



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**“Transiciones de fase en modelos cosmológicos”**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICA**

**P R E S E N T A:**

**Israel Ríos Mora**



**DIRECTOR DE TESIS:**

**Roberto Allan Sussman Livovski**

**2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

# Transiciones de fase en modelos cosmologicos

## Israel Rios Mora

---

### Índice

<b>Dedico ésta tesis</b>	<b>3</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>4</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>Capítulo 1: Cinemática y dinámica de modelos cosmológicos</b>	<b>7</b>
1.1 Observadores fundamentales y la 4-velocidad. . . . .	7
1.2 Parámetros cinemáticos. . . . .	8
1.3 Relación entre parámetros cinemáticos y curvatura. . . . .	10
1.4 Parámetros observacionales entre los Observadores Fundamentales. . . . .	11
<b>Capítulo 2: Clases especiales de Observadores Fundamentales</b>	<b>14</b>
2.1 Líneas de Universo de los Observadores Fundamentales libres de vorticidad. . . . .	14
2.2 Observadores Fundamentales geodésicos. . . . .	15
2.3 Líneas de Universo de Observadores Fundamentales que preservan el volumen. . . . .	15
2.4 Líneas de Universo de Observadores Fundamentales libres de deformación. . . . .	15
<b>Capítulo 3: Homogeneidad como isotropía local</b>	<b>17</b>
3.1 Observador isotrópico: Simetría esférica. . . . .	17
3.2 Modelos FLRW: Todos los Observadores Fundamentales son Isotrópicos. . . . .	18
<b>Capítulo 4: Dinámica de los modelos FLRW</b>	<b>21</b>
4.1 La métrica Robertson-Walker. . . . .	21
4.2 Ecuaciones de campo. . . . .	21
4.3 El fluido termodinámico. . . . .	22
4.4 Gas ideal relativista. . . . .	23
4.5 Polvo. . . . .	24
4.6 Radiación. . . . .	24
4.7 Mezcla de radiación y materia no relativista. . . . .	25
4.8 Campos escalares. . . . .	27
<b>Capítulo 5: Universos de Stephani</b>	<b>28</b>
5.1 Simetría esférica con cero deformación. . . . .	28
5.2 Desarrollo de las soluciones de las ecuaciones de campo no estáticas con cero deformación. . . . .	29
5.3 Métrica de los Universos de Stephani. . . . .	30

---

<b>Capítulo 6: Condiciones de embone de los Universos de Stephani con los Universos FLRW</b>	<b>33</b>
6.1 Condiciones de continuidad de las métricas de Stephani y FLRW. . . . .	33
<b>Capítulo 7: Continuidad de las métricas entre los Universos FLRW y de Stephani</b>	<b>41</b>
7.1 Comportamiento de las funciones $k(t)$ , $R(t)$ , $\rho(t)$ y $p(t, r)$ en la continuidad de las métricas entre los Universos FLRW y los Universos de Stephani. . . . .	41
7.2 Conclusiones. . . . .	52
<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>53</b>
Apéndice A: Descomposición general de tensores. . . . .	54
Apéndice B: Operadores diferenciales. . . . .	56

---

## **Dedico ésta tesis**

*A mis padres:*

María Graciela Mora Sánchez  
Feliciano Ríos Tapia

Por haberme dado el ser y los principios que me rigen, los cuales me han dado la determinación y fuerza para alcanzar una meta más en la vida.

Por el apoyo, paciencia y confianza en mi depositadas, MUCHAS GRACIAS.

*A mi familia:*

Que tiene un significado muy especial para mi siendo un orgullo y mi motivación a seguir adelante y que me han enseñado a que no hay que claudicar pese a momentos difíciles.

*A mi novia:*

Graciela Andrade Moreno

Por ser mi inspiración, mi motivación, por estar a mi lado y apoyarme en todo momento.

*A mi primo:*

Marco Antonio Ortiz Mora

Por haberme asistido en detalles de tipo técnico implicados en éste trabajo de tesis, MUCHAS GRACIAS.

---

## Agradecimientos

Mi más grande agradecimiento al Dr. Roberto Allan Sussman Livovsky, por su interés, su apoyo y su motivación para realizar éste trabajo. Gracias, ya que usted ha cambiado para bien mi vida personal y profesional. Gracias por siempre.

Así como también a los miembros del jurado Dr. Marcelo Salgado Rodríguez, Dr. Darío Núñez Zúñiga investigadores del Instituto de Ciencias Nucleares, Dr. Xavier Hernández Doring investigador del Instituto de Astronomía y al M. en C. Augusto Cabrera Manuel investigador y profesor de la Facultad de Ciencias por los comentarios, observaciones y sugerencias que me hicieron para mejorar el presente trabajo.

A mis amigos y compañeros que contribuyeron con su apoyo y amistad para mi llegada a buen término en éstos estudios.

---

## Introducción

La gravitación es la interacción dominante en toda escala macroscópica. Por lo tanto, para poder entender la dinámica del Universo a grandes escalas (de al menos 100 mega-parsecs), necesitamos utilizar la mejor teoría de gravitación existente hasta el día de hoy: la Teoría General de la Relatividad de Einstein, cuyas ecuaciones de campo relacionan la curvatura del espacio-tiempo con la materia-energía de diversos tipos de fuentes. Definimos como un “modelo cosmológico” a todo espacio-tiempo que surge como solución de las ecuaciones de campo de Einstein que sea aplicable para describir la evolución del Universo a éstas escalas. Existe una diversidad de modelos cosmológicos dependiendo de diversas suposiciones físicas y geométricas adecuadas a diferentes escalas, etapas y contextos de la evolución cósmica. Sin embargo, todo modelo debe mostrar una mínima consistencia y ajuste con las observaciones astronómicas y cosmológicas.

La cosmología llamada “estándar” utiliza el llamado *Principio de Copérnico* ó *Principio Cosmológico*, el cual supone que a escalas cosmológicas el Universo se observa como una distribución estadísticamente homogénea. Como una consecuencia de éste principio, otros observadores a esas distancias cosmológicas de nosotros observarían aproximadamente las mismas condiciones físicas, entonces, podemos decir que el modelo de Universo “isotrópico” es correcto a éstas escalas.

Debido a las enormes distancias cósmicas y la imposibilidad de viajar durante largo tiempo no es posible verificar el *Principio de Copérnico*. Es relevante decir que dicho principio es solamente aplicable a grandes escalas, aproximadamente a partir desde los 100 megaparsecs. Sin embargo, podemos averiguar a que escala el Universo es aproximadamente homogéneo e isotrópico en forma estadística, mediante el estudio de observaciones de catálogos de galaxias y por medio de la argumentación teórica.

Los modelos cosmológicos que cumplen en forma estricta y exacta el *Principio de Copérnico* son llamados modelos modelos Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), los cuales son matemáticamente homogéneos e isotrópicos. Podemos decir entonces que los modelos FLRW describen de forma aproximada nuestro Universo bajo la suposición de dicho principio y bajo diferentes formas de materia-energía (ecuaciones de estado) que describen diversas eras cósmicas.

Los modelos FLRW predicen un Universo en expansión en el cual la materia-energía se enfría y diluye a medida que el Universo evoluciona, teniendo como origen al llamado “big bang”, que es una singularidad de curvatura del espacio-tiempo en la que energías y temperaturas tienden a infinito. Suponiendo que la materia-energía cósmica está compuesta por la materia “visible”, “oscura” y “radiación” (gas de fotones), se puede mostrar que en etapas tempranas la radiación dominaba la dinámica cósmica, mientras que en etapas más tardías (y a medida que el Universo se enfriaba) la materia visible y oscura se tornaron dominantes. La era temprana se puede describir mediante modelos FLRW cuya fuente es materia oscura fría y una mezcla de materia visible y oscura y radiación acoplados en equilibrio térmico. Al desacoplarse ésta última los componentes evolucionan por separado, por lo cual los fotones se enfrían formando el fondo de radiación cósmica que se comporta casi como un cuerpo negro a 3 grados Kelvin.

En la presente tesis estudiaremos la evolución cósmica a través de la transición de un Universo FLRW inicialmente dominado por la radiación (fluido perfecto cuya ecuación de estado es  $p = \rho/3$ ) a uno dominado por la materia (tanto oscura como visible), la cual supondremos que se comporta como un gas ideal a baja temperatura que puede ser aproximado por la ecuación de estado del polvo, es decir, un fluido perfecto con presión nula  $p = 0$ . Esta transición de la radiación al polvo se dará a través de una zona intermedia entre los modelos FLRW, la cual será descrita por otro modelo cosmológico. Esta zona deberá embonar de forma “suave” (continua y diferenciable hasta segundas derivadas) con ambos modelos FLRW (polvo y radiación) en superficies de tiempo constante ortogonales a la 4-velocidad. La zona intermedia es una sección de un modelo cosmológico llamado “Universo de Stephani”, el cual satisface las condiciones del embone suave con

---

los modelos FLRW pese a ser un espacio-tiempo inhomogéneo y anisotrópico.

El Universo de Stephani surge como una solución exacta de las ecuaciones de Einstein obtenidas bajo las siguientes suposiciones: (i) simetría esférica, (ii) fuente dada por un fluido perfecto cuya deformación (shear) es nula y (iii) el tensor conforme de Weyl es idénticamente cero, lo cual se denota como soluciones conformalmente planas.

Describimos entonces al Universo para tiempos cósmicos  $t < t_{b1}$  como un modelo FLRW en el cual domina la radiación, el cual embona suavemente con el Universo de Stephani en el tiempo cósmico  $t = t_{b1}$ . En el lapso temporal  $t_{b1} < t < t_{b2}$  corresponde a la zona intermedia de transición dada por el Universo de Stephani, la cual embona en  $t = t_{b2} > t_{b1}$  de modo suave con el Universo FLRW dominado por materia (polvo), el cual se extiende para tiempos cósmicos  $t > t_{b2}$ .

En el presente trabajo estudiamos las condiciones a la frontera que nos garantizan un embone suave entre los Universos FLRW (radiación y polvo) y el Universo de Stephani en tiempos arbitrarios  $t = t_{b1}$  y  $t = t_{b2}$  en el orden mencionado anteriormente. Utilizaremos modelos FLRW y Stephani con curvatura espacial positiva, de modo que se evita la singularidad de curvatura afísica que emerge en los modelos Stephani con curvatura espacial cero o negativa, en la cual la presión diverge ( $p \rightarrow \pm\infty$ ) a densidad finita. Si la curvatura espacial es positiva todas las variables de estado de la zona de transición dada por el Universo de Stephani se mantienen finitas. No está por demás mencionar que el embone de un Universo de Stephani, como una zona de transición entre dos Universos FLRW es suave para cualquier ecuación de estado de éstos últimos, sin embargo, solo consideramos en el presente trabajo el caso de radiación y polvo por su relevancia en la evolución cósmica.

A continuación ofrecemos una descripción de la tesis por capítulos. Los capítulos 1, 2, 3 y 4 están basados en el artículo " *Theoretical aspects in the study of inhomogeneous cosmological models* " del Dr. Roberto A. Sussman, en el cual se estudia la cinemática y la dinámica de modelos cosmológicos generales, se introduce el concepto de *Observador Fundamental*, así como también los llamados parámetros cinemáticos. En el capítulo 2 se estudia un modelo cosmológico haciendo la similitud de los *observadores fundamentales* a un fluido que evoluciona en el espacio-tiempo bajo el análisis de los parámetros cinemáticos. El capítulo 3 proporciona una descripción del modelo FLRW bajo las condiciones de homogeneidad e isotropía local, se introduce el concepto de *Observador Isotrópico*. En el capítulo 4 se examina la métrica Robertson-Walker (RW) y su relación geométrica con todos los posibles modelos FLRW de Universos compatibles con el principio cosmológico y la dinámica evolutiva de todos éstos espacio-tiempos que requieren condiciones específicas basadas en la naturaleza física de las fuentes de materia-energía. El capítulo 5 está basado en el libro " *Inhomogeneous cosmological models* " de A. Krasinski, y trata sobre los Universos de Stephani, los cuales, como se mencionó anteriormente, son soluciones conformalmente planas de las ecuaciones de Einstein. En el capítulo 6 se examinan las condiciones de embone entre las métricas FLRW y de Stephani. En el capítulo 7 se examina el comportamiento de los parámetros  $k(t)$ ,  $R(t)$ ,  $\rho(t)$  y  $p(t, r)$  bajo las condiciones de embone entre las métricas FLRW y de Stephani, y en éste mismo capítulo se dan finalmente las conclusiones. Todos los cálculos y las gráficas que aparecen en los capítulos 9 y 10 fueron hechas con la ayuda del programa computacional " Maple 13 " bajo la supervisión del Dr. Roberto A. Sussman del Instituto de Ciencias Nucleares (ICN) UNAM.

---

# Capítulo 1: Cinemática y dinámica de modelos cosmológicos

## 1.1 Observadores fundamentales y la 4-velocidad.

Sea  $(\mathbb{N}, g)$  una variedad pseudo-riemanniana asociada con un tensor métrico, la cual satisface las ecuaciones de Einstein (consideremos  $c = 1$ )

$$G^{ab} = 8\pi T^{ab}, \quad (1,1)$$

donde  $G^{ab}$  es el tensor de Einstein y  $T^{ab}$  es el tensor de momento-energía que caracteriza una fuente de materia-energía. Esta variedad puede ser considerada como un *modelo cosmológico* si admite en cada punto a una congruencia de curvas temporaloides  $C^a = x^a(\tau)$  con  $a = 0, 1, 2, 3$  con  $\tau$  siendo el tiempo propio, las cuales determinan las *Líneas de Universo de Observadores Fundamentales*, de modo que cada punto  $\wp \in \mathbb{N}$  pertenece a una y solamente a una de estas Líneas de Universo.

La variedad  $\mathbb{N}$  admite un campo vectorial unitario temporaloide que es tangente a cada uno de los Observadores Fundamentales. Este campo vectorial es la 4-velocidad que está expresada como

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau}, \quad (1,2)$$

con las siguientes condiciones

$$g_{ab}u^a u^b = u_a u^a = -1,$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio respecto a los *Observadores Fundamentales* y  $x^a$  son las coordenadas comóviles con  $a = 0, 1, 2, 3$  y las Líneas de Universo de Observadores Fundamentales, están parametrizadas como

$$x^0 = x^0(\tau), \quad x^i = \text{constante}. \quad (1,3)$$

La 4-velocidad se expresa entonces de la forma

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \sqrt{-g^{00}}, \quad u^i = 0. \quad (1,4)$$

Las *Hipersuperficies de Simultaneidad* de  $u^a$ , tienen una métrica inducida expresada como

$$h^{ab} = g^{ab} + u^a u^b. \quad (1,5)$$

Los vectores y tensores paralelos a  $u^a$ , se pueden expresar como

$$\begin{aligned} V^a = \lambda u^a &\implies h_b^a V^b = 0, \\ Z^{ab} = \lambda u^a u^b &\implies h_{ab} Z^{ab} = h_a^c h_b^d Z_{cd} = 0, \end{aligned}$$

donde  $\lambda(x^a)$  es un escalar. Los vectores ó tensores ortogonales a  $u^a$ , pueden ser expresados como

$$\begin{aligned} q_a u^a = 0 &\implies q_a = h_b^a q_b, \\ \Pi_{ab} u^b = 0 &\implies \Pi_{ab} = h_a^c h_b^d \Pi_{cd}, \end{aligned}$$

donde  $h^{ab}$  y  $h_{ab}$  son tensores duales y  $h_a^a$  actúa como operador tensorial proyectando tensores arbitrarios sobre las Hipersuperficies de Simultaneidad de  $u^a$ .

---

## 1.2 Parámetros cinemáticos.

Sea  $D_{ab}$  un tensor arbitrario de orden  $2 \times 2$ . Igualando  $D_{ab}$  con  $\nabla_a u_b$  y utilizando las expresiones (A,3a) y (A,5) del apéndice A, obtenemos la ecuación

$$\nabla_a u_b = -\dot{u}_a u_b + \frac{\Theta}{3} h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \quad (1,6)$$

donde

$$\dot{u}_a = u^b \nabla_b u^a,$$

es la 4-aceleración, mientras que los parámetros cinemáticos  $\Theta$ ,  $\sigma_{ab}$  y  $\omega_{ab}$  están dados por las siguientes expresiones

$$\Theta \equiv \nabla_a u^a, \quad (1,7)$$

que es la expansión escalar,

$$\sigma_{ab} \equiv \tilde{\nabla}_{\langle a} u_{b \rangle}, \quad (1,8)$$

que es el tensor de deformación y

$$\omega_{ab} \equiv \tilde{\nabla}_{[a} u_{b]}, \quad (1,9)$$

que es el tensor de vorticidad, donde los paréntesis  $_{[ab]}$  y  $_{\langle ab \rangle}$  denotan respectivamente antisimetrización y simetrización menos la traza en los índices  $a, b$  (véase apéndice B).

La utilidad de éstos parámetros cinemáticos pueden ser ilustrada en términos del cambio de las distancias locales sobre los Observadores Fundamentales, para ésto, se considera al vector  $y^a = (y^0, y^i)$ , éste vector conecta puntos de un marco de referencia de un Observador Fundamental con puntos del mismo tiempo propio  $\tau$  de otro Observador Fundamental, aunque en general  $y^a \neq (0, y^i)$ . La cantidad que puede considerarse como "vector de posición" entre los Observadores Fundamentales y se expresa como

$$y_{\perp}^a = h_b^a y^b, \quad (1,10)$$

donde la razón de cambio respecto al tiempo propio es proyectada sobre las Hipersuperficies de Simultaneidad, generando la velocidad relativa expresada como

$$v^a = h_b^a \dot{y}_{\perp}^b = h_b^a u^c \nabla_c y_{\perp}^a = y_{\perp}^b \nabla_b u^a, \quad (1,11)$$

utilizando  $u^a = dx^a/d\tau$  y el hecho de que  $\tau$  es constante sobre las curvas integrales de  $y^a$ . La ecuación (1,11) permite reescribir (1,6) como una transformación infinitesimal aplicada a  $y_{\perp}^a$ , obteniendo así la siguiente expresión

$$v^a = V_b^a(y_{\perp}^b) = h_b^a \dot{y}_{\perp}^b = \left[ \frac{\Theta}{3} h_b^a + \sigma_b^a - \omega_b^a \right] y_{\perp}^b, \quad (1,12)$$

donde

$$V_b^a \equiv \nabla_b u^a, \quad (1,13)$$

de modo que el efecto de la evolución de la posición relativa del vector de  $\tau$  a  $\tau + d\tau$  a lo largo de las trayectorias de los Observadores Fundamentales es una combinación infinitesimal de transformaciones con éstos parámetros de expansión ó dilatación ( $\Theta$ ), una deformación ( $\sigma_b^a$ ) y una rotación ( $\omega_b^a$ ).

Sabiendo que  $\Theta \equiv \nabla_a u^a$  y teniendo en cuenta que

$$\nabla_a u^a = u^a \nabla_a (\ln \sqrt{-g}) + u^a_{,a}, \quad (1,14)$$

donde

$$g = \det(g_{ab})$$

y  $u^a$  está dado por (1,2), entonces obtenemos de manera general la siguiente expresión

$$\Theta = u^a \nabla_a (\ln \mathcal{V}) = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{\mathcal{V}}, \quad (1,15a)$$

donde  $\mathcal{V}$  es el 3-volumen local dado por

$$\mathcal{V} = \det(h_{ab}), \quad (1,15b)$$

se observa que  $\Theta$  es la razón de cambio de los volúmenes locales  $\mathcal{V}$  de las Hipersuperficies de Simultaneidad respecto al tiempo propio a lo largo de las trayectorias de los Observadores Fundamentales. Si las trazas de la deformación  $\sigma_b^a$  y de la rotación  $\omega_b^a$  se hacen cero, entonces

$$\text{tr}(V_b^a) = V_a^a = \Theta,$$

preservandose así el volumen sobre (1,13).

Como consecuencia de (1,15a) y (1,15b), se puede definir un *factor de escala* ó "promedio" de las longitudes de escala determinado por la expresión

$$L^3 = \mathcal{V} \implies \frac{\Theta}{3} = \frac{\dot{L}}{L}, \quad (1,16)$$

sin embargo, con respecto a la posición relativa del vector  $y_{\perp}^a$ , se puede definir de manera diferente una longitud de escala, es decir, la dirección depende de las *distancias locales relativas* entre los Observadores Fundamentales obteniendose la siguiente expresión

$$\ell \equiv \sqrt{h_{ab} y_{\perp}^a y_{\perp}^b}, \quad (1,17)$$

en general se tiene que  $\ell \neq L$ .

Si se define el *escalar de Hubble* como  $H = \dot{\ell}/\ell$  y utilizando (1,6) y (1,11), se puede expresar un nuevo parámetro en términos de otros parámetros cinemáticos, así obtenemos la expresión

$$H \equiv \frac{\dot{\ell}}{\ell} = \frac{\Theta}{3} + \sigma_{ab} e^a e^b, \quad (1,18)$$

donde  $e^a = y_{\perp}^a/\ell$  es un vector unitario que satisface las condiciones  $e_a e^a = 1$  y  $e_a u^a = 0$ . Las ecuaciones (1,16) y (1,18), pueden ser generalizadas a todo modelo cosmológico.

Es importante remarcar que  $H$  es dependiente de la dirección, es decir, es anisotrópico y se puede expresar en términos del tensor de deformación, es decir, que (1,18) puede ser reescrita como

$$\sigma_{ab} e^a e^b = \frac{\dot{\ell}}{\ell} - \frac{\dot{L}}{L}. \quad (1,19)$$

Respecto a la ecuación anterior, se observa la deformación a lo largo de las Líneas de Universo de los Observadores Fundamentales a consecuencia de la diferencia de las velocidades locales relativas sobre el promedio

de la velocidad relativa  $\dot{L}/L$ , es decir, que la deformación tiene dependencia direccional aunque el volumen se preserva.

Otra ecuación análoga a (1,13), y tomando la razón de cambio con respecto al tiempo propio de la dirección de los Observadores Fundamentales,  $\dot{e}^a$ , tenemos que  $e^a = y_{\perp}^a/\ell$  y utilizando (1,6) y (1,18) obtenemos

$$h_b^a \dot{e}^b = [\omega_b^a - \sigma_b^a - \sigma_{cd} e^c e^d \delta_b^a] e^b, \quad (1,20)$$

entonces, se observa que como la deformación y la vorticidad son diferentes de cero se producen cambios en las velocidades relativas.

La interpretación de  $\omega_b^a$  como una rotación se sigue del hecho de que como un tensor antisimétrico a  $u^a$  puede ser expresado en términos de un vector dual de vorticidad  $\omega_a$ , es decir,

$$\omega_a = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} \omega_{bc} u_d = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} u_{b,c} u_d, \quad (1,21a)$$

de modo que

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} \omega^c u^d, \quad (1,21b)$$

donde  $\epsilon^{abcd}$  es el tensor de Levi-Civita,  $u_a \omega^a = 0$  y  $\omega_{ab} \omega^b = 0$ . De las ecuaciones (1,21) tenemos una estructura de rotación local de las Hipersuperficies de Simultaneidad, donde  $\omega^a$  define la dirección del eje de rotación que es ortogonal al plano de las Hipersuperficies de Simultaneidad definido por  $\omega_{ab}$ . Tomando en cuenta a (1,4), se puede hacer una transformación de coordenadas sobre las Hipersuperficies de Simultaneidad, de modo que  $u^a$  tiene dos componentes diferentes de cero,  $u_0$  y  $u_3$ , entonces, obtenemos la siguiente ecuación

$$\omega^a = \frac{1}{2} \omega^{0ad3} (u_0 u_{3,d} - u_3 u_{0,3}), \quad (1,22)$$

de modo que las componentes diferentes de cero de  $\omega^a$  son  $\omega^1$  y  $\omega^2$  y las componentes diferentes de cero de  $\omega_{ab}$  son,  $\omega_{13} = \omega^2 u^0/2$  y  $\omega_{23} = -\omega^1/2$ . Entonces a  $\omega^a$  se le puede tomar como un "vector axial", ésto corresponde a una rotación en el plano  $(x^1, x^2)$  con el eje de rotación en la dirección  $\partial/\partial x^3$ .

### 1.3 Relación entre parámetros cinemáticos y curvatura.

Las interacciones gravitacionales entre éstos observadores están relacionados con los tensores de curvatura. Ésta curvatura es "sentida" por los observadores en todas partes y se expresa como

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) u^c = 2[\nabla_a \nabla_b] u^c = R_{ab}{}^c{}_d u^d, \quad (1,23)$$

donde  $R_{ab}{}^c{}_d$  es el tensor de Riemann. Ésta expresión puede ser combinada con (1,6), así obtenemos la ecuación de Raychaudhuri

$$\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} = -R_{ab} u^a u^b + \tilde{\nabla}_a \dot{u}^a + 2(\omega^2 - \sigma^2), \quad (1,24)$$

donde  $R_{ab} = R_{cab}^c$  es el tensor de Ricci y los escalares  $\omega^2$  y  $\sigma^2$  están dados por

$$\omega^2 \equiv \frac{1}{2} \omega_{ab} \omega^{ab}, \quad \sigma \equiv \frac{1}{2} \sigma_{ab} \sigma^{ab}. \quad (1,25)$$

Si se considera el tensor generalizado de momento-energía  $T_{ab} + \Lambda g_{ab}$ , donde  $T_{ab}$  está determinado por (A,6a) y (A,6b) dadas en el apéndice A y  $\Lambda$  es la constante cosmológica; entonces las ecuaciones de Einstein pueden ser expresadas en términos de  $R_{ab}$ , es decir,

$$R_{ab} u^a u^b + \frac{1}{2} R_a^a = 8\pi T_{ab} u^a u^b = 8\pi \rho - \Lambda. \quad (1,26)$$

Utilizando (1,16) y la relación

$$-R_{ab} = -T_a^a = \rho + 3p \quad \text{con} \quad \Lambda = 0,$$

podemos expresar la ecuación de Raychaudhuri como

$$\frac{3\ddot{L}}{L} = -4\pi(\rho + 3p) + \Lambda + 2(\omega^2 - \sigma^2) + \tilde{\nabla}_a \dot{u}^a + \dot{u}_a \dot{u}^a. \quad (1,27)$$

La ecuación anterior es una ecuación dinámica que relaciona la aceleración promedio  $\ddot{L}/L$  con las fuentes gravitacionales (densidad de materia-energía  $\rho$  y presión  $p$ ) y los escalares formados con los parámetros cinemáticos  $\sigma_{ab}$ ,  $\omega_{ab}$  y  $\dot{u}_a$ . Si  $\ddot{L} < 0$ , corresponde a una expansión desacelerada, si  $\ddot{L} > 0$ , corresponde a una expansión acelerada. El signo de  $\ddot{L}$  depende de la comparación de los escalares que aparecen en (1,27).

Si  $\Lambda = 0$  y los escalares mencionados anteriormente son despreciables comparados con el término  $\rho + 3p$ , entonces para  $\rho + 3p > 0$  y  $R_{ab}u^a u^b > 0$ , la expansión desacelera. Si  $\Lambda$  es grande y  $\rho + 3p < 0$ , se tiene una expansión acelerada. Estos efectos en la expansión, son de importancia en las interpretaciones de las observaciones de los modelos cosmológicos.

La ecuación de Raychaudhuri describe la aceleración promedio relativa relacionada con  $L$ , sin embargo, se puede obtener una aceleración relativa entre los Observadores Fundamentales en términos de las velocidades relativas  $v^a$  definidas en (1,11).

Utilizando (1,6) y (1,23) obtenemos la siguiente ecuación

$$h_b^a \dot{v}^b = [R_{bcd}^a u^b u^d + h_b^a \nabla_c \dot{u}^b + \dot{u}^a \dot{u}_c] y_{\perp}^c, \quad (1,28)$$

la cual ilustra el hecho de que la curvatura es solo parcialmente responsable de las aceleraciones relativas locales entre los Observadores Fundamentales, ya que los efectos "no gravitacionales" se manifiestan a través del segundo y tercer términos en el paréntesis cuadrado que contienen a la 4-aceleración  $\dot{u}_a$ , la cual indica que la 4-velocidad no es un campo vectorial geodésico y las Líneas de Universo de los Observadores Fundamentales son curvas geodésicas. Si  $u^a$  es un campo geodésico ( $\dot{u}_a = 0$ ), los Observadores Fundamentales están en caída libre y (1,28) simplemente se transforma en la ecuación de la desviación geodésica, dada por

$$h_b^a \dot{v}^b = (R_{bcd}^a u^b u^d) y_{\perp}^c, \quad (1,29)$$

entonces se observa que la curvatura del espacio-tiempo provoca todos los efectos gravitacionales.

#### 1.4 Parámetros observacionales entre los Observadores Fundamentales.

Las distancias, velocidades y aceleraciones relativas descritas en la sección anterior, son conceptos fundamentales, no son directamente observables. Cada uno de los Observadores Fundamentales, recibe una señal de luz emitida de su Observador Fundamental vecino, ésta señal viaja a través del cono de luz del observador en dirección de vectores nulos y no a través de las Hipersuperficies de Simultaneidad. Por "rayo" de luz se entiende radiación electromagnética en el límite de la óptica geométrica. Ésta radiación se propaga en la dirección de un vector nulo  $k_a = \nabla_a \phi$  normal a los frentes de onda de fase constante ( $\phi(x^a) = \text{constantes}$ ). Éste vector nulo está dado por

$$g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi = k^a k_a = 0.$$

Si  $v$  es un parámetro afín, entonces

$$k^a = \frac{dx^a}{dv}$$

y satisface

$$\nabla_{[a} k_{a]} = 0, \quad \text{ecuación de la eikonal,} \quad (1,30a)$$

$$k^a \nabla_a k^b = 0, \quad \text{ecuación geodésica nula,} \quad (1,30b)$$

de modo que los rayos (curvas integrales de  $k^a$ ) se obtienen de resolver la ecuación (1,30b) y son parametrizados como  $[x^0(v), x^i(v)]$ . Sin embargo, la luz recibida por un Observador Fundamental emitida por un Observador Fundamental vecino debe tener un corrimiento al rojo ó al azul, dependiendo del movimiento relativo de los observadores involucrados.

Para una congruencia nula  $k^a$  y los Observadores Fundamentales (con 4-velocidades  $u^a$ ) la frecuencia de los rayos de luz está determinada por una función escalar que se expresa como

$$\nu(x^a) = -u^b k_b. \quad (1,31)$$

Relacionando al vector nulo  $k^a$  con la frecuencia  $\nu$  y con los parámetros cinemáticos, obtenemos la siguiente expresión

$$k^a = -u_b k^b (u^a + e^a) = \nu (u^a + e^a). \quad (1,32)$$

Usando (1,30b) y (1,6) para reescribir a  $\nabla_a u_b$  en términos de los parámetros cinemáticos, se obtiene la siguiente expresión

$$k^a \nabla_a \nu = -\nu^2 \left[ \frac{\Theta}{3} + e^a \dot{u}_a + e^a e^b \sigma_{ab} \right], \quad (1,33)$$

la cual es una ecuación que describe la forma en que cambia localmente  $\nu$ , es decir, da información de si hay corrimiento al rojo ó corrimiento al azul localmente siendo  $\nu$  afectada por los movimientos relativos entre los Observadores Fundamentales. Los corrimientos locales al rojo ó al azul, en general, son una combinación de una distribución isotrópica monopolar ( $\Theta/3$ ) y términos anisotrópicos dipolar ( $\dot{u}_a$ ) y uno cuadrupolar ( $\sigma_{ab}$ ). Ésto es independiente de la dirección. Si  $u^a$  es un campo vectorial geodésico, tenemos que  $\dot{u}^a = \sigma_{ab} = 0$ , por lo que la distribución de los corrimientos locales dada por (1,33) es isotrópica.

Sin embargo, (1,33) es una relación local, para la cual se cumple que  $\nu(v)$  y  $k^a = dx^a/dv$  de modo que  $k^a \nabla_a \nu = \partial \nu / \partial x^a k^a = d\nu/dv$ . El principal problema observacional en un determinado modelo cosmológico es determinar el corrimiento al rojo ó al azul de luz entre Observadores Fundamentales arbitrarios, entre un Observador Fundamental de referencia (receptor) en un Observador Fundamental  $x_{\text{receptor}}^a$  y 4-velocidad  $u_{\text{receptor}}^a$ , recibiendo un rayo de luz a través de un vector nulo  $k^a$  emitido por otro Observador Fundamental (emisor) con  $x_{\text{emisor}}^a$  y 4-velocidad  $u_{\text{emisor}}^a$  y el corrimiento al rojo ó al azul detectado por el receptor está expresado como

$$1+z = \frac{(u^a k_a)|_{\text{emisor}}}{(u^a k_a)|_{\text{receptor}}} = \frac{\nu_{\text{emisor}}}{\nu_{\text{receptor}}}. \quad (1,34)$$

Para obtener  $z$  se integra la ecuación (1,33) sobre la curva nula  $[x^0(u), x^i(u)]$  conectando  $x_{\text{receptor}}^a$  y  $x_{\text{emisor}}^a$ . Para éste propósito es necesario resolver las ecuaciones de Einstein obteniendo la métrica  $g_{ab}$  y los parámetros  $\Theta/3$ ,  $e^a \dot{u}_a$  y  $e^a e^b \sigma_{ab}$  como funciones de  $x^a(u)$ , una vez habiendo obtenido dichos parámetros se resuelve (1,30b) que es la ecuación de la geodésica nula.

Teniendo en cuenta (1,18), se puede reescribir (1,33) como

$$k^a \nabla_a \nu = -\nu^2 [H + e^a \dot{u}_a], \quad (1,35)$$

ésta ecuación indica que  $H$  es un parámetro que puede determinarse por observación. Otro parámetro observacional importante es  $\Omega$ , que es un parámetro para determinar la "densidad crítica". Para un modelo cosmológico general se obtiene la expresión

$$\Omega \equiv \frac{8\pi\rho}{3H^2} = \frac{8\pi T_{ab} u^a u^b}{3[\Theta/3 + \sigma_{ab} e^a e^b]^2}, \quad (1,36)$$

---

el parámetro de deceleración  $q$  permanece en la ecuación de Raychaudhuri dada por (1,27) y obtenemos la expresión

$$q \equiv \frac{3\ddot{L}}{LH^2} = \frac{\Omega}{2} \left(1 + \frac{3p}{\rho}\right) + \frac{2(\sigma^2 - \omega^2)}{H^2} - \frac{\nabla_a \dot{u}^a + \dot{u}_a \dot{u}^a}{H^2}, \quad (1,37)$$

donde  $H$  y  $\Omega$  están determinados por (1,18) y (1,36). El signo del parámetro  $q$  es proporcional a  $\ddot{L}$  sobre la ecuación de Raychaudhuri, esto indica que si sobre la expansión cósmica se mide  $H$  puede estar desacelerando ó acelerando. Una vez que se ha determinado  $z(x^a)$  se pueden determinar los parámetros  $H(z)$ ,  $\Omega(z)$  y  $q(z)$  sobre (1,35), (1,36) y (1,37) y obtenemos la "distancia de corrimiento al rojo" que se expresa como

$$\ell = \ell(z(v), x^a), \quad (1,38)$$

dada por (1,17) y (1,18) que es una relación funcional en la cual la distancia tiene dependencia del parámetro  $z$  sobre las Hipersuperficies de Simultaneidad. Las medidas de éstas distancias pueden ser calibradas por algunos métodos como son los de paralaje, líneas espectrales, etc. Un proceso complejo que permite verificar si los datos observacionales de un modelo cosmológico son adecuadas.

---

## Capítulo 2: Clases especiales de Observadores Fundamentales

### 2.1 Líneas de Universo de los Observadores Fundamentales libres de vorticidad.

Si el tensor de vorticidad  $\omega_{ab}$  (ó vector dual  $\omega^a$ ) es cero, no existe una rotación local sobre los Observadores Fundamentales, entonces el campo 4-velocidad está libre de vorticidad ó es irrotacional. Entonces  $\tilde{\nabla}_{[a}u_{b]} = 0$  ésto implica que para algún escalar arbitrario  $\phi$  tenemos la condición

$$[\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b] \phi = \omega_{ab} \dot{\phi} = 0. \quad (2,1)$$

Consecuentemente, para una función escalar semejante  $Q$  tenemos que  $\nabla_a Q$  y la transformación de coordenadas sobre las Hipersuperficies de Simultaneidad siempre existe, de modo que  $u_a = u_0 \delta_a^0$  (véase apéndice B). Ésto implica la existencia de una coordenada de tiempo global  $x^0 = t(\tau)$  que satisface

$$\dot{t}(\tau) u_a = -\nabla_a t(\tau), \quad (2,2)$$

solamente las hipersuperficies tridimensionales son ortogonales a  $u^a$  parametrizadas por las coordenadas espaciales  $x^i$ . Utilizando adecuadamente la coordenada temporal en (2,2) para expresar la métrica sobre la *Hipersuperficie Ortogonal* obteniendo las ecuaciones

$$ds^2 = -N^2(t, x^i) dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2,3a)$$

$$u^a = N^{-1} \delta_t^a, \quad u_a = -N \delta_a^t, \quad (2,3b)$$

$$h_{ab} = g_{ij} \delta_a^i \delta_b^j \quad h_b^a = \delta_i^a \delta_b^j \delta_j^i. \quad (2,3c)$$

Si  $u^a$  es irrotacional y las coordenadas de la Hipersuperficie Ortogonal son usadas, entonces obtenemos las siguientes expresiones

$$T_{ab} u^a u^b = T_{tt}, \quad h_c^a h_d^b T^{cd} = \delta_i^a \delta_j^b T^{ij}, \quad (2,4a)$$

$$V_a u^a = V_t, \quad h_b^a V^b = \delta_i^a V^i, \quad (2,4b)$$

$$\dot{\phi} = N^{-1} \phi_{,t}, \quad \tilde{\nabla}_a \phi = \delta_a^i \phi_{,i}, \quad (2,4c)$$

de modo que las componentes espaciales ó temporal respectivamente denotan las partes proyectadas en la dirección de  $u^a$  y sobre las hipersuperficies de simultaneidad.

Los parámetros cinemáticos restantes cuando  $u^a$  es irrotacional están dados por expansión

$$\Theta = N^{-1} (\ln \mathcal{V})_{,t} = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{\mathcal{V}} = \frac{3\dot{L}}{L}, \quad (2,5a)$$

$$\mathcal{V} = \det(g_{ij}), \quad (2,5b)$$

4-aceleración

$$\dot{u}_a = h_a^b (\ln N)_{,t}, \quad (2,6)$$

deformación

$$\begin{aligned} \sigma_{tt} &= \sigma_{ti} = 0, \\ \sigma_{ij} &= \frac{1}{N} \left[ \frac{2L_{,t}}{L} g_{ij} - g_{ij,t} \right] = \frac{2\Theta}{3} g_{ij} - \dot{g}_{ij}. \end{aligned} \quad (2,7)$$

---

## 2.2 Observadores Fundamentales geodésicos.

Si la 4-aceleración es cero, tenemos que  $u^b \nabla_b u^a = 0$  la 4-velocidad es un campo vectorial geodésico temporaloide. Si  $u^a$  es irrotacional, entonces de (2,6) tenemos que  $N = N(t)$ , entonces podemos redefinir la coordenada temporal como  $\bar{t} = \int N dt$  de modo que  $u^a = \delta_t^a$  y la coordenada temporal coincide con el tiempo propio sobre los Observadores Fundamentales [ $\dot{\phi} = \phi_{,t}$  para alguna función escalar  $\phi(x^a)$ ]. La métrica de las ecuaciones (2,3) toma el nombre de "normal" y está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2,8)$$

Notando que las coordenadas normales pueden ser definidas para algún espacio-tiempo arbitrario, aunque éstas pueden dar origen a coordenadas con singularidades. Para un modelo cosmológico en el cual  $u^a$  es geodésica e irrotacional éstas coordenadas están bien definidas en cualquier parte.

## 2.3 Líneas de Universo de Observadores Fundamentales que preservan el volumen.

Si los volúmenes locales no cambian respecto a los Observadores Fundamentales, entonces  $\dot{\mathcal{V}} = 0$  y  $\Theta = 0$ . Si  $u^a$  es irrotacional, entonces de la definición (2,5b) las coordenadas pueden ser basadas en que  $g_{ij,t} = 0$  para toda  $i, j$  y por consistencia  $N_{,t} = 0$  y el espacio-tiempo es estático (ó estacionario si  $\omega_{ab} \neq 0$ ). Se puede probar que  $u^a$  satisface la condición  $\nabla_{(a} u_{b)} = 0$ .

## 2.4 Líneas de Universo de Observadores Fundamentales libres de deformación.

Si el tensor de deformación es cero pero  $\omega_{ab} \neq 0$ , entonces (1,20) se reduce a la ecuación

$$h_b^a \dot{e}^b = \omega_b^a e^b. \quad (2,9)$$

Entonces, la dirección de los Observadores Fundamentales rota con respecto a una Línea de Universo de referencia. Si la trayectoria está libre de deformación y el volumen se preserva, entonces  $\dot{\ell} = \dot{L} = 0$  de modo que las distancias relativas entre los Observadores Fundamentales permanecen fijas. En éste caso la rotación es rígida.

Si ambos deformación y vorticidad son cero, entonces de (2,7) implica que  $g_{ij} = L^2(t, x^i) J_{ij}(x^k)$ , y todas las dependencias temporales de  $g_{ij}$  están contenidas en un escalar común  $L$ . Las funciones en la matriz simétrica de  $3 \times 3$ ,  $J_{ij}(x^k)$  no dependen de  $t$ , ésta matriz puede ser siempre diagonalizada por medio de transformaciones de coordenadas sobre las Hipersuperficies de Simultaneidad. Podemos escribir  $N$  en términos de  $\Theta$  y  $L_{,t}/L$  usando (2,5a) y (1,16). La métrica de las ecuaciones (2,3) ahora se puede expresar como

$$ds^2 = - \left[ \frac{L_{,t}/L}{\Theta/3} \right]^2 dt^2 + L^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (2,10)$$

Si  $u^a$  es libre de deformación sobre las distancias relativas locales cambia en una dirección de manera independiente, como una "magnificación rígida" de las Hipersuperficies de Simultaneidad. Sin embargo, ésta magnificación rígida ocurre en general a diferentes proporciones para diferentes Observadores Fundamentales, el factor de magnificación  $L$  depende de la posición (a diferente proporción de magnificación para diferentes Observadores Fundamentales de referencia). Para las Líneas de Universo de Observadores Fundamentales libres de deformación el escalar de Hubble  $H = \dot{\ell}/\ell$  corresponde a un cambio de proporción de las distancias relativas que son independientes de la dirección (isotrópicas) e iguales a los promedios de razón de cambio definida por (1,16), entonces obtenemos

$$\sigma_{ab} = 0 \implies H = \frac{\dot{\ell}}{\ell} = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\Theta}{3} \implies L = \ell. \quad (2,11)$$

---

Sin embargo, a partir de (1,33) y (1,35) vemos que las observaciones del corrimiento hacia el rojo deberían determinar el término dipolar implicado de  $\dot{u}^a$ . La vorticidad  $\omega_{ab}$  no aparece en (1,33) y (1,35) ya que el efecto debido a las rotaciones locales no se observa a partir del corrimiento al rojo local sino al a través de (1,20) y en la determinación observacional del parámetro  $q$  en (1,37).

---

## Capítulo 3: Homogeneidad como isotropía local

### 3.1 Observador isotrópico: Simetría esférica.

Si existe un Observador Fundamental que sea un *Observador Isotrópico* con respecto a cualquier dirección, es decir, que es independiente de la dirección sobre todos los parámetros cinemáticos, dinámicos y observacionales, entonces el modelo cosmológico es *simétricamente esférico* con respecto a los Observadores Isotrópicos. La historia del tiempo propio de todas las demás Observadores Fundamentales con respecto a los Observadores Isotrópicos debe ser independiente de su dirección, si se adecúan las coordenadas del espacio-tiempo se describen todos los eventos del espacio-tiempo a  $t = \tau |_{OI}$  que es el tiempo propio respecto a los Observadores Isotrópicos junto con las coordenadas tridimensionales esféricas  $(r, \theta, \phi)$  centradas en los Observadores Isotrópicos a  $r = 0$ , entonces todas las cantidades dependen solamente de  $(t, r)$  mientras que las coordenadas angulares  $(\theta, \phi)$  permanecen unívocamente fijas en la dirección de los demás observadores (la posición en el "cielo" de los Observadores Isotrópicos). Toda clase de observadores a la misma distancia de los Observadores Isotrópicos están localizados sobre la 2-esfera  $\mathcal{S}$  donde el centro es en los Observadores Isotrópicos y parametrizados por  $(\theta, \phi)$ . Entonces, la coordenada radial  $r$  es simplemente una marca fijada a cada 2-esfera como  $\mathcal{S}$ , de modo que los Observadores Isotrópicos localizados sobre  $r = 0$  corresponden a la 2-esfera de radio cero. Los Observadores Isotrópicos deben definir la coordenada radial de otros observadores simplemente con sus corrimientos hacia el rojo ó hacia el azul  $z$  observados a determinado  $\tau |_{OI}$  fijo, entonces para los Observadores Isotrópicos se tiene  $z = 0$ .

De (1,18), (1,19), (1,20), (1,27), (1,28), (1,33) y (1,37), las siguientes condiciones que deben tener sobre los Observadores Isotrópicos para todos los  $\tau_{OI}$  son

$$\omega_{ab} |_{OI} = 0, \quad (3,1a)$$

$$\sigma_{ab} |_{OI} = 0, \quad (3,1b)$$

$$\dot{u}_a |_{OI} = 0, \quad (3,1c)$$

$$\Theta |_{OI} = \Theta(\tau |_{OI}), \quad (3,1d)$$

donde  $|_{OI}$  denota evaluar en  $r = 0$ . Se hace notar que las ecuaciones (3,1a) a (3,1c) son condiciones necesarias y suficientes mientras que la ecuación (3,1d) es solamente suficiente. En general  $\tau |_{OI}$  no necesariamente debe de coincidir con los  $\tau$  de los demás Observadores Fundamentales, la existencia de los Observadores Isotrópicos no implica isotropía para otros observadores, entonces  $\sigma_{ab}$  y  $\dot{u}_a$  deben ser, en general, diferentes para ciertos Observadores Fundamentales con  $r \neq 0$ , sin embargo, deben tener necesariamente  $\omega_{ab} = 0$  para todos los Observadores Fundamentales, entonces otra vez una dirección privilegiada de los Observadores Isotrópicos debería surgir del vector vorticidad de las ecuaciones (1,21a) y (1,22). Por la misma razón la métrica no puede tener "términos mixtos" como lo son  $g_{0r}$ ,  $g_{0\theta}$ ,  $g_{0\phi}$ .

Teniendo  $t = \tau |_{OI}$ , entonces la métrica compatible más general con la existencia de un Observador Isotrópico, tenemos el siguiente caso particular de las ecuaciones (2,3)

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + X^2 dr^2 + Y^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2],$$

$$u^a = N^{-1} \delta_t^a, \quad h_a^b \nabla_b \phi = \delta_r^a \phi_{,r}, \quad (3,2)$$

donde  $X$ ,  $Y$  y  $N$  dependen solamente de  $(t, r)$  y donde  $4\pi Y^2$  es el área de la superficie de las 2-esferas mientras que las distancias propias de las Hipersuperficies de Simultaneidad sobre los Observadores Isotrópicos son determinadas por  $\ell = \int X dr$  para  $t$  fijo. Si las Líneas de Universo para los Observadores Isotrópicos están marcadas con  $r = 0$  se tiene  $Y(t, 0) = 0$  para todo  $t$ , mientras que  $N(t, 0) = 1$  (porque  $t = \tau_{OI}$ ) y  $X(t, 0) = 1$  porque el espacio-tiempo debe ser localmente plano con  $r = 0$ . Las Líneas de Universo de los Observadores Isotrópicos es entonces la historia en el tiempo propio de puntos fijos del grupo 3-dimensional

de rotaciones SO(3) caracterizando la simetría esférica. Entonces, los Observadores Isotrópicos pueden ser denotados como Líneas de Universo Centrales ó simplemente “centro”.

Los parámetros cinemáticos asociados con la métrica esféricamente simétrica (3,2) son los siguientes

$$\Theta = \frac{1}{N} \left( \frac{X_{,t}}{X} + \frac{2Y_{,t}}{Y} \right), \quad (3,3a)$$

$$\dot{u}_t = 0, \quad \dot{u}_r = (\ln N)_{,r}, \quad (3,3b)$$

$$\sigma_{tt} = \sigma_{ti} = 0, \quad \text{con } i = r, \theta, \phi$$

$$\sigma_r^r = -2\sigma_\theta^\theta = -2\sigma_\phi^\phi = \frac{1}{N} \left( \frac{Y_{,t}}{Y} - \frac{X_{,t}}{X} \right), \quad (3,3c)$$

si  $\sigma_b^a = 0$ , entonces se cumple  $Y_{,t}/Y = X_{,t}/X$  lo cual implica  $Y = f(r)X$  donde  $f(r)$  es arbitraria.

### 3.2 Modelos FLRW: Todos los Observadores Fundamentales son Isotrópicos.

El principio cosmológico demanda lo siguiente: (a) *todos los Observadores Cosmológicos Fundamentales, deben ser equivalentes* (principio copernicano) y (b) *la descripción del Universo debe ser la mas simple posible*. Bajo los principios anteriores se puede considerar un modelo cosmológico en el cual cada Observador Fundamental es un Observador Isotrópico, entonces cada Observador Fundamental debe ser un centro de simetría y el espacio-tiempo debe ser esféricamente simétrico con respecto a cada Observador Fundamental. Éstas condiciones llevan a clases muy especiales de modelos cosmológicos homogéneos e isotrópicos denotados como FLRW.

Si cada Observador Fundamental se convierte en un centro de simetría, entonces las condiciones (3,1) deben ser válidas en todas partes en las Hipersuperficies de Simultaneidad y para todos los valores del tiempo propio  $\tau$  de los Observadores Fundamentales, ésto implica las siguientes ecuaciones

$$\omega_{ab} = 0, \quad (3,4a)$$

$$\sigma_{ab} = 0, \quad (3,4b)$$

$$\dot{u}_a = 0, \quad (3,4c)$$

$$\Theta = \Theta(\tau), \quad (3,4d)$$

$$h_a^b \nabla_b \Theta = 0, \quad (3,4e)$$

donde (3,4e) evita direcciones privilegiadas asociadas con gradientes espacialoides sobre las Hipersuperficies de Simultaneidad (ésta condición debe ser tomada para cada escalar). Las condiciones (3,4) implican que  $u_a$  debe ser irrotacional, libre de deformación y de Observadores Fundamentales geodésicos de modo que las trayectorias de los Observadores Fundamentales son geodésicas temporaloides (entonces  $\tau = t$  y  $u^a = \delta_t^a$ ). El único parámetro cinemático diferente de cero es

$$\frac{\Theta(t)}{3} = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{L_{,t}}{L} \quad (3,5)$$

y la métrica se puede obtener de los casos particulares de (2,10) seguida de (3,5), entonces tenemos

$$ds^2 = -dt^2 + L^2[dx^2 + dy^2 + dz^2],$$

con

$$L = R(t)\xi(x, y, z). \quad (3,6)$$

---

Por consistencia con las ecuaciones de campo de Einstein obtenemos

$$\xi(x, y, z) = 1 + \frac{k_0}{4}(x^2 + y^2 + z^2), \quad (3,7)$$

donde

$$k_0 = 0, \pm 1$$

por lo tanto la métrica Robertson-Walker es

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]}{[1 + k_0/4r^2]^2}. \quad (3,8)$$

De (3,8) hacemos una transformación de coordenadas para expresar dicha métrica como

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)[d\bar{r}^2 + f^2(\bar{r})(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (3,9)$$

De las componentes del tensor métrico tenemos

$$g_{rr} = g_{\bar{r}\bar{r}}, \quad (3,10a)$$

$$\frac{dr}{1 + k_0/4r^2} = d\bar{r} \quad (3,10b)$$

con

$$\bar{r} = \int \frac{dr}{1 + k_0/4r^2}, \quad (3,10c)$$

entonces obtenemos

$$\frac{r}{1 + k_0/4r^2} = f(\bar{r}) \quad (3,10d)$$

con

$$f(r) = \begin{cases} r, & k_0 = 0 \\ \sin r, & k_0 = 1 \\ \sinh r, & k_0 = -1 \end{cases}.$$

de modo que la métrica ahora está dada por la ecuación (3,9).

Las Hipersuperficies de Simultaneidad ó la parte espacial de las métricas (3,6) y (3,7) con  $\xi$  y  $f$  determinados por (3,7) y (3,8) son métricas 3-dimensionales *Robertson-Walker* respectivamente, están determinados en coordenadas rectangulares y esféricas. Por otro lado, los nombres de *Friedmann* y *Lemaître* son juntados a *Robertson* y *Walker* en el acrónimo "FLRW" denotando los espacio-tiempos 4-dimensionales cuyas Hipersuperficies de Simultaneidad son las métricas 3-dimensionales Robertson-Walker.

Calculando el tensor de Ricci 3-dimensional y el escalar para ésta 3-métrica (para  $t = t_0$ ) obtenemos

$${}^3R_{ab} = {}^3Rh_{ab}, \quad {}^3R = \frac{6k_0}{R^2(t_0)}, \quad (3,11)$$

de modo que las métricas Robertson-Walker son 3-espacios y la curvatura está dada por el escalar constante cuyo signo está determinado por la constante  $k_0$  con cero, positivo ó negativo ó si se utiliza la métrica de la expresión (3,9), entonces  $k_0 = 0, 1, -1$  respectivamente, los 3-espacios de curvatura constante positiva ó negativa pueden ser considerados como una hipereféra  $S^3$  y como un hiperboloide en  $\mathbf{R}^4$ .

---

La curvatura y todos los demás parámetros cinemáticos geométricos y físicos en los modelos FLRW son constantes sobre las Hipersuperficies de Simultaneidad (métricas Robertson-Walker) de los modelos cosmológicos con métricas como en la ecuación (3,9), esto motiva a considerar a los modelos FLRW como *espacialmente homogéneos*. Se debe enfatizar que la métrica de (3,6) y (3,9) están condicionadas a tener isotropía local para cada Observador Fundamental, mientras que su homogeneidad (asociada con las Hipersuperficies de Simultaneidad sobre espacios de curvatura constante) se sigue como un corolario. Se puede caracterizar covariantemente a los modelos cosmológicos FLRW considerando a éstos espacio-tiempos como clases de fluidos perfectos para los cuales el parámetro diferente de cero es  $\Theta$ . Es más conveniente esta aproximación para derivar y entender los modelos FLRW basada en movimientos locales respecto a los Observadores Fundamentales ya que es mucho más intuitivo que la aproximación formal basada en propiedades geométricas abstractas como 3-espacios de curvatura constante.

Tenemos que la "isotropía local para todas los Observadores Fundamentales, implica Hipersuperficies de Simultaneidad con curvatura constante". Sin embargo, lo inverso resulta ser falso: éstos son espacio-tiempos como los modelos cosmológicos de Bianchi, esto admite secciones espacialoides (Hipersuperficies de Simultaneidad) que son maximalmente simétricos (y homogéneos con respecto a todos los Observadores Fundamentales) pero no cumplen con tener isotropía local para un Observador Fundamental. Para distinguir éstas dos situaciones el término "homogéneo e isotrópico" es utilizado para los modelos FLRW mientras que los modelos de Bianchi son denotados como "homogéneos y anisotrópicos".

Finalmente remarcando el valor del alto grado de simetría e idealización implicado en los modelos FLRW se llega a una dramática simplificación en más cálculos. Por ejemplo los parámetros observacionales  $z$  y  $q$ , determinados por (1,34) y (1,37) toman las formas

$$1 + z = \frac{R(t_{\text{emisor}})}{R(t_{\text{observador}})}, \quad (3,12)$$

y el parámetro de deceleración

$$q = \frac{\Omega}{2} \left( 1 + \frac{3p}{\rho} \right) - \Omega_{\Lambda}, \quad (3,13)$$

donde en (3,12) se utiliza el hecho de que para las métricas FLRW  $u_a k^a = -k^t$ , donde  $t$  es componente del vector nulo  $k^t = 1/R$  mientras que  $\Omega$  está determinado por (1,36) con  $H = \Theta/3$  de (3,5) y el término  $\Omega_{\Lambda}$  es el factor "Omega" para  $\Lambda$ .

---

## Capítulo 4: Dinámica de los modelos FLRW

### 4.1 La métrica Robertson-Walker.

Las métricas Robertson-Walker engloban la geometría de todos los posibles modelos de Universo compatibles con el Principio Cosmológico, pero la dinámica evolutiva de todos éstos espacio-tiempos requiere condiciones específicas basadas en la naturaleza física de la materia contenida. Desde que A. Friedmann y G. Lemaitre fueron los primeros en formular físicamente los modelos cosmológicos basados en la métrica Robertson-Walker, ahora éstos modelos cosmológicos se abrevian como modelos FLRW. Los modelos cosmológicos FLRW se conocen como "Cosmología estándar".

La métrica RW fué obtenida en el capítulo anterior y está dada por (3,9) y está dada como

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)[d\bar{r}^2 + f^2(\bar{r})(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)].$$

con

$$f(r) = \begin{cases} r, & k_0 = 0 \\ \sin r, & k_0 = 1 \\ \sinh r, & k_0 = -1 \end{cases}.$$

### 4.2 Ecuaciones de campo.

La forma mixta del tensor de Einstein  $G_b^a$  respecto a (3,9) implica que (en el sistema comóvil) todos los tensores de momento-energía compatibles con (3,9) deben tener la forma

$$T^a_b = \text{diag}[-\rho(t), p(t), p(t), p(t)], \quad (4,1)$$

donde los dos escalares  $\rho(t)$  y  $p(t)$  están relacionados por  $R$  y las ecuaciones de campo  $G_b^a = 8\pi T_b^a$  (con  $c = 1$ ) pueden escribirse como

$$8\pi\rho = -\frac{3(\dot{R}^2 + k_0)}{R^2} = -G_t^t \quad (4,2a)$$

$$8\pi p = -\frac{\dot{R}^2 + k_0}{R^2} - \frac{2\ddot{R}}{R} = G_r^r = G_\theta^\theta = G_\phi^\phi, \quad (4,2b)$$

de modo que  $\rho$  y  $p$  pueden ser identificadas como la densidad de energía total y la presión medida por algún Observador Fundamental.

Las ecuaciones de campo son frecuentemente expresadas como  $G_b^a - \Lambda\delta_b^a = T_b^a$ , donde  $\Lambda$  es la constante cosmológica. Sin embargo, es preferible considerar las ecuaciones de campo con éste término extra, incluyéndolo como una forma adicional de densidad de energía satisfaciendo la restricción  $p_\Lambda + \rho_\Lambda = 0$ . Ésta contribución extra para la fuente del campo total es llamada "energía de vacío" ó "vacío cuántico" y puede ser incorporada en  $\rho$  y  $p$  totales.

Las ecuaciones de campo (4,2) pueden ser suplementadas por la ley de conservación  $\nabla_b T^{ab} = 0$ , ésta expresión es llamada "energía de balance"

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{R}}{R} = 0, \quad (4,3)$$

la cual proporciona la condición de integrabilidad de las ecuaciones (4,2). De las ecuaciones (4,2) y (4,3) dos pueden ser consideradas como ecuaciones de campo independientes. En éste caso tenemos dos ecuaciones y

tres incógnitas  $(\rho, p, R)$ , por lo tanto se tiene que suministrar una "ecuación de estado".

Para integrar las ecuaciones de campo bajo la condición de tal ecuación de estado es conveniente considerar (4,2a) y (4,3). En particular una forma útil y sencilla es una ecuación de estado dada por

$$p = w\rho, \quad \text{con } w = \text{constante}, \quad (4,4)$$

entonces

$$p + \rho = (1 + w)\rho \quad (4,5)$$

y sustituyendo (4,5) en (4,3) tenemos la ecuación

$$\dot{\rho} + 3(1 + w)\rho \frac{\dot{R}}{R} = 0, \quad (4,6)$$

resolviendo la ecuación (4,6) obtenemos la solución

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(1+w)} \quad (4,7)$$

y de (4,2a) y (4,3), obtenemos

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho(R)R^2 - k_0, \quad (4,8)$$

es decir, obtuvimos una relación funcional de la forma  $\rho = \rho(R)$ . Una vez obtenida la ecuación (4,8) se sustituye (4,7) en (4,8) y obtenemos

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\rho_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(1+w)} - \frac{k}{R^2}, \quad (4,9)$$

que al integrarse obtenemos  $R = R(t)$ .

### 4.3 El fluido termodinámico.

Para un fluido en equilibrio térmico,  $p$  y  $\rho$  son respectivamente: la presión y la densidad total de masa-energía (con masa-energía en reposo). La ecuación de estado mas general, puede ser expresada como

$$\rho = \rho(n, T), \quad p = p(n, T), \quad (4,10)$$

donde  $n$  es la densidad de partículas y  $T$  es la temperatura absoluta. Éste fluido debe satisfacer la ecuación de conservación de la materia dada como

$$\nabla_a(nu^a) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{n}}{n} + \frac{3\dot{R}}{R} = 0 \Rightarrow n \propto R^{-3} \quad (4,11)$$

y la ecuación de Gibbs está dada como

$$TdS = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow T\dot{S} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{n}\right) + p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4,12)$$

donde  $S$  es la entropía por partícula. Además tenemos que  $\dot{S} = 0$ , de modo que el fluido es isentrópico (entropía cero transportada por  $u^a$ ) como se espera para un fluido en equilibrio térmico (en el sentido de un

sistema termodinámico que es reversible y de proceso cuasi-estático). Por la condición de integrabilidad de (4,12) obtenemos la ley de evolución de la temperatura expresada como

$$\frac{\dot{T}}{T} + 3 \left[ \frac{\partial p / \partial T}{\partial \rho / \partial T} \right]_n \frac{\dot{R}}{R} = 0, \quad (4,13)$$

donde el subíndice  $n$  indica la evaluación a una  $n$  constante. La integración de (4,13) para alguna ecuación de estado como (4,10) produce una relación  $T = T(R, n)$  pero con  $n \propto R^{-3}$ , la relación  $T = T(R, n)$  transforma (4,10) en  $\rho = \rho(R)$  permitiendo integrar la ecuación de Friedmann.

#### 4.4 Gas ideal relativista.

Un ejemplo importante de sistema termodinámico es el del gas ideal relativista monoatómico asociado con la distribución Maxwell-Boltzman de la teoría cinética, una descripción hidrodinámica de éste tipo de gas puede ser determinado por el tensor de momento-energía dado como

$$T_b^a = \rho u^a u_b + p h_b^a, \quad (4,14)$$

llamado "fluido perfecto" bajo la ecuación de estado

$$\rho = mc^2 n \Gamma(\beta) - nk_B T, \quad p = nk_B T, \quad (4,15)$$

$$\Gamma(\beta) \equiv \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)}, \quad \beta \equiv \frac{mc^2}{kT},$$

donde  $m$  es la masa de la partícula,  $k_B$  es la constante de Boltzman y  $K_2, K_3$  son las funciones de Bessel de segundo y tercer orden. La ecuación de estado (4,15) es bastante complicada, aunque ésta se simplifica en dos extremos del espectro de la temperatura y la energía: la *ultrarelativista* y la *no-relativista*, caracterizadas por  $\beta \ll 1$  y  $\beta \gg 1$  respectivamente. Ésto es útil para apreciar los rangos de temperaturas. Considerando la masa de un nucleón ( $\approx 10^{-24}$  gm) y  $k_B \approx 10^{-16}$  ergs/K, tenemos que  $\beta \approx 1$  para  $T \approx 10^{12}$  K. Por consiguiente si se modelara la materia cósmica por un gas ideal relativista, el caso límite ultrarelativista debería ser válida para varias eras cósmicas calientes.

Considerando el comportamiento de  $\Gamma(\beta)$  por éstos casos límite tenemos

$$\beta \ll 1, \quad \Gamma \approx \frac{4}{\beta} + \frac{\beta}{2} + O(\beta^3), \quad \rho \approx 3nk_B T, \quad (4,16a)$$

$$\beta \gg 1, \quad \Gamma \approx 1 + \frac{5}{2\beta} + O(\beta^{-2}), \quad \rho \approx mc^2 n + \frac{3}{2} nk_B T, \quad (4,16b)$$

identificando la ecuación de estado del caso clásico del gas ideal monoatómico (es decir, no-relativista),

$$\rho = mc^2 n + \frac{3}{2} nk_B T, \quad p = nk_B T \quad (4,17a)$$

para el caso del gas ideal ultrarelativista

$$\rho = 3nk_B T, \quad p = nk_B T = \frac{1}{3} \rho. \quad (4,17b)$$

Para el caso no-relativista del gas ideal, considerando (4,11) y (4,13) obtenemos ahora

$$n = n_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^3, \quad T = T_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2, \quad (4,18a)$$

de modo que

$$p(R) = n_0 k_B T_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^5, \quad (4,18b)$$

$$\rho(R) = mc^2 n_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 + \frac{3}{2} n_0 k_B T_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^5 = mc^2 n_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \left[ 1 + \frac{3k_B T}{2mc^2} \right], \quad (4,18c)$$

donde  $n_0$ ,  $R_0$  y  $T_0$  son  $n$ ,  $R$  y  $T$  evaluados en un valor fijo,  $t = t_0$ . La ecuación (4,18c) transforma a (4,9) en una cuadratura integrable.

#### 4.5 Polvo.

De las ecuaciones (4,18) se hace evidente que un gas ideal no-relativista se expande ( $R \gg R_0$ ), ésto implica que la presión y la temperatura decaen muy rápido  $O(R^{-5})$ , y la masa-energía en reposo  $O(R^{-3})$ . La razón  $k_B T / mc^2 = 1/\beta$  es insignificante ( $\ll 10^{-3}$ ) para masas nucleónicas y electrónicas y para cierto rango de temperaturas asociadas con las condiciones clásicas ( $T < 10^8 K$ ), ésto es evidente de (4,18c); es decir, prácticamente la evolución del gas ideal no-relativista puede ser aproximada suponiendo que  $p \approx 0$  y  $\rho \approx mc^2 n$ . Las fuentes de materia satisfacen la ecuación de estado en particular

$$p = 0, \quad \rho(R) \propto R^{-3}, \quad (4,19)$$

son denotados como "polvo", reduciendo (4,14) a  $T_{ab} = \rho u_a u_b$ . Entonces (4,19) se puede justificar como la temperatura cero en el límite de un gas ideal no-relativista y entonces  $\rho = mc^2 n$  (toda la densidad materia-energía es la densidad de masa en reposo); ésta ecuación de estado describe convenientemente (aproximadamente) una descripción de diferentes tipos de materia cósmica no-relativista. Por ejemplo, las colisiones de materia ó axiones ó la materia oscura fría no bariónica para la cual ésta relación es incierta.

#### 4.6 Radiación.

Para un gas ideal ultrarelativista de (4,17b), (4,11) y (4,13) llevan a las siguientes expresiones

$$n = n_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^3, \quad T = T_0 \left( \frac{R_0}{R} \right), \quad (4,20a)$$

de modo que

$$\rho(R) = 3n_0 k_B T_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^4 = 3p(R), \quad (4,20b)$$

permitiendo la integración de (4,14). La ecuación de estado (4,17b) describe aproximadamente un gas ideal de partículas masivas ( $m > 0$ ) a muy altas temperaturas la cual es aplicable a partículas ligeras como el neutrino. Ésta ecuación de estado se aplica en forma exacta a partículas de masa cero como los fotones. Una relación equivalente a (4,20b) para fotones es la ley de Steffan-Boltzman dada como

$$\rho_\gamma = a_\gamma T^4 = a_\gamma T_0^4 \left( \frac{R_0}{R} \right)^4. \quad (4,21)$$

La relación anterior es la manifestación mas importante de éste tipo de gas en el contexto cosmológico.

#### 4.7 Mezcla de radiación y materia no relativista.

Un modelo mas realista de materia cósmica es describir una mezcla de gases ideales hidrodinámicamente por la misma 4-velocidad. Se considera una métrica Robertson-Walker cuya fuente de materia consiste en una mezcla de éste tipo con bariones no-relativistas (un gas ideal no-relativista) y fotones asociados con el *Fondo Cósmico de Microondas* (un gas ideal ultrarelativista). Ésto es semejante a la composición del tensor de energía-momento con la suma de dos tensores:  $T_{ab} = T_{ab}^{(m)} + T_{ab}^{(r)}$ , cada uno describiendo el fluido perfecto de (4,14) de modo que

$$\rho = \rho^{(m)} + \rho^{(r)} = mc^2 n^{(m)} + \frac{3}{2} n^{(m)} k_B T^{(m)} + 3n^{(r)} k_B T^{(r)}, \quad (4,22a)$$

$$p = p^{(m)} + p^{(r)} = n^{(m)} k_B T^{(m)} + n^{(r)} k_B T^{(r)}, \quad (4,22b)$$

donde los superíndices  $m$  y  $r$  denotan materia ( $m$ ) y radiación ( $r$ ) que compone la mezcla. Si la ley de conservación de la materia (4,11) toma para ambos casos  $n^{(m)}$  y  $n^{(r)}$ , entonces tenemos que

$$n^{(m)} = n_0^{(m)} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3, \quad n^{(r)} = n_0^{(r)} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3$$

y tenemos que

$$\frac{d}{dR} \left[ \frac{3}{2} T^{(m)} + \frac{3n_0^{(r)}}{n_0^{(m)} T^{(r)}} \right] + \frac{3}{R} \left[ T^{(m)} + \frac{n_0^{(r)}}{n_0^{(m)}} t^{(r)} \right] = 0. \quad (4,23)$$

Es posible distinguir dos casos: uno en que la materia y la radiación interactúan mediante procesos radiativos y otro en que la mezcla está desacoplada, depende de si las componentes interactúan o no.

-Mezcla desacoplada

Cada uno de los tensores momento-energía por separado deben cumplir con la ley de conservación, es decir,  $\nabla_b T_{(m)}^{ab} = 0$  y  $\nabla_b T_{(r)}^{ab} = 0$  de modo que (4,23) se desacopla en dos ecuaciones independientes, una para la materia y otra para la radiación llegando a

$$T^{(m)} = T_0^{(m)} \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \quad \text{y} \quad T^{(r)} = T_0^{(r)} \left( \frac{R_0}{R} \right),$$

de modo que

$$\rho(R) = mc^2 n_0^{(m)} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 + \frac{3}{2} n_0^{(m)} k_B T_0^{(m)} \left( \frac{R_0}{R} \right)^5 + 3n_0^{(r)} k_B T_0^{(r)} \left( \frac{R_0}{R} \right)^4, \quad (4,24a)$$

$$p(R) = n_0^{(m)} k_B T_0^{(m)} \left( \frac{R_0}{R} \right)^5 + n_0^{(r)} k_B T_0^{(r)} \left( \frac{R_0}{R} \right)^4. \quad (4,24b)$$

Cuando  $T^{(m)} \approx O(R^{-2})$  rápidamente decae a  $T^{(r)} \approx O(R^{-1})$  si

$$\frac{n^{(r)}}{n^{(m)}} = \frac{n_0^{(r)}}{n_0^{(m)}} \gg 1,$$

pero la razón

$$\frac{n^{(r)} k_B T^{(r)}}{mc^2 n^{(m)}}$$

no es insignificante, entonces una aproximación razonable a las ecuaciones (4,24) es el "polvo mas radiación" y tienen la forma

$$\rho = mc^2 n^{(m)} + 3n^{(r)} k_B T^{(r)}, \quad p = n^{(r)} k_B T^{(r)}, \quad (4,25)$$

donde

$$\rho(R) = mc^2 n_0^{(m)} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + 3n_0^{(r)} k_B T_0^{(r)} \left(\frac{R_0}{R}\right)^4, \quad (4,26a)$$

$$p(R) = n_0^{(r)} k_B T_0^{(r)} \left(\frac{R_0}{R}\right)^4, \quad (4,26b)$$

de modo que la energía interna es proporcionada por el gas ideal ultrarelativista. Como es mostrado por las ecuaciones (4,24) y (4,26) los bariones dominan la dinámica por largo tiempo (es decir, para  $R \gg R_0$ ). Ésta característica junto con el hecho de que la materia bariónica no interactúa con el Fondo Cósmico de Microondas y es llamada la "materia dominante" el cual es uno de los escenarios mas usados en la cosmología estandar.

Asumiendo que la materia no bariónica (*Materia Oscura Fría*) no interactúa con la radiación ni con los bariones. Se pueden reemplazar (4,25) y (4,26) por

$$\rho = \rho^{(m)} + 3n^{(r)} k_B T^{(r)}, \quad p = n^{(r)} k_B T^{(r)}, \quad (4,27)$$

de modo que

$$\rho(R) = \rho_0^{(m)} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \rho_0^{(r)} \left(\frac{R_0}{R}\right)^4, \quad p = \frac{1}{3} \rho_0^{(r)} \left(\frac{R_0}{R}\right)^4, \quad (4,28)$$

donde

$$\rho_0^{(r)} = 3n_0^{(r)} k_B T^{(r)} = 3p_0$$

y  $\rho^{(m)}$  es una componente de polvo genérica conteniendo todas las formas de materia no-relativista (bariones y Materia Oscura Fría).

-Mezcla interactiva

Un modelo de interacción simple compatible con (4,14) es un modelo en el cual las dos componentes en equilibrio térmico caracterizadas por una temperatura común  $T^{(m)} = T^{(r)} = T$  y la forma de  $\rho$  y  $p$  son entonces

$$\rho = mc^2 n^{(m)} + 3n^{(r)} k_B T \left[1 + \frac{n^{(m)}}{2n^{(r)}}\right], \quad (4,29a)$$

$$p = n^{(r)} k_B T \left[1 + \frac{n^{(m)}}{n^{(r)}}\right] \quad (4,29b)$$

y (4,28) se reduce a

$$\frac{dT}{T} + \frac{4 + S_\gamma}{2 + S_\gamma} \frac{dR}{R} = 0, \quad (4,30)$$

donde

$$S_\gamma \equiv \frac{4n_0^{(r)}}{n_0^{(m)}} = \frac{4aT_0^3}{3n_0^{(m)} k_B},$$

que es la entropía existente de fotón por barión.

---

#### 4.8 Campos escalares.

Un tipo de fuente de materia-energía que es muy popular y útil es el campo escalar con acoplamiento minimal  $\phi$  sujeto al potencial  $V(\phi)$ . Ésta fuente es caracterizada por el tensor de momento-energía

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \left[ \frac{1}{2} \nabla_c \nabla^c \phi + V(\phi) \right] g_{ab}. \quad (4,31)$$

Para las métricas Robertson-Walker se tiene que  $\phi = \phi(t)$  y se tiene que  $\nabla_a \phi = \dot{\phi} \delta_a^t$ ; entonces (4,31) es equivalente al tensor de momento-energía (4,1) con

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4,32)$$

Algunos tensores como los tensores dados en (4,1) y (4,31) son irreducibles a la forma (4,14) con  $\rho$  y  $p$  determinados y se tienen las ecuaciones (4,32) y  $u^a = \nabla^a \phi [-\nabla_c \phi \nabla^c \phi]^{-\frac{1}{2}}$ . Ésto podría no ser un campo vectorial temporal pero un campo escalar no requiere una congruencia de los Observadores Fundamentales.

El proceso de integración de las ecuaciones de campo es diferente de la descrita por otras fuentes requiriendo en varios casos técnicas de cálculo numérico.

---

## Capítulo 5: Universos de Stephani

El presente capítulo está basado del libro "Inhomogeneous cosmological models" de A. Krasinski, dicho capítulo trata sobre los Universos de Stephani, son importantes por ser soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein. Los Universos de Stephani tienen las siguientes características:

- i) Tienen simetría esférica
- ii) La fuente es un fluido perfecto
- iii) El tensor de Weyl es cero, lo que implica que sean conformalmente planos.

### 5.1 Simetría esférica con cero deformación.

Consideramos espacio-tiempos con simetría esférica cuyo tensor de deformación es cero:  $\sigma_{ab} = 0$ . Dichos espacio-tiempos se caracterizan en general por las ecuaciones (3,1a), (3,1b) y (3,1d), vistas en el capítulo 3 (Sussman, 2002) que son las siguientes

$$\omega_{ab} = 0, \quad (3,1a)$$

$$\sigma_{ab} = 0, \quad (3,1b)$$

$$\dot{u}_a \neq 0 \quad (3,1c)$$

y

$$\Theta \neq 0. \quad (3,1d)$$

Vamos a partir del caso general (fluido perfecto con simetría esférica) con  $\sigma_{ab} \neq 0$  para después imponer la condición  $\sigma_{ab} = 0$ . Para toda solución de un fluido perfecto con simetría esférica usamos la métrica (3,2) en coordenadas comóviles

$$ds^2 = -N(r,t)^2 dt^2 + X(r,t)^2 dr^2 + Y^2(r,t) d\Omega^2 \quad (5,1)$$

con

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

y definimos

$$e^\lambda = X, \quad e^\nu = N.$$

Las ecuaciones de campo de Einstein están dadas como

$$\kappa\rho = \frac{1}{Y^2} - \frac{2}{Y}e^{-2\lambda}\left(Y'' - Y'\lambda' + \frac{Y'^2}{2Y}\right) + \frac{2}{Y}e^{-2\nu}\left(\dot{Y}\lambda + \frac{\dot{Y}^2}{2Y}\right), \quad (5,2a)$$

$$\kappa p = -\frac{1}{Y^2} + \frac{2}{Y}e^{-2\lambda}\left(Y'\nu' + \frac{Y'^2}{2Y}\right) - \frac{2}{Y}e^{-2\nu}\left(\ddot{Y} - \dot{Y}\dot{\nu} + \frac{\dot{Y}^2}{2Y}\right), \quad (5,2b)$$

$$\kappa p Y = e^{-2\lambda}[(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda')Y + Y'' + Y'\nu' - Y'\lambda'] - e^{-2\nu}[(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\nu})Y + \ddot{Y} + \dot{Y}\dot{\lambda} - \dot{Y}\dot{\nu}], \quad (5,2c)$$

$$0 = \dot{Y}' - \dot{Y}\nu' - Y'\dot{\lambda}. \quad (5,2d)$$

Donde  $\kappa = 8\pi G$  y denotamos a  $Y'$  como  $\partial Y/\partial r$  y a  $\dot{Y}$  como  $\partial Y/\partial t$ . A partir de la condición  $T_{;b}^{ab} = 0$  obtenemos las dos relaciones siguientes

$$p' = -(\rho + p)\nu' \quad (5,3a)$$

y

$$\dot{\rho} = -(\rho + P)\left(\dot{\lambda} + \frac{2\dot{Y}}{Y}\right). \quad (5,3b)$$

---

## 5.2 Desarrollo de las soluciones de las ecuaciones de campo no estáticas con cero deformación.

De (4,1b) y (4,1d) (Sussman, 2002) que son respectivamente  $\sigma_{ab} = 0$  y  $\Theta \neq 0$  y de la ecuación (5,2d) (con  $Y = rB(r, t)$ ) tenemos que

$$\dot{\lambda}' = \dot{\lambda}\nu',$$

e integrando con respecto a  $r$ , obtenemos

$$\nu = \ln \dot{\lambda} - f(t). \quad (5,4)$$

Entonces la métrica (5,1) toma la forma

$$ds^2 = B(r, t)^2 (r^2 d\Omega^2 + dr^2) - \dot{\lambda}^2 e^{-2f(t)} dt^2. \quad (5,5)$$

La expansión está definida por  $\Theta = 3e^{f(t)}$ , entonces las ecuaciones de campo quedan dadas por

$$\kappa\rho = \frac{1}{3}\Theta^2 - e^{-2\lambda} \left[ 2\lambda'' + \lambda'^2 + \frac{4\lambda'}{r} \right], \quad (5,6a)$$

$$\kappa p \dot{\lambda} = e^{-3\lambda} \partial_t \left[ e^\lambda \left( \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r} \right) - e^{3\lambda+2f} \right] \quad (5,6b)$$

y

$$\kappa p \dot{\lambda} = e^{-3\lambda} \partial_t \left[ e^\lambda \left( \lambda'' + \frac{\dot{\lambda}'}{r} \right) - e^{3\lambda+2f} \right]. \quad (5,6c)$$

De las ecuaciones (5,6b) y (5,6c) se determina la condición de isotropía de presiones, es decir, tenemos que

$$G_r^r = G_\theta^\theta = \kappa p$$

con  $\kappa = 8\pi/3$  (consideremos  $G = 1$ ), entonces

$$G_r^r - G_\theta^\theta = 0$$

de modo que obtenemos la siguiente ecuación

$$e^\lambda \left( \lambda'' - \lambda'^2 - \frac{\lambda'}{r} \right) = -\tilde{J}(r), \quad (5,7)$$

donde,  $\tilde{J}(r)$  es una función arbitraria de integración. Para integrar (5.7) utilizamos el siguiente cambio de variables

$$L = e^{-\lambda}, \quad x = r^2, \quad J(x) = 4r^2 \tilde{J}.$$

De modo que

$$L_{,xx} = L^2 J(x), \quad (5,8)$$

donde  $L^2$  es proporcional al invariante  $\Psi_2$  del tensor de Weyl  $C_{abcd}$ .

### 5.3 Métrica de los Universos de Stephani.

Como se mencionó anteriormente los Universos de Stephani son aquellos espacio-tiempos de simetría esférica cuya fuente es el fluido perfecto y que son conformalmente planos, es decir, con  $C_{abcd} = 0$ , entonces existen coordenadas  $x_a$  tales que la métrica se expresa como  $ds^2 = \Phi^2(x_a)ds^2$  de un espacio-tiempo de Minkowski, ésta condición es la que describe a los universos de Stephani (Journal of Mathematical Physics Vol. 28, 1987 Roberto A. Sussman). El hecho de que  $C_{abcd} = 0$  implica que  $\psi_2 = 0$  y por lo tanto tenemos que  $J(x) = 0$ , entonces (5,8) se transforma en

$$L_{,xx} = 0, \quad (5,9)$$

la cual es la condición que define a los Universos de Stephani con simetría esférica.

Basandonos en el libro "Exact solutions of Einstein's field equations" de Kramer *et al*, tenemos que la solución de la ecuación (5,9) es

$$e^{-\lambda} = L = \alpha(t)\frac{r^2}{4} + \beta(t), \quad (5,10)$$

donde  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  son funciones arbitrarias. Por lo tanto podemos escribir el coeficiente métrico  $g_{rr}$  como

$$X = e^\lambda = \frac{1}{\alpha(t)r^2/4 + \beta(t)} = \frac{\beta^{-1}(t)}{1 + \alpha(t)/\beta(t)r^2/4} = \frac{R(t)}{1 + k(t)r^2/4}, \quad (5,11)$$

donde  $R(t)$  y  $k(t)$  han sido definidos como

$$R(t) = \beta^{-1}(t) \quad y \quad k(t) = \alpha(t)\beta^{-1}(t),$$

lo cual facilita la comparación con la métrica FLRW. Tomado en cuenta que  $u^a = [-g_{tt}]^{-1/2} \delta_t^a$  y la condición  $U = \sqrt{-g_{tt}} = (L_{,t}/L)/(\Theta/3)$  dada por (2,10) para fluidos sin deformación en general, la métrica de los Universos de Stephani está dada por

$$ds^2 = -U dt^2 + \frac{R^2(t)}{(1 + r^2 k(t)/4)^2} [r^2 d\Omega^2 + dr^2], \quad (5,12)$$

donde

$$U = -\frac{\dot{R}/R}{\Theta/3} \frac{1 + r^2(k - R\dot{k}/\dot{R})/4}{1 + k(t)r^2/4}. \quad (5,13)$$

Como  $\Theta = \Theta(t)$  escogemos la coordenada  $t$  de modo que

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\Theta}{3}$$

y por lo tanto tenemos que  $U$  en (5,12) queda dado por

$$U = -\frac{1 + r^2(k - R\dot{k}/\dot{R})/4}{1 + k(t)r^2/4}. \quad (5,14)$$

Nótese que si  $k(t) = k_0$  donde  $k_0$  es constante; entonces  $U = 1$  y la métrica de los Universos de Stephani se reduce a

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R^2(t)}{(1 + k_0 r^2/4)^2} [dr^2 + r^2 d\Omega^2], \quad (5,15)$$

la cual es la métrica FLRW y nos permite identificar  $k_0 = 0, \pm 1$ .

Consideremos la métrica de los Universos de Stephani dada por (5,12)

$$ds^2 = -Udt^2 + \frac{R^2(t)}{(1 + r^2 k(t)/4)^2} [r^2 d\Omega^2 + dr^2].$$

Es conveniente transformar la coordenada radial  $r$  como se hizo en el capítulo 3 mediante

$$\bar{r} = \int \frac{dr}{1 + k_0 r^2/4}, \quad (5,16)$$

con ésta transformación, la métrica (5,12) con  $U$  dada por la ecuación (5,13) puede ser expresada como

$$ds^2 = -U^2 dt^2 + L^2 [dr^2 + f^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (5,17a)$$

donde

$$U = \frac{1 + (k - R\dot{k}/\dot{R})F^2}{1 + kF^2}, \quad (5,17b)$$

con

$$L = \frac{R}{1 + kF^2}. \quad (5,17c)$$

Las funciones  $F(r)$  y  $f(r)$  son determinadas por tres combinaciones posibles

$$f = r, \quad F = \frac{r}{2}, \quad k_0 = 0, \quad (5,18a)$$

$$f = \sin r, \quad F = \sin r/2, \quad k_0 = 1, \quad (5,18b)$$

$$f = \sinh r, \quad F = \sinh r/2, \quad k_0 = -1. \quad (5,18c)$$

El tensor de materia-energía asociado con las ecuaciones (5,17) es un fluido perfecto y está dado como

$$T^{ab} = \rho u^a u^b + p h^{ab}, \quad (5,19)$$

$$u^a = \frac{1}{U} \delta_t^a$$

donde  $h^{ab} = u^a u^b + g^{ab}$ ,  $\rho$  y  $p$  son la densidad de energía y la presión.

Las Líneas de Universo de Observadores Fundamentales de los Universos de Stephani evolucionan libres de deformación, pero con la 4-aceleración:  $\dot{u}^a \equiv u_{a;b} u^b$  no nula. La forma explícita para la 4-aceleración dada por (3,3b) es

$$\dot{u}_a = \frac{U_{,r}}{U} \delta_a^r = - \frac{R\dot{k}/\dot{R}f}{2[1 + kF^2][1 + (k - R\dot{k}/\dot{R})F^2]} \delta_a^r. \quad (5,20)$$

El fluido perfecto satisface la ecuación de balance de energía-momento  $T^{ab}{}_{;b} = 0$  y la ecuación de conservación de partículas  $(nu^a)_{;a} = 0$ . La ecuación de balance de la entropía se expresa como

$$(nu^a)_{;a} = \dot{n} + n\Theta = 0, \quad (5,21)$$

$$(nsu^a)_{;a} = (\dot{n} + n\Theta)s + n\dot{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{s} = 0, \quad (5,22)$$

---

donde  $n$  y  $s$  son la densidad y la entropía por partícula,  $\dot{n} = u^a n_{,a} = u^t n_{,t}$  y  $\Theta$ ,  $\dot{u}_a$  son determinadas por la condición  $\Theta/3 = \dot{R}/R$  y (5,20). Las variables de estado deben satisfacer la ecuación de equilibrio de Gibbs dada como

$$Tds = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right), \quad (5,23)$$

donde  $T$  es la temperatura absoluta.

Relacionando las ecuaciones de campo  $G_t^t = \kappa T^t$  con las ecuaciones (5,17) y (5,19) obtenemos

$$\kappa\rho = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2}, \quad (5,24)$$

dicha ecuación es la ecuación de Friedman para FLRW si  $k_0 = 0, \pm 1$  (véase las ecuaciones (5,18)).

Mientras que la forma de  $p$  se sigue de la ecuación de energía de balance  $\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta = 0$  expresada como

$$p = -\rho - \frac{R}{3} \frac{\rho_{,R}}{U} = -\rho - \frac{R}{3} \rho_{,R} \left[ \frac{1 + kF^2}{1 + (k - R\dot{k}/\dot{R})F^2} \right]. \quad (5,25)$$

La densidad es determinada integrando (5,21) y está dada como

$$n = \frac{N(r)}{R^3} [1 + kF^2]^3, \quad (5,26)$$

donde  $N$  es la distribución de conservación de partículas.

La entropía de balance depende de  $r$ , es decir,  $s = s(r)$ , de modo que con ayuda de la ecuación de energía de balance y la ley de conservación de las partículas la ecuación de Gibbs (5,23) se expresa como

$$Ts' = (\rho + p) \left(\frac{1}{n}\right)', \quad (5,27)$$

donde la prima denota la derivada con respecto a  $r$  con  $s' \neq 0$  de modo que las Líneas de Universo de Observadores Fundamentales de los Universos de Stephani no admiten una relación barotrópica  $p = p(\rho)$ .

---

## Capítulo 6: Condiciones de embone de los Universos de Stephani con los Universos FLRW

### 6.1 Condiciones de continuidad de las métricas de Stephani y FLRW.

En la figura 1 se muestra un esquema de la interfaz entre los Universos FLRW y de Stephani

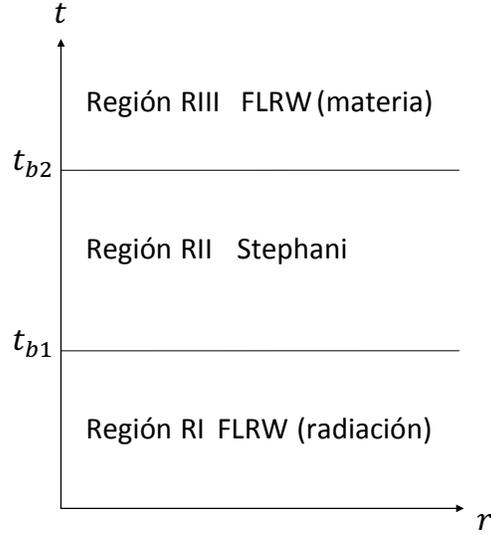


Figura 1: Esquema del embone entre las métricas FLRW y de Stephani.

En la figura 1 tenemos tres regiones RI, RII y RIII. La región RI en el intervalo temporal  $t < t_{b1}$  (donde  $t_{b1}$  es un tiempo arbitrario en el Universo) está descrita por la métrica FLRW de la cual sus componentes son soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein con simetría esférica (cumpliéndose el Principio Copernicano) cuya fuente es la radiación; el tiempo  $t = t_{b1}$  es la interfaz entre las regiones RI FLRW y RII de Stephani, ambas regiones embonan suavemente. La región RII en el intervalo temporal  $t_{b1} < t < t_{b2}$  está descrita por la métrica de Stephani la cual cumple lo siguiente: i) tiene simetría esférica, ii) la fuente es un fluido perfecto y iii) el tensor de Weyl es cero lo que implica que los Universos de Stephani sean conformalmente planos, las componentes de la métrica de Stephani son soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein. El tiempo  $t = t_{b2}$  (donde  $t_{b2}$  es otro tiempo arbitrario en el Universo) es otra interfaz entre la región RII de Stephani y RIII FLRW, ésta última región en el intervalo temporal  $t > t_{b2}$ , ambas regiones embonan suavemente. La fuente en la región RIII FLRW es el polvo.

Imponiendo las condiciones de embonamiento suave (Smooth matching) llamadas condiciones de Darmois (Darmois matching conditions), es decir, la continuidad de la interfaz de embonamiento de:

- i) Primera forma fundamental, la métrica.
- ii) Segunda forma fundamental, la curvatura extrínseca.

De (5,12) que describe la métrica de Stephani las componentes del tensor métrico son

$$g_{tt} = -U^2 = - \left[ \frac{1 + r^2/4(k(t) - R(t)\dot{k}(t)/\dot{R}(t))}{1 + k(t)r^2/4} \right]^2, \quad (6,1a)$$

---


$$g_{rr} = L^2 = \left[ \frac{R(t)}{1 + k(t)r^2/4} \right]^2, \quad (6,1b)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 L^2 = \left[ \frac{rR(t)}{1 + k(t)r^2/4} \right]^2, \quad (6,1c)$$

y

$$g_{\phi\phi} = r^2 L^2 \sin^2 \theta = \left[ \frac{rR(t) \sin \theta}{1 + k(t)r^2/4} \right]^2, \quad (6,1d)$$

teniendo que

$$L = \sqrt{g_{rr}} = \frac{R}{1 + kr^2/4}, \quad \text{con } R = R(t) \quad \text{y} \quad k = k(t), \quad (6,2)$$

y

$$U = \sqrt{g_{tt}} = \frac{1 + (1/4)(k - R\dot{k}/\dot{R})r^2}{1 + kr^2/4}, \quad \text{con } \dot{k}(t) = dk(t)/dt \quad \text{y} \quad \dot{R}(t) = dR/dt. \quad (6,3)$$

Las funciones  $U$  y  $L$  fueron definidas en el capítulo 5 siendo las ecuaciones (5,17b) y (5,17c).

De (5,15) que describe la métrica FLRW las componentes del tensor métrico son

$$g_{tt} = -1, \quad (6,4a)$$

$$g_{rr} = \left[ \frac{R(t)}{1 + k_0 r^2/4} \right]^2, \quad (6,4b)$$

$$g_{\theta\theta} = \left[ \frac{rR(t)}{1 + k_0 r^2/4} \right]^2 \quad (6,4c)$$

y

$$g_{\phi\phi} = \left[ \frac{rR(t) \sin \theta}{1 + k_0 r^2/4} \right]^2 \quad (6,4d)$$

con

$$L_0 = \frac{R}{1 + k_0 r^2/4} \quad (6,5)$$

y

$$U_0 = 1. \quad (6,6)$$

La coordenada temporal de embonamiento entre las regiones RI FLRW y RII de Stephani es

$$t = t_{b1} \quad (6,7a)$$

y

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{y} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Para que podamos asegurar la continuidad de la métrica de los Universos de Stephani con la métrica de los Universos FLRW, debemos exigir y aplicar las condiciones siguientes:

La condición 1 de embonamiento suave es

$$k(t_{b1}) = k_0, \quad (6,7b)$$

---

la condición 2 de embonamiento suave es

$$dk(t_{b1})/dt = 0, \text{ entonces, tenemos que } \dot{k}(t_{b1})/\dot{R}(t_{b1}) = 0, \text{ con } dk(t_{b1})/dt = \dot{k}(t_{b1}). \quad (6,7c)$$

De modo que aplicando las condiciones de embonamiento suave para la Primera forma fundamental, para las funciones  $U$ ,  $U_0$ ,  $L$  y  $L_0$  se debe de cumplir que

$$U(t, r) = U_0(t, r) \quad \text{y} \quad L(t, r) = L_0(t, r).$$

Aplicando las condiciones de embonamiento suave a  $L(t, r)$  tenemos

$$L(t_{b1}, r) = \frac{R(t_{b1})}{1 + k(t_{b1})r^2/4} = \frac{R(t_{b1})}{1 + k_0r^2/4}, \quad (6,8a)$$

ahora, aplicando las condiciones de embonamiento suave a  $L_0(t, r)$  tenemos

$$L_0(t_{b1}, r) = \frac{R(t_{b1})}{1 + k_0r^2/4}. \quad (6,8b)$$

Por lo tanto tenemos

$$L(t_{b1}, r) = L_0(t_{b1}, r).$$

Aplicando las condiciones de embonamiento suave a  $U(t, r)$  tenemos que

$$U(t_{b1}, r) = 1, \quad (6,9a)$$

aplicando las condiciones de embonamiento suave a  $U_0(t_{b1}, r)$  tenemos

$$U_0(t_{b1}, r) = 1. \quad (6,9b)$$

Por lo tanto tenemos que

$$U(t_{b1}, r) = U_0(t_{b1}, r).$$

Éstas condiciones de embonamiento suave también deben cumplirse para las derivadas con respecto a  $t$  y  $r$  de las funciones  $U$ ,  $U_0$ ,  $L$  y  $L_0$ ; entonces derivando  $L$  y  $L_0$  con respecto a  $t$  tenemos

$$\frac{\partial L(t, r)}{\partial t} = \dot{L}(t, r) = \frac{\dot{R}(t)}{1 + k(t)r^2/4} - \frac{R(t)\dot{k}(t)r^2}{4(1 + k(t)r^2/4)^2}, \quad (6,10a)$$

aplicando las condiciones de embonamiento suave tenemos

$$\dot{L}(t_{b1}, r) = \frac{\dot{R}(t_{b1})}{1 + k_0r^2/4}. \quad (6,10b)$$

Ahora derivando a  $L_0(t, r)$  tenemos

$$\frac{\partial L_0(t, r)}{\partial t} = \dot{L}_0(t, r) = \frac{\dot{R}(t)}{1 + k_0r^2/4}, \quad (6,10c)$$

entonces aplicando las condiciones de embonamiento suave tenemos

$$\dot{L}_0(t_{b1}, r) = \frac{\dot{R}(t_{b1})}{1 + k_0r^2/4}, \quad (6,10d)$$

y por lo tanto tenemos que

$$\dot{L}(t_{b1}, r) = \dot{L}_0(t_{b1}, r).$$


---

Ahora derivando a  $L(t, r)$  con respecto a  $r$  tenemos

$$\frac{\partial L(t, r)}{\partial r} = L'(t, r) = -\frac{R(t)k(t)r}{2(1 + k(t)r^2/4)^2}, \quad (6,11a)$$

aplicando las condiciones de embonamiento suave tenemos

$$L'(t_{b1}, r) = -\frac{R(t_{b1})k_0r}{2(1 + k_0r^2/4)^2}. \quad (6,11b)$$

Ahora derivando a  $L_0(t, r)$  con respecto a  $r$  tenemos

$$\frac{\partial L_0(t, r)}{\partial r} = L'_0(t, r) = -\frac{R(t)k_0r}{2(1 + k_0r^2/4)^2}, \quad (6,12a)$$

aplicando las condiciones de embonamiento suave tenemos

$$L'_0(t_{b1}, r) = -\frac{R(t_{b1})k_0r}{2(1 + k_0r^2/4)^2}. \quad (6,12b)$$

Por lo tanto tenemos que

$$L'(t_{b1}, r) = L'_0(t_{b1}, r).$$

Ahora se realiza el cálculo de las derivadas, primero con respecto a  $t$  y posteriormente con respecto a  $r$  de  $U(t, r)$  y  $U_0(t, r)$ . Derivando a  $U(t, r)$  con respecto a  $t$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t, r)}{\partial t} = \dot{U}(t, r) = \\ \frac{(-R(t)\ddot{k}(t)/\dot{R}(t) + R(t)\dot{k}(t)\ddot{R}(t)/\dot{R}^2(t))r^2}{4(1 + k(t)r^2/4)} - \frac{(1 + (k(t) - R(t)\dot{k}(t)/\dot{R}(t))r^2/4)\dot{k}(t)r^2}{4(1 + k(t)r^2/4)^2}, \end{aligned} \quad (6,13a)$$

aplicando las condiciones de embonamiento suave tenemos

$$\dot{U}(t_{b1}, r) = -\frac{R(t_{b1})\ddot{k}(t_{b1})r^2}{4\dot{R}(t_{b1})(1 + k_0r^2/4)}. \quad (6,13b)$$

Ahora derivando a  $U_0(t, r)$  con respecto a  $t$  tenemos

$$\frac{\partial U_0(t, r)}{\partial t} = \dot{U}_0(t, r) = 0. \quad (6,14)$$

Para que tengamos que  $\dot{U}(t_{b1}, r) = \dot{U}_0(t_{b1}, r)$  necesitamos una tercera condición de embonamiento suave, tal condición es

$$\ddot{k}(t) = 0 \quad \text{en } t = t_{b1}. \quad (6,15)$$

A continuación calculamos las derivadas de  $U(t, r)$  y  $U_0(t, r)$  con respecto a  $r$ . Calculando la derivada de  $U(t, r)$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t, r)}{\partial r} = U'(t, r) = \\ \frac{(k(t) - R(t)\dot{k}(t)/\dot{R}(t))r}{2(1 + k(t)r^2/4)} - \frac{(1 + r^2(k(t) - R(t)\dot{k}(t)/\dot{R}(t))/4)k(t)r}{2(1 + k(t)r^2/4)^2}, \end{aligned} \quad (6,16a)$$

nuevamente aplicando las condiciones de embonamiento suave tenemos

$$U'(t_{b1}, r) = 0. \quad (6,16b)$$

---

Derivando  $U_0(t, r)$  con respecto a  $r$  tenemos

$$\frac{\partial U_0(t, r)}{\partial r} = U'_0(t, r) = 0. \quad (6,17)$$

Una vez impuestas las condiciones de embonamiento suave a la Primera forma fundamental, es decir, a las funciones  $L$ ,  $L_0$ ,  $U$  y  $U_0$  y también a sus derivadas con respecto a  $t$  y  $r$  en  $t = t_{b1}$  se exige continuidad a la métrica para los Universos FLRW y de Stephani; pero basta con exigir que

$$k(t_{b1}) = k_0, \quad \dot{k}(t) = 0 \quad \text{en} \quad t = t_{b1} \quad \text{y} \quad \ddot{k}(t) = 0 \quad \text{en} \quad t = t_{b1}.$$

De ésta manera el embonamiento es suave, es decir, el embonamiento es continuo en la métrica para los Universos FLRW y de Stephani.

Ahora aplicando las condiciones de embonamiento suave para la Segunda forma fundamental, es decir, para la curvatura extrínseca que es la interfaz entre los Universos FLRW y de Stephani la cual es una hipersuperficie en  $t = t_{b1}$  que está dada como

$$K_{ab} = u_{a,b} - \Gamma_{ab}^t u_t \quad (6,18)$$

la cual es una derivada covariante.

Tenemos en general que

$$u_a = -U \delta_a^t, \quad (6,19a)$$

en particular

$$u_t = -U = -\sqrt{g_{tt}} \quad (6,19b)$$

y

$$u_r = u_\theta = u_\phi = 0. \quad (6,19c)$$

Entonces tenemos que

$$[K_{t,t}] = [K_{t,r}] = [K_{t,\theta}] = [K_{t,\phi}] = 0 \quad (6,20)$$

con

$$[K_{t,t}] = [K_{t,t}]_{t=t_{b1}}^S = [K_{t,t}]_{t=t_{b1}}^{\text{FLRW}},$$

$$[K_{r,t}]_{t=t_{b1}}^S = -\frac{3k_0 r}{2(1 + k_0 r^2/4)} = [K_{r,t}]_{t=t_{b1}}^{\text{FLRW}}, \quad (6,21a)$$

$$[K_{r,r}]_{t=t_{b1}}^S = \frac{R(t_{b1})\dot{R}(t_{b1})}{(1 + k_0 r^2/4)^2} = [K_{r,r}]_{t=t_{b1}}^{\text{FLRW}}, \quad (6,21b)$$

$$[K_{r,\theta}]_{t=t_{b1}}^S = -\frac{rR^2(t_{b1})}{(1 + k_0 r^2/4)^2} - \frac{r^3 R^2(t_{b1})k_0}{2(1 + k_0 r^2/4)^3} = [K_{r,\theta}]_{t=t_{b1}}^{\text{FLRW}} \quad (6,21c)$$

y

$$[K_{r,\phi}]_{t=t_{b1}}^S = \frac{r^3 k_0 R^2(t_{b1}) \sin^2 \theta}{2(1 + k_0 r^2/4)^2} - \frac{rR^2(t_{b1}) \sin^2 \theta}{(1 + k_0 r^2/4)^2} = [K_{r,\phi}]_{t=t_{b1}}^{\text{FLRW}}. \quad (6,21d)$$

Como las componentes de la curvatura extrínseca son iguales para los Universos FLRW y de Stephani bajo las condiciones de embonamiento suave en  $t = t_{b1}$  implica que la curvatura extrínseca es la misma para

ambos Universos y nos asegura continuidad en las componentes para la métrica de ambos Universos.

En general tenemos que

$$K_{a,b}^S = [K_{a,b}]_{t=t_{b1}}^S = [K_{a,b}]_{t=t_{b1}}^{\text{FLRW}} = K_{a,b}^{\text{FLRW}}. \quad (6,22)$$

La ecuación (5,20) del capítulo 5 es la 4-aceleración que está dada como

$$\dot{u}_a = \frac{U_{,r}}{U} \delta_a^r,$$

es decir, tenemos que

$$\dot{u}_a = \frac{U'(t, r)}{U(t, r)} = - \frac{8rR(t)\dot{k}(t)}{(4\dot{R}(t) + r^2k(t)\dot{R}(t) - r^2R(t)\dot{k}(t))(4 + k(t)r^2)}, \quad (6,23a)$$

aplicando las condiciones de embonamiento suave tenemos

$$\dot{u}_a = \frac{U'(t_{b1}, r)}{U(t_{b1}, r)} = 0. \quad (6,23b)$$

Tenemos la función densidad expresada como

$$\rho(t) = \frac{3}{8\pi} \left[ \frac{\dot{R}^2(t) + k(t)}{R^2(t)} \right]. \quad (6,24a)$$

Aplicando las condiciones de embonamiento suave tenemos

$$\rho(t_{b1}) = \frac{3}{8\pi} \left[ \frac{\dot{R}^2(t_{b1}) + k_0}{R^2(t_{b1})} \right]. \quad (6,24b)$$

Calculando ahora la derivada de  $\rho(t)$  con respecto a  $t$ , es decir,  $\dot{\rho}(t)$  tenemos

$$\dot{\rho}(t) = \frac{3}{8\pi} \left[ \frac{2R(t)\dot{R}(t)\ddot{R}(t) + R(t)\dot{k}(t) - 2\dot{R}^3(t) - 2k(t)\dot{R}(t)}{R^3(t)} \right]. \quad (6,25a)$$

Aplicando la condición 1 de embonamiento suave tenemos

$$\dot{\rho}(t_{b1}) = \frac{3}{8\pi} \left[ \frac{2R(t_{b1})\dot{R}(t_{b1})\ddot{R}(t_{b1}) + R(t_{b1})\dot{k}(t_{b1}) - 2\dot{R}^3(t_{b1}) - 2\dot{R}(t_{b1})k(t_{b1})}{R^3(t_{b1})} \right],$$

entonces tenemos

$$\dot{\rho}(t_{b1}) = \frac{3}{8\pi} \left[ \frac{2R(t_{b1})\dot{R}(t_{b1})\ddot{R}(t_{b1}) + R(t_{b1})\dot{k}(t_{b1}) - 2\dot{R}^3(t_{b1}) - 2\dot{R}(t_{b1})k_0}{R^3(t_{b1})} \right], \quad (6,25b)$$

aplicando la condición 2 de embonamiento suave obtenemos

$$\dot{\rho}(t_{b1}) = \frac{9}{8\pi} \left[ \frac{R(t_{b1})\dot{R}(t_{b1})\ddot{R}(t_{b1}) - \dot{R}^3(t_{b1}) - \dot{R}(t_{b1})k(t_{b1})}{R^3(t_{b1})} \right]. \quad (6,25c)$$

Las figuras 2 y 3 corresponden a las gráficas de  $\rho(t)$  y  $\dot{\rho}(t)$ .

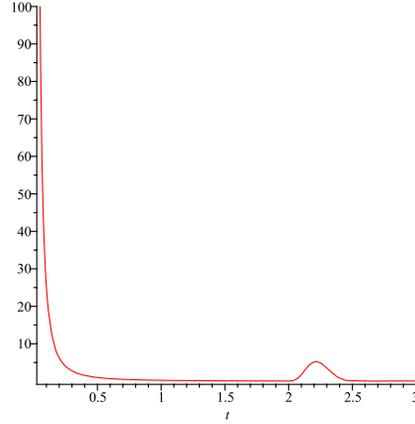


Figura 2: Gráfica de la función  $\rho(t)$

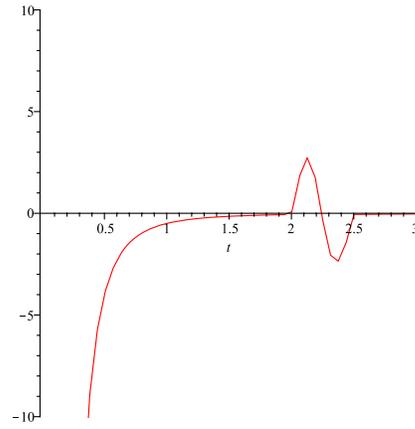


Figura 3: Gráfica de la función  $\dot{\rho}(t)$

En la figura 2 la curva representa la función  $\rho(t)$  de (6,24a) con  $k(t)$  dada por (7,5) del capítulo 7, las regiones RI y RIII son regiones descritas por la métrica FLRW en  $t < 2 = t_{b1}$  para RI y  $t > 2,5 = t_{b2}$  para RIII mientras que la región RII está descrita por la métrica de Stephani en  $2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2}$ , se observa que la curva es continua para las regiones FLRW y de Stephani.

En la figura 3 la función  $\dot{\rho}(t)$  dada por (6,25a) es una curva suave en las regiones FLRW RI y RIII en  $t < 2 = t_{b1}$  y  $t > 2,5 = t_{b2}$ , no así en la región RII de Stephani con  $2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2}$ .

Ahora derivando (6,24a) con respecto a  $R$  tenemos

$$\rho_{,R} = \frac{d\rho}{dR} = \frac{3}{8\pi} \left[ \frac{\dot{R}_{,R}R(t) - 2(\dot{R}(t) + k(t))}{R^3(t)} \right] \quad (6,26)$$

y sustituyendo (6,24a) y (6,26) sobre (5,25) tenemos

$$p(t, r) = -\frac{3}{8\pi} \left[ \frac{(\dot{R}^2(t) + k(t))}{R^2(t)} + \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{R}_{,R}R(t) - 2(\dot{R}(t) + k(t))}{R^2(t)} \right) \right] \left[ \frac{1 + r^2k(t)/4}{1 + r^2/4(k(t) - R(t)\dot{k}(t)/\dot{R}(t))} \right]. \quad (6,27a)$$

---

Aplicando la condición 1 de embonamiento suave en (6,27a) obtenemos (6,27b)

$$p(t_{b1}, r) = -\frac{3}{8\pi} \left[ \frac{(\dot{R}^2(t_{b1}) + k_0)}{R^2(t_{b1})} + \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{R}_{,R}R(t_{b1}) - 2(\dot{R}(t_{b1}) + k_0)}{R^2(t_{b1})} \right) \right] \left[ \frac{1 + r^2 k_0/4}{1 + r^2/4(k_0 - R(t_{b1})\dot{k}(t_{b1})/\dot{R}(t_0))} \right].$$

Aplicando la condición 2 de embonamiento suave tenemos

$$p(t_{b1}, r) = -\frac{3}{8\pi} \left[ \frac{(\dot{R}^2(t_{b1}) + k_0)}{R^2(t_{b1})} + \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{R}_{,R}R(t_{b1}) - 2(\dot{R}(t_{b1}) + k_0)}{R^2(t_{b1})} \right) \right]. \quad (6,27c)$$

De modo que habiendo aplicado las condiciones de embonamiento suave a los parámetros anteriores se asegura la continuidad para la métrica del Universo de Stephani y el Universo FLRW y sus primeras derivadas (en  $t$  y en  $r$ ).

---

## Capítulo 7: Continuidad de las métricas entre los Universos FLRW y de Stephani

### 7.1 Comportamiento de las funciones $k(t)$ , $R(t)$ , $\rho(t)$ y $p(t, r)$ en la continuidad de las métricas entre los Universos FLRW y los Universos de Stephani.

Respecto al parámetro incluido en la métrica de los Universos FLRW  $k(t) = k_0 = \pm 0, 1$ , únicamente vamos a considerar los casos para  $k_0 = 0$  y  $k_0 = 1$ . Consideremos

$$k(t) = k_0 = 0 \quad \text{para } t < t_{b1} \quad \text{y} \quad \text{para } t > t_{b2}. \quad (7,1)$$

Para el caso de los Universos de Stephani  $k(t)$  la tomamos como

$$k(t) = -\alpha_0 \sin^3(h(t)) \quad \text{para } t_{b1} \leq t \leq t_{b2}. \quad (7,2)$$

Si consideramos a las regiones RI y RIII FLRW la función  $k(t)$  toma la forma

$$k(t) = \begin{cases} -\alpha_0 \sin^3(h(t)), & t_{b1} \leq t \leq t_{b2} \\ 0, & t < t_{b1} \quad \text{y} \quad t > t_{b2} \end{cases} \quad (7,3)$$

con

$$h(t) = \frac{\pi(t - t_{b1})}{t_{b2} - t_{b1}} \quad (7,4)$$

con  $t_{b1}$  y  $t_{b2}$  arbitrarios. Entonces (7,2) queda expresada como

$$k(t) = -\alpha_0 \sin^3\left(\frac{\pi(t - t_{b1})}{t_{b2} - t_{b1}}\right). \quad (7,5)$$

La gráfica 4 de la función  $k(t)$  dada por (7,5) es la siguiente

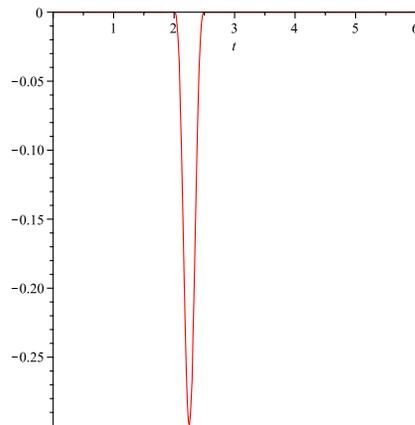


Figura 4: Gráfica de la función  $k(t)$ .

En la figura 4 se observa que en la regiones FLRW  $t < 2 = t_{b1}$  para RI y  $t > 2,5 = t_{b2}$  para RIII la función  $k(t)$  permanece constante, no así en la región RII de Stephani en  $2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2}$ .

Para que se garantice la continuidad en la métrica de los Universos FLRW con la métrica de los Universos de Stephani, las primera y segunda derivadas del parámetro  $k(t)$  en  $t_{b1}$  y  $t_{b2}$  se deben hacer cero.

Derivando  $k(t)$  en  $t_{b1} \leq t \leq t_{b2}$  tenemos

$$\dot{k}(t) = -3\left(\frac{\pi}{t_{b2} - t_{b1}}\right)\alpha_0\sin^2\left(\frac{\pi(t - t_{b1})}{t_{b2} - t_{b1}}\right)\cos\left(\frac{\pi(t - t_{b1})}{t_{b2} - t_{b1}}\right). \quad (7,6a)$$

Evaluada  $\dot{k}(t)$  en  $t_{b1}$  y  $t_{b2}$  tenemos

$$\dot{k}(t_{b1}) = 0 = \dot{k}(t_{b2}). \quad (7,6b)$$

Derivando  $\dot{k}(t)$  en  $t_{b1} \leq t \leq t_{b2}$  obtenemos la expresión (7,6c)

$$\ddot{k}(t) = 3\left(\frac{\pi}{t_{b2} - t_{b1}}\right)^2\alpha_0\sin^3\left(\frac{\pi(t - t_{b1})}{t_{b2} - t_{b1}}\right) - 6\left(\frac{\pi}{t_{b2} - t_{b1}}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi(t - t_{b1})}{t_{b2} - t_{b1}}\right)\sin\left(\frac{\pi(t - t_{b1})}{t_{b2} - t_{b1}}\right).$$

Evaluada  $\ddot{k}(t)$  en  $t_{b1}$  y  $t_{b2}$ , cumple que

$$\ddot{k}(t_{b1}) = 0 = \ddot{k}(t_{b2}). \quad (7,7)$$

Por lo tanto se garantiza la continuidad entre las métricas de los Universos FLRW y de Stephani hasta la segunda derivada temporal (como anteriormente se mencionó).

Ahora para la región RI descrita por la métrica FLRW que corresponde a  $t < t_{b1}$  cuya fuente es la radiación tenemos que de (4,3) la ecuación

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = -\frac{3\dot{R}}{R}. \quad (7,8)$$

Sean  $p = \rho_1/3$  y  $R = R_{b1}$  sustituyendo en (7,8) tenemos

$$\frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1 + 1/3\rho_1} = -\frac{3\dot{R}}{R_{b1}}, \quad (7,9)$$

despejando  $\dot{R}$  encontramos  $R_I$  dada como  $R_I = \alpha_1 t^{1/2}$  con

$$\alpha_1 = \sqrt{2\sqrt{\frac{k\rho_1}{3}}R_{b1}}. \quad (7,10)$$

Ahora sean  $p = 0$ ,  $\rho = \rho_3$  y  $R = R_{b3}$  y sustituyendo en (4,3) y despejando  $\dot{R}$  encontramos la función  $R_{III}$  que está dada como

$$R_{III} = \alpha_3 t^{2/3} \quad (7,11)$$

con

$$\alpha_3 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k\rho_3}{3}}R_{b3}^{3/2} = \text{constante}.$$

La función  $R_I$  corresponde a la región RI FLRW con  $p = 1/3\rho$  en el caso en que la fuente es radiación en  $t < t_{b1}$ . La función  $R_{III}$  corresponde a la región RIII FLRW con  $p = 0$  en el caso en que la fuente es polvo en

$t_{b2} > t$ . Para hacer continuas a las funciones  $R_I$  y  $R_{III}$  se requiere de una función  $R_{II}$  correspondiente a la región RII descrita por la métrica de Stephani en  $t_{b1} < t < t_{b2}$  de modo que  $R_I$ ,  $R_{II}$  y  $R_{III}$  sean funciones continuas. Se propone entonces un polinomio  $Q$  de quinto grado expresado como

$$Q = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5, \quad (7,12)$$

igualando el polinomio (7,12) con la función  $R_I$  obtenemos

$$Q = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 = \alpha_1 t_{b1}^{1/2} \quad (7,13a)$$

con  $t = t_{b1}$ . Ahora igualando (7,12) con (7,11) tenemos

$$Q = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 = \alpha_3 t_{b2}^{2/3} \quad (7,13b)$$

con  $t = t_{b2}$ . Derivando a ambos lados las ecuaciones (7,13a) y (7,13b) obtenemos un sistema de cinco ecuaciones en el cual encontrando los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  y  $a_5$  y sustituyendo en (7,12) obtenemos la función  $R_{II}$  la cual es continua con las funciones  $R_I$  y  $R_{III}$ .

De lo anterior se establece la siguiente regla de correspondencia para  $R(t)$  que considera las dos regiones FLRW y la región intermedia de Stephani, dicha regla de correspondencia es la siguiente

$$R(t) = \begin{cases} \alpha_1 t^{1/2}, & 0 < t < t_{b1} \\ a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5, & t_{b1} < t < t_{b2} \\ \alpha_3 t^{2/3}, & t > t_{b2} \end{cases}$$

Dando valores numéricos a los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \alpha_1$  y  $\alpha_3$  obtenemos la figura 5

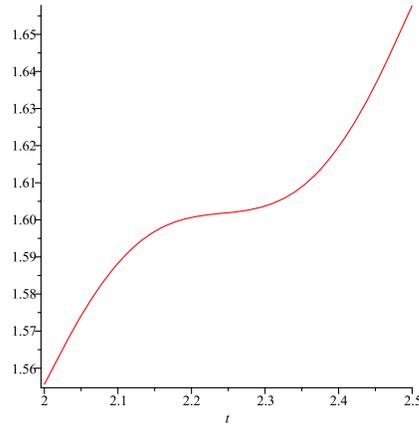


Figura 5: Gráfica de la función  $R(t)$ .

En la figura 5 se observa que la función  $R(t)$  es continua en todo tiempo  $t$  para las regiones FLRW y de Stephani.

Al calcular la derivada  $\dot{R}(t)$  y la derivada segunda  $\ddot{R}(t)$  de la función  $R(t)$  observamos que dichas derivadas son continuas lo que garantiza que  $R(t)$  es continua en la interfaz de los Universos FLRW y de Stephani. Las figuras 6 y 7 representan las gráficas de  $\dot{R}(t)$  y de  $\ddot{R}(t)$  respectivamente y son las siguientes

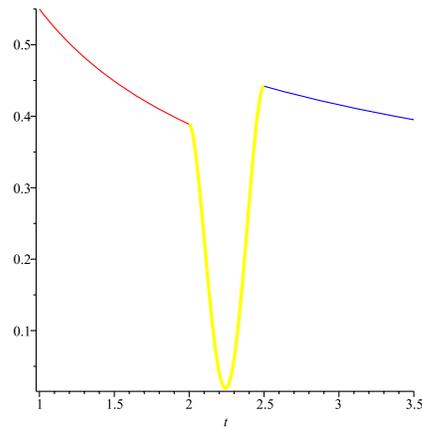


Figura 6: Gráfica de la función  $\dot{R}(t)$ .

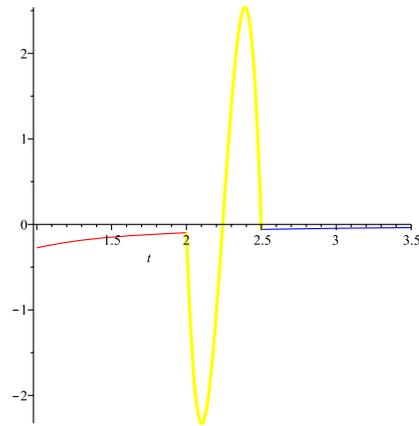


Figura 7: Gráfica de la función  $\ddot{R}(t)$ .

En la figura 6 la función  $\dot{R}(t)$  se comporta de modo suave en las regiones FLRW RI en  $t < 2 = t_{b1}$  (en rojo) y RIII en  $t > 2,5 = t_{b2}$  (en azul) pero no es la curva suave en la región de Stephani RII en  $2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2}$  (en amarillo).

En la figura 7 la función  $\ddot{R}(t)$  se comporta de modo suave en las regiones FLRW RI en  $t < 2 = t_{b1}$  (en rojo) y RIII en  $t > 2,5 = t_{b2}$  (en azul), pero en la región de Stephani RII en  $2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2}$  la curva no es suave (en amarillo).

La ecuación (6,27a) que es la presión es una función de  $t$  y  $r$  a diferencia de  $\rho$  que sólo depende de  $t$ , es decir, a  $p(t, r)$  se fija el valor  $r = 0$  y tenemos

$$p(t) = -\frac{3}{8\pi} \left[ \frac{(\dot{R}^2(t) + k(t))}{R^2(t)} + \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{R}_{,R}R(t) - 2(\dot{R}(t) + k(t))}{R^2(t)} \right) \right]. \quad (7,14)$$

La función  $p$  sólo tiene dependencia en  $t$  obteniendo así la figura 8.

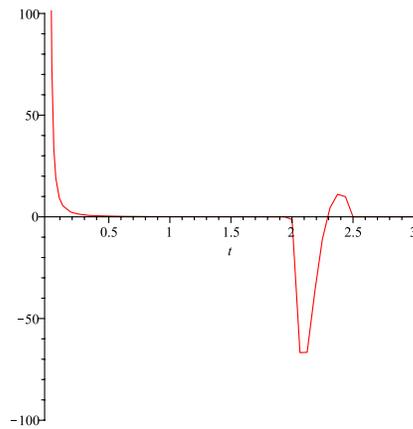


Figura 8: Gráfica de la función  $p(t)$ .

En la figura 8 se observa que para la función  $p(t)$  para  $r = 0$  dada por (7,14) en las regiones FLRW RI en  $t < 2 = t_{b1}$  y RIII en  $t > 2,5 = t_{b2}$  la curva es suave y monótona, en la región RII de Stephani en  $2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2}$  la curva no es monótona. Nótese que  $p \rightarrow \infty$  para cuando  $t \rightarrow 0$  y aparentemente  $p \rightarrow -\infty$  para  $t \approx 2,1$  dentro de la región RII de Stephani.

Si ahora utilizamos tres valores fijos diferentes para  $r$  tenemos la figura 9

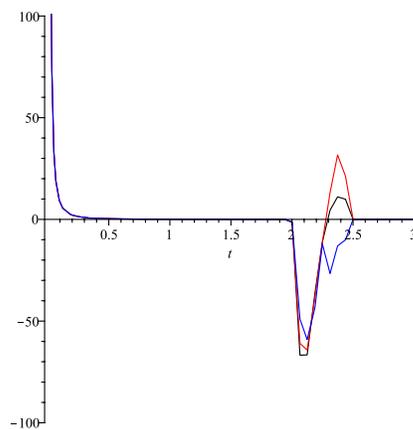


Figura 9: Gráfica de la función  $p$  para tres valores fijos de  $r$ .

En la figura 9 tenemos tres curvas en rojo, negro y azul, las tres curvas pertenecen a la función  $p$  para tres valores diferentes de  $r$ . Se observa que en las regiones FLRW RI en  $t < 2 = t_{b1}$  y RIII en  $t > 2,5 = t_{b2}$  las tres curvas son suaves y aparentemente en  $t \approx 2,1$  en la región RII de Stephani hay una singularidad en la cual  $p$  parece tender a  $-\infty$ .

Ahora Graficando la presión  $p(t, r)$  y dando valores a  $r$  obtenemos la figura 10

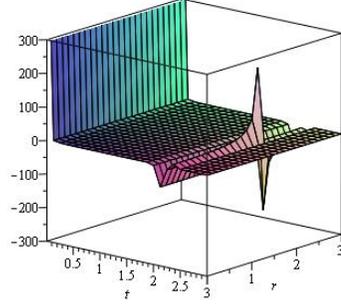


Figura 10: Gráfica de la función  $p(t, r)$ .

En la figura 10 se observa que la función  $p(t, r)$  describe una superficie que en las regiones FLRW RI y RIII es suave mientras que en la región RII de Stephani la superficie presenta singularidades, es decir,  $p \rightarrow \pm\infty$  para ciertos valores de  $t$  y  $r$ .

En las figuras 8, 9 y 10 observamos un comportamiento singular de la presión  $p \rightarrow -\infty$  con la densidad  $\rho$  finita en la región de Stephani. Ésto se debe a que hay un cero en el denominador de (6,27a) para  $p$ , sin embargo, éste cero no afecta a  $\rho$  dada por (6,24a). Para remediar éste problema consideramos el embonamiento con regiones FLRW con curvatura positiva  $k_0 = 1$ .

La región de Stephani debe embonar a éstas regiones por lo que la función  $k(t)$  debe ser positiva y escogemos las funciones  $f$  y  $F$  de (5,18b) dadas por funciones senoidales.

Consideremos la función  $k(t_{b1}) = k_0 = 1$  para  $t < t_{b1}$  y para  $t > t_{b2}$ , con  $k_0 = 1$  habrá un cambio en la topología de las regiones FLRW y por lo tanto en la curvatura extrínseca de la hipersuperficie de la interfaz entre los Universos FLRW y de Stephani.

Entonces para el Universo de Stephani tenemos la función  $k(t)$  pero para distinguirla de (7,5) será expresada como

$$\kappa(t) = \alpha_0 \sin^3(g(t)) \quad (7,15a)$$

con

$$g(t) = \pi \left( 1 + \frac{t - t_{b1}}{t_{b2} - t_{b1}} \right). \quad (7,15b)$$

La figura 11 es la gráfica del parámetro  $\kappa(t)$  que es la siguiente

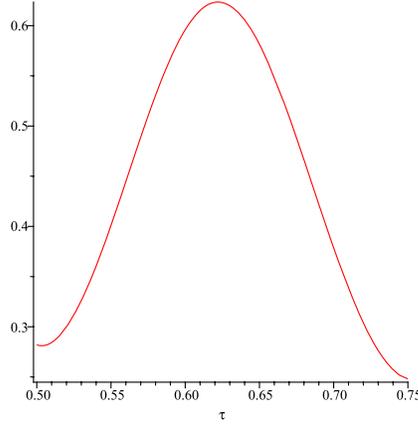


Figura 11: Gráfica de la función  $\kappa(t)$ .

En la figura 11 observamos que el comportamiento de la función  $\kappa(t)$  es continuo tanto en las regiones FLRW como en la región de Stephani .

Para que se garantice la continuidad entre la métrica de los Universos FLRW y de Stephani la primera y segunda derivada del parámetro  $\kappa(t)$  en  $t_{b1}$  y  $t_{b2}$  deben hacerse cero.

La derivada de  $\kappa(t)$  está dada como

$$\dot{\kappa}(t) = 3 \left( \frac{\pi}{t_{b2} - t_{b1}} \right) \alpha_0 \sin^2 \left( \pi \left( 1 + \frac{t - t_{b1}}{t_{b2} - t_{b1}} \right) \right) \cos \left( \pi \left( 1 + \frac{t - t_{b1}}{t_{b2} - t_{b1}} \right) \right), \quad (7,16a)$$

evaluando  $\dot{\kappa}(t)$  en  $t_{b1}$  y  $t_{b2}$  tenemos

$$\dot{\kappa}(t_{b1}) = 0 = \dot{\kappa}(t_{b2}). \quad (7,16b)$$

La segunda derivada de  $\kappa(t)$  está dada por (7,16c)

$$\ddot{\kappa}(t) = 6 \left( \frac{\pi}{t_{b2} - t_{b1}} \right)^2 \alpha_0 \sin \left( \pi \left( 1 + \frac{t - t_{b1}}{t_{b2} - t_{b1}} \right) \right) \left[ \cos^2 \left( \pi \left( 1 + \frac{t - t_{b1}}{t_{b2} - t_{b1}} \right) \right) - 3 \sin^2 \left( \pi \left( 1 + \frac{t - t_{b1}}{t_{b2} - t_{b1}} \right) \right) \right].$$

Evaluando  $\ddot{\kappa}(t)$  en  $t_{b1}$  y  $t_{b2}$  tenemos

$$\ddot{\kappa}(t_{b1}) = 0 = \ddot{\kappa}(t_{b2}) \quad (7,16d)$$

de las expresiones anteriores se garantiza la continuidad de las métricas de los Universos FLRW y de los Universos de Stephani. Para la región RIII que es la región FLRW cuya fuente es el polvo (tomando a  $c = 1$  y a  $G = 1$ ) tenemos  $p = 0$  y  $\rho_3 = \rho_{03}(R_0/R)^3$ .

Considérese a los factores  $\Omega_{01} = 8\pi G\rho_{01}/3c^4 H_0^2 = 8\pi\rho_{01}/3H_0^2$  y  $\Omega_{03} = 8\pi G\rho_{03}/3c^4 H_0^2 = 8\pi\rho_{03}/3H_0^2$  con  $H_0 = [dR/Rcdt]_0 = H(t_0)$  donde  $t_0$  es un tiempo cósmico arbitrario y  $\sigma = 8\pi G$ . Ahora definimos al factor de escala adimensional  $a = R/R_0$  y el tiempo adimensional dado por  $\tau = H_0 c(t - t_0)$  de modo que  $H/H_0 = da/ad\tau$ . Definiendo las ecuaciones de Friedman en función de los parámetros  $\Omega_{01}$  y  $\Omega_{03}$  tenemos la siguiente ecuación para las regiones FLRW RI y RIII

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = \sqrt{\frac{\Omega_{01}}{(a(\tau))^2} + 1 - \Omega_{01}} \quad (7,17a)$$

y

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} = \sqrt{\frac{\Omega_{03}}{(a(\tau))^2} + 1 - \Omega_{03}}. \quad (7,17b)$$

Las primera y segunda derivadas de  $a(\tau)$  que son las ecuaciones de Friedman son continuas en  $\tau_{b1}$  y  $\tau_{b2}$ , entonces por lo anterior definimos un polinomio de quinto orden dado como

$$A = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3\tau^3 + A_4\tau^4 + A_5\tau^5, \quad (7,18)$$

derivando e igualando (7,18) con las ecuaciones (7,17a) y (7,17b) y sus respectivas derivadas obtenemos un sistema de ecuaciones en el cual encontramos los coeficientes  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  Y  $A_5$  y sustituyendo en (7,18) se obtiene una nueva función que es continua con (7,17a) y (7,17b).

De lo anterior se establece la siguiente regla de correspondencia

$$a(\tau)H(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Omega_{01}}{(a(\tau))^2} + 1 - \Omega_{01}}, & 0 < \tau < \tau_{b1} \\ A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3\tau^3 + A_4\tau^4 + A_5\tau^5, & \tau_{b1} < \tau < \tau_{b2} \\ \sqrt{\frac{\Omega_{03}}{(a(\tau))^2} + 1 - \Omega_{03}}, & \tau > \tau_{b2} \end{cases}$$

Dando valores a los coeficientes  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  y  $A_5$  y a  $\Omega_{01}$  y  $\Omega_{03}$  obtenemos la figura 12.

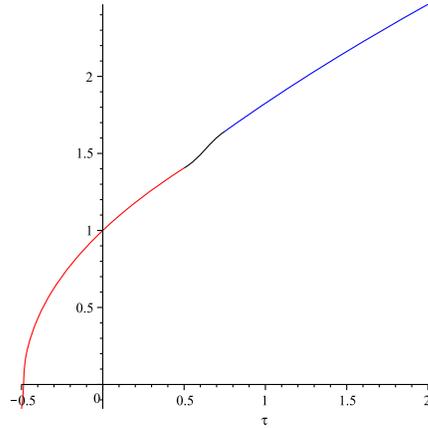


Figura 12: Gráfica de la función  $a(\tau)H(\tau)$ .

En la figura 12 se observa que el comportamiento de la función  $a(\tau)H(\tau)$  en las regiones RI y RIII FLRW (en rojo y en azul) así como en la región RII de Stephani (en negro) la curva es continua.

Derivando ahora la función  $a(\tau)H(\tau)$  con respecto a  $\tau$  obtenemos la figura 13

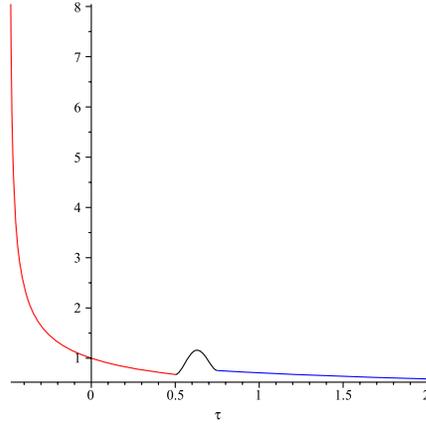


Figura 13: Gráfica de la función  $d[a(\tau)H(\tau)]/d\tau$ .

En la figura 13 se observa que el comportamiento de la función  $d[a(\tau)H(\tau)]/d\tau$  en las regiones FLRW (en rojo y en azul) así como en la región de Stephani (en negro) la curva es continua.

Las densidades en las regiones FLRW RI y RIII están expresadas como

$$\rho_1 = \frac{\Omega_0}{a^2} \quad (7,19a)$$

y

$$\rho_3 = \frac{\Omega_0}{a^3} \quad (7,19b)$$

Y sean las expresiones

$$Q_1 = 1 + \left(k - \frac{k_\tau a}{a_\tau}\right) F^2 \quad (7,20a)$$

y

$$Q_2 = 1 + kF^2 \quad (7,20b)$$

con

$$F = \sin\left(\frac{r}{2}\right).$$

El cociente  $Q_2/Q_1$  está definido en el rango  $\tau_{b1} \leq \tau \leq \tau_{b2}$  con  $0 \leq r \leq \pi$  no diverge lo cual se puede apreciar en la figura 14

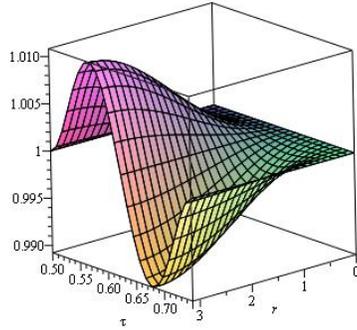


Figura 14: Gráfica de la función cociente  $Q_2/Q_1$ .

En la figura 14 se observa que la función cociente  $Q_2/Q_1$  con  $Q_1$  y  $Q_2$  dadas por las ecuaciones (7,20a) y (7,20b) describe una superficie continua entre las regiones FLRW y de Stephani y por lo tanto resolvemos el problema de que  $p$  diverge con  $\rho$  finita.

La ecuación de la presión está dada como

$$\frac{8\pi G}{c^4} p = -8\pi G \rho - \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_\tau}{H} \frac{Q_2}{Q_1} \quad (7,21)$$

la cual despliega la gráfica en la figura 15

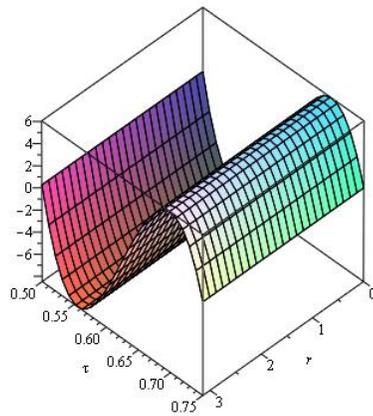


Figura 15: Gráfica de la función  $p(t, r)$ .

---

En la figura 15 tenemos que la función  $p(t, r)$  describe una superficie continua entre las regiones FLRW y de Stephani, nótese que  $p$  es finita en toda la región de Stephani.

La figura 16 es la misma que la anterior excepto que ahora la presión  $p$  toma valores fijos para  $r$ .

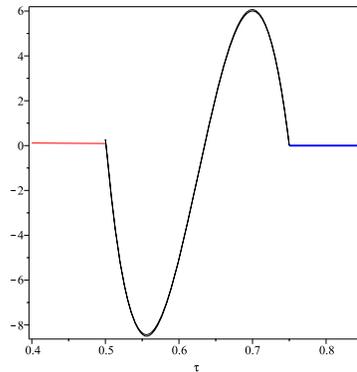


Figura 16: Gráfica de la función  $p$  con valores fijos de  $r$ .

En la figura 16 la función  $p$  en las regiones FLRW RI y RIII como en la región RII de Stephani es continua y finita pero carece de una interpretación física satisfactoria ya que es negativa y cambia de signo.

---

## 7.2 Conclusiones.

Las conclusiones que se obtienen de éste trabajo son las siguientes:

1. Las condiciones de embone suave de Darmois siempre se pueden satisfacer en una interfaz entre un Universo de FLRW y el Universo de Stephani dada por una hiper-superficie espacialoide de la forma  $t = t_{b1} = \text{const.}$  que es ortogonal a la 4-velocidad. Esto implica que la métrica y la curvatura extrínseca de esta interfaz coincide para ambos Universos. Estas condiciones también pueden ser satisfechas en una segunda interfaz de la forma  $t = t_{b2} > t_{b1}$  para un embone suave con un segundo modelo FLRW, de modo que la zona intermedia  $t_{b1} < t < t_{b2}$  corresponde a un Universo de Stephani embonado suavemente a los dos modelos FLRW. Esto permite describir la transición de un modelo FLRW a otro a través del Universo de Stephani.
2. Si además de las condiciones de Darmois, exigimos la continuidad de la primera y segunda derivadas temporales de la métrica en la interfaces  $t = t_{b1}$  y  $t = t_{b2}$ , entonces las variables geométricas y físicas  $\dot{u}$ ,  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$  y  $p$  también son continuas para ambos Universos.
3. Para hiper-superficies  $t = t_{b1} = \text{const}$  con curvatura espacial cero o negativa ( $k_0 = 0, -1$ ) el embone es también suave, pero la región de Stephani muestra una singularidad que es físicamente indeseable: la presión  $p$  diverge cuando  $U = \sqrt{-g_{tt}} = 0$  a densidad finita. Ésta singularidad solo puede ser evitada en el caso en que ambas hiper-superficies que sirven de interfaces en el embone tengan curvatura espacial positiva ( $k_0 = 1$ ).
4. Incluso cuando se puede evitar la singularidad anteriormente mencionada, el comportamiento de la presión  $p$  como función de la densidad  $\rho$  en la zona intermedia de Stephani no es físicamente realista: la presión no diverge pero se torna negativa y de grán magnitud (véase figuras 15 y 16). Por lo tanto, el Universo de Stephani no ofrece una transición físicamente adecuada entre un Universo FLRW de radiación y uno de polvo.

Los resultados aquí obtenidos podrían ser diferentes para el embone de modelos FLRW con otras ecuaciones de estado o si se permite discontinuidad en las derivadas de la métrica en la dirección temporal (ortogonal a la interfaz del embone), lo cual no viola las condiciones de Darmois. Esta investigación será realizada posteriormente.

---

## Referencias bibliográficas

- [1] A. Krasinski. *Inhomogeneous Cosmological Models*. Cambridge University Press. 1997.
- [2] Bernard F. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press. 1985.
- [3] Kramer. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Springer Verlag, second edition. 2003.
- [4] Roberto A. Sussman. *Theoretical aspects in the study of inhomogeneous cosmological models*. Revista Mexicana de Física 2, 26-38.
- [5] Roberto A. Sussman. *On spherically symmetric-shear-free perfect fluid configurations (charged and neutral)*. Journal of Mathematical Physics, 28. 1987.

---

## Apéndice A: Descomposición general de tensores.

En éste apéndice se hace el tratamiento de la descomposición generalizada de un tensor  $T^{ab}$  el cual tiene expresados como suma a tensores paralelos y ortogonales, entre éstos la 4-velocidad en donde los tensores paralelos se componen de la suma de la parte simétrica y antisimétrica, de éste modo el tensor  $T^{ab}$  queda expresado en su forma mas general.

Para un tensor de  $2 \times 2$   $T_{ab}$  se define la parte simétrica que está dado como

$$T_{\langle ab \rangle} = \frac{1}{2}[T_{ab} + T_{ba}], \quad (\text{A,1a})$$

la parte antisimétrica está dada como

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2}[T_{ab} - T_{ba}] \quad (\text{A,1b})$$

y la traza está dada como

$$g_{ab}T^{ab} = T_a^a. \quad (\text{A,1c})$$

Para las expresiones anteriores se tiene que si  $T_{ab} = T_{\langle ab \rangle}$  es simétrico, si  $T_{ab} = T_{[ab]}$  es antisimétrico y si  $T_a^a = 0$  no tiene traza. El tensor  $T_{ab}$  puede ser expresado como  $T^{ab} = T^{(ab)} + T^{[ab]}$ .

El tensor  $T_{ab} = T_{\langle ab \rangle}$  puede obtenerse mediante una simetrización y removiendo la traza, es decir,

$$T^{cd} \rightarrow h_c^a h_d^b T^{cd}$$

y

$$h_c^{(a} h_d^{b)} T^{cd} - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} T^{cd}.$$

Entonces el tensor  $T_{ab}$  puede ser expresado como

$$T^{\langle ab \rangle} = \left[ h_c^{(a} h_d^{b)} - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} \right] T^{cd}. \quad (\text{A,2})$$

Los vectores  $V^{(a)}$  pueden expresarse como  $V^{(a)} = h_b^a V^b$ .

El tensor  $T^{ab}$  se puede descomponer en la suma de tensores paralelos y tensores ortogonales a  $u^a$  y quedan expresados como

$$T^{ab} = \rho u^a u^b + z^a u^b + u^a q^b + P^{ab}, \quad (\text{A,3a})$$

donde la parte paralela está dada como

$$\rho \equiv T_{cd} u^c u^d, \quad z^a u_a = q^a u_a = 0 \quad (\text{A,3b})$$

y la parte ortogonal está dada como

$$P^{ab} = h_c^a h_d^b T^{cd}, \quad P^{ab} u_a u_b = 0. \quad (\text{A,3c})$$

La parte ortogonal de éste tensor puede ser expresada como la suma de las partes simétrica y antisimétrica, es decir,

$$P^{ab} = P^{(ab)} + P^{[ab]}, \quad (\text{A,4})$$


---

---

utilizando las ecuaciones (A,2) y (A,3c) aplicadas sobre  $P^{(ab)}$  obtenemos

$$P^{ab} = P^{[ab]} + P^{(ab)} + \frac{1}{3}P_c^c h^{ab}. \quad (\text{A,5})$$

Si  $T^{ab}$  es simétrico, es decir, que  $T^{[ab]} = 0$  y de (A,3b) se tiene  $z^a = q^a$ , entonces el tensor  $T^{ab}$  queda dado en su forma mas general, es decir,

$$T^{ab} = \rho w^a w^b + P h^{ab} + 2q^{(a} u^{b)} + \Pi^{ab}, \quad (\text{A,6a})$$

donde

$$P \equiv \frac{1}{3}P_a^a, \quad \Pi^{ab} = P^{(ab)}. \quad (\text{A,6b})$$

---

## Apéndice B: Operadores diferenciales.

En éste apéndice se introducen los llamados operadores diferenciales que son la derivada covariante aplicada a escalares, vectores y tensores. La derivada convectiva es la derivada covariante proyectada sobre el vector  $u^a$  y es aplicada a escalares, vectores y tensores, del mismo modo la derivada de las Hipersuperficies de Simultaneidad (ya definida con anterioridad) es la derivada covariante proyectada sobre las Hipersuperficies de Simultaneidad y sobre  $h^{ab}$  y de igual manera se aplica a escalares, vectores y tensores. Éstos operadores dan origen al vector 4-aceleración  $\dot{u}^a$ .

Las derivadas covariantes de un escalar  $\phi$  de un vector  $V^a$  y de un tensor  $T^{ab}$  están dados como

$$\nabla_a \phi = \phi_{;a} = \phi_{,a}, \quad (\text{B,1a})$$

$$\nabla_a V^b = V^b_{;a}, \quad (\text{B,1b})$$

$$\nabla_c T^{ab} = T^{ab}_{;c} \quad (\text{B,1c})$$

y

$$\nabla_c \nabla_d T^{ab} = T^{ab}_{;c;d}. \quad (\text{B,1d})$$

Se adoptará la notación  $\nabla$  en lugar del punto y coma.

La existencia de un campo de 4-velocidad conduce a los siguientes operadores diferenciales:

-Derivada convectiva. Ésta derivada es covariante y es proyectada sobre el vector  $u^a$  y está dada como

$$\dot{\phi} = u^a \nabla_a \phi, \quad (\text{B,2a})$$

$$\dot{V}^a = u^b \nabla_b V^a \quad (\text{B,2b})$$

y

$$\dot{T}^{ab} = u^b \nabla_b T^{ab}. \quad (\text{B,2c})$$

El vector  $\dot{V}^a$  en general no es paralelo a  $u^a$  y por lo tanto  $h_b^a \dot{V}^b \neq 0$ , en particular la 4-aceleración  $\dot{u}^a$  es ortogonal a  $u^a$ , entonces tenemos

$$4\text{-aceleración } \dot{u}^a = u^b \nabla_b u^a \quad (\text{B,3a})$$

y

$$u_a \dot{u}^a = 0 \implies \dot{u}_a = h_a^b \dot{u}_b. \quad (\text{B,3b})$$

-Derivada del sistema en reposo. Ésta es la derivada covariante proyectada sobre las Hipersuperficies de Simultaneidad y está dada como

$$\tilde{\nabla}_a \phi = h_b^a \nabla_b \phi, \quad (\text{B,4a})$$

$$\tilde{\nabla}_a V^b = h_a^c h_b^d \nabla_c V^d, \quad (\text{B,4b})$$

$$\tilde{\nabla}_a T^{bc} = h_a^d h_e^b h_f^c \nabla_d T^{ef}. \quad (\text{B,4c})$$

Las ecuaciones anteriores son objetos sobre los Sistemas de Referencia Instantáneos que se anulan si son contraídos con  $u^a$ .

---

---

-Derivada de "Punto ángulo". La derivada convectiva es aplicada a (A,2), entonces obtenemos

$$u^b \nabla_b T^{(ab)} = \left[ h_c^{(a} h_d^{b)} - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} \right] u^d \nabla_d T^{cd},$$

es decir,

$$\dot{T}^{(ab)} = \left[ h_c^{(a} h_d^{b)} - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} \right] \dot{T}^{(ab)}. \quad (\text{B,5})$$

# Transiciones de fase en modelos cosmológicos

Israel Rios Mora

Facultad de Ciencias UNAM

Fecha de presentacion

# Transición de un universo FLRW dominado por la radiación a uno dominado por la materia mediante una zona de transición descrita por el Universo de Stephani

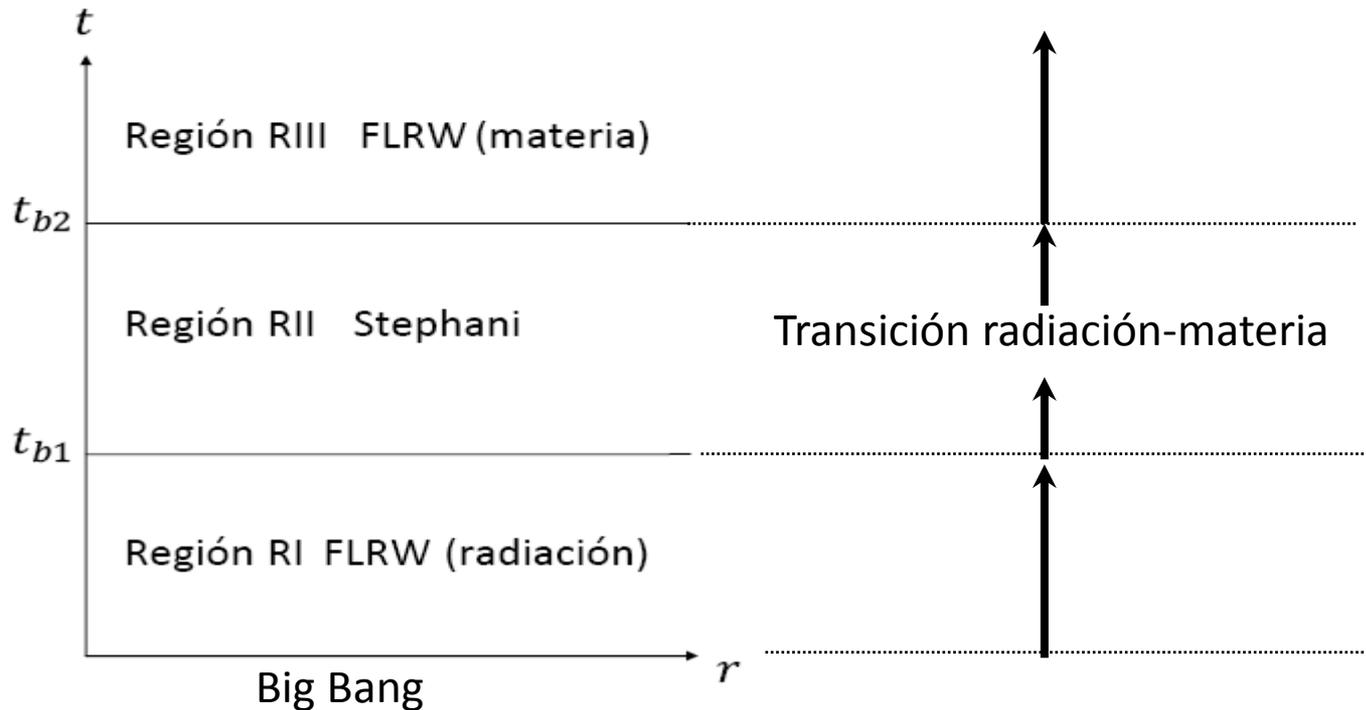


Figura 1. Transición radiación-materia mediante una región Stephani embonada entre dos regiones FLRW.

# Las regiones FLRW deben embonar suavemente con la region Stephani en hiper-superficies de tiempo constante.

- La región RI, en el intervalo temporal  $t < t_{b1}$ , está descrita por la métrica FLRW cuya fuente es la radiación. El tiempo  $t = t_{b1}$  es la interfaz entre las regiones RI FLRW y RII de Stephani, ambas regiones embonan suavemente.

- La región RII en el intervalo temporal  $t_{b1} < t < t_{b2}$  está descrita por la métrica de Stephani la cual cumple con las siguientes propiedades:

- i) Tienen simetría esférica
- ii) La fuente es un fluido perfecto
- iii) El tensor de Weyl es cero, lo que implica que sean conformalmente planos.

- El tiempo  $t = t_{b2}$  es la segunda interfaz que embona suavemente a la región RII, descrita por la métrica de Stephani, con la región RIII descrita por la métrica FLRW en el intervalo temporal  $t > t_{b2}$ . La fuente en la región RIII es el polvo.

## Se deben satisfacer condiciones de embonamiento suave de Darmois.

- Sean I y II dos espacio-tiempos (soluciones de las ecuaciones de Einstein). Sean  $g_{ab}^{(I)}$ ,  $g_{ab}^{(II)}$  sus métricas en un sistema de coordenadas común:  $\{x^a, a = 0, 1, 2, 3\}$

- Las condiciones de Darmois indican que I y II pueden ser embonados suavemente a través de una interfaz

$$x^0 = t = t_k = \text{constante}$$

si la primera y segunda formas fundamentales son continuas en la interfaz:

- 1era forma, la métrica  $[g_{ab}^{(I)}]_{t=t_k} = [g_{ab}^{(II)}]_{t=t_k}$

- 2da forma, la curvatura extrínseca  $[K_{ab}^{(I)}]_{t=t_k} = [K_{ab}^{(II)}]_{t=t_k}$

donde  $K_{ab} = -n_{a;b}$  siendo  $n^a$  un vector unitario normal a la interfaz

# Las condiciones de Darmois para el embonamiento entre espacio-tiempos FLRW y Stephani se reducen a la continuidad de las métricas y sus derivadas temporales.

Métrica FLRW:

$$ds_{(F)}^2 = -dt^2 + R^2(t) [dr^2 + f^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

Métrica Stephani:

$$ds_{(S)}^2 = -U^2(t, r) dt^2 + L^2(t, r) [dr^2 + f^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

donde:

$$L = \frac{R(t)}{1 + \kappa(t) F^2(r)}, \quad U = \frac{1 + [\kappa - R(\dot{\kappa}/\dot{R})] F^2(r)}{1 + \kappa(t) F^2(r)}$$

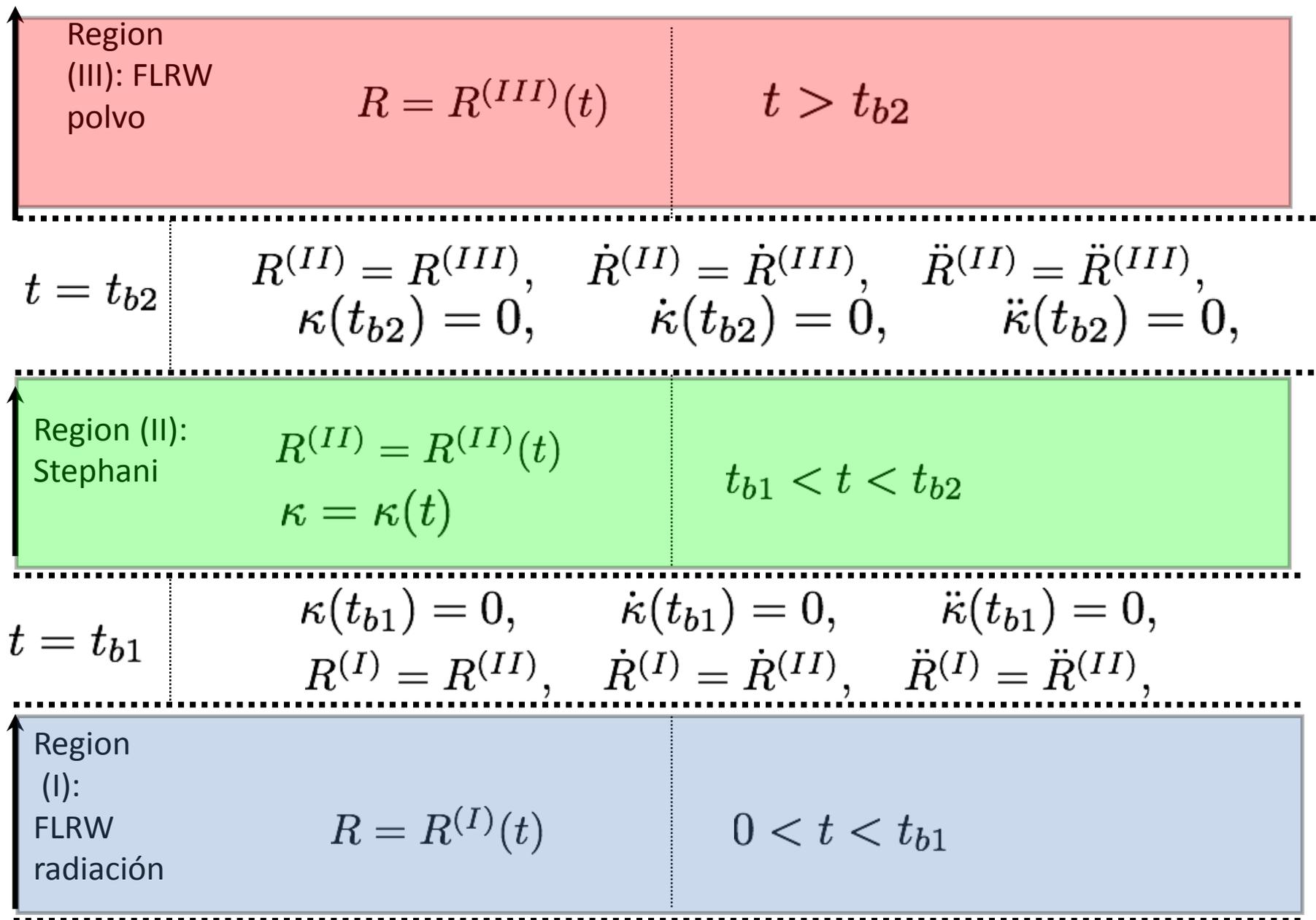
$$f = [r, \sin r, \sinh r], \quad F = [r/2, \sin(r/2), \sinh(r/2)]$$

$$\dot{R} = dR/dt, \quad \dot{\kappa} = d\kappa/dt$$

vemos que las funciones métricas deben cumplir con

$$[R_{(S)} = R_{(F)}]_{t=t_k}, \quad [\dot{R}_{(S)} = \dot{R}_{(F)} \neq 0]_{t=t_k}, \quad [\ddot{R}_{(S)} = \ddot{R}_{(F)} \neq 0]_{t=t_k}$$

$$\kappa(t_k) = 0, \quad \dot{\kappa}(t_k) = 0, \quad \ddot{\kappa}(t_k) = 0,$$



Consideramos el caso espacialmente plano

$$f(r) = r, \quad F(r) = r/2$$

.....  
Universos FLRW:

$$ds_{(F)}^2 = -dt^2 + R^2(t) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

$$\frac{8\pi}{3} \rho = \frac{\dot{R}}{R},$$

$$8\pi p = -\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\ddot{R}}{R} \quad \left[ = \frac{\rho}{3} \text{ region (I)}, \quad = 0, \text{ region (III)} \right]$$

.....  
Universo de Stephani:

$$ds_{(S)}^2 = -U^2(t, r) dt^2 + L^2(t, r) [dr^2 + f^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

$$\text{donde:} \quad L = \frac{R(t)}{1 + \kappa(t)r^2/4}, \quad U = \frac{1 + [\kappa - R(\dot{\kappa}/\dot{R})]r^2/4}{1 + \kappa(t)r^2/4}$$

$$\frac{8\pi}{3} \rho = \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\kappa}{R^2},$$

$$p = -\rho - \frac{R(\dot{\rho}/\dot{R})}{3U} = -\rho - \frac{R(\dot{\rho}/\dot{R})}{3} \left[ \frac{1 + \kappa r^2/4}{1 + (\kappa - R\dot{\kappa}/\dot{R})r^2/4} \right],$$

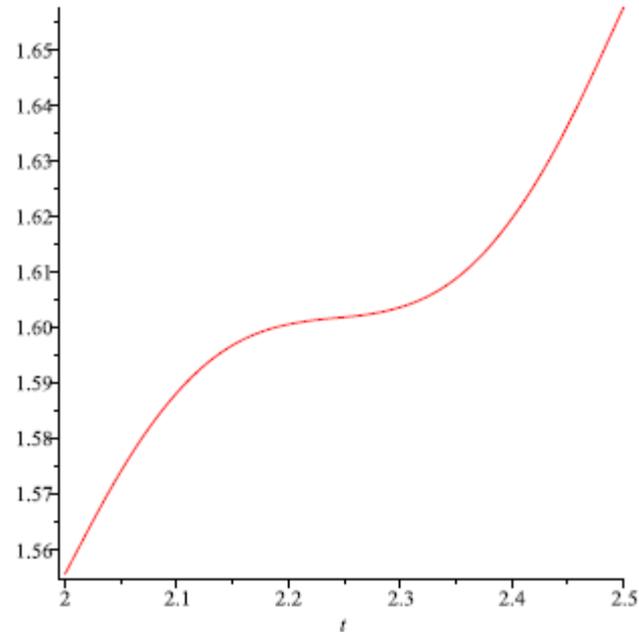
.....

Tenemos el parámetro  $R(t)$  dado por las siguientes expresiones:

$$R(t) = \begin{cases} \alpha_1 t^{1/2}, & 0 < t < t_{b1} \\ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5, & t_{b1} < t < t_{b2} \\ \alpha_3 t^{2/3}, & t_{b2} > t \end{cases}$$

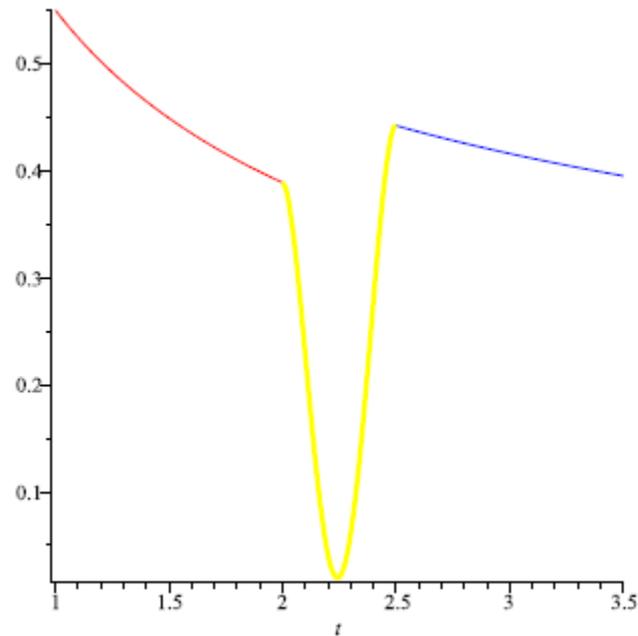
que surgen de las ecuaciones de campo (regiones I y II) y de una función de interpolación en la region II.

figura 5: Gráfica de la función  $R(t)$ .



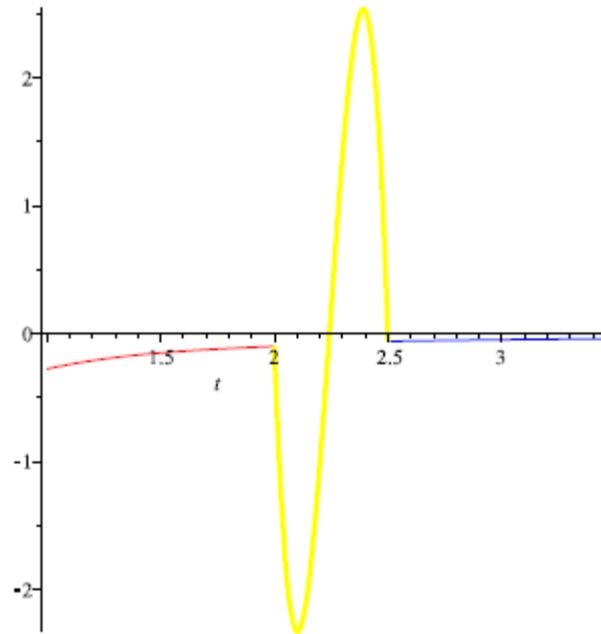
En la figura 5 se observa que la función  $R(t)$  es continua en todo tiempo  $t$  para las regiones FLRW y de Stephani.

Figura 6: gráfica de la función  $\dot{R}(t)$ .



En la figura 6 la función  $\dot{R}(t)$  se comporta de modo suave en las regiones FLRW RI en  $t < 2 = t_{b1}$  (en rojo) y RIII en  $t > 2,5 = t_{b2}$  (en azul), pero la curva no es suave en la región de Stephani RII en  $2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2}$  (en amarillo).

Figura 7: Gráfica de la función  $\ddot{R}(t)$  .



En la figura 7 la función  $\ddot{R}(t)$  se comporta de modo suave en las regiones FLRW RI en  $t < 2 = t_{b1}$  (en rojo) y RIII en  $t > 2,5 = t_{b2}$  (en azul) pero en la región RII de Stephani la curva no es suave en  $2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2}$  (en amarillo).

Con respecto al parámetro incluido en la métrica de los Universos FLRW  $\kappa(t) = \kappa_0 = \pm 0, 1$  consideremos los casos  $\kappa_0 = 0$  y  $\kappa_0 = 1$ .

$$\kappa(t) = \kappa_0 = 0 \quad \text{para } t < t_{b1} \quad \text{y} \quad \text{para } t > t_{b2} .$$

Para los Universos de Stephani el parámetro  $\kappa(t)$  lo tomamos como

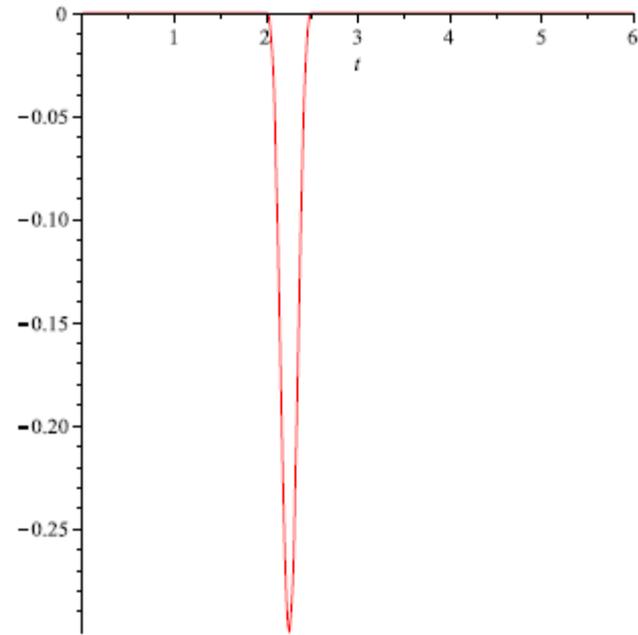
$$\kappa(t) = -\alpha_0 \sin^3(h(t)) \quad \text{para } t_{b1} \leq t \leq t_{b2} .$$

Considerando las regiones RI y RIII FLRW y la función  $\kappa(t)$  toma la forma

$$\kappa(t) = \begin{cases} -\alpha_0 \sin^3(h(t)), & t_{b1} \leq t \leq t_{b2} \\ 0, & t < t_{b1} \quad \text{y} \quad t > t_{b2} \end{cases}$$

Con  $h(t)$  una función arbitraria, de éste modo obtenemos la siguiente gráfica:

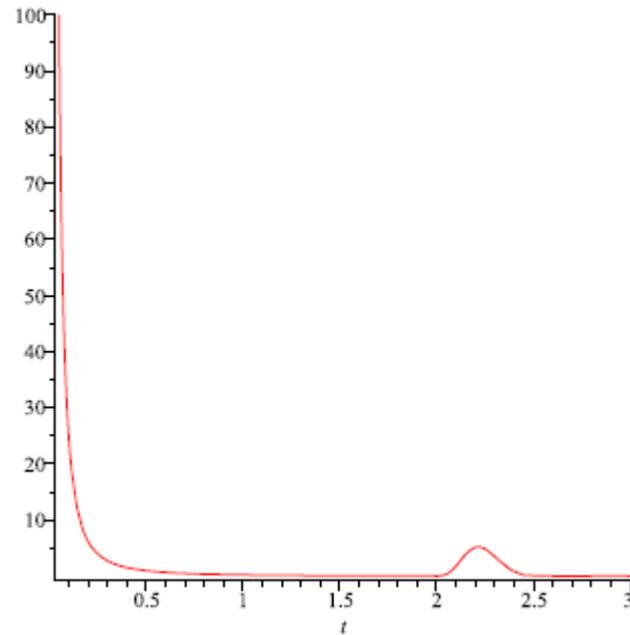
Figura 4: Gráfica del parámetro  $\kappa(t)$ .



En la figura 4 observamos que en las regiones FLRW  $t < 2 = t_{b1}$  para RI y  $t > 2,5 = t_{b2}$  para RIII la función  $\kappa(t)$  permanece constante, no así en la región RII de Stephani en

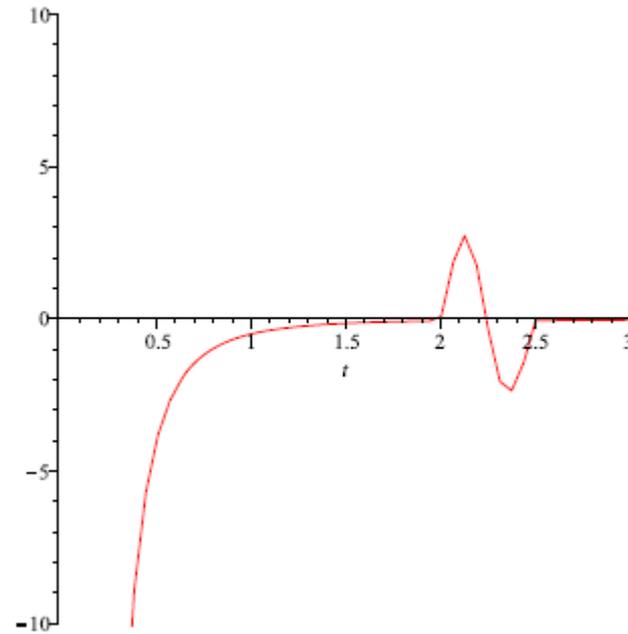
$$2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2} .$$

Figura 2: Gráfica de la densidad  $\rho(t)$



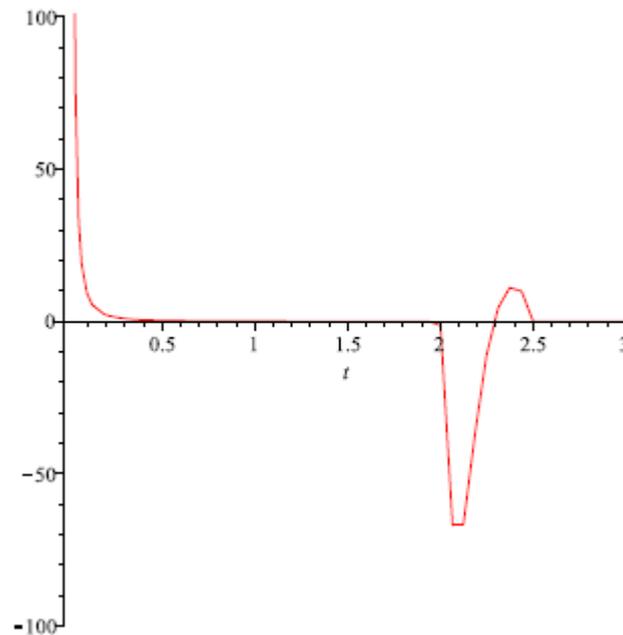
En la figura 2 la curva representa la función  $\rho(t)$ , las regiones RI y RIII son regiones descritas por la métrica FLRW en  $t < 2 = t_{b1}$  para RI y  $t > 2,5 = t_{b2}$  para RIII mientras que la región RII está descrita por la métrica de Stephani en  $2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2}$ , observemos que la curva es suave en las regiones FLRW y de Stephani.

Figura 3: Gráfica de la función  $\dot{\rho}(t)$  .



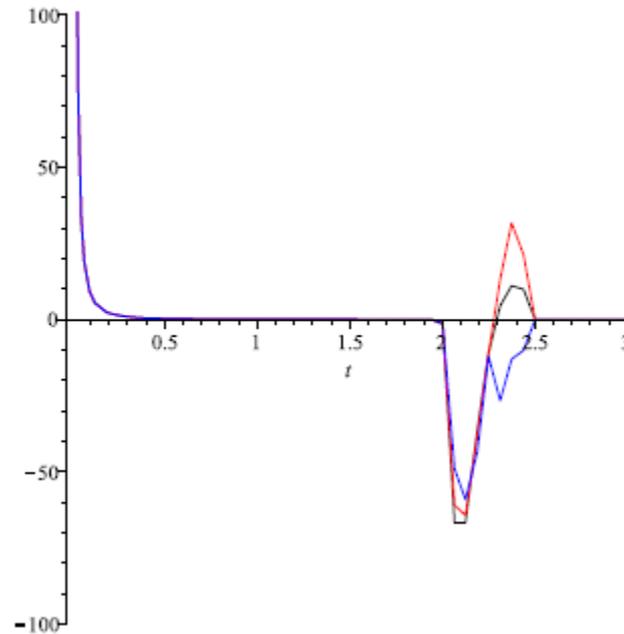
En la figura 3 tenemos una curva suave en las regiones FLRW RI y RIII en  $t < 2 = t_{b1}$  y  $t > 2,5 = t_{b2}$ , no así en la región RII de Stephani en  $2 = t_{b1} < t < 2,5 = t_{b2}$  .

Figura 8: Gráfica de la presión  $p(t)$  .



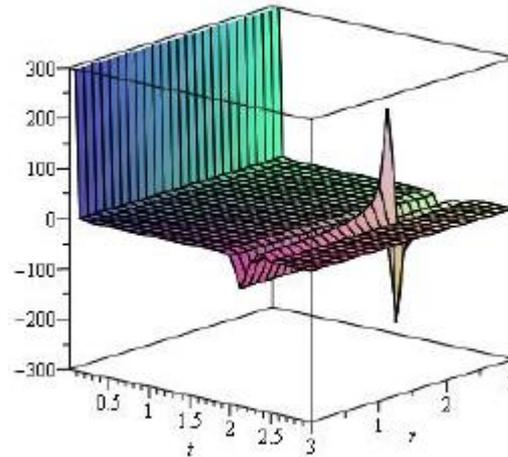
En la figura 8 se observa que para la función  $p(t)$  para  $r = 0$  dada por la ecuación anterior en las regiones FLRW RI en  $t < 2 = t_{b1}$  y RIII en  $t > 2,5 = t_{b2}$  la curva es suave y monótona, en la región RII de Stephani la curva no es monótona. Nótese que  $p \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow 0$  y aparentemente  $p \rightarrow -\infty$  para  $t \approx 2,1$  dentro de la región de Stephani.

Si ahora le damos tres valores fijos para  $r$  obtenemos la figura 9:



En la figura 9 tenemos tres curvas en rojo, negro y azul, las tres curvas pertenecen a la función  $p$  para tres valores diferentes de  $r$ . Entonces observamos que en las regiones FLRW RI en  $t < 2 = t_{b1}$  y RIII en  $t > 2,5 = t_{b2}$  las tres curvas son suaves y aparentemente en  $t \approx 2,1$  para la región RII de Stepani hay una singularidad en la cual  $p$  parece tender a  $-\infty$ .

Ahora graficando la presión  $p(t, r)$  y dando valores a  $r$  obtenemos la figura 10:



En la figura 10 se observa que la función  $p(t, r)$  describe una superficie que en las regiones FLRW RI y RIII es suave mientras que en la región RII de Stephani la superficie presenta singularidades, es decir,  $p \rightarrow \pm\infty$  para ciertos valores de  $t$  y  $r$ .

En las figuras 8, 9 y 10 observamos un comportamiento singular de la presión  $p \rightarrow -\infty$  con la densidad  $\rho$  finita en la región de Stephani, esto se debe a que hay un cero en el denominador de  $p(t, r)$  sin embargo, éste cero no afecta a  $\rho$ . Para remediar esto consideremos las regiones FLRW y de Stephani con curvatura positiva  $\kappa_0 = 1$ .

Para evitar esta singularidad consideramos el caso de curvatura espacial positiva

$$f(r) = \sin r, \quad F(r) = \sin(r/2)$$

Universos FLRW:

$$ds_{(F)}^2 = -dt^2 + R^2(t) [dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

$$\frac{8\pi}{3} \rho = \frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{R^2},$$

$$8\pi p = -\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\ddot{R}}{R} - \frac{1}{R^2} \quad \left[ = \frac{\rho}{3} \text{ region (I)}, \quad = 0, \text{ region (III)} \right],$$

Universo de Stephani:

$$ds_{(S)}^2 = -U^2(t, r) dt^2 + L^2(t, r) [dr^2 + f^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

$$\text{donde: } L = \frac{R(t)}{1 + \kappa(t) \sin^2(r/2)}, \quad U = \frac{1 + [\kappa - R(\dot{\kappa}/\dot{R})] \sin^2(r/2)}{1 + \kappa(t) \sin^2(r/2)},$$

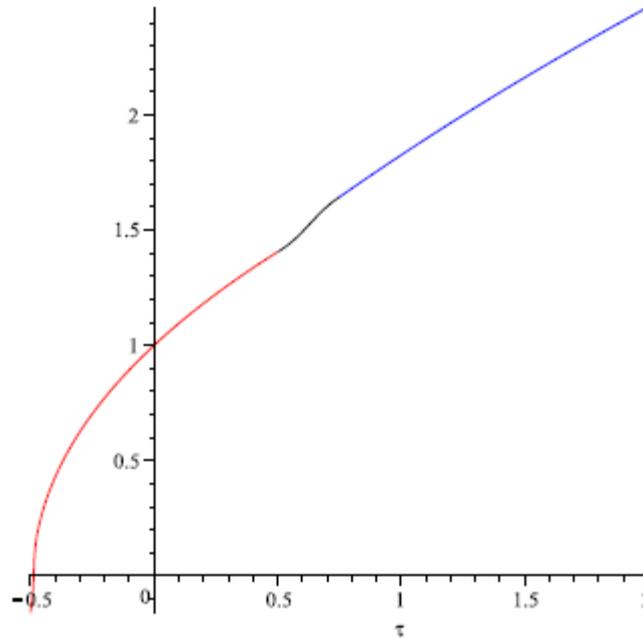
$$\frac{8\pi}{3} \rho = \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\kappa + 1}{R^2},$$

$$p = -\rho - \frac{R(\dot{\rho}/\dot{R})}{3U} = -\rho - \frac{R(\dot{\rho}/\dot{R})}{3} \left[ \frac{1 + \kappa \sin^2(r/2)}{1 + (\kappa - R\dot{\kappa}/\dot{R}) \sin^2(r/2)} \right],$$

En este caso no podemos encontrar una forma analítica cerrada para  $R(\tau)$ , donde  $\tau = t/H_0$ . Trabajamos entonces con el parámetro de Hubble  $H = \dot{a}/a$ ,  $a = R/R_0$ .

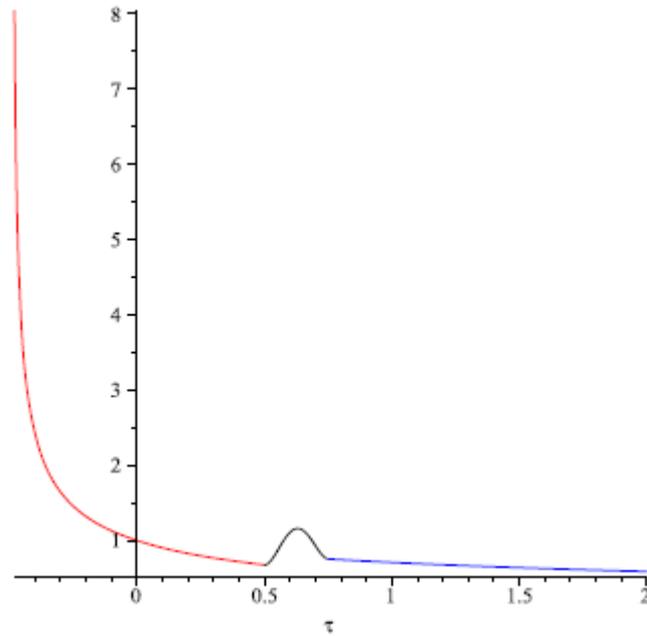
Vemos que el parámetro  $a(\tau)H(\tau)$  satisface la siguiente regla de correspondencia dada por las ecuaciones de campo (regiones I y III) y una función de interpolación (region II):

$$a(\tau)H(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Omega_{01}}{(a(\tau))^2} + 1 - \Omega_{01}}, & 0 < \tau < \tau_{b1} \\ A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3\tau^3 + A_4\tau^4 + A_5\tau^5, & \tau_{b1} < \tau < \tau_{b2} \\ \sqrt{\frac{\Omega_{03}}{(a(\tau))^2} + 1 - \Omega_{03}}, & \tau_{b2} > \tau \end{cases}$$



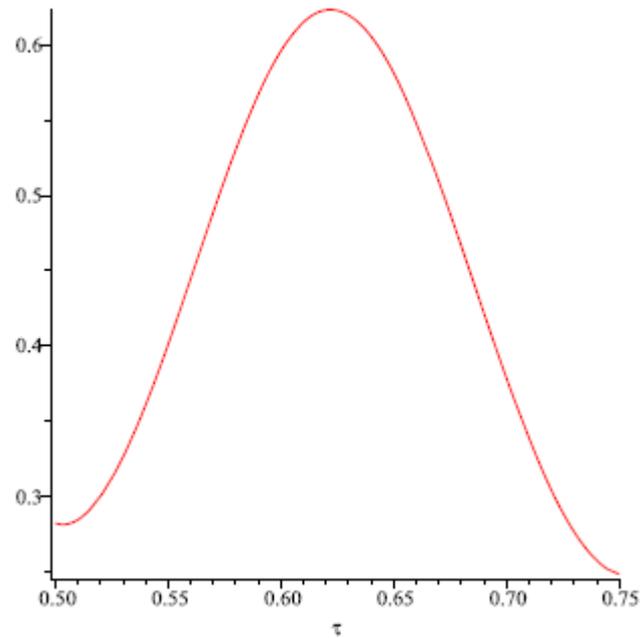
En la figura 12 se observa que el comportamiento del parámetro  $a(\tau)H(\tau)$  en las regiones RI y RIII FLRW (en rojo y azul) así como en la región de Stephani RII (en negro) la curva es continua.

Figura 13: Gráfica de la función  $d[a(\tau)H(\tau)]/d\tau$



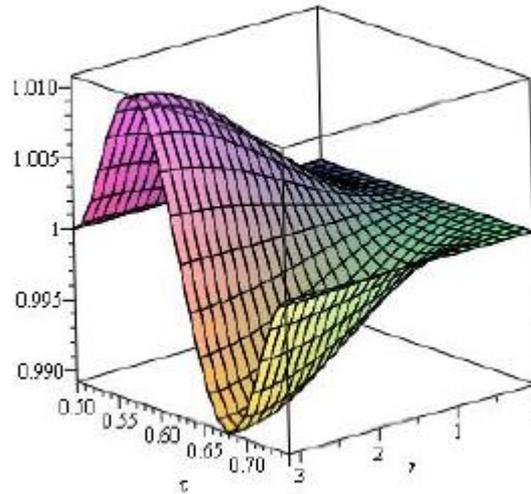
En la figura 13 se observa que el comportamiento de la función  $d[a(\tau)H(\tau)]/d\tau$  en las regiones FLRW (en rojo y azul) así como en la región de Stephani (en negro) la curva es continua.

Figura 11: Gráfica del parámetro  $\kappa(t)$  .



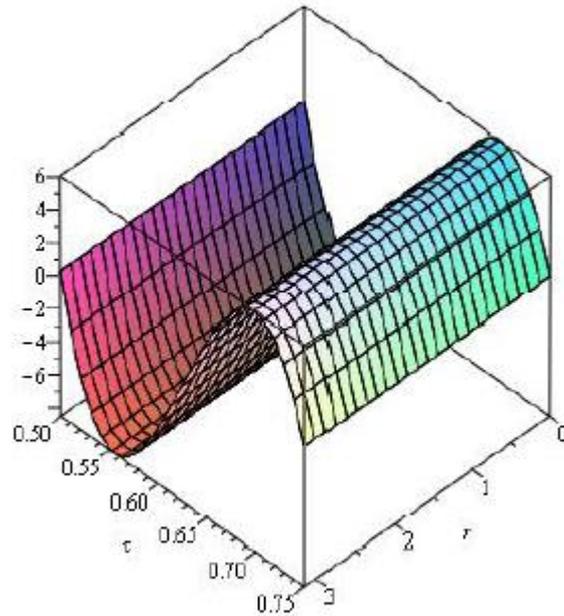
En la figura 11 observamos que el comportamiento de la función  $\kappa(t)$  es continuo tanto en las regiones FLRW como en la región de Stephani.

Figura 14: Gráfica de la función  $Q_2/Q_1$ .



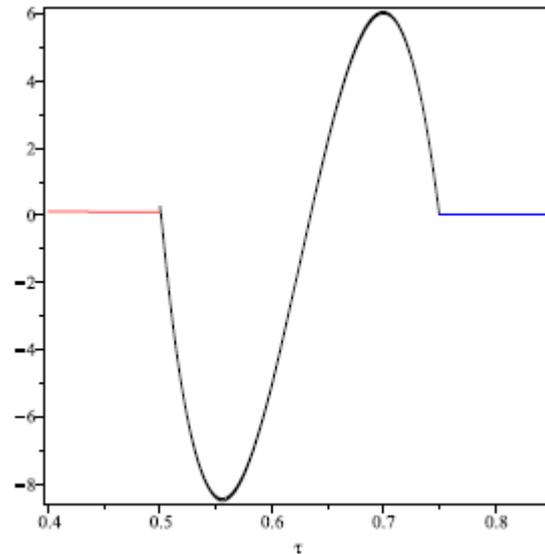
En la figura 14 se observa que la función cociente  $Q_2/Q_1$  describe una superficie continua entre las regiones FLRW y de Stephani y por lo tanto resolvemos el problema de que  $p$  diverge con  $\rho$  finita.

Figura 15: Gráfica de la función  $p(t, r)$  .



La figura 15 es la gráfica de la función  $p(t, r)$  describe una superficie continua entre las regiones FLRW y de Stephani, nótese que  $p$  es finita en toda la región de Stephani.

Figura 16: Gráfica de la función  $p$  pero con valores fijos para  $r$ .



En la figura 16 la función  $p$  en las regiones FLRW RI y RIII como en la región RII de Stephani es continua y finita pero carece de una interpretación física satisfactoria ya que es negativa y cambia de signo.

# Conclusiones:

- Las condiciones de embone suave de Darmois siempre se pueden satisfacer en una interfaz entre un Universo FLRW y un Universo de Stephani dada por una hiper-superficie espacialoide de la forma  $t = t_{b1} = \text{const}$  que es ortogonal a la 4-velocidad. Esto implica que la métrica y la curvatura extrínseca de esta interfaz coincide para ambos Universos.
- Para hiper-superficies  $t = t_{b1} = \text{const}$  con curvatura espacial cero ó negativa ( $\kappa_0 = 0, -1$ ) el embone es también suave, pero la región de Stephani muestra una singularidad que es físicamente indeseable: la presión  $p$  diverge cuando  $U = \sqrt{-g_{tt}} = 0$  a densidad finita. Esta singularidad solo puede ser evitada en el caso en que ambas hiper-superficies que sirven de interfaces en el embone tengan curvatura espacial positiva  $\kappa_0 = 1$ .
- Incluso cuando se puede evitar la singularidad anteriormente mencionada, el comportamiento de la presión  $p$  como función de la densidad  $\rho$  en la zona intermedia no es físicamente realista: la presión no diverge pero se torna negativa y de gran magnitud (véase figuras 15 y 16). Por lo tanto el Universo de Stephani no ofrece una transición físicamente adecuada entre un Universo FLRW de radiación y uno de polvo.