UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PARALELISMO ENTRE FIBRACIONES Y SEUDOFUNTORES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

OMAR CORONA TEJEDA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS
2014

Paralelismo entre Fibraciones y Seudofuntores

Omar Corona Tejeda

10 de enero de 2014

1.-Datos del alumno
Corona
Tejeda
Omar
Telefono: 5534934650
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
de cuenta: 408039699

2.-Datos del tutor
Dr.
Francisco
Marmolejo
Rivas

3.- Datos sinodal 2
Dr.
Adrián
Vázquez
Márquez

4.- Datos sinodal 2
Dr.
José Pablo
Pelaez
Menaldo

5.- Datos sinodal 2
Dr.
Manuel
Cruz
López

6.- Datos sinodal 2
Dr
Hugo Alberto
Rincón
Mejía

7.-Datos de trabajo escrito
Paralelismo entre Seudofuntores y Fibraciones
101 paginas
2014

Agradecimientos

Al concluir este trabajo se me presenta la oportunidad de agradecer a las personas que directa o indirectamente ayudaron a la realización del presente. Con todas ellas me encuentro sumamente agradecido y me es imposible expresar con palabras lo que su contribución representó. Sin embargo me es grato recordar un poco de esa ayuda que me brindaron.

Quiero agradecer al Dr. Francisco Marmolejo por la formación matemática que me proporcionó. Fue su curso de teoría de categorías el que me permitió conocer un poco más de las "distintas" matemáticas que existen. Sus clases fueron siempre bastante amenas y divertidas y, si no mal recuerdo, fue este curso la primera clase donde realmente intente esforzarme. Mostrándose siempre atento a cualquier tipo de diálogo, puedo decir que encontré en él un excelente mentor y persona.

De igual forma quiero expresar mi gratitud a los sinodales de esta tesis por mostrarse siempre dispuestos a la conversación para la mejora del presente trabajo y las correciones que me indicaron. Al Dr. Adrián Vázquez por mostrar siempre entusiasmo por la misma.

Quiero agradecer a Raymundo Reynoso por apoyarme desde que era un niño y creer en mí. Su motivación a que siguiera por el camino académico ha tenido resultados.

A Santiago por ser como un hermano para mí. En él encontré no sólo un compañero de estudio para los distintos proyectos (siempre inconclusos) que nos hemos formado en todos estos años sino a alguién que siempre se mostró atento y sensible a los problemas de los demás. Su calidad humana es innegable. Todas las tardes de estudio-friteo tienen un valor inigualable. Con el tuve discuciones que me llevaron a la mejor comprensión de lo que estaba realizando.

A Pedro por brindarme la oportunidad de conocer otra forma de pensamiento distinta a las matemáticas. Fueron las infinitas conversaciones y discusiones que tuvimos las que me llevaron a extender mis campos de intéres y así tratar de que este trabajo fuera presentado de una forma más holista e integral. Con él me encuentro en deuda por mostrarse siempre dispuesto a escucharme.

A Lulú por leer una versión preliminar de esta tesis y mostrarme las errores que había encontrado. Recuerdo que el día que me presentó las correcciones me sentí tan entusiasmado por el intéres que había mostrado y la dedicación con la cual lo había realizado que no pude permanecer inmutable y un sentimiento profundo inundó mi ser. Por esto e innumerables muestras de cariño tendrás siempre mi afecto.

A todos los compas que he conocido a lo largo de estos seis años que he vivido en el Distrito Federal. Muy en particular al Jaimes, Daniel, Raquel, Alan, Viri, Lucia, Tania, El Gnomo, Pablito, Pablote, Olmo, Jacob, Jebús, Mark, Powser, Chupacheves, Gloria, La Rigelia, Julia, Oswaldo, Grace, Andrés, Omi, Iván, Horacio, Sara, y Pablo. Con cada uno de ellos recuerdo una sonrisa y eso nadie nos lo podrá quitar.

A mi familia que, a quienes, para resumirlo en unas cuantas palabras a ellos debo lo que soy. A mi papá por ser el incansable espíritu que me ha enseñado con el ejemplo a nunca rendirme, incluso en las peores adversidades y por ser la representación de todas las cualidades que a veces me siento incapaz de lograr. A mi mamá por ser la muestra tangible del amor, cariño y afecto, por estar siempre dispuesta a escuharme, por ayudarme en los peores momentos de mi vida y porque su felicidad siempre tendrá efecto en mi. A mi hermana por su cariño, las incontables horas de friteo que hemos tenido y porque siempre está dispuesta a apoyarme.

Sin todos ustedes mi vida es inimaginable.

Omar Corona Tejeda[1]

[1]El autor agrade el apoyo del proyecto de investigación PAPIIT Estructuras de Tricategorías: Mónadas y sus Generalizaciones, con número de proyecto IN110111.

Índice general

Introducción

Al estudiar ciertos objetos de caracter matemático y las relaciones que surgen entre estos se ha observado que en algunos casos existe un "paralelismo" o "diccionario" que preserva las relaciones entre esta clase de estructura y alguna otra. En los casos que se ha logrado este tipo de "traducción" ha resultado muy conveniente al desarrollo de la teoría ya que intuitivamente dada la formulación de una idea o concepto en términos de un "idioma" es posible mediante este diccionario establecer su correspondiente traducción en el otro y así si la comprensión de la idea original y sus implicaciones resultaba difícil o si el desarrollo de intuición es poco claro, entonces mediante este cambio de idioma es posible pensar el problema en estos términos paralelos y así esperar que en este "lado de la moneda" sea mucho más fácil la comprensión de nuestro problema original.

Uno de estos ejemplos es la relación que existe entre geometría y álgebra. En geometría algebraica el estudio de variedades algebraicas, esto es, el estudio del lugar geométrico de los ceros de un conjunto de polinomios tiene su concepto paralelo en las álgebras finitamente generadas y reducidas. Este paralelismo se encuentra dado por una equivalencia de categorías. Así resulta ser que en el estudio de variedades (algebraicas) puede pensarse en términos puramente algebraicos y la falta de intuición que surge usualmente en el estudio del álgebra puede ser adquirida por medios geométricos.

Esta tesis tiene como propósito establecer un diccionario entre el lenguaje que hace uso de las categorías indexadas (seudofuntores de una categoría $\mathbf{B}$ a la 2-categoría $\mathbf{Cat}$) y el de las que utilizan las llamadas fibraciones de Grothendieck, (funtores de la forma $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ que cumplen cierta propiedad de levantamiento.). El primer paso en la formulación de este paralelismo fue dado por Grothendieck al establacer que existe una 2-equivalencia entre la 2-categoría de categorías indexadas y la 2-categoría de las llamadas fibraciones de Grothendieck. Intuitivamente el establecimiento de esta 2-equivalencia fue permitir la construcción de un "puente" entre los conceptos que tengan como ingrediente intrínseco las categorías indexadas o las fibraciones. Esta correspondencia se irá presentando a lo largo de la tesis.

El material presentado en los capítulos es a grandes rasgos el siguiente. El capítulo 1 inicia con la motivación del estudio de las categorías indexadas. Esto se hace mediante la construcción del funtor K_0 de la K-teoría algebraica. Una vez presentada la importancia de las categorías indexadas se cambiará de enfoque al considerar las fibraciones de Grothendieck, este cambio que resulta de forma poco "natural" en principio se irá reduciendo al asociarle a cada fibración una categoría indexada que esencialmente conserve toda la información relevante de la fibración. Esta asociación es la llamada *construcción de Grothendieck*. De forma dual a los conceptos presentados se estudiarán las *opfibraciones* y se establecerá un resultado fundamental que caracteriza los funtores que son fibraciones y opfibraciones, esto es, las llamadas bifibraciones [2]. Se continua con el estudio de lo que se entiende por una *fibración sobre fibraciones* y se finaliza con las fibraciones internas en cualquier 2-categoría. Motivado por la categoría de gavillas el capítulo 2 empieza con un estudio de las topologías de Grothendieck. Después de un análisis detallado de este material se presenta lo que se entiende por *sitio fibrado*, esto es, una fibración que tiene una estructura de sitio, la motivación de este tipo de objetos viene dada por los *stacks* algebraicos. El capítulo 3 tiene como propósito presentar una aplicación directa de la teoría desarrollada en los capítulos 2 y 3. Para hacer esto, se estudia la categoría de los *espacios anillados* y se demuestra que existe una bifibración de esta categoría a la categoría de espacios topológicos **Top**. Los espacios locamente anillados que forman una subcategoría de los anillados son una subfibración de la bifibración descrita[3]. Puesto que **Top** tiene un sitio canónico asociado se tiene que esta bifibración es un sitio fibrado. La fibración descrita con anterioridad presenta la motivación para el capítulo 4 ya que las categorías fibras de esta tienen estructura de *categorías monoidales*. Pero antes de poder establecer el estudio de esta clase de objetos es necesario los funtores *restricción y extensión de escalares* en una categoría monoidal con suficiente estructura[4]. Este par de funtores forman una adjunción y así se obtiene una bifibración de la categoría de módulos sobre la categoría de monoides. Esta bifibración induce una fibración sobre fibraciones. Una vez desarrollado este material se concentra el estudio en las *categorías indexadas monoidales* y siguiendo la filosofía con la cuál se ha venido trabajando se obtiene la descripción de este en el lenguaje fibrado. Estos objetos reciben el nombre de *categoría fibrada monoidal*. Se presenta la forma en que se relacionan estos objetos y finalmente se obtiene el resultado deseado, a saber, que existe una 2-equivalencia entre las categorías fibradas monoidales y las categorías indexadas monoidales. Para finalizar se estudia lo que se entiende por monoides y módulos en una categoría fibrada monoidal.

[2]Siguiendo la filosofía del establecimiento del diccionario es posible probar, aunque no se hace en esta tesis, que existe una 2-equivalencia entre las bifibraciones con codominio **B** y los seudofuntores de **B** a la 2-categoría de adjunciones.

[3]Esta subfibración no es una subopfibración.

[4]A saber, que la categoría sea cerrada.

Los apéndices tienen como función presentar el material necesario para la comprensión de esta tesis. Se asume que el lector esta familiarizado con los resultados clásicos de teoría de categorías. El apéndice A presenta el lenguaje de la teoría de bicategorías que resulta necesario para la comprensión de esta tesis. El apéndice B sólo es usado en el capítulo 4 al estudiar las categorías fibradas monoidales y las categorías indexadas monoidales.

De esta forma, es a muy grandes rasgos el contenido de esta tesis.

Capítulo 1

Fibraciones de Grothendieck

1.1. Construcción de la K-Teoría Algebraica

En esta sección se presentará la construcción del funtor K_0 de la K-teoría algebraica[1], esto motivará el estudio de los seudofuntores con dominio en una categoría $\mathbf{C}$. Para hacer esto se supone que el lector está familiarizado con los resultados clásicos de la teoría de módulos, esto es: producto tensorial, suma de módulos, la adjunción del producto tensorial con el funtor representable, módulos proyectivos, etcétera. Este material puede ser encontrado en [Lan02] y [Rot09]. Para los resultados clásicos que serán utilizados de teoría de categorías véase [AHS09] [ML98]. En toda la sección los anillos son conmutativos con uno.

Considere el par de funtores adjuntos

$$F : \mathbf{MonAb} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathbf{Ab} : U \tag{1.1}$$

donde U es el funtor que olvida de la categoría de grupos abelianos a la categoría de monoides abelianos y F asigna a cada monoide abeliano su *grupo de Grothendieck*, esto es, para cada monoide abeliano M considere el subgrupo abeliano de $M \times M$ generado por la siguiente

[1]La K-teoría algebraica se formó de dos áreas aparentemente ajenas; geometría algebraica y topología algebraica. La primera se basa en el hecho de que el espacio de secciones globales de un haz vectorial de un espacio X suficientmente "decente" es un módulo proyectivo finitamente generado sobre el espacio de funciones reales (o complejas) en el espacio X. La segunda (de donde obtuvo su nombre) fue desarrollada por Grothendieck como el grupo de "clases" de haces vectoriales de una variedad algebraica para reformular el teorema de Riemann-Roch (para un análisis histórico del surgimiento de la K-teoría véase [Wei99]).

relación de equivalencia:

$$(m,n) \sim (m',n') \text{ si y sólo si existe } k \in M \text{ tal que } k+m+n' = k+m'+n \tag{1.2}$$

al tomar el grupo cociente se obtiene $F(M)$. Puesto que estos funtores son adjuntos se tiene la siguiente propiedad universal; si M es un monoide abeliano, G un grupo abeliano y $f : M \to G$ un morfismo de monoides, entonces existe un único morfismo de grupos $\overline{f} : FM \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "f"'] & FM \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & G \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

donde i_M es la unidad de la adjunción. Ahora recuerde que un R módulo P es proyectivo si, para todo epimorfismo de R módulos $A \xrightarrow{f} B \to 0$ y cualquier morfismo $h : P \to B$, se tiene que existe $k : P \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Esta condición es equivalente a que el funtor

$$_R\mathbf{Mod}\,(P, \_) : {_R\mathbf{Mod}} \to \mathbf{Ab} \tag{1.5}$$

sea exacto derecho. Un resultado clásico de la teoría de módulos dice que el siguiente par de funtores son adjuntos:

$$B \otimes_R \_ : {_R\mathbf{Mod}} \underset{\perp}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} {_S\mathbf{Mod}} : {_S\mathbf{Mod}}(B, \_) \tag{1.6}$$

donde B es un (R,S)-módulo. Sea $_R\mathbf{Proyfin}$ la subcategoría plena de $_R\mathbf{Mod}$ de los R-módulos proyectivos finitamente generados. Defínase la relación de equivalencia en los objetos de $_R\mathbf{Proyfin}$ que identifica a los módulos isomorfos. Sea $_R\overline{\mathbf{Proyfin}}$ la clase de objetos bajo esta relación de equivalencia, entonces $_R\overline{\mathbf{Proyfin}}$ es un monoide abeliano con el coproducto de módulos como operación. Esto es claro ya que el módulo 0 es R-módulo proyectivo finitamente generado (es finitamente generado y es inicial en $_R\mathbf{Mod}$). Por otro lado, si A y B están en $_R\mathbf{Proyfin}$ entonces el coproducto $A \oplus_R B$ está en $_R\mathbf{Proyfin}$ y más aún $\overline{A \oplus B} = \overline{B \oplus A}$ donde $\overline{A \oplus B}$ es la clase de equivalencia de R módulos proyectivos finitamente generados isomorfos a $A \oplus B$.

Sea **Anillos** la categoría de anillos conmutativos con uno y considere la asignación que a cada anillo R le asocia la categoría de R-módulos proyectivos finitamente generados ${}_R\mathbf{Proyfin}$ y para cada morfismo de anillos $f : R \to S$ el funtor

$$f_* : {}_R\mathbf{Proyfin} \longrightarrow {}_S\mathbf{Proyfin} \tag{1.7}$$

que a cada X en ${}_R\mathbf{Proyfin}$ le asigna el S módulo $S \otimes_R X$. Este producto tensorial es válido ya que S es un R módulo con la operación inducida por f, esto es, $s \cdot r = sf(r)$. Ahora $S \otimes_R X$ es un S- módulo finitamente generado (puesto que X es finitamente generado), queda demostrar que es proyectivo. Para esto sean $g : A \to B \to 0$ un epimorfismo de S módulos y $h : S \otimes_R X \to B$ un morfismo entonces, usando la adjunción (1.6), se tiene

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\overline{h}"] & \\ {}_S\mathbf{Mod}(S,A) \arrow[r, "\overline{f}"'] & {}_S\mathbf{Mod}(S,B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

donde $\overline{f}$ es epimorfismo ya que S es S-proyectivo, pero X es R-proyectivo, entonces existe $k : X \to_S \mathbf{Mod}(S, A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\overline{h}"] \arrow[dl, dashed, "k"'] & \\ {}_S\mathbf{Mod}(S,A) \arrow[r, "\overline{f}"'] & {}_S\mathbf{Mod}(S,B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

usando de nuevo la adjunción (1.6) existe $\overline{k} : S \otimes_R X \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & S \otimes_R X \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "\overline{k}"'] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

por lo tanto $S \otimes_R X$ está en ${}_S\mathbf{Proyfin}$. Esta construcción induce una función

$${}_R\overline{\mathbf{Proyfin}} \xrightarrow{\overline{f}_*} {}_S\overline{\mathbf{Proyfin}} \tag{1.11}$$

que a cada clase de isomorfismo $\overline{X}$ le asigna la clase de $S \otimes_R X$. Esta función es un morfismo de monoides, esto es consecuencia del teorema clásico que afirma que el producto tensorial preserva coproductos, esto es, para toda familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de R-módulos y todo R-módulo A, se tiene que

$$A \otimes_R (\bigoplus_{i \in I} X_i) \cong \bigoplus_{i \in I} (A \otimes_R X_i) \tag{1.12}$$

por lo tanto $\overline{f}_*$ es un morfismo de monoides. Se define

$$K_0(R) = F({}_R\overline{\mathbf{Proyfin}})$$

donde F es el funtor definido por (1.3). K_0 es un funtor de la categoría de anillos a la categoría de grupos abelianos. Para ver esto considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & {}_R\mathbf{Proyfin} \arrow[d, "f_*"] \arrow[dd, bend left, "(gf)_*"] \\ S \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"] & {}_S\mathbf{Proyfin} \arrow[d, "g_*"] \\ T \arrow[r, mapsto] & {}_T\mathbf{Proyfin} \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

estos funtores conmutan *salvo isomorfismo* ya que si X es un R módulo proyectivo finitamente generado entonces

$$g_* f_*(X) = T \otimes_S (S \otimes_R X) \cong (T \otimes_S S) \otimes_R X \cong T \otimes_R X = (gf)_*(X)$$

por lo tanto K_0 es un funtor.

1.2. Fibraciones de Grothendieck

El diagrama (1.13) de la sección anterior describe un seudofuntor de **Anillos** (la categoría de anillos conmutativos con uno) a la 2-categoría **Cat** (para la definición de seudofuntor véase A.3). Los seudofuntores de una categoría $\Phi : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$ se encuentran en correspondencia (de hecho a nivel de 2-categorías) con las llamadas *fibraciones de Grothendieck*[2]. Se empezará a análizar las fibraciones de Grothendiek y sus principales propiedades para después dar lugar a la construcción del seudofuntor asociado a esta fibración, esperando que de esta forma sea *natural* el proceso inverso, esto es, dado un seudofuntor el método por el cual se obtiene una fibración es la llamada *construcción de Grothendieck*. Algunas referencias para cubrir este material son [Her03], [Str80] y [Fan05].

Definición 1.2.1. *Sean $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ un funtor y B un objeto de $\mathbf{B}$. La* categoría fibra *en B, denotada por $\mathbf{E}_B$, es la subcategoría de $\mathbf{E}$ cuyos objetos E son aquellos que $P(E) = B$ y cuyas flechas f son aquellas que $P(f) = 1_B$. Una flecha que está en $\mathbf{E}_B$ se dice que es* vertical*.*

[2]El concepto de fibraciones entre categorías se debe a Alexander Grothendieck en [Gro61].

Definición 1.2.2. *Sean $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ un funtor y $f : A \to B$ en $\mathbf{B}$. Una flecha $h : D \to E$ en $\mathbf{E}$ es cartesiana sobre f si $P(h) = f$ y cumple la siguiente propiedad:*

- *Para toda $k : K \to E$ en $\mathbf{E}$ y para toda $g : P(K) \to A$ en $\mathbf{B}$ tal que $P(k) = f \circ g$ existe una única $l : K \to D$ tal que $h \circ l = k$ y $P(l) = g$. En diagramas se tiene*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "\exists ! l"] \arrow[rr, bend left, "\forall k"] & D \arrow[r, "h"] & E & \mathbf{E} \arrow[d, "P"] \\ P(k) \arrow[r, "\forall g"] \arrow[rr, bend right, "P(k)"'] & A \arrow[r, "f"] & B & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{1.14}$$

En esta situación se dice que $D \xrightarrow{h} E$ es un levantamiento cartesiano *de f en E y que D es una* imagen inversa *de B sobre f.*

Proposición 1.2.3. *Sean $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ un funtor, h y h' levantamientos cartesianos de f en E, entonces difieren por un único isomorfismo vertical. Esto es, si $D \xrightarrow{h} E$ y $D' \xrightarrow{h'} E$ son levantamientos cartesianos de f, entonces existe un único isomorfismo vertical $D \xrightarrow{\cong} D'$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, dashed, "\cong"'] \arrow[dr, "h"] & \\ D' \arrow[r, "h'"'] & E \end{tikzcd} \tag{1.15}$$

Demostración Sean $D \xrightarrow{h} E$ y $D' \xrightarrow{h'} E$ levantamientos cartesianos de f sobre E, entonces se tienen los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, dashed, shift left, "!_1"] \arrow[rr, bend left, "h'"] & D \arrow[l, dashed, shift left, "!_2"] \arrow[r, "h"] & E & \mathbf{E} \arrow[d, "P"] \\ A \arrow[r, "1_A"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & A \arrow[r, "f"] & B & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{1.16}$$

como h es un levantamiento cartesiano sobre f se tiene que existe una única $D' \xrightarrow{!_1} D$ flecha vertical tal que $h' = h \circ !_1$ y $P(!_1) = 1_A$, análogamente intercambiando h por h', se tiene que existe una única $D \xrightarrow{!_2} D'$ tal que $h = h' \circ !_2$ y $P(!_2) = 1_A$, con lo que $h = h \circ !_1 \circ !_2$ y $h' = h' \circ !_2 \circ !_1$ y usando la unicidad de los levantamientos cartesianos se tiene que $!_1 \circ !_2 = 1_D$ y $!_2 \circ !_1 = 1_{D'}$. Por lo tanto $D' \cong D$ mediante un único isomorfismo vertical.

Proposición 1.2.4. *Sean* $D \xrightarrow{h} E \xrightarrow{k} K$ *en* $\mathbf{E}$ *con* k *cartesiana, entonces* $k \circ h$ *es cartesiana si y sólo si* h *es cartesiana.*

Demostración Supóngase que $k \circ h$ es cartesiana y considere los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "!"] \arrow[rr, bend left, "x"] & D \arrow[r, "h"] & E \arrow[r, "k"] & K & \mathbf{E} \arrow[d, "P"] \\ P(X) \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "P(x)"'] & P(D) \arrow[r, "P(h)"] & P(E) \arrow[r, "P(k)"] & P(K) & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{1.17}$$

Sean x y g como en el diagrama (1.2) tales que $P(x) = P(h)g$, entonces

$$P(kx) = P(k)P(x) = P(k)P(h)g = P(kh)g$$

como $k \circ h$ es cartesiana existe una única $X \xrightarrow{!} D$ con $kh! = kx$ y $P(!) = g$, usando que k es cartesiana y que $P(x) = P(h)g = P(h!)$ se obtiene que $h! = x$ y es única con esta característica por la propiedad cartesiana de $k \circ h$. Ahora sea h cartesiana y considere los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "!"'] \arrow[drr, dashed, "!_1"] \arrow[drrr, bend left, "y"] & & & & \\ & D \arrow[r, "h"] & E \arrow[r, "k"] & K & \mathbf{E} \arrow[d, "P"] \\ P(X) \arrow[r, "g"] \arrow[rrr, bend right, "P(y)"'] & P(D) \arrow[r, "P(h)"] & P(C) \arrow[r, "P(k)"] & P(K) & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{1.18}$$

Sea g con $P(y) = P(kh)g$, como k es cartesiana existe una única $X \xrightarrow{!_1} E$ con $k!_1 = y$ y $P(!_1) = P(h)g$, usando que h es cartesiana se tiene que existe una única $X \xrightarrow{!} D$ con $h! =!_1$ y $P(!) = g$ y es única con esta propiedad por la cartesianidad de k y de h.

Proposición 1.2.5. *Cualquier isomorfismo en* $\mathbf{E}$ *es cartesiano, en particular las identidades son cartesianas.*

Demostración Sea $E' \xrightarrow{h} E$ isomorfismo en $\mathbf{E}$ y considere los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "xh^{-1}"] \arrow[rr, bend left, "x"] & E' \arrow[r, "h"] & E & \mathbf{E} \arrow[d, "P"] \\ P(X) \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "P(x)"'] & A \arrow[r, "f"] & B & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{1.19}$$

donde $f = P(h)$, entonces es claro que h es cartesiana ya que

$$P(xh^{-1}) = PxPh^{-1} = Pxf^{-1} = g$$

Proposición 1.2.6. *Una flecha en* $\mathbf{E}$ *es un isomorfismo si y sólo si es el levantamiento cartesiano de un isomorfismo.*

Demostración La necesidad es clara, sólo queda demostrar la suficiencia. Para esto sean f un isomorfismo y $\overline{f}$ un levantamiento cartesiano de f. Considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed, "t"] \arrow[rr, bend left, "1_E"] & E' \arrow[r, "\overline{f}"] & E & \mathbf{E} \arrow[d, "P"] \\ B \arrow[r, "f^{-1}"] & A \arrow[r, "f"] & B & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{1.20}$$

entonces por la propiedad de los levantamientos cartesianos existe una única $t : E \to E'$ tal que $\overline{f} \circ t = 1_E$ y $P(t) = f^{-1}$. Usando la unicidad de los levantamientos cartesianos se obtiene la identidad en E'.

Proposición 1.2.7. *Sean* $\mathbf{E} \xrightarrow{Q} \mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B}$ *funtores y* $h : E \to E'$ *en* $\mathbf{E}$ *cartesiana sobre* $Q(E') \xrightarrow{Q(h)=s} Q(E)$ *y* s *es cartesiana sobre* $A \xrightarrow{F(s)=f} B$*, entonces* h *es cartesiana sobre* f*.*

Demostración Considere los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "!"] \arrow[rr, bend left, "x"] & E \arrow[r, "h"] & E' & \mathbf{E} \arrow[d, "Q"] \\
Q(X) \arrow[r, dashed, "!_1"] \arrow[rr, bend left, "Q(x)"] & Q(E) \arrow[r, "s"] & Q(E') & \mathbf{A} \arrow[d, "F"] \\
PQ(X) \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "FQ(x)"'] & A \arrow[r, "F(s)=f"] & B & \mathbf{B}
\end{tikzcd} \tag{1.21}$$

con $fg = FQ(x)$, entonces como s es cartesiana sobre f existe una única $!_1$ como en el diagrama (1.21) tal que $s!_1 = Q(x)$ y $F(!_1) = g$, usando que h es cartesiana sobre s se tiene que existe una única $!$ con $h! = x$ y $Q(!) =!_1$, entonces $FQ(!) = F(!_1) = g$ y es única con esta propiedad ya que h es cartesiana sobre s y s es cartesiana sobre f.

Definición 1.2.8. *Una* fibración de Grothendieck sobre $\mathbf{B}$ *es un funtor* $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ *tal que para toda* $f : A \to B$ *en* $\mathbf{B}$ *y todo objeto* E *de* $\mathbf{E}$ *en la fibra de* B *existe un levantamiento cartesiano de* f *en* E*. En esta situación se dice que* $\mathbf{E}$ *es una* categoría fibrada sobre $\mathbf{B}$.

Definición 1.2.9. *Un clivaje de la fibración* P *es una elección de un levantamiento cartesiano para cada* $f : A \to B$ *en* $\mathbf{B}$ *y cada* E *en* $\mathbf{E}_B$*. Se suele denotar un clivaje por su función de elección* $\lambda(f, E) = \overline{f}_E : f^*(E) \to E$.

Usualmente se identifica una fibración sólo con el funtor, teniendo en cuenta que existe la elección de levantamientos cartesianos, esto es, formalmente se debe escribir (P, λ) para designar una fibración pero en la práctica se omite a menos que sea necesario señalarlo.

Las fibraciones se pueden pensar como objetos de una 2-categoría de notada por FIB. He aquí su descripción explícita:

- Los *objetos* son las fibraciones de Grothendieck $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$.
- Los *morfismos* $(F, G) : Q \to P$ de fibraciones son parejas de funtores $(F : \mathbf{D} \to \mathbf{E}, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B})$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathbf{E} \arrow[d, "P"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "G"'] & \mathbf{B}
\end{tikzcd} \tag{1.22}$$

donde $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ y $Q : \mathbf{D} \to \mathbf{A}$ son fibraciones.

- Los *2-morfismos* son pares de transformaciones naturales tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[d, "Q"'] & \mathbf{E} \arrow[d, "P"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & \mathbf{B}
\end{tikzcd} \tag{1.23}$$

esto es, $P \circ \alpha = \alpha' \circ Q$.

Definición 1.2.10. *Un morfismo de fibraciones* $(F, G) : Q \to P$ *es* cartesiano *si preserva levantamientos cartesianos, es decir, si* $h \in Fl(\mathbf{D})$ *es cartesiano sobre* $f \in Fl(\mathbf{A})$*, entonces* $F(h) \in Fl(\mathbf{E})$ *es cartesiano sobre* $G(f) \in Fl(\mathbf{B})$*. La 2-subcategoría de fibraciones, morfismos cartesianos y 2-morfismos es denotada por* FIB_c.

Definición 1.2.11. *La* categoría $FIB(\mathbf{B})$ *(resp.* $FIB_c(\mathbf{B})$*) es la 2-subcategoría de* FIB *(resp.* FIB_c*) cuyos objetos son fibraciones con codominio* $\mathbf{B}$*, los morfismos son aquellos cuyo funtor de las categorías bases es la identidad y los 2-morfismos son aquellos en los cuales la transformación natural entre los funtores identidades en* B *es la identidad.*

1.3. Construcción de Grothendieck

En esta sección se verá cómo a partir de una fibración $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ se puede obtener un seudofuntor de la forma $\Phi_P : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$. Esta construcción englobará toda la información relevante de la fibración, más aún, dado un seudofuntor de la forma $\Phi : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$ se verá que existe una construcción de "regreso", es decir, se puede obtener una fibración $P_\Phi : \mathbf{E}_\Phi \to \mathbf{B}$.

Sea (P, λ) una fibración donde $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$. Se busca capturar la información necesaria para definir un seudofuntor. Para hacer esto, sea B un objeto de $\mathbf{B}$ y considere la categoría fibra $\mathbf{E}_B$, la cual fue definida en la sección anterior (véase definición 1.2.1). Es claro que de esta forma se capturan todos los objetos E de $\mathbf{E}$ en las correspondientes categorías fibras de la imágenes de los objetos. ¿Qué sucede con los morfismos de $\mathbf{B}$? Para esto obsérvese que debido al clivaje λ asociado a la fibración, existe una biyección entre los morfismos de $\mathbf{E}$ y ciertas flechas verticales, esto es, para cualquier flecha $h : D \to E$ en $\mathbf{E}$ con $P(h) = f$ se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{h}"'] \arrow[dr, "h"] & \\ f^*E \arrow[r, "\overline{f}_E"'] & E \end{tikzcd} \tag{1.24}$$

por lo que se tiene la siguiente biyección

$$\{h : D \to E \,|\, P(h) = f : A \to B\} \cong \{\overline{h} : D \to f^*E \,|\, \overline{h} \in Mor(\mathbf{E}_A)\} \tag{1.25}$$

Esta correspondencia se tiene debido a la propiedad universal de los levantamientos cartesianos, con lo que se podría decir, grosso modo, que todas las flechas de $\mathbf{E}$ se encuentran en las fibras, lo que significa que son ciertas flechas verticales. Desde luego para obtener el seudofuntor se tiene que ver el panorama más globalmente y preguntarse ¿qué sucede con las composiciones y las identidades en $\mathbf{E}$? Para esto observe lo siguiente: Si $E \xrightarrow{1_E} E$ es una flecha identidad en $\mathbf{E}$ y $P(1_E) = 1_B$ entonces bajo la biyección (1.25) le corresponde la flecha vertical $(\delta_B)_E : E \to 1_B^*E$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, dashed, "\exists!(\delta_B)_E"'] \arrow[dr, "1_E"] & \\ 1_B^*E \arrow[r, "\overline{1}_B"'] & E \end{tikzcd} \tag{1.26}$$

Puesto que todo isomorfismo en $\mathbf{E}$ es cartesiano, entonces se tiene que 1_E es un levantamiento de 1_B en E, también se demostró que cualesquiera dos levantamientos cartesianos sobre la misma flecha y en el mismo objeto difieren por un único isomorfismo vertical, con lo que se obtiene que $(\delta_B)_E$ es un isomorfismo.

Sean $D \xrightarrow{h} E \xrightarrow{k} K$ flechas en $\mathbf{E}$ con $A \xrightarrow{P(h)=f} B \xrightarrow{P(k)=g} C$ y considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{h}"'] \arrow[ddd, dashed, bend right=60, "\exists!\overline{(g\circ f)}"'] & E \arrow[r, "k"] \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{k}"'] & K \\
f^*E \arrow[ur, "\overline{f}_E"] \arrow[d, dashed, "\exists!f^*(\overline{k})"'] & g^*K \arrow[ur, "\overline{g}_K"'] & \\
f^*g^*K \arrow[ur, "\overline{f}_{g^*K}"'] \arrow[d, dashed, "\exists!(\gamma_{g,f})_K"', "\cong"] & & \\
(g\circ f)^*K \arrow[uuurr, bend right, "\overline{(g\circ f)}_K"'] & &
\end{tikzcd} \tag{1.27}$$

los triángulos internos superiores de (1.27) conmutan por definición. $f^*(\overline{k})$ es la única flecha que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r, "\overline{f}_E"] \arrow[d, dashed, "\exists!f^*(\overline{k})"'] & E \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{k}"] \\
f^*g^*K \arrow[r, "\overline{f}_{g^*K}"'] & g^*K
\end{tikzcd} \tag{1.28}$$

debido a que la composición de levantamientos cartesianos es un levantamiento cartesiano y cualesquiera dos levantamientos cartesianos del mismo objeto, en el mismo codominio, difieren por un único isomorfismo vertical, se tiene que existe la flecha

$$\exists!(\gamma_{g,f})_K : f^*g^*K \xrightarrow{\cong} (g\circ f)^*K$$

que hace al triángulo inferior del diagrama (1.27) conmutar. Por lo tanto se tiene que todo el diagrama conmuta. De esta forma se puede definir el seudofuntor asociado a una fibración.

Teorema 1.3.1. *Sea (P,λ) una fibración con $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$, entonces existe un seudofuntor de la forma:*

$$\begin{aligned}
\Phi_P : \mathbf{B}^{op} &\to \mathbf{Cat} \\
A &\mapsto \Phi_P(A) = \mathscr{E}_A \\
A \xrightarrow{f} B &\mapsto \begin{tikzcd} \mathscr{E}_B \arrow[d, "f^*=\Phi_P(f)"] \\ \mathscr{E}_A \end{tikzcd}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

cuyos morfismos de estructura δ y γ estan dados por los diagramas 1.26 y 1.27 respectivamente.

Demostración La mayor parte de la demostración se ha establecido ya. Dado un morfismo $f : A \to B$ en $\mathbf{B}$ se tiene la siguiente asignación

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, mapsto, "\Phi_P"] & \mathbf{E}_B \arrow[d, "f^*=\Phi_P(f)"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, mapsto, "\Phi_P"] & \mathbf{E}_A \end{tikzcd} \tag{1.30}$$

El funtor f^* aplicado a una flecha $h \in \mathbf{E}_B$ es la única flecha vertical en la fibra de A que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*D \arrow[r, "\overline{f}_D"] \arrow[d, dashed, "f^*(h)"'] & D \arrow[d, "h"] \\ f^*E \arrow[r, "\overline{f}_E"] & E \end{tikzcd} \tag{1.31}$$

Es claro que esta asignación hace de $f^* : \mathbf{E}_B \to \mathbf{E}_A$ un funtor (véase el diagrama (1.27)). Ahora considere la flecha identidad en $\mathbf{B}$, entonces la transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}_B \arrow[r, bend left, "1_{\mathbf{E}_B}"] \arrow[r, bend right, "1_B^*"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\delta_B"] & \mathbf{E}_B \end{tikzcd} \tag{1.32}$$

tiene por componente en cada objeto E a $(\delta_B)_E$, el único isomorfismo vertical que hace que el diagrama (1.26) conmute. Sólo queda demostrar que esta asignación es natural en E, para esto sea $E' \xrightarrow{h} E$ en $\mathbf{E}_B$ y considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "(\delta_B)_{E'}", "\cong"'] \arrow[d, "h"'] & 1_B^*E' \arrow[r, "(\overline{1}_B)_{E'}"] \arrow[d, "1_B^*(h)"] & E' \arrow[d, "h"] \\ E \arrow[r, "\cong", "(\delta_B)_E"'] & 1_B^*E \arrow[r, "(\overline{1}_B)_E"'] & E \end{tikzcd} \tag{1.33}$$

el cuadro interno derecho de (1.33) conmuta por la definición de 1_B^* y el cuadro interno izquierdo conmuta ya que $(\delta_B)_E$ y $(\overline{1}_B)_E$ son inversos. Por lo tanto $\delta_B : 1_{\mathbf{E}_B} \to 1_B^*$ es natural. Ahora sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ en $\mathbf{B}$, entonces se tiene la siguiente transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}_C \arrow[r, bend left, "g^*"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)^*"'] & \mathbf{E}_B \arrow[r, bend left, "f^*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma_{g,f}"] & \mathbf{E}_A \\ & {} & \end{tikzcd} \tag{1.34}$$

donde $\gamma_{g,f}$ tiene por componente en cada objeto K el único isomorfismo vertical que hace que el triángulo inferior del diagrama (1.27) conmute. Falta probar que esta transformación es natural. Para esto sea $E \xrightarrow{k} K$ en $\mathbf{E}_C$ y considere el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(g \circ f)^* E \arrow[r, "(\gamma_{g,f})_E"] \arrow[d, "(g\circ f)^* k"'] \arrow[rrr, bend left, "\overline{(g\circ f)}_E"] & f^* g^* E \arrow[r, "\overline{f}_{g^* E}"] \arrow[d, "f^* g^* k"] & g^* E \arrow[r, "\overline{g}_E"] \arrow[d, "g^* k"] & E \arrow[d, "k"] \\
(gf)^* K \arrow[r, "(\gamma_{g,f})_K"'] \arrow[rrr, bend right, "\overline{(g\circ f)}_K"'] & f^* g^* K \arrow[r, "\overline{f}_{g^* K}"'] & g^* K \arrow[r, "\overline{g}_K"'] & K
\end{tikzcd}
\tag{1.35}
$$

donde el cuadro interno izquierdo de (1.35) conmuta ya que el tríangulo interno superior e interior conmutan por definición (véase el diagrama (1.27)), el interno central y derecho conmutan por la definición de los funtores f^* y g^* respectivamente, usando el hecho de que $\overline{g}_K \circ \overline{f}_{g^* K}$ es cartesiana y puesto que al aplicarle el funtor P al primer cuadro se obtiene la identidad en C, por lo tanto, se tiene $\gamma_{g,f}$ es natural. Las condiciones de coherencia se omitirán ya que no representan mayor dificultad. ∎

A partir de las observaciones dadas en el inicio de la sección se ha podido asociar el seudofuntor $\Phi_P : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$ a una fibración P. Es natural preguntarse por la construcción inversa, esto es, ¿se puede construir una fibración $P_\Phi : \mathbf{E}_\Phi \to \mathbf{B}$ asociada a un seudofuntor P de tal forma que esta construcción englobe toda la información? La respuesta es *sí* y para esto se tiene la siguiente construcción dada por Grothendieck.

- Los *objetos* de $\mathbf{E}_\Phi$ son parejas (D, A) donde A es un objeto de $\mathbf{B}$ y D es un objeto en $\Phi(A)$.

- Un *morfismo* $(D, A) \xrightarrow{(h,f)} (E, B)$ en $\mathbf{E}_\Phi$ es una pareja de morfismos donde $f : A \to B$ es una flecha en $\mathbf{B}$ y $h : D \to f^* E$ es una flecha en $\Phi(A)$ donde $f^* = \Phi(f) : \Phi(B) \to \Phi(A)$ (véase el diagrama 1.24).

- La *composición* está dada de la siguiente forma. Sea

$$(D, A) \xrightarrow{(h,f)} (E, B) \xrightarrow{(k,g)} (K, C)$$

un par de flechas $\mathbf{E}_\Phi$, entonces $(k,g)\circ(h,f):(D,A)\to(K,C)$ es la flecha en $\mathbf{E}_\Phi$ cuya segunda coordenada es $g\circ f$ y primera coordenada es la flecha en $\Phi(A)$ dada por (véase el diagrama (1.27)).

$$D \xrightarrow{h} f^*E \xrightarrow{f^*k} f^*g^*K \xrightarrow[\cong]{\gamma_{g,f}} (g\circ f)^*K \tag{1.36}$$

donde $\gamma_{g,f}$ es el isomorfismo de estructura de composición del seudofuntor Φ.

- La *identidad* en un objeto (E,B) es la pareja $((\delta_B)_E, 1_B)$ donde $(\delta_B)_E$ es el isomorfismo de estructura de identidad del seudofuntor Φ.

Es fácil ver que esta composición hace de $\mathbf{E}_\Phi$ una categoría. Se define el funtor $P_\Phi:\mathbf{E}_\Phi\to\mathbf{B}$ como el funtor que proyecta en la segunda coordenada. Sólo queda demostrar que este funtor es en realidad una fibración sobre $\mathbf{B}$. Para esto sean $f:A\to B$ un morfismo en $\mathbf{B}$ y (E,B) un objeto de $\mathbf{E}_\Phi$, entonces la flecha $(1_{f^*E},f):(f^*E,A)\to(E,B)$ es un levantamiento cartesiano de f en (E,B). Para ver esto considere los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
(K,C) \arrow[r, dashed, "(!,g)"'] \arrow[rr, bend left, "(x,h)"] & (f^*E,A) \arrow[r, "(1_{f^*E},f)"'] & (E,B) & \mathbf{E_\Phi} \arrow[d, "P"] \\
C \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & B & \mathbf{B}
\end{tikzcd} \tag{1.37}$$

si existe una flecha $(!,g):(K,C)\to(f^*E,A)$ tal que el diagrama (1.37) conmuta en $\mathbf{E_\Phi}$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathbf{E}$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "!"] \arrow[rrd, "x"] & & \\
g^*f^*E \arrow[r, "1"'] & g^*f^*E \arrow[r, "(\gamma_{g,f})_E"'] & (g\circ f)^*E
\end{tikzcd} \tag{1.38}$$

esto implica que $!\circ(\gamma_{g,f})_E = x$ y así $! = (\gamma_{g,f})_E^{-1}\circ x$. De esto se concluye que

$$(K,C)\xrightarrow{((\gamma_{g,f})_E^{-1}\circ x,g)}(f^*E,A)$$

es la única flecha que hace conmutar el diagrama 1.37 y que $P_\Phi((\gamma_{g,f})_E^{-1}\circ x, g) = g$. Por lo tanto $P_\Phi:\mathbf{E}_\Phi\to B$ es una fibración de Grothendieck.

Entonces dada una fibración P es posible asociarle el seudofuntor asociado a esta fibración Φ_P y usando la construcción de Grothendieck asociarle a este seudofuntor la fibración P_{Φ_P} e inversamente, esto es, dado un seudofuntor Φ es posible aplicar un proceso análogo para obtener el seudofuntor Φ_{P_Φ}. La forma en que se relación estas dos construcciones queda expresada en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.2. *Existe una 2-equivalencia entre la 2-categoría $FIB(\mathbf{B})$ y $\mathbf{Cat}^{\mathbf{B}^{op}}$.*

Se ha establecido ya la asignación 2-funtorial entre los objetos de cada 2-categoría dada por la construcción de Grothendieck y el teorema (1.3.1). Mostrar que esto es realmente una 2-equivalencia es directo aunque tedioso. Una prueba de esto puede encontrase en [Joh02] o en [Bor94b]. ∎

Como ejemplos de categorías fibradas se tienen:

1. Toda categoría $\mathbf{C}$ es una categoría fibrada sobre la categoría discreta con un único objeto.

2. Sea $\mathbf{C} \xrightarrow{\phi} \mathbf{D}$ isomorfismo de categorías, entonces $\mathbf{C}$ es una categoría fibrada sobre $\mathbf{D}$.

3. Sea $\mathbf{C}$ una categoría. La categoría de flechas de $\mathbf{C}$ denotada por $Fl(\mathbf{C})$ consta de la siguiente información:

   - Los *objetos* son las flechas de $\mathbf{C}$.
   - Las *flechas* $(h,k) : f \to g$ son parejas de morfismos (h,k) en $\mathbf{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C' \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd} \tag{1.39}$$

   - La *composición* de flechas $e \xrightarrow{(h,k)} f \xrightarrow{(h',k')} g$ es $e \xrightarrow{(h'h,k'k)} h$.
   - La *identidad* en un objeto $f : A \to B$ es la pareja $(1_A, 1_B)$.

   Sea $P : Fl(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ el funtor que a cada objeto $A \xrightarrow{f} B$ de $Fl(\mathbf{C})$ le asocia su codominio B y a cada morfismo $(h,k) : f \to g$ la flecha k. Si $\mathbf{C}$ tiene productos fibrados, entonces P es una fibración. Para demostrar esto, sean f en $\mathbf{C}$ y e un objeto en $Fl(\mathbf{C})$ tales que $P(e) = B$. Un levantamiento cartesiano de f en e es el producto fibrado de f a lo largo de e, ya que por la propiedad universal del producto fibrado al considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "x"] \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[ddr, "q"'] & Y \arrow[dr, "g"] & \\
& D \times_B A \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & A \arrow[d, "f"] \\
& D \arrow[r, "e"] & B
\end{tikzcd} \tag{1.40}$$

si $f^*e \xrightarrow{\overline{f}_e} e = p_2 \xrightarrow{(p_1,f)} e$ se tiene que $P(p_1, f) = f$ y supóngase que existen $(q, z) : x \to e$ en $Fl(\mathbf{C})$ y $g : Y \to A$ tal que $P(q, z) = f \circ g$, entonces $z = f \circ g$, con lo que $e \circ q = z \circ x = f \circ g$. Por la propiedad universal del producto fibrado se tiene que existe una única flecha $! : X \to D \times_B A$ tal que factoriza a q y a $g \circ x$. Por lo tanto $(p_1, f) : p_2 \to e$ es un levantamiento cartesiano de f en e.

4. Los productos fibrados existen en la categoría **Top** de espacios topológicos. Por el ejemplo anterior se tiene que la categoría de flechas $Fl(\mathbf{Top})$ es fibrada sobre **Top**.

5. Considere la subcategoría de $Fl(\mathbf{Top})$ que consiste de flechas que son *n-haces vectoriales reales*, i.e. funciones continuas $p : E \to X$ que cumplen lo siguiente:

   - Para cada punto $x \in X$ el conjunto $p^{-1}(x)$ tiene una estructura de n-espacio vectorial y existe una cubierta $\mathscr{A}$ de conjuntos abiertos de X, tal que para cada $U \in \mathscr{A}$ existe un homeomorfismo

     $$h : U \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U) \tag{1.41}$$

     que hace conmutar el siguiente diagrama

     $$\begin{tikzcd}
     U \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\
     & X &
     \end{tikzcd} \tag{1.42}$$

     tal que h induce un isomorfismo de espacios vectoriales entre $p^{-1}(b)$ y $b \times \mathbb{R}^n$ para todo $b \in U$. Los morfismos de haces vectoriales son funciones continuas entre el espacio base que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo

     $$\begin{tikzcd}
     E \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\
     & X &
     \end{tikzcd} \tag{1.43}$$

y que se restrinje a un morfismo lineal en las fibras. Como el producto fibrado de haces vectoriales es un haz vectorial se tiene que esta categoría es una fibración sobre **Top**.

6. Un *haz fibrado* es una función continua $p : E \to X$ tal que para todo $x \in X$ existe un abierto U de X con $x \in X$ tal que existe un homeomorfismo de la siguiente forma

$$\phi : p^{-1}(U) \to U \times F \tag{1.44}$$

donde F es un espacio topológico y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd} . \tag{1.45}$$

Los morfismos de haces fibrados son funciones continuas entre los espacios bases. De forma análoga a los haces vectoriales, la categoría de haces fibrados forma una fibración sobre **Top**.

7. Considere el funtor $\mathbf{Top} \xrightarrow{U} \mathbf{Con}$ que olvida de la categoría de espacios topológicos a la categoría de conjuntos y sea $f : Z \to UY$ una función donde Y es un espacio topológico, entonces la topología más gruesa en Z con la que f es continua está dada por

$$\tau_Z = \{V \subseteq Z \,|\, V = f^{-1}(A) \text{ con } A \text{ abierto}\}.$$

Es fácil ver que si T es un espacio topológico, $T \xrightarrow{g} (Z, \tau_Z)$ es continua si y sólo si la siguiente función es continua

$$T \xrightarrow{g} (Z, \tau_Z) \xrightarrow{f} Y \tag{1.46}$$

Con esto es claro que U es una fibración.

8. El siguiente ejemplo usa las nociones de *topología de Grothendieck, sitio y gavillas en un sitio*, las cuales no han sido definidas aún pero que serán estudiadas ampliamente en el capítulo 2 (véase 2.2). El lector que así lo prefiera podrá regresar después a este ejemplo cuando se hayan estudiado dichos conceptos.

Sean $\mathbf{C}$ una categoría, $(\mathbf{C}, J)$ una topología de Grothendieck sobre $\mathbf{C}$ y X un objeto de $\mathbf{C}$, considere la categoría $\mathbf{C}/X$ cuyos objetos son morfismos $\alpha : A \to X$ de $\mathbf{C}$ con codominio X y cuyos morfismos $f : \alpha \to \beta$ son flechas $f : A \to B$ en $\mathbf{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{1.47}$$

Sea J_X la topología de Grothendieck en $\mathbf{C}/X$ definida como sigue: una familia $\{f_i : \beta_i \to \beta \,|\, i \in I\}$, donde $\beta_i : B_i \to X$, es una criba cubriente de $\beta : B \to X$ si y sólo si $\{f_i : B_i \to B\}_I$ es un criba cubriente de B. Considere $\mathrm{Gav}(\mathbf{C}/X, J_X)$ la categoría de gavillas en el sitio $(\mathbf{C}/X, J_X)$ y sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces f induce un funtor de la siguiente forma

$$\mathrm{Gav}(\mathbf{C}/Y, J_Y) \longrightarrow \mathrm{Gav}(\mathbf{C}/X, J_X) \tag{1.48}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, mapsto, "f^*"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] & & f^*G \arrow[d, Rightarrow, "f^*\alpha"] \\ F \arrow[rr, mapsto, "f^*"] & & f^*F \end{tikzcd}$$

donde $f^*G : (\mathbf{C}/X)^{op} \to \mathbf{Con}$ es la gavilla que en cada objeto $C \xrightarrow{c} X$ en $\mathbf{C}/X$ se tiene $f^*G(c) = G(f \circ c)$ y si $c \xrightarrow{\phi} c'$ es un morfismo en $\mathbf{C}/X$, entonces

$$f^*G(\phi) = G(f \circ \phi) : G(f \circ c') \to G(f \circ c)$$

y en cada transformación natural $\alpha : G \Rightarrow F$ en $\mathrm{Gav}(\mathbf{C}/Y, J_Y)$

$$f^*\alpha : f^*G \Rightarrow f^*F$$

es la transformación donde en cada objeto $C \xrightarrow{c} X$ se tiene $f^*\alpha_c = \alpha_{f\circ c}$.

Es claro que esta asignación es compatible con las composiones en $\mathbf{C}$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Gav}(\mathbf{C}/X, J_X) \\ Y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Gav}(\mathbf{C}/Y, J_Y) \arrow[u, "f^*"'] \\ Z \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Gav}(\mathbf{C}/Z, J_Z) \arrow[u, "g^*"'] \arrow[uu, bend right=60, "(g\circ f)^*"'] \end{tikzcd}$$

De esta forma se tiene un 2-funtor $\mathbf{C}^{op} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{Cat}$ y por la construcción de Grothendieck existen una categoría Gav/$\mathbf{C}$ y un funtor Gav/$\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ cuya fibra en un objeto X es isomorfa a Gav$(\mathbf{C}/X, J_X)$.

Existe una gran cantidad de variantes de este ejemplo al considerar gavillas de grupos abelianos, anillos, módulos, o sobre cualquier categoría monoidal (para la definición de categoría monoidal véase B.1.1).

9. Las *gavillas quasi-coherentes* forman una fibración sobre la categoría de *esquemas* (para un tratado sobre esquemas y fibraciones sobre esquemas véase [Fan05]).

1.4. Nociones Duales y Bifibraciones

Las nociones de flechas cartesianas, clivajes y fibraciones pueden ser dualizadas, obteniendose así los conceptos de *flecha opcartesiana, opclivajes y opfibraciones*. De hecho dado un funtor $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ se define la *op-propiedad* como la propiedad aplicada al funtor $P^{op} : \mathbf{E}^{op} \to \mathbf{B}^{op}$.[3] Por ejemplo una *opfibración de Grothendieck* es un funtor $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ que cumple la siguiente propiedad:

- Para toda $f : A \to B$ flecha en $\mathbf{B}$ y todo objeto D en la categría fibra de A, existe un morfismo $\underline{f}_D : D \to f_*D$ sobre f tal que, para cualesquiera morfismos $x : D \to X$ y $g : B \to P(X)$ con $g \circ f = P(x)$, se tiene que existe un único morfismo $m : f_*D \to X$ tal que $m \circ \underline{f}_D = x$ y $P(m) = g$. En diagramas se tiene lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\underline{f}_D"] \arrow[rr, bend left, "\forall x"] & f_*D \arrow[r, dashed, "m"] & X & \mathbf{E} \arrow[d, "P"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "P(x)"'] & B \arrow[r, "g"] & P(X) & \mathbf{B}
\end{tikzcd} \tag{1.49}$$

[3]Es usual en teoría de categorías distinguir a una noción de su dual con el prefijo "co", como en la noción de colímite y sus casos particulares (coproducto, conúcleo, coigualador, etc). En un principio Grothendieck llamó *cofibraciones* a las opfibraciones considerando a éstas como la noción dual de fibraciones. Desde un punto de vista mnemotécnico esto es preferible ya que esencialmente dice "invierte las flechas a las definiciones". Resulta ser que las opfibraciones son una fibración interna en la 2-categoría de $\mathbf{Cat}^{co}$ y no en $\mathbf{Cat}^{op}$, esto es, en la 2-categoría de categorías, funtores y transformaciones naturales, pero con estas últimas con dominio y codominio intercambiados. Esto es lo que justifica el uso de este prefijo.

Del mismo modo que en el caso de las fibraciones se puede obtener un seudofuntor, pero esta vez de la forma $\mathbf{B} \to \mathbf{Cat}$. Los funtores inducidos por los morfismos en $\mathbf{B}$ reciben el nombre de *funtores imagen directa*. Una *bifibración* es un funtor $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ que es fibración y opfibración. El siguiente teorema muestra la relación que existe entre los funtores imagen directa e inversa.

Teorema 1.4.1. *Sea $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ una bifibración, entonces para todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathbf{B}$ existe un par de funtores adjuntos*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}_B \arrow[d, bend left, "f^*"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{E}_A \arrow[u, bend left, "f_*"] \end{tikzcd} \tag{1.50}$$

donde los adjuntos izquierdo y derecho son los funtores imagen directa e inversa respectivamente. La unidad η^f y la counidad ε^f de esta adjunción se encuentran dadas por las siguientes relaciones

$$\begin{tikzcd} f^*f_*D \arrow[dr, "\overline{f}_{f_*D}"] & \\ D \arrow[u, dashed, "\exists! \eta^f_D"] \arrow[r, "\underline{f}_D"'] & f_*D \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & f_*f^*E \arrow[d, dashed, "\exists! \varepsilon^f_E"] \\ f^*E \arrow[ur, "\underline{f}_{f^*E}"] \arrow[r, "\overline{f}_E"'] & E \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{1.51}$$

Recíprocamente, si $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ es una fibración tal que cada funtor imagen inversa f^* admite un adjunto izquierdo f_* con unidad η^f, entonces P es una bifibración con morfismos opcartesianos dados por la siguiente relación

$$\begin{tikzcd} f^*f_*D \arrow[dr, "\overline{f}_{f_*D}"] & \\ D \arrow[u, "\eta^f_D"] \arrow[r, dashed, "\underline{f}_D"'] & f_*D \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{1.52}$$

Del mismo modo, si $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ es una opfibración tal que cada funtor imagen directa f_* admite un adjunto derecho f^* con counidad ε^f, entonces P es una bifibración con morfismos *cartesianos dados por la siguiente ralación*

$$\begin{tikzcd}
& f_*f^*E \arrow[d, "\varepsilon^f_E"] \\
f^*E \arrow[ur, "\underline{f}_{f^*E}"] \arrow[r, dashed, "\overline{f}_E"'] & E \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd} \tag{1.53}$$

Demostración Sean $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ una bifibración y $h : D \to D' \in \mathbf{E_A}$, para demostrar que η^f es natural considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rrr, "h"] \arrow[dr, "\underline{f}_D"] \arrow[dd, "\eta^f_D"'] & & & D' \arrow[dl, "\underline{f}_{D'}"'] \arrow[dd, "\eta^f_{D'}"] \\
& f_*D \arrow[r, "f_*(h)"] & f_*D' & \\
f^*f_*D \arrow[ur, "\overline{f}_{f_*D}"] \arrow[rrr, "f^*f_*(h)"] & & & f^*f_*D' \arrow[ul, "\overline{f}_{f_*D'}"']
\end{tikzcd} \tag{1.54}$$

todos los diagramas internos de (1.54) conmutan por las definiciones de η^f, f^* y f_* y usando que $\overline{f}_{f_*D'}$ es un levantamiento cartesiano, por lo tanto, se tiene que el cuadro exterior conmuta. Por lo tanto es natural. Para demostrar la naturalidad de la counidad, sea $k : E \to E' \in \mathbf{E_A}$ y considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rrr, "k"] & & & E' \\
& f^*E \arrow[ul, "\overline{f}_E"'] \arrow[r, "f^*(h)"] \arrow[dl, "\underline{f}_{f^*E}"] & F^*E' \arrow[ur, "\overline{f}_{E'}"] \arrow[dr, "\underline{f}_{f^*E'}"] & \\
f_*f^*E \arrow[uu, "\varepsilon^f_E"] \arrow[rrr, "f_*f^*(k)"] & & & f_*f^*E' \arrow[uu, "\varepsilon^f_{E'}"']
\end{tikzcd} \tag{1.55}$$

del mismo modo los cuadros internos de (1.55) conmutan por las definiciones de ε^f, f_* y f^* y usando que $\underline{f}_{f^*E}$ es un levantamiento cocartesiano se tiene que el cuadro exterior conmuta.

Queda demostrar las identidades triangulares. Para esto, considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^*f_*f^*E \arrow[rr, "\overline{f}_{f_*f^*E}"] \arrow[dd, "f^*(\varepsilon^f_E)"'] & & f_*f^*E \arrow[dd, "\varepsilon^f_E"] \\
& f^*E \arrow[ul, "\eta^f_{f^*E}"'] \arrow[ur, "\underline{f}_{f^*E}"] \arrow[dl, dashed, "1_{f^*E}"] \arrow[dr, "\overline{f}_E"'] & \\
f^*E \arrow[rr, "\overline{f}_E"'] & & E
\end{tikzcd} \tag{1.56}$$

el cuadro exterior de (1.56) conmuta por la definición de f^* y los internos por las definiciones de η^f_E y ε^f_E, entonces se tiene la siguiente identidad

$$\overline{f}_E \circ f^*(\varepsilon^f_E) \circ \eta^f_{f^*E} = \overline{f}_E$$

y puesto que cualesquiera dos levantamientos cartesianos difieren por un único isomorfismo vertical, se tiene que

$$f^*(\varepsilon^f_E) \circ \eta^f_{f^*E} = 1_{f^*E}$$

Análogamente para la otra igualdad triangular.

Ahora, si $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ es una fibración tal que para todo morfismo $f : A \to B$ existe un adjunto izquierdo f_* de f^*, entonces P es una bifibración con morfismos opcartesianos definidos por (1.52). Para ver esto considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(g\circ f)^*X \cong f^*g^*X \arrow[dr, "\overline{f}_{g^*X}"] \arrow[drr, bend left, "\overline{(g\circ f)}_X"] & & & \mathbf{E} \arrow[ddd, "P"] \\
f^*f_*D \arrow[u, "f^*(r^t)"] \arrow[dr, "\overline{f}_{f_*D}"] & g^*X \arrow[dr, "\overline{g}_X"] & & \\
D \arrow[u, "\eta^f_D"] \arrow[uu, dashed, bend left, "r"] \arrow[r, dashed, "\underline{f}_D"'] \arrow[rr, bend right, "x"'] & f_*D \arrow[u, "r^t"'] \arrow[r, dashed, "!"'] & X & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "P(x)"'] & B \arrow[r, "g"] & P(X) & \mathbf{B}
\end{tikzcd} \tag{1.57}$$

donde r es la única flecha vertical (puesto que la composición de levantamientos cartesianos es cartesiano) con $\overline{f}_{g^*X} \circ \overline{g}_X \circ r = x$, el triángulo superior de (1.57) conmuta por las propiedades de los levantamientos cartesianos, $\underline{f}_D$ se define como la flecha que hace conmutar el triángulo interno izquierdo, r^t es la única flecha transpueta de r bajo la adjunción $f_* \dashv f^*$ y ! es la flecha que hace conmutar el triángulo interno derecho. Es claro que $P(!) = g$, ahora $! \circ \underline{f}_D = x$, ya que $r = f^*(r^t) \circ \eta^f_D$ por propiedades generales de adjunciones, por lo tanto se tiene $! \circ \underline{f}_D = x$. Es fácil ver que esta flecha es única con esta propiedad. La prueba de la última parte de la proposición es esencialmente igual a esta demostración. ∎

1.5. Fibración en Fibraciones

La idea de este capítulo será estudiar el concepto de *fibraciones en fibraciones.* Estos objetos serán necesarios para poder establecer en la sección 4.3 el teorema fundamental de esta tesis, a saber, dado un seudofuntor cuyas categorías imágenes son monoidales (como en el caso del seudofuntor descrito por el diagrama 1.13) existe un seudofuntor a la categoría de fibraciones dada de forma natural por los objetos monoides y los módulos de la categoría monoidal (en el caso del seudofuntor anterior, serían las R-álgebras y los R-módulos de ${}_R\mathbf{Mod}$ respectivamente).

De la proposición (1.2.7) se obtiene

Lema 1.5.1. *Sean* $\mathbf{E} \xrightarrow{Q} \mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B}$ *fibraciones, entonces la composición* $\mathbf{E} \xrightarrow{Q \circ F} \mathbf{B}$ *es una fibración.*

De esta forma dadas dos fibraciones componibles, existe una forma canónica de asignarle una estructura de fibración a la composición. De esta estructura se sigue el siguiente lema

Lema 1.5.2. *Sean F, Q un par de fibraciones. Considere el siguiente morfismo de fibraciones:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "F \circ Q"'] & & \mathbf{A} \arrow[dl, "F"] \\ & \mathbf{B} & \end{tikzcd} \tag{1.58}$$

donde $Q \circ F$ tiene la estructura cánonica de fibración heredada por F y Q, entonces Q es cartesiano (para la definición de cartesiano véase 1.2.10).

Demostración Esto es claro por la construcción del clivaje de $F \circ Q$. ∎

Proposición 1.5.3. *Sean* $\mathbf{E} \xrightarrow{Q} \mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B}$ *un par de fibraciones y considere el funtor* $F \circ Q$ *con la estructura canónica de fibración inducida, entonces la siguiente correspondencia es un seudofuntor*

$$
\begin{gathered}
\mathbf{B}^{op} \to FIB_c \\
A \mapsto \begin{tikzcd} \mathbf{E}_A \arrow[d, "Q_A"] \\ \mathbf{A}_A \end{tikzcd} \\
A \xrightarrow{f} B \mapsto \begin{tikzcd} \mathbf{E}_B \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "Q_B"'] & \mathbf{E}_A \arrow[d, "Q_A"] \\ \mathbf{A}_B \arrow[r, "f^*"'] & \mathbf{A}_A \end{tikzcd}
\end{gathered}
\tag{1.59}
$$

Demostración El cuadrado de la asignación (1.59) conmuta por la definición de la fibración $F \circ Q$. Sólo queda demostrar que los morfismos son cartesianos. Para esto sea $\overline{g}_E : g^*E \to E$ un levantamiento cartesiano de $g : D' \to D \in \mathbf{A}_B$ en E y considere los siguientes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
(\overline{f}_{D'})^*(g^*E) \arrow[r, "\overline{\overline{f}}_{D_{g^*E}}"] \arrow[d, dashed, "f^*(\overline{g}_E)"'] & g^*E \arrow[d, "\overline{g}_E"] & \mathbf{E} \arrow[dd, "Q"] \arrow[dddd, bend left, "F\circ Q"] \\
(\overline{f}_D)^*E \arrow[r, "\overline{\overline{f}}_D"'] & E & \\
f^*D' \arrow[r, "\overline{f}_{D'}"] \arrow[d, "f^*g"'] & D' \arrow[d, "g"] & \mathbf{A} \arrow[dd, "F"] \\
f^*D \arrow[r, "\overline{f}_D"'] & D & \\
A \arrow[r, "f"] & B & \mathbf{B}
\end{tikzcd}
\tag{1.60}
$$

el cuadrado superior de (1.60) es mapeado al cuadrado intermedio por Q, para ver esto sólo queda demostrar que $Qf^*(\overline{g}_E) = f^*g$, lo anterior se obtiene del siguiente cálculo

$$g \circ \overline{f}_{D'} = \overline{f}_D \circ Qf^*(\overline{g}_E) = f^*g = \overline{f}_D \circ f^*g$$

y por lo tanto (por la cartesianidad de $\overline{f}_D$)

$$f^*g = Qf^*(\overline{g}_E)$$

Los morfismos de estructura de seudofuntor se construyen del hecho de que $F \circ Q$ es fibración.
$\blacksquare$

Un seudofuntor de la forma $\mathbf{B}^{op} \to FIB_c$ recibe el nombre de *categoría indexada sobre una categoría indexada* ($\mathbf{B}$).

1.6. Fibraciones Internas

Para finalizar este capítulo se definirá el concepto de *fibración interna*[4] en cualquier 2-categoría. Se demostrará que este nuevo concepto coincide con el original en el caso de la 2-categoría **Cat**. Para una exposición más detallada de las fibraciones en una 2-categoría véase [Str80] y [Her03].

Definición 1.6.1. *Sea $\mathbb{A}$ una 2-categoría. Una* fibración interna *en $\mathbb{A}$ es un morfismo $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B} \in \mathbb{A}$ que cumple las siguientes dos propiedades:*

- *Para todo $\mathbf{X} \in \mathbb{A}$, el funtor*

  $$\mathbf{A}(\mathbf{X}, P) = P_* : \mathbb{A}(\mathbf{X}, \mathbf{E}) \to \mathbb{A}(\mathbf{X}, \mathbf{B})$$

  es una fibración de Grothendieck.

- *Para todo morfismo $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X} \in \mathbb{A}$ el siguiente cuadro conmutativo es un morfismo cartesiano de fibraciones (i.e. preserva levantamientos cartesianos).*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}(\mathbf{X}, \mathbf{E}) \arrow[r, "P_*"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathbb{A}(\mathbf{X}, \mathbf{B}) \arrow[d, "f^*"] \\ \mathbb{A}(\mathbf{Y}, \mathbf{E}) \arrow[r, "P_*"'] & \mathbb{A}(\mathbf{Y}, \mathbf{B}) \end{tikzcd} \tag{1.61}$$

[4] El concepto expuesto en esta tesis corresponde al llamado *fibración estricta* que como se verá coincide con las fibraciones de Grothendieck.

El siguiente teorema muestra el hecho de que las fibraciones internas en la 2-categoría **Cat** son las fibraciones de Grothendieck.

Teorema 1.6.2. *Un morfismo en* **Cat** *es una fibración interna si y sólo si es una fibración.*

Demostración Considere la categoría puntual $\{*\}$, entonces se tiene que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Cat}(*, \mathbf{E}) \arrow[r, "P_*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathbf{Cat}(*, \mathbf{B}) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbf{E} \arrow[r, "P"] & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{1.62}$$

donde son claros los isomorfismos de categorías. Por lo tanto P es fibración. Recíprocamente, supóngase que $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ es fibración y sea $\mathbf{X}$ una categoría. Considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "!"] \arrow[rr, Rightarrow, bend left, "X"] & (\alpha)^* H \arrow[r, Rightarrow, "\overline{\alpha}_H"] & H & \mathbf{Cat}(\mathbf{X}, \mathbf{E}) \arrow[d, mapsto, "P_*"] \\ P \circ K \arrow[r, Rightarrow] & F \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"] & G & \mathbf{Cat}(\mathbf{X}, \mathbf{B}) \end{tikzcd} \tag{1.63}$$

para cada $Y \in \mathbf{X}$ sea $(\alpha)^* H_Y$ la flecha cartesiana definida al evaluar el diagrama (1.63) en Y, esto es

$$(\alpha)^* H_Y = (\overline{\alpha_Y})^*(HY)$$

la transformación definida de esta manera es natural ya que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} (\overline{\alpha_Y})^* GY \arrow[r, "\overline{\alpha_Y}"] \arrow[d, "(\overline{\alpha}_Y)^* Gf"'] & GY \arrow[d, "f"] \\ (\overline{\alpha_{Y'}})^* GY' \arrow[r, "\overline{\alpha_{Y'}}"'] & GY' \end{tikzcd} \tag{1.64}$$

La única transformación natural que completa el diagrama (1.63) es la que en cada componente Y es la única flecha que hace conmutar el diagrama evaluado en Y. La naturalidad se sigue de la cartesianidad de $\overline{\alpha_{Y'}}$ en el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
KY \arrow[r, "!_Y"] \arrow[d, "Kf"'] \arrow[rr, bend left, "X_Y"] & (\overline{\alpha_Y})^*GY \arrow[r, "\overline{\alpha_Y}"] \arrow[d, "(\overline{\alpha}_Y)^*Gf"] & GY \arrow[d, "f"] \\
KY' \arrow[r, "!_{Y'}"'] \arrow[rr, bend right, "X_{Y'}"'] & (\overline{\alpha_{Y'}})^*GY' \arrow[r, "\overline{\alpha_{Y'}}"'] & GY'
\end{tikzcd}
\tag{1.65}
$$

queda demostrar que el siguiente diagrama conmutativo es un morfismo de fibraciones

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Cat}(\mathbf{X},\mathbf{E}) \arrow[r, "P_*"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathbf{Cat}(\mathbf{X},\mathbf{B}) \arrow[d, "f^*"] \\
\mathbf{Cat}(\mathbf{Y},\mathbf{E}) \arrow[r, "P_*"'] & \mathbf{Cat}(\mathbf{Y},\mathbf{B})
\end{tikzcd}
\tag{1.66}
$$

para toda funtor $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$. Sea α una 2-flecha en $\mathbf{Cat}(\mathbf{X},\mathbf{B})$ y $(\alpha)^*H$ un levantamiento cartesiano de α sobre H, entonces

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & f^*(\overline{\alpha}) \arrow[rrrr, mapsto, "P_*"] \arrow[d, phantom, "\|"] & & & & f^*(\alpha) \arrow[d, phantom, "\|"] & \\
\mathbf{Y} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1"] & \mathbf{X} \arrow[r, bend left, "(\overline{\alpha})^*G"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\overline{\alpha}"] & \mathbf{E} & & \mathbf{Y} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1"] & \mathbf{X} \arrow[r, bend left, "P\circ F"] \arrow[r, bend right, "P\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}
\tag{1.67}
$$

y considere el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Y} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1"] \arrow[rr, bend left=60, "K"] \arrow[rr, bend right=60, "K"'] & \mathbf{X} \arrow[r, bend left, "(\alpha)^*H"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\overline{\alpha}"] \arrow[u, phantom, "\overline{\varrho}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\beta"] & \mathbf{E} \arrow[r, mapsto, "P_*"] & \mathbf{Y} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1"] \arrow[rr, bend left=60, "K"] \arrow[rr, bend right=60, "K"'] & \mathbf{X} \arrow[r, bend left, "(\alpha)^*H"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\overline{\alpha}"] \arrow[u, phantom, "\varrho"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\beta"] & \mathbf{E} \arrow[r, "P"] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}
\tag{1.68}
$$

donde $\beta : K \Rightarrow Hf$, $\varrho : PK \Rightarrow P(\alpha)^*Hf$. Queda construir una transformación natural

$\overline{\varrho} : K \Rightarrow (\alpha)^* Hf$ tal que $P_*(\overline{\varrho}) = \varrho$. Para esto considere el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
KY \arrow[r, dashed, "\overline{\varrho}_Y"] \arrow[rr, bend left, "\beta_Y"] & ((\alpha)^*H)f(Y) \arrow[r, "\overline{\alpha}_{f(Y)}"] & Hf(Y) & \mathbf{E} \arrow[d, "P"] \\
PKY \arrow[r, "\varrho_Y"] \arrow[rr, bend right, "P\beta_Y"'] & P((\alpha)^*H)f(Y) \arrow[r, "P\overline{\alpha}_{f(Y)}", "\alpha_{f(Y)}"'] & PHf(Y) & \mathbf{B}
\end{tikzcd}
\tag{1.69}
$$

$\overline{\varrho}_Y : KY \Rightarrow (\alpha)^* Hf(Y)$ es la única flecha que hace conmutar la parte superior del diagrama (1.69) dado que P es fibración). $\overline{\varrho}$ es natural ya que para cualquier flecha $h : Y \to Y'$ se tiene el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
KY \arrow[r, "\overline{\varrho}_Y"] \arrow[d, "Kh"] \arrow[rr, bend left, "\beta_Y"] & ((\alpha)^*H)f(Y) \arrow[r, "\overline{\alpha}_{f(Y)}"] \arrow[d, "((\alpha)^*H)f(h)"] & Hf(Y) \arrow[d, "Hf)(h)"] \\
KY' \arrow[r, "\overline{\varrho}_{Y'}"'] \arrow[rr, bend right, "\beta'_Y"'] & ((\alpha)^*H)f(Y') \arrow[r, "\overline{\alpha}_{f(Y')}"'] & Hf(Y')
\end{tikzcd}
\tag{1.70}
$$

donde el cuadro interno izquierdo de (1.70) conmuta ya que los otros conmutan. Lo anterior se sigue de la cartesianidad de $\overline{\alpha}_{f(Y')}$ y puesto que al aplicar el funtor P al primer cuadro se obtiene un cuadro conmutativo (puesto que ϱ es natural). Es claro que $P_*(\overline{\varrho}) = \varrho$, $f^*(\overline{\alpha}) * \overline{\varrho} = \beta$ y es única por la unicidad de las flechas que cumplen el diagrama (1.69). ∎

Capítulo 2

Sitios Fibrados

2.1. Introducción

En un principio las topologías de Grothendieck [1] fueron usadas para definir gavillas sobre una categoría arbitraria o, más en general, *stacks* [2]. Recuerde que una pregavilla sobre un espacio topológico X es un funtor $P : \mathscr{O}(X)^{op} \to \mathbf{Con}$ de la categoría opuesta de abiertos del espacio a la categoría de conjuntos. Sean U abierto, $\{U_i\}_I$ una cubierta abierta de U y f_i elementos en $P(U_i)$ para cada $i \in I$. Se dice que $\{f_i\}_I$ es una familia de elementos compatibles o de secciones compatibles si cumple que para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, donde $f_i|_{U_i \cap U_j} = P(U_i \cap U_j \subseteq U_i)(f_i)$. Una pregavilla es una gavilla si para toda familia de elementos compatibles $\{f_i\}_I$ se tiene que existe una única f en $P(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo $i \in I$. Esta condición es equivalente a que en el siguiente diagrama e sea un igualador

[1] En los años 60, Grothendieck introduce morfismos étales en geometría algebraica para poder definir un análogo algebraico del grupo fundamental de un espacio topológico. Después de esto, Jean Pierre Serre notó que algunas propiedades de cubrientes étales se parecían a las de inmersiones abiertas. Grothendieck se dio cuenta que era posible usar las ideas de Serre para definir una teoría de cohomología de tal forma que ésta fuera la cohomología de Well. Para definir esta teoría de cohomología Grothendieck necesitaba reemplazar la noción usual de cubierta abierta de un espacio con alguna que usara las cubiertas étales. Fue así como pudo formular las nociones de cubiertas abstractamente.

[2] Un *stack* o 2-gavilla es una gavilla que toma valores en una categoría distinta de conjuntos. Los stacks son usados para construir espacios moduli stacks cuando los espacios moduli finos no existen y son usados también en la teoría de descenso.

$$\begin{tikzcd}
 & PU_i \arrow[r, "P(U_i\cap U_j\subseteq U_i)"] & P(U_i\cap U_j) \\
PU \arrow[ur, "|_{U_i}"] \arrow[r, dashed, "e"] \arrow[dr, "|_{U_j}"'] & \prod_I PU_i \arrow[u, "\pi_i"] \arrow[d, "\pi_j"] \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \prod_{I\times I} P(U_i\cap U_j) \arrow[u, "\pi_{i,j}"] \arrow[d, "\pi_{i,j}"] \\
 & PU_j \arrow[r, "P(U_i\cap U_j\subseteq U_j)"] & P(U_i\cap U_j)
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

donde p y q son las flechas universales que completan los cuadros internos.

Las topologías de Grothendieck reemplazan las familias $\{U_i\}_I$ por familias de morfimos que cumplen cierta propiedad (en este caso que su unión cubre a U). Estas familias también cumplen ciertos axiomas de *buen comportamiento*. Existen distintas formas equivalentes (bajo ciertas condiciones de la categoría) de definir topologías de Grothendieck. La idea de este capítulo es hacer un estudio de las topologías de Grothendieck para poder definir el concepto de *sitio fibrado*.[3] Las referencias para las topologías de Grothendieck y gavillas sobre estas pueden ser encontradas en [LM92], [Joh02] y [Bor94a].

2.2. Topologías de Grothendieck

Sea X un espacio topológico, una cubierta para el espacio es una colección de conjuntos abiertos $\{U_i \,|\, i \in I\}$ tales que la unión de ellos contiene a X, es decir

$$X \subseteq \bigcup \{U_i \,|\, i \in I\}.$$

Por otro lado dadas dos cubiertas $\mathscr{U}$, $\mathscr{W}$, se dice que $\mathscr{U}$ refina a $\mathscr{W}$ si todo abierto de $\mathscr{U}$ está contenido en algún abierto de $\mathscr{W}$. Ahora considere la categoría de abiertos de un espacio topológico X, es decir, la categoría cuyos objetos son los abiertos de X y cuyos morfimos son las inclusiones entre abiertos. Esta categoría se suele denotar por $\mathscr{O}(X)$. Se pueden reinterpretar los conceptos anteriores, obteniendo que una cubierta es una colección de morfismos de $\mathscr{O}(X)$; $\{U_i \hookrightarrow X | i \in I\}$ que cumple una cierta condición (la condición de que la unión de la familia contiene a X) y que $\mathscr{U}$ refina a $\mathscr{W}$ si toda flecha de $\mathscr{U}$ se factoriza

[3] La noción de *sitio fibrado* no es canónica. Existen varias nociones no equivalentes que podrían ser llamadas sitios fibrados y cada una de estas de cierta forma es "correcta". El objeto que se utilizará en esta tesis mezcla dos nociones, a saber, el de un una fibración interna en la 2 categoría **SITIOS**. y el de una fibración cuyas fibras son sitios. Este concepto fue expuesto por primera vez en la Tesis Doctoral llamada *Categorical Foundations For a K-Theory* de Nicolas Michael.

a través de una flecha de $\mathscr{W}$, por lo que se podría pensar en definir los conceptos de cubriente de un objeto y refinamiento de cubrientes en categorías arbitrarias. Para esto se tienen las siguientes nociones:

Definición 2.2.1. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría y* C *un objeto de* $\mathbf{C}$*, una familia cubriente o cubierta de* C *es una familia de morfismos en* $\mathbf{C}$ *con codominio* C*.*

Definición 2.2.2. *Sean* R *y* S *dos cubiertas de un objeto* C*, se dice que* R *refina a* S *si toda flecha de* R *se factoriza a través de una flecha en* S*, esto es, para toda flecha* $f : X \to C$ *en* R *existen flechas* $g : X' \to C$ *en* S *y* $x : X \to X'$ *tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & C \\ X' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Si R refina a S lo denotaremos por $R \leq S$. Con esta noción se obtiene el siguiente lema.

Lema 2.2.3. *La relación* $\leq$ *establece un preorden en la clase de todas las cubiertas de un objeto* C*.*

Demostración Es claro que si S es una cubierta, $S \leq S$ (toda flecha se factoriza a través de sí misma). Por otro lado, si $R \leq S \leq W$, entonces $R \leq W$: como $R \leq S$ toda flecha de R se factoriza a través de una de S y como toda flecha de S se factoriza a través de una de W, el resultado se sigue. ∎

Sea K la función en **Top** que a cada espacio X le asigna el conjunto de cubiertas abiertas del espacio, por otro lado considere las familias cubrientes cuyos elementos son encajes abiertos

$$\{f : Y_i \hookrightarrow X \mid i \in I\} \, \text{tales que} \coprod_{i \in I} Y_i \cong X$$

esto define una nueva función K' en los objetos de **Top**. Es claro que toda cubierta de K admite un refinamiento que pertenece a K'. De igual forma se puede ver que toda cubierta de K' admite un refinamiento que pertenece a K, para esto considere una cubierta de encajes abiertos $\{f_i : Y_i \hookrightarrow X | i \in I\}$ con $\coprod_{i \in I} Y_i \cong X$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} f_i(Y_i) \arrow[r, "i"] & X \\ Y_i \arrow[u, "f_i", "\cong"'] \arrow[ur, hook, "f_i"'] & \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

donde la familia $\{f_i(Y_i) \hookrightarrow X | i \in I\}$ es una cubierta abierta de X. Sólo queda demostrar que esta cubierta refina a la dada, para esto considere el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} f_i(Y_i) \arrow[r, hook] \arrow[d, "{f_i}^{-1}"'] & X \\ Y_i \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

esto muestra que toda cubierta en $K'(X)$ se refina a través de una cubierta en $K(X)$. Se puede abstraer de este ejemplo la idea y definir funciones que asignan a cada objeto de una categoría una clase de cubrientes y decir cuando dos de estas funciones son iguales «módulo» refinamientos (este concepto será importante ya que se verá más adelante que bajo ciertas condiciones mínimas generarán las mismas *gavillas*). Para hacer ésto se tienen los conceptos de *funciones cubrientes* y *subordinamiento.*

Definición 2.2.4. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Una* función cubriente *es una función*

$$K : \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathrm{Mor}(\mathbf{C})))$$

en $\mathbf{C}$ *que a cada objeto* C *le asigna una clase de cubiertas del objeto* C*. Las cubiertas de* K *son llamadas* K*-cubiertas. La pareja* $(\mathbf{C},K)$ *recibe el nombre de* sitio*.*

Definición 2.2.5. *Sean* K *y* K' *funciones cubrientes, se dice que* K *es subordinada a* K'*, denotado por* $K \preceq K'$*, si toda* K*-cubierta tiene un refinamiento que pertenece a* K'*.* K *y* K'*, son equivalentes, denotado por* $K \equiv K'$*, si* $K \preceq K'$ *y* $K' \preceq K$*.*

Lema 2.2.6. *La relación* $\preceq$ *establece un preorden en la clase de las funciones cubrientes de una categoría* $\mathbf{C}$*.*

Demostración Es claro que toda función cubriente está subordinada a ella misma y si $K \preceq K' \preceq K''$ entonces toda K-cubierta admite un K' refinamiento y ésta a su vez admite un K'' refinamiento, por el lema 2.2.3 se tiene que $K \preceq K''$. ∎

Se restringirá la atención a ciertos sitios que serán de particular interés para poder definir la noción de *gavillas sobre un sitio*. Para hacer esto se considerarán sitios que cumplen las siguientes condiciones o axiomas.

Definición 2.2.7. *Sea* $(\mathbf{C}, K)$ *un sitio,* $(\mathbf{C}, K)$ *es una pretopología de Grothendieck si cumple lo siguiente:*

- (M) ***(Axioma de Maximalidad)*** *Dado un objeto C, la familia identidad $\{C \xrightarrow{1_C} C\}$ refina a alguna K-cubierta de C. Este axioma es equivalente a que la flecha identidad se factorice a través de una flecha de una familia cubriente.*

- (E) ***(Axioma de Estabilidad)*** *Dados un objeto C, una K-cubierta R de C y cualquier flecha $g : D \to C$, existe una K-cubierta S de D, tal que $g \circ S = \{g \circ h \mid h \in S\}$ refina a R, esto es,*

$$g \circ S = \{g \circ h \mid h \in S\} \leq R$$

- (L) ***(Axioma de Localidad)*** *Dados un objeto C, una K-cubierta R de C y para cada flecha $f \in R$ una K-cubierta R_f de $dom(f)$, entonces existe una K-cubierta T de C tal que*
$$T \leq \bigcup_{f \in R} f \circ R_f = \{f \circ g \mid f \in R \,\text{y}\, g \in R_f\}.$$

Los siguientes resultados muestran las propiedades básicas de las funciones cubrientes equivalentes.

Lema 2.2.8. *Sean K y K' funciones cubrientes equivalentes, entonces:*

- *K satisface el axioma* (E) *si y sólo si K' lo satisface.*

- *Si K satisface el axioma* (E) *entonces K satisface el axioma* (L) *si y sólo si K' lo satisface.*

Demostración Supóngase que K' satisface el axioma (E), sean R una K-cubierta de un objeto C y $g : D \to C$ morfismo de $\mathbf{C}$. Como $K \equiv K'$ se tiene que existe R' una K'-cubierta que refina a R, ya que K' satisface el axioma de estabilidad se tiene que existe S' una K'-cubierta tal que
$$g \circ S' \leq R' \leq R$$
de nuevo usando la equivalencia de funciones cubrientes se tiene que existe una K-cubierta S que refina a S' y ya que $g \circ S \leq g \circ S'$ se concluye la primera parte del lema.

Supóngase que K' satisface el axioma (E) (y por la parte anterior también K) y K' cumple el axioma (L). Sean R y R' como en la prueba anterior. Para cada $f : D \to C$ $\in R$ sea R_f una K-cubierta del objeto $dom(f)$, entonces como las funciones cubrientes son equivalentes se tiene que existen R'_f cubiertas en K' que refinan a R_f, por lo que para cada $f' : D' \to domf \in R'_f$ se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "x_f"'] & dom(f) \\ D \arrow[ur, "f_{f'}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

donde $f_{f'} \in R_f$. Usando el axioma de estabilidad se tiene que para cada x_f existen K'-cubiertas S'_f tal que $x_f \circ S'_f \leq R'_{f_{f'}}$, ahora es claro que componiendo con f'_f se tiene

$$f' \circ S'_f \leq f'_f \circ R'_{f_{f'}}$$

y entonces

$$\bigcup_{f' \in R'} f' \circ S'_f \leq \bigcup_{f' \in R'} f_{f'} \circ R'_f \leq \bigcup_{f \in R} f \circ R_f$$

usando el axioma de localidad y la equivalencia de funciones cubrientes se tiene que

$$T \leq T' \leq \bigcup_{f' \in R'} f' \circ S'_f \leq \bigcup_{f' \in R'} f_{f'} \circ R'_f \leq \bigcup_{f \in R} f \circ R_f$$

donde T y T' son K y K' cubiertas respectivamente. ∎

Las familias cubrientes proporcionan el concepto necesario para poder definir gavillas. Primero se consideran gavillas con respecto a una familia cubriente, luego se definen gavillas con respecto a una función cubriente.

Definición 2.2.9. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría. Una pregavilla en* $\mathbf{C}$ *es un funtor* $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$.

Definición 2.2.10. *Sean* $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$ *una pregavilla,* R *una cubierta de* C *y* $\{x_f\}_{f \in R}$ *una familia de elementos, donde* $x_f \in P(dom(f))$ *para toda* $f \in R$*. Se dice que esta familia es* compatible *si para cada par de flechas* h *y* k *que hacen que el siguiente diagrama sea conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "k"'] & & C \\ & E \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

donde f *y* g *son elementos en* R*, se tiene que*

$$P(h)(x_f) = P(k)(x_g)$$

Definición 2.2.11. *Una pregavilla satisface la propiedad de gavilla con respecto a una familia cubriente R de un objeto C si se cumple lo siguiente:*

- (Pegabilidad) *Para cualquier familia compatible $\{x_f\}_{f\in R}$ existe una $x \in P(C)$ tal que $P(f)(x) = x_f$ para todo $f \in R$.*
- (Únicidad) *Éste elemento es único con esta propiedad.*

Si K es una función cubriente en $\mathbf{C}$, se dice que P es una K-gavilla en $\mathbf{C}$ si P es una gavilla con respecto a cada familia cubriente en K.

Si el contexto es claro se suele omitir la función cubriente en una K-gavilla en $\mathbf{C}$. Las K-gavillas en $\mathbf{C}$ y las transformaciones naturales entre ellas forman una categoría denotada por $\mathrm{Gav}(\mathbf{C}, K)$. Existen diferentes funciones cubrientes que generan las mismas gavillas: dada una función cubriente K se obtendrá la función cubriente *saturada* y la *cribada*, estas funciones cubrientes serán equivalentes a la original y bajo ciertas condiciones mínimas se obtendrán las mismas gavillas.

Notación 2.2.12. *Para $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$, $f : D \to C$ y $x \in P(C)$ se denotará a $P(f)(x)$ como $x \cdot f$.*

Considere el caso de **Top** y sea K la función cubriente que a cada espacio le asigna la familia de cubiertas abiertas del espacio. Sea $\mathscr{W}$ una cubierta abierta de X y sea

$$\overline{\mathscr{W}} = \{U \hookrightarrow X \in \mathscr{O}(X) \,|\, \exists V \in \mathscr{W} \,\mathrm{con}\, U \subseteq V\}$$

esta cubriente de X es cerrada bajo precomposición, es decir para cualquier abierto que se encuentre contenido en alguno de los abiertos de $\mathscr{W}$, este abierto se encuentra en $\overline{\mathscr{W}}$. Las cubiertas de un objeto que cumplen esta propiedad reciben el nombre de *cribas*. El uso de cribas brindará un panorama más conceptual al definir gavillas en un sitio, ya que las cribas de un objeto se encuentran en correspondencia biyectiva con los subfuntores representables del objeto.

Dada una familia cubriente R de un objeto en una categoría $\mathbf{C}$, siempre es posible, como en el ejemplo anterior, definir su criba asociada, esta criba asociada es la «menor» criba que contiene a R y recibe el nombre de *criba generada* por R, se suele denotar por $\overline{R}$, cuya descripción explícita es la siguiente:

$$\overline{R} = \{\, X \xrightarrow{x} D \xrightarrow{f} C \;|\, x \in Fl(\mathbf{C}) \text{ y } f \in R\} \tag{2.6}$$

entonces dada una función cubriente K, siempre es posible obtener la *función cubriente cribada asociada* a K, es decir la función que tiene como familias cubrientes las cribas generadas por familias cubrientes en K. Esta función se denota por $\overline{K}$. Una de las propiedades de la función cubriente asociada es que se tiene la siguiente igualdad de categorías

$$\mathrm{Gav}(\mathbf{C}, K) = \mathrm{Gav}(\mathbf{C}, \overline{K})$$

Lema 2.2.13. *Sean* $\mathbf{C}$ *una categoría,* R *una cubierta de un objeto* C *y* $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$ *una pregavilla.* P *tiene la propiedad de gavilla con respecto a la cubierta* R *si y sólo si la tiene con respecto a la criba generada* $\overline{R}$*. Por lo tanto* $\mathrm{Gav}(\mathbf{C}, K) = \mathrm{Gav}(\mathbf{C}, \overline{K})$

Demostración Supóngase que P cumple la propiedad de gavilla con respecto a R y sea $\{x_h\}_{h \in \overline{R}}$ una familia . Considere la familia $\{x_f\}_{f \in R}$ (ya que $R \subseteq \overline{R}$). Es claro que es compatible y como P es gavilla existe una única x tal que $x \cdot f = x_f$ para todo $f \in R$, queda demostrar que $x \cdot h = x_h$ para todo $h \in \overline{R}$. Puesto que $h \in \overline{R}$ se tiene que $h = fg$ con $f \in R$, por lo tanto

$$x \cdot fg = (x \cdot f) \cdot g = (x_f) \cdot g = x_{fg}$$

Ahora para el regreso, supóngase que P cumple la propiedad de gavilla con respecto a $\overline{R}$ y sea $\{x_f\}_{f \in R}$ una familia compatible. Considere $\{x_f \cdot g\}_{fg \in \overline{R}}$ donde g es una flecha que se puede componer con f, esta familia está bien definida y es compatible, por lo tanto existe una única x con $x_{fg} = x_f \cdot g$, usando $g = id$ se obtiene el resultado. ∎

Una función cubriente en la cual cada familia cubriente es cribada recibe el nombre de *función cubriente cribada*. Dada una función cubriente cribada existe una función cubriente K_{max} maximal (en el sentido de la contención) con la propiedad $\overline{(K_{max})} = K$. Una familia cubriente en $\overline{(K_{max})}$ se encuentra caracterizada por la siguiente descripción:

$$R \in K_{max} \Longleftrightarrow \overline{R} \in K$$

La siguiente proposición nos dice la naturaleza de K_{max} con respecto a las funciones cubrientes cuyas saturaciones por cribas son K.

Proposición 2.2.14. *Sea* K *función cubriente cribada y* K' *una función cubriente con* $\overline{K'} = K$ *entonces* $K' \subseteq K_{max}$.

Demostración Sea $R \in K'$, entonces $\overline{R} \in K$, por lo tanto $R \in K_{max}$. ∎

Esta función recibe el nombre de *función cubriente maximal generada por* K. Existe otra función cubriente canónica asociada a cualquier función cubriente K, esta es la *saturada por refinamientos* y se encuentra caracterizada por la siguiente descripción

$$R \in K_{sat} \Longleftrightarrow \exists S \in K \,\text{con}\, S \leq R. \tag{2.7}$$

Se suele denotar por K_{sat} y recibe el nombre de *función saturada generada por* K. Si K coincide con K_{sat} se dice que esta función cubriente es *saturada.* Si K es una función cubriente cribada, entonces existe la versión análoga de esta definición, sólo que las funciones cubrientes que se encuentran en K_{sat} son cribadas. A una función cubriente cribada que coincida con su saturación por cribas recibe el nombre de *cribada saturada.* Entonces dada una función cubriente K (ya sea cribada o no), existen funciones cubrientes canónicas asociadas a K. Es natural preguntarse por la forma en que estas funciones se relacionan entre sí y en como se comportan con los axiomas de pretopología de Grothendieck. Para esto se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.2.15. *Sean K, K' funciones cubrientes en* $\mathbf{C}$*, entonces:*

1. $\overline{K} \equiv K$.
2. *K es cribada si y sólo si $K = \overline{K}$.*
3. *Si K es saturada, entonces $\overline{K}$ es cribada saturada y si $\overline{K}$ es cribada saturada, entonces K_{max} es saturada.*
4. *$K \preceq K'$ si y sólo si $\overline{K} \preceq \overline{K'}$.*
5. *K satisface el axioma* (M) *o* (E) *si y sólo si $\overline{K}$ lo satisface.*
6. *Si K satisface el axioma* (L) *entonces $\overline{K}$ lo satisface.*
7. *$K \subseteq K_{sat}$ y $K \equiv K_{sat}$, más aún, K es saturada si y sólo si $K = K_{sat}$.*
8. *$K \preceq K'$ si y sólo si $K \subseteq K'_{sat}$ si y sólo si $K_{sat} \subseteq K'_{sat}$.*
9. *Si para todo objeto C se tiene que $K(C) \neq \emptyset$, entonces $C \in \mathbf{C}$ $T_C = \{f \,|\, cod(f) = C\} \in K_{sat}$. Además K_{sat} satisface* (E) *si y sólo si K lo satisface. Si K_{sat} satisface* (L)*, entonces K lo satisface.*
10. *Si K satisface* (E)*, entonces satisface* (L) *si y sólo si K_{sat} los satisface.*
11. *$(\overline{K})_{sat} = \overline{K_{sat}}$ (donde en el lado izquierdo de la igualdad es la saturación con respecto a refinamientos cribados y en el derecho con respecto a refinamientos).*

Demostración La mayoría de los resultados son consecuencia directa de las definiciones. Se analizará uno a uno.

1. Ya que $\overline{R} \leq R \leq \overline{R}$ se tiene que $\overline{K} \equiv K$.

2. Si $R \in K$ con K cribada se tiene que $\overline{R} = R$. Por lo tanto $\overline{K} = K$.

3. Esto es claro ya que si $\overline{R} \in \overline{K}$ (con R en K) y T cribada con $\overline{R} \leq T$, entonces $R \leq \overline{R} \leq T$, esto es, $T \in K$ y como K es cribada, entonces $T \in \overline{K}$.

4. Si $K \preceq K'$ entonces $\overline{K} \preceq \overline{K'}$ ya que si $\overline{R} \in \overline{K}$ (con R en K) se tiene que existe $T' \in K'$ con $T' \leq R \leq \overline{R}$, con lo que $\overline{T} \subseteq \overline{R}$. Por lo tanto $\overline{K} \preceq \overline{K'}$. Ahora supongase que $\overline{K} \preceq \overline{K'}$, entonces $K \preceq K'$ ya que si $R \in K$ entonces existe $R' \in K'$ con $R' \leq \overline{R'} \leq \overline{R}$, por lo que $R' \subseteq \overline{R}$ de esto se obtiene que $R' \leq R$. Por lo tanto $K \preceq K'$.

5. Supóngase que K satisface el axioma (M), entonces $\{1_C\} \leq R$ para alguna $R \in K$, con lo que $\{1_C\} \leq R \leq \overline{R}$. Por lo tanto $\overline{K}$ satisface (M). Se procede de forma semejante para el regreso. Ahora K satisface el axioma (E) si y sólo si $\overline{K}$ lo satisface, debido a que $K \equiv \overline{K}$ y por el lema 2.2.8 se tiene el resultado.

6. Supóngase que K satisface el axioma (L). Para demostrar que $\overline{K}$ satisface este axioma considere $\overline{R} = \{fg \mid f \in R \text{ con } g \text{ flecha componible con } f\} \in \overline{K}$ y para cada $h \in \overline{R}$ sea $\overline{R_h}$ una $\overline{K}$ cubierta del dominio de h sea $h = fg$, entonces considere todos los casos posibles donde g es la identidad, de esto se obtiene ya que K satisface (L) las siguientes relaciones:
$$T \leq \bigcup_{f \in R} f \circ R_f \leq \bigcup_{f \in R} f \circ \overline{R_f} \leq \bigcup_{fg \in \overline{R}} fg \circ \overline{R}_{fg} \tag{2.8}$$
por lo tanto $\overline{K}$ lo satisface.

7. Es claro.

8. También es claro ya que K_{sat} es la función cubriente con todas las cubiertas que tienen un refinamiento en K.

9. Puesto que para cada $C \in \mathbf{C}$ existe un $R \in K(C)$ se tiene que $R \leq T_C$, con lo que $T_C \in K_{sat}(C)$. Ahora como $K \equiv K_{sat}$, se tiene usando el lema 2.2.8 que K satisface (E) si y sólo si K_{sat} lo satisface.

10. Supongase que K satisface (E), Ya que $K \equiv K_{sat}$ por el lema 2.2.8 se tiene que K satisface el axima (L) si y sólo si K_{sat} lo satisface.

11. El último inciso es de particular intéres, quiere decir que no importa la forma en que la función sea saturada, el resultado es el mismo. Para ver esto, sea $R \in (\overline{K})_{sat}$, entonces existe una $\overline{K}$-criba que refina a R, sea S tal criba, puesto que ambas son cribas se tiene que $S \subseteq R$, ahora como $S \in \overline{K}$ existe una K-cubierta T tal que $\overline{T} = S$, entonces se tienen las siguientes relaciones

$$T \leq \overline{T} = S \leq R$$

por lo tanto $R \in K_{sat}$ y como R es cribada entonces $R \in (\overline{K_{sat}})$. Para el regreso considere $R \in (\overline{K_{sat}})$, entonces $R = \overline{S}$ para algún $S \in K_{sat}$, esto es, existe $T \in K$ con

$$T \leq S \leq \overline{S} = R$$

por lo tanto $\overline{T} \leq R$, con lo que se obtiene que $R \in (\overline{K})_{sat}$. ∎

Así que dada una función cubriente K se pueden obtener su saturación con respecto a cribas y su saturación con respecto a refinamientos y combinar estos procedimientos para obtener el mismo resultado. La función cubriente obtenida por cualquiera de estos dos procesos recibe el nombre de *función cubriente saturada y cribada generada por* K y se denota por J_K. Esta función se encuentra caracterizada de la siguiente forma

$$R \in J_K \text{ si y sólo si } R \text{ contiene una } K\text{-cubierta.}$$

Esto es porque una cubierta $R \in J_K$ debe de tener un refinamiento en K y como es cribada se tiene que esta cubierta está contenida en R. El siguiente resultado demuestra que las gavillas en K y en J_K son iguales.

Proposición 2.2.16. *Sea K una función cubriente en $\mathbf{C}$ que cumple el axioma de estabilidad, entonces toda K-gavilla es una J_K-gavilla y recíprocamente.*

Demostración Debido al lema 2.2.13 sólo queda demostrar que toda K-gavilla es una K_{sat}-gavilla y recíprocamente. Para esto, sean $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$ una K-gavilla y $R' \in K_{sat}$, entonces existe $R \in K$ tal que $R \leq R'$. Sean $R' = \{ D'_k \xrightarrow{f'_k} C \}_{k \in I'}$ y $R = \{ D_i \xrightarrow{f_i} C \}_{i \in I}$ tales funciones cubrientes. Ya que toda flecha de R se factoriza a través de una de R' se tiene para cada $i \in I$ el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h_{f_i}"'] & C \\ D'_{k(i)} \arrow[ur, "f'_{k(i)}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

donde $k(i) \in I'$ para toda $i \in I$. Sea $\{x_{f'_k}\}_{k\in I'}$ una familia de elementos compatibles, entonces considere la subfamilia compatible $\{x_{f'_{k(i)}} \cdot h_{f_i}\}_{i\in I}$, puesto que P es una K-gavilla se tiene que existe un único $x \in P(C)$ tal que $x\cdot f_i = x\cdot f'_{k(i)}\cdot h_{f_i} = x_{f'_{k(i)}}\cdot h_{f_i}$ para todo $i \in I$. Sólo queda demostrar que $x\cdot f'_k = x_{f'_k}$ $\forall k \in I'$. Puesto que K cumple el axioma de localidad, para cada f'_k existe un $S'_k \in K(dom(f'_k))$ tal que $f'_k \circ S_k \leq R$. Sea $S_k = \{\ X_{k,j} \xrightarrow{s_{k,j}} D'_k\ \}_{j\in J_k}$ y para cada f'_k la familia compatible $\{x_{f'_k}\cdot s_{k,j}\}_{j\in J_k}$, usando que P es una K-gavilla se obtiene que existe una única $y_k \in P(D'_k)$ tal que $y_k\cdot s_{k,j} = x_{f'_k}\cdot s_{k,j}$. Pero es claro que $y_k = x\cdot f'_k$ satisface esta condición. El regreso es evidente. ∎

La siguiente proposición expresa la relación que existe entre una pretopología de Grothendieck y el sitio $(\mathbf{C}, J_K)$.

Proposición 2.2.17. *Sea $(\mathbf{C}, K)$ una pretopología de Grothendieck, entonces $(\mathbf{C}, J_K)$ es una pretopología de Grothendieck y los axiomas 2.2.7 son equivalentes a*

- (M′) ***(Axioma de Maximalidad)*** *Dado un objeto C la criba total*

$$T_C = \{f : D \to C \,|\, codom(f) = C\}$$

  se encuentra en $J_K(C)$.

- (E′) ***(Axioma de Estabilidad)*** *Dado un objeto C, una J_K-cubierta R del objeto y cualquier flecha $g : D \to C$, se tiene que:*

$$f^*(R) = \{g : X \to D \,|\, codom(g) = D \text{ y } f \circ g \in R\}$$

  se encuentra en $J_K(D)$.

- (L′) ***(Axioma de Localidad)*** *Dado un objeto C, R una J_K-cubierta de C y para cada flecha $f \in R$ una J_K-cubierta R_f de $(dom(f))$, entonces la cubierta composición de estas K-cubiertas es una K-cubierta, esto es:*

$$\bigcup_{f\in R} f \circ R_f \in J_K(C).$$

Esbozo de la demostración El hecho de que $(\mathbf{C}, J_K)$ es una pretopología de Grothendieck se sigue del lema 2.2.15. ∎

Un sitio $(\mathbf{C}, K)$ que satisface las propiedades de las proposición (2.2.17) recibe el nombre de *topología de Grothendieck*. Se ha demostrado que si $(\mathbf{C}, K)$ es una pretopología entonces el sitio $(\mathbf{C}, J_K)$ es una topología de Grothendieck. J_K recibe el nombre de *topología de Grothendieck generada por la pretopología K*. Los siguientes conceptos expresan la forma natural de relacionar sitios.

Definición 2.2.18. *Sean $(\mathbf{C}, K)$ y $(\mathbf{D}, L)$ sitios. Un morfismo de sitios $F : (\mathbf{C}, K) \to (\mathbf{D}, L)$ es un funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ tal que para toda K-criba R la imagen*

$$F(R) = \{F(f) \mid f \in R\}$$

tiene un L-refinamiento.

Los sitios y los morfismos de sitios con la usual composición de funtores forman una categoría denotada por **SITIOS**. La subcategoría plena de **SITIOS** cuyos funtores P preservan cubiertas (i.e. $F(R)$ es una L-cubierta) se denota por $\mathbf{SITIOS_S}$ y recibe el nombre de *sitios estrictos.*

Los axiomas enunciados para una pretopología son más débiles que los que usualmente se encuentran en la literatura. Los siguientes axiomas son los usuales para definir una pretopología de Grothendieck.

Definición 2.2.19. *Sea $(\mathbf{C}, K)$ un sitio, $(\mathbf{C}, K)$ es una pretopología de Grothendieck si cumple lo siguiente:*

- ***(Axioma de Maximalidad)*** *Todo isomorfismo $\{f : D \to C\}$ pertenece a $K(C)$. Es usual la siguiente variante del axioma. Para todo $C \in \mathbf{C}$ la cubierta identidad $\{1_C : C \to C\}$ pertenece a $K(C)$.*
- ***(Axioma de Estabilidad)*** *Dados un objeto C, una K-cubierta R de C, cualquier flecha $f : C_f \to C \in R$ y cualquier flecha $g : D \to C$ existe el producto fibrado de f a lo largo de g.*

$$\begin{tikzcd} C_f \times_C D \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}"'] & C_f \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

  y la familia $\{\overline{f} : C_f \times_C D \to D \mid f \in R\}$ pertenece a K.
- ***(Axioma de Localidad)*** *Dado un objeto C, R una K-cubierta de C, R_f una K-cubierta de $dom(f)$ para toda $f \in R$ se tiene que la cubierta composición pertenece a*

$K(C)$, *esto es:*

$$\bigcup_{f\in R} f\circ R_f \in K(C).$$

La cubierta $\{\overline{f} : C_f \times D \to_C D | f \in R\}$ recibe el nombre de *cubierta producto fibrado de R a lo largo de g* y se suele denotar por $g^*(R)$. Un sitio $(\mathbf{C}, K)$ es un *sitio con productos fibrados* si el producto fibrado de K cubiertas existe a lo largo de cualquier flecha. Un morfismo de sitios con productos fibrados es un morfismo de sitios que preserva productos fibrados de cubiertas. Sitios con productos fibrados y sus morfismos forman una categoría denotada por **PSITIOS**.

En sitios con productos fibrados se puede dar una descripción alterna de gavillas. Sean $\mathbf{C}$ una categoría y $R = \{D_i \to C \,|\, i \in I\}$ una K-cubierta de C. Supóngase que existen los productos fibrados de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} C_i \times C_j \arrow[r, "\pi^2_{i,j}"] \arrow[d, "\pi^1_{i,j}"'] & C_j \arrow[d, "f_j"] \\ C_i \arrow[r, "f_i"'] & C \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

considere una elección de estos productos fibrados para cada pareja $(i, j) \in I \times I$, entonces motivados por la introdución y el diagrama 2.1 a gavillas presentada en el inicio del capítulo, se define una gavilla para la cubierta R con valores en una categoría $\mathbf{A}$ con productos como un funtor $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{A}$, tal que en el siguiente diagrama e es un igualador

$$\begin{tikzcd} & PC_i \arrow[r, "P(\pi^1_{i,j})"] & P(C_i \times C_j) \\ PC \arrow[ur, "P(f_i)"] \arrow[dr, "P(f_j)"'] \arrow[r, dashed, "e"] & \prod_I PC_i \arrow[u, "\pi_i"] \arrow[d, "\pi_j"] \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \prod_{I\times I} P(C_i \times C_j) \arrow[u, "\pi_{i,j}"] \arrow[d, "\pi_{i,j}"] \\ & PC_j \arrow[r, "P(\pi^2_{i,j})"'] & P(C_i \times C_j) \end{tikzcd} \tag{2.12}$$

donde p y q son las flechas universales que hacen conmutar los diagramas. Una *K-gavilla con valores en una categoría* $\mathbf{A}$ es un funtor que satisface la propiedad anterior para cada K-cubriente.

Los siguientes ejemplos de topologías de Grothendieck son usuales o importantes en la literatura:

1. **La Topología Vacía**
   Sea $\mathbf{C}$ una categoría y considere la función cubriente que a cada objeto C le asocia el conjunto vacío. Esta función no es una pretopología ya que no cumple el axioma de maximalidad.

2. **La Topología Indiscreta**
   La función cubriente que a cada objeto le asigna la cubierta identidad del objeto. Esta función cubriente es una pretopología llamada *la pretopología indiscreta o la más grusa.* Sus cubrientes no se encuentran en cada pretopología pero sí en las saturaciones de éstas.

3. **La Topología Discreta**
   La función cubriente que a cada objeto le asocia *todas* las cubrientes del objeto. Esta función es una pretopología llamada *la pretopología discreta o la más fina.* Todas las funciones cubrientes son subordinadas a esta pretopología.

4. **Función Cubriente Rebanada**
   Sea K una función cubriente en una categoría $\mathbf{C}$. Esta función induce una función cubriente en la categoría rebanada $\mathbf{C}/C$ llamada la *función cubriente rebanada*, denotada por K/C. Se encuentra definida de la siguiente forma. Una cubriente

   $$R/C = \{\overline{D}_i \xrightarrow{f_i} \overline{D}\}_{i\in I}$$

   del objeto $\overline{D} \in \mathbf{C}/C$ donde $\overline{D} = D \xrightarrow{f} C$ y $\overline{D}_i = D_i \xrightarrow{p_i} C$ pertenece a $K/C(\overline{D})$ si y sólo si $\{D_i \xrightarrow{f_i} D\}_{i\in I} \in K(D)$. Es fácil demostrar que K/C hereda todas las propiedades de K.

5. Sea $X \in \mathbf{Top}$. Entonces $\mathscr{O}(X)$ es una categoría. Esta categoría admite una topología de Grothendieck cuyas familias cubrientes de un abierto son las cubiertas por conjuntos abiertos. $(X, \mathscr{O}(X))$ recibe el nombre del *sitio asociado a X*

6. **La Topología Étale**
   Considere la categoría de espacios topologicos. La *pretología étale o de homeomorfismos locales* es la función cubriente cuyas familias cubrientes son familias de homeomorfismos locales, esto es, familias $\{X_i \xrightarrow{f_i} X\}_{i\in I}$ tales que cada flecha es un homeomorfismo local (y entonces para $x \in X_i$ existe un abierto de V_x de x tal que la restricción de f_i a V_x es un homeomorfismo en un abierto de X) y *colectivamente suprayectiva*, es decir, el mapeo universal

   $$\coprod_{i\in I} f_i : \coprod_{i\in I} X_i \to X \tag{2.13}$$

   es suprayectivo.

7. **Función Cubriente de Anillos Conmutativos**
Sea **Anillos** la categoría de anillos conmutativos con uno. Considere la función cubriente en $\mathbf{Anillos}^{op}$ que a cada anillo conmutativo A le asocia las familias $\{A \xrightarrow{f_i} A_i\}_{i\in I}$ tales que:

   - Cada $A \xrightarrow{f_i} A_i$ es la localización de un elemento $a_i \in A$.
   - El ideal generado por el conjunto $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq A$ es el anillo A.

   Puesto que $(a_i)_{i\in I} = A$ se tiene que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} r_k a_{i_k}$$

   donde $r_k \in A$ y $a_{i_k} \in \{a_i\}_{i\in I}$, entonces $A = (a_{i_i}, a_{i_2}...a_{i_k})$, por lo que se podría suponer que las cubiertas son finitas. Bajo esta condición la función cubriente es una pretopología de Grothendieck en el sentido definido por (2.2.19)

8. **Subcategoría Cerrada Bajo Límites Finitos y Subespacios**
Sea **T** una subcategoría de espacios topológicos que sea cerrada bajo límites finitos y bajo tomar subespacios, por ejemplo **T** puede ser la categoría de espacios Hausdorff separables, donde un espacio es separable si contienen un conjunto denso y numerable. Una cubriente para un espacio Y es una familia $\{Y_i \xrightarrow{f_i} Y\}_{i\in I}$, tal que cada espacio Y_i es un subespacio abierto de Y, f_i es la correspondiente inclusión del espacio y $\bigcup_{i\in I} Y_i = Y$. Esta pretopología recibe el nombre de *pretopología de cubiertas abiertas de la categoría* **T**. El propósito de la pretopología de cubiertas abiertas es poner todos los sitios asociados a los espacios en **T** en uno "mayor", para proveer un contexto conveniente en el cual se pueden considerar gavillas definidas no sólo en un espacio específico, esto es, en toda una categoría de espacios.

9. **Álgebras de Heyting Completas**
Recuerde que un álgebra de Heyting A es una retícula equipada con un *operador de implicación* $\Rightarrow$, que satisface la siguiente relación:

$$a \leq (b \Rightarrow c) \text{ si y sólo si } a \wedge b \leq c$$

   para todo $a, b, c \in A$. Un *álgebra de Heyting completa* es un álgebra de Heyting que es completa como retítula, esto es, existen ínfimos y supremos de familias arbitrarias de elementos. Si A es una álgebra de Heyting completa y a_i, b con $i \in I$ son elementos de A entonces se tiene la siguiente identidad

$$\bigvee_{i\in I}(b \wedge a_i) = b \wedge (\bigvee_{i\in I} a_i) \qquad (2.14)$$

No es difícil probar que si A es una retícula en la cual existen supremos arbitrarios y satisface la identidad 2.14, entonces A es una álgebra de Heyting completa en la cual el operador $\Rightarrow$ está definido de la siguiente forma

$$b \Rightarrow c = \bigvee \{a | a \wedge b \leq c\}$$

Ahora sea $\mathbf{A}$ un álgebra de Heyting completa considerada como categoría en la forma usual, esto es, existe una única flecha de a a b si y sólo si $a \leq b$. $\mathbf{A}$ puede ser equipada con una pretopología de Grothendieck K de la siguiente forma

$$\{a_i \to c\}_{i \in I} \in K(C) \text{ si y sólo si } \bigvee_{i \in I} a_i = c$$

La identidad (2.14) es justamente la propiedad de estabilidad de la definición 2.2.19. Una criba S de un objeto c de $\mathbf{A}$ es una familia de elementos $\{a_i \leq c\}_{i \in I}$, tal que si $b \leq a_i$ para algún $i \in I$ entonces $b \in S$. En la topología de Grothendieck J_K generada por K una criba S cubre a un objeto c si y sólo si $\bigvee S = c$, debído a lo anterior esta topología suele llamarse la *topología del supremo*. En el caso particular de que $\mathbf{A}$ sea la categoría de abiertos de un espacio topológico X esta topología coincide con el sitio asociado a X.

10. **La Topología Densa**
    Sea P un conjunto parcialmente ordenado con $p \in P$. Un subconjunto

    $$D \subseteq \{q \in P \,|\, q \leq p\}$$

    se dice que es *denso por abajo de* p si para cualquier r con $r \leq p$ existe un $q \in D$ con $q \leq r$. Las cribas densas forman una topología de Grothendieck definida de la siguiente forma

    $$J(p) = \{D \,|\, D \text{ es una criba densa por abajo de } p\}$$

    La topología densa puede definirse en categorías arbitrarias como sigue. Sea S una criba, entonces

    $$S \in J(C) \text{ si y sólo si para toda } D \xrightarrow{f} C \text{ existe } E \xrightarrow{x} D \text{ tal que } f \circ x \in D$$

    Es fácil ver que J satisface las condiciones de la proposición 2.2.17

11. **La Topología Atómica**
    Sean $\mathbf{C}$ una categoría y sea J la función cubriente definida como sigue

$$S \in J(C) \text{ si y sólo si } S \text{ es una criba y } S \text{ es no vacía.}$$

Para que J satisfaga el axioma de estabilidad de la proposición 2.2.19 es suficiente con suponer que cualesquiera dos flechas con el mismo codomonio pueden ser completadas a un diagrama conmutativo de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & D \arrow[d, "g"] \\ E \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd} . \tag{2.15}$$

2.3. Sitios Fibrados

Existen distintas formas no equivalentes de definir un *sitio fibrado*. El primer caso es considerar una *fibración en sitios*, esto es, una fibración cuyas fibras son sitios y cuyos funtores de imagen inversa son morfismos estrictos de sitos. En esta definición la categoría base no necesita tener un sitio asociado. Otra forma sería definir una fibración interna en la 2-categoría de sitios, morfismos estrictos de sitios y transformaciones naturales. El concepto que se usará en esta tesis será un tercer tipo de objeto que relaciona los anteriores.

Definición 2.3.1. *Un sitio fibrado es una fibración de Grothendieck equipada con una función cubriente en su base. Se suele denotar por $p : \mathbf{E} \to (\mathbf{B}, K)$ el sitio fibrado para resaltar el hecho de que $\mathbf{B}$ tiene una función cubriente.*

Sea $p : \mathbf{E} \to (\mathbf{B}, K)$ un sitio fibrado, entonces K induce un sitio K_p en la categoría $\mathbf{E}$ de la siguiente forma: sea $E \in \mathbf{E}$ tal que $p(E) = B$ y $R = \{B_i \xrightarrow{f_i} B\}_I$ una cubierta de B, entonces las cubiertas de E son de la siguiente forma

$$R^* = \{f_i^*(E) \xrightarrow{\overline{f}_i} E\}_I$$

donde $\overline{f}_i$ es cartesiana sobre f_i. Se dice entonces que tal cubierta es una K_p cubierta sobre la K-cubierta R. Es claro que el funtor p es un morfismo estricto de sitios. La función cubriente K_p en la categoría total $\mathbf{E}$, también denotada por $K_{\mathbf{E}}$ (cuando esto no lleva a confusión) recibe el nombre de *función cubriente inducida por la fibración p*. Cuando el sitio base $(\mathbf{B}, K)$ satisface el axioma de maximalidad, el sitio fibrado es una fibración en sitios pero de una forma trivial, esto es, la restricción de K_p a la categoría fibra $\mathbf{E}_B$ consiste en cubiertas isomorfas de un único objeto. Un sitio fibrado es más interesante cuando se considera como una fibración interna en $\mathbf{SITIOS_S}$ ya que realmente es una fibración interna donde $\mathbf{E}$ tiene la función inducida K_p. Esta función cubriente es *la menor* con respecto a refinamientos que hace que p sea un sitio fibrado. Para demostrar esto se necesita el siguiente lema.

Notación 2.3.2. *Se denotará a* $\mathbf{SITIOS_S}((\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}}), (\mathbf{E}, K_{\mathbf{E}}))$ *como* $(\mathbf{E}, K_{\mathbf{E}})^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})}$

Lema 2.3.3. *Sean* $p : (\mathbf{E}, K_{\mathbf{E}}) \to (\mathbf{B}, K_{\mathbf{B}})$ *una fibración interna en* $\mathbf{SITIOS_S}$ *y* $(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})$ *un sitio. Supongase que* $K_{\mathbf{B}}, K_{\mathbf{D}}, K_{\mathbf{E}}$ *satisfacen el axioma de maximalidad, entonces los componentes de un levantamiento cartesiano del funtor*

$$p_* : (\mathbf{E}, K_{\mathbf{E}})^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})} \to (\mathbf{B}, K_{\mathbf{B}})^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})}$$

son levantamientos cartesianos del funtor p*. En otras palabras si* $\beta : F \Rightarrow F'$ *es un levantamiento cartesiano entonces* $\beta_D : F(D) \to F'(D)$ *son levantamientos cartesianos.*

Demostración Como p es una fibración interna en $\mathbf{SITIOS_S}$, entonces p_* es una fibración. Ahora considere el sitio $(\mathbb{1}, id)$ con un objeto y la cubierta identidad, sea $\Delta_D : (\mathbb{1}, Id) \to (\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})$ el morfismo estricto de sitios que elige el objeto $D \in \mathbf{D}$, entonces se tiene el siguiente isomorfismo de categorías

$$(\mathbf{B}, K_{\mathbf{B}})^{(\mathbb{1}, id)} \cong \mathbf{B}$$

considere el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbf{E}, K_{\mathbf{E}})^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})} & \xrightarrow{\Delta_D^*} & (\mathbf{E}, K_{\mathbf{E}})^{(\mathbb{1}, Id)} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{E} \\ \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ (\mathbf{B}, K_{\mathbf{B}})^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})} & \xrightarrow{\Delta_D^*} & (\mathbf{B}, K_{\mathbf{B}})^{(\mathbb{1}, Id)} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{B} \end{array} \tag{2.16}$$

puesto que este diagrama es un morfismo cartesiano se tiene que

$$\Delta_D^*(\beta) = \beta_D : F(D) \to F'(D)$$

es un levantamiento cartesiano.

Proposición 2.3.4. *Si* $p : \mathbf{E} \to (\mathbf{B}, K_{\mathbf{B}})$ *es un sitio fibrado entonces* K_P *hace de* p *una fibración interna en* $\mathbf{SITIOS_S}$*, recíprocamente, si* $p : (\mathbf{E}, K_{\mathbf{E}}) \to (\mathbf{B}, K_{\mathbf{B}})$ *es una fibración interna en* $\mathbf{SITIOS_S}$ *con* $K_{\mathbf{B}}, K_{\mathbf{E}}$ *satisfaciendo el axioma de maximalidad, entonces* p *es una fibración.*

Demostración Sea $(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}}) \in \mathbf{SITIOS_S}$, el funtor

$$p_* : (\mathbf{E}, K_P)^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})} \to (\mathbf{B}, K_B)^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})}$$

es una fibración ya que si $\alpha : H \Rightarrow G \in (\mathbf{B}, K_B)^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})}$ y $F \in (\mathbf{E}, K_P)^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})}$ es tal que $p_*(F) = G$, entonces la transformación natural

$$\overline{\alpha}_F : (\alpha)^* F \Rightarrow F \text{ con } (\overline{\alpha}_F)_D : (\alpha_D)^* F(D) \to F(D)$$

esto es la D-componente de $\overline{\alpha}_F$ es el levantamiento cartesiano de α_D sobre $F(D)$. Se afirma que es un levantamiento cartesiano de α sobre F. Es claro que es natural y es un levantamiento cartesiano ya que sus componentes son levantamientos cartesianos. Ahora

$$(\alpha)^* F : (\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}}) \to (\mathbf{E}, K_{\mathbf{P}})$$

es un morfismo estricto de sitios, puesto que si $R = \{D_i \xrightarrow{f_i} D\}_I \in K_{\mathbf{D}}(D)$ entonces

$$\alpha^* F(R) = \{(\alpha_{D_i})^* F(D_i) \to (\alpha_D)^* F(D)\}_I$$

que claramente se encuentra en $K_P(\alpha_D^* F(D))$. Por otra parte es claro que el cuadro

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{E}, K_{\mathbf{E}})^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})} \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f^*"'] & (\mathbf{B}, K_{\mathbf{B}})^{(\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})} \arrow[d, "f^*"] \\
(\mathbf{E}, K_{\mathbf{E}})^{(\mathbf{D}', K_{\mathbf{D}'})} \arrow[r, "p_*"'] & (\mathbf{B}, K_{\mathbf{B}})^{(\mathbf{D}', K_{\mathbf{D}'})}
\end{tikzcd} \tag{2.17}$$

es un morfismo cartesiano para cualquier $f : (\mathbf{D}', K_{\mathbf{D}'}) \to (\mathbf{D}, K_{\mathbf{D}})$ morfismo de sitios. Para la necesidad de la proposición se usa el lema (2.3.3) para obtener que p es una fibración.

Capítulo 3

Espacios Anillados

3.1. Introducción

En el capítulo 1 de esta tesis se mostró como a partir de la construcción de la K-teoría algebraica se obtiene el concepto de asignación "seudofuntorial", es decir, una asignación funtorial pero en cierto sentido "débil". Intuitivamente es posible pensarlo como un requerimiendo "natural" al tener una categoría con objetos con demasiada estructura y en este caso la asignación no puede seguir siendo tan "estricta". Una vez que surgió la necesidad de los seudofuntores, se cambió ligeramente de enfoque al considerar las fibraciones de Grothendieck. El cambio fue en un principio poco "natural" pero a lo largo del capítulo se demostró que *esencialmente* estos dos conceptos (el de categoría fibrada y el de seudofuntor) son equivalentes. En el capítulo 2 se vió como es posible considerar "cubrientes" a un objeto de una categoría. La idea básica fue pensar en las cubiertas abiertas de un espacio topológico y observar de que forma era posible expresar el "hecho" de que una familia es cubriente en términos puramente categóricos. Se analizó el concepto de gavilla como consecuencia natural de esta idea y por último se presentó la noción de sitio fibrado. Este concepto nos permite relacionar el material expuesto en el capítulo 1 junto con el de cubriente de objetos. En este capítulo, se presentará una aplicación directa de la teoría desarrollada hasta el momento. Se estudiará la categoría de espacios localmente anillados. Se verá que esta categoría es una fibración sobre **Top**, la categoría de espacios topológicos. Puesto que **Top** tiene un sitio canónico asociado se tendrá que esta fibración es un sitio fibrado. El material necesario para los temas relacionados con los espacios anillados puede encontrarse en [Har77], [Vak13] y [LM92].

3.2. Espacios Anillados

Antes de poder llegar al material principal de este capítulo, a saber, los *espacios anillados*, se necesitarán algunos conceptos previos, esto es, el de *gavilla imagen directa e inversa*. Este material puede ser encontrado ampliamente en [LM92]. Se empezará por el concepto de gavilla imagen directa.

Se dice que una gavilla G tiene coeficientes en una categoría $\mathbf{A}$ si el funtor G tiene como codominio la categoría $\mathbf{A}$. Usualmente se tomarán gavillas con coeficientes en **Con** o en **Anillos** (la categoría de conjuntos y la de anillos conmutativos con uno respectivamente).

Sean $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos y $G \in \mathrm{Gav}(X)$. La función f permite obtener un funtor $f_* : \mathrm{Gav}(X) \to \mathrm{Gav}(Y)$ llamado *funtor imagen directa*, cuya descripción explícita es la siguiente:

- $f_*(G) \in \mathrm{Gav}(Y)$ es el funtor que en cada abierto $U \subseteq Y$ se tiene $f_*(G(U)) = G(f^{-1}(U))$, si V es un abierto de Y con $V \subseteq U$, entonces

$$f_*(G)(V \subseteq U) = G(f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)) : G(f^{-1}(U)) \to G(f^{-1}(U))$$

  Es claro que esta asignación hace de $f_*(G)$ una gavilla en Y.

- Si $\alpha : F \Rightarrow G$ es un morfismo en $\mathrm{Gav}(X)$, entonces $f_*(\alpha) : f_*(F) \Rightarrow f_*(G)$ es la transformación natural en $\mathrm{Gav}(Y)$ cuya componente en un abierto $U \subseteq Y$ es

$$\alpha_{f^{-1}(U)} : F(f^{-1}(U)) \to G(f^{-1}(U))$$

De esta forma se obtiene un seudofuntor estricto de la categoría **Top** de espacios topológicos a la categoría **Cat** dado por:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{Top} &\to \mathbf{Cat} \\ X &\mapsto \Phi(X) = \mathrm{Gav}(X) \\ X \xrightarrow{f} Y &\mapsto \begin{array}{c} \mathrm{Gav}(X) \\ \downarrow {\scriptstyle f_*=\Phi(f)} \\ \mathrm{Gav}(Y) \end{array} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para cada función continua $f : X \to Y$ el funtor f_* tiene un adjunto izquierdo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gav}(X) \arrow[d, bend left, "f_*"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathrm{Gav}(Y) \arrow[u, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Este funtor recibe el nombre de *funtor imagen inversa de* f y es denotado por f^{-1}. El funtor aplicado a una gavilla $\mathscr{O}_Y$ está definido por

$$f^{-1}(\mathscr{O}_Y)(V) = \varinjlim_{U \supseteq f(V)} \mathscr{O}_Y(U) \tag{3.3}$$

Para ver que este funtor realmente es adjunto a f^{-1} véase [Vak13]. Existe otra construcción de f^{-1} que puede ser encontrada en [LM92], lo que realmente importa es el hecho de que este funtor existe y es adjunto de f_*.

En teoría de gavillas se demuestra que la categoría de gavillas sobre un espacio X es esencialmente la categoría de homeomorfismos locales sobre el espacio X (para la definición de homeomorfismo local, el ejemplo véase 6 de la sección 2.2) . Esta prueba depende de la idea del "tallo" o *stalk* de una gavilla. Existe una descripción del tallo en términos de relaciones de equivalencia (lo que se suele llamar "germen"), pero es preferible describirla en términos puramente categóricos. Para hacer esto, sea $x \in X$ y considere el morfismo de inclusión $i_x : * \to X$. Esta inclusión induce funtores entre las siguientes categorías de gavillas

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gav}(*) \simeq \mathbf{Anillos} \arrow[d, bend left, "(i_x)_*"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathrm{Gav}(X) \arrow[u, bend left, "stalk_x = (i_x)^{-1}"] \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

donde la equivalencia de categorías del diagrama (3.4) es clara. El funtor $stalk_x$ es el adjunto izquiero de $(i_x)_*$. La construcción del funtor $stalk_x$ usando germenes puede ser encontrada en [LM92].

Es posible regresar ahora al concepto fundamental de este capítulo, a saber, los espacios anillados. La categoría de *espacios anillados* denotada por **Anillados** se encuentra descrita de la siguiente forma:

- Los *objetos* son parejas $(X, \mathscr{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y $\mathscr{O}_X$ es una gavilla en X con coeficientes en **Anillos**.

- Los *morfismos* de esta categoría son de la forma:

$$(X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{(f,f^{\#})} (Y, \mathscr{O}_Y)$$

en el que $f : X \to Y$ es una función continua de espacios y $f^{\#} : \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$ es una transformación natural, donde $f_*(\mathscr{O}_X)$ es la imagen de la gavilla $\mathscr{O}_X$ bajo el funtor *imagen directa de* f; $f_* : \mathrm{Gav}(X) \to \mathrm{Gav}(Y)$.

- La *composición* de morfismos está dada como sigue; si $(f, f^{\#})$ y $(g, g^{\#})$ son morfismos como en el diagrama (3.5)

$$\begin{tikzcd} (X, \mathscr{O}_X) \arrow[r, "(f,f^{\#})"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f,(g\circ f)^{\#})"'] & (Y, \mathscr{O}_Y) \arrow[r, "(g,g^{\#})"] & (Z, \mathscr{O}_Z) \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

entonces $(g \circ f, (g \circ f)^{\#})$ tiene por segunda componente la transformación natural definida por

$$\mathscr{O}_Z \xrightarrow{g^{\#}} g_*(\mathscr{O}_Y) \xrightarrow{g_*(f^{\#})} g_*(f_*(\mathscr{O}_X)) = (gf)_*(\mathscr{O}_X)$$

.

- Las *identidades* son de la forma $(1_X, 1_{\mathscr{O}_X}) : (X, \mathscr{O}_X) \to (X, \mathscr{O}_X)$

Sea $f_{\#}$ el morfismo transpuesto de $f^{\#}$ bajo la adjunción 3.2, esto es:

$$f^{-1}\mathscr{O}_Y \xrightarrow{f^{-1}(f^{\#})} f^{-1}f_*\mathscr{O}_X \xrightarrow{\xi^f_{\mathscr{O}_X}} \mathscr{O}_X \tag{3.6}$$

donde $\xi^f_{\mathscr{O}_X}$ es la counidad de la adjunción $f^{-1} \dashv f_*$. Este morfismo de gavillas en X tiene la propiedad de ser el único que hace conmutar el siguiente diagrama en **Anillados**:

$$\begin{tikzcd} (X, \mathscr{O}_X) \arrow[r, "(f,f^{\#})"] \arrow[d, "(1_X,f_{\#})"'] & (Y, \mathscr{O}_Y) \\ (X, f^{-1}\mathscr{O}_Y) \arrow[ur, "(f,\eta^f_{\mathscr{O}_Y})"'] & \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

donde $\eta^f_{\mathscr{O}_Y}$ es la unidad de la adjunción $f^{-1} \dashv f_*$. Esto es cierto ya que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_Y \arrow[r, "\eta^f_{\mathscr{O}_Y}"] \arrow[rr, bend right, "f^{\#}"'] & f^{-1}f_*(\mathscr{O}_Y) \arrow[r, "f_*(f_{\#})"] & f_*(\mathscr{O}_X) \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

Ahora bien, el tallo en $f(x)$ de $\mathscr{O}_Y$ se puede describir como el tallo en x de $f^{-1}\mathscr{O}_Y$. Para hacer esto considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gav}(*) \simeq \mathbf{Anillos} \arrow[d, bend left, "(i_x)_*"] \\
\mathrm{Gav}(X) \arrow[u, bend left, "stalk_x=(i_x)^{-1}"] \arrow[u, phantom, "\dashv"] \arrow[d, bend left, "f_*"] \\
\mathrm{Gav}(Y) \arrow[u, bend left, "f^{-1}"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

entonces se tiene que $(i_x)^{-1} \circ f^{-1} \dashv f_* \circ (i_x)_* = (i_{f(x)})_*$, por lo tanto

$$(i_x)^{-1} \circ f^{-1} \cong stalk_{f(x)}$$

Los espacios anillados forman una fibración sobre **Top** para ver esto sólo es necesario reinterpretar el seudofuntor (3.1) en los siguientes términos

$$\begin{aligned}
\Phi : (\mathbf{Top}^{op})^{op} &\to \mathbf{Cat} \\
X &\mapsto \Phi(A) = \mathrm{Gav}(X) \\
Y \overset{f}{\to}{}^{op} X &\mapsto \begin{tikzcd} \mathrm{Gav}(X) \arrow[d, "f_*=(f^{op})^*=\Phi(f^{op})"] \\ \mathrm{Gav}(Y) \end{tikzcd}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

entonces por la construcción de Grothendieck (véase 1.3) aplicada a este seudofuntor (que no es otra cosa que el seudofuntor (3.1) con la notación necesaria) se obtiene la siguiente fibración

$$P_\Phi : \mathbf{E}_\Phi \to \mathbf{Top}^{op} \tag{3.11}$$

donde

- Los *objetos* de $\mathbf{E}_\Phi$ son parejas $(X, \mathscr{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y $\mathscr{O}_X$ es una gavilla sobre X.
- Los *morfismos* de $\mathbf{E}_\Phi$ son de la forma

$$(f^{op}, (f^{op})_\#) : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$$

donde $f^{op} : Y \to X$ es un morfismo en $\mathbf{Top}^{op}$ y $(f^{op})_{\#} : \mathscr{O}_Y \to (f^{op})^*(\mathscr{O}_X)$ es un morfismo en Gav(Y). Pero $f^{op} : Y \to X$ no es otra cosa que una función continua $f : X \to Y$ y $(f^{op})_{\#} : \mathscr{O}_Y \to (f^{op})^*(\mathscr{O}_X)$ es una transformación natural de la siguiente forma

$$\mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X).$$

de esto se obtiene que $\mathbf{E}_\Phi((Y, \mathscr{O}_Y), (X, \mathscr{O}_X)) = \mathbf{Anillados}((X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y))$. Por lo que $\mathbf{E}_\Phi = \mathbf{Anillados}^{op}$, esto es, la categoría dada por la construcción de Grothendieck es la opuesta de la categoría de espacios anillados y la fibración (3.11) es el funtor que olvida la estructura de gavilla de la categoría opuesta de espacios anillados.

$$U^{op} : \mathbf{Anillados}^{op} \to \mathbf{Top}^{op} \tag{3.12}$$

Al considerar el funtor opuesto de U^{op} se obtiene la siguiente opfibración

$$U : \mathbf{Anillados} \to \mathbf{Top} \tag{3.13}$$

Como consecuencia de lo anterior se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *La categoría de espacios anillados forman una opfibración sobre la categoría de espacios topológicos cuyo seudoufuntor se encuentra descrito por el diagrama (3.1).*

Puesto que para toda $f \in \mathbf{Top}$ cada funtor f_* tiene un adjunto izquierdo f^{-1}, entonces el teorema anterior y el teorema 1.4.1 permite establecer que el funtor (3.13) es en realidad una bifibración.

3.3. Espacios Localmente Anillados

Existen ciertos espacios anillados que son de particular interés en geometría algebraica porque tiene suficiente estructura para poder definir el *espacio tangente* en un punto x (y de forma análoga el *espacio cotangente*). Estos espacios son los espacios localmente anillados. Un *espacio localmente anillado* es un espacio anillado en el cual el tallo en x de su gavilla es un anillo local para todo $x \in X$, es decir, tiene un único ideal maximal. Se dice que un morfismo de espacios localmente anillados $(f, f^{\#}) : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ es *local* si el homomorfismo de anillos

$$(f_{\#})_x : \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$$

donde $(f_\#)_x$ es el funtor *stalk*$_x$ aplicado al morfismo de gavillas $f_\#$ es un *homomorfismo local* para todo $x \in X$, es decir, este morfismo preserva el ideal maximal. Estos objetos y morfismos forman una categoría. Para esta afirmación sólo queda demostrar que la composición de morfismos locales es local. Esto se desprende del siguiente lema.

Lema 3.3.1. *La composición de morfismos locales entre espacios localmente anillados es local.*

Demostración Considere un par de morfismos locales de la siguiente forma

$$(f, f^\#) : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y) \text{ y } (g, g^\#) : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (Z, \mathscr{O}_Z)$$

se tiene que

$$(g \circ f)^\# : \mathscr{O}_Z \xrightarrow{g^\#} g_*\mathscr{O}_Y \xrightarrow{g_*(f^\#)} g_*f_*\mathscr{O}_X = (g \circ f)_*\mathscr{O}_X$$

puesto que un adjunto izquierdo a $(g \circ f)_*$ esta dado por $f^{-1} \circ g^{-1}$ se tiene que el morfismo transpuesto a $(g \circ f)^\#$ bajo la adjunción $(g \circ f)^{-1} \dashv (g \circ f)_*$ esta dado por

$$f^{-1}g^{-1}\mathscr{O}_Z \xrightarrow{f^{-1}(g_\#)} f^{-1}\mathscr{O}_Y \xrightarrow{f_\#} \mathscr{O}_X \tag{3.14}$$

esto se deduce si se considera que la transpuesta de $(g \circ f)^\#$ es el único morfismo que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_Z \arrow[r, "\eta^{gf}_{\mathscr{O}_Z}"] \arrow[dr, "(g\circ f)^\#"'] & (gf)_*(f^{-1}g^{-1}\mathscr{O}_Z) \arrow[d, "(gf)_*(((g\circ f)^\#)^T)"] \\
& g_*f_*\mathscr{O}_X
\end{tikzcd}$$

donde $((g \circ f)^\#)^T$ denota la transpuesta de $(g \circ f)^\#$ bajo la adjunción $(g \circ f)^{-1} \dashv (g \circ f)_*$. Para demostrar que el morfismo (3.14) satisface esta propiedad considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_Z \arrow[rr, "\eta^{gf}_{\mathscr{O}_Z}"] \arrow[drr, "(f^{-1}(g_\#))^T"] \arrow[dd, "g^\#"] \arrow[ddrr, bend right=60, "(gf)^\#"'] & & (gf)_*(f^{-1}g^{-1}\mathscr{O}_Z) \arrow[d, "(gf)_*f^{-1}(g_\#)"] \\
& & g_*f_*f^{-1}\mathscr{O}_Y \arrow[d, "(gf)_*(f_\#)"] \\
g_*\mathscr{O}_Y \arrow[urr, "g_*(\eta^f_{\mathscr{O}_Y})"] \arrow[rr, "g_*f^\#"'] & & g_*f_*\mathscr{O}_X
\end{tikzcd} \tag{3.15}$$

el triángulo interno inferior de (3.15) conmuta porque es el funtor g_* aplicado al diagrama

$$\begin{tikzcd} & f_*f^{-1}\mathscr{O}_Y \arrow[d, "f_*f_\#"] \\ \mathscr{O}_Y \arrow[ur, "\eta^f_{\mathscr{O}_Y}"] \arrow[r, "f^\#"'] & g_*f_*\mathscr{O}_Z \end{tikzcd}$$

el triángulo interno superior conmuta al ser la propiedad universal que define la transpuesta de $f^{-1}g_\#$ bajo la adjunción $(g \circ f)^{-1} \dashv (g \circ f)_*$, el triángulo con la flecha curvada conmuta por definición, sólo queda demostrar que el triángulo interno central conmuta, para ver esto considere las siguientes transposiciones

$$\begin{array}{cc} \mathscr{O}_Z \xrightarrow{g^\#} g_*\mathscr{O}_Y \xrightarrow{g_*\eta^f_{\mathscr{O}_Y}} g_*f_*f^{-1}\mathscr{O}_Y & \text{en Gav}(Z) \\ \hline g^{-1}\mathscr{O}_Z \xrightarrow{g_\#} \mathscr{O}_Y \xrightarrow{\eta^f_{\mathscr{O}_Y}} f^{-1}f_*\mathscr{O}_Y & \text{en Gav}(Y) \\ \hline f^{-1}g^{-1}\mathscr{O}_Z \xrightarrow{f^{-1}g_\#} f^{-1}\mathscr{O}_Y \xrightarrow{1_{f^{-1}\mathscr{O}_Y}} f^{-1}\mathscr{O}_Y & \text{en Gav}(X) \\ \hline \mathscr{O}_Z \xrightarrow{\qquad (f^{-1}g_\#)^T \qquad} g_*f_*\mathscr{O}_Y & \text{en Gav}(Z) \end{array} \tag{3.16}$$

donde la primera correspondencia de (3.16) se sigue por las propiedades de la adjunción $g^{-1} \dashv g_*$, la segunda correspondencia se sigue usando la adjunta de la unidad (que es la identidad) bajo la adjunción $f^{-1} \dashv f_*$, y la última correspondencia es por definición bajo la adjunción $(g \circ f)^{-1} \dashv (g \circ f)_*$. Por lo tanto se obtiene que la transpuesta a $f^{-1}g_\#$ es $g_*\eta^f_{\mathscr{O}_Y} \circ g^\#$ tal y como se quería. Ahora al tomar el funtor $stalk_x$ se obtiene

$$\mathscr{O}_{Z,gf(x)} \xrightarrow{(g_\#)_{f(x)}} \mathscr{O}_{Y,f(x)} \xrightarrow{(f_\#)_x} \mathscr{O}_{X,x}$$

que es una composición de homomorfismos locales. Por lo tanto $(g \circ f)^\#$ es un morfismo local. ∎

La *categoría de espacios localmente anillados* se denota por **LAnillados**.

El siguiente teorema muestra que la categoría de espacios localmente anillados forma una subfibración de los espacios anillados sobre **Top**.

Teorema 3.3.2. *Considere el funtor que a cada espacio anillado olvida su estructura de gavilla y tómese la restricción a* **LAnillados**. *Este subfuntor es una subfibración sobre* **Top**.

Demostración Se demostrará que el funtor $U|$ es una fibración. Para esto considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{LAnillados} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "U|"'] & \mathbf{Anillados} \arrow[d, "U"] \\ & \mathbf{Top} \end{tikzcd} \tag{3.17}$$

el morfismo $U| : \mathbf{Anillados} \to \mathbf{Top}$ es una subfibración de U, ya que sean $f : X \to Y$ una función continua y $(Y, \mathscr{O}_Y) \in \mathbf{LAnillados}$, entonces el morfismo

$$(f, \eta^f_{\mathscr{O}_Y}) : (X, f^{-1}\mathscr{O}_Y) \to (Y, \mathscr{O}_Y) \tag{3.18}$$

es un levantamiento cartesiano de $(Y, \mathscr{O}_Y)$ sobre f, donde $\eta^f_{\mathscr{O}_Y}$ es la unidad de la adjunción $f^{-1} \dashv f_*$. El hecho de que $(X, f^{-1}\mathscr{O}_Y)$ es un espacio localmente anillado se debe a que

$$stalk_x(f^{-1}\mathscr{O}_Y) \cong stalk_{f(x)}(\mathscr{O}_Y) = \mathscr{O}_{Y,f(x)}$$

que claramente es un anillo local. El morfismo (3.18) se encuentra en **LAnillados**, ya que el morfismo transpuesto a $\eta^f_{\mathscr{O}_Y}$ es la identidad en $f^{-1}\mathscr{O}_Y$. Queda demostrar que el morfismo inducido por la fibración 3.12 es un morfismo local. Para esto considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} (Z, \mathscr{O}_Z) \arrow[r, dashed, "\exists!", "(g,g^\#)"'] \arrow[rr, bend left, "(h,h^\#)"] & (X, \mathscr{O}_X) \arrow[r, "(f,f^\#)"] & (Y, \mathscr{O}_Y) & & \mathbf{LAnillados} \arrow[d, mapsto, "U"] \\ Z \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & X \arrow[r, "f"] & Y & & \mathbf{Top} \end{tikzcd} \tag{3.19}$$

sea $g^\# : f^{-1}\mathscr{O}_Y \to g_*\mathscr{O}_Z$ la transpuesta de $h^\# : \mathscr{O}_Y \to h_*\mathscr{O}_Z$ bajo la adjunción $f^{-1} \dashv f_*$. El diagrama (3.19) conmuta por el diagrama (3.7). El morfismo transpuesto de $g^\#$ bajo la adjunción $g^{-1} \dashv g_*$ es el morfismo transpuesto a $h^\#$ bajo la adjunción $h^{-1} \dashv h_*$ que es local por hipótesis. Por lo tanto el funtor

$$U| : \mathbf{Anillados} \to \mathbf{Top} \tag{3.20}$$

es una subfibración de $U : \mathbf{Anillados} \to \mathbf{Top}$. ∎

Los espacios localmente anillados *no* forman una subopfibración de los espacios anillados. Un contraejemplo puede ser encontrado en [Mic10].

Si se considera alguna subcategoría **T** de **Top** que sea cerrada bajo límites finitos y subespacios (como en el ejemplo 8 de la sección 2.2), entonces es posible pensar en la restricción de la fibración a esta subcategoría[1]. La fibración obtenida será un sitio fibrado.

[1]Formalmente es necesario ver que el producto fibrado de una fibración a lo largo de un funtor es una fibración. Para una demostración de este hecho véase [Mic10]

Capítulo 4

Categorías Fibradas e Indexadas Monoidales

4.1. Introducción

El capítulo 3 tuvo como propósito aplicar las nociones hasta el momento desarrolladas a la categoría de espacios anillados. Esta categoría resultó ser una bifibración sobre la categoría de espacios topológicos. De esta bifibración se obtuvo una subfibración al considerar los espacios localmente anillados cuyo estudio resulta fundamental en geometría algebraica. En este capítulo veremos como el estudio de este tipo de fibraciones motiva la noción de *categoría fibrada monoidal*.

Considere la asignación seudofuntorial obtenida en el capítulo anterior dada por el siguiente diagrama

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{Top} &\to \mathbf{Cat} \\ X &\mapsto \Phi(A) = \mathrm{Gav}(X) \\ X \xrightarrow{f} Y &\mapsto \begin{array}{c} \mathrm{Gav}(X) \\ \big\downarrow {\scriptstyle f_* = \Phi(f)} \\ \mathrm{Gav}(Y) \end{array} \end{aligned} \tag{4.1}$$

las categorías $\mathrm{Gav}(X)$ son categorías con suficiente estructura para poder hablar de "módulos" en ellas. Este tipo de categorías reciben el nombre de *categorías monoidales*. Resulta ser que Grothendieck al construir el paralelismo entre fibraciones y seudofuntores estableció todo un "diccionario" entre estos conceptos. Así al hablar de cualquier idea relacionada con seudofuntores es posible preguntase por su análogo fibrado y de forma inversa. El diagrama 4.1 presenta de forma "natural" el estudio de seudofuntores cuyas categorías imagen son categorías monoidales. Este concepto ha sido estudiado ampliamente en [JA11], [Vak13] y [Gro61]. El concepto "paralelo", esto es, en el ámbito de fibraciones, ha sido estudiado en [Shu08] y [Mic10]. En esta tesis se expondrá este paralelismo que existe y obtendremos como resultado el hecho esperado, a saber, que existe una 2-equivalencia entre la categoría de fibraciones monoidales y seudofuntores cuyas categorías imagenes son monoidales. Estas últimas reciben el nombre de *categorías indexadas monoidales*.

En una categoría monoidal es posible hablar (como se ha expresado) de módulos y también es posible hablar de *monoides* (de hecho para hablar de módulos es necesario primero establecer qué es un monoide). La estructura monoidal requerida en este capítulo en una categoría permite obtener una fibración canónica, a saber, la *fibración de módulos sobre monoides*. La primera parte de este capítulo será dedicada a establecer este resultado. Una vez establecido este hecho se verá que existe un 2-funtor de las categorías monoidales a las fibraciones cartesianas. Después de esto se abordará el concepto central de este capítulo, a saber, las categorías fibradas monoidales (siendo el paralelo de las categorías indexadas monoidales en el contexto fibrado), se obtendra la 2-equivalencia mencionada previamente y por último se analizará que es lo que se entiende por *monoides y módulos en una categoría fibrada monoidal*.

Antes de pasar al estudio de las categorías indexadas monoidales y las fibraciones monoidales se necesitarán algunos conceptos de categorías monoidales. Un estudio amplio puede ser encontrado en [ML98], [Bor94b]. Los conceptos necesarios de categorías monoidales pueden encontrase en el apéndice B.

4.2. La Fibración De Módulos Sobre Monoides

4.2.1. Funtores Extensión y Restricción de Escalares

Como se observó en la introducción, las categorías de gavillas con coeficientes en anillos son monoidales (para una demostración de este hecho véase [Vak13]). En una categoría monoidal siempre es posible definir los monoides y módulos. Estos objetos serán objetos de la categoría que cumplan las versiones "diagramáticas" de los conceptos de monoides y módulos usuales (de hecho resultan ser *objetos monoides y módulos* de la categoría monoidal).

Dado un morfismo de anillos de la forma $f : R \to S$ el diagrama 1.7 establece un funtor de la categoría ${}_R\mathbf{Proyfin}$ (la categoría de R-módulos proyectivos finitamente generados) a la categoría ${}_S\mathbf{Proyfin}$ de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} f_* : {}_R\mathbf{Proyfin} \longrightarrow {}_S\mathbf{Proyfin} \\ X \mapsto S \otimes_R X \\ X \xrightarrow{g} X' \mapsto \begin{array}{c} S \otimes_R X \\ \big\downarrow {\scriptstyle 1_S \otimes_R g} \\ S \otimes_R X' \end{array} \end{gathered} \tag{4.2}$$

Este funtor recibió el nombre de extensión de escalaras. Resulta ser que la existencia de este funtor descansa en el hecho de que las categorías de módulos proyectivos finitamente generados son monoidales y ciertas condiciones de completez (a saber que estas son *cerradas* y tienen *coigualadores*). Entonces dado un morfismo de monoides $f : R \to S$ en una categoría monoidal con la suficiente estructura, es posible poder establecer un funtor de *extensión de escalares* de la categoría de R-módulos a la categoría de S-módulos. Del mismo modo, dado un morfismo de anillos $f : R \to S$ existe otro funtor íntimamente relacionado con el funtor extensión de escalares (esta relación se establecerá más adelante). Este funtor recibe el nombre de *restricción de escalares*. Su descripción explícita es la siguiente:

- Dado un S-módulo M, éste puede ser pensado como un R-módulo con la siguiente acción

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto f(r)m \end{aligned} \tag{4.3}$$

- Si $g : M \to M'$ es un morfismo de S-módulos, entonces éste también puede ser pensado como un morfismo de R-módulos ya que

$$g(rm) = g(f(r)m) = f(r)g(m) = rg(m)$$

Este funtor sólo depende de la estructura monoidal de las categorías de módulos. Entonces dado un morfismo de monoides $f : R \to S$ en una categoría monoidal, es posible poder establecer un funtor de *restricción de escalares* de la categoría de S-módulos a la categoría de R-módulos. La construcción de este funtor se presenta antes que la del funtor restricción de escalares ya que esta última depende de la primera.

Construcción del Funtor Restricción de Escalares

Sean (R,μ,η) y (S,ν,ε) monoides en $\mathbf{V}$ y $f: R \to S$ un morfismo de monoides. El morfismo f induce un funtor llamado *restricción de escalares* de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
f^{\#} &: \mathbf{Mod_S} \to \mathbf{Mod_R}\\
(M,\kappa) &\mapsto \left(M, M\otimes R \xrightarrow{1_M\otimes f} M\otimes S \xrightarrow{\kappa} M\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
(M,\kappa) \xrightarrow{g} (M',\kappa') \mapsto & (M, M\otimes R \arrow[r, "1_M\otimes f"] \arrow[d, "g\otimes 1_R"] & M\otimes S \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "g\otimes 1_S"] & M) \arrow[d, "g"] \\
& (M', M'\otimes R \arrow[r, "1'_M\otimes f"] & M'\otimes S \arrow[r, "\kappa'"] & M')
\end{tikzcd}$$

Este funtor preserva la estructura de bimódulo, esto es, para un monoide T induce un morfismo de bimódulos

$$f^{\#}: {}_{\mathbf{T}}\mathbf{Mod_S} \to {}_{\mathbf{T}}\mathbf{Mod_R}$$

Construcción del Funtor Extensión de Escalares

Ahora bien, para la construcción del funtor restricción de escalares, sean $\mathbf{V}$ monoidal con *coigualadores*, (M,κ) y (N,σ) R-módulos izquierdo y derecho respectivamente sobre el monoide R, entonces el producto tensorial de M y N sobre R se define como el siguiente coigualador

$$\begin{tikzcd}
(M\otimes R)\otimes N \arrow[r, shift left, "\kappa\otimes 1_N"] \arrow[r, shift right, "1_M\circ\sigma\circ\alpha_{M,R,N}"'] & M\otimes N \arrow[r, dashed, "\pi"] & M\otimes_R N\ .
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Una elección de coigualadores determina un funtor

$$\mathbf{Mod_R} \times {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{V} \tag{4.5}$$

Si el endofuntor $\_\otimes A$ de $\mathbf{V}$ preserva coigualadores para todo A objeto de $\mathbf{V}$ (esto es cierto si $\mathbf{V}$ es cerrada), entonces se induce un funtor

$$\mathbf{Mod_R} \times {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod_S} \xrightarrow{\otimes_R} \mathbf{Mod_S} \tag{4.6}$$

Si se considera un R-módulo derecho M y un (R, S)-módulo (N, σ, τ), la estructura de S-módulo derecho de $M \otimes N$ está definida por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes N) \otimes S \arrow[r, "\pi \otimes 1_S"] \arrow[d, "\alpha_{M,N,S}"'] & (M \otimes_R N) \otimes S \arrow[dd, "\overline{\tau}"] \\
M \otimes (N \otimes S) \arrow[d, "1_M \otimes \tau"'] & \\
M \otimes N \arrow[r, "\pi"] & M \otimes_R N
\end{tikzcd} \tag{4.7}$$

Por otro lado, todo monoide S es canónicamente un (S, S)-bimódulo. Aplicando el funtor $f^{\#}$ a este bimódulo se obtiene un (R, S)-bimódulo, el bifuntor (4.6) restringido a este bimódulo es el funtor extensión de escalares

$$f_{\#} : \_ \otimes_R S : \mathbf{Mod_R} \to \mathbf{Mod_S} \tag{4.8}$$

El siguiente teorema muestra la relación que existe entre los funtores restricción y extensión de escalares, a saber, son funtores adjuntos. Este hecho se presenta sin demostración. Para la prueba véase la tesis de Bruno Vallete [Val03].

Teorema 4.2.1. *Sea* $\mathbf{V}$ *una categoría monoidal con coigualadores y que estos sean preservados por el funtor* $\_ \otimes A$ *para toda* $A \in \mathbf{V}$ *(como en el caso de que* $\mathbf{V}$ *sea cerrada). Sea* $f : (R, \mu, \eta) \to (S, \upsilon, \epsilon)$ *un morfismo de monoides, entonces el funtor extensión de escalares* $f_{\#}$ *es adjunto izquierdo al funtor restricción de escalares* $f^{\#}$*.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Mod_S} \arrow[d, bend left, "f^{\#}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Mod_R} \arrow[u, bend left, "f_{\#}"]
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

Puesto que la asignación es seudofuntorial (de la categoría de monoides a la categoría de categorías monoidales) se tiene, usando el resultado (1.4.1) que existe una bifibración de módulos sobre monoides en $\mathbf{V}$

$$\mathbf{Mod(V)} \to \mathbf{Mon(V)} \tag{4.10}$$

La categoría $\mathbf{Mod(V)}$ se describe a continuación:

- Los *objetos* de $\mathbf{Mod}(\mathbf{V})$ son parejas (R, M) donde R es un monoide y M es un módulo derecho sobre R.

- Los *morfismos* de $\mathbf{Mod}(\mathbf{V})$ son parejas $(f, \phi) : (R, M) \to (S, N)$ donde $f : R \to S$ es un morfismo de monoides y $\phi : M \to N$ es un morfismo en $\mathbf{V}$, que hace conmutar el siguiente diagrama
$$\begin{tikzcd} M \otimes R \arrow[r, "\phi\otimes f"] \arrow[d, "\kappa"'] & N \otimes S \arrow[d, "\sigma"] \\ M \arrow[r, "\phi"] & N \end{tikzcd} \tag{4.11}$$

- La *composición* y las *identidades* son las de $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$.

4.2.2. El 2-funtor de Módulos sobre Monoides

Al considerar la adjunción (4.9) que existe entre los funtores restricción y extensión de escalares en una categoría monoidal con suficiente estructura se ha establecido que existe una fibración de la forma
$$\mathbf{Mod}(\mathbf{V}) \to \mathbf{Mon}(\mathbf{V}) \tag{4.12}$$
esta fibración se "comporta bien" con los funtores monoidales y las transformaciones monoidales. Para ver esto considere lo siguiente.

Sea $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ un funtor monoidal (véase apéndice B), éste determina un funtor
$$\mathbf{Mod}(F) : \mathbf{Mod}(\mathbf{V}) \to \mathbf{Mod}(\mathbf{V}') \tag{4.13}$$
donde a cada pareja $(R, M) \in \mathbf{Mod}(\mathbf{V})$ le asocia $(F(R), F(M))$ cuya estructura de $F(R)$-módulo derecho de $F(M)$ esta dada por el siguiente diagrama
$$F(M) \otimes F(R) \xrightarrow{\psi_{M,R}} F(M \otimes R) \xrightarrow{F(\kappa)} F(M) \tag{4.14}$$
en el cual κ es la estructura de R-módulo derecho de M y ψ son los morfismos de estructura de F. La imagen del morfismo $(f, \phi) : (R, M) \to (S, N)$ es la pareja $(F(f), F(\phi))$. Ahora sea
$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "F'"'{name=D}] & \mathbf{V}' \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\alpha"] \end{tikzcd} \tag{4.15}$$

una transformación natural de funtores monoidales, ésta determina una transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}(\mathbf{V}) \arrow[rr, bend left, "\mathbf{Mod}(F)"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{Mod}(F')"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \mathbf{Mod}(\alpha)"] & & \mathbf{Mod}(\mathbf{V'}) \end{tikzcd} \tag{4.16}$$

dada por

$$\mathbf{Mod}(\alpha)_{(R,M)} : (F(R), F(M)) \xrightarrow{(\alpha_R, \alpha_M)} (F'(R), F'(M)) \tag{4.17}$$

Teniendo esto en mente, se puede concluir el siguiente resultado.

Proposición 4.2.2. *Existe un 2-funtor entre la 2-categoría de categorías monoidales, funtores monoidales y transformaciones naturales monoidales y la categoría de fibraciones, funtores cartesianos y transformaciones naturales dado por:*

$$\mathscr{M} : MONCAT \to FIB_C$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, mapsto] & \mathbf{Mod}(\mathbf{V}) \arrow[d] \\ & \mathbf{Mon}(\mathbf{V}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{V'} \arrow[r, mapsto] & \mathbf{Mod}(\mathbf{V}) \arrow[rr, bend left, "\mathbf{Mod}(F)"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{Mod}(F')"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\mathbf{Mod}(\alpha)"] \arrow[d] & & \mathbf{Mod}(\mathbf{V'}) \arrow[d] \\ & & \mathbf{Mon}(\mathbf{V}) \arrow[rr, bend left, "\mathbf{Mon}(F)"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{Mon}(F')"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\mathbf{Mon}(\alpha)"] & & \mathbf{Mon}(\mathbf{V'}) \end{tikzcd}$$

4.3. Categoría Fibrada Monoidal

Se ha llegado al fin al concepto principal de este capítulo, a saber, el de *categoría fibrada monoidal.* La motivación de estos objetos surge de seudofuntores de la forma (1.13), (3.1), estos funtores tienen en común que son seudofuntores cuyas categorías imágenes son monoidales. Los seudofuntores de esta forma reciben el nombre de *categoría indexada monoidal*. De acuerdo a la filosofía con la cual se ha venido trabajando es natural preguntarse cual sería su correspondiente estructura en el lenguaje fibrado. El motivo de este capítulo será describir el objeto asociado a las categorías indexadas monoidales en este contexto. Se han presentado *a priori* estos objetos, aunque la motivación de éstos es obvia, es decir, la correcta "traducción" de las categorías indexas monoidales al lenguaje fibrado. Los primeros trabajos en categorías fibradas monoidales son relavitamente nuevos, aproximadamente en los años 90. Maltsiniotis las describe en su trabajo [Mal95]. Las categorías indexadas monoidales forman una 2-categoría con sus *seudotrasformaciones naturales monoidales*, esto es, seudotransformaciones monoidales cuyos funtores de estructura son monoidales y modificaciones. Análogamente es posible definir el concepto paralelo al de seudotrasformación natural monoidal y modificación en el lenguaje fibrado. Estos objetos llevan por nombre *funtores fibrados monoidales y transformaciones fibradas monoidales* respectivamente. Como conclusión de esta sección, se obtendrá la deseada 2-equivalencia entre éste dos tipos de estructuras. Algunas referencias para cubrir este material son [Zaw09] [Shu08] y [Mic10].

Definición 4.3.1. *Los objetos monoidales en $FIB(\mathbf{B})$ (respectivamente en $FIB_c(\mathbf{B})$) son llamados categorías fibradas monoidales (resp. categorías fibradas monoidales fuertes) sobre $\mathbf{B}$. La descripción explícita es la siguiente:*

- $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ *es una fibración.*
- $\otimes : \mathbf{E} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ *es un funtor sobre* $\mathbf{B}$.
- *Existe un funtor* $\eta : \mathbf{B} \to \mathbf{E}$ *sobre* $\mathbf{B}$*, esto es,* η *es una sección de* P.
- $\otimes$ *y* η *cumplen los axiomas de asociatividad y unidad del monoide salvo isomorfismo natural, esto es, se tienen los siguientes diagramas conmutativos en* $PIB(\mathbf{B})$.
    - Asociatividad*: El siguiente diagrama conmuta salvo isomorfismo natural.*

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{E} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E}) \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E} \cong \mathbf{E} \times_{\mathbf{B}} (\mathbf{E} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E}) \arrow[r, "1_{\mathbf{E}} \times_{\mathbf{B}} \otimes"] \arrow[d, "\otimes \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E}"] & \mathbf{E} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E} \arrow[d, "\otimes"] \\ \mathbf{E} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E} \arrow[r, "\otimes"] & \mathbf{E} \end{tikzcd} \tag{4.18}$$

es decir, existe para cada tercia de objetos A, B, C en la misma fibra un isomorfismo $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$ y más aún $P(\alpha_{A,B,C}) = 1$.

- Unidades*: Los siguientes diagramas conmutan salvo isomorfismo natural*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{B}\times_{\mathbf{B}}\mathbf{E} \arrow[r, "\eta\times_{\mathbf{B}}1_{\mathbf{B}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathbf{E}\times_{\mathbf{B}}\mathbf{E} \arrow[d, "\otimes"'] & \mathbf{E}\times_{\mathbf{B}}\mathbf{B} \arrow[l, "1_{\mathbf{B}}\times_{\mathbf{B}}\eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
 & \mathbf{E} &
\end{tikzcd}
\tag{4.19}
$$

esto es, para cada objeto E existen isomorfismos

$$E \xrightarrow{\lambda_E} \eta(B)\otimes E \xleftarrow{\rho_E} E$$

donde $P(E) = B$ y $P(\lambda_E) = 1 = P(\rho_E)$.
Esta información esta sujeta a axiomas de coherencia en cada fibra de P.

De la estructura monoidal de $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ y las observaciones anteriores se obtienen fácilmente estructuras monoidales para las fibras de $\mathbf{B}$, esto es, para cada fibra se obtiene una estructura monoidal. Estas categorías reciben el nombre de *categorías fibras monoidales* de la categoría fibrada monoidal P. Puesto que $FIB(\mathbf{B})$ y $FIB_c(\mathbf{B})$ son categorías monoidales simétricas, es posible definir *objetos monoidales simétricos* en ellos.

Definición 4.3.2. *Una categoría fibrada monoidal simétrica (resp. fibrada monoidal simétrica fuerte) sobre una categoría $\mathbf{B}$ es una categoría fibrada monoidal $(P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}, \otimes)$ y un isomorfismo natural sobre $\mathbf{B}$ que hace al siguiente diagrama conmutativo*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{E}\times_{\mathbf{B}}\mathbf{E} \arrow[r, bend left, "sym"] \arrow[rr, bend right=50, "\otimes"'] & \mathbf{E}\times_{\mathbf{B}}\mathbf{E} \arrow[r, bend left, "\otimes"] \arrow[d, phantom, "\cong\Downarrow\sigma"] & \mathbf{E} \\
 & {} &
\end{tikzcd}
\tag{4.20}
$$

esto es, $a\otimes b \cong b\otimes a$. Esta información está sujeta a ciertos axiomas de coherencia en cada fibra de P.

Como ejemplos de estos conceptos se tienen:

1. Cualquier categoría monoidal $\mathbf{V}$ es fibrada monoidal sobre $\{*\}$.

2. Si $\mathbf{C}$ es una categoría con productos fibrados, entonces la fibración $Fl(\mathbf{C}) \xrightarrow{cod} \mathbf{C}$ es una categoría fibrada monoidal simétrica

Definición 4.3.3. *Un funtor monoidal sobre* $\mathbf{B}$ *de una fibración monoidal* $(P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}, \otimes, \eta)$ *a otra* $(P' : \mathbf{E}' \to \mathbf{B}, \otimes', \eta')$ *es una tercia* (F, ϕ, ψ) *donde:*

- $F : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ *es un funtor sobre* $\mathbf{B}$*.*
- ϕ *es una transformación natural sobre* $\mathbf{B}$ *que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E} \arrow[r, "F\times_{\mathbf{B}} F"] \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow \phi"] & \mathbf{E}' \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E}' \arrow[d, "\otimes'"] \\
\mathbf{E} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{E}'
\end{tikzcd}
\tag{4.21}
$$

- ψ *es una transformación natural sobre* $\mathbf{B}$ *que hace conmutar el siguiene diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta'"] & \\
\mathbf{E} \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\swArrow \psi"] & \mathbf{E}'
\end{tikzcd}
\tag{4.22}
$$

Esta información está sujeta a ciertos axiomas de coherencia en cada fibra de P'*.*

Este funtor entre categorías fibradas monoidales se restringe a un funtor monoidal $F|_B : \mathbf{E}_B \to \mathbf{E}'_B$ Finalmente se definen las transformaciones naturales monoidales entre funtores monoidales

Definición 4.3.4. *Una transformación fibrada monoidal* α *sobre* $\mathbf{B}$ *del funtor monoidal* (F, ϕ^F, ψ^F) *a* (G, ϕ^G, ψ^G) *es una transformación natural* $\alpha : F \Rightarrow G$ *que hace conmutar los siguientes diagramas*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E} \arrow[r, bend left, "F\times_{\mathbf{B}} F"] \arrow[r, bend right, "G'\times_{\mathbf{B}} G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha\times_{\mathbf{B}}\alpha"] \arrow[dr, bend right, "\otimes"'] & \mathbf{E}' \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E}' \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[d, phantom, "\phi^G \Downarrow"] & \mathbf{E}' \\
& \mathbf{E} \arrow[ur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E} \arrow[r, "F\times_{\mathbf{B}} F"] \arrow[dr, bend right, "\otimes"'] & \mathbf{E}' \times_{\mathbf{B}} \mathbf{E}' \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \phi^F"] & \mathbf{E}' \\
& \mathbf{E} \arrow[ur, bend left, "F"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\alpha \Downarrow"] &
\end{tikzcd}
\tag{4.23}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{B} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Nearrow \psi^F"] & \mathbf{E} \arrow[d, bend right=50, "F"'] \arrow[d, bend left=50, "G"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] \\
& \mathbf{E}'
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{B} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Nearrow \psi^G"] & \mathbf{E} \arrow[d, "G"] \\
& \mathbf{E}'
\end{tikzcd}
\tag{4.24}
$$

Esta transformación natural determina una transformación natural monoidal en cada fibra. Las categorías fibradas monoidales, los funtores fibrados monoidales y las transformaciones fibradas monoidales constituyen una 2-categoría denotada por $MONFIB(\mathbf{B})$. De ésta última 2-categoría se pueden tomar las 2-subcategorías plenas (en 2-morfismos) de categorías fibradas monoidales fuertes y de categorías fibradas monoidales simétricas denotadas por $MONFIB_s(\mathbf{B})$ y $SMONFIB(\mathbf{B})$, respectivamente.

Es momento de considerar su paralelo en el lenguaje indexado.

4.4. La configuración Indexada

Sea $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ una categoría fibrada monoidal. Recuerde que se tiene la siguiente configuración en categorías indexadas

$$
\begin{aligned}
\Phi_P : \mathbf{B}^{op} &\to \mathbf{Cat} \\
B &\mapsto \mathbf{E}_B \\
A \to B &\mapsto f^* : \mathbf{E}_B \to \mathbf{E}_A
\end{aligned}
$$

Se ha hecho notar que cada fibra tiene una estructura monoidal $(\mathbf{E}_B, \otimes_B, I_B, \alpha_B, \lambda_B, \rho_B)$ heredada de la estructura global de P, es fácil comprobar que el funtor imagen inversa $f^* : A \to B$ es un funtor monoidal (f^*, ϕ^f, ψ^f). Su estructura monoidal se encuentra definida de la siguiente forma

$$
\begin{tikzcd}
f^*(D \otimes E) \arrow[r, "\overline{f}_{D\otimes E}"] & D \otimes E \\
f^*D \otimes f^*E \arrow[u, dashed, "\exists! \phi^f_{D,E}"] \arrow[ur, "\overline{f}_D \otimes \overline{f}_E"'] & \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
f^*(I_B) \arrow[r, "\overline{f}_{I_B}"] & I_B \\
I_A \arrow[u, dashed, "\exists! \psi^f"] \arrow[ur, "\eta(f)"] & \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\tag{4.25}
$$

por lo tanto, se obtiene un seudofuntor a la categoría de categorías monoidales

$$\Phi_P : \mathbf{B}^{op} \to MONCAT \tag{4.26}$$

Los objetos de esta forma reciben el nombre de *categorías indexadas monoidales*. Ahora considere un funtor monoidal sobre $\mathbf{B}$ de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "P"'] & \mathbf{E}' \arrow[d, "P'"] \\ & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{4.27}$$

entonces existe una transformación natural op-laxa entre los seudofuntores asociados

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B}^{op} \arrow[r, bend left, "\Phi_P"] \arrow[r, bend right, "\Phi_{P'}"'] \arrow[r, phantom, "(\tau_F,\xi_F)\Downarrow"] & CAT \end{tikzcd}$$

donde $(\tau_F)_A : \mathbf{E}_A \to \mathbf{E'}_A$ es la restricción de F a la fibra $\mathbf{E_A}$ y cuyos isomorfismos de estructura de la transformación natural op-laxa ξ_F^f para un morfismo $f : A \to B$ se encuentran dados de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} f^*(F_B E) \arrow[r, "\overline{f}_{F_B E}"] & F_B E & \mathbf{E}' \arrow[ddd, "P'"] \\ F_A(f^*E) \arrow[u, dashed, "\exists!(\xi_F^f)_E"] \arrow[ur, "F(\overline{f}_E)"'] & & \\ & & \\ A \arrow[r, "f"'] & B & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{4.28}$$

donde $(\xi_F^f)_D$ es el único morfismo en la fibra $\mathbf{E'}_A$ que hace conmutar al triángulo (4.28). Por lo tanto, se tiene una transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}_B \arrow[r, "F|_B"] \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\xi^f \Nearrow"] & \mathbf{E'}_B \arrow[d, "f^*"] \\ \mathbf{E}_A \arrow[r, "F|_A"'] & \mathbf{E'}_A \end{tikzcd} \tag{4.29}$$

Esta transformación es monoidal.

Lema 4.4.1. *La transformación natural ξ_F^f es monoidal.*

Demostración Considere el siguiente diagrama que representa la preservación del *producto*

$$
\begin{tikzcd}
F_A f^*E \otimes F_A f^*\varepsilon \arrow[rr, "\xi_F^f \otimes \xi_F^f"] \arrow[dr, "F\overline{f}_E \otimes F\overline{f}_\varepsilon"'] \arrow[dd, "\phi_A"'] & & f^*F_BE \otimes f^*F_B\varepsilon \arrow[dl, "\overline{f}_{F_BE} \otimes \overline{f}_{F_B\varepsilon}"] \arrow[dd, "\phi^f"] \\
& F_BE \otimes F_B\varepsilon \arrow[dd, "\phi_B"] & \\
F_A(f^*E \otimes f^*\varepsilon) \arrow[dr, "F(\overline{f}_E \otimes \overline{f}_\varepsilon)"] \arrow[dd, "F_A(\phi^f)"'] & & f^*(F_BE \otimes F_B\varepsilon) \arrow[ul, "\overline{f}_{F_BE \otimes F_B\varepsilon}"'] \arrow[dd, "\overline{f}(\phi_B)"] \\
& F_B(E \otimes \varepsilon) & \\
F_A f^*(E \otimes \varepsilon) \arrow[ur, "F(\overline{f}_{E \otimes \varepsilon})"] \arrow[rr, "\xi_F^f"'] & & f^*F_B(E \otimes \varepsilon) \arrow[ul, "\overline{f}_{F_B(E \otimes \varepsilon)}"']
\end{tikzcd}
\tag{4.30}
$$

el tríangulo superior del cuadro (4.30) conmuta por la definición de ξ_F^f y la definición de $\otimes$, el tríangulo derecho conmuta por la definición de ϕ^f (que es lo que hace que los funtores f^* sean monoidales), el triángulo izquierdo conmuta porque es el funtor F_A aplicado a la definición de ϕ^f, y el inferior conmuta por la definición de ξ^f, el cuadrado interno izquierdo conmuta por la naturalidad de ϕ y el cuadrado interior derecho conmuta por la definición de f^* aplicada a la flecha ϕ_B, por lo tanto todos los cuadrados internos conmutan. Esto implica que el diagrama exterior conmuta usando que la flecha $\overline{f}_{F_B(E\otimes\varepsilon)}$ es cartesiana sobre f. Para demostrar la preservación de la *identidad* considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & I_A^{\mathbf{E}'} \arrow[dl, "\psi_A"'] \arrow[d, "\eta(f)"] \arrow[dr, "\phi^f"] & & \\
 & F_A(I_A^{\mathbf{E}}) \arrow[dr, "F\eta(f)"'] \arrow[ddl, "F_A(\psi^f)"'] & I_B^{\mathbf{E}} \arrow[d, "\psi_B"] & f^*(I_B^{\mathbf{E}'}) \arrow[l, "\overline{f}_{I_B^{\mathbf{E}'}}"'] \arrow[ddr, "f^*(\psi_B)"] & \\
 & & F_B(I_B^{\mathbf{E}}) & & \\
F_Af^*(I_B^{\mathbf{E}}) \arrow[uurr, "F(\overline{f}_{I_B^{\mathbf{E}}})"'] \arrow[rrrr, "\xi_F^f"'] & & & & f^*F_B(I_B^{\mathbf{E}}) \arrow[uull, "\overline{f}_{F_B(I_B^{\mathbf{E}})}"]
\end{tikzcd} \tag{4.31}$$

el cuadrado interno superior izquierdo de (4.31) conmuta por la naturalidad de ϕ aplicada a la flecha f, el triángulo superior derecho conmuta por la definición de ψ^f, el cuadrado derecho conmuta por la definición de $f^*(\psi_B)$, el triángulo inferior izquierdo conmuta porque es el funtor F_A aplicado a la definición de ψ^f, el triángulo inferior conmuta por la definición de ξ_F^f. Esto implica que el cuadro exterior conmuta usando que la flecha $\overline{f}_{F_B(I_B^{\mathbf{E}})}$ es cartesiana sobre f.

Para finalizar considere una transformación natural monoidal de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E}_A \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "F'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, "P"'] & & \mathbf{E}_B \arrow[dl, "P'"] \\
 & \mathbf{B} &
\end{tikzcd} \tag{4.32}$$

esta transformación induce una *modificación* (véase (A.5) entre las correspondientes transformaciones naturales oplaxas

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{B}^{op} \arrow[r, bend left, "\Phi_P"] \arrow[r, bend right, "\Phi_{P'}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau_F \overset{\Xi_\alpha}{\Rrightarrow} \Downarrow\tau_{F'}"] & MONCAT
\end{tikzcd} \tag{4.33}$$

que en cada elemento $A \in \mathbf{B}$ es la transformación natural $\alpha|_{\mathbf{E}_A}$, es decir

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}_A \arrow[r, bend left, "F|_A"] \arrow[r, bend right, "F'|_A"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha|_{\mathbf{E}_A}"] & \mathbf{E}'_A \end{tikzcd}$$

una comprobación directa lleva a establecer que Ξ_α cumple las propiedades de modificación.

Si se considera la construcción de Grothendieck de un seudofuntor $\mathbf{B}^{op} \to MONCAT$ se obtiene una categoría fibrada monoidal cuyo funtor seccional $\eta_\Phi : \mathbf{B} \to \mathbf{E}$ es el funtor que a cada objeto $B \in \mathbf{B}$ le asocia el objeto neutro I_B de la categoría monoidal $\Phi(B)$. Análogamente para seudotransformaciones naturales y modificaciones. De esta forma se obtiene el siguiente teorema fundamental.

Teorema 4.4.2. *Existe una 2-equivalencia entre la 2-categoría de categorías fibradas monoidales sobre* $\mathbf{B}$ *y la 2-categoría de categorías indexadas monoidales, seudo transformaciones naturales y modificaciones.*

De esta forma se ha establecido el resultado fundamental de este capítulo. Por último debido a que en una categoría indexada monoidal se tiene de forma natural la categoría indexada en monoides y módulos, es natural preguntarse por su paralelo en el lenguaje indexado, a saber, *¿cúales serían las categorías fibradas correspondientes a estos seudofuntores?*. La descripción de estas fibraciones se hará de forma independiente a la configuración indexada, sólo para que al final encontremos el resultado deseado, es decir, existe un isomorfismo entre la fibración inducida por el seudofuntor indexado en monoides (resp. en módulos) y la fibración de la *categoría de monoides de* P *(resp. módulos).*

4.5. Monoides y Módulos en una Categoría Fibrada Monoidal

En esta sección se introducirá el concepto de monoides y módulos en una categoría fibrada monoidal, la idea básica es fijarse en los objetos monoides y módulos de las fibras que tienen una estructura monoidal y las relaciones que surgen entre ellos por los funtores imagenes inversa.

Considere primero una categoría indexada monoidal $\mathbf{B}^{op} \to MONCAT$ y en cada categoría $\Phi(B)$ los objetos monoides, entonces se obtiene un seudofuntor definido de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{op} &\to \mathbf{Cat} \\ A &\mapsto Mon(\Phi(A)) \\ f : A \to B &\mapsto Mon(f^*) : Mon(\mathbf{E}_B) \to Mon(\mathbf{E}_A) \end{aligned} \tag{4.34}$$

este seudofuntor recibe el nombre de *categoría indexada en monoides* (de la categoría indexada monoidal). Su categoría fibrada asociada

$$Mon(\Phi) \longrightarrow \mathbf{B} \tag{4.35}$$

recibe el nombre de *fibración en monoides de* Φ. En el contexto indexado es sumamemte sencillo definir la categoría indexada en monoides de Φ. Si se considera una fibración monoidal $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ es posible definir los objetos monoides de esta fibración monoidal. Estos objetos forman una fibración. Para esto es necesario el siguiente lema.

Lema 4.5.1. *Sean $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ una categoría fibrada monoidal y $f : A \to B \in \mathbf{B}$, entonces*

- *Si (R, μ, ν) es un monoide en $\mathbf{E}_B$ y $f^*R \xrightarrow{\overline{f}_R} R$ una flecha cartesiana sobre f, entonces existe una única estructura de monoide en f^*R, tal que $\overline{f}$ es un morfismo de monoides en P y si $\phi : S \to R$ es un morfismo de monoides sobre f, entonces existe un único morfismo de monoides que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "\phi"] & \\ f^*(R) \arrow[r, "\overline{f}_R"'] & R \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \tag{4.36}$$

La estructura de monoide de $f^*(R)$ se encuentra definida de la siguiente manera

- *La* multiplicación*:*

$$\begin{tikzcd} f^*(R) \otimes f^*(R) \arrow[r, "\overline{f}_R \otimes \overline{f}_R"] \arrow[d, dashed] & R \otimes R \arrow[d, "\mu"] \\ f^*(R) \arrow[r, "\overline{f}_R"] & R \end{tikzcd} \tag{4.37}$$

- *La* identidad*:*

$$\begin{tikzcd} I_A \arrow[r, "\eta(f)"] \arrow[d, dashed] & I_B \arrow[d, "\nu"] \\ f^*(R) \arrow[r, "\overline{f}_R"'] & R \end{tikzcd} \tag{4.38}$$

- *Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de monoides en $\mathbf{E}_B$, entonces el morfismo inducido $f^*(\phi)$ es un morfismo de monoides en $\mathbf{E}_A$.*

Ahora se podrá considerar la categoría de monoides en P.

Definición 4.5.2. *Sea $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ una categoría fibrada monoidal. La categoría de monoides en P, denotada por $Mon(P)$ se encuentra definida por:*

- *Los* objetos *de $Mon(P)$ son los monoides de las fibras.*
- *Un* morfismo *$\phi : (R, \mu, \nu) \to (R', \mu', \nu')$ es un morfismo $\phi : R \to R'$ en $\mathbf{E}$ que hace conmutar los siguientes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} R \otimes R \arrow[r, "\phi\otimes\phi"] \arrow[d, "\mu"] & R' \otimes R' \arrow[d, "\mu'"] \\ R \arrow[r, "\phi"] & R' \end{tikzcd} \tag{4.39}$$

$$\begin{tikzcd} I_{P(R)} \arrow[r, "\eta(P(\phi))"] \arrow[d, "\nu"] & I_{P(R')} \arrow[d, "\nu'"] \\ R \arrow[r, "\phi"'] & R' \end{tikzcd} \tag{4.40}$$

- *La* composición *e* identidades *son las de* $\mathbf{E}$.

Teorema 4.5.3. *Sea $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ una categoría fibrada monoidal, entonces:*

- *La proyección $\phi : Mon(P) \to \mathbf{B}$ es una fibración, esta fibración recibe el nombre de la* fibración de monoides en P.

- *Sea* $Mon(\Phi_P) \to \mathbf{B}$ *la fibración en monoides de la categoría indexada monoidal* $\Phi_P : \mathbf{B}^{op} \to MONCAT$*, entonces existe un isomorfismo de fibraciones*

$$\begin{tikzcd} Mon(\Phi_P) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & Mon(P) \arrow[dl] \\ & \mathbf{B} & \end{tikzcd} \tag{4.41}$$

Esbozo de la demostración Para probar la primera parte del teorema considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dashed, "\exists!"'] \arrow[rr, bend left, "\phi"] \arrow[d, dashed] & F^*R \arrow[r, "\overline{f}_R"'] & R & \mathbf{E} \arrow[dd, "P"] \\ k^*f^*R \arrow[ur, "\overline{k}_{f^*R}"'] \arrow[urr, bend right] & & & \\ C \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & A \arrow[r, "f"] & B & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{4.42}$$

donde R es un monoide en $\mathbf{E}_B$, sea ϕ tal que $P(\phi) = f \circ k$, puesto que todos los objetos de $\mathbf{E}$ que aparecen en el diagrama son monoides y por la primera parte del lema (4.5.1) se obtiene que cada una de las flechas en $\mathbf{E}$ son morfismos de monoides y son únicas puesto que P es fibración. Para la segunda parte considere el siguiente funtor

$$\begin{aligned} F : Mon(\Phi_P) &\to Mon(P) \\ (R, A) &\mapsto (R, A) \\ (f, \phi) : (R, A) \to (S, B) &\mapsto R \to S \end{aligned} \tag{4.43}$$

donde el morfismo $R \to S$ esta definido por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*S \arrow[r, "\overline{f}_S"] & S \\ R \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \tag{4.44}$$

es claro que el morfismo $R \to S$ es un morfismo de monoides, y que esta definición es funtorial por la unicidad de las flechas cartesianas. Análogamente, considere el funtor

$$\begin{aligned} G : Mon(P) &\to Mon(\Phi_P) \\ (R, A) &\mapsto (R; A) \\ \phi : (R, A) \to (S, B) &\mapsto (f, x) : R \to f^*S \end{aligned} \tag{4.45}$$

donde $P(\phi) = f$ y x está definido por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*S & & \mathbf{E} \arrow[dd, "P"] \\ R \arrow[u, dashed, "\exists ! = x"] \arrow[r] & S \arrow[from=ul, "\overline{f}_S"] & \\ A \arrow[r, "P(\phi)=f"] & B & \mathbf{B} \end{tikzcd} \tag{4.46}$$

De la misma forma se pueden definir los módulos en una categoría fibrada monoidal. Considere una categoría indexada monoidal $\Phi : \mathbf{B}^{op} \to MONCAT$ y el 2-funtor de la proposición (4.2.2)

$$\mathscr{M} : MONCAT \to FIB_c$$

entonces se tiene la siguiente categoría indexada en FIB_c

$$\mathscr{M} \circ \Phi : \mathbf{B}^{op} \to FIB_c \tag{4.47}$$

$$\begin{tikzcd} A \mapsto & Mod(\Phi(A)) \arrow[d] \\ & Mon(\Phi(A)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \xrightarrow{f} B \mapsto & Mod(\Phi(B)) \arrow[r, "Mod(f^*)"] \arrow[d] & Mod(\Phi(A)) \arrow[d] \\ & Mon(\Phi(B)) \arrow[r, "Mon(f^*)"] & Mon(\Phi(A)) \end{tikzcd}$$

en la configuración indexada se tiene una seudotransformación natural de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B}^{op} \arrow[r, bend left, "\mathscr{MOD}\circ\Phi"] \arrow[r, bend right, "\mathscr{MON}\circ\Phi"'] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] & CAT \end{tikzcd} \tag{4.48}$$

esta transformación natural induce en el contexto fibrado el siguiente morfismo en $FIB(\mathbf{B})$

$$\begin{tikzcd} Mod(\Phi) \arrow[rr] \arrow[dr] & & Mon(\Phi) \arrow[dl] \\ & \mathbf{B} & \end{tikzcd} \tag{4.49}$$

esta fibración recibe el nombre de *categoría indexada de módulos sobre la categoría indexada de monoides en* Φ.

Apéndice A

Teoría de Bicategorías

A.1. Introducción

La teoría de bicategorías[1] tiene un papel importante en esta tesis, debido a que proporcionará el lenguaje necesario para desarrollarla. Este capítulo tiene la función de apéndice. No se pretende hacer un estudio conciso de la materia, si no más bien dotar al lector de los conceptos que serán necesarios a lo largo de este escrito y proporcionar ejemplos que ayudarán a la mejor comprensión de los mismos. Si la presentación de este tema es demasiado "esquemática" esto es debido a que sólo cumple la función de "guía de consulta". Algunas referencias para cubrir este material son [Bé67], [Lei98].

A.2. Bicategorías

Definición A.2.1. *Una Bicategoría* $\mathbb{A}$ *consta de la siguiente información:*

- *Una clase de objetos* $\mathbb{A}_0$ *denotados por* $A, B, C\ldots$ *etcétera.*
- *Para todo par de objetos* A *y* B *una Categoría* $\mathbb{A}(A, B)$.

[1] Una Bicategoría es un concepto usado para extender la noción de categoría, esto es debido a las situaciones donde la composición de morfismos no es asociativa, sólo "módulo isomorfismo". Esta noción fue introducida en 1967 por Jean Bénabou.

— Los objetos de esta categoría reciben el nombre de morfismos o 1-flechas y se denotan por $A \xrightarrow{f} B$.

— Los morfismos de $\mathbb{A}(A,B)$ reciben el nombre de 2-flechas de $\mathbb{A}$ y se denotan por
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \end{tikzcd} .$$

— La composición de 2 flechas se escribirá como $\alpha \bullet \beta$ para toda α y β en $\mathbb{A}(A,B)$.

- *Para cualesquiera objetos A, B, C en $\mathbb{A}$ un funtor de composición*

$$\circ_{A,B,C} : \mathbb{A}(B,C) \times \mathbb{A}(A,B) \to \mathbb{A}(A,C)$$

- *Para todo objeto A un morfismo $A \xrightarrow{1_A} A$.*

— Siempre que sea claro la 2-flecha identidad en $A \xrightarrow{1_A} A$ se denotará igual que 1_A en lugar de 1_{1_A}.

- *Para cualesquiera tres morfismos componibles f, g, h un isomorfismo natural en f, g y h*

$$\alpha_{f,g,h} : h \circ (g \circ f) \Rightarrow (h \circ g) \circ f$$

- *Para todo morfismo $A \xrightarrow{f} B$ dos isomorfismos naturales en f*

$$\lambda_f : 1_A \circ f \Rightarrow f \text{ y } \gamma_f : f \Rightarrow f \circ 1_B$$

Toda esta información está sujeta a ciertos axiomas de coherencia, los cuales esencialmente dicen que todos los diagramas pertinentes son conmutativos. Una 2-categoría es una bicategoría en la cual los isomorfismos naturales $\alpha_{f,g,h}$, λ_f y γ_f son identidades.

Como ejemplos se tienen:

1. Toda categoría $\mathbf{C}$ es una bicategoría donde $\mathbf{C}(A,B)$ es una 2-categoría discreta para cualesquiera objetos de $\mathbf{C}$.

2. **Cat** la 2-categoría cuyos objetos son categorías, los morfismos son funtores entre dos categorías y las 2-flechas son transformaciónes naturales.

3. **Top** la bicategoría cuyos objetos son espacios topológicos, las 1-flechas son las funciones continuas entre espacios y las 2-flechas las homotopías entre dos funciones continuas.

4. $\mathbf{Cat}^{\mathbf{B}}$ la 2-categoría de seudofuntores, seudotransformaciónes naturales y modificaciones (Veasé A.5)

Es natural preguntarse por la forma de relacionar dos bicategorías $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ de tal forma que esta relación respete la estructura, para esto se tiene el concepto de *funtor laxo*.

A.3. Funtores Laxos

Definición A.3.1. *Sean* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}$ *bicategorías. Un* funtor laxo $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *consta de la siguiente información:*

- *Una función* $\Phi_0 : \mathbb{A}_0 \to \mathbb{B}_0$ *de los objetos de* $\mathbb{A}$ *a los objetos de* $\mathbb{B}$.
- *Para cualquier par de objetos* A A' *de* $\mathbb{A}$ *un funtor*

$$\Phi_{A,A'} : \mathbb{A}(A, A') \to \mathbb{B}(\Phi A, \Phi A')$$

- *Para cualquier par de morfismos* f, g *componibles una transformación natural en* f *y* g

$$\gamma_{f,g} : \Phi(g) \circ \Phi(f) \Rightarrow \Phi(g \circ f)$$

- *Para cualquier objeto* A *de* $\mathbb{A}$ *una 2-flecha*

$$\delta_A : 1_{\Phi(A)} \Rightarrow \Phi(1_A)$$

Toda esta información está sujeta a ciertos axiomas de coherencia, los cuales esencialmente dicen que todos los diagramas pertinentes son conmutativos. Un funtor laxo en el cual las transformaciónes naturales $\gamma_{f,g}$ *y* δ_A *son isomorfismos recibe el nombre de seudofuntor y un funtor laxo entre 2-categorías en el cual las transformaciónes naturales son identidades se llama 2-funtor.*

Como ejemplos se tienen:

1. Todo funtor $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ entre categorías $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es un 2-funtor.
2. Sea $\mathbb{A}$ una 2-categoría y C un objeto de $\mathbb{A}$, definase $\mathbb{A}(C, \_) : \mathbb{A} \to CAT$ el 2-funtor representable por C.

Es natural preguntarse por la forma de relacionar dos funtores laxos Φ y Ψ de tal forma que esta relación respete la estructura, para esto se tiene el concepto de *transformación natural laxa.*

A.4. Transformaciones Naturales Laxas

Definición A.4.1. *Sean* $\Phi, \Psi : \mathbb{A} \rightrightarrows \mathbb{B}$ *funtores laxos.* Una transformación natural laxa *de Φ a Ψ consta de la siguiente información:*

- *Para todo A objeto de $\mathbb{A}$ un morfismo $\Phi A \xrightarrow{t_A} \Psi A$.*
- *Para cada morfismo f en $\mathbb{A}(A, B)$ una 2-flecha $t_f : \Psi f \circ t_A \Rightarrow t_B \circ \Phi f$ como en el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \Phi(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "\Phi(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow t_f"] & \Psi(A) \arrow[d, "\Psi(f)"] \\ \Phi(B) \arrow[r, "t_B"'] & \Psi(B) \end{tikzcd}$$

tal que es natural en f, esto es para cualquier 2-flecha $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \end{tikzcd}$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \Psi f \circ t_A \arrow[r, Rightarrow, "\Psi\alpha \circ t_A"] \arrow[d, Rightarrow, "t_f"] & \Psi g \circ t_A \arrow[d, Rightarrow, "t_g"] \\ t_B \circ \Phi f \arrow[r, Rightarrow, "t_B \circ \Phi\alpha"'] & t_B \circ \Psi g \end{tikzcd}$$

Toda esta información está sujeta a ciertos axiomas de coherencia los cuales esencialmente dicen que todos los diagramas pertinentes son conmutativos. Una transformación natural laxa entre seudofuntores en el cual las 2-flechas t_f son isomorfismos recibe el nombre de seudotranformación natural, una transformación natural laxa entre 2-funtores en el cual las 2-flechas t_f son identidades se llama transformación 2-natural.

Es natural preguntarse por la forma de relacionar dos transformaciónes naturales laxas t y u de tal forma que esta relación respete la estructura, para esto se tiene el concepto de modificación.

A.5. Modificaciones

Definición A.5.1. *Sea* $\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, bend left, "\Phi"] \arrow[r, bend right, "\Psi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow t \quad \Downarrow u"] & \mathbb{B} \end{tikzcd}$ *transformaciónes naturales laxas. Una* modificación Ξ *de t a u consta de la siguiente información:*

- *Para todo A objeto de $\mathbb{A}$ una 2-flecha* $\begin{tikzcd} \Phi A \arrow[r, bend left, "t_A"] \arrow[r, bend right, "u_A"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi_A"] & \Psi A \end{tikzcd}$.

- *Para cada 2-flecha* $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & B \end{tikzcd}$ *tenemos el siguiente cuadro conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \Psi f \circ t_A \arrow[r, Rightarrow, "\Psi\alpha \circ \Xi_A"] \arrow[d, Rightarrow, "t_f"'] & \Psi g \circ \Xi_A \arrow[d, Rightarrow, "u_g"] \\ t_B \circ \Phi f \arrow[r, Rightarrow, "\Xi_B \circ \Phi\alpha"'] & \Xi_B \circ \Phi g \end{tikzcd}$$

—Esta condición es equivalente a que los siguientes diagramas sean iguales

$$\begin{tikzcd} \Phi(A) \arrow[r, bend left, "t_A"] \arrow[r, bend right, "u_A"'] \arrow[r, phantom, "\Xi_A \Downarrow"] \arrow[dr, bend right, "\Phi(g)"'] & \Psi(A) \arrow[r, bend left, "\Psi(f)"] \arrow[r, bend right, "\Psi(g)"'] \arrow[r, phantom, "\Psi(\alpha) \Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\zeta_g \Downarrow"] & \Psi(B) \\ & \Phi(B) \arrow[ur, bend right, "u_B"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \Phi(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[dr, bend left, "\Phi(f)"] \arrow[dr, bend right, "\Phi(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\Phi(\alpha) \Downarrow"] & \Psi(A) \arrow[r, "\Psi(f)"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \xi(f)"] & \Psi(B) \\ & \Phi(B) \arrow[ur, bend left, "t_B"] \arrow[ur, bend right, "u_B"'] \arrow[ur, phantom, "\Xi_B \Downarrow"] & \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

Apéndice B

Categorías Monoidales

B.1. Categorías Monoidales

Las categorías monoidales serán necesarias en el capítulo 4. He aquí una exposición sistemática de ellas y de los conceptos relacionados. Algunas referencias para cubrir este material son [Bae04], [ML98], [Bor94b].

Definición B.1.1. *Una* categoría monoidal *es una categoría* $\mathbf{V}$ *equipada con lo siguiente:*

- $\otimes : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *un funtor (llamado el* producto tensorial o producto monoidal*).*
- I *es un objeto de* $\mathbf{V}$ *(llamado el* objeto unidad u objeto identidad*).*
- *Tres transformaciónes naturales sujetas a condiciones de coherencia que esencialmente expresan el hecho de que el producto tensorial es:*
    - Asociativo*: Existe un isomorfismo natural (llamada el* asociador*)*

      $$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C)$$

    - *Tiene al objeto* I *como* identidad izquierda y derecha*: Existen dos isomorfismos naturales* $\lambda_A : I \otimes A \xrightarrow{\cong} A$ *y* $\rho_A : A \otimes I \xrightarrow{\cong} A$ *(llamadas* unidad izquierda y derecha *respectivamente).*

Esta información satisface los siguientes axiomas de coherencia.

- *Para cualesquiera objetos A, B, C de* $\mathbf{V}$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
 & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & \\
((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] \arrow[d, "\alpha_{A,B,C}\otimes 1_D"'] & & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \\
(A\otimes(B\otimes C))\otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"'] & & A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[u, "1_A\otimes\alpha_{B,C,D}"']
\end{tikzcd} \tag{B.1}$$

- *Para cualesquiera objetos A, B de* $\mathbf{V}$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes I)\otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A\otimes 1_B"'] & & A\otimes(I\otimes B) \arrow[dl, "1_A\otimes\lambda_B"] \\
 & A\otimes B &
\end{tikzcd} \tag{B.2}$$

Se suele denotar a una categoría monoidal sólo por la tercia $(\mathbf{V}, \otimes, I)$ *y en algunos casos cuando la situación es clara sólo por la categoría* $\mathbf{V}$.

Una categoría monoidal simétrica *es una categoría monoidal* $\mathbf{V}$ *que es* simétrica, *es decir, existe una transformación natural* $\sigma : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \to \mathbf{V}\times\mathbf{V}$; $\sigma_{A,B} : A\otimes B \xrightarrow{\cong} B\otimes A$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
A\otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,B}"] \arrow[d, "1_A\otimes 1_B"'] & B\otimes A \arrow[dl, "\sigma_{B,A}"] \\
A\otimes B &
\end{tikzcd} \tag{B.3}$$

Esta información satisface los siguientes axiomas de coherencia:

- *Para cualesquiera objetos A, B, C de* $\mathbf{V}$ *los siguientes diagramas conmutan*

$$\begin{tikzcd}
A\otimes(B\otimes C) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{A,B,C}"] \arrow[d, "\sigma_{A,B\otimes C}"'] & (A\otimes B)\otimes C \arrow[r, "\sigma_{A,B}\otimes 1_C"] & (B\otimes A)\otimes C \arrow[d, "\alpha_{A,B,C}"] \\
(B\otimes C)\otimes A & B\otimes(C\otimes A) \arrow[l, "\alpha^{-1}_{B,C,A}"] & B\otimes(A\otimes C) \arrow[l, "1_B\otimes\sigma_{A,C}"]
\end{tikzcd} \tag{B.4}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}"] \arrow[d, "\sigma_{A,B} \otimes 1_C"'] & A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "1_A \otimes \sigma_{B,C}"] & A \otimes (C \otimes B) \arrow[d, "\alpha^{-1}_{A,B,C}"] \\
C \otimes (A \otimes B) & (C \otimes A) \otimes B \arrow[l, "\alpha_{A,B,C}"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[l, "\sigma_{A,C} \otimes 1_C"]
\end{tikzcd} \tag{B.5}$$

B.2. Funtor Monoidal

Un *funtor monoidal* de una categoría $(\mathbf{V}, \otimes, I)$ a otra $(\mathbf{V}', \otimes', I')$ es una tercia (F, Φ, Ψ) donde:

- $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ es un funtor llamado *funtor subyacente*.
- $\Phi : \otimes' \circ (F \times F) \Rightarrow F \circ \otimes$, es un isomorfismo natural que expresa el hecho de que F preserva la estructura monoidal.
- $\Psi : I' \to F(I)$ es un isomorfismo en $\mathbf{V}'$ que expresa el hecho de que F preserva el objeto identidad.

Esta información información satisface los siguientes axiomas de coherencia:

- Para cualesquiera objetos A, B, C de $\mathbf{V}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(F(A) \otimes' F(B)) \otimes' F(C) \arrow[r, "\Phi_{A,B} \otimes' F(C)"] \arrow[d, "\alpha'_{F(A),F(B),F(C)}"'] & F(A \otimes B) \otimes' F(C) \arrow[r, "\Phi_{A \otimes B, C}"] & F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[d, "F(\alpha_{A,B,C})"] \\
F(A) \otimes' (F(B) \otimes' F(C)) \arrow[r, "1_{F(A)} \otimes' \Phi_{B,C}"'] & F(A) \otimes' F(B \otimes C) \arrow[r, "\Phi_{A, B \otimes C}"'] & F(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd} \tag{B.6}$$

- Para cualquier objeto A en $\mathbf{V}$ los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
I' \otimes' F(A) \arrow[r, "\lambda'_{F(A)}"] \arrow[d, "\Psi \otimes 1_{F(A)}"'] & F(A) \\
F(I) \otimes' F(A) \arrow[r, "\Phi_{I,A}"'] & F(I \otimes A) \arrow[u, "F(\lambda_A)"']
\end{tikzcd} \tag{B.7}$$

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes' I' \arrow[r, "\rho'_{F(A)}"] \arrow[d, "1_{F(A)} \otimes' \Psi"'] & F(A) \\
F(A) \otimes' F(I) \arrow[r, "\Phi_{A,I}"'] & F(A \otimes I) \arrow[u, "F(\rho_A)"']
\end{tikzcd} \tag{B.8}$$

Un *funtor monoidal simétrico* de $(\mathbf{V}, \sigma)$ a $(\mathbf{V}', \sigma')$ es un funtor monoidal $(F, \phi, \psi) : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes' F(B) \arrow[r, "\sigma'_{F(A),F(B)}"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"] & F(B) \otimes' F(A) \arrow[d, "\phi_{B,A}"] \\
F(A \otimes B) \arrow[r, "F(\sigma_{A,B})"] & F(B \otimes A)
\end{tikzcd} \tag{B.9}$$

Un funtor monoidal (simétrico) es *fuerte* (resp. *estricto*) cuando sus morfismos de *estructura* ϕ, ψ son isomorfismos (resp. identidades).

B.3. Transformación Monoidal

Una *transformación natural monoidal* de un funtor monoidal (F, Φ, Ψ) a (F', Φ', Ψ') es una transformación natural de los funtores subyacentes $\alpha : F \to F'$ que hace conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes F(B) \arrow[r, "\alpha_A \otimes \alpha_B"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & F'(A) \otimes' F'(B) \arrow[d, "\phi' A,B"] \\
F(A \otimes B) \arrow[r, "\alpha_{A \otimes B}"] & F'(A \otimes B)
\end{tikzcd} \tag{B.10}$$

y

$$\begin{tikzcd}
I' \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi'"] & \\
F(I) \arrow[r, "\alpha_I"'] & F'(I)
\end{tikzcd} \tag{B.11}$$

Como ejemplos de los conceptos anteriores se tienen:

1. Cualquier categoría con *productos finitos* es monoidal simétrica con el *producto* como producto tensorial y el *objeto final* como objeto unidad. Tal categoría es llamada usualmente *categoría monoidal cartesiana.*

2. Sea $\mathbf{C}$ una categoría con productos fibrados, entonces para cualquier objeto $C \in \mathbf{C}$ la categoría rebanada $\mathbf{C}/C$ tiene productos dados por los productos fibrados de $\mathbf{C}$, por lo tanto es monoidal.

3. Dualmente cualquier categoría con *coproductos finitos* es monoidal con el *coproducto* como producto tensorial y el *objeto inicial* como objeto unidad.

4. Si R es un anillo conmutativo, entonces ${}_R\mathbf{Mod}$ es una categoría monoidal simétrica usando el *producto tensorial de módulos* $\otimes_R$.

5. Si R es un anillo conmutativo con uno, la categoría de R-álgebras denotada por ${}_R\mathbf{Alg}$ es monoidal simétrica con el *producto tensorial de álgebras* como el producto monoidal y R como objeto unidad.

6. La categoría de los *endofuntores* de una categoría $\mathbf{C}$ es monoidal estricta, con la *composición de funtores* como producto monoidal y el *funtor identidad* como objeto unidad.

7. Dada una categoría $\mathbf{C}$, la *categoría monoidal libre de* $\mathbf{C}$ denotada por $\Sigma(\mathbf{C})$ se construye como sigue:

   - Sus *objetos* son sucesiones finitas $A_1, A_2, ..., A_n$ de objetos de $\mathbf{C}$.
   - Existen *flechas* entre dos objetos $A_1, A_2, ..., A_m$, $B_1, B_2, ..., B_n$ si y sólo si $m = n$ y entonces las flechas son sucesiones finitas $f_1 : A_1 \to B_1$, $f_2 : A_2 \to B_2$, ..., $f_n : A_n \to B_n$ de flechas de $\mathbf{C}$.
   - El producto tensorial de dos objetos $A_1, A_2, ..., A_m$, $B_1, B_2, ..., B_n$ es la *concatenación* $A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_n$ de las sucesiones finitas y el producto tensorial de dos morfismo es la concatenación de las sucesiones finitas de morfismos correspondientes.

   Una categoría monoidal es *cerrada* si para todo objeto $V \in \mathbf{V}$ se tiene que el funtor $V \otimes \_ : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tiene un adjunto derecho $[V, \_] : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

B.4. La Categoría de Monoides en V

Sea $(\mathbf{V}, \otimes, I)$ una categoría monoidal, un *monoide en* $\mathbf{V}$ es una tercia (R, μ, η) donde M es un objeto de $\mathbf{V}$, $\mu : R \otimes R \to R$ y $\eta : I \to R$ son morfismos de la categoría (llamados el *producto* y la *unidad* del monoide). Estos morfismos satisfacen los *axiomas de asociatividad y unidad*, esto es, los siguientes diagramas conmutan

- *Asociatividad*:

$$\begin{tikzcd}
(R\otimes R)\otimes R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mu\otimes 1_R"'] & R\otimes(R\otimes R) \arrow[r, "1_R\otimes\mu"] & R\otimes R \arrow[d, "\mu"] \\
R\otimes R \arrow[rr, "\mu"] & & R
\end{tikzcd} \tag{B.12}$$

  donde α es el morfismo de estructura asociativa de la categoría monoidal. Adémas los siguientes diagramas conmutan

- *Identidades*:

$$\begin{tikzcd}
I\otimes R \arrow[r, "\eta\otimes 1_R"] \arrow[dr, "\lambda"'] & R\otimes R \arrow[d, "\mu"] & R\otimes I \arrow[l, "1_R\otimes\eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\
& R &
\end{tikzcd} \tag{B.13}$$

  donde λ y ρ son los morfismos de estructura identidad de la categoría monoidal.

Un monoide (R,μ,η) en una categoría monoidal simétrica $(\mathbf{V},\otimes,I,\sigma)$ es *conmutativo* si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
R\otimes R \arrow[r, "\sigma_{R,R}", "\cong"'] \arrow[dr, "\mu"'] & R\otimes R \arrow[d, "\mu"] \\
& R
\end{tikzcd} \tag{B.14}$$

Dados dos monoides $(R,\mu,\eta),(R',\mu',\eta')$ en una categoría monoidal $\mathbf{V}$, un morfismo $f: R\to R'$ en $\mathbf{V}$ es un *morfismo de monoides* si los siguientes diagramas conmutan

- *Multiplicación*:

$$\begin{tikzcd}
R\otimes R \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu"'] & R'\otimes R' \arrow[d, "\mu'"] \\
R \arrow[r, "f"'] & R'
\end{tikzcd} \tag{B.15}$$

- *Identidad*:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] & R \arrow[d, "f"] \\ & R' \end{tikzcd} \tag{B.16}$$

Los monoides y sus morfismos en una categoría monoidal **V** forman una categoría denotada por $Mon(\mathbf{V})$ llamada la *categoría de monoides de la categoría monoidal* **V**. Si **V** es simétrica, $Comm(\mathbf{V})$ es la subcategoría plena de $Mon(\mathbf{V})$ de monoides conmutativos.

Como ejemplos de los conceptos anteriores se tienen:

1. Un monoide en **Ab** es un anillo.
2. Un monoide en $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ es una R-álgebra.
3. Un monoide en **Top** (con el producto cartesiano como producto tensorial) es un monoide topológico.
4. Si **C** es una categoría, entonces un objeto monoide en la categoría de endofuntores es una *mónada en* **C**.

Sean $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ un funtor monoidal y (R, μ, η) un monoide en **V**, entonces F induce una estructura de monoide en $F(R)$ de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} F(R) \otimes F(R) \arrow[r, "\cong", "\phi_{R,R}"'] \arrow[rr, bend left, "\mu'"] & F(R \otimes R) \arrow[r, "F(\mu)"] & F(R) \end{tikzcd} \tag{B.17}$$

$$\begin{tikzcd} I' \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "\eta'"'] & F(I) \arrow[r, "F(\eta)"] & F(R) \end{tikzcd}$$

por lo que los funtores monoidales preservan monoides y dado un morfismo de monoides el morfismo $F(f)$ se encuentra en $Mon(\mathbf{V}')$. Esto es debido a que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(R) \otimes F(R) \arrow[r, "\phi_{R,R}"] \arrow[d, "F(f)\otimes F(f)"'] & F(R \otimes R) \arrow[r, "F(\mu)"] \arrow[d, "F(f\otimes f)"] & F(R) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(R') \otimes F(R') \arrow[r, "\phi_{R',R'}"] & F(R' \otimes R') \arrow[r, "F(\mu')"] & F(R') \end{tikzcd} \tag{B.18}$$

donde el cuadro interior izquierdo de (B.18) conmuta por que ϕ es natural y el derecho por que f es un morfismo de monoides. Con lo que se obtiene un funtor

$$Mon(F) : Mon(\mathbf{V}) \to Mon(\mathbf{V}')$$

Análogamente, los funtores monoidales simétricos preservan los monoides conmutativos. Si F es un funtor de este tipo, entonces $Comm(F)$ denota la restricción de $Mon(F)$ a $Comm(\mathbf{V})$.

B.5. La categoría de R módulos (derechos) sobre un monoide en $\mathbf{V}$

Sea R un monoide en $\mathbf{V}$, un R-módulo derecho es un par (M, κ) donde M es un objeto en $\mathbf{V}$ y $\kappa : M \otimes R \to M$ es un morfismo en $\mathbf{V}$ que hace a los siguientes diagramas conmutar

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes R) \otimes R \arrow[r, "\cong", "\alpha_{M,R,R}"'] \arrow[d, "\kappa\otimes 1_R"'] & M \otimes (R \otimes R) \arrow[r, "1_M\otimes\mu"] & M \otimes R \arrow[d, "\kappa"] \\
M \otimes R \arrow[rr, "\kappa"'] & & M
\end{tikzcd} \tag{B.19}$$

y

$$\begin{tikzcd}
M \otimes I \arrow[r, "1_M\otimes\eta"] \arrow[dr, "\rho_m"'] & M \otimes R \arrow[d, "\kappa"] \\
& M
\end{tikzcd} \tag{B.20}$$

Un *morfismo de R-módulos derechos* es un morfismo $f : M \to M'$ en $\mathbf{V}$ que conmuta con las acciones de M y M' respectivamente, esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \otimes R \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "f\otimes 1_R"'] & M \arrow[d, "f"] \\
M' \otimes R \arrow[r, "\kappa'"'] & M
\end{tikzcd} \tag{B.21}$$

Los R-módulos y sus morfismos forman una categoría denota por $\mathbf{Mod_R}$. Se pueden definir de forma análoga los *R-módulos izquierdos*.

B.6. La categoría de (R, S) bimódulos

Sea R y S un par de monoides en $\mathbf{V}$, un (R, S)-bimódulo es una tercia (M, κ, σ) donde (M, κ) es un R-módulo izquierdo y (M, σ) es un S-módulo derecho, ambos relacionados por el siguiente axioma

$$\begin{array}{ccc} R \otimes M \otimes S & \xrightarrow{\kappa \otimes 1_S} & M \otimes S \\ {\scriptstyle 1_R \otimes \sigma} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \sigma} \\ R \otimes S & \xrightarrow[\kappa]{} & M \end{array} \tag{B.22}$$

Un *morfismo de bimódulos* es un morfismo $f : M \to M'$ en $\mathbf{V}$ que es morfismo de R-módulos izquierdo y S-módulos derechos. Los bimódulos y sus morfismos forman la categoría de (R, S)-bimódulos denotada por ${}_R\mathbf{Mod}_S$.

Bibliografía

[AHS09] J. Adámek, H. Herrlich, and G.E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*. Dover books on mathematics. Dover Publications, Incorporated, 2009.

[Ati94] M.F. Atiyah. *K-Theory*. Advanced book classic series. Westview Press, 1994.

[Bae04] J. Baez. Some Definitions Everyone Should Know, 2004. Disponible en http://math.ucr.edu/home/baez/qg-fall2004/.

[Bae10] J. Baez. *Towards Higher Categories*. Springer New York, 2010.

[Bor94a] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra: Volume 1, Basic Category Theory*. A Handbook of Categorical Algebra. Cambridge University Press, 1994.

[Bor94b] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra: Volume 2, Categories and Structures*. A Handbook of Categorical Algebra. Cambridge University Press, 1994.

[Bor94c] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra: Volume 3, Sheaf Theory*. A Handbook of Categorical Algebra. Cambridge University Press, 1994.

[Bé67] J. Bénabou. Introduction to bicategories, part i, 1967.

[Fan05] B. Fantechi. *Fundamental Algebraic Geometry: Grothendieck's FGA Explained*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2005.

[Gro61] A. Grothendieck. *Revetements Etales et Groupe Fondamental*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1961.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[Hat09] A. Hatcher. Vector Bundles and K-Theory, 2009. Libro en progreso, disponible en http://www.math.cornell.edu/ hatcher/.

[Her03] C. Hermida. Descent on 2-fibrations and 2-regular 2-categories, 2003.

[JA11] B. Bhatt M.Behrens N. Chitrik F. Chiu B. Conrad M. Deland entre otros J. Alper, D. Arinkin. Algebraic stacks, 2011. Libro de código abierto, disponible en http://stacks.math.columbia.edu/ La versión utilizada en esta tesis es d901d9a compilada el 17 de Octubre de 2011.

[Joh02] P.T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium.* Oxford Logic Guides. Oxford University Press on Demand, 2002.

[Kel82] G.M. Kelly. *Basic Concepts of Enriched Category Theory.* London Mathematical Society lecture note series, 64. Cambridge University Press, 1982.

[Lan02] S. Lang. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002.

[Lei98] T. Leinster. Basic Bicategories. *ArXiv Mathematics e-prints*, October 1998.

[LM92] S.M. Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Mathematical Sciences Research Institute Publications. Springer-Verlag, 1992.

[Mal95] G. Maltsiniotis. Traces dans les catégories monoïdales, dualité et catégories monoïdales fibrées. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques.*, pages 195–288, 1995.

[Mes12] B. Mesablishvili. Descent in monoidal categories. *Theory and Applications of Categories*, 27(10):210–221, 2012.

[Mic10] N. Michel. *Categorical Foundations for K-Theory.* PhD thesis, Ecole Polytechnique Féderale de Lausanne, 2010. Disponible en http://library.epfl.ch/en/theses/?nr=4861.

[ML98] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer Verlag, 1998.

[Rot09] J.J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Springer eBook collection. Springer Science+Business Media, LLC, 2009.

[Shu08] M. Shulman. Framed bicategories and monoidal fibrations. *Theory and Applications of Categories*, 2008. Disponible en http://arxiv.org/pdf/0706.1286v2.pdf.

[Str80] R. Street. Fibrations in bicategories. *Cahiers de Topologie et Géometrie Différentielle Catégoriques*, 1980.

[Vak13] Ravi Vakil. Math 216: Foundations of algebraic geometry, 2013. Disponible en http://math.stanford.edu/ vakil/216blog/.

[Val03] B. Vallete. *Dualité de Koszul des PROPS*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, 2003.

[VO95] J. Van Oosten. *Basic Category Theory*. BRICS lecture series. Computer Science Department, 1995.

[Wei99] Charles A. Weibel. The development of algebraic k-theory before 1980, 1999.

[Zaw09] M. Zawadowski. Lax monoidal fibrations, 2009. Disponible en http://www.mimuw.edu.pl/ zawado/Papers/.