucrados en el análisis.

El análisis que se lleva a cabo en esta tesis proporciona una excelente concordancia con simulaciones numéricas directas de las ecuaciones gobernantes, las cuales muy costosas hablando en un sentido computacional. El modelo teórico que se desarrolla es capaz de predecir tendencias generales en los datos y en muchos de los aspectos

del campo de flujo en EOF en microcanales de placas paralelas con ondulaciones.

Capítulo 2

Formulación matemática

En la Fig. (1.2) se muestra el esquema del modelo físico en estudio. El sistema es un microcanal de longitud L ; el área de la sección transversal del microcanal varía periódicamente en la dirección del flujo. En este caso, por conveniencia, se designa la dirección del flujo como x , la dirección transversal como y , y las correspondientes componentes de la velocidad como u , z . El campo de flujo será 2D. Por lo tanto la componente de la velocidad en la dirección z es cero, y no existen gradientes en esta última dirección.

Por otro lado, el flujo no es unidireccional, excepto en el límite de $\varepsilon = 0$. Debido a que el fluido es incompresible, la componente de la velocidad en la dirección x se debe incrementar y decrecer conforme la sección transversal del microcanal decrece y crece, respectivamente, para preservar un flujo volumétrico constante (conservación de la masa). En este trabajo se asume que las paredes del microcanal se localizan en:

$$y = \pm H \left[1 + \varepsilon \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad (2.1)$$

siendo ε la amplitud de la ondulación de la pared del microcanal. Las ondulaciones se pueden deber a la rugosidad inherente de fabricación, provocadas intencionalmente, con la finalidad de incrementar el área de la superficie de la doble capa eléctrica. El interés primario es estudiar los efectos de las ondulaciones en el EOF en un microcanal: en particular, si el flujo se puede incrementar al alterar los parámetros con las ondulaciones en un microcanal.

De acuerdo con aplicaciones típicas de flujos electro-osmóticos, $L \gg H$. Para el

análisis se establece un sistema coordenado Cartesiano (x, y) , adoptando el origen en la entrada del micro-canal, y el eje x a lo largo del plano de simetría del mismo. El flujo del fluido se debe exclusivamente a los efectos de las fuerzas electroosmóticas causadas por un campo eléctrico de intensidad E_0 en la dirección axial, dado por $E_0 = \varphi_0/L$, donde φ_0 es el valor del potencial eléctrico impuesto en la entrada del micro-canal. El micro-canal se encuentra fijo en sus extremos por dos depósitos de líquido a temperatura constante T_0 y a la misma presión P_0 [20].

Se hacen las siguientes suposiciones:

- El flujo es laminar y el número de Reynolds, correspondiente al flujo, definido más adelante, es muy pequeño comparado con la unidad ($Re \ll 1$).
- La carga en la EDL sigue la distribución de Boltzman, y el voltaje externo es significativamente más grande que el flujo potencial inducido.
- El potencial en la pared es lo suficientemente pequeño ($e\zeta/k_{BT} \ll 1$, típicamente $\zeta < 25mV$, donde e , es la carga elemental de la solución del electrolito y k_B es la constante de Boltzman) por lo que se hace válida la linealización de Debye-Hückel; de lo contrario se debe considerar el límite de potenciales zeta grandes.
- El campo eléctrico que se aplica externamente es débil, esto es, $\varphi_0/L \ll \zeta/\lambda_D$, donde φ_0 y λ_D son el el potencial eléctrico en la entrada del micro-canal y la longitud de Debye, respectivamente; esta suposición implica que el campo eléctrico aplicado distorsiona la estructura de la EDL de manera insignificante [16].
- El fluido es una solución electrolítica simétrica.
- Las propiedades del fluido son constantes.
- El potencial zeta (ζ) en la superficie del microcanal es invariante axialmente.

2.1. Ecuaciones gobernantes

Las ecuaciones de gobierno fundamentales, en estado estacionario, que describen el flujo electroosmótico son la ecuación de continuidad y cantidad de movimiento, dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

$$\rho_f \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho_e E_x, \quad (2.3)$$

$$\rho_f \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_e E_y. \quad (2.4)$$

En las Ecs. (2.2)-(2.4) u y v representan las componentes de la velocidad axial y transversal del fluido, respectivamente; p es la presión hidrodinámica. ρ_f y ρ_e son la densidad del fluido y la densidad neta de carga eléctrica de la solución electrolítica, respectivamente. Adicionalmente, debido a que $\partial u/\partial x$ es diferente de cero, $\partial v/\partial y$ debe también ser diferente de cero para satisfacer la ecuación de continuidad, y la componente de la velocidad en la dirección ortogonal (v) debe ser diferente de cero. E_x y E_y representan la intensidad de campo eléctrico en la dirección x , y , los cuales se determinan a partir de las siguientes ecuaciones:

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.5)$$

y

$$E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (2.6)$$

De acuerdo con la teoría electrostática, el potencial eléctrico por la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (2.7)$$

donde ϵ es la permitividad dieléctrica del fluido. Dado que el campo eléctrico que se aplica externamente es débil, es decir, que $\Delta\phi/L \ll \zeta/\lambda_D$, donde $\Delta\phi$ es la diferencia

de potencial del campo eléctrico aplicado, la distribución de carga es esencialmente independiente del campo eléctrico externo y se determina del potencial ζ en la pared. Es razonable suponer que el potencial eléctrico, Φ , se puede representar por la superposición lineal del potencial de la EDL y el potencial externo aplicado, lo cual es válido para microcanales largos, de tal manera que sin considerar cualquier efecto de los extremos del micro-canal, se puede escribir $\Phi(x, y) = \psi(x, y) + \phi(x)$; en la ecuación anterior, el primer término del lado derecho se ha supuesto como una función de ambas coordenadas, (x, y) , debido a la ondulación de la pared. Por lo tanto, la Ec. (2.7) se puede describir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (2.8)$$

donde la densidad de carga, para un electrolito simétrico, está dada por $\rho_e = -2zen_\infty \sinh(ze\psi/k_B T)$. La Ec. (2.8) es la ecuación de Poisson-Boltzmann, que define el potencial $\psi(x, y)$ en la doble capa eléctrica en el microcanal. En este trabajo, para simplificar el análisis, se considera que $ze\psi/k_B T \ll 1$, de tal manera que $\sinh(ze\psi/k_B T) \approx ze\psi/k_B T$. Dicha linealización se le conoce como la aproximación de Debye-Hückel. Por otra parte, para un microcanal largo $L \gg H$, el término $\partial^2 \Phi / \partial x^2$ se puede despreciar [11]. Bajo las consideraciones previamente señaladas, la Ec. (2.8) se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \kappa^2 \psi. \quad (2.9)$$

En la Ec. (2.9), κ define el inverso del espesor de la doble capa eléctrica (o inverso de la longitud de Debye), dado por

$$\kappa = \left(\frac{2n_\infty z^2 e^2}{\epsilon k_B T} \right)^{1/2}, \quad (2.10)$$

siendo n_∞ , z , e , k_B y T la concentración iónica en la solución, la valencia de la solución electrolítica, la carga elemental, la constante de Boltzmann y la temperatura absoluta (considerada la temperatura ambiente en este trabajo), respectivamente.

Las condiciones de frontera de la Ec. (2.8) son:

$$\text{en } y = 0 : \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

y

$$\text{en } y = h(x) : \quad \psi(y = H) = \zeta. \quad (2.12)$$

Por otro lado, si se define $p' = p - \epsilon\kappa^2\psi^2/2$ [1], las ecuaciones de cantidad de movimiento (2.3) y (2.4) se transforman en:

$$\rho_f \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \epsilon\kappa^2\psi E_x, \quad (2.13)$$

$$\rho_f \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.14)$$

de donde se puede observar que la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x , Ec. (2.13), es invariante mediante la transformación realizada en la variable p .

Las condiciones de frontera asociadas a las Ecs. (2.2), (2.13) y (2.14) están dadas por:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \text{en } y = \pm h(x) = \pm H \left[1 + \varepsilon \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]. \quad (2.15)$$

Aquí \mathbf{n} y \mathbf{t} son vectores normal y tangente a las paredes del microcanal. Debido a que las componentes de la velocidad normal y tangencial son cero, ésto último es equivalente a:

$$u = v = 0 \quad \text{en } y = \pm h(x) = \pm H \left[1 + \varepsilon \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]. \quad (2.16)$$

En el plano de simetría del microcanal ($x, y = 0$), se establece la condición

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.17)$$

Otras condición que se debe satisfacer es que la presión a la entrada y salida del microcanal es la misma, es decir:

$$p(x = 0, y) = p(x = L, y) = p_0. \quad (2.18)$$

Como una consecuencia de las variaciones en la altura del microcanal con x , el fluido se debe acelerar y desacelerar, y por lo tanto el gradiente de presión será una función de la posición.

Las condiciones de frontera (2.16) reflejan la condición de no deslizamiento hidrodinámico y de impermeabilidad en la pared. La condición (2.17) representa la simetría del campo de velocidad en el plano intermedio del micro-canal. Aquí se considera que no se aplica un gradiente de presión entre los extremos del micro-canal, condición (2.18), lo que corresponde a un flujo puramente electro-osmótico.

2.1.1. Adimensionalización de las ecuaciones

Las ecuaciones gobernantes que describen el flujo electroosmótico en un micro-canal de paredes onduladas se adimensionalizan mediante las siguientes variables adimensionales:

$$\chi = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_{HS}}, \quad \bar{v} = \frac{vL}{U_{HS}H}, \quad P = \frac{(p' - p'_0)H^2}{\mu U_{HS}L}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\zeta} \quad (2.19)$$

donde U_{HS} es la velocidad electroosmótica de Helmholtz-Smoluchowski, definida como $U_{HS} = -\epsilon\zeta E_0/\mu$ [13]. En términos de las variables adimensionales establecidas en (2.19), las ecuaciones gobernantes (2.2), (2.10), (2.13) y (2.14), junto con las correspondientes condiciones de frontera (2.15)-(2.18), se transforman en:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} = 0, \quad (2.20)$$

$$\beta Re \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \chi} + \beta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} + \bar{\kappa}^2 \bar{\psi}, \quad (2.21)$$

$$\beta^3 Re \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} + \beta^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} + \beta \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Y^2}, \quad (2.22)$$

y

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} = \bar{\kappa}^2 \bar{\psi}. \quad (2.23)$$

En las ecuaciones anteriores (2.20)-(2.22), $Re = \rho_f U_{HS} H / \mu$ es el número de Reynolds, $\beta = H/L$, $\bar{\kappa} = \kappa H$. Como es sabido, el número de Reynolds representa una medida de la importancia relativa de los términos de la inercia o aceleración con respecto a los términos viscosos en las ecuaciones de Navier-Stokes. En el análisis subsecuente, y de acuerdo a aplicaciones típicas de los flujos electroosmóticos (ver

Tabla 1), se considera que ambos parámetros, Re y β son mucho menores que la unidad. En este contexto, se considera que Re es pequeño aun comparado con el parámetro de amplitud geométrica ε , este último supuesto también pequeño, $\varepsilon \ll 1$, lo que significa que los términos inerciales se pueden despreciar y que el flujo es dominado por fuerzas eléctricas, viscosas y de presión.

Las condiciones de frontera adimensionales asociadas a las ecuaciones (2.20)-(2.23) son:

$$\text{en } Y = \bar{h}(\chi) = 1 + \varepsilon \sin(n\pi\chi) : \bar{u} = \bar{v} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\psi} = 1, \quad (2.24)$$

$$\text{en } Y = 0 : \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} = 0, \quad (2.25)$$

y

$$P = 0 \quad \text{en } \chi = 0, 1. \quad (2.26)$$

2.2. Metodología de solución

En esta sección se realiza un análisis asintótico del sistema de ecuaciones (2.20)-(2.23), considerando que en la formulación matemática están presentes varios parámetros adimensionales, β , Re y ε , los cuales son muy pequeños comparados con la unidad, como se puede inferir a partir de los valores de los parámetros que se muestran en la Tabla 2. En 2.2.1 se obtendrá, mediante la aproximación de la teoría de la lubricación, expresiones simplificadas de las ecuaciones que describen la hidrodinámica de este EOF.

Para resolver el sistema de ecuaciones que gobierna el flujo electrosmótico, se hará uso de un método de perturbación regular, denominado *método de perturbación de dominio* [9]. Este método aplica a problemas en los cuales la geometría del flujo o dominio de transporte es complicado e irregular en el sentido de que las fronteras no corresponden a sistemas de coordenadas conocidos, pero que son cercanas a tales sistemas coordenados.

El método de perturbación de dominio proporciona una forma aproximada para resolver el problema planteado para valores de $\varepsilon \ll 1$. *La idea básica es reemplazar*

<i>Parameter</i>	<i>Value</i>	<i>Unit</i>
E_0	$\sim 10^3$	V/m
H	50-200	μm
L	$\sim 10^{-2}$	m
ζ	$\sim 10^{-2}$	V
μ	1,002	mPa s
λ_D	1-10	nm
ρ	$\sim 10^3$	kg/m ³

Cuadro 2.1: Propiedades de transporte y parámetros geométricos utilizados para estimar los parámetros adimensionales usados en este trabajo

la condición de frontera exacta, (2.24), con una condición de frontera aproximada que sea asintóticamente equivalente para $\varepsilon \ll 1$ pero ahora aplicada en la superficie coordenada $Y = 1$. El método de perturbaciones de dominio conduce a expansiones de perturbación regular en el parámetro pequeño ε .

2.2.1. Análisis asintótico en el límite de $\beta \rightarrow 0$ y $Re \ll 1$.

La forma adimensional de las ecuaciones de cantidad de movimiento enfatizan la presencia de dos parámetros adimensionales, β y Re . En este análisis conviene suponer que Re es fijo e independiente de β , y por lo tanto, $\beta Re \rightarrow 0$ conforme $\beta \rightarrow 0$. En el límite de la teoría de la lubricación, involucra despreciar términos de $O(\beta)$ y $O(\beta^2)$ en los términos viscosos, y aquellos de $O(\beta Re)$ y $O(\beta^2 Re)$ que multiplican a los términos inerciales en las ecuaciones (2.21) y (2.22). Por lo tanto, proponiendo las siguientes expansiones asintóticas para las variables \bar{u} , \bar{v} y P de la forma

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + O(\beta, \beta Re) + \dots, \tag{2.27}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + O(\beta, \beta Re) + \dots, \tag{2.28}$$

$$P = P_0 + O(\beta, \beta Re) + \dots. \tag{2.29}$$

Por lo tanto, las ecuaciones que describen el campo del flujo, hasta términos de orden cero, en el límite de $\beta \rightarrow 0$ y $\beta Re \rightarrow 0$, Ecs. (2.20)-(2.22), se pueden reescribir

como

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial Y} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{dP_0}{d\chi} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} + \bar{\kappa}^2 \bar{\psi}, \quad (2.31)$$

y

$$\frac{\partial P_0}{\partial Y} \sim 0. \quad (2.32)$$

De la Ec. (2.32), se observa que P_0 depende únicamente de la coordenada χ , por lo que el problema hidrodinámico se reduce a determinar la solución de las Ecs. (2.30) y (2.31), las cuales son conocidas como *las ecuaciones de la lubricación*, y son semejantes a las correspondientes para flujo unidireccional. Sin embargo, en este caso, debido a las variaciones de la sección transversal del microcanal, \bar{u}_0 puede ser función de la coordenada adimensional χ y \bar{v}_0 no será cero en general. Además, debido a que \bar{u}_0 es una función de χ , entonces P_0 también lo es.

2.2.2. Solución en el límite de $\varepsilon \ll 1$

En esta sección se busca una solución para el caso límite de $\varepsilon \ll 1$ por medio de expansiones asintóticas de la forma

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_{0,0} + \varepsilon \bar{u}_{0,1} + \dots, \quad (2.33)$$

$$\bar{v}_0 = \bar{v}_{0,0} + \varepsilon \bar{v}_{0,1} + \dots, \quad (2.34)$$

$$P_0 = P_{0,0} + \varepsilon P_{0,1} + \dots, \quad (2.35)$$

y

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_0 + \varepsilon \bar{\psi}_1 + \dots, \quad (2.36)$$

Sustituyendo las expansiones (2.33), (2.34) y (2.35) en las ecuaciones de continuidad (Ec. (2.30)), cantidad de movimiento (Ec. (2.31)) y del potencial eléctrico (Ec. (2.8b)), se tiene:

$$\frac{\partial \bar{u}_{0,0}}{\partial \chi} + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_{0,1}}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_{0,2}}{\partial \chi} + \dots + \frac{\partial \bar{v}_{0,0}}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial \bar{v}_{0,1}}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}_{0,2}}{\partial Y} + \dots = 0, \quad (2.37)$$

$$0 = -\frac{dP_{0,0}}{d\chi} - \varepsilon \frac{dP_{0,1}}{d\chi} - \varepsilon^2 \frac{dP_{0,2}}{d\chi} + \frac{\partial^2 \bar{u}_{0,0}}{\partial Y^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{u}_{0,1}}{\partial Y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_{0,2}}{\partial Y^2} + \bar{\kappa}^2 (\bar{\psi}_0 + \varepsilon \bar{\psi}_1 + \dots) \quad (2.38)$$

y

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial Y^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial Y^2} + \dots = \bar{\kappa}^2 (\bar{\psi}_0 + \varepsilon \bar{\psi}_1 + \dots), \quad (2.39)$$

respectivamente.

Se debe notar que en las Ecs. (2.37) y (2.38) los términos $\partial \bar{v}_{0,0}/\partial Y$ y $dP_{0,0}/d\chi$ deben ser cero, ya que para $\varepsilon = 0$ se tiene el caso de un microcanal de placas planas, y por lo tanto, el flujo correspondería al caso hidrodinámicamente desarrollado.

Para este caso límite, las condiciones de frontera (2.24) se aproximan en términos de condiciones de frontera asintóticamente equivalentes aplicadas en $\pm Y = 1$. Lo anterior se realiza mediante una aproximación en series de Taylor para \bar{u}_0 y \bar{v}_0 y $\bar{\psi}$ en $Y = \bar{h}(\chi)$ alrededor de $Y = 1$. Esto es:

$$\bar{u}_0|_{Y=\bar{h}(\chi)} = \bar{u}_0|_{Y=1} + \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial Y} \Big|_{Y=1} (Y-1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial Y^2} \Big|_{Y=1} (Y-1)^2 + O(\varepsilon^3). \quad (2.40)$$

Tomando en cuenta que $Y-1 = \varepsilon \sin(n\pi\chi)$ y que $\bar{u}_0 = 0$ en la superficie del microcanal, la ecuación anterior se transforma en

$$0 = \bar{u}_0|_{Y=1} + \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial Y} \Big|_{Y=1} [\varepsilon \sin(n\pi\chi)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial Y^2} \Big|_{Y=1} [\varepsilon^2 \sin^2(n\pi\chi)] + O(\varepsilon^3). \quad (2.41)$$

De manera equivalente, para la componente de la velocidad \bar{v} , se tiene:

$$\bar{v}|_{Y=\bar{h}(\chi)} = \bar{v}|_{Y=1} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \Big|_{Y=1} (Y-1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Y^2} \Big|_{Y=1} (Y-1)^2 + O(\varepsilon^3). \quad (2.42)$$

Aplicando la condición de frontera $\bar{v}_0 = 0$ en $Y = \bar{h}(\chi)$ a la Ec. (2.40), se obtiene:

$$0 = \bar{v}_0|_{Y=1} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial Y} \Big|_{Y=1} [\varepsilon \sin(n\pi\chi)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial Y^2} \Big|_{Y=1} [\varepsilon^2 \sin^2(n\pi\chi)] + O(\varepsilon^3). \quad (2.43)$$

De igual forma, considerando la condición de frontera adimensional para el potencial eléctrico en la superficie del microcanal, para la variable $\bar{\psi}$ se tiene que:

$$1 = \bar{\psi}|_{Y=\bar{h}(\chi)} = \bar{\psi}_{Y=1} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \Big|_{Y=1} (Y-1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} \Big|_{Y=1} (Y-1)^2 + O(\varepsilon^3). \quad (2.44)$$

De las Ecs. (2.40), (2.42) y (2.44) se obtienen las condiciones de frontera que son asintóticamente equivalentes a \bar{u}_0 y \bar{v}_0 y $\bar{\psi}$ en $Y = \bar{h}(\chi)$. Sustituyendo las expansiones (2.33)-(2.36) en las ecuaciones mencionadas anteriormente, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = \bar{u}_0|_{Y=\bar{h}(\chi)} &= (\bar{u}_{0,0} + \varepsilon \bar{u}_{0,1} + \varepsilon^2 \bar{u}_{0,2}) \Big|_{Y=1} \\ &+ \frac{\partial (\bar{u}_{0,0} + \varepsilon \bar{u}_{0,1} + \varepsilon^2 \bar{u}_{0,2})}{\partial Y} \Big|_{Y=1} [\varepsilon \sin(n\pi\chi)] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\bar{u}_{0,0} + \varepsilon \bar{u}_{0,1} + \varepsilon^2 \bar{u}_{0,2})}{\partial Y^2} \Big|_{Y=1} [\varepsilon^2 \sin^2(n\pi\chi)] + \dots \end{aligned} \quad (2.45)$$

y

$$\begin{aligned} 0 = \bar{v}|_{Y=\bar{h}(\chi)} &= (\bar{v}_{0,0} + \varepsilon \bar{v}_{0,1} + \varepsilon^2 \bar{v}_{0,2}) \Big|_{Y=1} \\ &+ \frac{\partial (\bar{v}_{0,0} + \varepsilon \bar{v}_{0,1} + \varepsilon^2 \bar{v}_{0,2})}{\partial Y} \Big|_{Y=1} [\varepsilon \sin(n\pi\chi)] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\bar{v}_{0,0} + \varepsilon \bar{v}_{0,1} + \varepsilon^2 \bar{v}_{0,2})}{\partial Y^2} \Big|_{Y=1} [\varepsilon^2 \sin^2(n\pi\chi)] + \dots, \end{aligned} \quad (2.46)$$

y

$$\begin{aligned} 1 = \bar{\psi}|_{Y=\bar{h}(\chi)} &= (\bar{\psi}_0 + \varepsilon \bar{\psi}_1 + \varepsilon^2 \bar{\psi}_2) \Big|_{Y=1} \\ &+ \frac{\partial (\bar{\psi}_0 + \varepsilon \bar{\psi}_1 + \varepsilon^2 \bar{\psi}_2)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} [\varepsilon \sin(n\pi\chi)] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\bar{\psi}_0 + \varepsilon \bar{\psi}_1 + \varepsilon^2 \bar{\psi}_2)}{\partial Y^2} \Big|_{Y=1} [\varepsilon^2 \sin^2(n\pi\chi)] + \dots, \end{aligned} \quad (2.47)$$

Debido a que ε es un parámetro pequeño y arbitrario, cada uno de los términos en la Ec.(2.45) debe ser igual a cero, por lo tanto,

$$\text{en } O(1) : \quad \bar{u}_{0,0} = 0 \quad \text{en } Y = 1; \quad (2.48)$$

$$\text{en } O(\varepsilon) : \quad \bar{u}_{0,1} = -\frac{\partial \bar{u}_{0,0}}{\partial Y} \sin(n\pi\chi) \quad \text{en } Y = 1; \quad (2.49)$$

$$\text{y en } O(\varepsilon^2) : \quad \bar{u}_{0,2} = -\frac{\partial \bar{u}_{0,1}}{\partial Y} \sin(n\pi\chi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_{0,1}}{\partial Y^2} \sin^2(n\pi\chi) \quad \text{en } Y = 1. \quad (2.50)$$

De manera similar, para la componente \bar{v}_0 de la velocidad, se tiene

$$\text{en } O(1) : \quad \bar{v}_{0,0} = 0 \quad \text{en } Y = 1; \quad (2.51)$$

$$\text{en } O(\varepsilon) : \quad \bar{v}_{0,1} = -\frac{\partial \bar{v}_{0,0}}{\partial Y} \sin(n\pi\chi) \quad \text{en } Y = 1; \quad (2.52)$$

$$\text{y en } O(\varepsilon^2) : \quad \bar{v}_{0,2} = -\frac{\partial \bar{v}_{0,1}}{\partial Y} \sin(2\pi\chi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}_{0,1}}{\partial Y^2} \sin^2(n\pi\chi) \quad \text{en } Y = 1. \quad (2.53)$$

Análogamente, la Ec. (2.47) proporciona

$$\text{en } O(1) : \quad \bar{\psi}_0 = 1 \quad \text{en } Y = 1; \quad (2.54)$$

$$\text{en } O(\varepsilon) : \quad \bar{\psi}_1 = -\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial Y} \sin(n\pi\chi) \quad \text{en } Y = 1; \quad (2.55)$$

$$\text{y en } O(\varepsilon^2) : \quad \bar{\psi}_2 = -\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial Y} \sin(2\pi\chi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial Y^2} \sin^2(n\pi\chi) \quad \text{en } Y = 1. \quad (2.56)$$

La primera de la condición de frontera original de (2.24), en $Y = \bar{h}(\chi)$ es por lo tanto transformada en una serie de condiciones de frontera equivalentes para las funciones $\bar{u}_{0,0}$, $\bar{u}_{0,1}$, $\bar{u}_{0,2}$ en $Y = 1$. Al resolver primeramente para $\bar{u}_{0,0}$ en $O(1)$ mediante (2.48), entonces (2.49) proporciona una condición para $\bar{u}_{0,1}$ en $O(\varepsilon)$, y así sucesiva-

mente hasta términos de mayor orden. De manera equivalente, este proceso se realiza para \bar{v}_0 y $\bar{\psi}$.

Solución $O(1)$

El problema a resolver en $O(1)$ es

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial Y^2} = \bar{\kappa}^2 \bar{\psi}_0, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_{0,0}}{\partial Y^2} = -\bar{\kappa}^2 \bar{\psi}_0. \quad (2.58)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{en } Y = 1 : \quad \bar{\psi}_0 = 1 \quad \text{y} \quad \bar{u}_{0,0} = 0, \quad (2.59)$$

$$\text{en } Y = 0 : \quad \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial Y} = \frac{\partial \bar{u}_{0,0}}{\partial Y} = 0. \quad (2.60)$$

Como se puede apreciar, en el problema en $O(1)$, las condiciones de frontera son independientes de χ en este nivel de aproximación, siendo éste el problema de un flujo electrosmótico entre placas planas y paralelas, en cuyo caso $\bar{u}_{0,0} = \bar{u}_{0,0}(Y)$, de tal manera que la solución de las Ecs. (2.57) y (2.58), tomando en cuenta las correspondientes condiciones de frontera, está dada por:

$$\bar{\psi}_0 = \frac{\cosh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} \quad (2.61)$$

y

$$\bar{u}_{0,0} = 1 - \frac{\cosh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})}. \quad (2.62)$$

Solución $O(\varepsilon)$

La solución al problema en $O(\varepsilon)$ lo determinan el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial Y^2} = \bar{\kappa}^2 \bar{\psi}_1, \quad (2.63)$$

$$\frac{dP_{0,1}}{d\chi} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{0,1}}{\partial Y^2} - \bar{\kappa}^2 \bar{\psi}_1, \quad (2.64)$$

con las condiciones de frontera

$$\text{en } Y = 1 : \quad \bar{\psi}_1 = -\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial Y} \sin(n\pi\chi), \quad \bar{u}_{0,1} = -\frac{\partial \bar{u}_{0,0}}{\partial Y} \sin(n\pi\chi); \quad (2.65)$$

$$\text{en } Y = 0 : \quad \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial Y} = \frac{\partial \bar{u}_{0,1}}{\partial Y} = 0. \quad (2.66)$$

Este problema en $O(\varepsilon)$ es la primera corrección para la geometría ondulada de la pared del microcanal. La solución de la Ec. (2.63), considerando sus condiciones de frontera, es:

$$\bar{\psi}_1 = -\bar{\kappa} \tanh(\bar{\kappa}) \sin(n\pi\chi) \frac{\cosh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})}. \quad (2.67)$$

Sustituyendo (2.67) en (2.64), e integrando dos veces esta última y aplicando las respectivas condiciones de frontera de la velocidad, y haciendo uso de la solución de la velocidad en el orden principal, Ec. (2.62), se obtiene:

$$\bar{u}_{0,1} = -\frac{1}{2} \frac{dP_{0,1}}{d\chi} (1 - Y^2) + \bar{\kappa} \tanh(\bar{\kappa}) \sin(n\pi\chi) \left[\frac{\cosh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} \right]. \quad (2.68)$$

En este punto, $dP_{0,1}/d\chi$ es incógnita. Para determinar la distribución de presión, se sustituye $\bar{u}_{0,1}$ de (2.68) en la ecuación de continuidad en $O(\varepsilon)$, Ec. (2.37), dada por

$$\frac{\partial \bar{u}_{0,1}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}_{0,1}}{\partial Y} = 0. \quad (2.69)$$

Integrando el resultado en la dirección transversal, desde $Y = 0$ a $Y = 1$, y aplicando la condición de frontera de impermeabilidad en la pared para $\bar{v}_{0,1}$, segunda condición de (2.24), se obtiene

$$\frac{d^2 P_{0,1}}{d\chi^2} = 3n\pi \tanh^2(\bar{\kappa}) \cos(n\pi\chi). \quad (2.70)$$

Por lo tanto, de (2.70), el gradiente de presión a lo largo del microcanal se puede determinar. Integrando dos veces esta ecuación, y considerando que $P_{0,1}(0) = P_{0,1}(1) = 0$, se llega a:

$$P_{0,1} = \frac{3 \tanh^2(\bar{\kappa})}{n\pi} [1 - \chi + \chi \cos(n\pi) - \cos(n\pi\chi)], \quad (2.71)$$

siendo el gradiente de presión a lo largo del microcanal

$$\frac{dP_{0,1}}{d\chi} = \frac{3 \tanh^2(\bar{\kappa})}{n\pi} [n\pi \sin(n\pi\chi) + \cos(n\pi) - 1]. \quad (2.72)$$

La velocidad adimensional del flujo en la dirección χ , hasta orden ε está dada por

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 = \bar{u}_{0,0} + \varepsilon \bar{u}_{0,1} + O(\varepsilon^2) = 1 - \frac{\cosh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} \\ + \varepsilon \left\{ -\frac{3 \tanh^2(\bar{\kappa})}{2n\pi} [n\pi \sin(n\pi\chi) + \cos(n\pi) - 1] (1-Y^2) + \bar{\kappa} \tanh(\bar{\kappa}) \sin(n\pi\chi) \frac{\cosh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} \right\} \\ + O(\varepsilon^2). \quad (2.73) \end{aligned}$$

Esto completa la solución para \bar{u}_0 hasta términos de $O(\varepsilon)$. Para determinar la contribución de $\bar{v}_{0,1}$, se debe notar de la ecuación de continuidad, Ec. (2.69), que

$$\frac{\partial \bar{v}_{0,1}}{\partial Y} = -\frac{\partial \bar{u}_{0,1}}{\partial \chi}. \quad (2.74)$$

Por lo tanto, sustituyendo $\bar{u}_{0,1}$ en la ecuación anterior e integrando el resultado, se obtiene:

$$\bar{v}_{0,1} = \frac{1}{2} \frac{d^2 P_{0,1}}{d\chi^2} \left(Y - \frac{Y^3}{3} \right) - \frac{n\pi \tanh(\bar{\kappa}) \cos(n\pi\chi) \sinh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} + D, \quad (2.75)$$

donde D es una constante de integración. Adicionalmente $\bar{v}_{0,1}$ debe satisfacer dos condiciones de frontera. La primera es la condición de simetría,

$$\bar{v}_{0,1} = 0 \quad \text{en} \quad Y = 0. \quad (2.76)$$

Lo anterior implica que $D = 0$. La segunda condición es que

$$\bar{v}_{0,1} = 0 \quad \text{en} \quad Y = 1. \quad (2.77)$$

Esta última condición se satisface idénticamente. Por lo tanto, hasta términos de

orden ε , la componente transversal de la velocidad esta dada por:

$$\bar{v}_{0,1} = \varepsilon n \pi \tanh(\bar{\kappa}) \cos(n\pi\chi) \left[\frac{3}{2} \tanh(\bar{\kappa}) \left(Y - \frac{Y^3}{3} \right) - \frac{\sinh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} \right]. \quad (2.78)$$

2.2.3. Vorticidad

La vorticidad ω está definida como

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.79)$$

la cual se puede escribir en forma adimensional como

$$\bar{\omega} = \beta^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y}, \quad (2.80)$$

donde $\beta = H/L$ y $\bar{\omega} = \omega H/U_{HS}$. Debido a que en el presente análisis se cumple que $\beta \ll 1$ siendo las demás variables de $O(1)$, en primera aproximación la Ec. (2.79) se reduce a

$$\bar{\omega} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y}. \quad (2.81)$$

Por lo tanto, en la aproximación de la teoría de la lubricación, la Ec. (2.81) se reduce a

$$\bar{\omega}_0 = -\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial Y}. \quad (2.82)$$

Para resolver el campo de vorticidad, se busca una solución asintótica de la forma:

$$\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_{0,0} + \varepsilon \bar{\omega}_{0,1} + \dots \quad (2.83)$$

Sustituyendo la Ecs. (2.33) y (2.83) en la Ec. (2.82), y resolviendo hasta términos de orden ε , se obtiene

$$\bar{\omega}_{0,0} = -\frac{\partial \bar{u}_{0,0}}{\partial Y} \quad (2.84)$$

y

$$\bar{\omega}_{0,1} = -\frac{\partial \bar{u}_{0,1}}{\partial Y}, \quad (2.85)$$

de las cuales se determina

$$\bar{\omega}_{0,0} = \bar{\kappa} \frac{\sinh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} \quad (2.86)$$

y

$$\bar{\omega}_{0,1} = \frac{3 \tanh^2(\bar{\kappa})}{n\pi} [1 - \cos(n\pi) - n\pi \sin(n\pi\chi)] Y - \frac{\bar{\kappa}^2 \tanh(\bar{\kappa}) \sin(n\pi\chi) \sinh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})}. \quad (2.87)$$

Por lo tanto, hasta términos de $O(\varepsilon)$, el campo de vorticidad está dado por

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_0 &= \bar{\kappa} \frac{\sinh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} \\ +\varepsilon &\left\{ \frac{3 \tanh^2(\bar{\kappa})}{n\pi} [1 - \cos(n\pi) - n\pi \sin(n\pi\chi)] Y - \frac{\bar{\kappa}^2 \tanh(\bar{\kappa}) \sin(n\pi\chi) \sinh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.88)$$

2.2.4. Rapidez de flujo volumétrico

La rapidez del flujo volumétrico en el microcanal se puede determinar con la ayuda del perfil de velocidad $\bar{u}_0 = \bar{u}_{0,0} + \varepsilon \bar{u}_{0,1} + \dots$, donde $\bar{u}_{0,0}$ y $\bar{u}_{0,1}$ están dados por (2.62) y (2.68), como se muestra a continuación:

$$\bar{Q}_0 = \frac{Q_0}{Q_c} = \int_0^1 \bar{u}_0(\chi, Y) + \dots dY, \quad (2.89)$$

donde $Q_c = 2U_{HS}H$. Al llevar a cabo la integral, se obtiene

$$\bar{Q}_0 = 1 - \frac{\tanh(\bar{\kappa})}{\bar{\kappa}} + \varepsilon \left\{ \frac{\tanh^2(\bar{\kappa})}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (2.90)$$

En muchas aplicaciones prácticas la doble capa eléctrica es muy pequeña, $\sim 1 - 3$ órdenes de magnitud más pequeña que el ancho espesor del microcanal. Bajo esta circunstancia se cumple que el parámetro $\bar{\kappa} \gg 1$, y por lo tanto, en este límite $\tanh(\bar{\kappa}) \rightarrow 1$, por lo que el flujo volumétrico se puede expresar como

$$\bar{Q}_0 \simeq 1 - \frac{1}{\bar{\kappa}} + \varepsilon \left[\frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \right] + O(\varepsilon^2). \quad (2.91)$$

Adicionalmente, para un canal cuyas paredes tengan una gran cantidad de ondulaciones, es decir $n\pi \rightarrow \infty$, se tiene:

$$\bar{Q}_0 \simeq 1 - \frac{1}{\bar{\kappa}}, \quad (2.92)$$

indicando que en este límite se recupera el caso de un canal de placas planas y paralelas [11].

Capítulo 3

Análisis de resultados

Para estimar los parámetros adimensionales usados en este análisis, se utilizaron las propiedades de transporte y parámetros geométricos típicos en aplicaciones de EOF (ver Tabla 2.1).

En la Fig. 3.1 se muestra el perfil de velocidad adimensional, \bar{u}_0 , como función de la coordenada transversal adimensional Y , evaluado en tres coordenadas adimensionales, $\chi (= 0, 1, 0,2197, 0,5)$, y con valores de los parámetros $k\bar{\alpha}pa = 20$, $\varepsilon = 0,01$ y $n = 1$. Como se puede apreciar, la condición de flujo hidrodinámico no se alcanza a lo largo del microcanal, debido a la ondulación de la pared de éste. En este contexto, y para los valores de los parámetros utilizados en esta figura, se observa que el perfil de velocidad tiene un carácter cóncavo y convexo a la entrada y salida del microcanal, respectivamente; en esta figura, el valor de la coordenada $\chi = 0,2197$ corresponde a la posición donde se tiene un flujo *tapon*, coincidiendo con la ubicación donde el gradiente de la presión es cero ($dP_{0,1}/d\chi = 0$).

El comportamiento del perfil de velocidad a lo largo del microcanal se debe a la variación de la sección transversal del microcanal, como lo reportó Ghosal [5] previamente; dicho patrón del flujo es originado por la variación de la velocidad del fluido en la dirección χ , $\bar{u}_{0,0} + \varepsilon\bar{u}_{0,1}$, ya que ésta decrece donde el canal se expande y se incrementa donde el canal se contrae, para mantener constante el flujo volumétrico a lo largo del microcanal.

En la Fig. 3.2 se presenta el perfil de velocidad adimensional, $\bar{v}_{0,1}$, como función de la coordenada longitudinal adimensional χ , evaluado en cuatro coordenadas

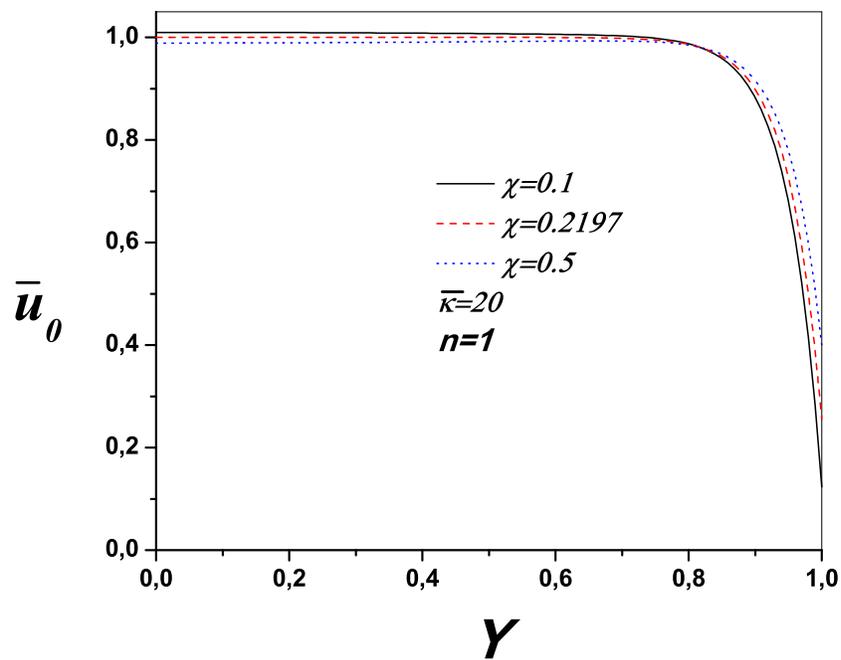


Figura 3.1: Velocidad adimensional, \bar{u}_0 , como función de la coordenada transversal adimensional Y , evaluada en tres coordenadas longitudinales $\chi(= 0,1, 0,2197, 0,5)$. Los parámetros utilizados en esta gráfica son $\bar{\kappa} = 20$, $\varepsilon = 0,02$ y $n = 1$.

adimensionales $Y(= 0,01, 0,1, 0,2, 0,5)$, y con valores de los parámetros $k\bar{a}pa = 20$, $\varepsilon = 0,02$ y $n = 1$. En esta figura se observa que el movimiento del fluido en la dirección Y es alternativamente positivo y negativo conforme el movimiento de éste se presenta en la dirección χ , siguiendo los contornos de las paredes del microcanal.

La distribución de presión adimensional P como función de la coordenada adimensional χ se muestra en la Fig. 3.3, para $\varepsilon = 0,02$, $n = 1$ y $\bar{k} = 20$. Como se puede apreciar, para los valores de los parámetros considerados en esta figura, existen regiones a lo largo del microcanal en las que el gradiente de la presión adimensional es negativo y positivo. Para aquellas en que el gradiente de la presión es negativo, el perfil de velocidad es cóncavo; en las zonas donde el gradiente de la presión es positivo, el perfil de velocidad corresponderá a uno convexo. Adicionalmente, de la mismo figura se observa que existen coordenadas donde el gradiente de la presión es igual a cero, lo que corresponde a tener un perfil de velocidad *tipo tapón*, como se muestra en la Fig. 3.1. Otros aspecto que se debe precisar es que la presión tiene valores negativos desde la parte estrecha del microcanal hacia la parte más amplia del mismo; por el contrario, en la región donde el canal va de su parte más amplia hasta la salida, los valores de la presión adimensional son positivos. Dicha variación de la presión es lo que causa las variaciones de la velocidad en la dirección axial χ .

Los patrones del campo de flujo que se presentaron previamente se pueden extender al caso en que se consideren microcanales cuyas paredes incluyan un mayor número de ondulaciones. En la Fig. 3.4 se presenta el perfil de velocidad \bar{u}_0 , como función de la coordenada transversal adimensional Y , evaluado en tres coordenadas adimensionales arbitrarias, $\chi(= 0,2, 0,5, 0,8)$, y con valores de los parámetros $k\bar{a}pa = 20$, $\varepsilon = 0,02$ y $n = 2$. En esta figura se reproduce un comportamiento análogo al presentado en la Fig. 3.1, aunque en este caso, en primera instancia, se observa que la velocidad media será menor en comparación con el caso de $n = 1$ (ver Fig. 3.1). Esto último será verificado más adelante cuando se presenten los resultados donde se evalúa la rapidéz de flujo volumétrico.

En la Fig. 3.5 se presenta el patrón de flujo en la dirección transversal Y , para $n = 2$. Como se observa el comportamiento del flujo es cualitativamente el mismo que el presentado en las figuras previas. Sin embargo, es necesario precisar que incrementando el número de ondulaciones tenderá a incrementar la magnitud de la

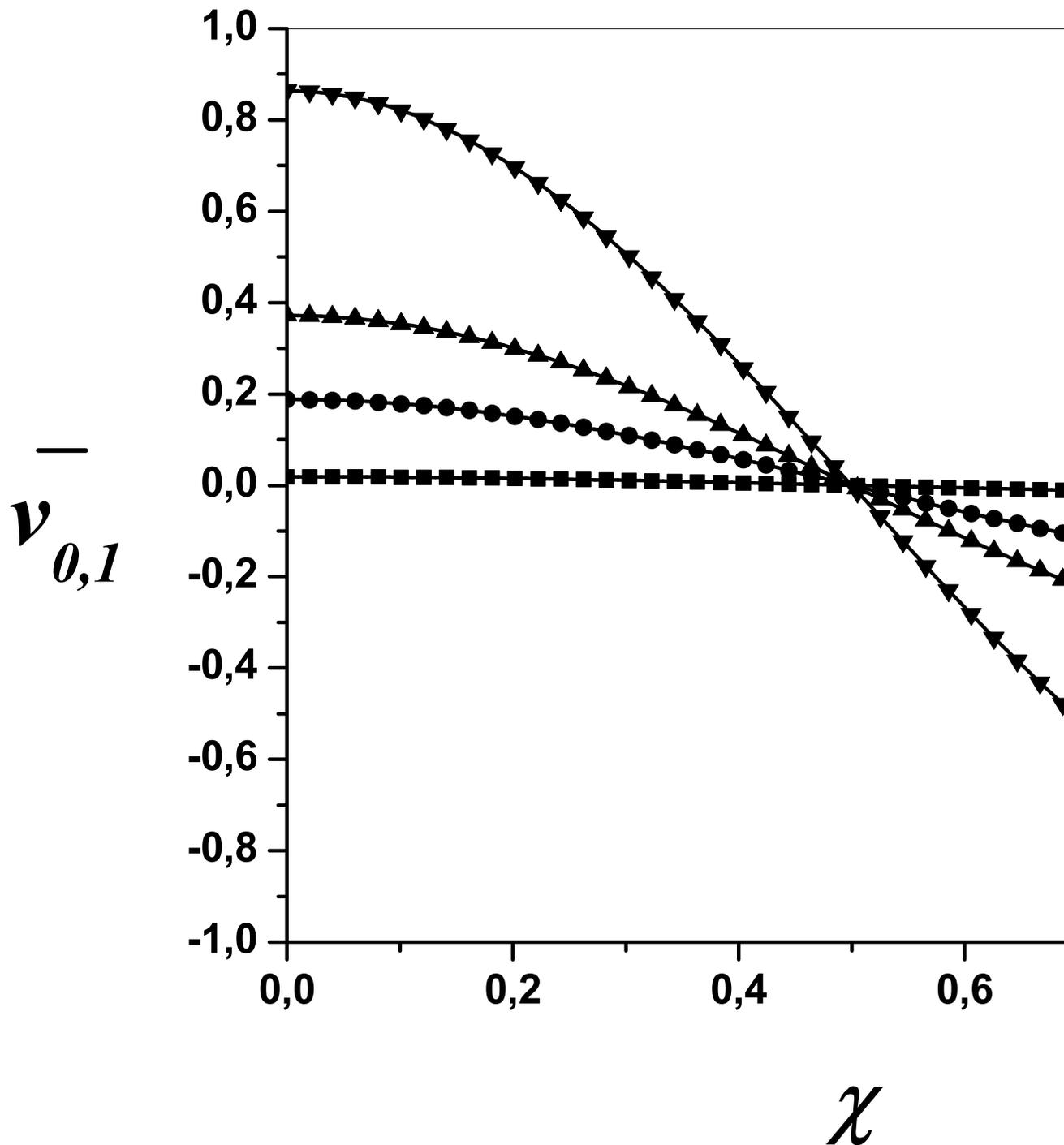


Figura 3.2: Velocidad adimensional, $\bar{v}_{0,1}$ como función de la coordenada longitudinal adimensional χ , evaluada en cuatro coordenadas arbitrarias transversales $Y(= 0,01, 0,1, 0,2, 0,5)$. Los parámetros utilizados en esta gráfica son $\bar{\kappa} = 20, \varepsilon = 0,02$ y $n = 1$.

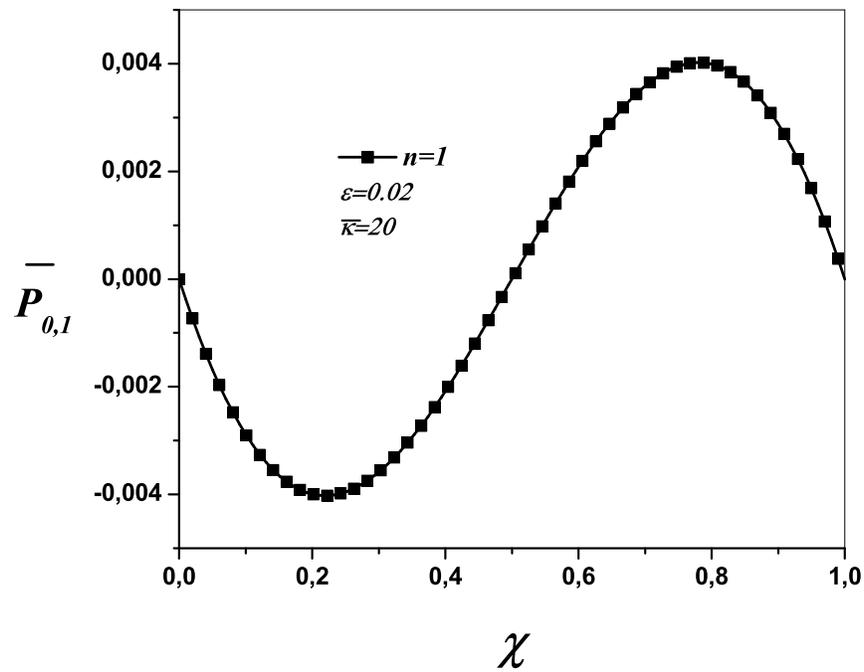


Figura 3.3: Distribución de la presión adimensional P como función de la coordenada adimensional χ , para $\varepsilon = 0,02$, $\bar{\kappa} = 20$ y $n = 1$.

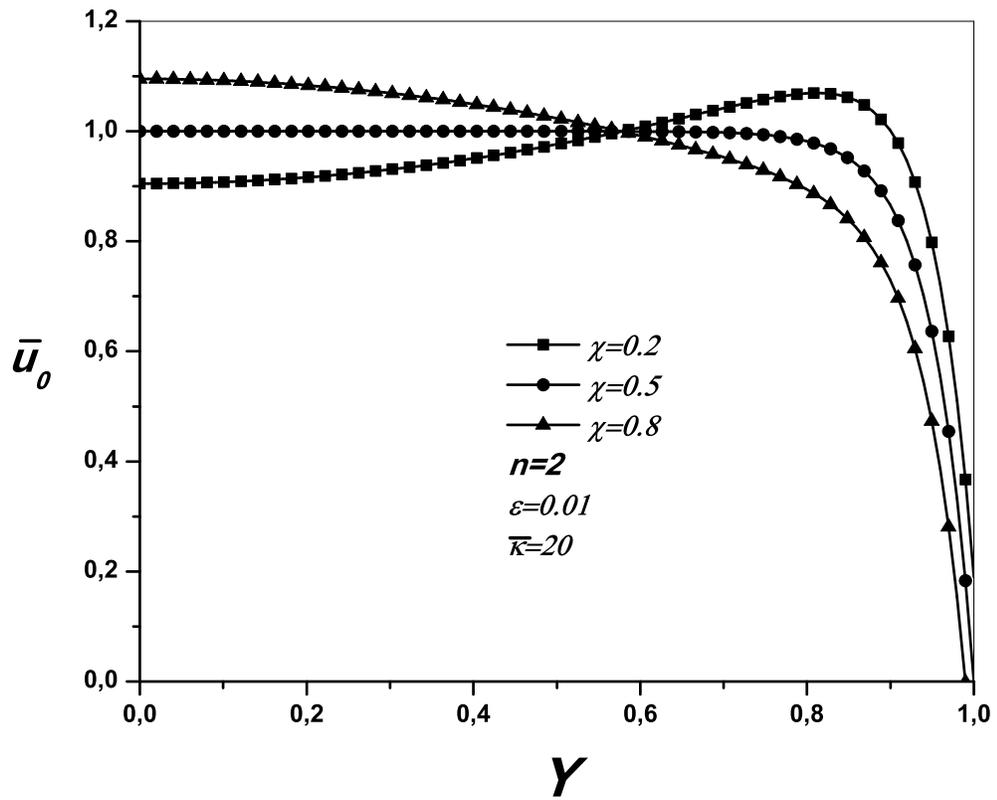


Figura 3.4: Velocidad adimensional, \bar{u}_0 como función de la coordenada transversal adimensional Y , evaluada en tres coordenadas longitudinales $\chi(= 0,1, 0,5, 0,8)$. Los parámetros utilizados en esta gráfica son $\bar{\kappa} = 20$, $\varepsilon = 0,02$ y $n = 2$.

componente de la velocidad transversal adimensional. Otro aspecto a resaltar es que las coordenadas axiales χ , donde la componente de la velocidad $\bar{v}_{0,1} = 0$ ocurre cuando el perfil de la velocidad $\bar{u}_{0,0} + \varepsilon\bar{u}_{0,1}$, coincidiendo con la posición donde la pared del microcanal tiene su máxima amplitud ε . microcanal.

Para el caso de $n = 2$, la distribución de la presión adimensional a lo largo del microcanal cambia significativamente en comparación con el caso de $n = 1$, como se puede observar en la Fig. 3.6. Aquí se aprecia que para el caso de $n = 2$, en las coordenadas $\chi = 0, 0,5, 1,0$ la presión tienen sus valores mínimo, máximo y mínimo, respectivamente. A partir de la entrada del microcanal y en dirección del flujo, el gradiente de presión es positivo hasta la coordenada $\chi = 0,5$. En esta zona, el perfil de velocidad es cóncavo; contrariamente, para $0 \leq \chi \leq 1$, el gradiente de presión es negativo, ocasionando que el perfil de velocidad sea convexo. Para $\chi = 0,5$, donde el gradiente de velocidad es cero, corresponde a tener un perfil de velocidad *tipo tapón*.

En la Fig. 3.12 se grafica la rapidez de flujo volumétrico como función del número de ondulaciones de la pared del microcanal, para dos valores de $\varepsilon (= 0,01, 0,05)$ y $\bar{\kappa} = 20$, siendo n impar. Es evidente que para el caso de $n = 1$ se logra un mayor caudal cuando se compara con valores de $n > 1$. Conforme se incrementa el valor de n , la rapidez del flujo volumétrico tiende asintóticamente al caso de un microcanal de placas planas y paralelas, como se observa de la Ec. (2.92). En este punto se debe observar que para valores pares de n , independientemente de su valor, siempre se obtiene una rapidez de flujo volumétrico igual al caso de placas planas y paralelas, ya que el término $1 - \cos(n\pi) = 0$ en la Ec. (2.91).

La Fig. 3.8 presenta la rapidez del flujo volumétrico como función del parámetro ε , para $\bar{\kappa} = 20$ y $n = 1$. Aquí se nota que su variación es lineal con ε , debido a que el cálculo se realizó hasta términos de $O(\varepsilon)$, debido a que en hasta este orden ya no existió una variación significativa de la rapidez del flujo volumétrico.

Finalmente, los campos de vorticidad se grafican en las Figs. 3.9-3.12. Las Figs. 3.9 y 3.10 para los mismos valores de los parámetros $\varepsilon = 0,01$ y $\bar{\kappa} = 20$, con $n = 1$ y $n = 2$, respectivamente. En estas dos figuras se observa la manera en que las paredes onduladas del microcanal perturban el campo de vorticidad.

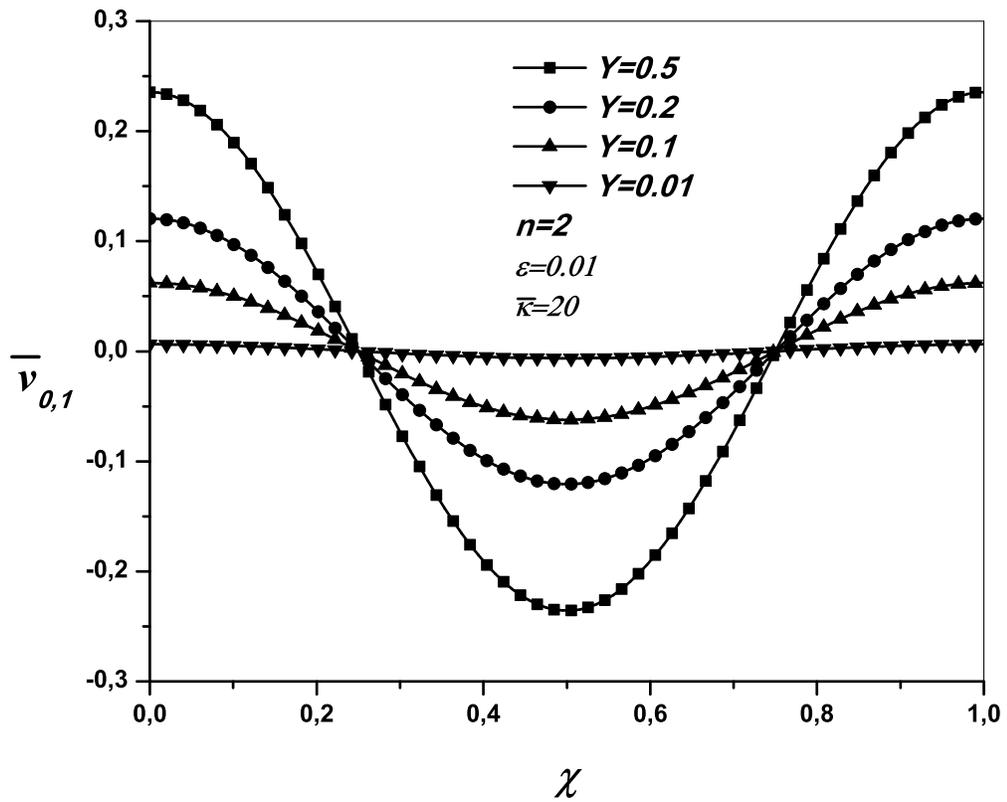


Figura 3.5: Velocidad adimensional, $\bar{v}_{0,1}$ como función de la coordenada longitudinal adimensional χ , evaluada en cuatro coordenadas arbitrarias transversales $Y(= 0,01, 0,1, 0,2, 0,5)$. Los parámetros utilizados en esta gráfica son $\bar{\kappa} = 20$, $\varepsilon = 0,02$ y $n = 2$.

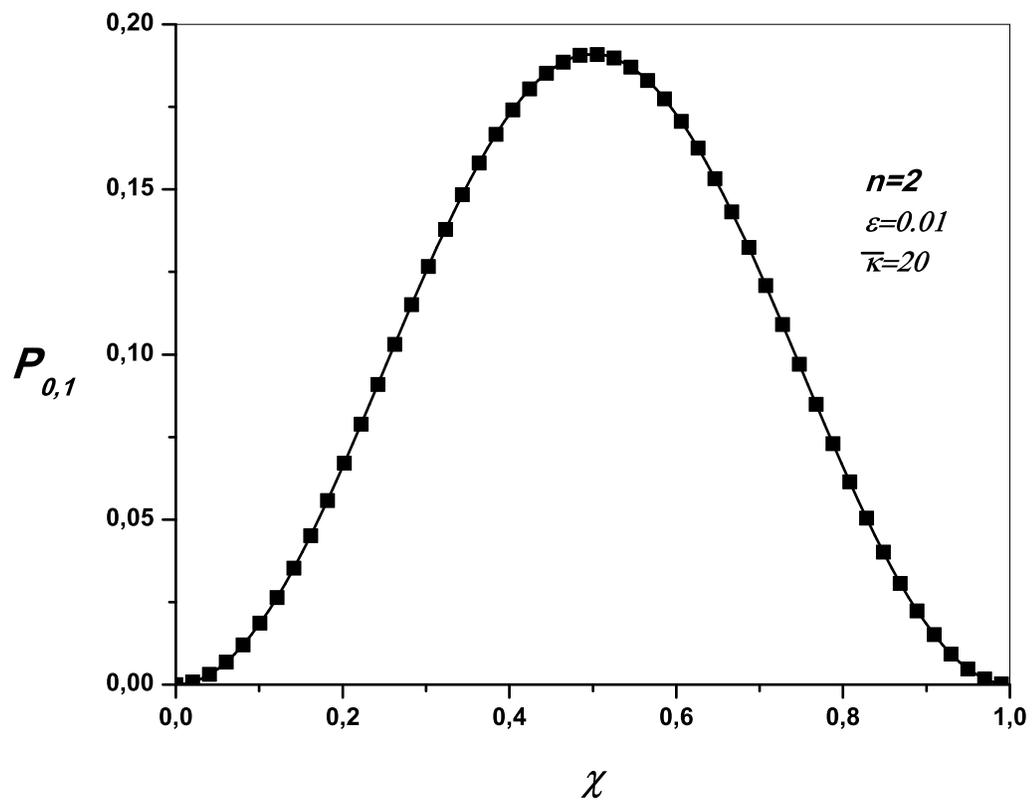


Figura 3.6: Distribución de la presión adimensional como función de la coordenada adimensional χ , para tres diferentes valores del parámetro $\bar{\kappa} = 20$, $\varepsilon = 0,02$ y $n = 2$.

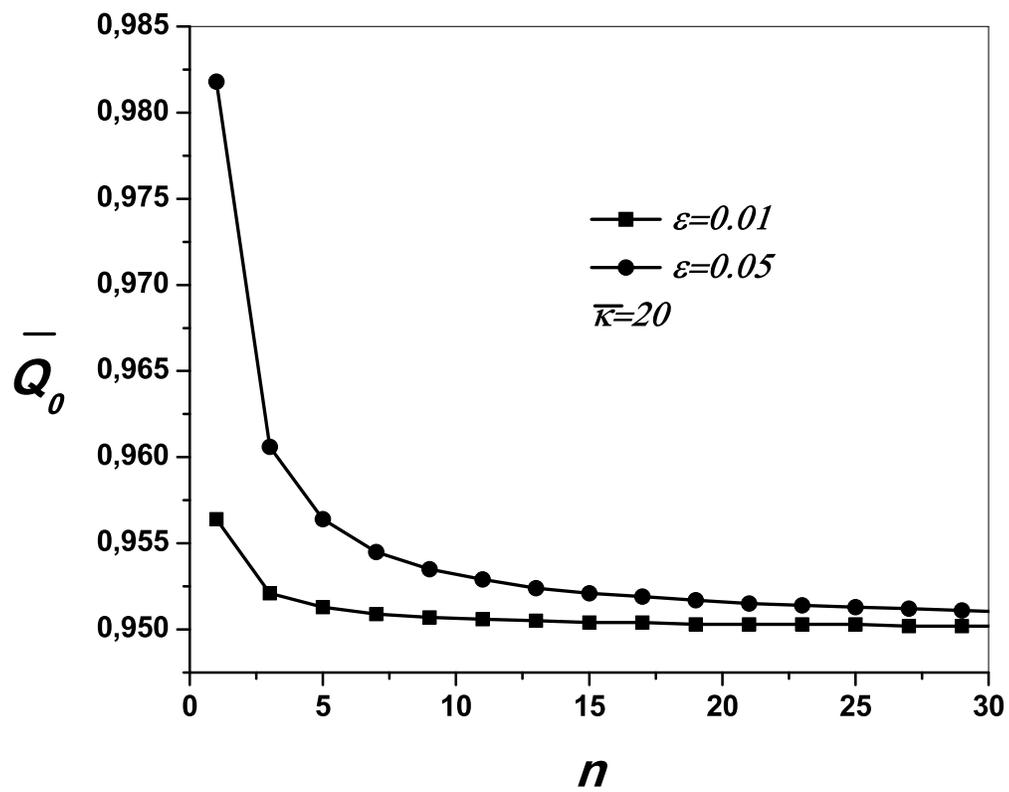


Figura 3.7: Rapidez de flujo volumétrico adimensional como función de n , para dos valores de ε ($= 0,01, 0,05$) y $\bar{\kappa} = 20$. En esta gráfica se han graficado valores impares de n .

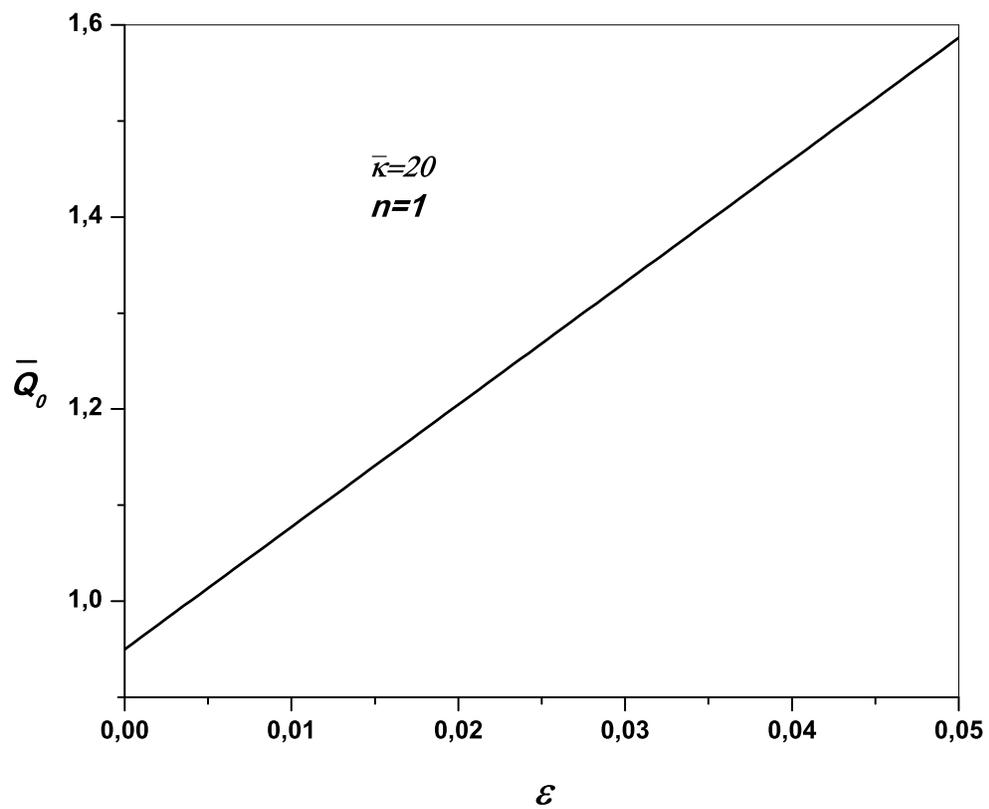


Figura 3.8: Rapidez de flujo volumétrico adimensional como función de ε con $n = 1$ y $\bar{\kappa} = 20$.

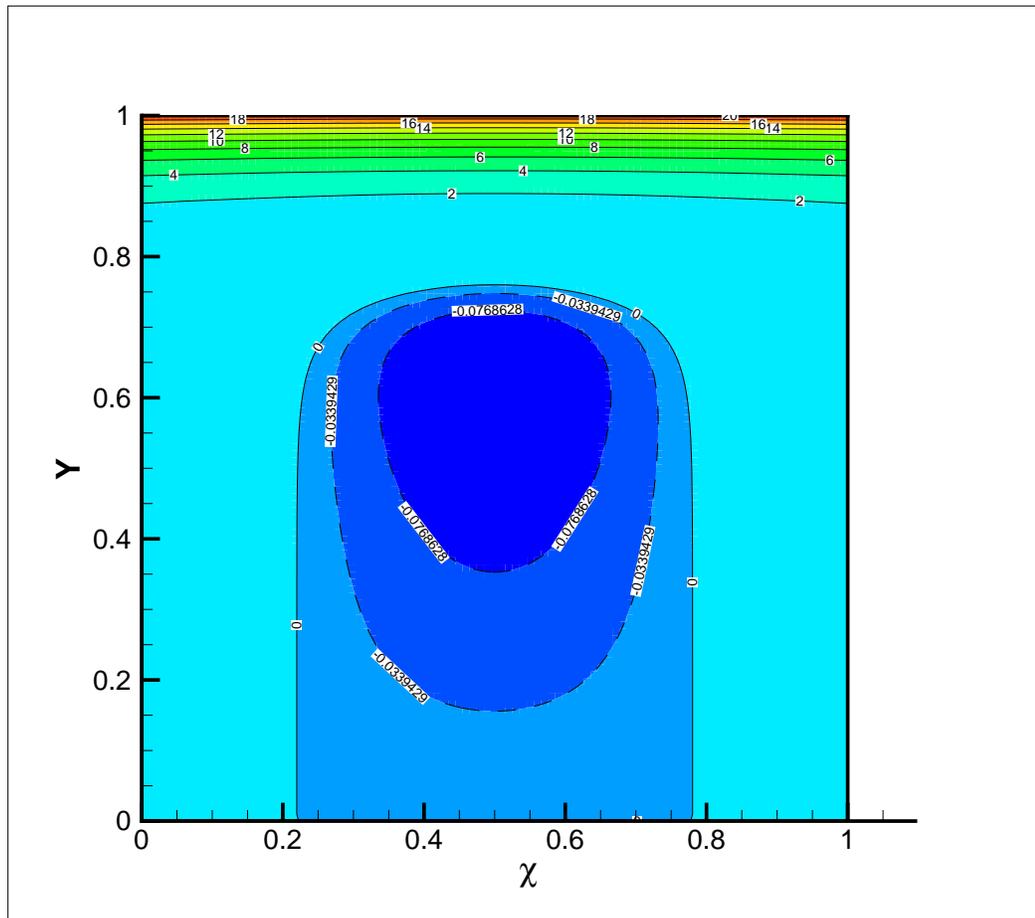


Figura 3.9: Campos de vorticidad para $\varepsilon = 0,02$, $\bar{\kappa} = 20$ y $n = 1$.

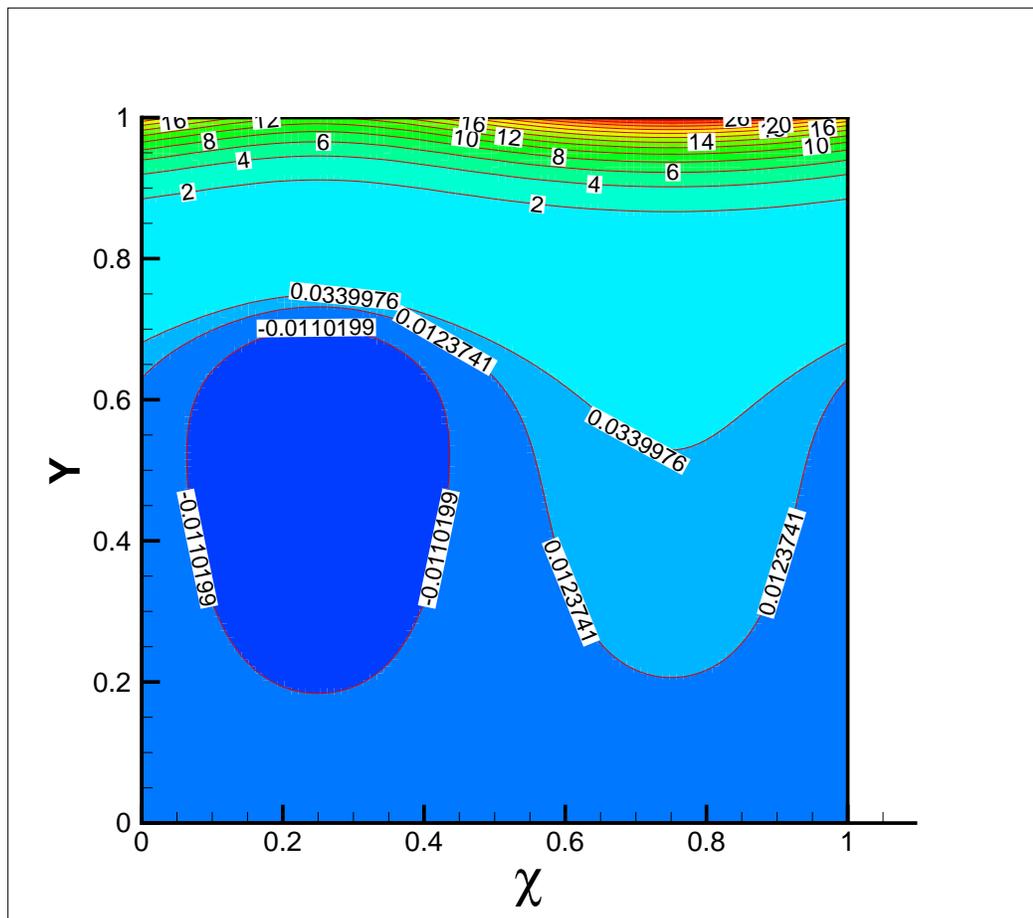


Figura 3.10: Campos de vorticidad para $\varepsilon = 0,02$, $\bar{\kappa} = 20$ y $n = 2$.

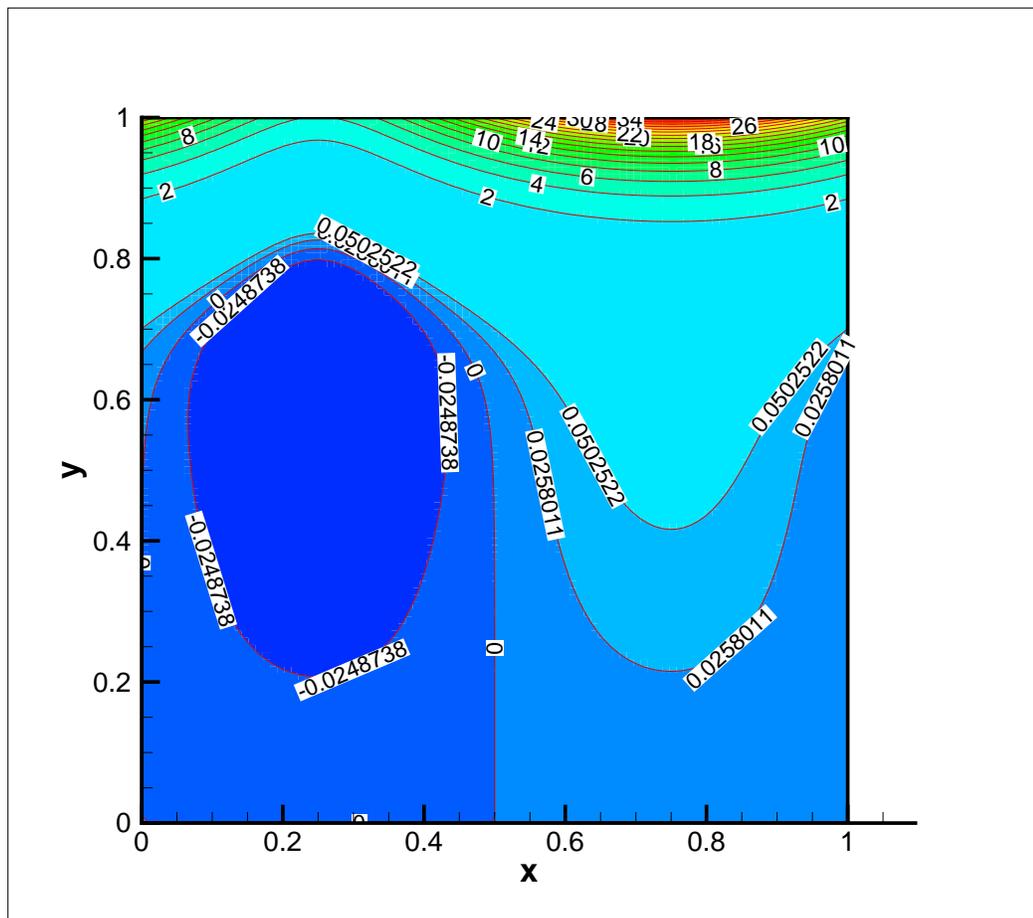


Figura 3.11: Campos de vorticidad para $\varepsilon = 0,04$, $\bar{\kappa} = 20$ y $n = 2$.

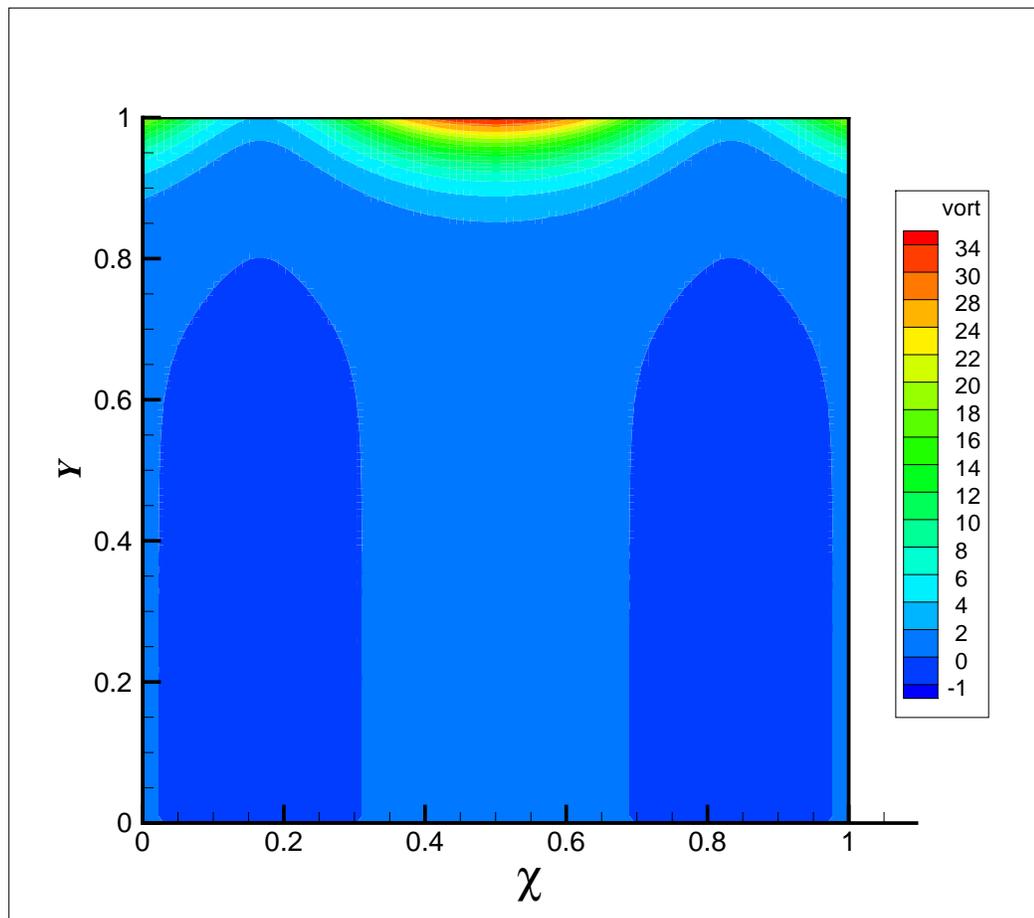


Figura 3.12: Campos de vorticidad para $\varepsilon = 0,04$, $\bar{\kappa} = 20$ y $n = 3$.

Conclusiones

En este trabajo se llevó a cabo, con base en la teoría de la lubricación, un análisis asintótico del flujo electro-osmótico a través de un micro-canal con paredes onduladas, bajo la aproximación de Debye-Hückel. Los efectos de las ondulaciones se investigaron mediante la aplicación del *método de perturbación regular de dominio*, considerando amplitudes pequeñas de las ondulaciones. Se demostró que los factores que más influyen en la hidrodinámica del flujo electro-osmótico son la amplitud y frecuencia de las ondulaciones, el parámetro electrocinético $\bar{\kappa}$. La solución asintótica (perturbación de dominio) hasta términos de $O(\varepsilon)$ indica que la rapidez de flujo decrece al incrementar el número de ondulaciones, tendiendo asintóticamente al valor del flujo volumétrico del caso de un canal de placas planas y paralelas. En este sentido, el canal en el que se da el mayor flujo volumétrico para condiciones establecidas es el caso de $n = 1$, es decir, cuando la ondulación de la pared del micro-canal está dada por $H(x) = H [1 + \varepsilon \sin(\pi x)]$. El presente análisis sugiere la aplicación del método de perturbación de dominio, como una herramienta poderosa para tratar problemas de manera analítica aproximada, en casos donde el dominio no corresponda al referido a coordenadas cartesianas *convencionales*. El modelo analítico que se presenta en esta tesis proporciona una concordancia con simulaciones numéricas muy robustas de las ecuaciones gobernantes de este tipo de flujos electro-osmóticos. El trabajo teórico desarrollado permite predecir tendencias en los datos y demás aspectos básicos del campo de flujos electro-osmóticos. Trabajo a futuro relacionado con el tema aquí tratado involucrará la inclusión de otros factores como potencial ζ variable; análisis en estado transitorio, así como realizar una simulación numérica que permita predecir el alcance de la técnica de perturbación aplicada. Otro factor que merece analizar en un trabajo próximo es el caso en que las placas del micro-canal son ambas onduladas, pero con la ondulación desfasada, y de esta manera estudiar los efectos que dicha geometría tendrá en la hidrodinámica del flujo electro-osmótico. El análisis realizado en este trabajo tiene gran aplicación en el estudio de micro-mezcladores, por lo que otro punto importante a considerar es realizar estudios en flujos electro-osmóticos incluyendo la ecuación de especies.

Bibliografía

- [1] Armand Adjari. Electro-osmosis on inhomogenously charged surfaces. *Physical Review Letters*, 4:755–759, 1995.
- [2] C.-K. Chen y C.-C. Cho. Electrokinetically-driven flow mixing in microchannels with wavy surface. *Journal of Colloid and Interface Science*, 312:470–480, 2007.
- [3] Prashanta Dutta y Ali Beskok. Analytical solution of time periodic electroosmotic flows: Analogies to stokes's second problem. *Anal. Chem.*, 73:5097–5102, 2001.
- [4] N. Aluru G. Karniadakis, A. Beskok. *Microflows and Nanoflows*. Springer, 2005.
- [5] S. Ghosal. Lubrication theory for electro-osmotic flow in a microfluidic channel of slowly varying cross-section and wall charge. *J. Fluid Mech.*, 459:103–128, 2002.
- [6] N.G. Green, A. Ramos, A. González, H. Morgan, y A. Castellanos. Fluid flow induced by nonuniform ac electric fields in electrolytes on microelectrodes. i.experimental measurements. *Phys. Rev. E*, 61:4011–4018, 2000.
- [7] S. C. Hendy, M. Jasperse, y J. Burnell. Effect of patterned slip on micro- and nanofluidic flows. *PHYSICAL REVIEW E*, 72:016303, 2005.
- [8] Brian J. Kirby. *Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics: Transport in Microfluidic Devices*. Cambridge University Press, 2009.
- [9] L. G. Leal. *Advanced Transport Phenomena*. Cambridge University Press, 2007.

-
- [10] Y.K. Lee, J. Deval, P. Tabeling, y C.M. Ho. Chaotic mixing in electrokinetically and pressure driven micro flows, iee 14th international conference on micro electro mechanical system (mems). 2001.
- [11] J. Masliyah y S. Bhattacharjee. *Electrokinetic and colloid transport phenomena*. Wiley-Interscience, 2006.
- [12] R. F. Probstein. Desalination: Some fluid mechanical problems. *rans. ASME J. Basic Eng.*, 94:286–313, 1972.
- [13] R. F. Probstein. *Physicochemical hydrodynamics*. John Wiley and Sons, 1994.
- [14] R. F. Probstein. Removal of contaminants from soils by electric fields. *Science*, 260:498–503, 1994.
- [15] F. F. Reuss. *Mémoires de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou*, 2:327–337, 1809.
- [16] D. A. Saville. Electrokinetic effects with small particles. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 9:321–337, 1977.
- [17] A. D. Stroock, S. K. Dertinger, A. Ajdari, I. Mezic, H. A. Stone, y G. M. Whitesides. Chaotic mixer for microchannels. *Science*, 25:647–651, 2002.
- [18] Abraham D. Stroock, Stephan K. Dertinger, George M. Whitesides, y Armand Ajdari. Patterning flows using grooved surfaces. *Anal. Chem.*, 74:5306–5312, 2002.
- [19] Patrick Tabeling. *Intoruduction to Microfluidics*. Oxford University Press, 2005.
- [20] X. Xuan y D. Li. Analytical study of joule heating effects on electrokinetic transportation in capillary electrophoresis. *J. Chromatogr. A.*, 1064:227–237, 2005.
- [21] Dayong Yang y Ying Liu. Numerical simulation of electroosmotic flow in microchannels with sinusoidal roughness. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 328:28–33, 2008.