



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBABILIDADES DE RUINA CON
HORIZONTE DE TIEMPO FINITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
JORGE ANTONIO SOLIS POSADAS

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. DAVID JOSAFAT SANTANA COBIAN



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Solis
Posadas
Jorge Antonio
26 45 42 69
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
305058995

2. Datos del Asesor

M. en C.
David Josafat
Santana
Cobian

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Luis Antonio
Rincón
Solís

4. Datos del sinodal 2

Dra.
Ana
Meda
Guardiola

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Fernando
Baltazar
Larios

6. Datos del sinodal 4

M. en C.
Arrigo
Coen
Coria

7. Datos de la tesis

Probabilidades de ruina con horizonte de tiempo finito.
177 p.
2013

*Dedicado a mi familia.
A mis padres que siempre estuvieron
motivando y apoyando mi camino.
A mi hermana por sus comentarios,
que influyeron en la forma de
escribir el trabajo.*

Gracias por el apoyo incondicional.

Agradecimientos

Quiero agradecer de forma muy sincera al M. en C. David Josafat Santana Cobian, director de esta tesis por haberme guiado durante todo este tiempo. Reconozco su paciencia, tiempo y comentarios, indispensables en la elaboración del presente trabajo. Siempre estaré agradecido.

A la UNAM por darme la oportunidad de estudiar y formarme como profesionalista.

Resumen

El desarrollo que ha experimentado el sector asegurador mexicano ha impulsado una gran competencia en el sector, no solo por el creciente número de instituciones aseguradoras sino por la desregulación del cálculo de tarifas de los seguros no-vida que fomentan la creatividad y el uso de la experiencia de las compañías. En un mercado con un creciente dinamismo, las estrategias se vuelven una pieza fundamental para el éxito de las empresas, tomar una adecuada decisión depende de varios factores. En este sentido, una de las principales aportaciones del presente trabajo consiste en llevar a cabo una revisión de una de las medidas de riesgo más importantes para el sector asegurador no-vida (la probabilidad de ruina) tomando un refinamiento en el tiempo. Muchos de los trabajos anteriores toman la probabilidad de ruina con un horizonte de tiempo infinito para generar una medida de solvencia de la vida de una aseguradora, pero existen objetivos en el corto y mediano plazo que no pueden ser medidos de forma adecuada por tal probabilidad, por tanto el trabajo da gran énfasis a las probabilidad de ruina con un horizonte de tiempo finito. La configuración de la tesis queda de la siguiente manera:

- **Capítulo 1.** Provee los conceptos para entender el proceso de riesgo y la probabilidad de ruina. Se analizan propiedades y condiciones del modelo, se aborda un enfoque diferencial para la probabilidad de ruina, posteriormente se llega a una interpretación de dicha probabilidad (Fórmula de Pollaczeck-Kinchine). El capítulo finaliza con un estudio del tipo de reclamaciones que la aseguradora puede enfrentar, tema que resulta importante cuando se desea obtener cotas.
- **Capítulo 2.** Tiene como objetivo revisar las expresiones de la probabilidad de ruina con un horizonte finito y consta de tres secciones. En la primera se estudia el proceso de riesgo en tiempo discreto entendiéndose como una aproximación al proceso de riesgo en tiempo continuo, se abordan dos definiciones del proceso de riesgo discreto y se explora la relación existente entre ambos conceptos, además se proveen varias expresiones que ayudan al cálculo de la probabilidad de ruina con un horizonte de tiempo finito.

La segunda parte es un estudio del proceso de riesgo en tiempo continuo y comienza con algunos comentarios cuando las reclamaciones son discretas o exponenciales, después se estudian propiedades del proceso $\{L_t\}_{t \geq 0}$ (proceso

agregado de las reclamaciones) que son de utilidad en la demostración de la fórmula de Seal. En esta sección se exploran dos formas de obtener la probabilidad de ruina conociendo la función de densidad y la distribución del monto agregado de reclamaciones, adicionalmente se expone un método para obtener la probabilidad de ruina utilizando transformadas de Laplace.

La última sección tiene por objetivo mostrar algunos resultados existentes que acoten la probabilidad de ruina para el proceso de riesgo a tiempo continuo.

- **Capítulo 3.** Proporciona los elementos necesarios para simular el proceso de riesgo (simulación Monte Carlo), y se concluye con la implementación de algoritmos para el cálculo de ruina que son puestos a prueba con ejemplos numéricos explícitos, en el lenguaje estadístico R.

De forma adicional se construyeron cinco apéndices, en el apéndice A encontramos distribuciones de probabilidad con algunas de sus características. El apéndice B tiene propiedades y resultados usados en las demostraciones de la tesis. Los apéndices C y D tienen el código de R para calcular la probabilidad de ruina y generar las gráficas presentadas en el trabajo. El apéndice E da una breve explicación de la relación existente entre teoría de colas y teoría del riesgo, además de incluir resultados usados en la demostración de la probabilidad de ruina con horizonte finito cuando las reclamaciones son exponenciales.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción. | 1 |
| 1.1. El modelo de riesgo. | 1 |
| 1.1.1. Elementos del modelo. | 1 |
| 1.1.2. Condición de ganancia neta. | 9 |
| 1.2. Probabilidad de ruina. | 10 |
| 1.2.1. Definición de la probabilidad de ruina con horizonte infinito. | 10 |
| 1.2.2. Probabilidad de ruina con un enfoque diferencial. | 11 |
| 1.2.3. Definición de la probabilidad de ruina con horizonte finito. | 17 |
| 1.2.4. Fórmula de Pollaczek-Kinchine. | 20 |
| 1.2.5. Tipos de reclamaciones. | 24 |
| 1.2.6. Coeficiente de ajuste. | 32 |
| 1.2.7. Desigualdad de Lundberg. | 35 |
| | |
| 2. Probabilidad de ruina con horizonte finito. | 39 |
| 2.1. Proceso de riesgo en tiempo discreto. | 39 |
| 2.1.1. El modelo binomial compuesto. | 41 |
| 2.1.2. Definición alternativa del modelo de riesgo a tiempo discreto. | 48 |
| 2.1.3. Variación al proceso de riesgo en tiempo discreto | 54 |
| 2.2. Proceso de riesgo en tiempo continuo. | 59 |
| 2.2.1. Probabilidad de ruina con reclamaciones discretas. | 60 |
| 2.2.2. Reclamaciones exponenciales. | 61 |
| 2.2.3. Proceso agregado de las reclamaciones $\{L_t\}_{t \geq 0}$ | 65 |
| 2.2.4. Probabilidad de ruina conociendo la función de densidad de S_t | 70 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 2.2.5. | La fórmula de Seal. | 71 |
| 2.2.6. | Probabilidad de ruina conociendo la distribución conjunta de S_t | 74 |
| 2.2.7. | Transformada del tiempo de ruina. | 76 |
| 2.3. | Cotas y aproximaciones para la probabilidad de ruina. | 85 |
| 2.3.1. | Aproximación Segerdahl normal. | 85 |
| 2.3.2. | La aproximación de Gerber dependiente del tiempo. | 86 |
| 2.3.3. | Aproximación basada en el movimiento Browniano. | 86 |
| 2.3.4. | Aproximación corregida basada en el movimiento Browniano. | 91 |
| 3. | Simulaciones y ejemplos. | 93 |
| 3.1. | Simulación del proceso de riesgo. | 96 |
| 3.2. | Algoritmos. | 97 |
| 3.3. | Ejemplos | 99 |
| 3.3.1. | Caso exponencial. | 99 |
| 3.3.2. | Caso Gama($3, \alpha$). | 107 |
| 3.3.3. | Caso uniforme($0, 2$). | 111 |
| 3.3.4. | Caso lognormal(μ, σ). | 115 |
| 3.3.5. | Caso Pareto(α, θ). | 118 |
| 3.3.6. | Caso Burr(α, γ, θ). | 122 |
| | Comentarios Finales. | 125 |
| | A. Distribuciones de probabilidad. | 127 |
| | B. Algunas propiedades y resultados. | 129 |
| | C. Programas en R project. | 133 |
| | D. Gráficas en R project. | 149 |
| | E. Dualidad. | 159 |
| | Bibliografía | 165 |

Capítulo 1

Introducción.

1.1. El modelo de riesgo.

1.1.1. Elementos del modelo.

Uno de los elementos básicos de muchos de los modelos de riesgo aplicados al sector asegurador de daños consiste en suponer una estructura general de las reservas. En este sentido el modelo clásico de riesgo utiliza una de las configuraciones más simples, diseñada para seguir el comportamiento de las reservas. Para este caso las reservas serán modeladas de la siguiente forma:

$$R_t = I_0 + P_t - S_t,$$

donde $t \geq 0$ y

- R_t = Reserva al tiempo t .
- I_0 = Inversión inicial.
- P_t = Cantidad de dinero recaudada hasta el tiempo t .
- S_t = Cantidad de dinero pagada hasta el tiempo t .

Cuando $t = 0$ la compañía aseguradora comienza a operar y la reserva es igual a la inversión inicial. El monto de dinero al inicio puede parecer simple en su concepto puesto que no estamos considerando los gastos en los que incurre la aseguradora al entrar en el negocio, tampoco refleja la cantidad de dinero obtenida por realizar inversiones como habitualmente ocurre en la práctica y que se fundamenta en el “Título 8. De las inversiones” de la *Circular única de seguros*¹. Sin embargo muchas

¹México. Diario Oficial de la Federación. *Circular única de seguros*. 13 de Diciembre de 2012, Título 8 De las inversiones.

veces el modelo anterior es considerado al realizar mediciones del nivel del riesgo al que se expone un grupo asegurador al entrar en el sector de daños, no solo por ser uno de los modelos más simples y prácticos en la teoría del riesgo sino porque se han desarrollado resultados bastante sólidos que han sido trabajados desde hace mucho tiempo.

Las primeras ideas del modelo fueron plasmadas en la tesis doctoral del actuuario sueco Filip Lundberg (1876-1965) que es considerado el padre de la teoría del riesgo. En 1903 consiguió terminar su tesis doctoral que lleva por nombre “*Approximations of the Probability Function/ Reinsurance of Collective Risks*”. Con la tesis de Lundberg comienzan los intentos por generar una teoría sólida, sin embargo Lundberg encuentra tres grandes obstáculos que dificultan el entendimiento y divulgación de sus ideas, estos fueron el tiempo, espacio y notación².

Tuvieron que pasar varios años para que las ideas de Filip Lundberg se convirtieran en una teoría sólida. El matemático sueco Harald Cramér (1893-1985) comenzó a dar consistencia a la teoría del riesgo, apoyándose en la naciente rama matemática de los procesos estocásticos, además de haber realizado contribuciones a la teoría del riesgo, fue gracias a él que la teoría comenzó a divulgarse de forma más accesible³.

Debido a las grandes aportaciones que realizaron los dos científicos a la teoría del riesgo el modelo que ellos trabajaron recibe el nombre de Cramér-Lundberg. A continuación se detallarán los elementos del modelo:

- La reserva inicial de la aseguradora se denotará por u .
- La tasa de ingreso por primas será denotada por c .
- Necesitamos un proceso que nos ayude a contar el número de reclamaciones que denotaremos por $\{N_t\}_{t \geq 0}$. Para el modelo clásico se supone que $\{N_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso Poisson.

Se utilizará una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ continuas con valores en los reales positivos. Denotaremos su media y varianza por μ y σ^2 respectivamente, si existe su n -ésimo momento lo denotaremos como $\mu_n = E[X^n]$, la función de densidad y de distribución serán denotadas por $f(x)$ y $F(x)$ respectivamente. Estas variables denotan el monto de cada una de las reclamaciones. Con los elementos anteriores podemos definir el comportamiento de nuestras reservas pero es necesario realizar algunas hipótesis adicionales para obtener el modelo de riesgo clásico.

- Supondremos que el proceso Poisson es independiente del monto de los reclamos.

²<http://statprob.com/encyclopedia/ErnestFilipOskarLUNDBERG.html>

³Ulf Grenander (1995): *A survey of the life and works of Harald Cramér*, Scandinavian Actuarial Journal, 1995:1, 2-5

Es importante recordar algunos de los resultados y propiedades más importantes del proceso de conteo Poisson, como:

- El proceso de conteo satisface que $N_0 = 0$ casi seguramente.
- Los incrementos $N_{t+s} - N_s$; $s, t \geq 0$ son independientes y tienen distribución Poisson de parámetro λt donde λ es una constante, por tanto también tienen incrementos estacionarios.
- Los tiempos entre arribo denotados en este trabajo por T_n tienen distribución exponencial de parámetro λ .
- El tiempo en que ocurre la n -ésima reclamación es denotado por W_n y tiene distribución Gama(n, λ). Observemos que $W_n = \sum_{i=1}^n T_i$.

Tomando todos los comentarios anteriores estamos listos para definir la estructura del proceso de riesgo a tiempo continuo.

Definición 1.1 *El proceso continuo $\{U_t\}_{t \geq 0}$, definido como:*

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad (1.1)$$

con $\sum_{i=1}^0 X_i = 0$, en donde u y c son constantes no negativas, X_1, X_2, \dots es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas positivas, independientes del proceso Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$ de intensidad λ , es comúnmente conocido como el modelo clásico de Cramér-Lundberg.

El modelo del proceso de riesgo bajo las consideraciones anteriores consta de tres elementos de los cuales solamente uno es aleatorio y los demás son deterministas. El elemento aleatorio es el monto agregado de las reclamaciones $\sum_{i=1}^{N_t} X_i$ que comúnmente en este trabajo será denotado por S_t . El monto agregado de las reclamaciones es de hecho un proceso Poisson compuesto. Existen muchos estudios que se enfocan en el análisis de S_t , es claro que reconocer propiedades de S_t nos llevará a conocer características de U_t . Una de las primeras interrogantes que nos aquejan es saber si podemos calcular la función de distribución de S_t , denotemos a la función de distribución de S_t por $F_t(x)$.

Proposición 1.1 *El monto agregado de las reclamaciones S_t tiene función de distribución*

$$F_t(x) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{*(n)}(x), \quad x \geq 0. \quad (1.2)$$

Considerando que $F^{*(n)}(x) = P[\sum_{i=1}^n X_i \leq x]$ es la n -ésima convolución de la variable X_i , y $F^{*(0)}(x) = 1_{\{x > 0\}}$.

Demostración:

Usando la ley de la probabilidad total, condicionando sobre los valores de la variable N_t , sea $x > 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
 F_t(x) &= P[S_t \leq x] \\
 &= P\left[\sum_{i=1}^{N_t} X_i \leq x\right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq x \mid N_t = n\right] P[N_t = n] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
 &= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{*(n)}(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Observación:

La función de densidad de S_t tiene una masa de probabilidad acumulada en cero.

$$\begin{aligned}
 F_t(0) &= P[S_t \leq 0] \\
 &= P[S_t = 0] \\
 &= P[N_t = 0] \\
 &= e^{-\lambda t}.
 \end{aligned}$$

Para obtener la función de densidad bastará con derivar $F_t(x)$. Una forma alternativa de calcular la función de densidad del monto agregado de siniestros recursivamente se expone a continuación⁴, supongamos que $P[N_t = n] = p_n$ entonces:

Proposición 1.2 *La función de densidad del monto agregado de siniestros puede ser calculada como:*

$$f_t(x) = p_1 f(x) + \frac{\lambda t}{x} \int_0^x y f(y) f_t(x-y) dy, \quad (1.3)$$

para $x > 0$. Donde $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria X .

Demostración:

Desarrollamos el lado derecho de la igualdad asumiendo que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} p_i f^{*(i)}(z)$

⁴Basado en: ASTIN BULLETIN, Vol. 12, No. 1, 1981, pp. 22-26

converge uniformemente, entonces:

$$\begin{aligned} p_1 f(x) + \frac{\lambda t}{x} \int_0^x y f(y) f_t(x-y) dy &= p_1 f(x) + \frac{\lambda t}{x} \int_0^x y f(y) \sum_{i=1}^{\infty} p_i f^{*(i)}(x-y) dy \\ &= p_1 f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\lambda t y}{x} f(y) p_i f^{*(i)}(x-y) dy \\ &= L(x, t). \end{aligned}$$

Además $\int_0^x y f(y) \frac{f^{*(n)}(x-y)}{f^{*(n+1)}(x)} dy = \frac{x}{n+1}$ es una esperanza condicional, y $\int_0^x f(y) f^{*(n)}(x-y) dy = f^{*(n+1)}(x)$ para $n=1,2,\dots$ ya que es la definición de convolución, entonces:

$$L(x, t) = p_1 f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \frac{\lambda t}{i+1} f^{*(i+1)}(x)$$

notemos que $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\lambda t}{n+1}$ por lo que:

$$\begin{aligned} L(x, t) &= p_1 f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1} f^{*(i+1)}(x) \\ &= p_1 f(x) + \sum_{i=2}^{\infty} p_i f^{*(i)}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i f^{*(i)}(x) \\ &= f_t(x). \end{aligned}$$

□

Aunque los resultados anteriores presentan formas de calcular las funciones de densidad y de distribución de S_t mediante convoluciones, muchas veces no es sencillo calcularlas. Algunas formas de obtener aproximaciones a la función de distribución de S_t son la aproximación normal y la aproximación gama trasladada, para aproximar la función de densidad de S_t podemos usar la aproximación de Edgeworth. Desde luego el usar dichas aproximaciones ayuda a disminuir el tiempo requerido en el análisis del modelo, pero usarlas dará resultados menos exactos. Una técnica para calcular la función distribución de distribuciones compuestas puede ser tratada mediante transformadas de Laplace⁵.

⁵Véase CsÖRGÖ S., Teugels J. L. Empirical Laplace Transform and Approximation of Compound Distributions, *Journal of Applied Probability* Vol. 27, No.1 (1990), pp. 88-101.

Proposición 1.3 *La esperanza de S_t es $\lambda\mu t$.*

Demostración:

Usaremos la esperanza iterada condicionando con $N(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t|N(t)]] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N_t} X_i | N(t) \right] \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N_t} X_i | N(t) = n \right] P[N_t = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] P[N_t = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{E}[X_1] P[N_t = n] \\
&= \mathbb{E}[X_1] \sum_{n=0}^{\infty} n P[N_t = n] \\
&= \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[N_t] \\
&= \mathbb{E}[X_1] \lambda t \\
&= \lambda \mu t
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.4 *El segundo momento de S_t es $\mathbb{E}[X_1^2] \mathbb{E}[N_t] + \mathbb{E}^2[X_1] \mathbb{E}[N_t(N_t - 1)]$.*

Demostración:

Condicionando la variable aleatoria $S^2(t)$ con respecto al proceso de conteo N_t , y desarrollando la suma $S^2(t)$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2(t)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S^2(t)|N(t)]] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \right)^2 | N(t) \right] \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \right)^2 | N(t) = n \right] P[N_t = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right] P[N_t = n]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i<j} X_i X_j \right] P[N_t = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] + 2 \sum_{i<j} \mathbb{E}[X_i X_j] \right] P[N_t = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[n \mathbb{E}[X_1^2] + 2 \frac{n(n-1)}{2} \mathbb{E}[X_i X_j] \right] P[N_t = n] \\
&= \mathbb{E}[X_1^2] \mathbb{E}[N_t] + \mathbb{E}^2[X_1] \mathbb{E}[N_t(N_t - 1)].
\end{aligned}$$

□

Con las dos proposiciones anteriores podemos calcular la varianza de S_t usando el hecho de que $\text{Var}[S] = \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}^2[S]$.

Proposición 1.5 *La varianza de S_t es $\lambda t[\sigma^2 + \mu^2]$.*

Demostración:

Utilizando los resultados de las Proposiciones 1.3 y 1.4 se obtiene lo buscado:

$$\begin{aligned}
\text{Var}[S] &= \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}^2[S] \\
&= \mathbb{E}[X_i^2] \mathbb{E}[N_t] + \mathbb{E}^2[X_i] \mathbb{E}[N_t(N_t - 1)] - \mathbb{E}^2[X] \mathbb{E}^2[N_t] \\
&= \mathbb{E}[X_i^2] \mathbb{E}[N_t] + \mathbb{E}^2[X_i] \mathbb{E}[N_t^2] - \mathbb{E}^2[X_i] \mathbb{E}[N_t] - \mathbb{E}^2[X] \mathbb{E}^2[N_t] \\
&= \mathbb{E}[N(t)] [\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]] + \mathbb{E}^2[X] [\mathbb{E}[N(t)^2] - \mathbb{E}[N(t)]] \\
&= \mathbb{E}[N(t)] \text{Var}[X] - \mathbb{E}^2[X] \text{Var}[N(t)] \\
&= \lambda t \sigma^2 + \lambda t \mu^2 \\
&= \lambda t [\sigma^2 + \mu^2].
\end{aligned}$$

□

Otra característica de interés será el conocer la función generadora de momentos de S_t .

Proposición 1.6 *La función generadora de momentos de S_t es $M_{N_t}[\ln M_X(r)]$.*

Demostración:

Condicionando sobre el proceso de conteo y utilizando las propiedades de S_t , enton-

ces:

$$\begin{aligned}
M_{S_t}(r) &= \mathbb{E}[e^{rS_t}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{rS_t} | N_t]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{E}[e^{rS_t} | N_t = n] P[N_t = n]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{E}[e^{r \sum_{i=1}^n X_i} | N_t = n] P[N_t = n]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{E}[e^{r \sum_{i=1}^n X_i}] P[N_t = n]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{E}[e^{rX}]^n P[N_t = n]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{E}[M_X(r)]^n P[N_t = n]] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_X(r)]^{N_t}] \\
&= M_{N_t}[\ln M_X(r)]. \quad \square
\end{aligned}$$

En los cálculos anteriores suponemos que la variable aleatoria que cuenta el número de reclamaciones N_t depende del tiempo, estamos considerando que $\{N_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso Poisson con todo lo que implica. Sabemos que hasta el tiempo t , el valor esperado de reclamos es λt con una varianza también λt . ¿Qué sucede cuando tenemos una esperanza diferente de la varianza? Podemos utilizar un proceso de conteo diferente, que llevará a una generalización del modelo que comúnmente se asocia a los procesos de renovación. Otra solución a esta problemática es fijar un tiempo t_0 y trabajar sólo con el intervalo $[0, t_0]$. En dicho lapso podemos contar el número de reclamaciones con una variable aleatoria N (no depende del tiempo además podría tener alguna distribución diferente a la Poisson), que sólo contará el número total de las reclamaciones en el intervalo.

Con las características que hemos revisado para el monto agregado de las reclamaciones podemos concluir que el comportamiento de las reservas cumple lo siguiente:

Proposición 1.7 *La reserva U_t cumple con las siguientes características.*

- $\mathbb{E}[U_t] = u + t[c - \lambda\mu]$.
- $\text{Var}[U_t] = \lambda t[\sigma^2 + \mu^2]$.
- $M_{U_t}(r) = e^{r(u+ct)} M_{N(t)}[\ln(M_X[-r])]$.

Demostración: Manipulaciones básicas aplicadas a las Proposiciones 1.3, 1.5 y 1.6 dan como resultado los resultados anteriores.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U_t] &= \mathbb{E}[u + ct - S_t] \\ &= u + ct - \mathbb{E}[S_t] \\ &= u + t[c - \lambda\mu],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[U_t] &= \text{Var}[u + ct - S_t] \\ &= \text{Var}[S_t] \\ &= \lambda t[\sigma^2 + \mu^2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{U_t}(r) &= \mathbb{E}[e^{r(U_t)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{r(u+ct-S_t)}] \\ &= e^{r(u+ct)}\mathbb{E}[e^{-rS_t}] \\ &= e^{r(u+ct)}M_{S_t}(-r) \\ &= e^{r(u+ct)}M_{N(t)}[\ln(M_X[-r])].\end{aligned}$$

□

1.1.2. Condición de ganancia neta.

Nos interesa conocer alguna condición que disminuya la incertidumbre de tener reservas negativas en la vida de la aseguradora. Una posible solución a esta interrogante es tratar de observar bajo qué condiciones la esperanza de nuestro proceso de riesgo es positiva, dado que nuestro proceso de riesgo se compone de tres factores y uno de ellos es constante y fijo para toda t (la reserva inicial u) será suficiente asegurarnos de que la esperanza de la diferencia de los ingresos por primas menos el monto agregado de las reclamaciones sea positivo, esto es:

$$\begin{aligned}0 &< \mathbb{E}[ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i] \\ &= ct - \mu\lambda t,\end{aligned}$$

para que la desigualdad siga manteniéndose debe suceder que:

$$c > \lambda\mu.$$

A la condición $c > \lambda\mu$ se le conoce como la condición de ganancia neta. Esta condición nos dice qué debe cumplir la constante de ingresos para que en promedio las reservas sean positivas. Aunque tenemos tal condición debemos ser sensibles a la situación de la aseguradora, una solución intuitiva podría llevarnos a tomar c lo suficientemente grande para hacer frente a las reclamaciones, pero una propuesta basada en esta observación podría ser catastrófica para la compañía ya que generalmente en el mercado existen varias empresas que buscan acrecentar sus carteras, uno de los puntos que generalmente denota la preferencia por una aseguradora es el precio que el asegurado debe pagar por la prima, entonces si pedimos ingresos por primas bastante altos el cliente preferirá otra compañía. Existen muchas formas de determinar el margen de seguridad, pero aquí se usará una estructura frecuentemente usada. Vamos a denotar el margen de seguridad como θ tal que $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ donde $\theta > 0$, bajo esta consideración nuestra reserva puede escribirse como:

$$U_t = u + (1 + \theta)\lambda\mu t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i. \quad (1.4)$$

La variable θ algunas veces es considerada como un porcentaje que deseamos ganar en el negocio anterior y será una condición necesaria para que la aseguradora no se arruine con certeza. Existen varias formas de observar lo anterior, una de estas perspectivas consiste en usar la ley de los grandes números para observar que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_t}{t} &= c - \lambda\mu \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[U_t]}{t}. \end{aligned}$$

Si queremos que el resultado anterior sea positivo concluimos que $c > \lambda\mu$, esta condición debe cumplirse para que a la larga nuestra compañía logre obtener reservas positivas.

1.2. Probabilidad de ruina.

1.2.1. Definición de la probabilidad de ruina con horizonte infinito.

Lo que a continuación nos gustaría medir es la incertidumbre existente en las compañías aseguradoras sobre si son capaces de cumplir con todas las obligaciones pactadas. Una forma de trabajar con lo anterior consiste en supervisar el nivel de reservas con el objetivo de procurar una sana evolución de éstas. Reduciéndose a estudiar el momento en el que las reservas se vuelven negativas.

He de recalcar que el proceso seguido por las reservas se puede volver negativo en varios momentos de la vida de la aseguradora, aunque el propósito es evitar que ocurran incidentes de este tipo. El estudio de la probabilidad de ruina se centra en el análisis del primer tiempo en que ocurre la ruina. Podría resultar interesante estudiar los demás tiempos en los que ocurre la ruina. Pero generalmente cuando la empresa hace frente a la ruina (entendiéndose como el momento en el que las reservas se vuelven negativas) no significa la quiebra de la compañía, aunque sí implica sanciones y una mayor vigilancia de las instituciones reguladoras, recapitalización de la compañía y cambios en la selección y administración de sus carteras de asegurados. En conclusión obtendremos un nuevo proceso de riesgo $U(t)$.

Definición 1.2 *Se denota el tiempo en el que ocurre la ruina como:*

$$\tau = \inf\{t > 0 | U_t < 0\}, \quad (1.5)$$

y se define $\tau = \infty$ cuando jamás ocurre la ruina.

Muchos de los estudios que se hacen sobre la ruina tienen que ver con τ , por lo que nos interesa conocer algunas de sus propiedades como: su función de densidad, la función de distribución, esperanza, etc. Sin embargo sólo en algunos casos podemos obtener resultados explícitos de las propiedades de esta variable. La anterior definición nos ayudará a exponer nuestra primera definición de la probabilidad de ruina.

Definición 1.3 *Definimos la probabilidad de ruina con horizonte infinito como:*

$$\psi(u) = P[\tau < \infty | U_0 = u]. \quad (1.6)$$

Aunque definimos de esta manera la probabilidad de ruina existen otras formas de definir dicha probabilidad. A veces es necesario trabajar con el evento complementario de la ruina, la probabilidad de supervivencia o de no ruina que definimos como:

$$\phi(u) = 1 - \psi(u). \quad (1.7)$$

El obtener fórmulas explícitas para la probabilidad de ruina con horizonte infinito únicamente es conseguido en algunos casos⁶, uno de esos casos es cuando las reclamaciones son exponenciales.

1.2.2. Probabilidad de ruina con un enfoque diferencial.

Existen ecuaciones diferenciales que permiten analizar la probabilidad de no ruina y que proveen importantes resultados.

⁶Véase por ejemplo el capítulo 4 de Asmussen(2010).

Proposición 1.8 *La probabilidad de supervivencia puede expresarse mediante la siguiente ecuación integro-diferencial:*

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x)dF(x). \quad (1.8)$$

Demostración:

Denotemos por T_1 el tiempo de la primera reclamación y supongamos que el monto de la reclamación es X_1 , entonces para que no ocurra el evento de ruina debe pasar que $X_1 < u + cT_1$ y la ruina no debe presentarse en tiempos posteriores a T_1 , por lo tanto:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= P[U_{T_1} \geq 0, U_{t+T_1} \geq 0 \text{ para toda } t \geq 0] \\ &= \int_0^\infty \int_0^{u+cs} P[U_{T_1} \geq 0, U_{t+T_1} \geq 0 \text{ para toda } t \geq 0 | T_1 = s, X_1 = x] \lambda e^{-\lambda s} dF(x) ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^{u+cs} P[U_s \geq 0, U_{t+s} \geq 0 \text{ para toda } t \geq 0 | T_1 = s, X_1 = x] \lambda e^{-\lambda s} dF(x) ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^{u+cs} P[U_{t+s} \geq 0 \text{ para toda } t \geq 0 | T_1 = s, X_1 = x] \lambda e^{-\lambda s} dF(x) ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^{u+cs} \phi(u+cs-x) e^{-\lambda s} dF(x) ds \\ &= A, \end{aligned}$$

tomando el cambio de variable $w = u + cs$ entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_u^\infty \frac{\lambda}{c} e^{-\lambda \frac{w-u}{c}} \int_0^w \phi(w-x) dF(x) ds \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{\lambda \frac{u}{c}} \int_u^\infty e^{-\lambda \frac{w}{c}} \int_0^w \phi(w-x) dF(x) ds. \end{aligned}$$

Derivando $\phi(u)$ con respecto a u se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \phi(u) &= \frac{\lambda^2}{c^2} e^{\lambda \frac{u}{c}} \int_u^\infty e^{-\lambda \frac{w}{c}} \int_0^w \phi(w-x) dF(x) ds - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x) dF(x) \\ &= \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x) dF(x). \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 1.9 *La probabilidad de no ruina puede calcularse mediante la siguiente ecuación:*

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x)[1-F(x)]dx. \quad (1.9)$$

Demostración:

Integrando la ecuación que aparece en el lema anterior en el intervalo $[0, u]$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\phi(u) - \phi(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(z) dz - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \int_0^z \phi(z-x) dF(x) dz \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \phi(z) dz - \int_0^u \int_0^z \phi(z-x) dF(x) dz \right),\end{aligned}$$

cambiando los límites de integración se tiene:

$$= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \phi(z) dz - \int_0^u \int_x^u \phi(z-x) dz dF(x) \right),$$

realizando el cambio de variable $y = z - x$ conseguimos:

$$= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \phi(z) dz - \int_0^u \int_0^{u-x} \phi(y) dy dF(x) \right),$$

cambiando la región de integración tenemos que:

$$\begin{aligned}&= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \phi(z) dz - \int_0^u \int_0^{u-x} \phi(y) dF(x) dy \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \left(\phi(z) - \int_0^{u-z} \phi(z) dF(x) \right) dz \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \phi(z) \left(1 - \int_0^{u-z} dF(x) \right) dz \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \phi(z) (1 - F(u-z)) dz \right).\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $y = u - z$ obtenemos el resultado deseado.

□

Antes de continuar debemos realizar algunas observaciones derivadas de la Proposición 1.9, que ayudarán a analizar el comportamiento de la probabilidad de no ruina cuando el capital inicial tiende a infinito⁷, observemos lo siguiente:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} [\phi(u) - \phi(0)] = 1 - \phi(0). \quad (1.10)$$

⁷Nótese que $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = 1$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x)[1-F(x)]dx &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1-F(x)] \\ &= \frac{\lambda}{c} \mu. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Puesto que la esperanza de una variable aleatoria no negativa también puede calcularse como $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1-F(x))dx$. Tomando (1.10) y (1.11) obtenemos que:

$$1 - \phi(0) = \frac{\lambda}{c} \mu,$$

entonces:

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{c} \mu. \quad (1.12)$$

Usando lo anterior, es posible observar que cuando las reclamaciones tienen distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$ se tiene una expresión explícita de $\phi(u)$.

Proposición 1.10 *Cuando los reclamos son exponenciales de parámetro α la probabilidad de no ruina tiene la siguiente expresión:*

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}. \quad (1.13)$$

Demostración:

Bastará con sustituir la expresión anterior en la ecuación (1.8), del lado derecho de la ecuación se tiene que:

$$\frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \phi(u-x) dF(x) = \frac{\lambda}{c} \left[1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} - \underbrace{\int_0^\infty \left[1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})(u-x)} \right] \alpha e^{-\alpha x} dx}_A \right],$$

trabajando con la integral denotada por A se puede observar:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \left[1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})(u-x)} \right] \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} - \frac{\lambda}{c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})(u-x) - \alpha x} dx \\ &= [-e^{-\alpha x}]_0^u - \int_0^\infty \frac{\lambda}{c} e^{-u(\alpha - \frac{\lambda}{c}) - x \frac{\lambda}{c}} dx \\ &= 1 - e^{-\alpha u} - \frac{\lambda}{c} e^{-u(\alpha - \frac{\lambda}{c})} \int_0^\infty e^{-x \frac{\lambda}{c}} dx \\ &= 1 - e^{-\alpha u} - \frac{\lambda}{c} e^{-u(\alpha - \frac{\lambda}{c})} \left[-\frac{c}{\lambda} e^{-x \frac{\lambda}{c}} \right]_0^u \\ &= 1 - e^{-\alpha u} - \frac{\lambda}{c} e^{-u(\alpha - \frac{\lambda}{c})} \left[-\frac{c}{\lambda} e^{-u \frac{\lambda}{c}} + \frac{c}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - e^{-\alpha u} + e^{-u\alpha} - e^{-u(\alpha - \frac{\lambda}{c})} \\
&= 1 - e^{-u(\alpha - \frac{\lambda}{c})},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \phi(u-x)dF(x) &= \frac{\lambda}{c} \left[1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} - (1 - e^{-u(\alpha - \frac{\lambda}{c})}) \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \left[e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha c} \right) \right],
\end{aligned}$$

por otro lado observemos que:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \frac{\lambda}{\alpha c} \left(\alpha - \frac{\lambda}{c} \right) e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} \\
&= \frac{\lambda}{c} \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha c} \right) e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u},
\end{aligned}$$

entonces se cumple la proposición. □

Debido a que la probabilidad de ruina puede ser encontrada resolviendo una ecuación diferencial, interesará conocer su transformada de Laplace ⁸, pues en ocasiones resulta más cómodo obtener una solución cuando nuestro problema se ha transformado, aunque no siempre es fácil revertir la transformada.

Proposición 1.11 *La transformada de Laplace para la probabilidad de no ruina es:*

$$L_{\phi(u)}(v) = \frac{c\phi(0)}{cv - \lambda[1 - L_{f(x)}(v)]}. \quad (1.14)$$

Demostración:

Para calcular esto bastará con observar la Proposición 1.8 y darse cuenta que necesitamos calcular las transformadas de $\phi'(u)$ y $\int_0^u \phi(u-x)dF(x)$. Calculemos primero la transformada de $\phi'(u)$ e integrando por partes obtenemos que:

$$\begin{aligned}
L_{\phi'(u)}(v) &= \int_0^\infty e^{-uv} \phi'(u) du \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-uv} \phi(u)|_0^x] + v \int_0^\infty \phi(u) e^{-uv} du \\
&= vL_{\phi(u)}(v) - \phi(0).
\end{aligned} \quad (1.15)$$

⁸Ver en apéndice B, subtema *Transformada de Laplace y sus propiedades*.

Lo anterior se cumple pues $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-uv} \phi(u) \leq \lim_{u \rightarrow \infty} e^{-uv} = 0$ ya que $0 \leq \phi(u) \leq 1$. Por otro lado tenemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-vu} \int_0^u \phi(u-x) dF(x) du = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \phi(u-x) e^{-vu} du dF(x)$$

Tomemos el cambio de variable $y = u - x$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \phi(u-x) e^{-v(x+y)} dy dF(x) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-vx} dF(x) \int_0^{\infty} \phi(u-x) e^{-vy} dy \\ &= L_{f(x)}(v) L_{\phi(u)}(v). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Utilizando la Proposición 1.9 y las ecuaciones (1.15) y (1.16) escribimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} vL_{\phi(u)}(v) - \phi(0) &= \frac{\lambda}{c} L_{\phi(u)}(v) - \frac{\lambda}{c} L_{f(x)}(v) L_{\phi(u)}(v) \\ &= \frac{\lambda}{c} L_{\phi(u)}(v) [1 - L_{f(x)}(v)]. \end{aligned}$$

Lo anterior se puede reescribir como:

$$cvL_{\phi(u)}(v) - c\phi(0) = \lambda L_{\phi(u)}(v) [1 - L_{f(x)}(v)].$$

Entonces se tiene que:

$$c\phi(0) = L_{\phi(u)}(v) [cv - \lambda [1 - L_{f(x)}(v)]].$$

Despejando obtenemos que:

$$L_{\phi(u)}(v) = \frac{c\phi(0)}{cv - \lambda [1 - L_{f(x)}(v)]}.$$

□

Lógicamente para obtener la probabilidad de no ruina debemos invertir la transformada, aun cuando es más sencillo obtener resultados después de aplicar la transformada de Laplace no tenemos una expresión explícita para la probabilidad de ruina. Por las propiedades de la transformada de Laplace rápidamente podemos ver que la transformada de la probabilidad de ruina es:

$$L_{\psi(u)}(v) = \frac{1}{v} - \frac{c\phi(0)}{cv - \lambda [1 - L_{f(x)}(v)]}. \tag{1.17}$$

1.2.3. Definición de la probabilidad de ruina con horizonte finito.

Ya se ha definido una medida del riesgo en el sector de daños, pero esta medida tal vez no se ajuste de manera apropiada a las expectativas del corto y mediano plazo de una compañía aseguradora, por tal motivo definimos la probabilidad de ruina con horizonte finito.

Definición 1.4 *Definimos a la probabilidad de ruina con horizonte finito como:*

$$\psi(u, t) = P[\tau \leq t | U_0 = u]. \quad (1.18)$$

Una de las inquietudes es conocer la relación entre la probabilidad de ruina con un horizonte finito e infinito, para comenzar a analizar las propiedades se inicia con la probabilidad de ruina en tiempo infinito.

Proposición 1.12 *Sea $u_1 \leq u_2$ entonces $\psi(u_2) \leq \psi(u_1)$.*

Demostración:

Consideremos el experimento $u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ y tomemos el momento de quiebra en función de u como la primera vez que la reserva es negativa, denotemos este evento por $\{u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i < 0\}$ entonces $\{u_2 + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i < 0\} \subseteq \{u_1 + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i < 0\}$, puesto que si se presenta la quiebra cuando tenemos un capital inicial u_2 en especial se presentará dicho evento para u_1 menor o igual a u_2 , por lo que obtenemos la siguiente desigualdad:

$$P(\{u_2 + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i < 0\}) \leq P(\{u_1 + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i < 0\})$$

$$\psi(u_2) \leq \psi(u_1).$$

□

Proposición 1.13 *Sea $t_1 \leq t_2$ entonces $\psi(u, t_1) \leq \psi(u, t_2)$.*

Demostración:

Consideremos el experimento $u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ y tomemos el momento de quiebra como la primera vez que la reserva es negativa en el intervalo $[0, t]$, entonces si se presenta la quiebra en el intervalo $[0, t_1]$, en especial se presentará la quiebra en el intervalo $[0, t_2]$ siempre que $t_2 \geq t_1$. Entonces:

$$\psi(u, t_1) \leq \psi(u, t_2).$$

□

Bajo un argumento similar al de la proposición anterior podemos concluir que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) = \psi(u). \quad (1.19)$$

Una de las inquietudes que surgieron durante este trabajo es saber si la probabilidad de ruina en tiempo finito puede ser calculada como la solución de alguna ecuación diferencial, la respuesta es sí, una referencia a esta cuestión puede ser revisada en Pervozvansky A.A. (1998), nos dice que la probabilidad de ruina en horizonte finito satisface:

$$\frac{\partial \psi(u, T)}{\partial u} - \frac{\partial \psi(u, T)}{\partial T} - \lambda \psi(u, T) + \lambda \int_0^u \psi(u - y, T) dFy + \lambda [1 - F(u)] = 0, \quad (1.20)$$

cuando $c = 1$, las condiciones de frontera son $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u, T) = 0$ para toda $T > 0$ y $\psi(u, 0) = 0$ para toda $u \geq 0$.

Nos gustaría poder transformar nuestro modelo original a uno donde se tenga una tasa de ingreso por primas $c = 1$. Una posible solución es dividir entre c nuestro proceso de riesgo, desde luego suponiendo reclamaciones continuas. Deseamos conocer qué relaciones existirán entre ambos modelos.

Proposición 1.14 *Sea U_t nuestro proceso de riesgo y \widehat{U}_t el proceso de riesgo obtenido de dividir entre c el proceso original, entonces:*

$$\psi_{U_t}(u, T) = \psi_{\widehat{U}_t}\left(\frac{u}{c}, T\right). \quad (1.21)$$

Para el proceso \widehat{U}_t los montos por siniestros son $\frac{X_i}{c}$.

Demostración:

Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \psi_{U_t}(u, T) &= P\left[\inf_{0 \leq t \leq T} \left\{u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i\right\} < 0\right] \\ &= P\left[\inf_{0 \leq t \leq T} \left\{\frac{u}{c} + t - \sum_{i=1}^{N_t} \frac{X_i}{c}\right\} < 0\right] \\ &= \psi_{\widehat{U}_t}\left(\frac{u}{c}, T\right) \end{aligned}$$

□

Otra forma de transformar nuestro modelo original U_t a uno \widehat{U}_t donde la tasa de ingresos sea $c = 1$, consiste en realizar un rescalamiento en el tiempo, esta operación dará como resultado una compresión o expansión en el tiempo de nuestro proceso

de riesgo. Por ejemplo si tomamos los procesos de riesgo U_{3t} y $U_{\frac{t}{2}}$ son versiones de U_t escaladas en el tiempo. En la figura (1.1) se pueden observar las gráficas de las versiones escaladas en el tiempo de U_t ⁹.

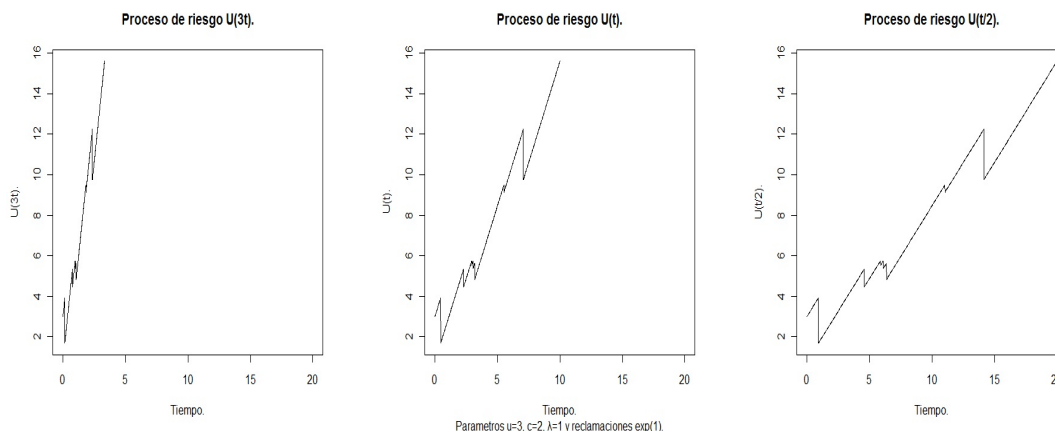


Figura 1.1: Procesos de riesgo escalados en el tiempo.

En general si la variable t es escalada por un parámetro $\alpha > 0$, $U_{\alpha t}$ es una versión comprimida de U_t si $\alpha > 1$ y una versión expandida de U_t si $0 < \alpha < 1$. En este caso el proceso de riesgo U_{3t} se obtiene cuando se acelera tres veces la velocidad a la que ocurren los siniestros en nuestro proceso U_t y el proceso $U_{\frac{t}{2}}$ se obtiene cuando los siniestros se producen a la mitad de velocidad con que ocurrían en U_t .

En general podemos decir, lo que le pase a U_t en el instante t le sucederá a $U_{\frac{t}{\alpha}}$ en el instante αt . Bajo estas consideraciones los tiempos en los que ocurren las reclamaciones W_1, W_2, W_3, \dots en el modelo de riesgo U_t , ocurrirán en los tiempos W'_1, W'_2, \dots del modelo de riesgo $U_{\frac{t}{\alpha}}$, que serán c veces más cortos o largos de como ocurrieron en el proceso U_t . Esto implica que si los tiempos W_i se distribuyen $Gama(n, \lambda)$ entonces los tiempos W'_i se distribuyen $Gama(n, \frac{\lambda}{c})$ para el proceso de riesgo $U_{\frac{t}{\alpha}}$. Con los comentarios anteriores se observa la siguiente igualdad.

Proposición 1.15 *La probabilidad de ruina en un horizonte de tiempo finito T para el modelo U_t con constante de ingreso por primas c e intensidad del proceso Poisson λ es equivalente a:*

$$\psi_{\lambda,c}(u, T) = \psi_{\frac{\lambda}{c},1}(u, cT), \quad (1.22)$$

la probabilidad de ruina en un horizonte de tiempo cT , para un modelo de riesgo con capital inicial u , intensidad del proceso Poisson $\frac{\lambda}{c}$ y una tasa de ingreso por primas constante e igual a 1.

⁹En el apéndice D, se encuentra el código necesario para generar dichas gráficas.

1.2.4. Fórmula de Pollaczek-Kinchine.

Existe una perspectiva interesante sobre el proceso de riesgo, y es que puede ser visto como una caminata aleatoria. Para observar esto consideremos los tiempos entre una reclamación y otra denotados por T_i , entonces la compañía aseguradora únicamente podrá arruinarse en los tiempos W_n , adicionalmente notemos que $N_{W_n} = n$.

$$\begin{aligned}
 1 - \psi(u) &= P \left[u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \geq 0 \text{ para toda } t > 0 \right] \\
 &= P \left[u + cW_n - \sum_{i=1}^{N_{W_n}} X_i \geq 0 \text{ para toda } n \geq 1 \right] \\
 &= P \left[u + cW_n - \sum_{i=1}^n X_i \geq 0 \text{ para toda } n \geq 1 \right] \\
 &= P \left[u + \sum_{i=1}^n cT_i - \sum_{i=1}^n X_i \geq 0 \text{ para toda } n \geq 1 \right] \\
 &= P \left[u + \sum_{i=1}^n [cT_i - X_i] \geq 0 \text{ para toda } n \geq 1 \right] \\
 &= P \left[\sum_{i=1}^n [cT_i - X_i] \leq u \text{ para toda } n \geq 1 \right] \\
 &= P \left[\sup_{n \geq 1} \left\{ \sum_{i=1}^n [cT_i - X_i] \right\} \leq u \right]
 \end{aligned}$$

Tomamos $Z_i = X_i - cT_i$ y definimos una nueva variable $G_0 = 0$ entonces $G_n = G_{n-1} + Z_n$ para $n \geq 1$, nuestro problema se ha transformado en encontrar la distribución del supremo de una caminata aleatoria.

El problema anterior es equivalente a uno existente en teoría de colas, Felix Pollaczek y Aleksandre Khinchine fueron científicos que abordaron dicha problemática en teoría de colas. Uno de los resultados derivados de su estudio es la fórmula de Pollaczek-Khinchine, tal conclusión tiene importantes equivalencias e implicaciones para la teoría del riesgo. A continuación se exponen los elementos necesarios para llegar a la fórmula mencionada.

Definición 1.5 Sea $F(x)$ una función de distribución no degenerada asociada a la variable aleatoria continua X entonces decimos que $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ es la cola de la distribución de X .

Definición 1.6 Vamos a definir a la cola integrada de $F(x)$ como la función:

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy.$$

Con los elementos anteriores estamos listos para mostrar una forma alternativa de calcular la probabilidad de ruina:

Teorema 1.1 (Pollaczek-Kinchine) La probabilidad de no ruina puede calcularse como:

$$\phi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u),$$

para $u \geq 0$.

Demostración:

Supongamos que:

$$\phi^*(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u), \quad (1.23)$$

calculando la transformada de Laplace de la ecuación (1.23), tenemos:

$$\begin{aligned} L_{\phi^*(u)}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-su} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u) du \\ &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-su} F_I^{*n}(u) du \\ &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \int_0^{\infty} F_I^{*n}(u) \frac{d}{du} \left[-\frac{1}{s} e^{-su}\right] du \end{aligned}$$

Integrando por partes obtenemos que

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left[-\frac{1}{s} F_I^{*n}(u) e^{-su} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-su}}{s} dF_I^{*n}(u) \right] \\ &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-su} dF_I^{*n}(u) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-su} f_I^{*n}(u) du \\ &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \frac{1}{s} (L_{f_I(u)}(s))^n \\ &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda\mu}{c} L_{f_I(u)}(s) \right]^n \end{aligned}$$

Suponiendo que $0 < \frac{\lambda\mu}{c}L_{f_I(u)}(v) < 1$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \frac{1}{s} \left[\frac{1}{1 - \frac{\lambda\mu}{c}L_{f_I(u)}(s)} \right] \\ &= \frac{c(1 - \frac{\lambda\mu}{c})}{sc - s\lambda\mu L_{f_I(u)}(s)} \end{aligned}$$

Pero ya sabemos que $\phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$, entonces:

$$= \frac{c\phi(0)}{sc - s\lambda\mu L_{f_I(u)}(s)}. \quad (1.24)$$

Por otro lado vamos a calcular lo siguiente:

$$\begin{aligned} s\lambda\mu L_{f_I^{*n}(u)}(s) &= s\lambda\mu \int_0^\infty e^{-us} \frac{1}{\mu} \bar{F}(u) du \\ &= s\lambda \int_0^\infty e^{-us} [1 - F(u)] du \\ &= s\lambda \left[\frac{1}{s} - \int_0^\infty e^{-us} F(u) du \right] \\ &= \lambda \left[1 - s \int_0^\infty e^{-us} F(u) du \right] \\ &= \lambda [1 - sL_{F(u)}(s)], \end{aligned}$$

usando la propiedad de la transformada de Laplace que expresa la relación existente entre la transformada de una función y la transformada de su derivada obtenemos:

$$= \lambda [1 - L_{f(u)}(s)].$$

Sustituyendo lo anterior en (1.24) obtenemos que:

$$L_{\phi^*(u)}(s) = \frac{c\phi(0)}{sc - \lambda[1 - L_{f(u)}(s)]}. \quad (1.25)$$

Como la probabilidad de no ruina y la función $\phi^*(u)$ tienen la misma transformada de Laplace entonces son iguales, lo que demuestra el teorema anterior.

□

Una observación al resultado anterior es que la probabilidad de no ruina puede entenderse como la función de distribución de una variable aleatoria geométrica

compuesta de parámetros $(1 - \frac{\lambda\mu}{c}, F_I)$. Veamos que es cierto, tomemos N una variable aleatoria geométrica de parámetro $p = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$ y definamos la variable aleatoria $Z = \sum_{i=1}^N K_i$ donde K_i tiene función de distribución $F_I(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} P[Z \leq x] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[Z \leq x | N = n] p(1-p)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\sum_{i=1}^n K_i \leq x\right] p(1-p)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_I^{*n}(x) p(1-p)^n. \end{aligned}$$

Una de las ventajas que provee la fórmula de Pollaczek-Kinchine radica en poder simular la probabilidad de no ruina como una suma aleatoria de variables aleatorias, en vez de simular las trayectorias del proceso de riesgo, usar el resultado de Pollaczek-Kinchine disminuye el número de variables aleatorias involucradas en la modelación del proceso de riesgo. De igual forma la probabilidad de ruina puede expresarse como:

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \bar{F}_I^{*n}(u). \quad (1.26)$$

Puesto que:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= 1 - \phi(u) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u)\right] \\ &= \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right) - \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \frac{\frac{\lambda\mu}{c}}{1 - \frac{\lambda\mu}{c}} - \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u), \end{aligned}$$

si se cumple la condición de ganancia neta entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n - \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u) \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n [1 - F_I^{*n}(u)] \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \bar{F}_I^{*n}(u).
 \end{aligned}$$

1.2.5. Tipos de reclamaciones.

En la práctica deseamos describir el tipo de siniestros que se aseguran, me interesará conocer si nuestra cartera de riesgos puede generar reclamaciones enormes que lleven a la quiebra, el problema anterior puede ser analizado con el estudio de las colas de las distribuciones de los siniestros. Se debe recordar que la función generadora de momentos de una variable aleatoria X es definida como $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$. En especial me interesa que la variable aleatoria X tome valores positivos y se definen los siguientes tipos de variables:

Definición 1.7 *Los montos por siniestros pueden ser divididos en dos clases.*

- Se dice que una variable aleatoria X pertenece a la clase de las distribuciones de cola ligera si para alguna $t > 0$ sucede que $M_X(t) < \infty$.
- Se dice que una variable aleatoria X pertenece a la clase de las distribuciones de cola pesada si: $M_X(t) = \infty$ para toda $t > 0$.

Algunas de las distribuciones de cola ligera son:

- Distribución exponencial.
- Distribución gama.
- Distribución ji-cuadrada.
- Distribución uniforme.

Una primera propiedad para las distribuciones de cola ligera es:

Proposición 1.16 *Sea $F(x)$ la función de distribución de una variable aleatoria no negativa X , si $M_X(t_0) < \infty$ para alguna $t_0 > 0$ entonces existen $a, b > 0$ tales que se cumple la siguiente desigualdad $\bar{F}(x) \leq ae^{-bx}$.*

Demostración:

Primero se observa que:

$$\begin{aligned}
M_X(s) - 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x) - 1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{sx} - 1) dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1) dF(x) + \int_0^{\infty} (e^{sx} - 1) dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^0 \int_x^0 (-s) e^{sy} dy dF(x) + \int_0^{\infty} \int_0^x s e^{sy} dy dF(x) \\
&= -s \int_{-\infty}^0 \int_x^0 e^{sy} dy dF(x) + s \int_0^{\infty} \int_0^x e^{sy} dy dF(x) \\
&= -s \int_{-\infty}^0 \int_x^0 e^{sy} f(x) dy dx + s \int_0^{\infty} \int_0^x e^{sy} f(x) dy dx,
\end{aligned}$$

cambiando los órdenes de integración:

$$\begin{aligned}
&= -s \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^y e^{sy} f(x) dx dy + s \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} e^{sy} f(x) dx dy \\
&= -s \int_{-\infty}^0 F(y) e^{sy} dx dy + s \int_0^{\infty} \bar{F}(y) e^{sy} dx dy,
\end{aligned}$$

entonces:

$$\frac{M_X(s) - 1}{s} = \int_{-\infty}^0 F(y) e^{sy} dy + \int_0^{\infty} \bar{F}(y) e^{sy} dy.$$

Suponiendo que la variable aleatoria X tiene cola ligera existe $s = s_0$ tal que $M_X(s_0) < \infty$, por tanto:

$$\begin{aligned}
\infty > \frac{M_X(s_0) - 1}{s_0} &= - \int_{-\infty}^0 F(y) e^{s_0 y} dy + \int_0^{\infty} \bar{F}(y) e^{s_0 y} dy \\
&= \int_0^x \bar{F}(y) e^{s_0 y} dy + \int_x^{\infty} \bar{F}(y) e^{s_0 y} dy - \int_{-\infty}^0 F(y) e^{s_0 y} dy \\
&\geq \int_0^x \bar{F}(y) e^{s_0 y} dy - \int_{-\infty}^0 F(y) e^{s_0 y} dy \\
&\geq [1 - F(x)] \frac{e^{s_0 x} - 1}{s_0} - \frac{1}{s_0},
\end{aligned}$$

por lo que:

$$\frac{M_X(s_0) - 1}{s_0} \geq [1 - F(x)] \frac{e^{s_0 x} - 1}{s_0} - \frac{1}{s_0},$$

entonces:

$$1 - F(x) \leq M_X(s_0) e^{-s_0 x}$$

□

Con el resultado anterior se observa que para distribuciones de cola ligera la función $\bar{F}(x)$ decae más rápido a cero que una función exponencial.

Ahora nos interesa conocer propiedades sobre las distribuciones de cola pesada, algunas de estas distribuciones son:

- La distribución lognormal.
- La distribución Weibull.
- La distribución Pareto.
- La distribución Burr.

Para continuar con nuestro estudio definimos la función tasa de riesgo $m(x)$ de una variable aleatoria X con función de densidad $f(x)$ y de distribución $F(x)$,

$$m(s) = \frac{f(s)}{1 - F(s)} \quad \text{si } F(s) < 1$$

También puede ser denotada como:

$$\begin{aligned} m(s) ds &= \frac{f(s)}{1 - F(s)} dx \\ &= P[X \in (s, s + ds) | X > s] \end{aligned}$$

Ahora vamos a definir $\alpha_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{x}$, donde $G(x) = -\ln \bar{F}(x)$ es la función de riesgo de F , obsérvese que $\frac{dG(x)}{dx} = m(x)$.

Proposición 1.17 *Si $\alpha_F = 0$, entonces F es de cola pesada.*

Demostración:

Supongamos que $\alpha_F = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{x} = 0$, siguiendo la definición de límite tenemos que para toda $\epsilon > 0$ existe $X' > 0$ tal que $G(x) < \epsilon x$ para toda $x > X'$. Por tanto debe existir una constante $c > 0$ tal que $\bar{F}(x) > ce^{\epsilon x}$, entonces:

$$\int_0^\infty e^{sx} \bar{F}(x) dx = \infty,$$

para toda $s \geq \epsilon$.

□

En especial para una función de distribución de cola pesada $F(x)$ tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \overline{F}(x) = \infty,$$

para toda $s > 0$. Una familia importante de funciones de cola pesada es la clase subexponencial.

Definición 1.8 *Decimos que una función F pertenece a la clase subexponencial si:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F(x)} = 2. \quad (1.27)$$

Se denotará a la clase subexponencial por S . Algunas de las funciones de distribución que forman parte de esta familia son las distribuciones lognormal, Pareto y Weibull. Varias de las propiedades que caracterizan a la clase subexponencial se muestran en los siguientes resultados. La Proposición 1.18 y las observaciones derivadas de la Proposición 1.22 generan una interesante interpretación, cuando el monto reclamado es enorme ($x \rightarrow \infty$) lo más seguro es que la mayor parte del monto reclamado sea generado por una sola reclamación (el máximo de las reclamaciones).

Proposición 1.18 *Para variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas X_1 y X_2 con función de densidad $F(x) \in S$ se tiene que:*

$$P[X_1 + X_2 > x] \sim P[\text{máx}\{X_1, X_2\} > x], \quad (1.28)$$

cuando $x \rightarrow \infty$.

Demostración:

Lo que deseamos demostrar es lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P[X_1 + X_2 > x]}{P[\text{máx}\{X_1, X_2\} > x]} = 1.$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} P[\text{máx}\{X_1, X_2\} > x] &= 1 - P[\text{máx}\{X_1, X_2\} \leq x] \\ &= 1 - F^2(x) \\ &= (1 - F(x))(1 + F(x)). \end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que X_1 y X_2 forman parte de la familia subexponencial podemos notar que:

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{2(1 - F(x))} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{(1 + F(x))(1 - F(x))} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F^2(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P[X_1 + X_2 > x]}{P[\max\{X_1, X_2\} > x]}.
\end{aligned}$$

□

También podemos observar que:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \frac{\overline{F}^{*2}(x) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + \frac{F(x) - F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + \frac{\int_0^x dF(y) - \int_0^x F^{*1}(y-x)dF(y)}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(y-x)}{\overline{F}(x)} dF(y),
\end{aligned}$$

como $F(x-y) \leq F(x)$ sucede que $\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \geq 1$ entonces $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2$.

Usaremos lo observado para obtener una nueva característica de interés.

Proposición 1.19 Si $F \in S$, entonces para toda $x' > 0$ se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} = 1, \tag{1.29}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = 1. \tag{1.30}$$

Demostración:

Para $x' \leq x$ tenemos lo siguiente:

$$\frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^{x'} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) + \int_{x'}^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y),$$

por lo que:

$$\frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 1 + F(x') + \frac{\overline{F}(x - x')}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(x')),$$

como $\overline{F}(x) \leq \overline{F}(x - x')$, entonces:

$$1 \leq \frac{\overline{F}(x - x')}{\overline{F}(x)} \leq \left[\frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(x') \right] (F(x) - F(x'))^{-1},$$

cuando $x \rightarrow \infty$ tenemos:

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x - x')}{\overline{F}(x)} \leq 1.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x - x')}{\overline{F}(x)} = 1.$$

La expresión (1.30) se obtiene del siguiente hecho:

$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \right), \end{aligned}$$

de donde se observa que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = 1.$$

□

Proposición 1.20 Sea $F \in S$ y F' la derivada de la función de distribución con $F'(0)=0$ de tal forma que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{\overline{F}(x)} = c$ para alguna $c \in [0, \infty)$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F} * \overline{F}'(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + c. \quad (1.31)$$

Demostración:

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F * F'}(x)}{\overline{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\overline{F * F'}(x) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{F(x) - F * F'(x)}{\overline{F}(x)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\int_0^x dF(y) - \int_0^x F'(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\int_0^x \overline{F}'(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \right).
\end{aligned}$$

Por tanto bastará con demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}'(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = c.$$

Seleccionemos $\epsilon > 0$, entonces existe x_0 tal que $(c - \epsilon)\overline{F}(x) \leq \overline{F}'(x) \leq (c + \epsilon)\overline{F}(x)$ para $x \geq x_0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \overline{F}'(x-y)dF(y) &\leq (c + \epsilon) \int_0^x \overline{F}(x-y)dF(y) \\
&= (c + \epsilon) \int_0^{x-x_0} \overline{F}(x-y)dF(y) + (c + \epsilon) \int_{x-x_0}^x \overline{F}(x-y)dF(y) \\
&\leq (c + \epsilon) \int_0^{x-x_0} \overline{F}(x-y)dF(y) + (c + \epsilon)[F(x) - F(x-x_0)] \\
&= (c + \epsilon) \int_0^{x-x_0} \overline{F}(x-y)dF(y) + (c + \epsilon)[\overline{F}(x-x_0) - \overline{F}(x)] \\
&\leq (c + \epsilon) \int_0^x \overline{F}(x-y)dF(y) + (c + \epsilon)[\overline{F}(x-x_0) - \overline{F}(x)].
\end{aligned}$$

Podemos ver que cuando $x \rightarrow \infty$ y usando los resultados de la proposición se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}'(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = (c + \epsilon) \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = c + \epsilon.$$

Como podemos tomar ϵ tan pequeño como se desee en especial tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}'(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \leq c.$$

De igual forma se puede obtener

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}'(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \geq c.$$

De donde se concluye que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}'(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = c.$$

□

Proposición 1.21 *Si $F \in S$ entonces es de cola pesada.*

Demostración:

Bastará con demostrar que $\alpha_F = 0$. Tomando la versión logarítmica de (1.31) obtenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\log \overline{F}(x-y) - \log \overline{F}(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [G(x) - G(x-y)] = 0,$$

para toda $y \geq 0$. Por lo tanto para toda $\epsilon > 0$, existe $x_0 > 0$ tal que para toda $x > x_0$ tenemos $G(x) - G(x-1) < \epsilon$. Repitiendo el argumento se tiene que:

$$G(x) \leq G(x-1) + \epsilon \leq G(x+2) + 2\epsilon \leq \dots \leq G(x-n) + n\epsilon,$$

donde n es tal que $x_0 \leq x-n \leq x_0+1$.

$$G(x) \leq \sup_{x_0-1 \leq x' \leq x_0} G(x') + (x-x_0)\epsilon, x \leq x_0,$$

como ϵ es arbitrario tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{x} = 0$.

□

Otra propiedad para la clase subexponencial es la siguiente:

Proposición 1.22 *Si F es una función de distribución. Entonces $F \in S$ si y solo si para cada $n = 2, 3, \dots$*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{*n}(x)}{\overline{F}(x)} = n. \quad (1.32)$$

Además si X_1, \dots, X_n son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F \in S$, tenemos que $P[\sum_{i=1}^n X_i > x] \sim P[\max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\} > x]$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Algunas consideraciones para la distribución de la cola integrada de una variable aleatoria, como se trató en la Definición 1.6 son las siguientes:

- Si $F \in S$ implica que $F_I \in S$.
- Si $F_I \in S$ no implica que $F \in S$.

1.2.6. Coeficiente de ajuste.

El coeficiente de ajuste que se denotará por R ayuda a acotar el proceso de riesgo cuando las reclamaciones involucradas son de cola ligera, para encontrarlo debemos resolver lo siguiente.

Definición 1.9 *El coeficiente de ajuste R se define como la raíz positiva de la siguiente ecuación:*

$$K(r) = \lambda[M_X(r) - 1] - cr. \quad (1.33)$$

Donde $M_X(r)$ es la función generadora de momentos de la reclamación X .

Como R es la raíz positiva de la ecuación anterior entonces podemos escribir lo siguiente:

$$\lambda M_X(R) = \lambda + cR.$$

Se observa que si tomamos c en función del margen de seguridad $c = (1 + \theta)\lambda\mu$, nuestro coeficiente de ajuste no depende del parámetro λ . Una de las primeras características de la función $K(r)$ es que $K(0) = 0$. Si suponemos que la función $K(r)$ es diferenciable se obtiene:

$$\frac{d}{dr}K(r) = \lambda \frac{d}{dr}M_X(r) - c,$$

si evaluamos en cero la derivada anterior obtendremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}K(r)|_0 &= \lambda \frac{d}{dr}M_X(r)|_0 - c \\ &= \lambda\mu - c. \end{aligned}$$

Suponiendo que el modelo de riesgo satisface la condición de ganancia neta entonces $\lambda\mu - c < 0$, tal condición nos dice que la función $K(r)$ es decreciente en $r = 0$. Ahora observemos lo que ocurre con la función $K(r)$ cuando r crece. Cuando la función generadora de momentos $M_X(r)$ existe, puede encontrarse un número γ entre $0 < \gamma \leq \infty$, tal que la función $M_X(r)$ es finita para toda $r < \gamma$, entonces:

$$\lim_{r \rightarrow \gamma^-} K(r) = \infty.$$

Para observar lo anterior analicemos los dos casos posibles $\gamma < \infty$ y $\gamma = \infty$. Cuando $\gamma < \infty$ el límite anterior es cierto puesto que para valores menores a γ la

función generadora es finita y cuando nos acercamos a γ se acerca a infinito. En el caso de que $\gamma = \infty$, como las reclamaciones son estrictamente positivas, existe un número positivo ϵ y una probabilidad p tal que:

$$P[X_1 > \epsilon] = p > 0,$$

entonces:

$$M_{\mathbb{X}}(r) = \int_0^{\infty} e^{rx} f(x) dx \geq \int_{\epsilon}^{\infty} e^{rx} f(x) dx \geq e^{r\epsilon} p,$$

por lo tanto:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K(r) \geq \lim_{r \rightarrow \infty} (\lambda e^{r\epsilon} p - \lambda - cr) = \infty.$$

Por la conclusión anterior, el hecho de que la función $K(r)$ es decreciente en cero y $K(0) = 0$ podemos observar que existe algún punto positivo r' que hace de $K(r') = 0$, además existe un punto que denotaremos por r_{min} para el cual la función $K(r)$ alcanza su mínimo. Una característica importante para encontrar el coeficiente de ajuste R es la siguiente:

Proposición 1.23 *La ecuación $K(r) = 0$ tiene una posible solución $c > 0$ si y solo si se cumple la siguiente igualdad:*

$$\int_0^{\infty} e^{rx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda},$$

donde $\bar{F}(x)$ es la cola de la distribución de la variable aleatoria X .

Demostración:

Observemos que:

$$\int_0^{\infty} e^{rx} d\bar{F}(x) = e^{rx} \bar{F}(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} r e^{rx} \bar{F}(x) dx,$$

recordemos que existe la función generadora de momentos de la variable aleatoria X , entonces la función de distribución es de cola ligera y decrece a cero con mayor rapidez que la función exponencial, por tanto lo anterior puede reescribirse como:

$$\int_0^{\infty} e^{rx} d\bar{F}(x) = -1 - \int_0^{\infty} r e^{rx} \bar{F}(x) dx,$$

de forma equivalente podemos observar:

$$\int_0^{\infty} e^{rx} dF(x) = 1 + \int_0^{\infty} r e^{rx} \bar{F}(x) dx. \quad (1.34)$$

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= K(r) \\ &= \lambda(M_x(r) - 1) - cr \\ &= \lambda\left(\int_0^\infty e^{rx} dF(x) - 1\right) - cr, \end{aligned}$$

usando el resultado (1.34) obtenemos:

$$0 = \lambda r \int_0^\infty e^{rx} \bar{F}(x) dx - cr.$$

Lo que implica $\int_0^\infty e^{rx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}$, lo que demuestra lo anterior.

□

El siguiente resultado ayuda a aproximar R cuando no logremos calcularlo de forma explícita. Una vez acotado R podemos usar el método Newton-Raphson para aproximar el número mencionado.

Teorema 1.2 *Si el coeficiente de ajuste R existe entonces:*

$$R < \frac{2(c - \lambda\mu)}{\lambda\mu_2}. \quad (1.35)$$

Demostración:

Al derivar dos veces la función $K(r)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} K'(r) &= \lambda M'_x(r) - c \\ K''(r) &= \lambda \mathbb{E}[x^2 e^{rx}] > \lambda \mathbb{E}[x^2] = \lambda\mu_2, \end{aligned}$$

notemos que $K'(0) = \lambda\mu - c$, por el teorema fundamental del cálculo podemos expresar $K'(r)$ como:

$$K'(r) = K'(0) + \int_0^r K''(s) ds > \lambda\mu - c + \lambda\mu_2 r,$$

entonces:

$$K(r) = K(0) + \int_0^r K'(s) ds > (\lambda\mu - c)r + \lambda\mu_2 \frac{r^2}{2},$$

como $K(R) = 0$ entonces:

$$0 > (\lambda\mu - c)R + \lambda\mu_2 \frac{R^2}{2},$$

por lo que

$$R < \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu_2}.$$

□

1.2.7. Desigualdad de Lundberg.

En esta sección mostraremos uno de los resultados más interesantes en la teoría del riesgo, una forma de acotar la probabilidad de ruina con horizonte infinito.

Proposición 1.24 *Si existe el coeficiente de ajuste R entonces:*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \quad (1.36)$$

Demostración:

Para probar lo anterior vamos a definir $\psi_n(u)$ como la probabilidad de ruina en la n -ésima reclamación o antes de la n -ésima reclamación. Será suficiente mostrar que:

$$\psi_n(u) \leq e^{-Ru},$$

para toda $n = 1, 2, \dots$. Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u) = \psi(u)$. La demostración será realizada por inducción.

- Caso $n = 1$.

Cuando $n = 1$ la probabilidad de quiebra en la primera reclamación o antes de la primera reclamación solo ocurrirá en la primera reclamación antes no es posible, considerando el monto de la reclamación y el tiempo en el que ocurre, obtenemos

que:

$$\begin{aligned}
\psi_1(u) &= P[U(T_1) < 0] \\
&= \int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty P[U(T_1) < 0 | T_1 = t, X = x] \lambda e^{-\lambda t} f(x) dx dt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty f(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty f(x) e^{-R(ct-x)} dx dt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-Rct} \int_0^\infty f(x) e^{-Rx} dx dt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+Rc)t} M_x(R) dt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty e^{-(\lambda+Rc)t} (\lambda + Rc) dt \\
&= e^{-Ru}.
\end{aligned}$$

- Supongase que la desigualdad se cumple para n entonces:

$$\psi_n(u) \leq e^{-Ru}.$$

- Demostremos que la desigualdad se cumple para $n + 1$.

Suponiendo que la primera reclamación ocurre en algún tiempo $t > 0$ y el monto de esta reclamación es x . Si la ruina se presenta en la $(n+1)$ -ésima reclamación o antes de esta podemos considerar los siguientes casos:

- la ruina ocurre en la primera reclamación y entonces $x > u + ct$, ó
- la ruina no ocurre en la primera reclamación, por lo que el proceso de riesgo después de realizar el pago de la reclamación se encuentra en un nivel no negativo $u + ct - x$, y la ruina ocurre en las restantes n reclamaciones pero con un nivel inicial en reservas de $u + ct - x$.

Con lo anterior podemos notar que:

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x) \psi_n(u+ct-x) dx dt,$$

usando la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} \int_0^\infty e^{Rx} f(x) dx dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} M_x(R) dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^\infty e^{-(\lambda+cR)t} (\lambda + cR) dt \\ &= e^{-Ru} \end{aligned}$$

Entonces $\psi_{n+1}(u) \leq e^{-Ru}$. Por tanto $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ para toda $n = 1, 2, \dots$

□

Si se desean conocer mayores detalles de lo presentado en el capítulo se propone revisar los textos Asmussen (2010), Rolski (1998) y Dickson (2005). Algunas de las propiedades que serán de utilidad en los próximos capítulos son aquellas que muestran la relación de un proceso de riesgo con los procesos obtenidos al realizar cambios de escala en las unidades monetarias y en el tiempo, tales propiedades serán usadas para transformar un proceso de riesgo cualquiera por uno con tasa $c = 1$, pues por comodidad algunos resultados toman dicha condición.

Capítulo 2

Probabilidad de ruina con horizonte finito.

Todos los esfuerzos del capítulo serán enfocados en mostrar las diferentes formas de calcular o aproximar (bajo las hipótesis necesarias) las probabilidades de ruina del proceso de riesgo.

En el análisis del proceso de riesgo estamos interesados en las probabilidades de ruina asociadas, sin embargo esta tarea no es sencilla. En la mayoría de los casos se debe trabajar de forma diferente según las hipótesis y variantes que tenga el modelo de riesgo, y aún trabajando de esta manera es muy complicado encontrar una fórmula exacta, por lo que muchas veces nos vemos obligados a usar aproximaciones o cotas.

2.1. Proceso de riesgo en tiempo discreto.

En el capítulo anterior se trabajó con el modelo de riesgo clásico que tiene como característica fundamental, el ser un análisis del proceso de riesgo en tiempo continuo. A continuación trataremos de aproximar el proceso continuo con algún proceso discreto que ayude a abordar nuestra problemática de manera más sencilla, aunque no por esto menos importante. A pesar de ser un análisis discreto, el que se presenta a continuación no deja de tener importancia, puesto que es básico para obtener una mayor claridad en los problemas de riesgo.

Para comenzar con esta tarea supongamos que tenemos un proceso de riesgo en tiempo continuo pero nuestra compañía aseguradora no puede llevar a cabo un monitoreo ininterrumpido de sus reservas, esta hipótesis no es del todo incorrecta ya que en la realidad la aseguradora realiza reportes sobre el estado que guardan sus finanzas cada determinado tiempo, estos periodos de tiempo pueden ser semanales, quincenales, mensuales, etc. El tratar de llevar un análisis y reporte continuos

puede derivar en un gasto excesivo de recursos humanos como de recursos técnicos e informáticos. Por lo anterior supondremos que nuestra aseguradora realizará esta inspección en fechas fijas conocidas por la aseguradora y equidistantes, supongamos que el periodo de tiempo entre una revisión y otra es h . Esto lleva a que las revisiones serán solamente en los momentos $h, 2h, 3h, \dots$. La forma de la probabilidad de ruina del modelo será muy parecida al de tiempo continuo.

Algunas consideraciones importantes sobre tal enfoque, son los tiempos en que la aseguradora llegará al estado de ruina, únicamente podrán presentarse al final de cada periodo, sin embargo notemos que acarrea algunas complicaciones puesto que la aseguradora podría entrar en el estado de quiebra sin que se diera cuenta. Para observar dicho efecto revisemos la figura (2.1).

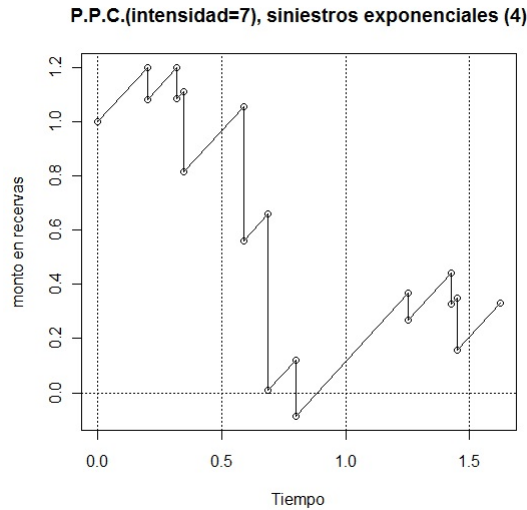


Figura 2.1: Proceso de riesgo

En la imagen anterior se modeló un proceso de riesgo en tiempo continuo considerando una reserva inicial de una unidad monetaria, una intensidad de 7 por año con una tasa por cobro de primas de 1 y reclamaciones exponenciales de parámetro 4. La simulación anterior fue llevada a cabo en el paquete estadístico R¹. Es interesante observar por ejemplo, que si la aseguradora decidiera llevar a cabo reportes del estado de sus reservas semestralmente, la empresa siempre se habría reportado como solvente, no obstante para el segundo semestre del primer año tenemos que la empresa estuvo en quiebra justo después del primer semestre y antes de concluir el segundo semestre, por tanto el discretizar el modelo continuo nos dará una aproximación de lo que buscamos.

Una forma de remediar tal problema consiste en realizar particiones del tiempo

¹Véase apéndice D.

mucho más cortas, al hacer que h sea más pequeña tendremos una mejor aproximación. Para poder trabajar con mayor comodidad en las secciones siguientes vamos a realizar un cambio de escala. Suponiendo que nuestro momento de observación h será la unidad de medida, se logrará que el modelo de riesgo discreto únicamente tome valores en los tiempos $t = 0, 1, 2, \dots$

Existen varios métodos para discretizar el procesos de riesgo, uno de esos métodos puede encontrarse en el libro Insurance Risk and Ruin, Dickson, 2005 en la página 147. Aunque no es un método general es sencillo implementarlo.

2.1.1. El modelo binomial compuesto.

En la sección anterior se comentó la importancia de los modelos discretos para aproximar la probabilidad de ruina del proceso de riesgo en tiempo continuo. Dada la trascendencia de los modelos discretos comenzaremos por trabajar con ellos, para realizar dicha tarea nos apoyaremos del modelo binomial compuesto, aunque existen otros modelos éste es el más sencillo y los demás generalmente son equivalentes.

Para plantear el modelo se deben hacer supuestos sobre cuatro elementos del proceso de riesgo, la primera conjetura tiene efectos sobre el proceso de conteo:

Vamos a considerar un proceso de conteo discreto $\{N_t; t \in \mathbb{N}\}$, donde N_t indica el número de reclamaciones al tiempo t , tal variable aleatoria estará integrada por la suma de una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli de parámetro p . N_t se escribe como sigue:

$$N_t = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_t \text{ para } t = 1, 2, 3, \dots$$

cuando $t = 0$ se define $N_t = 0$. Las variables Bernoulli I_t representan el número de reclamaciones a las que se enfrenta la aseguradora al tiempo t , dada la naturaleza de las variables en cada tiempo solamente podremos obtener una reclamación o ninguna. Por lo mencionado anteriormente es fácil verificar que $N_t \sim Bin(t, p)$ y además cuando $s < t$ con $s, t \in \mathbb{N}$ tenemos que $N_t - N_s \sim Bin(t - s, p)$.

La segunda restricción tiene impacto directo sobre el monto de los siniestros. El monto será modelado por la sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, los valores tomados por las variables serán restringidos únicamente a valores enteros positivos, tal sucesión se considera independiente del proceso de conteo, adicionalmente se denota la función de densidad como $p(x) = P(X_i = x)$ para $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$ con media μ y $\mu_n = E(X^n)$.

Con las observaciones anteriores es clara la forma que tendrá nuestro proceso agregado de siniestros S_t , vamos a definir $S_0 = 0$ cuando $t = 0$, y $S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_{N_t}$ para t en los enteros positivos. Adicionalmente se denota a la función de densidad de S_t como $f_t(x) = P(S_t = x)$ y a la función de distribución de S_t como $F_t(x) = \sum_{i=0}^x f_i(t)$.

Las últimas características del modelo tienen como objetivo el considerar la tasa de ingresos por concepto de primas constante e igual a uno y el monto inicial u con valores en los enteros. Tomando en cuenta las características anteriores estamos listos para definir el proceso de riesgo.

Definición 2.1 *El proceso de riesgo a tiempo discreto bajo las hipótesis anteriores tiene la siguiente forma:*

$$U_t = u + t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \quad \text{donde } t = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

Cuando $t = 0$ se tiene que $U_0 = u$. Únicamente se toma $u \in \mathbb{N}$.

La simulación que se muestra en la figura (2.2), comienza con un monto inicial en reservas $u = 5$, se considera que la probabilidad de que un siniestro se presente en cada periodo es de 0.65 y las reclamaciones tienen una distribución uniforme discreta $\{1, 2\}$.

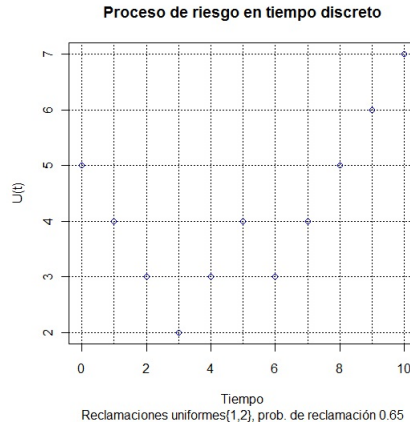


Figura 2.2: Proceso de riesgo en tiempo discreto

Una pregunta que nos inquieta en el modelo es el conocer la condición de ganancia neta, pues si ésta no se cumple eventualmente la aseguradora podría llegar a tener reservas negativas o nulas casi seguramente. Algunas propiedades del modelo que nos ayudarán a resolver nuestra inquietud se muestran enseguida:

Lema 2.1 *Sea U_t un procesos de riesgo como en la Definición 2.1, entonces para dicho proceso tenemos que:*

- $\mathbb{E}[U_t] = u + t(1 - p\mu)$.
- $Var[U_t] = tp(\mu_2 - p\mu^2)$.

$$\blacksquare M_{U_t}(r) = e^{r(u+t)}M_{S_t}(-r).$$

Para la última ecuación tenemos que $M_{S_t}(r) = (1 - p + pM_X(r))^t$.

Demostración:

Primero calculamos $\mathbb{E}[U_t]$ usando el hecho de que $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[X]$, de forma análoga a como se vio en el capítulo anterior.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U_t] &= c + t - \mathbb{E}[S_t] \\ &= c + t - \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[X] \\ &= c + t - (tp)(\mu) \\ &= c + t(1 - p\mu).\end{aligned}$$

Recordemos que $\text{Var}[S] = \mathbb{E}[N_t]\text{Var}[X] + \text{Var}[N_t]\mathbb{E}^2[X]$, esto se vio en el capítulo anterior, entonces:

$$\begin{aligned}\text{Var}[S] &= \mathbb{E}[N_t]\text{Var}[X] + \text{Var}[N_t]\mathbb{E}^2[X] \\ &= tp[\mu_2 - \mu^2] + \mu^2(tp)(1 - p) \\ &= tp[\mu_2 - \mu^2 + \mu^2(1 - p)] \\ &= tp[\mu_2 - \mu^2p].\end{aligned}$$

Para la última característica recordemos que en el capítulo anterior vimos que $M_{S_t}(r) = M_{N_t}(\ln M_X(-r))$ por lo que:

$$\begin{aligned}M_{U(t)}(r) &= e^{r(u+t)}\mathbb{E}[e^{-r(t)}] \\ &= e^{r(u+t)}M_{N_t}(\ln M_X(-r)) \\ &= e^{r(u+t)}[1 - p + pe^{\ln M_X(-r)}] \\ &= e^{r(u+t)}[1 - p + pM_X(-r)].\end{aligned}$$

□

Gracias al lema anterior y llevando a cabo un análisis similar al realizado en el caso continuo la condición de ganancia neta debe satisfacer que $1 > p\mu$, obsérvese que esta condición es tomada en cuenta al realizar la simulación que se presenta en la figura (2.2).

Una variable aleatoria derivada del proceso y de vital interés para el estudio de las probabilidades de ruina es el tiempo en que la aseguradora entra al estado de ruina, observe que la ruina únicamente puede ocurrir en los tiempos preestablecidos, entendiéndose por ruina como el momento en el que $U_t \leq 0$ para alguna $t = 1, 2, 3, \dots$. A continuación definimos el tiempo en que ocurre la ruina.

Definición 2.2 *El tiempo en que ocurre la ruina para el modelo discreto será denotado como:*

$$\tau_d = \min\{t \in \mathbb{N}, U(t) \leq 0\}. \quad (2.2)$$

Si nunca ocurre la ruina entonces definimos $\tau_d = \infty$.

Se remarca que para el proceso de riesgo la ruina no puede suceder a tiempo $t = 0$ incluso si suponemos que $u = 0$. Otra característica de la variable aleatoria anterior es notar que si $\tau_d \geq t$ significa que $U_i > 0$ para $i < t$, esta observación es muy importante ya que muestra la relación existente entre el tiempo de ruina y el proceso de riesgo. Con las aportaciones anteriores estamos listos para definir las probabilidades de ruina asociadas al modelo.

Definición 2.3 *La probabilidad de ruina con horizonte infinito para el modelo discreto se define como:*

$$\psi_d(u) = P(\tau_d < \infty | U(0) = u). \quad (2.3)$$

La probabilidad de ruina con horizonte finito para el modelo discreto se define como:

$$\psi_d(u, k) = P(\tau_d \leq k | U(0) = u). \quad (2.4)$$

Algunas propiedades interesantes que relacionan las definiciones anteriores y que ayudarán en nuestro análisis se enlistan a continuación.

Proposición 2.1 *Las siguiente relaciones se cumplen.*

- $\psi_d(u, k_1) \leq \psi_d(u, k_2) \leq \dots \leq \psi_d(u)$ para $k_1 \leq k_2 \leq \dots < \infty$.
- $\psi_d(u_1, k) \leq \psi_d(u_2, k)$ para $u_1 \geq u_2$.
- $\psi_d(u_1) \leq \psi_d(u_2)$ para $u_1 \geq u_2$.
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_d(u, k) = \psi_d(u)$.

Demostración: Un análisis similar como el que se hizo en tiempo continuo, lleva a las anteriores conclusiones. \square

Aunque estudiar las probabilidades de ruina a tiempo infinito no son el objetivo principal del trabajo, son importantes pues proporcionan una cota superior para las probabilidades de ruina en tiempo finito. Con tal justificante se propone mostrar algunas formas de estimar la probabilidad de ruina en tiempo infinito para el modelo discreto. Un análisis más amplio de las siguientes dos proposiciones puede verse en Gerber(1988).

Proposición 2.2 *La probabilidad de ruina con horizonte infinito para el proceso de riesgo discreto (Definición 2.1) puede ser calculada con las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned}\psi_d(0) &= q\psi_d(1) + p, \\ \psi_d(u) &= q\psi_d(u+1) + p \sum_{i=1}^u \psi_d(u+1-i)p(i) + p \sum_{i=u+1}^{\infty} p(i).\end{aligned}$$

Donde $\psi_d(0) = p\mu$.

Demostración:

Cuando la reserva inicial es nula, en el primer periodo solo pueden ocurrir los siguientes casos, que exista una reclamación y entonces la compañía quedará arruinada puesto que lo mínimo que debemos pagar por reclamación es una unidad o en el otro caso, no tenemos reclamaciones en el periodo $t = 1$, lo que incrementa nuestra reserva en una unidad monetaria.

$$\begin{aligned}\psi_d(0) &= \sum_{i=0}^1 P[\tau_d < \infty | N_1 = i] P[N_1 = i] \\ &= P[N_1 = 0] P[\tau_d < \infty | N_1 = 0] + P[N_1 = 1] P[\tau_d < \infty | N_1 = 1] \\ &= (1-p)\psi_d(1) + p.\end{aligned}$$

Cuando la reserva inicial es $u > 0$ y condicionando con respecto a N_1 tenemos que solamente pueden ocurrir dos eventos. En el primero no ocurre reclamación e incrementamos nuestra reserva en una unidad monetaria, en el segundo evento tenemos una reclamación y solamente estaremos en el estado de quiebra si la reclamación $X_1 \geq u + 1$.

$$\begin{aligned}\psi_d(u) &= P[N_1 = 0] P[\tau_d < \infty | N_1 = 0] + P[N_1 = 1] P[\tau_d < \infty | N_1 = 1] \\ &= (1-p)\psi_d(u+1) + p P[\tau_d < \infty | N_1 = 1] \\ &= (1-p)\psi_d(u+1) + p \sum_{x=1}^{\infty} P[\tau_d < \infty | N_1 = 1, X_1 = x] P[X_1 = x]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-p)\psi_d(u+1) + p \sum_{x=1}^u P[\tau_d < \infty | N_1 = 1, X_1 = x] P[X_1 = x] \\
&+ \sum_{x=u+1}^{\infty} P[\tau_d < \infty | N_1 = 1, X_1 = x] P[X_1 = x] \\
&= (1-p)\psi_d(u+1) + p \sum_{x=1}^u \psi_d(u+1-x) P[X_1 = x] + p \sum_{x=u+1}^{\infty} P[X_1 = x].
\end{aligned}$$

Para ver que $\psi_d(0) = p\mu$, primero vamos a probar que para toda x se cumple:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k \mathbb{E}[(S_k + x)^{(k)} q^{S_k+x}] = \frac{1}{1-p\mu}. \quad (2.5)$$

Donde $a^{(k)} = k! \binom{a}{k}$ además $S_0 = 0$ y $S_k = X_1 + \dots + X_k$.

Consideremos $g(z) = \mathbb{E}[z^{X_i}]$ como la función generadora de probabilidad de las variables aleatorias X_i . Entonces:

$$\mathbb{E}[(S_k + x)^{(k)} q^{S_k+x}] = q^k D^k [g(z)^k z^x] |_{z=q},$$

donde D es el operador derivada. Tomemos lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p^k D^k [g(z)^k z^x] |_{z=q},$$

usando series de Taylor obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p^k D^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-p)^j D^j [g(z)^k z^x] |_{z=1},$$

realizando el cambio de variable $n = k + j$ lo anterior se reescribe como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p^n D^n \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} g(z)^k z^x \right] |_{z=1},$$

usando el teorema del binomio de Newton lo anterior equivale a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p^n D^n [(g(z) - 1)^n z^x] |_{z=1},$$

como $g(1) = 1$ y $g'(1) = \mu$, lo anterior se simplifica y obtenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n \mu^n = \frac{1}{1-p\mu}.$$

Por tanto la ecuación (2.5) es válida. Ahora veamos que el evento de ruina es equivalente a que nuestro proceso de riesgo visite el estado 0. Dado S_k , una posible visita al nivel cero entre (o en) la k -ésima y la $(k + 1)$ -ésima reclamación toma lugar al tiempo $t = S_k$ y esta visita se llevará a cabo siempre que $N_t = k$. Entonces la probabilidad condicional de visitar el nivel cero entre (o en) la k -ésima y la $(k + 1)$ -ésima reclamación es:

$$P[N_t = K] = \binom{S_k}{k} p^k q^{S_k - k}.$$

Entonces la probabilidad de que el proceso visite el nivel cero por última vez, entre (o en) la k -ésima y la $(k + 1)$ -ésima reclamación es:

$$\mathbb{E}\left[\binom{S_k}{k} p^k q^{S_k - k}\right](1 - \psi_d(0)).$$

Por lo tanto la probabilidad de ruina que es también la probabilidad de visitar el cero es:

$$\begin{aligned} \psi_d(0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\binom{S_k}{k} p^k q^{S_k - k}\right](1 - \psi_d(0)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k \mathbb{E}[S_k^{(k)}] q^{S_k - k} (1 - \psi_d(0)). \end{aligned}$$

Aplicando el resultado (2.5) obtenemos que:

$$\psi_d(0) = \frac{p\mu}{1 - p\mu} (1 - \psi_d(0)).$$

Despejando $\psi_d(0)$ de lo anterior obtenemos que $\psi_d(0) = p\mu$.

□

La fórmula anterior proporciona un método recursivo para calcular la probabilidad de ruina, sin embargo es posible encontrar una forma adicional de calcular esta probabilidad sin recursión, pero para lograrlo debemos calcular la esperanza de una variable. Para conseguir dicho cometido tendremos que definir $b^{(k)} = k! \binom{b}{k}$ y recordar que si tenemos la variable aleatoria S entonces $(S - d)_+$ es una variable aleatoria censurada por la izquierda que únicamente toma valores cuando $S > d$ y es cero en otro caso. Con estos comentarios estamos listos para enunciar una forma alternativa de calcular la probabilidad de ruina.

Proposición 2.3 *La probabilidad de ruina con horizonte infinito asociado al modelo*

de riesgo discreto (Definición 2.1) puede ser expresada como:

$$\begin{aligned}\psi_d(0) &= p\mu, \\ \psi_d(u) &= (1 - p\mu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{p}{1-p} \right)^k E[(S-d)_+^{(k)} (1-q)^{S_k-u}].\end{aligned}$$

Demostración: Véase en Gerber(1988).

A pesar de que la proposición anterior proporciona una nueva forma de encontrar la probabilidad de ruina, el calcular la esperanza del teorema anterior puede ser más complicado. Las probabilidades antes mostradas ayudarán a acotar la probabilidad de ruina con horizonte finito. Sin embargo lo que realmente interesa es encontrar la probabilidad de ruina con horizonte finito. Para lograrlo se puede trabajar con la probabilidad de no ruina o de supervivencia. Denotamos la probabilidad de no ruina o de supervivencia en tiempo infinito como:

$$\phi_d(u) = 1 - \psi_d(u), \quad (2.6)$$

y a la probabilidad de no ruina o probabilidad de supervivencia en tiempo finito como

$$\phi_d(u, k) = 1 - \psi_d(u, k), \quad (2.7)$$

La notación anterior servirá para mostrar una forma de calcular la probabilidad de ruina en tiempo finito que se muestra enseguida:

Proposición 2.4 *La probabilidad de no ruina en tiempo finito para el modelo de riesgo discreto (Definición 2.1) puede ser calculada como:*

$$\begin{aligned}\psi_d(0, k) &= \frac{\sum_{i=1}^k (k-i+1) f_i(k+1)}{(1-q)(k+1)}, \\ \psi_d(u, k) &= F_{u+k}(k) - (1-q) \sum_{i=0}^{k-1} \psi_d(0, k-1-i) f_{u+i+1}(i).\end{aligned}$$

Demostración: Véase Willmot(1993).

2.1.2. Definición alternativa del modelo de riesgo a tiempo discreto.

Se revisaron algunos resultados importantes para el modelo de riesgo discreto (Definido 2.1) pero existe una forma alternativa de analizar el proceso. Para reescribir el modelo se va a considerar una sucesión de variables aleatorias que se forma

como sigue $Y_i = I_i X_i$ donde I_i y X_i son las variables aleatorias definidas al inicio de la sección. Al considerar la nueva sucesión de variables aleatorias el proceso de riesgo discreto puede representarse como a continuación se enuncia.

Definición 2.4 *El proceso de riesgo a tiempo discreto puede describirse como:*

$$U_t = u + t - \sum_{i=1}^t Y_i \quad \text{donde } t = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

Cuando $t = 0$ se tiene $U_0 = u$. Únicamente se toma $u \in \mathbb{N}$.

Observemos que en la definición anterior el proceso de conteo ya no es considerado, porque en cada periodo de tiempo tendremos una reclamación, pero tal reclamación podría ser de cero unidades monetarias. Será interesante conocer la distribución de la variable aleatoria Y_i en función de las variables que la forman, vamos a denotar a su función de densidad por $h(x) = P(Y_i = x)$, entonces $h(0) = 1 - p$ y $h(x) = p(x)p$ cuando $x = 1, 2, 3, \dots$. La función de distribución será denotada como $H(x) = P(Y_i \leq x)$.

Para tal estructura del proceso de riesgo mostraremos una fórmula de calcular la probabilidad de ruina en tiempo finito que enunciamos a continuación y que aparece en Rincón(2012):

Proposición 2.5 *Para el proceso de riesgo discreto (Definición 2.8) la probabilidad de ruina con horizonte finito puede ser calculada de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \psi_d(u, 1) &= 1 - H(u), \\ \psi_d(u, k) &= \psi_d(u, 1) + \sum_{i=0}^{k-1} \psi_d(u + 1 - i, k - 1). \end{aligned}$$

Demostración: Véase Rincón(2012).

En la proposición anterior es importante resaltar que el capital inicial puede ser cualquier número positivo, en especial podemos tomar los números enteros.

Bajo la definición alternativa del proceso de riesgo existe un interesante análisis que proponen Lefèvre y Loisel (2008). Ellos notan que el evento $\{\tau_d \geq t + 1\}$ es equivalente a que $\{S_i < u + i\}$ para $1 \leq i \leq t$ y sugieren analizar $S_t = Y_1 + \dots + Y_t$, entonces cuando $u = 0$ obtenemos el siguiente resultado:

Lema 2.2 *Sea $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas no negativas con valores en $0, 1, 2, \dots$. Consideremos la i -ésima suma parcial $S_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_i$ para $i \geq 1$. Entonces para enteros $t \geq 1$ y*

$0 \leq n \leq t - 1$ tenemos que:

$$P[S_i < i \text{ para } 1 \leq i < t \text{ y } S_t = n] = \frac{(t-n)}{t} h^{*t}(n). \quad (2.9)$$

Donde $h^{*t}(n)$ con $n \in 0, 1, 2, \dots$ denota la función de densidad de S_t (la t -ésima convolución de Y_1).

Demostración:

Gráficamente lo que deseamos calcular representa la probabilidad de que la suma S_t alcance el nivel n al tiempo t sin que en ningún momento cruce la diagonal con pendiente 1 como se ve en la figura (2.3).

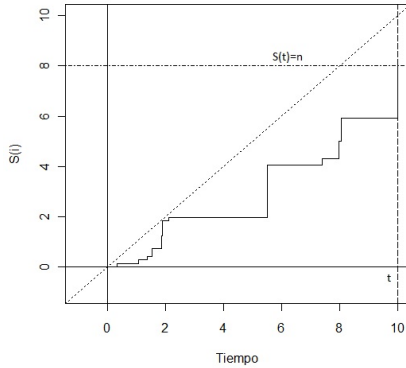


Figura 2.3: Proceso del monto agragado de siniestros S_i .

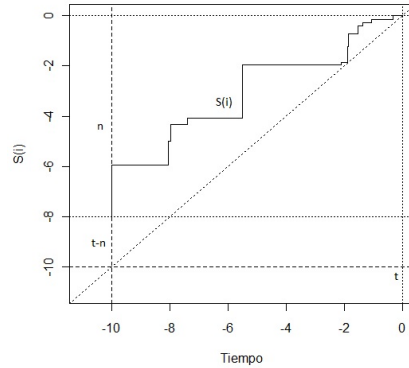


Figura 2.4: Proceso S_i después de una rotación de 180° .

Para abordar el problema vamos a rotar nuestra figura 180° y consideremos nuestras trayectorias en el sentido inverso con respecto al tiempo, lo anterior se observa en la figura (2.4). Notemos que el proceso invertido comienza en el nivel $t - n$ y se mueve hacia atrás con respecto al tiempo, también debemos notar que nuestra primera reclamación Y_1 se presenta a tiempo 0. Por lo que calcular (2.9) es equivalente a:

$$P[t - n + S_i > i \text{ para } 1 \leq i < t \text{ y } t - n + S_t = t] = \frac{(t-n)}{t} h^{*t}(n). \quad (2.10)$$

Para $m \geq 1$, sea γ_m el tiempo del primer encuentro del proceso $m + S_i$ con la línea diagonal de pendiente 1, cuando $i \geq 1$. Observemos que el lado izquierdo de la ecuación (2.10) corresponde a que el primer encuentro ocurra al tiempo t considerando una reserva $t - n$, en notación tenemos que $P[\gamma_{t-n} = t]$. Se debe resaltar que $\gamma_m \geq m$ y $P[\gamma_m = m] = h^{*m}(0)$ para $m \geq 1$. Cuando $n \geq 1$, $\gamma_m = m + n$ significa

que S_m toma un valor arbitrario j , donde j está entre 1 y n , entonces a ese nivel j debemos cruzar la línea dentro de n periodos, esto es:

$$P[\gamma_m = m + n] = \sum_{j=1}^n h^{*m}(j)P[\gamma_j = n]. \quad (2.11)$$

Por otro lado tomando la suma parcial S_m , $m \geq 1$. Entonces bajo la hipótesis de incrementos independientes e idénticamente distribuidos obtenemos que para $n \geq 1$

$$\mathbb{E}[S_m | S_{m+n} = n] = \frac{1}{h^{*(m+n)}(n)} \sum_{j=1}^n j h^{*m}(j) h^{*n}(n-j),$$

y

$$\mathbb{E}[S_m | S_{m+n} = n] = m \frac{n}{m+n}.$$

Combinando las ecuaciones anteriores obtenemos la siguiente identidad:

$$\frac{m}{m+n} h^{*(m+n)}(n) = \sum_{j=1}^n h^{*m}(j) \frac{j}{n} h^{*n}(n-j). \quad (2.12)$$

Definiendo la cantidad $\theta_m(m+n) = [\frac{m}{m+n}] h^{*(m+n)}(n)$ para $m \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\theta_m(m) = h^{*(m)}(0)$ y para $n \geq 1$ la ecuación anterior puede verse como:

$$\theta_m(m+n) = \sum_{j=1}^n h^{*(m)}(j) \theta_j(n). \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) permite determinar de manera recursiva las cantidades $\theta_m(m+n)$. De hecho las fórmulas (2.11) y (2.13) son idénticas, entonces $P[\gamma_m = m+n] = \theta_m(m+n)$. La fórmula (2.9) se obtiene de tomar $m = t-n$.

□

Con lo anterior estamos listos para enunciar el siguiente resultado.

Proposición 2.6 *Cuando nuestro monto inicial es nulo entonces:*

$$P[\tau_d = 1] = P[Y_1 \geq 1]$$

y

$$P[\tau_d \geq t+1] = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} (t-j) h^{*(t)}(j) \text{ para } t \geq 1.$$

Demostración:

Para continuar vamos a realizar una observación asociada al tiempo en que ocurre la ruina τ_d . Observemos que $\tau_d = 1$ únicamente cuando $Y_1 \geq 1$. En el caso $t \geq 1$ tenemos que:

$$P(\tau_d \geq t + 1) = \sum_{j=0}^{t-1} P(S_i < i \text{ para } 1 \leq i < t \text{ y } S_t = j).$$

Sustituyendo el resultado (2.9) en la observación anterior obtenemos el resultado deseado. □

Como $t \in \mathbb{N}$ entonces $1 - \psi_d(u, t) = P(\tau_d \geq t + 1)$, por lo que hemos conseguido encontrar una forma de calcular la probabilidad de ruina para cuando nuestro proceso de riesgo tiene un capital inicial nulo. Cuando $u \neq 0$, el problema será tratado de forma similar al caso anterior, primero se presenta un lema que nos ayudará a encontrar la probabilidad de ruina.

Lema 2.3 *Para los enteros $u \geq 0$, $t \geq 1$ y $u \leq n \leq u + t - 1$ se tiene que:*

$$P[S_i < u + i \text{ para } 1 \leq i < t \text{ y } S_t = n] = h^{*t}(n) - H(u, t, n), \quad (2.14)$$

donde

$$H(u, t, n) = \sum_{j=u+1}^n \frac{t + u - n}{t + u - j} h^{*(t+u-j)}(n - j) h^{*(j-u)}(j),$$

y $h^{*t}(n)$ con $n \in 0, 1, 2, \dots$ denota la función de densidad de S_t (la t -ésima convolución de Y_1).

Demostración:

Como en el lema anterior, realizando una rotación de 180° podemos observar que:

$$P[S_i < u + 1 \text{ para } 1 \leq i \leq t \text{ y } S_t = n] = P[\gamma_{t+u-n} \geq t \text{ y } S_t = n],$$

donde γ_{t+u-n} denota el primer cruce del proceso $t + u - n + S_i$, $i \geq 1$ con la línea diagonal. Para cada $m \geq 1$, $P[m + S_t = m + n] = h^{*t}(n)$. Por otro lado, el proceso $m + S_i$ con $1 \leq i \leq t$ podría cruzar o no la línea diagonal. Si este proceso cruza la

línea por primera vez en algún nivel k entre m y $t - 1$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} P[m + S_t = m + n] &= P[\gamma_m \geq t \quad y \quad S_t = n] \\ &+ \sum_{k=m}^{t-1} P[\gamma_m = k]P[S(t - k) = m + n - k]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Usando la fórmula (2.9) en (2.15) obtenemos que:

$$P[\gamma_m \geq t \quad y \quad S_t = n] = h^{*t}(n) - \sum_{k=m}^{t-1} \frac{m}{k} h^{*k}(k - m) h^{*(t-k)}(m + n - k).$$

Tomando $m = t + u - n$ en la ecuación anterior y eligiendo $j = t + u - k$ como un nuevo índice en la suma obtenemos el resultado deseado.

□

Análogo al caso anterior observemos que al tomar el tiempo en el que ocurre la ruina para el caso $u \geq 0$ tenemos que $\tau_d = 1$ cuando $Y_1 \geq u + 1$. Para $t \geq 1$ obtenemos que:

$$P[\tau_d \geq t + 1] = \sum_{n=0}^u P[S_t = n] - \sum_{n=u+1}^{u+t-1} P[S_i < i \text{ para } 1 \leq i < t \text{ y } S_t = n],$$

con esta observación y el lema anterior obtenemos una forma de calcular la probabilidad de ruina para este caso.

Proposición 2.7 *Cuando nuestro capital inicial es diferente de cero tenemos que:*

$$\begin{aligned} P[\tau_d = 1] &= P[Y_1 \geq u + 1], \\ P[\tau_d \geq t + 1] &= \sum_{j=0}^{u+t-1} h^{*t}(j) - \sum_{j=u+1}^{u+t-1} h^{*(j-u)}(j) \left(\sum_{n=j}^{u+t-1} \frac{t + u - n}{t + u - j} h^{*(t+u-j)}(n - j) \right). \end{aligned}$$

Una de las ventajas técnicas de tener las dos definiciones radica en el hecho de que podemos elegir el modelo que mejor se ajuste a nuestro análisis, por ejemplo si trabajamos únicamente con el modelo descrito en la Definición 2.1 y la distribución de los siniestros permitiera que las variables aleatorias tocaran el valor cero con probabilidad positiva, tendríamos que truncar en cero la distribución de nuestras variables aleatorias para poder trabajar con tal definición. En el caso anterior podemos omitir el truncar la distribución de los siniestros con tan solo manejar la Definición 2.8.

2.1.3. Variación al proceso de riesgo en tiempo discreto

Para el modelo de riesgo clásico existen generalizaciones que siguen tres directrices, la primera de ellas consiste en tomar procesos de conteo diferentes al proceso Poisson, otro camino que siguen las variaciones al modelo consisten en reformar la estructura de las reclamaciones a las que se enfrenta la aseguradora, por ejemplo muchas veces se desea insertar componentes de dependencia entre reclamaciones. Las extensiones en el último de los casos pretenden modificar la dinámica del monto recibido por concepto de primas. Generalmente las modificaciones derivan en modelos mucho más complejos para los que muchas veces no existe una fórmula exacta para la probabilidad de ruina, aunque existen excepciones.

En las siguientes páginas trabajaremos con una variación del modelo discreto de riesgo, al realizar cambios al comportamiento clásico del monto obtenido por primas. Usaremos un comportamiento aleatorio para modelar el comportamiento del monto por primas. Los resultados que a continuación se van a exponer se basan en Zhang, Nan y Wang(2008).

¿Qué sucede si la función que denota el monto de primas recibidas hasta un tiempo t dejara de ser determinista y se comportara de manera aleatoria?, desde el punto de vista matemático el modelo se volvería mucho más interesante. Un modelo de esta naturaleza podría modelar un ambiente donde existe un mayor riesgo asociado a los pagos que recibe una aseguradora. No se pretende profundizar en la aplicación práctica de un modelo de tales características, pero sí resaltar las oportunidades que pueden derivar de éste.

Para el caso que a continuación exponeremos vamos a suponer que nuestro proceso de riesgo U_t considera un monto inicial $u > 0$ y dos procesos aleatorios, el primero asociado a los reclamos y el segundo al cobro de primas, como en toda la subsección supondremos que nuestro tiempo toma valores en $t = 0, 1, 2, \dots$.

Monto agregado por concepto de primas.

El número de primas recolectadas hasta el tiempo t será denotado por la variable aleatoria M_t , El proceso de conteo $\{M_t; t \in \mathbb{N}\}$ podrá con probabilidad p_1 recibir el pago de una prima y con probabilidad $1 - p_1$ no recibirlo para cada $t \in \mathbb{N}$. El monto de los pagos recibidos será modelado por una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Z_i con $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ con valores en los reales positivos. Adicionalmente vamos a denotar a la función de distribución Z_i por $G(x) = P(Z_i \leq x)$, la función de densidad por $g(x)$ y $\gamma = E(Z_i) < \infty$. El monto agregado por concepto de primas al tiempo t será denotado por C_t y tendrá la siguiente configuración:

$$C_t = \sum_{i=1}^{M_t} Z_i \quad \text{para } i \geq 1. \quad (2.16)$$

Cuando $t = 0$ tenemos que $C_t = 0$.

Se permite que las reclamaciones tomen valores reales positivos y suponemos que todas las demás características de nuestro proceso de riesgo se preservan (como en la Definición 2.1). Adicionalmente vamos a anexar las siguientes hipótesis, suponemos que los procesos S_t y C_t son independientes, también los procesos N_t y M_t se consideran independientes. Para que eventualmente nuestra aseguradora no quiebre casi seguramente debemos asegurarnos de que se cumpla $E[C_t] > E[S_t]$. Con todo lo anterior estamos listos para poder definir el proceso de riesgo.

Definición 2.5 *El proceso de riesgo a tiempo discreto con monto de primas regido por un proceso binomial compuesto se define como:*

$$U_t = u + C_t - S_t \quad \text{para } t = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

Cuando $t = 0$ se tiene que $U_t = u$.

Un detalle importante al calcular la probabilidad de ruina será el considerar el tiempo de ruina τ_d similar a como se definió en la Definición 2.9, pero en esta subsección consideraremos al evento ruina cuando las reservas se vuelven estrictamente negativas. Con lo anterior se puede mostrar una forma de calcular la probabilidad de ruina a tiempo infinito. La probabilidad de ruina $\psi(u)$ puede ser obtenida por medio de la siguiente proposición.

Proposición 2.8 *Sea $\psi(u)$ la probabilidad de ruina con horizonte infinito, para $u > 0$, entonces :*

$$\begin{aligned} (1 - q_1q)\psi(u) &= pq_1(1 - F(u)) + pq_1 \int_0^u \psi(u - x)dF(x) + p_1q \int_0^\infty \psi(u + y)dG(y) \\ &\quad + p_1p \left[\int \int_{x-y < u} \psi(u + y - x)dF(x)G(y) + \int \int_{x-y > u} dF(x)G(y) \right]. \end{aligned}$$

Donde $q_1 = 1 - p_1$ y $q = 1 - p$.

Demostración:

Existen cuatro posibles casos para U_t en un pequeño intervalo $[0, \delta]$.

- A_1 . Ninguna reclamación e ingreso por primas ocurre en $[0, \delta]$.
- A_2 . Tenemos ingresos por primas pero ninguna reclamación ocurre en $[0, \delta]$.
- A_3 . No tenemos ingreso por concepto de primas, pero una reclamación ocurre en $[0, \delta]$.
- A_4 . Obtenemos ingresos por primas y reclamacion en $[0, \delta]$.

Como los procesos de conteo N_t y M_t son independientes, tenemos:

$$P(A_1) = q_1q, \quad P(A_2) = p_1q, \quad P(A_3) = q_1p, \quad P(A_4) = p_1p.$$

Usando la ley de la probabilidad total obtenemos:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(\tau_d < \infty) \\ &= \sum_{i=1}^4 P(\tau_d < \infty | A_i) P(A_i). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por otra parte, se tiene:

$$\begin{aligned} P(\tau_d < \infty | A_1) P(A_1) &= P(\tau_d < \infty | U(0) = u) P(A_1) \\ &= \psi(u) q_1 q. \end{aligned}$$

Ahora observemos:

$$\begin{aligned} P(\tau_d < \infty | A_2) P(A_2) &= \mathbb{E}\{P(\tau_d < \infty | U_1 = u + Z) I_{Z \geq 0}\} P(A_2) \\ &= \mathbb{E}\{\psi(u + Z) I_{Z \geq 0}\} P(A_2) \\ &= p_1 q \int_0^\infty \psi(u + z) dG(z). \end{aligned}$$

Para continuar definamos los siguientes eventos aleatorios, sea $B = \{0 \leq X \leq u\}$ y $B^- = \{X > u\}$. Entonces $P(\tau < \infty | A_3 B^-) = 1$, A_3 es independiente de B y B^- . Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} P(\tau_d < \infty | A_3) P(A_3) &= P(\tau_d < \infty | A_3 B) P(A_3 B) + P(\tau_d < \infty | A_3 B^-) P(A_3 B^-) \\ &= \mathbb{E}[I_{(\tau_d < \infty)} I_{(A_3 B)}] + P(A_3 B^-) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[I_{(\tau_d < \infty)} | X] I_{(A_3 B)}] + P(A_3 B^-) \\ &= \mathbb{E}[P(\tau_d < \infty | U_2 = u - X) I_{(A_3 B)}] + P(A_3 B^-) \\ &= \mathbb{E}[\psi(u - X) I_{(A_3 B)}] + P(A_3 B^-) \\ &= P(A_3) \mathbb{E}[\psi(u - X) I_{(B)}] + P(A_3) P(B^-) \\ &= q_1 p \left(\int_0^u \psi(u - x) dF(x) + (1 - F(u)) \right). \end{aligned}$$

Para el último caso tomemos los siguientes eventos $Q = \{X - Y \leq u\}$ y $Q^- = \{X - Y > u\}$. Entonces $P(\tau_d < \infty | A_4 Q^-) = 1$. El evento A_4 es independiente

de Q y Q^- . Lo anterior nos lleva a:

$$\begin{aligned}
P(\tau_d < \infty | A_4)P(A_4) &= P(\tau_d < \infty | A_4Q)P(A_4Q) + P(\tau_d < \infty | A_4Q^-)P(A_4Q^-) \\
&= \mathbb{E}[P(\tau_d < \infty | U_3 = u + Y - X)I_{(A_4Q)}] + P(A_4Q^-) \\
&= P(A_4)\mathbb{E}[\psi(u + Y - X)I_{(Q)}] + P(A_4)P(Q^-) \\
&= pp_1 \left(\int \int_{x-y < u} \psi(u + y - x) dF(x) dG(y) \right. \\
&\quad \left. + \int \int_{x-y > u} dF(x) dG(y) \right).
\end{aligned}$$

Utilizando el resultado (2.18) y el análisis realizado para cada uno de los eventos A_i obtenemos:

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \psi(u)q_1q + p_1q \int_0^\infty \psi(u + z) dG(z) \\
&\quad + q_1p \left(\int_0^u \psi(u - x) dF(x) + (1 - F(u)) \right) \\
&\quad + pp_1 \left(\int \int_{x-y < u} \psi(u + y - x) dF(x) dG(y) \right. \\
&\quad \left. + \int \int_{x-y > u} dF(x) dG(y) \right).
\end{aligned}$$

Reordenando los términos se nota que:

$$\begin{aligned}
(1 - q_1q)\psi(u) &= pq_1(1 - F(u)) + pq_1 \int_0^u \psi(u - x) dF(x) \\
&\quad + p_1q \int_0^\infty \psi(u + y) dG(y) \\
&\quad + pp_1 \left(\int \int_{x-y < u} \psi(u + y - x) dF(x) dG(y) \right. \\
&\quad \left. + \int \int_{x-y > u} dF(x) dG(y) \right).
\end{aligned}$$

□

Para lograr calcular la probabilidad de ruina con horizonte finito vamos a tener que definir $V_t = S_t - C_t$ para $t = 0, 1, 2, 3, \dots$. Consideremos las siguientes variables $W_{t+1} = V_{t+1} - V_t$. Por las características de V_t podemos notar que la sucesión de variables aleatorias W_0, W_1, W_2, \dots son independientes e idénticamente distribuidas. Denotemos por $H(x) = P(W_t < x)$ a la función de distribución para $t = 0, 1, 2, 3, \dots$. Los autores Zhang, Nan y Wang(2008) proponen calcular la probabilidad de ruina de la siguiente manera:

Proposición 2.9 *La probabilidad de ruina con horizonte finito puede ser calculada como:*

$$\begin{aligned}\psi(u, 1) &= 1 - H(u), \\ \psi(u, t) &= 1 - H(u) + \int_u^\infty \psi(u - y, t - 1) dH(y).\end{aligned}$$

Para $t = 2, 3, \dots$

Demostación: Tomemos la probabilidad de no ruina hasta el tiempo t , y observemos:

$$\begin{aligned}\phi_d(u, t) &= P(\tau_d > t) \\ &= P(U_1 \geq 0, U_2 \geq 0, \dots, U_t \geq 0) \\ &= P(V_1 \leq u, V_2 \leq u, \dots, V_t \leq u).\end{aligned}$$

Notemos que podemos calcular estas probabilidades de forma recursiva puesto que:

$$\begin{aligned}\phi_d(u, 1) &= P(\tau_d > 1) = P(V_1 \leq u) = H(u), \\ \phi_d(u, 2) &= P(\tau_d > 2) = P(V_1 \leq u, V_2 \leq u) = P(V_1 \leq u, V_1 + W_2 \leq u) \\ &= P(V_1 \leq u, W_2 \leq u - V_1) = \int_{-\infty}^u H(u - y) dH(y) \\ &= \int_{-\infty}^u \phi(u - y, 1) dH(y), \\ \phi_d(u, 3) &= P(\tau_d > 3) = P(V_1 \leq u, V_2 \leq u, V_3 \leq u) \\ &= P(V_1 \leq u, V_1 + W_2 \leq u, V_1 + W_2 + W_3 \leq u) \\ &= \int_{-\infty}^u P(W_2 \leq u - y, W_2 + W_3 \leq u - y) dH(y) \\ &= \int_{-\infty}^u \phi(u - y, 2) dH(y).\end{aligned}$$

En general obtenemos:

$$\phi_d(u, t) = P(\tau_d > t) = \int_{-\infty}^u \phi(u - y, t - 1) dF(y).$$

Veamos que:

$$\begin{aligned}
 \psi(u, t) &= 1 - \phi_d(u, t) \\
 &= 1 - \int_{-\infty}^u \phi(u - y, t - 1) dF(y) \\
 &= 1 - \int_{-\infty}^u 1 - \psi(u - y, t - 1) dF(y) \\
 &= 1 - H(u) + \int_u^{\infty} \psi(u - y, t - 1) dH(y).
 \end{aligned}$$

□

2.2. Proceso de riesgo en tiempo continuo.

Los resultados presentados en el apartado se centran en obtener la probabilidad de ruina con horizonte finito para el modelo clásico de riesgo, siendo un enfoque más refinado que la probabilidad de ruina con horizonte infinito, puesto que un estudio de este tipo puede reflejar con mayor fidelidad las metas fijadas por una compañía de seguros. Analizar la probabilidad de ruina con horizonte finito resulta un poco más complejo, pues hasta el momento no existe un resultado similar al de Pollaczek-Khinchin. Aunque la fórmula de Pollaczek-Khinchin no proporciona una solución explícita nos ofrece una forma alternativa de estimar la probabilidad de ruina con horizonte infinito.

El obtener fórmulas cerradas para el cálculo de la probabilidad de ruina con horizonte finito sólo se consigue en pocos casos como cuando las reclamaciones son exponenciales (más adelante será mostrado), para los demás casos se mostrarán resultados que ayudaran a estimar o acotar la probabilidad de ruina con horizonte finito.

Con el propósito de dar mayor amplitud proporcionaremos una idea que permita expandir la visión de nuestro proceso de riesgo insertando un proceso de conteo Poisson no homogéneo (a partir de ahora PPNH) en vez de un proceso Poisson homogéneo. Esta reflexión se basa en P.Cizek, W.Härdle, R.Weron (eds.) (2011) páginas 329-348. Recordemos que el modelo de riesgo clásico puede ser visto como:

$$U_t = u + (1 + \theta)\mu\lambda t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad (2.19)$$

donde $c = (1 + \theta)\mu\lambda$ y $\theta > 0$ es el margen de seguridad.

Tomemos un PPNH denotado por \tilde{N}_t y definamos la tasa de intensidad como $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$. Si definimos el proceso de riesgo como con un PPNH de la siguiente

manera:

$$\tilde{U}_t = u + (1 + \theta)\mu \int_0^t \lambda(s)ds - \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} X_i,$$

suponiendo de manera adicional que la función $\Lambda(t)$ es invertible tendremos que $\tilde{U}_{\Lambda(t)-1}$ se comportará como el proceso de riesgo planteado en la ecuación (2.19) con tasa de intensidad $\lambda = 1$, además se debe notar que $\tilde{N}_{\Lambda(t)-1}$ es un proceso Poisson homogéneo estandar. Las observaciones anteriores sugieren como simular un proceso de riesgo con un PPNH a partir de un proceso de riesgo que considera un proceso Poisson homogéneo. El que $\tilde{N}_{\Lambda(t)-1}$ sea un proceso Poisson homogéneo de tasa $\lambda = 1$ lo debemos al lema que aparece en Taylor H. and Karlin(1998) en la página 272. Con lo anterior podemos observar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(u, T) &= P[\inf_{0 < t \leq T} \{\tilde{U}_t\} < 0] \\ &= P[\inf_{0 < t \leq \Lambda(T)} \{U_t\} < 0] \\ &= \psi(u, \Lambda(T)). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Algunos de los casos que se tratarán en esta sección consideran que la tasa de ingresos por primas es uno, notemos que esta condición no impone demasiadas restricciones en el modelo de riesgo continuo ya que podemos obtener la probabilidad de ruina con horizonte finito con las proposiciones (1.13) y (1.14) del capítulo anterior.

2.2.1. Probabilidad de ruina con reclamaciones discretas.

Al trabajar con las variables aleatorias que denotan el monto de las reclamaciones en varias ocasiones estamos analizando variables continuas. Generalmente los valores observados son redondeados debido a que nuestros instrumentos de medición contienen limitaciones o errores debido a la escala. Por ejemplo si estamos realizando las observaciones en pesos o centavos. Lo que tratamos de hacer con nuestras observaciones es ajustar una ley de probabilidad que explique de manera adecuada lo observado, en algunos casos el elegir una distribución discreta o continua no solo depende del tipo de experimento que se esté analizando, sino de la precisión con la que deseemos aproximar lo observado y las limitantes en recursos técnicos y computacionales.

Para el caso en el que las reclamaciones X_1 sean discretas proponemos un método desarrollado por Picard, P. y Lefèvre, C. (1997). Supongamos que la sucesión $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y denotemos a su función de densidad como $p(n) = P(X_i = n)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Además tomemos el capital inicial u como un número entero y realizando un cambio de escala en el tiempo que permita considerar $c = 1$. (notemos que nuestra nueva

$\lambda = \lambda/c$ donde c es la constante de ingresos por primas antes del cambio de escala). Observemos que con las características anteriores S_t es un proceso Poisson compuesto que únicamente toma valores en los enteros y por tanto acumula probabilidades positivas en estos puntos, denotemos a su función de densidad como $f_t(n) = P(S_t = n)$. El proceso de riesgo puede ser reescrito como $U(t) = y(t) - S_t$ donde $y(t) = u + t$. dadas las características discretas de nuestro proceso, S_t únicamente alcanzará los valores de la línea $y(t)$ en los niveles $u + 1, u + 2, u + 3, \dots$ y solo llegaremos a estos niveles en los tiempos $t = 1, 2, 3, \dots$. Por lo que la probabilidad de que no ocurra un encuentro con la línea $y(t)$ hasta el tiempo t puede ser escrita como:

$$\phi(u, t) = P[S_i < u + i \text{ para } i = 1, \dots, [t] \text{ y } S_t < u + [t] + 1], \quad (2.21)$$

donde $[t]$ representa la parte entera de t . Notemos que lo anterior equivale realizar una aproximación de la probabilidad de no ruina para un horizonte de tiempo finito. La ecuación (2.21) puede reescribirse como una suma de la siguiente forma:

$$\phi(u, t) = \sum_{n=0}^{u+[t]} P_n(t). \quad (2.22)$$

Donde $P_n(t) = P[\tau > t \text{ y } S_t = n]$ donde τ es el tiempo que transcurre hasta entrar al estado de ruina, $P_n(t)$ puede escribirse como:

$$P_n(t) = P[S_i < u + i \text{ para } i = 1, \dots, [t] \text{ y } S_t = n]. \quad (2.23)$$

Obsérvese que $P_n(t) = 0$ cuando $n \geq u + [t] + 1$, puesto que en algún momento la trayectoria S_t rebasó la línea $y(t)$. Cuando $n < u + [t] + 1$ podemos calcular recursivamente $P_n(t)$ de la siguiente forma:

$$P_n(t) = \begin{cases} f_n(t) & \text{para } 0 \leq n \leq u \\ \sum_{k=0}^{n-1} P_k(n-u) f_{n-k}(t-n+u) & \text{para } n+1 \leq n \leq u+[t]. \end{cases} \quad (2.24)$$

Observemos que este es un método recursivo para calcular la probabilidad de ruina. Un procedimiento alternativo al que se mostró aquí puede encontrarse en Rulliere y Loisel(2004), donde los resultados son similares a los aquí expuestos.

2.2.2. Reclamaciones exponenciales.

Como ya se había dicho en el caso de que la sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas X_i tengan distribución exponencial, existen fórmulas cerradas para calcular la probabilidad de ruina en tiempo finito, en

este apartado consideraremos que la tasa por cobro de primas es $c = 1$ y que la distribución de las reclamaciones X_1 es exponencial de parámetro $v = 1$. La expresión mostrada proviene de Asmussen(1984).

Teorema 2.1 *Sea el modelo de riesgo con las características anteriores, entonces:*

$$\psi(u, t) = \lambda e^{-(1-\lambda)u} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f_1(z)f_2(z)}{f_3(z)} dz, \quad (2.25)$$

donde:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \lambda \exp\{2\sqrt{\lambda}t \cos z - (1 + \lambda)t + u(\sqrt{\lambda} \cos(z) - 1)\}, \\ f_2(z) &= \cos(u\sqrt{\lambda} \sin z) - \cos(u\sqrt{\lambda} \sin z + 2z), \\ f_3(z) &= 1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda} \cos z. \end{aligned}$$

Demostración:

Se usará la expresión $\psi(u, T) = P(V_T > u)$ donde V_t es el proceso de carga de trabajo en una cola M/M/1 que inicia vacía con tasa de arribos λ y tasa de servicio $\alpha = 1$ (revisar apéndice E). Sea Q_t el tamaño de la cola al tiempo t , si $Q_T = N > 0$ entonces $V_T = X_{1,T} + \dots + X_{N,T}$ donde $X_{1,T}$ es el tiempo residual de servicio del primer cliente y $X_{2,T}, \dots, X_{N,T}$ son los tiempos de servicio de los clientes que esperan ser atendidos. Como la sucesión de variables aleatorias $X_{1,T}, \dots, X_{N,T}$ es independiente con distribución exponencial de parámetro $v = 1$, entonces la distribución condicional de V_T dado que $Q_T = N$ depende de la variable aleatoria E_N con distribución *Gama*($N, 1$), por tanto:

$$\begin{aligned} \psi(u, T) &= P(V_T > u) \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} P(Q_T = N)P(E_N > u) \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} P(Q_T = N) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-u} \frac{u^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-u} \frac{u^k}{k!} P(Q_T \geq k + 1). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Como se observa en el apéndice E, la función modificada de Bessel satisface:

$$I_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos(\theta)} \cos(j\theta) d\theta,$$

cuando $j = 0, 1, 2, \dots$. Recordemos también que $I_{-j}(x) = I_j(x)$, si se define $l_j = e^{-(1+\lambda)t} \lambda^{\frac{j}{2}} I_j(2\sqrt{\lambda T})$ entonces:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} l_j = 1,$$

en el libro Prabhu (1965) página 12 se encuentra una expresión para Q_T que se usa en la primera igualdad del desarrollo que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} P(Q_T \geq k+1) &= 1 - \sum_{j=-\infty}^k l_j + \lambda^{k+1} \sum_{j=-\infty}^{-k-2} l_j \\ &= \lambda^{k+1} + \sum_{j=k+1}^{\infty} l_j - \lambda^{k+1} \sum_{j=-k-1}^{\infty} l_j \\ &= \lambda^{k+1} + \sum_{j=k+1}^{\infty} e^{-(1+\lambda)T} \lambda^{\frac{j}{2}} I_j(2\sqrt{\lambda T}) - \lambda^{k+1} \sum_{j=-k-1}^{\infty} e^{-(1+\lambda)T} \lambda^{\frac{j}{2}} I_j(2\sqrt{\lambda T}) \\ &= \lambda^{k+1} + e^{-(1+\lambda)T} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{2\sqrt{\lambda T} \cos(\theta)} H(j, k, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde:

$$H(j, k, \theta) = \underbrace{\sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda^{\frac{j}{2}} \cos(j\theta)}_A - \lambda^{k+1} \underbrace{\sum_{j=-k-1}^{\infty} \lambda^{\frac{j}{2}} \cos(j\theta)}_B.$$

Trabajaremos de forma separada las expresiones (A) y (B), usando propiedades de los números complejos se obtiene:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda^{\frac{j}{2}} \cos(j\theta) \\ &= \operatorname{Re} \left[\sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda^{\frac{j}{2}} e^{ij\theta} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{\lambda^{\frac{k+1}{2}} e^{i(k+1)\theta}}{\lambda^{\frac{1}{2}} e^{i\theta} - 1} \right] \\ &= \frac{\operatorname{Re} [\lambda^{(k+1)/2} e^{i(k+1)\theta} (\lambda^{1/2} e^{-i\theta} - 1)]}{|\lambda^{1/2} e^{i\theta} - 1|^2} \\ &= \frac{\lambda^{(k+1)/2} [\lambda^{1/2} \cos(k\theta) - \cos((k+1)\theta)]}{f_3(\theta)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde $f_3(\theta) = 1 + \lambda + 2\sqrt{\lambda}\cos(\theta)$. Por otro lado para (B) podemos observar:

$$\begin{aligned}
B &= \lambda^{k+1} \sum_{j=-k-1}^{\infty} \lambda^{\frac{j}{2}} \cos(j\theta) \\
&= \lambda^{k+1} \operatorname{Re} \left[\sum_{j=-k-1}^{\infty} \lambda^{\frac{j}{2}} e^{ij\theta} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[\frac{\lambda^{(k+1)/2} e^{-i(k+1)\theta}}{\lambda^{1/2} e^{i\theta} - 1} \right] \\
&= \frac{\operatorname{Re}[\lambda^{(k+1)/2} e^{-i(k+1)\theta} (\lambda^{1/2} e^{-i\theta} - 1)]}{|\lambda^{1/2} e^{i\theta} - 1|^2} \\
&= \frac{\lambda^{(k+1)/2} [\lambda^{1/2} \cos((k+2)\theta) - \cos((k+1)\theta)]}{f_3(\theta)}. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.28) y (2.29) en (2.27) obtenemos:

$$\begin{aligned}
P(Q_T \geq k+1) - \lambda^{k+1} &= \\
&= e^{-(1+\lambda)T} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2\sqrt{\lambda}T \cos(\theta)} \frac{\lambda^{(k+1)/2} [\lambda^{1/2} \cos(k\theta) - \lambda^{1/2} \cos((k+2)\theta)]}{f_3(\theta)}. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Observando que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-u} \frac{u^k}{k!} \lambda^{k+1} = \lambda e^{-u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u\lambda)^k}{k!} = \lambda e^{-u} e^{u\lambda} = \lambda e^{-(1-\lambda)u}$$

con las expresiones (2.30) y (2.26) se obtiene:

$$\psi(u, T) - \lambda e^{-(1-\lambda)u} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \lambda e^{2\sqrt{\lambda}T \cos(\theta) - (1+\lambda)T - u} \frac{H(\lambda, \theta)}{f_3(\theta)} \tag{2.31}$$

donde:

$$H(\lambda, \theta) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \lambda^{k/2} \cos(k\theta)}_C - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \lambda^{k/2} \cos((k+2)\theta)}_D.$$

Trabajando de forma separada las expresiones (C) y (D) se obtiene:

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \lambda^{k/2} \cos(k\theta) \\
&= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u\lambda^{1/2}e^{i\theta})^k}{k!} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[e^{u\lambda^{1/2}e^{i\theta}} \right] \\
&= e^{u\lambda^{1/2} \cos(\theta)} \cos(u\sqrt{\lambda} \sin(\theta)), \tag{2.32}
\end{aligned}$$

para (D) se obtiene:

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \lambda^{k/2} \cos((k+2)\theta) \\
&= \operatorname{Re} \left[e^{2i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u\lambda^{1/2}e^{i\theta})^k}{k!} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[e^{u\lambda^{1/2}e^{i\theta} + 2i\theta} \right] \\
&= e^{u\sqrt{\lambda} \cos(\theta)} \cos(u\sqrt{\lambda} \sin(\theta) + 2\theta). \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.33) y (2.32) en (2.31) y realizando algunas operaciones se obtiene lo deseado.

□

Para el caso en el que $v \neq 1$, se puede trabajar la probabilidad de ruina con $v = 1$ mediante la siguiente relación:

$$\psi_{\lambda,u}(u, t) = \psi_{\frac{\lambda}{v},1}(uv, vt), \tag{2.34}$$

lo que dice la expresión anterior es que la probabilidad de ruina con horizonte finito t de un modelo de riesgo con reserva inicial u , parámetro de intensidad λ y reclamaciones $\exp(v)$ es igual a la probabilidad de ruina con horizonte finito vt de un modelo de riesgo con reserva inicial vu , parámetro de intensidad $\frac{\lambda}{v}$ y reclamaciones $\exp(1)$. Una observación similar llevará a notar que en el caso que $c \neq 1$ se puede reducir a $c = 1$ mediante lo siguiente:

$$\psi_{\lambda,c}(u, t) = \psi_{\lambda/c,1}(u, ct).$$

2.2.3. Proceso agregado de las reclamaciones $\{L_t\}_{t \geq 0}$.

Existen resultados que permiten calcular la probabilidad de ruina en tiempo finito suponiendo que el modelo considera reclamaciones continuas, en las siguientes

páginas se mostrarán algunos de los resultados con la particularidad de suponer que conocemos las leyes probabilísticas que rigen al monto agregado de siniestros $S_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$ a través del tiempo. Para continuar vamos a definir el proceso agregado de las reclamaciones.

Definición 2.6 Denotaremos el proceso agregado de las reclamaciones como:

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct.$$

Con la anterior definición la probabilidad de ruina en tiempo finito puede ser vista como la probabilidad de que el proceso agregado de siniestros rebase el nivel inicial u hasta el tiempo T , esto es:

$$\psi(u, T) = P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} L_t > u\right],$$

nos interesa analizar el proceso agregado de reclamaciones bajo un horizonte finito de tiempo T . En la figura (2.5) mostramos una simulación del proceso agregado de reclamaciones cuando las variables aleatorias X_i son exponenciales de parámetro 1, el proceso Poisson tiene una intensidad $\lambda = 1$ y la constante de ingresos es $c = 1$. Existen dos propiedades importantes para L_t , que son heredadas del proceso Poisson

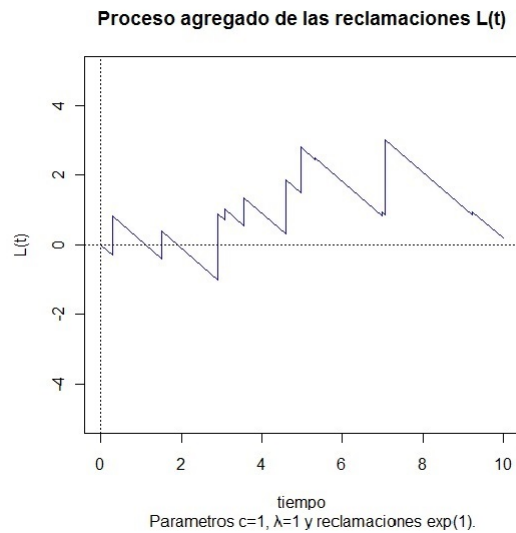


Figura 2.5: Proceso agregado de reclamaciones L_t .

compuesto, la primera de ellas es observar que el proceso L_t es reversible con respecto al tiempo. Para observar lo que se ha mencionado definamos el proceso L_t^* como:

$$L_t^* = L_T - L_{T-t},$$

Proposición 2.10 $L_t^* \stackrel{d}{=} L_t$.

Demostración:

Notemos que:

$$\begin{aligned}
 P[L_t^* \leq x] &= P[L_T - L_{T-t} \leq x] \\
 &= P\left[\sum_{i=1}^{N_T} X_i - cT - \left(\sum_{i=1}^{N_{T-t}} X_i - c(T-t)\right) \leq x\right] \\
 &= P\left[\sum_{i=1}^{N_T} X_i - \sum_{i=1}^{N_{T-t}} X_i - ct \leq x\right] \\
 &= P\left[\sum_{i=N_{T-t}}^{N_T} X_i - ct \leq x\right],
 \end{aligned}$$

observemos que estamos sumando $N_T - N_{T-t}$ reclamaciones y como las reclamaciones son independientes e idénticamente distribuidas obtenemos:

$$= P\left[\sum_{i=1}^{N_T - N_{T-t}} X_i - ct \leq x\right],$$

notemos que $N_T - N_{T-t}$ tiene distribución Poisson de parámetro λt entonces:

$$\begin{aligned}
 &= P\left[\sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct \leq x\right] \\
 &= P[L_t \leq x].
 \end{aligned}$$

□

Otra propiedad de gran utilidad para el proceso agregado de reclamaciones deriva también del proceso Poisson compuesto, la propiedad que se desea mostrar es la de poder intercambiar segmentos en un proceso Poisson compuesto, para observar la propiedad mencionada definamos lo siguiente:

$$L_t^{(v)} = \begin{cases} L_{t+v} - L_v & \text{para } 0 \leq t \leq T - v, \\ L_T - L_v + L_{t-T+v} & \text{para } T - v < t \leq T. \end{cases}$$

Proposición 2.11 $L_t^{(v)} \stackrel{d}{=} L_t$.

Demostración:

Supongamos que $t \in [0, T - v]$ entonces:

$$\begin{aligned}
 P[L_t^{(v)} \leq x] &= P[L_{t+v} - L_v \leq x] \\
 &= P\left[\sum_{i=1}^{N_{t+v}} X_i - c(t+v) - \left(\sum_{i=1}^{N_v} X_i - c(v)\right) \leq x\right] \\
 &= P\left[\sum_{i=N_v}^{N_{t+v}} X_i - ct \leq x\right],
 \end{aligned}$$

notemos que estamos sumando $N_{t+v} - N_v$ reclamaciones, como las variables aleatorias X_i son independientes e idénticamente distribuidas se puede reescribir lo anterior como:

$$= P\left[\sum_{i=1}^{N_{t+v}-N_v} X_i - ct \leq x\right],$$

observemos que $N_{t+v} - N_v$ tienen distribución Poisson de parámetro λt , por lo que:

$$\begin{aligned}
 &= P\left[\sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct \leq x\right] \\
 &= P[L_t \leq x].
 \end{aligned}$$

Resta ver que sucede cuando $t \in (T - v, T]$, para tal caso se nota que:

$$\begin{aligned}
 P[L_t^{(v)} \leq x] &= P[L_T - L_v + L_{t-T+v} \leq x] \\
 &= P\left[\sum_{i=1}^{N_T} X_i - cT - \left(\sum_{i=1}^{N_v} X_i - c(v)\right) + \sum_{i=1}^{N_{t-T+v}} X_i - c(t-T+v) \leq x\right] \\
 &= P\left[\sum_{i=N_v}^{N_T} X_i + \sum_{i=1}^{N_{t-T+v}} X_i - ct \leq x\right],
 \end{aligned}$$

se ve que estamos sumando $N_T - N_v + N_{t-T+v}$ reclamaciones, y como estas reclamaciones son independientes e idénticamente distribuidas entonces:

$$= P\left[\sum_{i=1}^{N_T-N_v+N_{t-T+v}} X_i - ct \leq x\right],$$

se percibe que $N_T - N_v + N_{t-T+v}$ tienen distribución Poisson de parámetro λt , por lo que:

$$\begin{aligned} &= P\left[\sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct \leq x\right] \\ &= P[L_t \leq x]. \end{aligned}$$

□

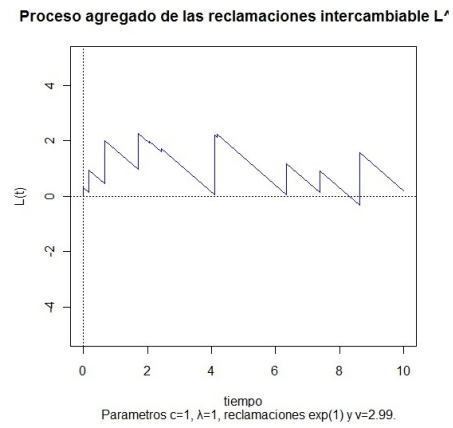
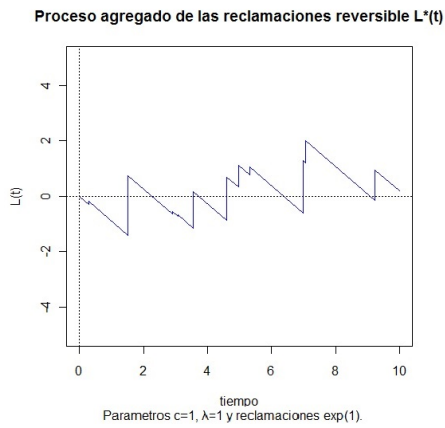


Figura 2.6: Proceso agregado reversible L_t^* .

Figura 2.7: Proceso agregado intercambiable L_t^v .

En las figuras (2.6) y (2.7) se muestran gráficamente las propiedades que tiene el proceso $\{L_t\}_{t \geq 0}$, el de ser reversible con respecto al tiempo y el de poder intercambiar segmentos del proceso en un intervalo finito de tiempo. Para continuar suponemos que tenemos el modelo de riesgo como se definió en el capítulo anterior pero suponiendo que $c = 1$, tal condición no es demasiado restrictiva, ya que si realizamos un cambio en la escala monetaria obtendremos el modelo considerado, no tendremos demasiadas complicaciones ya que nuestras reclamaciones son continuas.

2.2.4. Probabilidad de ruina conociendo la función de densidad de S_t .

Los resultados aquí mostrados los debemos a Lefèvre and Loisel (2008), los autores mencionados nos proponen obtener la probabilidad de no ruina a tiempo finito dividiendo el problema en dos casos, cuando el monto inicial u es cero y cuando es diferente de cero. También supondremos que conocemos la función de densidad de S_t o al menos la podemos estimar. A continuación veremos el resultado $u = 0$.

Proposición 2.12 *Sea $y \geq 0$ y $S_y = \sum_{i=0}^{N_y} X_i$ un proceso Poisson compuesto con reclamaciones X_i continuas y positivas. Entonces para cada $t > 0$ y $0 < x < t$ tenemos que:*

$$P[S_y < y \text{ para } 0 < y < t \text{ y } S_t \in (x, x + dx)] = \frac{t-x}{t} f_t(x) dx, \quad (2.35)$$

donde la función $f_t(\cdot)$ es la función de densidad de S_t en el intervalo $(0, \infty)$.

Demostración: Véase Lefèvre and Loisel (2008).

Es importante recordar que el monto agregado de siniestros tiene un punto con probabilidad positiva, puesto que $P(S_t = 0) = e^{-\lambda t}$. Tomando a τ como a la variable que denota el tiempo que transcurre hasta llegar al estado de ruina tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u, T) &= P(\tau \geq t) \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^t P[S_y < y \text{ para } 0 < y \leq t \text{ y } S_t \in (x, x + dx)], \end{aligned} \quad (2.36)$$

usando (2.36) y la proposición anterior obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *La probabilidad de no ruina $1 - \psi(u, t) = P(\tau \geq t)$ puede ser calculada como sigue:*

$$1 - \psi(u, t) = e^{-\lambda t} + \frac{1}{t} \int_0^t (t-x) f_t(x) dx, \quad (2.37)$$

para $t > 0$.

Con el teorema anterior es claro que al menos en teoría podemos calcular la probabilidad de ruina cuando nuestro monto inicial es nulo. En la práctica no es sencillo llegar a conocer la función de densidad del monto agregado de siniestros. A continuación se presenta al caso de reserva no nula.

Proposición 2.13 *Para cualquier número real $u \geq 0$, $t > 0$ y $u < x < u + t$*

tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{dx} P[S_y < u + y \text{ para } 0 < y < t \text{ y } S_t \in (x, x + dx)] &= f_t(x) - e^{-\lambda(t+u-x)} f_{x-u}(x) \\ &\quad - \int_u^x \frac{t+u-x}{t+u-z} f_{t+u-z}(x-z) f_{z-u}(z) dz. \end{aligned}$$

Demostración: Véase Lefèvre and Loisel (2008).

Tomando τ como a la variable que denota el tiempo que transcurre hasta llegar al estado de ruina observamos que:

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u, t) &= P(\tau \geq t) \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^u f_t(z) dz + \int_u^{u+t} P[S_y < u + y \text{ para } 0 < y \leq t \text{ y } S_t \in (x, x + dx)]. \end{aligned}$$

Con la información que hemos acumulado se propone el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *La probabilidad de no ruina $1 - \psi(u, t) = P(\tau \geq t)$ puede calcularse como:*

$$\begin{aligned} P(\tau \geq t) &= e^{-\lambda t} + \int_0^{u+t} f_t(z) dz - \int_u^{u+t} e^{-\lambda(t+u-z)} f_{z-u}(z) dz \\ &\quad - \int_u^{u+t} f_{z-u}(z) \left(\int_z^{u+t} \frac{t+u-x}{t+u-z} f_{t+u-z}(x-z) dx \right) dz, \end{aligned}$$

para $t > 0$.

Demostración: Véase Lefèvre and Loisel (2008).

2.2.5. La fórmula de Seal.

Los siguientes resultados pueden ser revisados con mayor profundidad en Asmussen(2010) y consideran que conocemos la función de distribución del monto agregado de siniestros S_t vista como sigue:

$$F_t(x) = P\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \leq x\right)$$

Asmussen explica que obtener resultados que consideran a la función de distribución de S_t son clásicos pues Cramér logró expresar la probabilidad de ruina en función de $F_x(t)$. Similar a la sección anterior para obtener las probabilidades de ruina tendremos que dividir en dos casos los resultados, cuando $u = 0$ y $u \neq 0$, adicionalmente se supone $c = 1$. A continuación veremos el resultado para $u = 0$.

Teorema 2.4 *La probabilidad de no ruina $\phi(0, T) = 1 - \psi(0, T)$ puede obtenerse como:*

$$1 - \psi(0, T) = \frac{1}{T} \int_0^T F_t(x) dx.$$

Demostración:

Definamos lo siguiente:

$$M(v, t) = \{L_t^v \leq L_s^v, 0 \leq s \leq t\},$$

y notemos que:

$$\begin{aligned} 1 - \psi(0, T) &= P(L_t \leq 0, 0 \leq t \leq T) \\ &= P(L_t^* \leq 0, 0 \leq t \leq T) \\ &= P(L_T \leq L_{T-t}, 0 \leq t \leq T) \\ &= P(L_T \leq L_t, 0 \leq t \leq T) \\ &= P(M(0, T)), \end{aligned}$$

en la segunda igualdad estamos usando que L_t es reversible con respecto al tiempo. Entonces:

$$1 - \psi(0, T) = P(M(0, T)) = \frac{1}{T} \int_0^T P(M(v, T)) dv = \frac{1}{T} \mathbb{E} \int_0^T I\{M(v, T)\} dv.$$

En la segunda igualdad se uso la proposición (2.11), notemos que $P(M(v, T))$ no depende de v . Ahora necesitamos analizar $\int_0^T I\{M(v, T)\} dv$. Si $L_T^v = L_T > 0$ entonces $I\{M(v, T)\} = 0$. Si $L_T \leq 0$ existe v tal que ocurre $M(u, T)$, de hecho se cumple que $M(v, T) = M(0, v)$ puesto que:

$$\begin{aligned} M(v, T) &= \{L_T \leq L_{T+v} - L_v, 0 \leq t \leq T - v\} \cap \\ &\quad \{L_T \leq L_T - L_v + L_{t-T+v}, T - v \leq t \leq T\} \\ &= \{L_T \leq L_t - L_v, v \leq t \leq T\} \cap \\ &\quad \{L_T \leq L_T - L_v + L_t, 0 \leq t \leq v\} \\ &= \{L_T \leq L_t - L_v, v \leq t \leq T\} \cap M(0, v) \\ &= M(0, v), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es la consecuencia de que $L_T \leq L_t$ en $M(0, T)$ y que $L_v \leq 0$ en $M(0, v)$. Se sigue que si $M(0, T)$ ocurre entonces:

$$\frac{1}{T} \int_0^T I\{M(v, T)\} dv = \frac{1}{T} \int_0^T I\{M(0, T)\} dv = -L_T.$$

Es suficiente considerar $\int_0^T I\{M(v, T)\} dv$ en $M(0, T)$ por que en el caso de que $L_T \leq 0$ podemos cambiar el segmento (el primer segmento con el mínimo de L_t) y

de nuevo conseguimos $M(0, T)$. De forma más precisa definamos el proceso:

$$L_t(M) = \begin{cases} L_t & \text{si } L_T > 0, \\ L_t^{(\zeta)} & \text{si } L_T \leq 0, \end{cases}$$

donde ζ es el momento donde el proceso L_t alcanza su mínimo en el intervalo $[0, T]$, entonces:

$$L_t(M) \stackrel{d}{=} L_t.$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} 1 - \psi(0, T) &= \frac{1}{T} \mathbb{E} \int_0^T I\{M(v, T)\} dv \\ &= \frac{1}{T} \mathbb{E} L_T^- \\ &= \frac{1}{T} \int_0^\infty P(L_T \leq -x) dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T P(L_T \leq -x) dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T P\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \leq T - x\right) dx \end{aligned}$$

□

El resultado anterior nos proporciona una forma de calcular la probabilidad de ruina cuando podamos encontrar $F_t(x)$.

A continuación se presenta el caso reserva no nula, bajo esta hipótesis no solo bastará con conocer a la función $F_t(x)$ si no también a la función $f_t(x)$ que denota la función de densidad asociada a S_t . El siguiente resultado muestra una forma de obtener la probabilidad de no ruina con horizonte finito.

Teorema 2.5 *La probabilidad de no ruina con horizonte finito cuando $u \neq 0$ puede calcularse como:*

$$1 - \psi(u, T) = F_T(u + T) - \int_0^T (1 - \psi(0, T - y)) f_y(u + y) dy.$$

Demostración:

El evento $\{L_T \leq u\}$ puede suceder de dos formas: que hasta el momento T la ruina no ocurra, esto sucede con probabilidad $1 - \psi(u, T)$, o que la ruina ocurra, podemos definir la última época σ cuando el proceso L_t caerá debajo del nivel u . En este caso $\sigma \in [s, s + ds]$ si $L_s \in [u, u + ds]$, el que no ocurra otro cruce al nivel u después del tiempo s ocurre con probabilidad $1 - \psi(0, T - s)$. Entonces obtenemos:

$$P(L_T \leq u) = 1 - \psi(u, T) + \int_0^T (1 - \psi(0, T - y)) f_y(u + y) dy.$$

□

Nótese que el obtener esta probabilidad depende de que logremos calcular la probabilidad de ruina cuando $u = 0$.

2.2.6. Probabilidad de ruina conociendo la distribución conjunta de S_t .

Tomemos el modelo como se definió en el capítulo anterior con todas las características e hipótesis

$$U(t) = u + ct - S_t,$$

de forma general podemos ver que nuestro proceso de riesgo podría ser reescrito como sigue:

$$U(t) = h(t) - S_t,$$

donde $h(t)$ representa las ingresos por primas al tiempo t , desde luego esta función debe ser no decreciente, no negativa, debe cumplir con que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = +\infty$ y $h(0) = u$. No necesariamente pedimos que la función sea continua pero nos va a interesar conocer la inversa $h^{-1}(t)$. Si la función $h(t)$ es discontinua vamos a tomar a $h^{-1}(t) = \inf\{t : h(t) > x\} = \sup\{t : h(t) \leq x\}$ que es la inversa continua por la derecha.

Para el monto agregado de siniestros S_t vamos a suponer que conocemos una estructura peculiar asociada a su distribución conjunta.

Supongamos que tenemos las sucesión de variables aleatorias S_1, S_2, \dots de tal forma que $P[S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_k \leq \dots] = 1$ y denotemos a la función de densidad conjunta de S_1, S_2, \dots, S_k de la siguiente forma:

$$f(s_1, s_2, \dots, s_k) = \begin{cases} \zeta(s_1, \dots, s_k) & \text{si } 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\zeta(s_1, \dots, s_k) \geq 0$, además cuando $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_k$ tenemos que:

$$\int \dots \int_{0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_k} \zeta(S_1, \dots, S_k) ds_1 \dots ds_n = 1.$$

Supongamos que el monto de las reclamaciones son modeladas por la sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots y éstas se relacionan con las variables aleatorias S_1, S_2, \dots de la siguiente forma: $X_1 = S_1, X_2 = S_2 - S_1, X_3 = S_3 - S_2$ y así sucesivamente. Desde esta perspectiva las variables aleatorias S_1, S_2, \dots denotan los montos agregados hasta la i -ésima reclamación. Otra observación importante es notar cual es la relación existente entre las funciones de densidad conjuntas de las dos sucesiones de variables aleatorias, denotemos a la función de densidad conjunta de la sucesión X_i por la función $\xi(x_1, \dots, x_k)$, entonces podemos apreciar que:

$$\xi(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_k),$$

o bien,

$$f(s_1, s_2, \dots, s_k) = \xi(s_1, s_2 - s_1, \dots, s_k - s_{k-1}).$$

En este contexto los autores Ignatov y Kaishev(2004) nos proponen calcular la probabilidad de no ruina $1 - \psi(u, T) = P(T \geq t)$ de la siguiente manera.

Teorema 2.6 *La probabilidad de no ruina en un tiempo finito t puede ser calculada como:*

$$P(\tau > t) = e^{-\lambda t}(1 + H(t)),$$

donde

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_0^{h(t)} \int_{x_1}^{h(t)} \dots \int_{x_{k-1}}^{h(t)} A_k(x; h^{-1}(x_1), \dots, h^{-1}(x_k)) f(x_1, \dots, x_k) dx_k \dots dx_2 dx_1,$$

y $X_0 = 0$ y $A_k(x; u_1, \dots, u_k)$ para $k = 1, 2, \dots$ son los polinomios de Appell $A_k(x)$ de grado k con coeficiente $\frac{1}{k!}$ para x^k . Estos polinomios son definidos como:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= 1 \\ A'_k(x) &= A_{k-1}(x) \\ A_k(u_k) &= 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Demostración: Véase Ignatov y Kaishev(2004).

Los polinomios de Appell se relacionan con los polinomios y números de Bernoulli, sirven para encontrar las sumas de potencias de los números naturales.

2.2.7. Transformada del tiempo de ruina.

Motivados por el problema de la valuación de opciones americanas Gerber y Shiu (1998) proponen analizar el tiempo de ruina τ en función de transformadas de Laplace, obteniendo una nueva percepción para el proceso de riesgo. Ellos sugieren analizar la esperanza del valor presente del tiempo futuro donde sucede la ruina, como se observa a continuación:

$$\varphi(u) = \mathbb{E}[e^{-\delta\tau} 1_{(\tau < \infty)} | U_0 = u] \quad \text{para } \delta \geq 0. \quad (2.38)$$

La expresión anterior es conocida como la función de Gerber-Shiu o como la función de penalización descontada (*discounted penalty function*). Para la función anterior el parámetro δ puede ser interpretado como una tasa de interés, cuando $\delta = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= P[\tau < \infty] \\ &= \psi(u). \end{aligned}$$

Recordando que la transformada de Laplace para una función $h(x)$ puede ser vista como:

$$L_{h(x)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} h(x) dx,$$

entonces la esperanza (2.38) puede ser entendida como la transformada de Laplace de la distribución del momento de ruina y se escribe como:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \frac{\partial}{\partial t} \psi(u, t) \\ &= \psi(u, 0) + \delta L_{\psi(u,t)}^t(\delta), \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde el superíndice t en L^t denota la transformada de Laplace con respecto a la variable t .

Existen varios trabajos que abordan interesantes resultados relacionados con la función de Gerber-Shiu como el de Drekić y Willmot (2003), pero se tomará como base el estudio desarrollado por García (2005). Una característica importante en la investigación mencionada es el de definir la doble transformada de Laplace para una función de dos variables como sigue.

Definición 2.7 Sea $h(x, y)$ una función de dos variables, se define la doble transformada de Laplace como:

$$L_{h(x,y)}(z, s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-zx-sy} h(x, y) dx dy.$$

Algunas de las primeras propiedades que satisface la función (2.38) se muestran a continuación:

Proposición 2.14 *La función de penalización descontada cumple con:*

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \int_0^\infty g(t)[1 - F(u + ct)]e^{-\delta t} dt \\ &+ \int_0^\infty g(t)e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} f(x)\varphi(u + ct - x)dxdt,\end{aligned}\quad (2.40)$$

donde $g(t)$ es la función de densidad de los tiempos entre arribo T_i .

Demostración:

Considerando que la primera reclamación ocurre al tiempo t y tomando a x como el monto de dicha reclamación entonces puede ocurrir:

- Se presenta la quiebra y en ese caso x debe ser mayor a $u + ct$, además $1_{(\tau < \infty)} = 1$.
- No se presenta la quiebra y entonces x debe ser menor a $u + ct$. Pero la quiebra se podrá presentar en tiempos posteriores para un proceso de riesgo que tiene un nivel inicial $u + ct - x$.

Tomando los dos casos anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \int_0^\infty g(t) \int_{u+ct}^\infty f(x)e^{-\delta t} dxdt + \int_0^\infty g(t)e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} f(x)\varphi(u + ct - x)dxdt \\ &= \int_0^\infty g(t)[1 - F(u + ct)]e^{-\delta t} dt + \int_0^\infty g(t)e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} f(x)\varphi(u + ct - x)dxdt.\end{aligned}$$

□

Proposición 2.15 *La función de penalización descontada satisface la siguiente la siguiente ecuación:*

$$c\varphi'(u) = (\lambda + \delta)\varphi(u) - \lambda[1 - F(u)] - \lambda \int_0^u f(x)\varphi(u - x)dx. \quad (2.41)$$

Demostración:

La demostración proviene de Sarah Oldershaw (2011). Suponiendo que la constante de ingresos es c , la reserva inicial es u y tomando la ecuación (2.40) con el cambio de variable $s = u + ct$ entonces podemos reescribir (2.40) como:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \frac{1}{c} \int_u^\infty g\left(\frac{s-u}{c}\right)[1 - F(s)]e^{-\delta\frac{s-u}{c}} ds \\ &+ \frac{1}{c} \int_u^\infty g\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\frac{s-u}{c}} \int_0^s f(x)\varphi(s-x)dxds,\end{aligned}\quad (2.42)$$

derivando la ecuación anterior con respecto a u usando la fórmula de Leibniz, tomando en cuenta que $g(\frac{u-u}{c}) = g(0)$, $\frac{du}{du} = 1$ y $e^{-\delta\frac{u-u}{c}} = 1$, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= \frac{1}{c} \int_u^\infty \frac{\partial}{\partial u} \left(g\left(\frac{s-u}{c}\right) [1 - F(s)] e^{-\delta\frac{s-u}{c}} \right) ds \\ &+ \frac{1}{c} \int_u^\infty \frac{\partial}{\partial u} \left(g\left(\frac{s-u}{c}\right) e^{-\delta\frac{s-u}{c}} \int_0^s f(x) \varphi(s-x) dx \right) ds \\ &- \frac{1}{c} g(0) [1 - F(u)] - \frac{1}{c} g(0) \int_0^u f(x) \varphi(u-x) dx,\end{aligned}\quad (2.43)$$

por otro lado obtenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(g\left(\frac{s-u}{c}\right) \right) = \frac{\partial g\left(\frac{s-u}{c}\right)}{\partial\left(\frac{s-u}{c}\right)} \frac{\partial\left(\frac{s-u}{c}\right)}{\partial u} = g' \left(\frac{s-u}{c} \right) \left(-\frac{1}{c} \right),$$

sustituyendo lo anterior en (2.43) se obtiene:

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= \frac{1}{c} \int_u^\infty -\frac{1}{c} g'\left(\frac{s-u}{c}\right) [1 - F(s)] e^{-\delta\frac{s-u}{c}} ds \\ &+ \frac{1}{c} \int_u^\infty g\left(\frac{s-u}{c}\right) [1 - F(s)] \left(-\frac{\delta}{c}\right) e^{-\delta\frac{s-u}{c}} ds \\ &+ \frac{1}{c} \int_u^\infty -\frac{1}{c} g'\left(\frac{s-u}{c}\right) e^{-\delta\frac{s-u}{c}} \int_0^s f(x) \varphi(s-x) dx ds \\ &+ \frac{1}{c} \int_u^\infty g\left(\frac{s-u}{c}\right) \left(-\frac{\delta}{c}\right) e^{-\delta\frac{s-u}{c}} \int_0^s f(x) \varphi(s-x) dx ds \\ &- \frac{1}{c} g(0) [1 - F(u)] - \frac{1}{c} g(0) \int_0^u f(x) \varphi(u-x) dx,\end{aligned}\quad (2.44)$$

de la ecuación (2.42) podemos observar que:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{c} \varphi(u) &= \frac{1}{c} \int_u^\infty g\left(\frac{s-u}{c}\right) [1 - F(s)] \left(\frac{\delta}{c}\right) e^{-\delta\frac{s-u}{c}} ds \\ &+ \frac{1}{c} \int_u^\infty g\left(\frac{s-u}{c}\right) \left(\frac{\delta}{c}\right) e^{-\delta\frac{s-u}{c}} \int_0^s f(x) \varphi(s-x) dx ds,\end{aligned}\quad (2.45)$$

agrupando términos en (2.44) y usando la observación (2.45), entonces:

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= \frac{1}{c^2} \int_u^\infty g'\left(\frac{s-u}{c}\right) [1 - F(s)] e^{-\delta\frac{s-u}{c}} ds \\ &- \frac{1}{c^2} \int_u^\infty g'\left(\frac{s-u}{c}\right) e^{-\delta\frac{s-u}{c}} \int_0^s f(x) \varphi(s-x) dx ds \\ &- \frac{1}{c} g(0) [1 - F(u)] - \frac{1}{c} g(0) \int_0^u f(x) \varphi(u-x) dx + \frac{\delta}{c} \varphi(u),\end{aligned}\quad (2.46)$$

al multiplicar por c ambos lados en la ecuación (2.46) se obtiene:

$$\begin{aligned} c\varphi'(u) &= -\frac{1}{c} \int_u^\infty g'\left(\frac{s-u}{c}\right)[1-F(s)]e^{-\delta\frac{s-u}{c}} ds \\ &\quad - \frac{1}{c} \int_u^\infty g'\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\frac{s-u}{c}} \int_0^s f(x)\varphi(s-x)dx ds \\ &\quad - g(0)[1-F(u)] - g(0) \int_0^u f(x)\varphi(u-x)dx + \delta\varphi(u), \end{aligned} \quad (2.47)$$

recordando que la función $g(t)$ representa la función de densidad de los tiempos entre arribo se tiene que $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, en especial $g(0) = \lambda$ y $g'(t) = -\lambda g(t)$. Usando estos hechos en la expresión (2.47) se obtiene:

$$\begin{aligned} c\varphi'(u) &= -\lambda[1-F(u)] - \lambda \int_0^u f(x)\varphi(u-x)dx \\ &\quad + \lambda \left(\frac{1}{c} \int_u^\infty g\left(\frac{s-u}{c}\right)[1-F(s)]e^{-\delta\frac{s-u}{c}} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} \int_u^\infty g\left(\frac{s-u}{c}\right)e^{-\delta\frac{s-u}{c}} \int_0^s f(x)\varphi(s-x)dx ds \right) \\ &\quad + \delta\varphi(u), \end{aligned} \quad (2.48)$$

notemos que la parte que está entre paréntesis es equivalente a (2.42), entonces (2.48) se reescribe como:

$$c\varphi'(u) = (\delta + \lambda)\varphi(u) - \lambda[1-F(u)] - \lambda \int_0^u f(x)\varphi(u-x)dx. \quad (2.49)$$

□

Proposición 2.16 *La transformada de Laplace de la función de penalización descontada $\varphi(u)$ es:*

$$L_{\varphi(u)}(s) = \frac{\frac{\lambda}{s}(L_{f(u)}(s) - 1) - \frac{\lambda}{\zeta}(L_{f(u)}(\zeta) - 1)}{cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)}, \quad (2.50)$$

donde ζ es la raíz positiva de la ecuación $cz - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s) = 0$.

Demostración:

La demostración proviene de Sarah Oldershaw (2011). Tomaré la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación (2.41) obteniendo del lado izquierdo:

$$L_{c\varphi'(u)}(s) = cL_{\varphi'(u)}(s) = c(sL_{\varphi(u)}(s) - \varphi(0)) = csL_{\varphi(u)}(s) - c\varphi(0), \quad (2.51)$$

y del lado derecho se obtienen los siguientes tres resultados:

$$L_{(\lambda+\delta)\varphi(u)}(s) = (\lambda + \delta)L_{\varphi(u)}(s), \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}
L_{-\lambda(1-F(u))}(s) &= -\lambda L_{1-F(u)}(s) \\
&= -\lambda\left(\frac{1}{s} - L_{F(u)}(s)\right) \\
&= -\lambda\left(\frac{1}{s} - L_{\int f(u)du}(s)\right) \\
&= -\lambda\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}L_{f(u)}(s)\right) \\
&= -\frac{\lambda}{s}(1 - L_{f(u)}(s)), \tag{2.53}
\end{aligned}$$

y

$$L_{\lambda \int_0^u f(x)\varphi(u-x)dx}(s) = \lambda L_{f(u)*\varphi(u)}$$

hay que notar que $\int_0^u f(x)\varphi(u-x)dx(s)$ es una convolución ², por tanto:

$$= -\lambda L_{f(u)}(s)L_{\varphi(u)}(s). \tag{2.54}$$

Uniendo los resultados anteriores (2.41) se reescribe como:

$$csL_{\varphi(u)}(s) - c\varphi(0) = (\lambda + \delta)L_{\varphi(u)}(s) - \frac{\lambda}{s}(1 - L_{f(u)}(s)) - \frac{\lambda}{s}(1 - L_{f(u)}(s)),$$

reagrupando los términos obtenemos:

$$L_{\varphi(u)}(s)[cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)] = c\varphi(0) - \frac{\lambda}{s}(1 - L_{f(u)}(s)). \tag{2.55}$$

A continuación se desea obtener una expresión para $\varphi(0)$ entonces si se toma la ecuación siguiente:

$$cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s) = 0,$$

y se denota la solución positiva de esta ecuación como $s = \zeta$, con esta consideración se logra encontrar el valor deseado (cuando $\delta = 0$ entonces $\zeta = R$ donde R es el coeficiente de ajuste) y se obtiene que:

$$\varphi(0) = \frac{\lambda(1 - L_{f(u)}(\zeta))}{c\zeta}.$$

Sustituyendo el valor anterior en (2.55) implica:

$$\begin{aligned}
L_{\varphi(u)}(s) &= \frac{c\varphi(0) - \frac{\lambda}{s}(1 - L_{f(u)}(s))}{cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)} \\
&= \frac{\frac{c\lambda}{c\zeta}(1 - L_{f(u)}(\zeta)) - \frac{\lambda}{s}(1 - L_{f(u)}(s))}{cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\zeta}(1 - L_{f(u)}(\zeta)) - \frac{\lambda}{s}(1 - L_{f(u)}(s))}{cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)}. \tag{2.56}
\end{aligned}$$

²Véase apéndice B, propiedad (B.8)

□

Proposición 2.17 *La doble transformada de Laplace de la probabilidad de supervivencia $\phi(u, t)$ puede ser calculada como:*

$$L_{\phi(u,t)}(s, \delta) = \frac{1}{\delta s} - \frac{L_{\varphi(u)}(s)}{\delta}. \quad (2.57)$$

Demostración:

La demostración proviene de Sarah Oldershaw (2011). Consideraré la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \phi(u, t) &= 1 - \psi(u, t) \\ &= 1 - \int_0^t \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v) dv, \end{aligned} \quad (2.58)$$

y observando que:

$$\begin{aligned} L_{\phi(u,t)}(s, \delta) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t - su} \phi(u, t) dudt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^\infty e^{-su} \phi(u, t) dudt, \end{aligned} \quad (2.59)$$

insertando el resultado (2.58) en la ecuación (2.59) se obtiene:

$$\begin{aligned} L_{\phi(u,t)}(s, \delta) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t - su} [1 - \int_0^t \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v) dv] dudt \\ &= \underbrace{\int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^\infty e^{-su} dudt}_A - \underbrace{\int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^\infty e^{-su} \int_0^t \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v) dv dudt}_B. \end{aligned}$$

Se trabajarán de forma separada las expresiones A y B , para A se observa lo siguiente:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^\infty e^{-su} dudt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \left[-\frac{1}{s} e^{-su} \right]_0^\infty dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-\delta t} dt \\ &= \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{s\delta}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

para B se tiene que:

$$B = - \int_0^\infty e^{-\delta t} \underbrace{\int_0^\infty e^{-su} \int_0^t \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v) dv du}_{C} dt,$$

la sección denotada por C puede interpretarse como la transformada de Laplace de la función $h(u, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v) dv$ con respecto a la variable u , esto es:

$$\begin{aligned} L_{h(u,t)}^u(s) &= L_{\int_0^t \frac{\partial}{\partial v} \psi(u,v) dv}^u(s) \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial v} L_{\psi(u,v)}^u(s) dv, \end{aligned}$$

reescribiendo B se obtiene:

$$B = - \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^t \frac{\partial}{\partial v} L_{\psi(u,v)}^u(s) dv dt,$$

tomando $h_1(s, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial v} L_{\psi(u,v)}^u(s) dv$ se tiene que:

$$\begin{aligned} &= - \int_0^\infty e^{-\delta t} h_1(s, t) dt \\ &= -L_{h_1(s,t)}^t(\delta) \\ &= -L_{\int_0^t \frac{\partial}{\partial v} L_{\psi(u,v)}^u(s) dv}^t(\delta) \end{aligned}$$

usando que $L_{\int_0^\infty u(r) dr}(s) = \frac{1}{s} L_u(s)$, se llega a:

$$\begin{aligned} &= -L_{\int_0^t \frac{\partial}{\partial v} L_{\psi(u,v)}^u(s) dv}^t(\delta) \\ &= -\frac{L_{\frac{\partial}{\partial v} L_{\psi(u,v)}^u(s)}^v(\delta)}{\delta} \end{aligned}$$

por la propiedad ${}^3L_{u'(t)}(s) = sL_{u(t)}(s) - u(0)$, lo anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} &= -\frac{\delta L_{L_{\psi(u,v)}^u(s)}^v(\delta) + L_{\psi(u,0)}^u(s)}{\delta} \\ &= -L_{\psi(u,v)}(s, \delta) + \frac{L_{\psi(u,0)}^u(s)}{\delta}, \end{aligned} \tag{2.61}$$

por otro lado si aplico la transformada de Laplace con respecto a u de (2.39) en ambos lados se tiene que:

$$L_{\varphi(u)}(s) = -L_{\psi(u,0)}^u(s) + \delta L_{\psi(u,t)}(s, \delta),$$

³Véase apéndice B, transformada de Laplace y sus propiedades.

entonces:

$$L_{\psi(u,t)}(s, \delta) = \frac{L_{\varphi(u)}(s)}{\delta} + \frac{L_{\psi(u,0)}^u(s)}{\delta}, \quad (2.62)$$

reemplazando (2.62) en (2.61) se obtiene que:

$$B = \frac{L_{\varphi(u)}(s)}{\delta},$$

uniendo los resultados de las expresiones A y B se consigue lo deseado:

$$L_{\phi(u,t)}(s, \delta) = \frac{1}{s\delta} - \frac{L_{\varphi(u)}(s)}{\delta}.$$

□

Proposición 2.18 *La doble transformada de Laplace de la probabilidad de no ruina con horizonte finito puede calcularse como:*

$$L_{\phi(u,t)}(s, \delta) = \frac{s - \zeta}{s\zeta[cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)]}. \quad (2.63)$$

Demostración:

La demostración proviene de Sarah Oldershaw (2011). Usando (2.57) y (2.56) se obtiene:

$$\begin{aligned} L_{\phi(u,t)}(s, \delta) &= \frac{1}{s\delta} - \frac{\frac{c\varphi(0) - \frac{\lambda}{s}(1 - L_{f(u)}(s))}{cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)}}{\delta} \\ &= \frac{1}{s\delta} - \frac{c\varphi(0) - \frac{\lambda}{s}(1 - L_{f(u)}(s))}{\delta[cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)]} \\ &= \frac{cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s) - sc\varphi(0) - \lambda L_{f(u)}(s)}{s\delta[cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)]} \\ &= \frac{cs - \delta - sc\varphi(0)}{s\delta[cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)]}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

un argumento similar al usado en la demostración de la expresión (2.50) nos lleva a considerar la siguiente ecuación:

$$cs - \delta - sc\varphi(0) = 0,$$

tomando $s = \zeta$ como la raíz positiva de la ecuación anterior se observa:

$$\varphi(0) = 1 - \frac{\delta}{\zeta c},$$

sustituyendo lo anterior en (2.64) se obtiene:

$$\begin{aligned}
L_{\phi(u,t)}(s, \delta) &= \frac{cs - \delta - sc\left(1 - \frac{\delta}{\zeta c}\right)}{s\delta[cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)]} \\
&= \frac{\frac{s\delta}{\zeta} - \delta}{s\delta[cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)]} \\
&= \frac{\frac{s}{\zeta} - 1}{s[cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)]} \\
&= \frac{s - \zeta}{s\zeta[cs - \lambda - \delta + \lambda L_{f(u)}(s)]}.
\end{aligned}$$

□

Con el resultado anterior es posible obtener la doble transformada de Laplace de la probabilidad de no ruina con horizonte finito, el obtener expresiones explícitas de dicha probabilidad no solo depende de la existencia de la transformada, también es vital lograr revertir el proceso. La ecuación (2.63) puede ser usada para obtener expresiones de $\phi(u, t)$ para algunos tipos de distribuciones por siniestros.

Ejemplos:

- Probabilidad de no ruina con horizonte finito cuando los reclamos son exponenciales de parámetro α .

$$\phi(u, t) = 1 + \frac{e^{-[(\lambda+\alpha)t+\alpha u]}}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+ct)^k (\lambda\alpha t)^{k+1}}{k!(k+1)!} - \frac{e^{-[(\lambda+\alpha)t+\alpha u]}}{\alpha} H(u, t), \quad (2.65)$$

donde:

$$H(u, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\left(\frac{c}{\lambda} \right)^j + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^j \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+ct)^k (\lambda\alpha t)^{j+k+1}}{k!(j+k+1)!}.$$

- Probabilidad de no ruina con horizonte finito cuando los reclamos son Erlang(2).

$$\phi(u, t) = 1 - e^{-\lambda t - t\alpha - u\alpha} \times \left[\sum_{j=1}^{\infty} (H_1(u, t, j) + H_2(u, t, j)) \right], \quad (2.66)$$

con:

$$H_1(u, t, j) = \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^{2j-1} + c_{(2j-2)} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u+ct)^k (\lambda(u+ct)^2 t)^{j+k-1}}{(2k-1)!(k+j-1)!}$$

$$H_2(u, t, j) = \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^{2j} + c_{(2j-1)} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u+ct)^{2k-2} (t(u+ct)^2 \lambda)^{j+k-1}}{(2k-2)!(k+j-1)!}$$

donde $c_{(k)} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dz} h(z) \right]_{z=0}$ y $h(z)$ es:

$$h(z) = \frac{1}{2(cz^2\lambda z - \alpha\delta)} \frac{-2cz^2 + \alpha\lambda - \sqrt{(\alpha^2\lambda^2 + 4cz^3\lambda)}}{\alpha}.$$

2.3. Cotas y aproximaciones para la probabilidad de ruina.

La ausencia de resultados adecuados para calcular la probabilidad de ruina con horizonte finito nos lleva a aproximar o acotar tales probabilidades. En los resultados anteriores el encontrar la probabilidad de ruina en tiempo finito dependía del conocer la función de densidad o bien la función de distribución del monto agregado de siniestros, sin embargo en la práctica conocer las funciones mencionadas plantea difíciles problemas. Aunque existen caminos para aproximar dichas funciones computacionalmente estos algoritmos son pesados o las aproximaciones no son adecuadas.

Por tanto intentaremos analizar formas de acotar la probabilidad de ruina. Una de las primeras cotas para la probabilidad de ruina con horizonte finito será la cota de Cramér-Lundberg que se revisó en el capítulo uno, el resultado referido expresa: $\psi(u) \leq e^{-Ru}$, en especial podemos ver: $\psi(u, t) \leq e^{-Ru}$, puesto que $\psi(u, t) \leq \psi(u)$. Se resalta que esta cota únicamente es usada cuando las reclamaciones son de cola ligera, en el caso de que las reclamaciones sean de cola pesada el resultado anterior no es adecuado ya que necesitamos que la función generadora de momentos exista.

La sección tiene como objetivo el mostrar diferentes formas de acotar o aproximar la probabilidad de ruina con horizonte finito. Sin pérdida de generalidad suponemos que la constante de ingresos es constante e igual a uno.

2.3.1. Aproximación Segerdahl normal.

Motivado por el estudio del proceso de riesgo en un intervalo de tiempo Segerdahl(1955) propone la siguiente aproximación. Es necesario conocer las cantidades $C = \frac{1 - \lambda\mu}{\lambda M'_x(R) - 1}$, $m_L = \frac{1}{\lambda M'_x(R) - 1}$ y $w_L^2 = \lambda M''_x(R) m_L^3$ para poder aplicar el resultado. Considerando las cantidades anteriores se propuso lo siguiente.

Proposición 2.19 *La probabilidad de ruina hasta un horizonte finito T puede ser estimada como:*

$$\psi(u, T) \approx Ce^{-Ru} \Phi \left(\frac{T - um_L}{w_L \sqrt{u}} \right),$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la distribución normal estándar.

Dado que necesitamos conocer el coeficiente de ajuste R en la aproximación, la cota solamente podrá ser empleada por reclamaciones de cola ligera. La evidencia práctica nos dice que esta cota es confiable para cuando u es grande y $|\frac{T - um_L}{w_L \sqrt{u}}|$ es moderadamente grande o pequeña.

2.3.2. La aproximación de Gerber dependiente del tiempo.

El siguiente criterio para aproximar la probabilidad de ruina se propuso en Gerber (1973), para comprender el resultado recordemos la ecuación de la que obtenemos el coeficiente de ajuste $K(r) = \lambda(M_x(r) - 1) - 1$ y tomemos en cuenta lo siguiente. Para cada $y > 0$, definamos r_y y γ_y como:

$$K'(r_y) = \frac{1}{y} \quad y \quad \gamma_y = r_y - yK(r_y).$$

Notemos que $r_y > r_{min}$ y $\gamma_y > R$. Con los datos anteriores postulamos el siguiente resultado.

Proposición 2.20

$$\begin{aligned} \psi(u, yu) &\leq e^{-\gamma_y u} \quad , \quad y < \frac{1}{K'(R)}. \\ \psi(u) - \psi(u, yu) &\leq e^{-\gamma_y u} \quad , \quad y > \frac{1}{K'(R)}. \end{aligned}$$

El resultado anterior es aplicable en el caso de que las reclamaciones sean de cola ligera.

2.3.3. Aproximación basada en el movimiento Browniano.

La idea de aproximar el proceso de riesgo mediante un movimiento Browniano proviene de Iglehart (1969), pero usaremos las reflexiones de Klugman (2004) en el desarrollo de la aproximación. Comencemos recordando la estructura del proceso de riesgo:

$$U_t = u + ct - S_t,$$

definamos Z_t como:

$$Z_t = U_t - u = ct - S_t,$$

como S_t es un proceso Poisson compuesto y usando las propiedades obtenidas en el capítulo anterior tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_t] &= ct - \mathbb{E}[S_t] \\ &= ct - \lambda t \mathbb{E}[X]\end{aligned}$$

y

$$\text{Var}[Z_t] = \lambda t \text{Var}[X^2],$$

definamos el movimiento Browniano como sigue:

Definición 2.8 *Un proceso estocástico continuo $\{W_t; t \geq 0\}$ es llamado movimiento Browniano si:*

1. $W_0 = 0$.
2. $\{W_t, t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios e independientes.
3. Para cada $t > 0$, W_t se distribuye normal con media 0 y varianza $\sigma^2 t$.

Definición 2.9 *Un proceso estocástico continuo $\{W_t; t \geq 0\}$ es llamado movimiento Browniano con deriva si el proceso satisface las propiedades de un movimiento Browniano pero con media μt en vez de 0, para $\mu > 0$.*

Empatando los primeros momentos del proceso de riesgo $U_t = u + Z_t$, con el proceso:

$$\bar{U}_t = u + W_t,$$

donde W_t es un movimiento Browniano con deriva, se obtiene:

$$\mu = c - \lambda \mathbb{E}[X],$$

y

$$\sigma^2 = \lambda \mathbb{E}[X^2],$$

de donde se obtiene:

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{\mathbb{E}[X^2]}, \quad y \quad c = \mu + \sigma^2 \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Si se desea aproximar el proceso de riesgo con el movimiento Browniano intuitivamente sucede que la intensidad de las reclamaciones tiende a infinito y las reclamaciones son infinitamente pequeñas. Lo anterior puede explicarse si se toma a X

como una versión escalada de una variable Y ($X = \alpha Y$), con media y varianza fija, entonces:

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{\mathbb{E}[Y^2]} \frac{1}{\alpha^2},$$

y

$$c = \mu + \sigma^2 \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[Y^2]} \frac{1}{\alpha},$$

cuando $\alpha \rightarrow 0$ entonces $\lambda \rightarrow \infty$. Como S_t es un proceso continuo con incrementos independientes la función generadora de momentos de Z_t es la siguiente:

$$\begin{aligned} M_{Z_t}(r) &= M_{ct-S_t}(r) \\ &= \mathbb{E}[\exp[r(ct - S_t)]] \\ &= e^{t(rc + \lambda[M_X(-r) - 1])}, \end{aligned}$$

tomando logaritmo, dividiendo entre t de ambos lados y desarrollando en series se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(M_{Z_t}(r))}{t} &= rc + \lambda[M_X(-r) - 1] \\ &= r[\mu + \lambda\mathbb{E}[X]] + \lambda \left[1 - r\mathbb{E}[X] + \frac{r^2}{2!}\mathbb{E}[X^2] - \frac{r^3}{3!}\mathbb{E}[X^3] + \dots \right] \\ &= r\mu + \frac{r^2}{2}\lambda\mathbb{E}[X^2] - \lambda \left[\frac{r^3}{3!}\mathbb{E}[X^3] - \frac{r^4}{4!}\mathbb{E}[X^4] + \dots \right] \\ &= r\mu + \frac{r^2}{2}\sigma^2 - \sigma^2 \left[\alpha \frac{r^3}{3!} \frac{\mathbb{E}[Y^3]}{\mathbb{E}[Y^2]} - \alpha^2 \frac{r^4}{4!} \frac{\mathbb{E}[Y^4]}{\mathbb{E}[Y^2]} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Como todos los términos son fijos (excepto α), cuando $\alpha \rightarrow 0$ se tiene que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} M_{Z_t}(r) = e^{r\mu t + \frac{r^2}{2}\sigma^2 t},$$

es la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal con media μt y varianza $\sigma^2 t$. Por tanto el límite de Z_t converge a un movimiento Browniano con deriva.

Proposición 2.21 *Bajo las consideraciones anteriores la probabilidad de ruina puede ser aproximada por:*

$$\psi(u, T) \approx IG \left(\frac{T\mu_c^2}{\sigma_c^2}; -1; \frac{u|\mu_c|}{\sigma_c^2} \right),$$

donde $\mu_c = \lambda\theta\mu$, $\sigma_c = \lambda\mu^{(2)}$ y $IG(x; \zeta; u)$ denota la función de distribución Gaussiana inversa, que se define como:

$$IG(x; \zeta; u) = 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{x}} - \zeta\sqrt{x}\right) + e^{2\zeta u} \Phi\left(-\frac{u}{\sqrt{x}} - \zeta\sqrt{x}\right).$$

Demostración:

Veamos que la probabilidad de ruina del proceso \bar{U}_t puede calcularse como sigue:

$$\begin{aligned} \psi(u, T) &= P[\tau < T] \\ &= P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0] \\ &= P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0 \cap \bar{U}_T > 0] + P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0 \cap \bar{U}_T < 0] \\ &= \int_0^\infty P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0 \cap \bar{U}_T \in (x, x + dx)] dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0 \cap \bar{U}_T \in (x, x + dx)] dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \underbrace{P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0 \cap \bar{U}_T \in (x, x + dx)]}_{P[A_x]} dx \\ &\quad + \underbrace{P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0 \cap \bar{U}_T \in (-x, -x - dx)]}_{P[B_x]} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 P[A_x] + P[B_x] dx \\ &= \int_{-\infty}^0 P[A_x] \left(1 + \frac{P[B_x]}{P[A_x]}\right) dx \end{aligned}$$

Notemos que como $\bar{U}_t - u$ es un movimiento Browniano con deriva, entonces U_T tiene función de densidad con media $u + \mu T$ y varianza $\sigma^2 T$, por lo tanto:

$$P[A_x] = (2\pi\sigma^2 T)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-u-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}},$$

por otro lado veamos qué pasa con:

$$\frac{P[B_x]}{P[A_x]} = \frac{\int_0^T P[B_x | \tau = t] f_\tau(t) dt}{\int_0^T P[A_x | \tau = t] f_\tau(t) dt},$$

donde $f_\tau(t)$ es la función de densidad de τ , notemos que:

$$P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0 \cap \bar{U}_T \in (x, x + dx) | \tau = t] = P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0 \cap \bar{U}_T - \bar{U}_t \in (x, x + dx)]. \quad (2.67)$$

Se observa que la función de densidad condicionando respecto a $\tau = t$ es equivalente a (2.67) porque $\tau = t$ implica que $\bar{U}_t = 0$. Como el proceso \bar{U}_t tiene incrementos independientes entonces $\bar{U}_T - \bar{U}_t$ tiene una distribución normal, entonces:

$$\begin{aligned} P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0 \cap \bar{U}_T - \bar{U}_t \in (x, x + dx)] &= \frac{\exp\left(-\frac{[x - \mu(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \\ &= \exp\left(\frac{x\mu}{\sigma^2}\right) \frac{\exp\left(-\frac{x^2 + \mu^2(T-t)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

De forma similar reemplazando x por $-x$ se obtiene que:

$$P[\min_{0 < t < T} \bar{U}_t < 0 \cap \bar{U}_T - \bar{U}_t \in (-x, -x - dx)] = \exp\left(-\frac{x\mu}{\sigma^2}\right) \frac{\exp\left(-\frac{x^2 + \mu^2(T-t)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}, \quad (2.69)$$

usando (2.68) y (2.69) se obtiene:

$$\frac{P[B_x]}{P[A_x]} = \exp\left(\frac{-2\mu x}{\sigma^2}\right),$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \psi(u, T) &= \int_{-\infty}^0 P[A_x] \left(1 + \frac{P[B_x]}{P[A_x]}\right) dx \\ &= \phi\left(\frac{-u - \mu T}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) + \int_{-\infty}^0 (2\pi\sigma^2 T)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x - u - \mu T)^2}{2\sigma^2 T} - \frac{2\mu x}{\sigma^2}\right) dx \\ &= \phi\left(\frac{-u - \mu T}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) + \int_{-\infty}^0 (2\pi\sigma^2 T)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x - u - \mu T)^2 + 4\mu x T}{2\sigma^2 T}\right) dx \\ &= \phi\left(-\frac{u + \mu T}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) + \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2 u}\right) \phi\left(-\frac{u - \mu T}{\sqrt{\sigma^2 T}}\right), \end{aligned}$$

reacomodando los términos de forma adecuada se obtiene lo deseado.

□

Para tal resultado es interesante notar que estamos suponiendo que el proceso agregado de las reclamaciones es regido por una ley de probabilidad similar a la normal y necesitamos que exista el segundo momento de las reclamaciones. Esta aproximación proporciona resultados confiables sobre todo si u es grande.

2.3.4. Aproximación corregida basada en el movimiento Browniano.

El tratar de aproximar el proceso de riesgo con un movimiento Browniano no es del todo adecuado pues dejamos de lado los saltos que son experimentados en el proceso de riesgo. Asmussen(1984) propone un método alternativo que intenta corregir este y otros aspectos. Obteniendo como conclusión:

Proposición 2.22 *La probabilidad de ruina con horizonte finito puede ser aproximada como:*

$$\psi(u, T) \approx IG \left(\frac{T\gamma_1}{u^2} + \frac{\gamma_2}{u}; -\frac{Ru}{2}; 1 + \frac{\gamma_2}{u} \right),$$

donde R es el coeficiente de ajuste, $\gamma_1 = \lambda M_x''(r_{min})$ y $\gamma_2 = \frac{M_x'''(r_{min})}{3M_x''(r_{min})}$. El número r_{min} hace que la función $K(r)$ alcance su mínimo y por tanto $K'(r_{min}) = 0$.

Se observa que este método requiere de la existencia de la función generadora de momentos y del coeficiente de ajuste por lo que únicamente puede usarse en el caso de que las reclamaciones sean de cola ligera.

Algunos de los documentos que se recomienda revisar si se desea conocer mayores detalles de lo expuesto durante el capítulo son: Asmussen (2010), Cizek (2011) y Li Shuanming (2009). Podemos concluir que en general no es sencillo encontrar expresiones para la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo finito, y cuando se encuentren tales resultados las expresiones no son fáciles de calcular, lo que nos lleva a aprovechar las herramientas tecnológicas para abordar el cálculo de probabilidades de ruina (como se verá en el próximo capítulo).

Capítulo 3

Simulaciones y ejemplos.

Realizar simulaciones en el área de la probabilidad ha tenido un gran auge debido al desarrollo y avance tecnológico. El sustento teórico de este campo son los teoremas límite de la teoría de la probabilidad, el desarrollo de los teoremas comienza con la publicación del teorema de Bernoulli en el año de 1713 que establece; si tenemos una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas X_1, X_2, \dots con distribución Bernoulli de parámetro p entonces:

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

El teorema anterior fue el preámbulo para que se desarrollara la ley débil de los grandes números, la estructura general del teorema anterior se atribuye al matemático Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) ya que para el año 1867 demostró que si tenemos una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas X_1, X_2, \dots con media μ y varianza finita entonces:

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Para el año 1930 el resultado anterior fue mejorado por Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) obteniendo como resultado que, si tenemos una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas X_1, X_2, \dots con media μ entonces:

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \mu,$$

hoy conocida como la ley fuerte de los grandes números.

La ley fuerte y débil de los grandes números junto con el teorema del límite central forman los más importantes pilares usados en la simulación de procesos

probabilísticos. La ley fuerte y débil de los grandes números nos llevan a la interpretación de la esperanza como un promedio obtenido de repetir muchas veces el experimento, sin embargo se remarca que cuando n es muy grande no necesariamente debe ocurrir que $\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ tienda a μ con probabilidad cercana a uno.

Lo que se persigue en la sección es calcular la probabilidad de ruina con horizonte finito, para calcular dicha probabilidad se tomará como base el teorema de Borel, se expone a continuación:

Teorema 3.1 (Borel) *Sea ξ un experimento aleatorio y A un evento relativo a ese experimento, de probabilidad igual a p . Consideremos un nuevo experimento aleatorio consistente en la repetición indefinida del experimento ξ , de tal manera que cada repetición es independiente de las otras. Sea X_n el número de veces que ocurre el evento A en las primeras n repeticiones del experimento, entonces:*

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{c.s.} p.$$

Demostración: García Álvarez M.A. (2008)

Veamos que X_n tiene distribución binomial con parámetros n y p , usando la función generadora de momentos (véase el apéndice A) podemos ver:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n] &= np \\ \mathbb{E}[X_n^2] &= np + n(n-1)p^2 \\ \mathbb{E}[X_n^3] &= np + 3n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3 \\ \mathbb{E}[X_n^4] &= np + 7n(n-1)p^2 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)p^4,\end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{n} - p\right)^4\right] &= \frac{\mathbb{E}[X_n^4]}{n^4} - 4\frac{\mathbb{E}[X_n^3]}{n^3}p + 6\frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{n^2}p^2 - 4\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n}p^3 + p^4 \\ &= \frac{1}{n^3}p(1-p)[3np(1-p) - 6p(1-p) + 1] \\ &< \frac{1}{4n^3}\left(\frac{3n}{4} + n\right) \\ &< \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Chevyshev sabemos que cualquier variable aleatoria X satisface que $P[|X| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}[|X|]$, por tanto:

$$P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \epsilon\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{n} - p\right)^4\right]}{\epsilon^4} < \frac{1}{n^2\epsilon^4}.$$

Usando la propiedad (B.14) del apéndice B podemos observar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \epsilon\right]$ es convergente, entonces $\frac{X_n}{n} - p \xrightarrow{c.s.} 0$, lo que implica que $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{c.s.} p$. \square

El sustento práctico de realizar simulaciones se basa en poder generar números aleatorios, uno de los tipos de variables aleatorias más importantes son las que tiene distribución uniforme puesto que:

Proposición 3.1 *Sea U una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. Para alguna distribución continua F si se define a la variable aleatoria X como:*

$$X = F^{-1}(U),$$

entonces la variable aleatoria X tiene distribución F .

Demostración:

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X \leq x] \\ &= P[F^{-1}(U) \leq x], \end{aligned}$$

como la función $F(x)$ es no decreciente entonces si $F^{-1}(U) \leq x$ tendremos que $U \leq F(x)$, por tanto:

$$\begin{aligned} &= P[U \leq F(x)] \\ &= F(x). \end{aligned}$$

□

Con la proposición anterior se pueden generar variables aleatorias continuas en función de variables aleatorias continuas uniformes en el intervalo $(0, 1)$ siempre que se pueda calcular la función F^{-1} . Para generar variables aleatorias discretas existen algoritmos que de igual forma utilizan variables aleatorias uniformes. Algunas otras variables utilizan algoritmos de construcción diferentes.

Dada la importancia de las variables aleatorias uniformes existen muchos programas diseñados para generar tales variables, pero se recalca que únicamente son número pseudoaleatorios, ya que nuestras computadoras no realizan experimentos asociados a una distribución uniforme, lo que se hace es diseñar algoritmos que proporcionen números lo suficientemente parecidos a los que se obtendrían de realizar un experimento de ese tipo. A manera de ejemplo se muestra un algoritmo que puede generar números pseudoaleatorios de distribución uniforme:

Considere a y c números enteros y definamos X_t como:

$$X_t = (aX_{t-1} + c) \text{ modulo } m,$$

para $t = 1, 2, \dots$ donde X_0 es nuestra semilla inicial (un valor que puede ser elegido por el usuario), notemos que $X_t \in \{0, \dots, m-1\}$, con estas consideraciones podemos

definir un número pseudoaleatorio uniforme como:

$$U_t = \frac{X_t}{m}.$$

Un algoritmo que genere números aleatorios debe pasar pruebas estadísticas, debe tener un soporte teórico, ser reproducible, rápido y eficiente. Además de tener un periodo largo para evitar problemas con la duplicación y la independencia, así como permitir correr paralelamente varias variables aleatorias. Es deseable que no genere números como 0 ó 1 pues podríamos tener complicaciones numéricas.

Como consideración final se remarca que el concepto de sucesión infinita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas es una abstracción matemática pues en la práctica no podemos producir tal sucesión con los dispositivos informáticos existentes.

3.1. Simulación del proceso de riesgo.

Como se ha mencionado el proceso de riesgo clásico se compone de varias partes pero solamente el monto agregado de las reclamaciones es aleatorio. S_t se compone de una sucesión de variables aleatorias independientes y un proceso Poisson. La simulación de la sucesión de variables aleatorias X_i que denota el monto de las reclamaciones es sencilla. Para simular el proceso Poisson se proporcionan dos métodos.

Simulación del proceso Poisson (Método 1).

De forma sencilla el proceso de riesgo puede construirse simulando la secuencia de variables independientes e idénticamente distribuidas T_i , que denotan los tiempos entre arribos de las reclamaciones. Si queremos conocer el número de reclamaciones $N(t)$ al tiempo t entonces:

$$N(t) = \text{mín}\{n | T_1 + \dots + T_n > t\} - 1,$$

recordemos que T_i se distribuye exponencial de parámetro λ .

Simulación del proceso Poisson (Método 2).

El proceso Poisson también puede ser construido primero simulando el número de reclamaciones ocurridas al tiempo t ($N(t)$ se distribuye Poisson de parámetro λt). Para obtener los tiempos en los que ocurren las reclamaciones dado que nuestro proceso Poisson tomó algún valor conocido al tiempo t , se debe recordar el concepto de estadística de orden.

Si tenemos una sucesión de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Y_1, Y_2, \dots, Y_n . Decimos que $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ son las estadísticas

de orden de la sucesión anterior, donde $Y_{(k)}$ es el k -ésimo valor más pequeño de la sucesión de variables, siendo $Y_{(1)}$ el mínimo y $Y_{(n)}$ el máximo de la sucesión. Recordemos que si las variables aleatorias Y_i tienen función de densidad $f(x)$, entonces la función de densidad conjunta es:

$$f_{Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}}(y_1, \dots, y_n) = n! f(y_1) \dots f(y_n),$$

para el caso en el que las variables aleatorias tengan distribución uniforme en el intervalo $(0, t)$ obtenemos que:

$$f_{Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}}(y_1, \dots, y_n) = \frac{n!}{t^n},$$

con lo anterior se puede observar lo siguiente:

Teorema 3.2 *Dado $N(t) = n$, la sucesión W_1, \dots, W_n donde W_i denota el tiempo en el que ocurre la i -ésima reclamación, tiene la misma distribución que las estadísticas de orden correspondientes a n variables aleatorias independientes e idénticamente de distribución uniforme en el intervalo $(0, t)$.*

Demostración:

Calculemos la función de densidad condicional de W_1, \dots, W_n dado que $N(t) = n$, notemos que para $0 < w_1 < \dots < w_n < t$ el evento $W_1 = w_1, W_2 = w_2, \dots, W_n = w_n, N(t) = n$ es equivalente a que los primeros $n + 1$ tiempos entre reclamaciones cumplan con que $T_1 = w_1, T_2 = w_2 - w_1, \dots, T_n = w_n - w_{n-1}, T_{n+1} > t - w_n$ y recordando que las variables T_i tienen distribución exponencial de parámetro λ entonces:

$$\begin{aligned} f(w_1, \dots, w_n | n) &= \frac{f(w_1, \dots, w_n, n)}{P[N(t) = n]} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda w_1} \lambda e^{-\lambda(w_2 - w_1)} \dots \lambda e^{-\lambda(w_n - w_{n-1})} \lambda e^{-\lambda(t - w_n)}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} \\ &= \frac{n!}{t^n}, \quad \text{para } 0 < w_1 < \dots < w_n < t. \end{aligned}$$

□

Con el teorema anterior y conociendo el valor que toma $N(t)$, bastará con simular variables aleatorias uniformes en el intervalo $(0, t)$ y ordenarlas para obtener los tiempos en los que ocurrirán las reclamaciones.

3.2. Algoritmos.

La sección tiene por objetivo mostrar la implementación de los resultados teóricos en un ambiente de programación. Los programas construidos en R para calcular

la probabilidad de ruina por simulación Monte Carlo tienen como base los siguientes algoritmos. Se dejará para estudios posteriores un análisis teórico de la eficiencia de los métodos aquí tratados.

Algoritmo I.

- 1 Fijar un horizonte de tiempo t .
- 2 Simular variables aleatorias exponenciales T_i (denotan los tiempos entre reclamaciones) de parámetro $\frac{1}{\lambda}$, hasta encontrar el primer número natural n' que satisface $\sum_{i=1}^{n'} T_i > t$.
- 3 Producir $n = n' - 1$ variables aleatorias que denoten las reclamaciones.
- 4 Evaluar el proceso de riesgo en los tiempos de reclamación W_i ($W_i = \sum_{k=1}^i T_k$) hasta llegar a la n -ésima reclamación y observar si ocurrió la ruina.
- 5 Repetir los pasos anteriores el número de veces deseado.

Algoritmo II.

- 1 Simular el número de reclamos (n) hasta el horizonte de tiempo t mediante una variable aleatoria Poisson(λt).
- 2 Crear n variables aleatorias uniformes en el intervalo $(0, t)$ y ordenarlas de menor a mayor, la sucesión obtenida denota los tiempos en los que ocurren las reclamaciones (W_i).
- 3 Generar n variables aleatorias que denoten los reclamos.
- 4 Evaluar el proceso de riesgo en los tiempos W_i y observar si sucede la ruina.
- 5 Repetir los pasos anteriores las veces que sea necesario.

Una de las inquietudes que surge cuando se trabaja con métodos Monte Carlo es conocer el número apropiado de simulaciones para obtener resultados confiables, una posible solución cuando las variables aleatorias Z_i tienen varianza σ^2 y esperanza μ es la siguiente, tomemos:

$$\bar{Z}_n = \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n},$$

que es un estimador de μ . Podemos usar la varianza para observar:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{Z}_n) &= \mathbb{E}[(\bar{Z}_n - \mu)^2] \\ &= \sigma^2/n, \end{aligned}$$

entonces n deberá ser tomado lo suficientemente grande para obtener una varianza adecuada (pequeña).

3.3. Ejemplos

La presente sección tiene por objetivo calcular la probabilidad de ruina para ejemplos concretos, en todos los ejercicios se satisface la condición de ganancia neta. Se tomaron tres distribuciones de cola ligera y tres de cola pesada para modelar el comportamiento de los reclamos. Para el caso exponencial se abordan diversas formas de obtener la probabilidad de ruina, en los otros casos solamente se realizan simulaciones Monte Carlo y cuando sea posible se calculan cotas. Cabe mencionar que todo fue programado en R, y el ordenador cuenta con un procesador Intel Core i3 de 2.40 GHz con 4 GB en memoria RAM.

En las simulaciones Monte Carlo se usan cuatro programas diferentes, dos se asocian al algoritmo I y los restantes al algoritmo II. Para el algoritmo I la función $Met1Graf(t, N, u, c, \lambda, dist, p1, p2, p3)$ genera las gráficas del proceso de riesgo y la función $Met1Prob(t, N, u, c, \lambda, dist, p1, p2, p3)$ genera las probabilidades de ruina del proceso de riesgo. El parámetro t denota el horizonte de tiempo, N es el número de trayectorias del proceso de riesgo, u el capital inicial, c la constante de ingresos, λ es la intensidad de proceso Poisson, $dist$ puede tomar los números del 1 a 7 que representan los tipos de reclamaciones del proceso de riesgo, los números $p1$, $p2$ y $p3$ son los parámetros de las distribuciones de los reclamos. Análogo al algoritmo I para el algoritmo II existen las funciones $Met2Graf(t, N, u, c, \lambda, dist, p1, p2, p3)$ y $Met2Prob(t, N, u, c, \lambda, dist, p1, p2, p3)$ que generan las gráficas y calculan las probabilidades de ruina del proceso de riesgo respectivamente.

3.3.1. Caso exponencial.

Bajo el contexto de reclamaciones exponenciales se usarán tres enfoques diferentes en el cálculo de la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo finito. El primer intento busca aplicar la expresión exacta de la ruina. El segundo procedimiento realiza simulaciones Monte Carlo por medio de dos algoritmos diferentes, en la última perspectiva se probará la fórmula (2.65) que se obtiene por la transformada de Laplace de la distribución del momento de ruina. Para finalizar se abordarán los resultados obtenidos al usar las cotas correspondientes. Se tomarán los siguientes parámetros del proceso de riesgo:

- $u = 5$ (reserva inicial).
- $c = 15$ (constante de ingresos por primas).
- $\lambda = 10$ (intensidad del proceso Poisson).
- $\alpha = 5/6$ (tasa de las reclamaciones exponenciales).

Se observarán los horizontes de tiempo $t = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 25, 50, 75$ y 100 . Para todos los resultados numéricos que implican simulaciones la semilla inicial tomada fue de 2598.

Fórmula explícita de la probabilidad de ruina.

Dado que la expresión (2.25) de la probabilidad de ruina con horizonte finito únicamente acepta como valores $c = 1$ y $\alpha = 1$ se usan las expresiones (1.21), (1.22) y (2.34) para notar que la probabilidad de ruina en función de los parámetros u, c, t, λ , y α equivale a:

$$\begin{aligned}\psi_{\lambda,c,\alpha}(u, t) &= \psi_{\frac{\lambda}{c},1,\alpha}(u, ct) \\ &= \psi_{\frac{\lambda}{\alpha},1,1}(\alpha u, \alpha ct).\end{aligned}\tag{3.1}$$

El resultado anterior representa la probabilidad de ruina de un proceso de riesgo diferente al inicial con parámetros $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha}$, $\tilde{c} = 1$, $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{u} = \alpha u$ y $\tilde{t} = \alpha t$. Observese que la probabilidad de ruina con horizonte infinito para ambos modelos es $\psi(u) = 0.3476786$ y ayudará a acotar la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo finito.

Dada la dificultad de evaluar la expresión de la probabilidad de ruina con horizonte finito debido a la integral involucrada en la ecuación, se propone usar un método Monte Carlo. Recordando tal fórmula se observa que:

$$\psi(u, t) = \lambda e^{1-\lambda} u - \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f_1(x)f_2(x)}{f_3(x)} dx}_B,$$

la parte B se puede interpretar como una esperanza, la interpretación de integrales en esperanzas puede ser revisada en Dimov I.T. (2008). Si se considera la esperanza de una función $H(x)$ donde x es una variable aleatoria entonces:

$$\mathbb{E}[H(x)] = \int_{\Omega} H(x)f(x)dx,\tag{3.2}$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de x y Ω representa el dominio de la integral. Se resalta que las integrales $\int_{\Omega} H(x)dx$ son de la forma (3.2) puesto que si se toma a x como una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el dominio de la integral se obtiene que:

$$\Omega \int_{\Omega} H(x) \frac{1}{\Omega} dx = \Omega \mathbb{E}[H(x)],\tag{3.3}$$

la sección B de la ecuación puede ser interpretada como la esperanza de una función de una variable que se distribuye uniformemente en el intervalo $[0, \pi]$, tomando a

$H(z) = \frac{f_1(x)f_2(x)}{f_3(x)}$ se obtiene:

$$\mathbb{E}[H(x)] = \int_0^\pi H(z) \frac{1}{\pi} dz, \quad (3.4)$$

bajo la observación anterior podemos usar la ley de los grandes números para notar que:

$$\mathbb{E} \left[\frac{f_1(x)f_2(x)}{f_3(x)} \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(x_i), \quad (3.5)$$

donde $x_i \sim U(0, \pi)$.

Usando los resultados anteriores se construyó la función $p(u, \lambda, t, N)$ que calcula la probabilidad de ruina de un proceso de riesgo con reclamaciones $exp(\alpha = 1)$ y constante de ingresos $c = 1$, el valor u denota el monto inicial, λ es el parámetro de intensidad del proceso Poisson, t expresa el horizonte de tiempo y N es el número de simulaciones a realizar. Para el ejemplo llevado a cabo las probabilidades de ruina obtenidas pueden ser revisadas en el cuadro (3.1). Se puede observar que la probabilidad de ruina aumenta conforme aumenta el horizonte de tiempo, y cuando se incrementa el número de iteraciones. Los resultados obtenidos se contrastan con la probabilidad de ruina con horizonte infinito y la cota de Cramér-Lundberg. Para obtener el coeficiente de ajuste indispensable para el cálculo de la cota de Cramér-Lundberg se resolvió lo siguiente:

$$K(r) = 0,$$

que equivale a:

$$\lambda[M_x(r) - 1] - cr = 0$$

$$\lambda \left[\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 \right] - cr = 0$$

$$\lambda \left(\frac{r}{\alpha - r} \right) - cr = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha - r} - c \right) r = 0,$$

de donde se observa que $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$ (eliminando la solución trivial $R = 0$), para este ejercicio $R = 0.16666\dots$, obteniendo como cota de Cramér-Lundberg el valor 0.434598209. En el cuadro (3.2) se puede observar el tiempo medido en segundos necesario para la obtención de las probabilidades de ruina usando la función $p(u, \lambda, t, N)$. El uso de la función es muy eficiente pues consume poco tiempo de ejecución, se observa que con horizontes de tiempo más amplios la probabilidad de ruina requiere menos simulaciones para que las cantidades estimadas sean más estables.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 25 | 50 | 75 | 100 |
| 5000 | 0.1948157 | 0.2607126 | 0.2913941 | 0.3087490 | 0.3196414 | 0.3403971 | 0.3473471 | 0.3476740 | 0.3476785 | 0.3476786 |
| 10000 | 0.1893749 | 0.2576389 | 0.2896650 | 0.3078055 | 0.3191196 | 0.3404407 | 0.3473753 | 0.3476748 | 0.3476785 | 0.3476786 |
| 15000 | 0.1875982 | 0.2567542 | 0.2893456 | 0.3077449 | 0.3192060 | 0.3405820 | 0.3473835 | 0.3476749 | 0.3476785 | 0.3476786 |
| 20000 | 0.1892499 | 0.2576811 | 0.2899197 | 0.3081151 | 0.3194509 | 0.3406175 | 0.3473822 | 0.3476749 | 0.3476785 | 0.3476786 |
| 50000 | 0.1928483 | 0.2596564 | 0.2911556 | 0.3089656 | 0.3200723 | 0.3407855 | 0.3473876 | 0.3476749 | 0.3476785 | 0.3476786 |
| 100000 | 0.1928914 | 0.2599183 | 0.2914476 | 0.3092194 | 0.3202744 | 0.3408259 | 0.3473851 | 0.3476749 | 0.3476785 | 0.3476786 |
| 200000 | 0.1943866 | 0.2609698 | 0.2922141 | 0.3097918 | 0.3207082 | 0.3409478 | 0.3473902 | 0.3476749 | 0.3476785 | 0.3476786 |
| 500000 | 0.1932883 | 0.2602222 | 0.2916690 | 0.3093865 | 0.3204043 | 0.3408675 | 0.3473870 | 0.3476749 | 0.3476785 | 0.3476786 |
| 1000000 | 0.1928552 | 0.2600650 | 0.2916183 | 0.3093789 | 0.3204138 | 0.3408790 | 0.3473874 | 0.3476749 | 0.3476785 | 0.3476786 |

Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.3476786

Desigualdad de Lundberg: 0.4345982

Cuadro 3.1: Probabilidad de ruina con expresión exacta (integral vía Monte Carlo).

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 25 | 50 | 75 | 100 |
| 5000 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.02 | 0.06 | 0.03 | 0.03 | 0.03 |
| 10000 | 0.04 | 0.08 | 0.04 | 0.03 | 0.03 | 0.04 | 0.03 | 0.03 | 0.04 | 0.04 |
| 15000 | 0.10 | 0.34 | 0.04 | 0.05 | 0.03 | 0.04 | 0.03 | 0.04 | 0.03 | 0.03 |
| 20000 | 0.22 | 0.12 | 0.03 | 0.04 | 0.04 | 0.03 | 0.05 | 0.04 | 0.04 | 0.05 |
| 50000 | 0.17 | 0.08 | 0.08 | 0.06 | 0.06 | 0.1 | 0.08 | 0.08 | 0.08 | 0.07 |
| 100000 | 0.27 | 0.13 | 0.13 | 0.17 | 0.13 | 0.15 | 0.14 | 0.12 | 0.14 | 0.14 |
| 200000 | 0.95 | 0.24 | 0.28 | 0.22 | 0.24 | 0.28 | 0.25 | 0.24 | 0.23 | 0.25 |
| 500000 | 0.94 | 0.61 | 0.61 | 0.55 | 0.58 | 0.62 | 0.62 | 0.61 | 0.59 | 0.59 |
| 1000000 | 1.38 | 1.31 | 1.51 | 1.22 | 1.45 | 1.34 | 1.38 | 1.31 | 1.35 | 1.13 |

Cuadro 3.2: Tiempo de ejecución medido en segundos.

Simulaciones Monte Carlo.

En las figuras (3.1) y (3.2) se muestran algunas trayectorias del proceso de riesgo con los parámetros considerados al inicio de este ejercicio, el horizonte de tiempo que se consideró fue $t = 100$. Se muestran dos gráficas y para cada una de ellas corresponde a un algoritmo diferente. El observar el comportamiento de las figuras invita a pensar que tal vez el proceso de riesgo puede ser aproximado por un movimiento Browniano, sin perder de vista que al proceso de riesgo enfrenta discontinuidades (saltos). Es interesante ver que en ambas figuras todas las trayectorias parecen tener una tendencia favorable excepto en tiempos cercanos a cero, si en la práctica existiera una situación similar sería recomendable elevar nuestra reserva inicial para reducir el riesgo de quiebra.

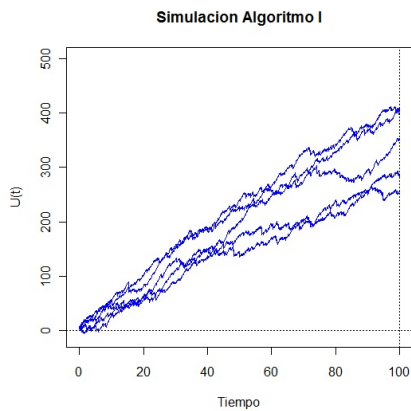


Figura 3.1: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo I).

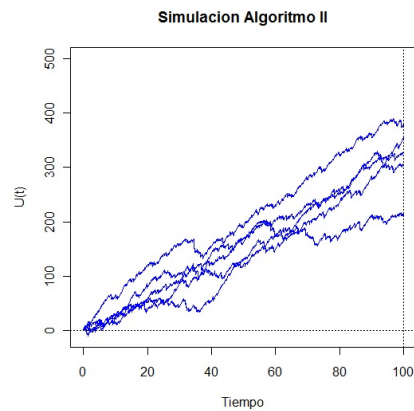


Figura 3.2: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo II).

En los cuadros (3.3) y (3.4) podemos observar las probabilidades de ruina estimadas para diferentes horizontes de tiempo según el número de iteraciones realizadas. Podemos observar que los resultados proporcionados por los dos algoritmos son similares, las probabilidades de ruina son menores a la probabilidad de ruina con horizonte infinito y a la cota de Cramer-Lundberg.

Adicionalmente se anexan los cuadros (3.5) y (3.6) de donde podemos comparar los tiempos de ejecución de los dos diferentes algoritmos y se observa que el algoritmo II es más veloz que el algoritmo I cuando se considera un número grande de simulaciones. Para un número pequeño de simulaciones el algoritmo I y el algoritmo II tienen tiempos de ejecución similares.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 25 | 50 | 75 | 100 |
| 5000 | 0.190200 | 0.248400 | 0.284000 | 0.319000 | 0.313800 | 0.343400 | 0.343000 | 0.349800 | 0.346000 | 0.357000 |
| 10000 | 0.191300 | 0.258200 | 0.285500 | 0.313100 | 0.316600 | 0.347500 | 0.343500 | 0.347800 | 0.349600 | 0.355300 |
| 15000 | 0.193400 | 0.260933 | 0.288933 | 0.310200 | 0.315400 | 0.347467 | 0.343200 | 0.350133 | 0.347133 | 0.353267 |
| 20000 | 0.195250 | 0.261050 | 0.289650 | 0.307100 | 0.317300 | 0.343050 | 0.344250 | 0.351550 | 0.346500 | 0.349900 |

Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.3476786

Desigualdad de Lundberg: 0.4345982

Cuadro 3.3: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 25 | 50 | 75 | 100 |
| 5000 | 0.200600 | 0.264200 | 0.2994600 | 0.312200 | 0.326600 | 0.342200 | 0.353400 | 0.357800 | 0.344400 | 0.346800 |
| 10000 | 0.200700 | 0.261900 | 0.291100 | 0.311900 | 0.323300 | 0.341000 | 0.348600 | 0.354200 | 0.351600 | 0.352100 |
| 15000 | 0.195467 | 0.258933 | 0.291933 | 0.308867 | 0.320933 | 0.344733 | 0.349467 | 0.356067 | 0.350533 | 0.351067 |
| 20000 | 0.195700 | 0.258850 | 0.292850 | 0.307350 | 0.318900 | 0.342850 | 0.349800 | 0.354650 | 0.350350 | 0.349550 |

Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.3476786

Desigualdad de Lundberg: 0.4345982

Cuadro 3.4: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo II.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 25 | 50 | 75 | 100 |
| 5000 | 2.59 | 4.73 | 7.01 | 9.06 | 11.56 | 21.94 | 55.49 | 119.06 | 149.88 | 162.86 |
| 10000 | 5.24 | 9.05 | 14.39 | 18.22 | 22.24 | 44.82 | 107.72 | 223.45 | 281.89 | 255.70 |
| 15000 | 7.96 | 14.60 | 21.54 | 26.48 | 33.71 | 65.03 | 170.07 | 298.48 | 419.59 | 377.26 |
| 20000 | 9.91 | 19.61 | 27.64 | 36.61 | 46.06 | 90.01 | 221.35 | 234.37 | 536.26 | 490.59 |

Cuadro 3.5: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 25 | 50 | 75 | 100 |
| 5000 | 2.34 | 2.90 | 4.43 | 4.46 | 5.14 | 5.32 | 22.90 | 62.19 | 56.63 | 55.15 |
| 10000 | 4.01 | 4.06 | 6.71 | 8.03 | 6.72 | 12.98 | 38.91 | 126.11 | 80.36 | 108.73 |
| 15000 | 5.09 | 10.47 | 9.08 | 11.63 | 17.89 | 15.89 | 60.53 | 187.38 | 120.97 | 167.80 |
| 20000 | 4.93 | 10.51 | 16.08 | 18.97 | 24.90 | 29.39 | 67.40 | 244.47 | 165.40 | 225.42 |

Cuadro 3.6: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo II.

Transformada de la distribución del tiempo de ruina.

Derivado de la transformada de la distribución del tiempo de ruina, se desarrolló la función $probaLapalce(u, \lambda, \alpha, c, t, N)$, que calcula la probabilidad de ruina del proceso de riesgo con reclamaciones exponenciales de parámetro α , intensidad λ del proceso Poisson, capital inicial u , constante de ingresos c y horizonte de tiempo t .

Como el resultado en el que se basa dicha función se expresa en sumas infinitas para las cuales no se encontró una expresión analítica, dichas sumas serán truncadas a N sumandos. Para los resultados prácticos se tomó $N = 10, 20, 30, 40, 50, 60$, para números mayores a 60 y horizontes de tiempo superiores a cinco se experimentaron problemas numéricos, ya que dentro del programa se calculan números factoriales que en ocasiones salen del rango de cálculo de la computadora como se muestra en el cuadro (3.7). Se observa que las probabilidades de ruina obtenidas por este método son similares a las que nos proporcionó la fórmula exacta. Las discrepancias numéricas entre este método y la probabilidad exacta seguramente proviene de la baja cantidad de sumandos contemplados en el proceso.

| Sumandos | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | | |
|----------|-------------------------|-----------|-----------|------------|-----------|----------|-----------|------|------|---|-----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 25 | 50 | 75 | 100 | |
| 10 | 0.0561467 | 3.13E-05 | 1.45E-10 | 4.6853E-17 | 3.099E-24 | 6.85E-65 | 1.89E-200 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | |
| 20 | 0.1925489 | 0.0857356 | 0.0010787 | 5.2551E-07 | 1.601E-11 | 1.68E-43 | 2.79E-167 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | |
| 30 | 0.1928115 | 0.2558216 | 0.0995031 | 0.00424389 | 2.174E-05 | 5.65E-29 | 5.23E-141 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | |
| 40 | 0.1928115 | 0.2600606 | 0.2781909 | 0.10730560 | 0.0084747 | 7.27E-19 | 3.33E-119 | NaN | NaN | NaN | |
| 50 | 0.1928115 | 0.2600613 | 0.2916041 | 0.28414000 | 0.1124731 | 5.53E-12 | Inf | NaN | NaN | NaN | |
| 60 | 0.1928115 | 0.2600613 | 0.2916315 | 0.30917910 | 0.2829897 | Inf | Inf | NaN | NaN | NaN | |
| | | | | | | | | | | Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: | 0.3476786 |
| | | | | | | | | | | Desigualdad de Lundberg: | 0.4345982 |

Cuadro 3.7: Probabilidades de ruina obtenidas por la transformada del tiempo de ruina.

Aproximaciones.

En el caso tratado se usaron cuatro cotas diferentes, los resultados se resumen en el cuadro (3.8) la primera de ellas es la aproximación Segerdahl Normal, los valores obtenidos se muestran en la columna *Segerdahl*, tales resultados se vuelven más parecidos a la probabilidad exacta conforme aumenta el horizonte de tiempo. La aproximación de Gerber dependiente del tiempo (véase columna *Gerber*) únicamente acota a $\psi(u, t)$ cuando $t = 1$, para los demás horizontes de tiempo, el valor obtenido acota a $\psi(u) - \psi(u, t)$. La aproximación basada en el movimiento Browniano (obsérvese columna *Browniano*) únicamente genera una buena aproximación cuando $t = 1$, para los demás tiempos tal aproximación es mala (no converge ni en el primer dígito después del punto decimal). La aproximación corregida basada en el movimiento Browniano (revisar columna *Browniano corr.*) genera buenas aproximaciones para todos los horizontes de tiempo y mejoran conforme el horizonte tiempo se incrementa.

| Aproximaciones | | | | | |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------------|---------------------|
| Horizonte de tiempo | Segerdahl | Gerber | Browniano | Browniano corr. | Probabilidad exacta |
| 1 | 0.1538884 | 0.4287944 | 0.1950028 | 0.1928980 | 0.1928552 |
| 2 | 0.2133304 | 0.3476786 | 0.3581796 | 0.2599953 | 0.2600650 |
| 3 | 0.2658895 | 0.3476786 | 0.4521016 | 0.2915630 | 0.2916183 |
| 4 | 0.3045294 | 0.3476786 | 0.5141046 | 0.3093261 | 0.3093789 |
| 5 | 0.3281475 | 0.3476786 | 0.5588081 | 0.3203551 | 0.3204138 |
| 10 | 0.3476482 | 0.3476786 | 0.6771458 | 0.3407720 | 0.3408790 |
| 25 | 0.3476786 | 0.3476786 | 0.7892895 | 0.3472315 | 0.3473874 |
| 50 | 0.3476786 | 0.3476786 | 0.8476127 | 0.3475140 | 0.3476749 |
| 75 | 0.3476786 | 0.3476786 | 0.8737140 | 0.3475175 | 0.3476785 |
| 100 | 0.3476786 | 0.3476786 | 0.8893285 | 0.3475175 | 0.3476786 |
| Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: | | | | | 0.3476786 |
| Designaldad de Lundberg: | | | | | 0.4345982 |

Cuadro 3.8: Aproximaciones a la probabilidad de ruina.

3.3.2. Caso Gama(3, α).

Para el ejemplo siguiente se tomará una distribución $Gama(n, \alpha)$ que puede entenderse como una generalización de la distribución exponencial (cuando $n = 1$ la distribución gama es equivalente a una distribución exponencial). El parámetro n puede tomar cualquier real positivo, cuando el valor n es un entero positivo la distribución gama comúnmente es llamada distribución de Erlang.

Dado que la distribución gama es de cola ligera pues su función generadora de momentos existe y es $M_x(r) = (\frac{\alpha}{\alpha-r})^n$, nos interesa encontrar el coeficiente de ajuste, ya que es usado en el cálculo de cotas y aproximaciones. Para encontrar dicha cantidad debemos localizar las raíces de la siguiente ecuación:

$$K(r) = \lambda[(\frac{\alpha}{\alpha-r})^n - 1] - cr = 0. \quad (3.6)$$

El ejemplo considerado se elige $n = 3$, para tal situación la ecuación anterior se transforma en:

$$\lambda[(\frac{\alpha}{\alpha-r})^3 - 1] - cr = 0, \quad (3.7)$$

localizar las raíces a la ecuación (3.7) equivale a encontrar las soluciones del siguiente polinomio de grado cuatro:

$$(-c)r^4 + (3c\alpha - \lambda)r^3 + (3\alpha\lambda - 3c\alpha^2)r^2 + (c\alpha^3 - 3\lambda\alpha^2)r = 0, \quad (3.8)$$

desde el inicio del problema se sabe que $r = 0$ es la solución trivial al problema, descartando dicha solución se obtiene:

$$r^3 + (\frac{\lambda - 3c\alpha}{c})r^2 + (\frac{3c\alpha^2 - 3\alpha\lambda}{c})r + (\frac{3\lambda\alpha^2 - c\alpha^3}{c}) = 0, \quad (3.9)$$

para el polinomio anterior es posible encontrar sus raíces de forma analítica, en Bravo, Rincón y Rincón (2006) página 615 se localizan resultados que permiten encontrar las raíces de polinomios de tercer grado. Soluciones numéricas a este tipo de problemas pueden ser encontradas usando programas matemáticos como Maple, Matlab y R project. Se tomarán los siguientes valores para el proceso de riesgo:

- $u = 300$ (inversión inicial).
- $c = 85$ (constante de ingresos por primas).
- $\lambda = 2$ (intensidad del proceso Poisson).
- $\alpha = 3/40$ (parámetro distribución gama).

Los horizontes de tiempo observados son $t = 1, 2, \dots, 10$, el coeficiente de ajuste toma el siguiente valor $R \simeq 0.00222828110$, tal valor fue contrastado con la solución obtenida en Maple de la ecuación (3.6) y el que se obtiene localizando las raíces de tercer grado. En ambos casos se obtuvieron valores similares. Para calcular $\psi(u)$ se usó la función *ruin* del paquete Actuar de *R project*.

Simulaciones Monte Carlo.

En las figuras (3.7) y (3.8) se observan algunas trayectorias del proceso de riesgo con reclamaciones gama y un horizonte de tiempo $t = 10$. Los cuadros (3.9) y (3.10) contienen las probabilidades de ruina con horizonte finito por medio del algoritmo I y II respectivamente. Para generar dichas tablas se considera una semilla inicial de 3208, además se acompañan de dos tablas que muestran el tiempo de ejecución de cada algoritmo (observar cuadros (3.11) y (3.12)). Se puede observar que el algoritmo II es más rápido que el algoritmo I conforme se incrementa el horizonte de tiempo. Cuando se alcanza un millón de simulaciones los dos algoritmos arrojan valores similares.

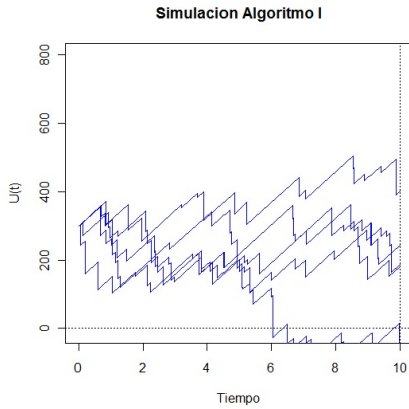


Figura 3.3: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo I).

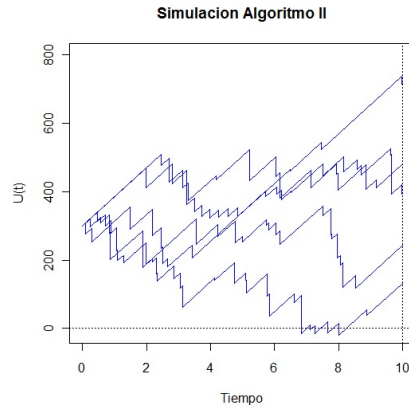


Figura 3.4: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo II).

Aproximaciones.

Las aproximaciones tomadas son la aproximación Segerdahl normal, la basada en el movimiento Browniano y la corregida basada en el movimiento Browniano, los resultados se resumen en el cuadro (3.13). Comparando los resultados obtenidos por las simulaciones, se observa que la aproximación corregida basada en el movimiento Browniano proporciona valores similares a los obtenidos en las simulaciones. Las demás aproximaciones precen ser inadecuadas (al menos en este caso). Para el ejemplo se tomó un capital inicial grande pues según Asmussen(2010) la aproximación Segerdahl normal proporciona mejores resultados cuando u es grande y $|\frac{T-um_L}{w_L\sqrt{u}}|$ es pequeño o moderadamente grande, cuando se toma el horizonte de tiempo $t = 1700$ entonces $|\frac{T-um_L}{w_L\sqrt{u}}| = 0.520968635$ y la probabilidad de ruina por Monte Carlo I y II es de 0.4838 y 0.4894 con tiempos de ejecución de 1159.82 y 514.68 para 10000 simulaciones, por otro lado la aproximación Segerdhal arroja el valor 0.4873612.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|--|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.001200 | 0.006600 | 0.015000 | 0.027100 | 0.040900 | 0.055200 | 0.068200 | 0.085900 | 0.0979000 | 0.110400 |
| 20000 | 0.001000 | 0.006450 | 0.015250 | 0.027800 | 0.040400 | 0.053400 | 0.069350 | 0.082500 | 0.0971000 | 0.108550 |
| 50000 | 0.001100 | 0.005680 | 0.015660 | 0.027340 | 0.040420 | 0.055080 | 0.067340 | 0.083260 | 0.0965400 | 0.109980 |
| 100000 | 0.000980 | 0.005930 | 0.015240 | 0.027220 | 0.041460 | 0.055770 | 0.068570 | 0.083590 | 0.0979200 | 0.110050 |
| 1000000 | 0.000929 | 0.006079 | 0.015409 | 0.027804 | 0.041335 | 0.055441 | 0.069242 | 0.083499 | 0.0970050 | 0.109368 |
| Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.487361 | | | | | | | | | | |
| Desigualdad de Lungberg: 0.512485 | | | | | | | | | | |

Cuadro 3.9: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|--|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.000400 | 0.007500 | 0.016100 | 0.026300 | 0.043000 | 0.059000 | 0.063900 | 0.084500 | 0.096100 | 0.109400 |
| 20000 | 0.000950 | 0.006750 | 0.015350 | 0.026050 | 0.042100 | 0.055200 | 0.065500 | 0.084550 | 0.092500 | 0.109200 |
| 50000 | 0.000940 | 0.006160 | 0.015700 | 0.027260 | 0.042560 | 0.054860 | 0.069000 | 0.082500 | 0.094140 | 0.109120 |
| 100000 | 0.000830 | 0.006190 | 0.015590 | 0.027450 | 0.043030 | 0.055540 | 0.070480 | 0.083440 | 0.096600 | 0.108590 |
| 1000000 | 0.000901 | 0.006145 | 0.015676 | 0.027746 | 0.041726 | 0.055733 | 0.070304 | 0.083817 | 0.096722 | 0.109303 |
| Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.487361 | | | | | | | | | | |
| Desigualdad de Lungberg: 0.512485 | | | | | | | | | | |

Cuadro 3.10: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo II.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.77 | 1.14 | 1.56 | 1.92 | 2.32 | 2.73 | 3.08 | 3.51 | 3.89 | 6.21 |
| 20000 | 1.50 | 2.26 | 3.08 | 3.83 | 4.65 | 5.43 | 6.20 | 6.98 | 7.77 | 10.49 |
| 50000 | 3.72 | 5.70 | 7.68 | 9.64 | 11.61 | 13.48 | 15.50 | 17.39 | 19.39 | 23.23 |
| 100000 | 7.40 | 13.28 | 15.29 | 19.22 | 23.11 | 26.99 | 46.30 | 56.30 | 38.72 | 44.96 |
| 1000000 | 74.19 | 113.34 | 152.99 | 215.03 | 236.03 | 293.73 | 315.17 | 394.73 | 407.59 | 430.22 |

Cuadro 3.11: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 3.54 | 3.54 | 3.00 | 3.37 | 3.62 | 4.24 | 5.59 | 3.08 | 3.42 | 5.37 |
| 20000 | 3.32 | 3.76 | 4.17 | 6.52 | 4.91 | 5.33 | 5.76 | 6.13 | 6.47 | 8.99 |
| 50000 | 8.36 | 9.32 | 10.34 | 11.31 | 12.34 | 13.79 | 16.00 | 15.26 | 18.22 | 20.49 |
| 100000 | 16.69 | 21.29 | 20.62 | 22.64 | 24.59 | 26.56 | 28.55 | 30.57 | 32.48 | 36.38 |
| 1000000 | 178.54 | 222.22 | 306.39 | 331.22 | 285.98 | 280.77 | 297.76 | 322.58 | 368.13 | 357.09 |

Cuadro 3.12: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo II.

| Aproximaciones | | | |
|---|-----------|-----------|-----------------|
| Horizonte de tiempo | Segerdahl | Browniano | Browniano corr. |
| 1 | 0.1412361 | 1.03E-232 | 0.0017258 |
| 2 | 0.1428887 | 1.33E-117 | 0.0074135 |
| 3 | 0.1445501 | 3.41E-79 | 0.0169565 |
| 4 | 0.1462204 | 5.70E-60 | 0.0290284 |
| 5 | 0.1478993 | 1.99E-48 | 0.0424329 |
| 6 | 0.1495868 | 1.01E-40 | 0.0563492 |
| 7 | 0.1512827 | 3.24E-35 | 0.0702671 |
| 8 | 0.1529869 | 4.42E-31 | 0.0838864 |
| 9 | 0.1546993 | 7.31E-28 | 0.0970402 |
| 10 | 0.1564198 | 2.76E-25 | 0.1096436 |
| Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: | | | 0.487361 |
| Desigualdad de Lundberg: | | | 0.512485 |

Cuadro 3.13: Aproximaciones a la probabilidad de ruina.

3.3.3. Caso uniforme(0, 2).

Para una distribución *uniforme*(0, 2) de los reclamos, se eligieron los siguientes parámetros del proceso de riesgo.

- $u = 10$ (reserva inicial).
- $c = 10$ (constante de ingresos por primas).
- $\lambda = 9$ (intensidad del proceso Poisson).

Además se observaron los horizontes de tiempo $t = 1, 2, \dots, 10$. Recordemos que para una distribución *uniforme*(a, b) la función generadora de momentos es $M_x(r) = \frac{e^{br} - e^{ar}}{br - ar}$, por tanto debemos resolver la ecuación:

$$\lambda \left[\frac{e^{br} - e^{ar}}{br - ar} - 1 \right] - cr = 0, \quad (3.10)$$

para obtener el coeficiente de ajuste, en el caso aquí tratado se usó el método Newtown-Rapson, es un procedimiento iterativo usualmente utilizado para obtener raíces de funciones, el valor inicial será el obtenido de la expresión (1.35). Operando de esta forma obtenemos una aproximación al coeficiente de ajuste $R \simeq 0.15403336$.

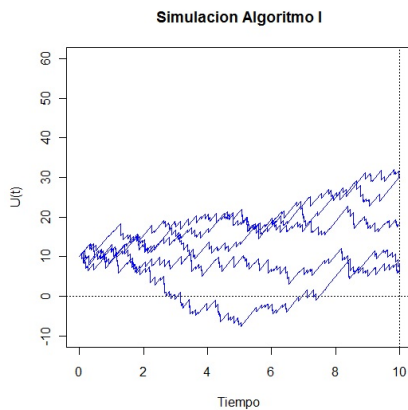


Figura 3.5: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo I).

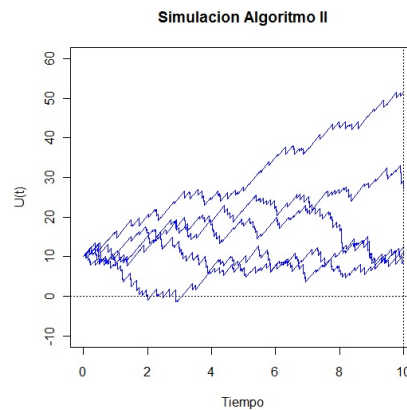


Figura 3.6: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo II).

En las figuras (3.5) y (3.6) podemos observar algunas trayectorias del proceso de riesgo con los parámetros considerados. En los cuadros (3.14) y (3.15) se observan las probabilidades estimadas mediante las simulaciones Monte Carlo por medio de los algoritmos I y II, en ambos caso se usó la semilla inicial de 4512. En la práctica se pudo observar que el aumentar la intensidad del proceso Poisson tiene un impacto

en el aumento del tiempo de ejecución mucho mayor que el experimentado con el aumento de los demás parámetros, los tiempos de ejecución de los algoritmos se resumen en los cuadros (3.16) y (3.17).

Para calcular la probabilidad de ruina con horizonte infinito de tiempo se usó la fórmula Pollaczek-Kinchine, primero se nota que la cola integrada de una distribución uniforme es:

$$\begin{aligned}
 F_I(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy \\
 &= \frac{2}{a+b} \int_0^x 1 - \frac{y}{b-a} dy \\
 &= \frac{2}{a+b} \left[x - \frac{x^2}{2(b-a)} \right] \\
 &= \frac{1}{a+b} \left[2x - \frac{x^2}{(b-a)} \right], \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

ahora interesa encontrar la función inversa de (3.11) para simular variables aleatorias con distribución $F_I(x)$, si hacemos que $y = F_I(x)$ se observa que:

$$x = (b-a)_-^+ \sqrt{y(a^2 - b^2) + (b-a)^2},$$

la solución que se ajusta a lo buscado es $x = (b-a) - \sqrt{y(a^2 - b^2) + (b-a)^2}$, con lo anterior podemos generar las variables aleatorias deseadas. Con las observaciones anteriores fue posible estimar la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito mediante la ejecución del programa *PollaczekKinchineUNIFORME*($u, N1, a, b, k, mu, c$), donde u denota la reserva inicial, $N1$ es el número de simulaciones, a y b son los parámetros de la distribución uniforme (a, b) , los valores λ , μ y c representan la intensidad del proceso Poisson, el valor esperado de las reclamaciones y la constante de ingresos por primas. Para el ejemplo tratado se obtuvo que $\psi(u) \approx 0.1984243$ con 1,000,000 de simulaciones y tiempo de ejecución de 290.49 segundos.

Aproximaciones.

El ejercicio tratado resume la información de las aproximaciones en el cuadro (3.18). Para la aproximación Segerdahl los resultados no son adecuados si se comparan con los resultados obtenidos en las simulaciones. La aproximación basada en el movimiento Browniano mejora los resultados pero solo coincide con las simulaciones en un dígito después del punto decimal. Para la aproximación corregida basada en el movimiento Browniano los resultados mejoran la calidad y las cifras coinciden en los dos o tres primeros dígitos después del punto decimal (exceptuando el horizonte $t = 1$).

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|--|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.007400 | 0.028400 | 0.047800 | 0.070500 | 0.084800 | 0.097800 | 0.115300 | 0.121200 | 0.1338000 | 0.135700 |
| 20000 | 0.006700 | 0.027650 | 0.047950 | 0.072050 | 0.082450 | 0.102050 | 0.112750 | 0.122650 | 0.1342000 | 0.135850 |
| 50000 | 0.005700 | 0.026240 | 0.048860 | 0.069220 | 0.084400 | 0.100640 | 0.110940 | 0.121080 | 0.1316200 | 0.136120 |
| 100000 | 0.005760 | 0.026220 | 0.049120 | 0.068780 | 0.084640 | 0.099840 | 0.110000 | 0.120990 | 0.1299700 | 0.137660 |
| 1000000 | 0.005845 | 0.026092 | 0.048597 | 0.069257 | 0.085568 | 0.099660 | 0.111267 | 0.121379 | 0.1297480 | 0.137108 |
| Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.198424 | | | | | | | | | | |
| Desigualdad de Lungberg: 0.214310 | | | | | | | | | | |

Cuadro 3.14: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|--|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.005200 | 0.027100 | 0.046000 | 0.070300 | 0.085500 | 0.099400 | 0.109100 | 0.122600 | 0.136400 | 0.134100 |
| 20000 | 0.004950 | 0.025200 | 0.045700 | 0.068100 | 0.085550 | 0.100350 | 0.112350 | 0.121600 | 0.131400 | 0.136600 |
| 50000 | 0.005720 | 0.024820 | 0.047400 | 0.067460 | 0.084620 | 0.098180 | 0.110620 | 0.119920 | 0.130980 | 0.137980 |
| 100000 | 0.005730 | 0.025450 | 0.047180 | 0.068670 | 0.084920 | 0.097710 | 0.111830 | 0.121050 | 0.128930 | 0.137940 |
| 1000000 | 0.005781 | 0.026187 | 0.048252 | 0.068374 | 0.085458 | 0.099504 | 0.111019 | 0.121544 | 0.130461 | 0.136554 |
| Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.198424 | | | | | | | | | | |
| Desigualdad de Lungberg: 0.214310 | | | | | | | | | | |

Cuadro 3.15: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo II.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 2.09 | 3.85 | 5.52 | 8.33 | 14.28 | 10.86 | 12.58 | 14.32 | 16.07 | 21.72 |
| 20000 | 4.16 | 7.69 | 11.17 | 14.64 | 25.90 | 35.32 | 41.02 | 28.72 | 44.76 | 39.68 |
| 50000 | 14.20 | 22.80 | 37.94 | 46.67 | 55.94 | 66.72 | 88.46 | 83.07 | 94.49 | 94.52 |
| 100000 | 20.82 | 40.52 | 55.76 | 99.02 | 138.14 | 108.27 | 125.64 | 146.67 | 161.92 | 190.66 |
| 1000000 | 216.70 | 396.54 | 584.95 | 798.12 | 1047.14 | 1258.33 | 1330.30 | 1500.98 | 1670.87 | 1949.02 |

Cuadro 3.16: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 4.89 | 7.17 | 8.36 | 11.09 | 13.05 | 13.51 | 14.60 | 18.16 | 15.79 | 18.41 |
| 20000 | 7.66 | 6.91 | 8.26 | 13.60 | 24.73 | 14.57 | 26.35 | 36.31 | 28.84 | 36.58 |
| 50000 | 11.59 | 15.96 | 20.39 | 24.75 | 37.75 | 43.71 | 46.58 | 52.47 | 60.64 | 52.73 |
| 100000 | 23.30 | 31.93 | 40.93 | 56.17 | 61.94 | 79.15 | 79.04 | 84.02 | 174.05 | 123.62 |
| 1000000 | 235.89 | 325.70 | 424.34 | 509.28 | 587.33 | 678.68 | 776.11 | 866.98 | 963.60 | 1044.14 |

Cuadro 3.17: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo II.

| Aproximaciones | | | |
|---|-----------|------------|-----------------|
| Horizonte de tiempo | Segerdahl | Browniano | Browniano corr. |
| 1 | 0.0131387 | 0.00066030 | 0.0062736 |
| 2 | 0.0147893 | 0.01043735 | 0.0264180 |
| 3 | 0.0165428 | 0.02737919 | 0.0486915 |
| 4 | 0.0183900 | 0.04506827 | 0.0685466 |
| 5 | 0.0203198 | 0.06122588 | 0.0853573 |
| 6 | 0.0223192 | 0.07537967 | 0.0994431 |
| 7 | 0.0243734 | 0.08762332 | 0.1112716 |
| 8 | 0.0264666 | 0.09819676 | 0.1212671 |
| 9 | 0.0285818 | 0.10735200 | 0.1297757 |
| 10 | 0.0307014 | 0.11531380 | 0.1370719 |
| Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: | | | 0.1984243 |
| Desigualdad de Lundberg: | | | 0.2143096 |

Cuadro 3.18: Aproximaciones a la probabilidad de ruina.

3.3.4. Caso lognormal(μ, σ).

Para el presente ejercicio se considera la distribución lognormal, dicha función es muy popular en finanzas, se considera que el precio de algunos subyacentes tiene una distribución lognormal, como las acciones. En el área de los seguros tal distribución puede ayudar a predecir el comportamiento de algunos fenómenos naturales como los sismos. Se pueden revisar mayores detalles en el artículo Lomnitz (1990) que puede ser localizado en la página del Servicio Sismológico Nacional. Algunas otras aplicaciones de la distribución lognormal incluyen la predicción del clima que desde luego puede generar pérdidas agropecuarias y daños materiales. Como ejemplo se puede revisar el artículo: “Comportamiento de las precipitaciones en el sector del Lago Titicaca (Bolivia) durante *El Fenómeno El Niño*” (1998).

Durante este ejercicio se consideran los siguientes parámetros:

- $u = 10$ (reserva inicial).
- $c = 15$ (constante de ingresos por primas).
- $\lambda = 3$ (intensidad del proceso Poisson).

Adicionalmente se observan los horizontes de tiempo $t = 1, 2, \dots, 10$. Los parámetros de la distribución de los reclamos son $\mu = 1$ y $\sigma = 1$. Como la distribución lognormal es de cola pesada no existe el coeficiente de ajuste, por tanto no se calculan cotas y aproximaciones. Algunos elementos que pueden ayudar son conocer la esperanza ($e^{\mu+\sigma^2/2}$) y la varianza ($e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}$).

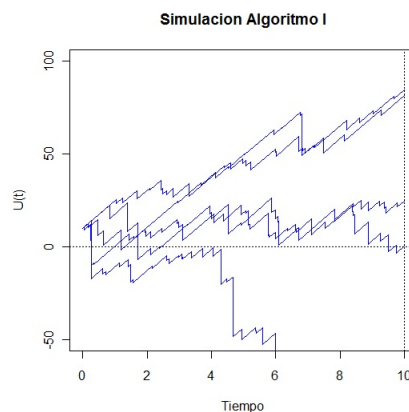


Figura 3.7: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo I).

En los cuadros (3.19) y (3.20) se observa la probabilidad de ruina para los algoritmos I y II y se acompañan de las tablas (3.21) y (3.22) donde se muestra el tiempo de ejecución de cada algoritmo. La semilla inicial considerada es 3141.

Para calcular la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito se utilizó la fórmula de Pollaczek-Kinchine, sin embargo existen otros métodos de cálculo como el que se detalla en Thorin O. y Wikstand N. (1997). Para calcular $\psi(u)$ interesa conocer la cola integrada de la distribución lognormal, veamos que:

$$\begin{aligned}
 F_I(x) &= \frac{1}{\mathbb{E}[x]} \int_0^\infty \bar{F}(z) dz \\
 &= \frac{1}{\mathbb{E}[x]} \int_0^\infty 1 - F(z) dz \\
 &= \frac{1}{\mathbb{E}[x]} \left[x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \int_{-\infty}^{w(x)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy dz \right] \\
 &= \frac{1}{\mathbb{E}[x]} \left[x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{w(x)} \int_{w^{-1}(y)}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy dz \right] \\
 &= \frac{1}{\mathbb{E}[x]} [x - x\phi(w(x)) + \mathbb{E}[x]\phi(w(x) - \sigma)], \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

donde $w(x) = \frac{1}{\sigma}(\ln(x) - \mu)$ y la función $\phi(x)$ denota la función de distribución de una normal estándar. Para generar variables aleatorias con función de distribución (3.12) se debe encontrar la inversa, por la dificultad de hallar $F_I^{-1}(x)$ se realiza una aproximación. Con los elementos anteriores se diseñó el programa *PollaczekKinchineLOGNORM*($u, N1, W, Z, k, mu, c, Num$) que calcula $\psi(u)$ y donde u denota el monto inicial, $N1$ indica el número de simulaciones, las variables W y Z contienen una aproximación numérica de (3.12), k denota la intensidad del proceso Poisson y mu expresa la esperanza de las reclamaciones. Con el programa anterior se obtuvo que $\psi(u) \approx 0.717$ con 1,000 simulaciones y un tiempo de ejecución de 482.32 segundos.

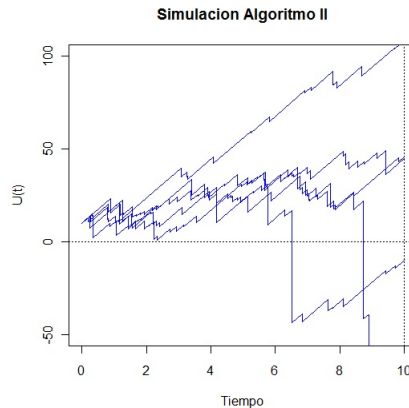


Figura 3.8: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo II).

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.234800 | 0.324900 | 0.394900 | 0.437600 | 0.469600 | 0.502800 | 0.518800 | 0.535300 | 0.5437000 | 0.563300 |
| 20000 | 0.232250 | 0.326650 | 0.394800 | 0.434950 | 0.471950 | 0.498450 | 0.520700 | 0.535750 | 0.5490000 | 0.557600 |
| 50000 | 0.232800 | 0.327960 | 0.394320 | 0.438900 | 0.471080 | 0.495620 | 0.516920 | 0.531940 | 0.5503800 | 0.561540 |
| 100000 | 0.232220 | 0.330130 | 0.394070 | 0.438510 | 0.471760 | 0.495050 | 0.517390 | 0.533700 | 0.55162 | 0.561690 |
| 1000000 | 0.232847 | 0.329860 | 0.393792 | 0.439294 | 0.472013 | 0.497434 | 0.518398 | 0.534622 | 0.54991 | 0.561664 |

Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.717000

Cuadro 3.19: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.224200 | 0.324900 | 0.391900 | 0.443100 | 0.473700 | 0.487700 | 0.518500 | 0.538300 | 0.546700 | 0.553000 |
| 20000 | 0.220850 | 0.326500 | 0.390550 | 0.440650 | 0.476100 | 0.494950 | 0.518750 | 0.538500 | 0.552200 | 0.555950 |
| 50000 | 0.216440 | 0.325940 | 0.391140 | 0.440920 | 0.473460 | 0.495760 | 0.516960 | 0.537840 | 0.550460 | 0.560480 |
| 100000 | 0.217830 | 0.327220 | 0.393270 | 0.440620 | 0.474870 | 0.494140 | 0.518610 | 0.538320 | 0.550480 | 0.561020 |
| 1000000 | 0.218706 | 0.327827 | 0.393895 | 0.439067 | 0.472604 | 0.497590 | 0.517631 | 0.536485 | 0.550274 | 0.561282 |

Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.717000

Cuadro 3.20: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo II.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 1.16 | 1.87 | 2.78 | 3.37 | 4.29 | 5.00 | 5.75 | 7.30 | 7.63 | 10.08 |
| 20000 | 1.86 | 2.98 | 4.14 | 5.31 | 6.46 | 7.60 | 8.74 | 9.60 | 10.62 | 13.44 |
| 50000 | 5.00 | 8.07 | 11.02 | 14.00 | 17.14 | 20.12 | 27.61 | 42.52 | 32.79 | 50.23 |
| 100000 | 9.24 | 22.20 | 27.32 | 40.15 | 38.14 | 41.45 | 78.70 | 60.02 | 63.04 | 80.56 |
| 1000000 | 104.41 | 213.91 | 277.11 | 320.34 | 371.52 | 393.08 | 517.95 | 528.86 | 607.92 | 624.58 |

Cuadro 3.21: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 2.03 | 2.46 | 2.79 | 3.34 | 3.53 | 4.04 | 4.26 | 5.07 | 5.85 | 7.69 |
| 20000 | 4.65 | 5.45 | 6.18 | 6.83 | 7.53 | 8.31 | 9.78 | 12.00 | 13.53 | 16.14 |
| 50000 | 9.61 | 10.81 | 12.79 | 14.33 | 20.08 | 21.15 | 18.22 | 20.12 | 21.71 | 23.99 |
| 100000 | 19.49 | 21.92 | 25.56 | 28.45 | 31.76 | 34.82 | 41.92 | 48.16 | 38.18 | 43.10 |
| 1000000 | 199.56 | 214.21 | 257.59 | 304.47 | 399.37 | 347.44 | 517.05 | 483.64 | 385.28 | 475.40 |

Cuadro 3.22: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo II.

3.3.5. Caso Pareto(α, θ).

Cuando las reclamaciones tienen una distribución Pareto con parámetros $\alpha = 2$ y $\theta = 3$ se eligieron los siguientes valores para el proceso de riesgo:

- $u = 10$ (capital inicial).
- $c = 15$ (constante de ingresos por primas).
- $\lambda = 4$ (intensidad del proceso de riesgo).

Se tomaron los horizontes de tiempo $t = 1, 2, \dots, 10$, la semilla inicial fue de 7245. Como la distribución de los reclamos es de cola pesada no se puede calcular el coeficiente de ajuste, por lo que únicamente se realizaron simulaciones Monte Carlo por medio de los algoritmos I y II (véanse cuadros (3.23) y (3.24)). Conforme el número de simulaciones se incrementa el algoritmo II es más rápido, como se observa en la tablas (3.25) y (3.26)

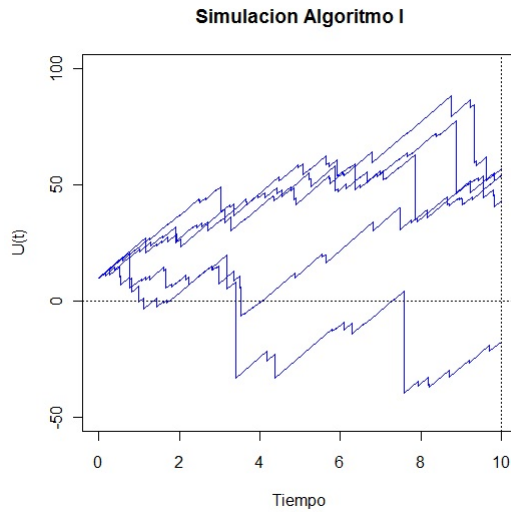


Figura 3.9: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo II).

En las figuras (3.9) y (3.10) se visualizan algunas trayectorias del proceso de riesgo con reclamaciones Pareto. Se puede notar que los proceso experimentan saltos más grandes que los que se observaron en las distruciones de cola ligera y aunque bajo los parámetros anteriores la esperanza de las reclamaciones es de una unidad monetaria ocurrieron reclamaciones demasiado grandes algunas incluso 30 veces más grandes que la esperanza.

Para calcular la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito se utilizará un resultado desarrollado por Ramsay, Colin M. (2003) que expresa tal

probabilidad como una integral, una generalización del resultado puede revisarse en Albrecher H. y Kortschak D. (2009). Una de las principales características en ambos trabajos es la caracterización de las reclamaciones Pareto, que considera $\mu = 1$ lo que implica que $\alpha = \theta + 1$ (bajo la notación de Klugman(2004)) de donde podemos reescribir la función de distribución como:

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-(\theta+1)} \quad \text{para } x > 0,$$

de forma adicional se pide que $\theta = 1, 2, \dots$. Bajo las consideraciones anteriores se obtiene lo siguiente.

Teorema 3.3 *Cuando las reclamaciones tienen distribución Pareto la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito puede calcularse como:*

$$\psi(u) = \int_0^\infty \frac{\rho x^{\theta-1} e^{-(1+\frac{u}{\theta})x}}{(\theta-1)! \left[(\rho + x e^{-x} Ei_\theta(x))^2 + (\pi e^{-x} \frac{x^\theta}{(\theta-1)!})^2 \right]} dx, \quad (3.13)$$

donde:

$$Ei_\theta(x) = \frac{x^{\theta-1}}{(\theta-1)!} \left[\gamma + \ln(x) - \sum_{r=1}^{\theta-1} \frac{1}{r} \right] + \sum_{r=0, r \neq \theta-1}^{\infty} \frac{x^r}{(r-\theta+1)r!},$$

la variable $\gamma = 0.5772156649$ es la constante de Euler y $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$.

Demostración: Véase Ramsay, Colin M. (2003).

Para evaluar la integral (3.13) se usará la interpretación de integrales como la esperanza de alguna función para una variable aleatoria adecuada, en nuestro contexto se define la siguiente función:

$$H(\rho, \theta, x) = \frac{\rho x^{\theta-1}}{(\theta-1)! \left[(\rho + x e^{-x} Ei_\theta(x))^2 + (\pi e^{-x} \frac{x^\theta}{(\theta-1)!})^2 \right]},$$

entonces la probabilidad de ruina puede entenderse como la esperanza de la función $H(\rho, \theta, x)$ donde x tiene distribución $exp(1 + \frac{u}{\theta})$, por lo que:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_0^\infty H(\rho, \theta, x) e^{-(1+\frac{u}{\theta})x} dx \\ &= \frac{1}{(1+\frac{u}{\theta})} \int_0^\infty H(\rho, \theta, x) \left(1 + \frac{u}{\theta}\right) e^{-(1+\frac{u}{\theta})x} dx \\ &= \frac{1}{(1+\frac{u}{\theta})} \mathbb{E}[H(\rho, \theta, x)] \\ &\approx \frac{1}{(1+\frac{u}{\theta})} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\rho, \theta, x_i), \end{aligned}$$

donde $x_i \sim \exp(1 + \frac{u}{\theta})$. Con base en los comentarios anteriores se desarrollo la función $IntMC(u, o, m, N, N1)$ donde u denota la reserva inicial, o expresa el margen de seguridad, m indica el parámetro de la distribución Pareto, $N1$ señala el número de simulaciones a realizar y N alude al número de sumandos contemplados en la función $Ei_{\theta}(x)$.

En el ejemplo seleccionado podemos observar que $\frac{\theta}{\alpha-1} = 3$, como θ es un parámetro de escala al multiplicar por un tercio las reclamaciones obtenemos que $\mu = 1$ y el nuevo valor de θ es 1. Tal comentario induce a realizar un ajuste monetario en el proceso de riesgo de donde se obtene que:

$$\psi_{\lambda, c, \theta, \alpha}(u, t) = \psi_{\lambda, \frac{c}{3}, \frac{\theta}{3}, \alpha = \frac{\theta}{3} + 1}(u/3, t),$$

con todos los detalles enunciados anteriormente se obtuvo que $\psi(u) \approx 0.5575574$ considerando 1,000,000 de simulaciones y 150 sumandos para la función $Ei_{\theta}(x)$.

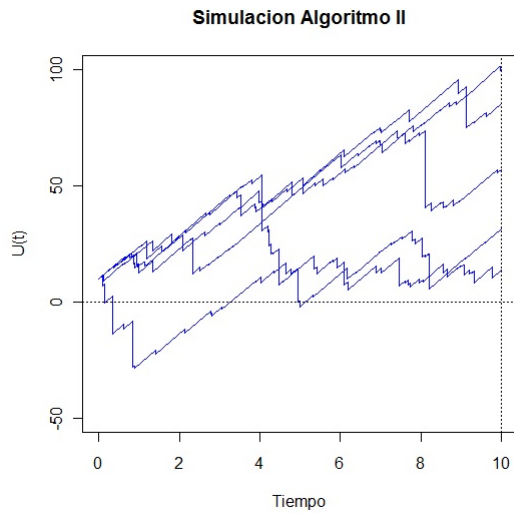


Figura 3.10: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo II).

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.163400 | 0.240300 | 0.283400 | 0.324400 | 0.342700 | 0.360500 | 0.380000 | 0.387300 | 0.4068000 | 0.413700 |
| 20000 | 0.157900 | 0.241550 | 0.283700 | 0.320900 | 0.345100 | 0.360350 | 0.377200 | 0.390200 | 0.40425 | 0.411100 |
| 50000 | 0.159660 | 0.237980 | 0.284060 | 0.316380 | 0.343860 | 0.360980 | 0.380420 | 0.391740 | 0.40140 | 0.413820 |
| 100000 | 0.159120 | 0.236490 | 0.283420 | 0.316950 | 0.342400 | 0.361850 | 0.380280 | 0.391190 | 0.40278 | 0.415020 |
| 1000000 | 0.159162 | 0.235561 | 0.284141 | 0.317971 | 0.343019 | 0.363949 | 0.379677 | 0.392831 | 0.40357 | 0.413615 |

Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.557557

Cuadro 3.23: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.154200 | 0.234800 | 0.284400 | 0.314000 | 0.345200 | 0.364500 | 0.385500 | 0.395200 | 0.414900 | 0.424100 |
| 20000 | 0.155900 | 0.233450 | 0.286700 | 0.321150 | 0.345700 | 0.366200 | 0.383500 | 0.397150 | 0.407750 | 0.417500 |
| 50000 | 0.155380 | 0.234120 | 0.285280 | 0.317760 | 0.340480 | 0.362660 | 0.380820 | 0.393660 | 0.405180 | 0.416540 |
| 100000 | 0.155500 | 0.234070 | 0.282170 | 0.317120 | 0.341210 | 0.362170 | 0.381870 | 0.393680 | 0.402690 | 0.415070 |
| 1000000 | 0.155660 | 0.235331 | 0.283715 | 0.318596 | 0.343793 | 0.363959 | 0.380154 | 0.393615 | 0.404251 | 0.414420 |

Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.557557

Cuadro 3.24: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo II.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 1.44 | 2.26 | 3.12 | 3.90 | 4.66 | 5.47 | 6.31 | 8.81 | 10.27 | 14.18 |
| 20000 | 3.12 | 7.11 | 11.90 | 13.83 | 17.48 | 18.68 | 18.39 | 22.48 | 15.16 | 24.57 |
| 50000 | 6.92 | 13.70 | 24.35 | 23.20 | 36.82 | 30.14 | 40.20 | 41.13 | 38.04 | 46.02 |
| 100000 | 13.65 | 21.60 | 31.76 | 36.86 | 44.57 | 55.57 | 60.28 | 68.04 | 75.58 | 89.21 |
| 1000000 | 192.97 | 321.05 | 460.34 | 523.18 | 691.30 | 700.05 | 696.68 | 895.87 | 889.35 | 1070.31 |

Cuadro 3.25: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 3.46 | 3.56 | 4.35 | 5.13 | 7.82 | 7.75 | 5.21 | 7.32 | 10.15 | 11.30 |
| 20000 | 4.25 | 5.13 | 5.91 | 6.67 | 7.41 | 8.06 | 8.95 | 9.91 | 12.09 | 15.29 |
| 50000 | 15.22 | 13.37 | 19.81 | 21.48 | 27.15 | 28.99 | 25.31 | 24.21 | 29.64 | 29.86 |
| 100000 | 30.69 | 37.66 | 32.08 | 32.73 | 36.51 | 59.64 | 64.85 | 48.16 | 51.84 | 57.45 |
| 1000000 | 216.34 | 258.62 | 297.90 | 330.36 | 381.09 | 420.63 | 470.66 | 676.69 | 613.87 | 870.63 |

Cuadro 3.26: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo II.

3.3.6. Caso Burr(α, γ, θ).

El caso Burr es una generalización de la distribución Pareto, cuando $\gamma = 1$ la distribución Burr equivale a una distribución Pareto. En el ejercicio llevado a cabo se tuvo que instalar la paquetería *Actuar* de R project para poder generar números aleatorios que obedecieran a esta distribución. Como ejemplo concreto se seleccionó uno con parámetros $\alpha = 1$, $\gamma = 4$ y $\theta = 1/2$ para la distribución de las reclamaciones. Los demás valores necesarios del proceso de riesgo se muestran a continuación:

- $u = 5$ (capital inicial).
- $c = 3.5$ (constante de ingresos por primas).
- $\lambda = 6$ (intensidad del proceso de riesgo).

Se observaron los horizontes de tiempo $t = 1, 2, \dots, 10$ y la semilla inicial considerada fue de 8615. La esperanza de las reclamaciones es de 0.5553605 aproximadamente. Las probabilidades de ruina recolectadas se agrupan en los cuadros (3.27) y (3.28). El algoritmo I consume mucho más tiempo de ejecución que el algoritmo II, cuando se realizó un millón de simulaciones el algoritmo I llegó a utilizar más del doble de tiempo que el algoritmo II. Lo que se menciona puede ser visto en las tablas (3.29) y (3.30). En la figuras (3.11) y (3.12) se observan algunas simulaciones del proceso de riesgo con la características señaladas.

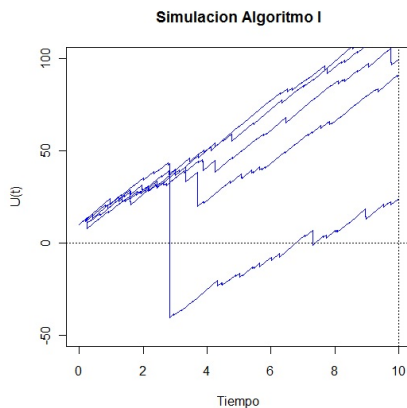


Figura 3.11: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo I).

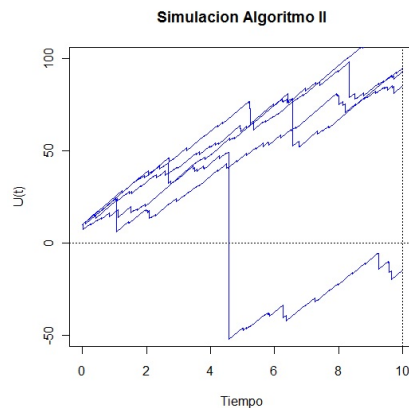


Figura 3.12: Trayectorias del proceso de riesgo (Algoritmo II).

Para el caso en el que la distribución de los reclamos es Burr no se encontraron referencias sobre trabajos que calculen la probabilidad de ruina, pero dicha distribución pertenece a la clase subexponencial, en el trabajo Asmussen S. y Binswanger K. (1997) se presentan algunas ideas para calcular la probabilidad de ruina

cuando las reclamaciones son subexponenciales. El cálculo de $\psi(u)$ usará el resultado Pollaczek-Kinchine, primero interesa hallar la cola integrada de la distribución Burr, encontrar la estructura general de $F_I(x)$ no es tarea sencilla, por lo que únicamente se realizaran los cálculos con los parámetros especificados al inicio. La cola integrada tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} F_I(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^x 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{\theta}\right)^\gamma} \right)^\alpha \right) dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{\theta}\right)^\gamma} \right)^\alpha dy, \end{aligned}$$

considerando los parámetros del ejemplo se tiene:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \frac{1}{1 + (2y)^4} dy \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^{2x} \frac{1}{u^4 + 1} du \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^{2x} \frac{1}{(u^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}u)^2} du \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^{2x} \frac{1}{(u^2 + \sqrt{2}u + 1)(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} du, \end{aligned}$$

aplicando fracciones parciales se obtienen 4 integrales, resolviendo cada una de ellas podemos concluir que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{8} \sqrt{2} \ln \left(\frac{4x^2 + 2\sqrt{2}x + 1}{4x^2 - 2\sqrt{2}x + 1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \sqrt{2} \left(\tan^{-1}(2\sqrt{2}x + 1) + \tan^{-1}(2\sqrt{2}x - 1) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

con el resultado anterior se aproximó la función inversa de $F_I(x)$ para así obtener las variables aleatorias deseadas. Para calcular la probabilidad de ruina se usó la función *PollaczekKinchineBURR*($u, N1, W, Z, k, mu, c, Num$), donde u denota la reserva inicial, $N1$ expresa el número de simulaciones, W y Z contienen las aproximaciones de la inversa de $F_I(x)$, mu indica el valor de la esperanza (reclamaciones), k alude a la intensidad del proceso Poisson y c es la constante de ingresos por primas. Usando dicho programa se obtuvo que $\psi(u) \approx 0.465$ con 1,000 simulaciones y un tiempo de ejecución de 2683.62 segundos.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.006200 | 0.026900 | 0.056300 | 0.081700 | 0.108000 | 0.133000 | 0.149900 | 0.168600 | 0.18710 | 0.204600 |
| 20000 | 0.006000 | 0.026450 | 0.056650 | 0.080600 | 0.108500 | 0.132500 | 0.149850 | 0.169650 | 0.18835 | 0.204100 |
| 50000 | 0.006060 | 0.026740 | 0.054480 | 0.082140 | 0.107160 | 0.131020 | 0.149980 | 0.171160 | 0.18560 | 0.203180 |
| 100000 | 0.005730 | 0.026380 | 0.053710 | 0.081620 | 0.107480 | 0.131310 | 0.150580 | 0.170690 | 0.18850 | 0.203430 |
| 1000000 | 0.005800 | 0.026197 | 0.053154 | 0.080535 | 0.106513 | 0.130066 | 0.150363 | 0.169765 | 0.18693 | 0.202745 |

Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.465000

Cuadro 3.27: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 0.005800 | 0.025700 | 0.055700 | 0.078100 | 0.098700 | 0.130500 | 0.152500 | 0.168500 | 0.186100 | 0.199900 |
| 20000 | 0.006200 | 0.026000 | 0.054750 | 0.078800 | 0.104250 | 0.132700 | 0.153300 | 0.169450 | 0.190800 | 0.201900 |
| 50000 | 0.005760 | 0.026940 | 0.053060 | 0.079940 | 0.105180 | 0.130740 | 0.150920 | 0.169360 | 0.188080 | 0.200520 |
| 100000 | 0.006050 | 0.026820 | 0.052600 | 0.080830 | 0.104690 | 0.129550 | 0.151480 | 0.169110 | 0.186860 | 0.200860 |
| 1000000 | 0.005868 | 0.026256 | 0.053116 | 0.080463 | 0.106115 | 0.129656 | 0.151064 | 0.170066 | 0.186792 | 0.202680 |

Probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito: 0.465000

Cuadro 3.28: Estimación de probabilidades de ruina algoritmo II.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 3.04 | 6.44 | 8.78 | 11.86 | 15.96 | 19.30 | 17.25 | 16.45 | 16.99 | 18.45 |
| 20000 | 3.87 | 7.69 | 17.54 | 25.87 | 25.46 | 24.00 | 21.72 | 38.33 | 31.51 | 90.59 |
| 50000 | 17.49 | 32.95 | 46.93 | 35.95 | 47.66 | 64.70 | 49.92 | 58.99 | 75.63 | 119.28 |
| 100000 | 18.01 | 36.41 | 47.77 | 56.38 | 114.46 | 91.92 | 104.91 | 118.23 | 136.94 | 199.25 |
| 1000000 | 362.03 | 569.26 | 755.16 | 608.38 | 843.90 | 1262.12 | 1358.49 | 1854.68 | 2064.45 | 2135.26 |

Cuadro 3.29: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo I.

| Iteraciones | Horizonte de tiempo (t) | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10000 | 2.26 | 2.91 | 3.58 | 4.21 | 4.80 | 5.46 | 6.10 | 6.71 | 9.23 | 15.88 |
| 20000 | 6.50 | 5.78 | 7.07 | 8.33 | 9.59 | 10.84 | 12.06 | 13.26 | 14.51 | 17.97 |
| 50000 | 11.18 | 14.46 | 17.60 | 20.83 | 23.90 | 32.55 | 30.14 | 33.32 | 36.62 | 44.19 |
| 100000 | 25.29 | 33.79 | 62.84 | 90.21 | 71.07 | 88.92 | 110.34 | 104.27 | 149.62 | 169.00 |
| 1000000 | 477.03 | 495.79 | 412.97 | 464.71 | 497.05 | 580.26 | 721.91 | 683.30 | 773.04 | 1162.3 |

Cuadro 3.30: Tiempo de ejecución en segundos del algoritmo II.

Comentarios Finales.

El proceso de riesgo es un tema muy amplio y diverso que puede estudiarse desde áreas diferentes a la probabilidad y a los procesos estocásticos. La estimación de la probabilidad de ruina puede encontrar solución desde áreas como: ecuaciones diferenciales, teoría de colas y o simplemente realizando simulaciones. Encontrar soluciones analíticas para la probabilidad de ruina con un horizonte de tiempo finito es raro, sobre todo si se trabaja con variaciones al proceso de riesgo. Algunas de las conclusiones obtenidas son:

- La ejecución de la integral via Monte Carlo, utilizada para calcular la probabilidad de ruina cuando las reclamaciones son exponenciales, tiene una excelente velocidad y converge rápidamente (con pocas iteraciones).
- La expresión de la probabilidad de ruina, derivada de la transformada de Laplace del tiempo de ruina, en el caso de reclamaciones exponenciales arroja excelentes resultados. Desafortunadamente se experimentan inestabilidades numéricas conforme se incrementa el número de sumandos y el horizonte de tiempo crece.
- El algoritmo II es más rápido que el algoritmo I, conforme aumenta el número de simulaciones y el horizonte de tiempo es más grande. El algoritmo I es más veloz que el algoritmo II, para horizontes de tiempo pequeños.
- En general la aproximación corregida basada en el movimiento Browniano genera buenos resultados sin incurrir en un gasto excesivo de tiempo.
- En general las aproximaciones Segerdahl y la aproximación corregida basada en el movimiento Browniano generan malos resultados, salvo en condiciones muy precisas.
- Los resultados gráficos programados en R ayudaron a visualizar las características teóricas del proceso de riesgo y se observaron los diferentes comportamientos según cambiaban los parámetros, siendo clara la diferencia del proceso cuando las reclamaciones eran de cola ligera o pesada.
- El cálculo de la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito puede encontrar solución con la fórmula de Pollaczek-Kinchine, pero plantea un nuevo problema, el generar números aleatorios con funciones de distribución no

comunes, métodos como el de la función inversa y el de aceptación y rechazo pueden ser difíciles de implementar.

Se dejan para estudios posteriores los siguientes aspectos:

- Realizar un análisis de varianza a los métodos de simulación Monte Carlo.
- Encontrar criterios de aproximación para la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo finito cuando las reclamaciones son de cola pesada.
- Analizar criterios que permitan conocer el número de aproximaciones Monte Carlo necesarias para obtener buenas aproximaciones a la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo finito.
- Realizar estudios más profundos que permitan revertir la doble transformada de Laplace de la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo finito para distribuciones diferentes a las que se ha encontrado solución.
- Trabajar con generalizaciones del proceso de riesgo como: ambientes donde exista una tasa de interés que afecte al proceso de riesgo o donde el problema de la ruina pueda ser resuelto con algún préstamo bancario.

Apéndice A

Distribuciones de probabilidad.

| Distribución | f. de densidad | f. de distribución. | f. g. m. | $\mathbb{E}(x)$ | $\mathbb{V}ar(x)$ |
|--------------------------------|---|--|--|--|---|
| $bin(p)$ | $p(1-p)$ | - | $1-p+pe^t$ | p | $p(1-p)$ |
| $binomial(n, p)$ | $\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ con $x = 0, 1, \dots, n$ | - | $[1-p+pe^t]^n$ | np | $np(1-p)$ |
| $Poisson(\lambda)$ | $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, \dots$ y $\lambda > 0$ | - | $e^{\lambda(e^t-1)}$ | λ | λ |
| $exp(\lambda)$ | $\lambda e^{-\lambda x}$ donde $\lambda, x > 0$ | $1 - e^{-\lambda x}$ | $\frac{\lambda}{\lambda - t}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |
| $gama(\alpha, \lambda)$ | $\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$ con $\alpha, \gamma, x > 0$ | $1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$ cuando α es entero | $(\frac{\lambda}{\lambda - t})^\alpha$ | $\frac{\alpha}{\lambda}$ | $\frac{\alpha}{\lambda^2}$ |
| $unif(a, b)$ | $\frac{1}{b-a}$ para $b > a$ | $\frac{x-a}{b-a}$ $x \in (a, b)$ | $\frac{e^{bt} - e^{at}}{bt - at}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| $lognormal(\mu, \sigma^2)$ | $\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0, x > 0$ | - | - | $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ | $e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$ |
| $Pareto(\alpha, \theta)$ | $\frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}$ | $1 - (\frac{\theta}{x+\theta})^\alpha$ | - | $\mathbb{E}[x^k] = \frac{\theta^k \Gamma(k+1) \Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}$ $-1 < k < \alpha$ | |
| $Burr(\alpha, \theta, \gamma)$ | $\frac{\alpha\gamma(\frac{x}{\theta})^\gamma}{x[1+(\frac{x}{\theta})^\gamma]^{\alpha+1}}$ | $1 - (\frac{1}{1+(\frac{x}{\theta})^\gamma})^\alpha$ | - | $\mathbb{E}[x^k] = \frac{\theta^k \Gamma(1+k/\gamma) \Gamma(\alpha-k/\gamma)}{\Gamma(\alpha)}$ $-\gamma < k < \alpha\gamma$ | |
| $Weibull(r, \lambda)$ | $e^{-(\lambda x)^r} r \lambda x^{r-1}$ $r > 0, \lambda > 0, x > 0$ | $1 - e^{-(\lambda x)^r}$ | - | $\frac{\Gamma(1+\frac{1}{r})}{\lambda}$ | $\frac{[\Gamma(1+\frac{2}{r}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{r})]}{\lambda^2}$ |

Apéndice B

Algunas propiedades y resultados.

Transformada de Laplace y sus propiedades.

La transformada de Laplace es usada para simplificar la resolución de ecuaciones diferenciales, tal transformada pertenece a un grupo más grande de transformaciones llamadas transformadas integrales y tienen la siguiente estructura:

$$F(s) = \int_a^b K(s, t)f(t)dt,$$

donde la función $f(t)$ es transformada en $F(s)$ que no depende de la variable t . La función $K(s, t)$ es llamada el Kernel de la transformación. Seleccionando de manera adecuada la función K y los límites de integración a, b las ecuaciones a resolver pueden ser simplificadas. La transformada de Laplace es una de las transformaciones más usadas y se define como sigue:

Definición B.1 *La transformada de Laplace de una función $f(t)$ definida $0 \leq t < \infty$ tiene transformada si existe un real $a > 0$ tal que la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ converge para $s > a$. La transformada de Laplace es una función que depende de una nueva variable aleatoria s y se calcula como:*

$$L_{f(t)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

algunas de las propiedades más usadas se muestran a continuación:

Propiedad B.1 (Unicidad) *Cuando la transformada de Laplace de una función $f(t)$ existe entonces es única.*

Propiedad B.2 (Linealidad) *Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ funciones para las cuales existe la transformada de Laplace entonces:*

$$L_{af_1(t)+bf_2(t)}(s) = aL_{f_1(t)}(s) + bL_{f_2(t)}(s).$$

Propiedad B.3 (Traslación) Si $\widehat{f}(s) = L_{f(t)}(s)$ está definida en el intervalo $s \in [b, \infty)$ entonces:

$$L_{e^{at}f(t)}(s) = \widehat{f}(s - a).$$

Propiedad B.4 (Transformada de un polinomio) Si $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ es un polinomio de grado n , entonces:

$$\begin{aligned} L_{f(t)}(s) &= \sum_{k=0}^n a_k L_{t^k}(s) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k k!}{s^{k+1}}. \end{aligned}$$

Propiedad B.5 (Transformada de la derivada) Sea $f(t)$ una función derivable n veces para la cual existe la transformada de Laplace, entonces:

$$L_{f'(t)}(s) = sL_{f(t)}(s) - f(0),$$

en general:

$$L_{f^{(n)}(t)}(s) = s^n L_{f(t)}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Propiedad B.6 (Derivada de la transformada) Sea $f(t)$ una función para la cual existe la transformada de Laplace entonces:

$$L_{tf(t)}(s) = -\frac{d}{ds}L_{f(t)}(s),$$

en general podemos notar que:

$$L_{t^n f(t)}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L_{f(t)}(s).$$

Propiedad B.7 (Transformada de la integral) Sea $f(t)$ una función para la cual existe la transformada de Laplace entonces:

$$L_{\int_0^t f(\tau) d\tau}(s) = \frac{1}{s}L_{f(t)}(s) - \frac{1}{s} \int_0^a f(t) dt,$$

también podemos observar que:

$$L_{\int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt \dots dt}(s) = \frac{1}{s^n} L_{f(t)}(s),$$

adicionalmente:

$$\int_s^\infty L_{f(t)}(\gamma) d\gamma = L_{\frac{f(t)}{t}}(s), \text{ si } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \text{ existe.}$$

Propiedad B.8 (Transformada de la convolución) Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones para las cuales existe su transformada de laplace, entonces:

$$\begin{aligned} L_{\int_0^t f_1(t-y)f_2(y)dy}(s) &= L_{f_1 * f_2}(s) \\ &= L_{f_1(t)}(s)L_{f_2(t)}(s). \end{aligned}$$

Fórmulas de derivación

Propiedad B.9 (Fórmula de Leibnitz)

$$\frac{d}{dx} \int_{L(x)}^{H(x)} F(x, y)dy = \int_{L(x)}^{H(x)} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dy + F(x, H(x))\frac{d}{dx}H(x) - F(x, L(x))\frac{d}{dx}L(x).$$

Propiedad B.10 (Regla de la cadena)

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dg}f(g(x))\frac{d}{dx}g(x).$$

Propiedad B.11 (Regla del producto)

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)].$$

Propiedad B.12 (Regla del cociente)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

Algunas definiciones y propiedades de la probabilidad.

Propiedad B.13 (Desigualdad de Chebyshev) Sea X cualquier variable aleatoria y ϵ cualquier número real positivo, entonces:

$$P[|X| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}[|X|].$$

Definición B.2 (Convergencia en probabilidad) Una sucesión de variables aleatorias X_n converge en probabilidad a la variable aleatoria x si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - x| > \epsilon] = 0,$$

para cualquier $\epsilon > 0$. La denotamos como $X_n \xrightarrow{P} x$.

Definición B.3 (Convergencia en distribución) Se dice que una sucesión X_n de variables aleatorias converge en distribución a la variable aleatoria X si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n} = F_X,$$

para cualquier número real x en el cual F_x es continua. Se denotará como $X_n \xrightarrow{D} X$.

Definición B.4 (Convergencia casi segura) Se dice que una sucesión X_n de variables aleatorias converge casi seguramente a la variable X si:

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right] = 1,$$

lo denotaremos como $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

Teorema B.1 (Teorema central del límite) Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de varianza finita entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

en donde μ y σ^2 son la esperanza y varianza.

Propiedad B.14 Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias para las que se cumple que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| > \epsilon] < \infty,$$

para cualquier $\epsilon > 0$, entonces $X_n \xrightarrow{c.s.} 0$.

Apéndice C

Programas en R project.

Todos los códigos¹ creados para realizar gráficas o cálculos de la probabilidad de ruina se agrupan en las siguientes páginas, se acompañan de narraciones donde se explica la forma de usarlos, adicionalmente se anexan breves descripciones de la estructura de tales programas. Se advierte que las descripciones dentro de los códigos carecen de acentos para no generar errores en la ejecución de Latex.

Antes de ejecutar los algoritmos relacionados con la simulación Monte Carlo se insertaron semillas iniciales con el código `set.seed()`, para medir el tiempo de ejecución de los algoritmos se usó el comando `proc.time()[3]` al inicio y final de cada instrucción, para después realizar la diferencia de los valores al inicio y final obteniendo el tiempo de ejecución.

Función *Met1EntreArriboTiempo(t, k)*.

La función *Met1EntreArriboTiempo(t,k)* es un código auxiliar que apoya a (*Met1Graf(t, N, u, c, k, dist, p1, p2, p3)*) y (*Met1Prob(t, N, u, c, k, dist, p1, p2, p3)*). Tal función recibe los parámetros t y k que denotan el horizonte de tiempo seleccionado y la intensidad de los tiempos entre arribo (recordemos que se distribuyen exponencial). Al ejecutar el código se obtiene como resultado un vector T con los tiempos entre arribo, el número de reclamaciones es igual al tamaño del vector.

```
1 ###numero de reclamaciones(n) y genera los tiempos entre arribo(T).
2 Met1EntreArriboTiempo=function(t,k){
3 T=0
4 h=rexp(1,k)
5 Suma=sum(h)
6 n=1
7
```

¹Las funciones que a continuación se presentan pueden descargarse de la dirección: <http://ubuntuone.com/6x7nwhiUeLOzf2acuNbteR>


```

8 while (Suma<t)
9 {
10   c1=rexp(1,k)
11   h<-c(h,c1)
12   Suma=sum(h)
13   if (Suma<t)
14     {T=h
15     n=n+1}
16 }
17 return(T)
18 }

```

Función $Met1Graf(t, N, u, c, k, dist, p1, p2, p3)$.

La función $Met1Graf(t, N, u, c, k, dist, p1, p2, p3)$ tiene por objetivo generar las gráficas del proceso de riesgo mediante la simulación Monte Carlo del algoritmo I (véase sección 3.1). El programa recibe como parámetros los valores t (horizonte de tiempo), N (numero de trayectorias a simular), u (reserva inicial del proceso de riesgo), c (tasa de cobro por primas) y k (intensidad del proceso Poisson). El valor de $dist$ puede ser cualquiera de los siguientes números (1-exp, 2-gama, 3-uniforme, 4-lognormal, 5-Pareto, 6-Weibull y 7-Burr) cada uno de ellos representa la distribución asociada a las reclamaciones. Los valores $p1$, $p2$ y $p3$ representan los parámetros de las reclamaciones. El resultado final del programa es una gráfica donde se aprecian las simulaciones realizadas.

```

1 #####Metodo 1_Grafica
2
3 Met1Graf=function(t,N,u,c,k,dist,p1,p2,p3){
4   flag=0
5   ###Simulaciones
6   for(r in 1:N)
7   {
8     ### Tiempos entre arribo (T) y numero de reclamaciones (n)
9     T<-Met1EntreArriboTiempo(t,k)
10    n=length(T)
11
12    ### Tiempos de arribo (W)
13    W<-cumsum(T)
14
15    ### Simulacion de las (n) reclamaciones y monto agregado
16    if(dist==1)
17      {X<-rexp(n,p1)}
18    if(dist==2)
19      {X<-rgamma(n,p1,p2)}
20    if(dist==3)

```

```

21 {X<-runif(n,p1,p2)}
22 if(dist==4)
23 {X<-rlnorm(n,p1,p2)}
24 if(dist==5)
25 {X<-rburr(n,p1,1,p2)}
26 if(dist==6)
27 {X<-rweibull(n,p1,p2)}
28 if(dist==7)
29 {X<-rburr(n,p1,p2,p3)}
30 S<-cumsum(X)
31
32 ###Graficas
33 m=2+2*n
34 G=0
35 ###Eje X
36 G[1]=0
37 for(i in seq(from=2, to= m-2, by=2))
38 {j=(i-2)/2+1
39 G[i]=W[j]
40 G[i+1]=W[j]}
41 G[m]=t
42 ###Eje Y
43 U=0
44 U[1]=u
45 U[2]=u+c*G[2]-0
46 U[3]=u+c*G[3]-S[1]
47 for(i in seq(from=4, to= m-2, by=2))
48 {j=(i-2)/2+1
49 U[i]=u+c*G[i]-S[j-1]
50 U[i+1]=u+c*G[i]-S[j]
51 }
52 U[m]=u+c*t-S[n]
53 if(r==1)
54 {plot(G,U, type="l", col=4,ylim=c(-50,100),xlab="Tiempo",ylab="U(
t)")
55 title(main="Simulacion Algoritmo I")}
56 else
57 {points(G,U, type="l", col=4)}
58 }
59 ###Colocando lineas de referencia
60 abline(h=0, lty=3)
61 abline(v=t, lty=3)
62 }

```

Función $Met1Prob(t, N, u, c, k, dist, p1, p2, p3)$.

El código de la función $Met1Prob(t, N, u, c, k, dist, p1, p2, p3)$ utiliza los mismos parámetros que la función anterior, fue diseñada en base al algoritmo I, como resultado se obtiene la probabilidad de ruina del proceso de riesgo. Para obtener la probabilidad de ruina se cuenta el número de trayectorias que tuvieron reservas negativas en algún momento y se divide entre el número de trayectorias simuladas.

```

1  #####Metodo 1_probabilidad
2
3  Met1Prob=function(t,N,u,c,k,dist,p1,p2,p3){
4  flag=0
5  ###Simulaciones
6  for(r in 1:N)
7  {
8  ### Tiempos entre arribo (T) y numero de reclamaciones (n)
9  T<-Met1EntreArriboTiempo(t,k)
10 n=length(T)
11
12 ### Tiempos de arribo (W)
13 W<-cumsum(T)
14
15 ### Simulacion de las (n) reclamaciones y monto agregado
16 if(dist==1)
17   {X<-rexp(n,p1)}
18 if(dist==2)
19   {X<-rgamma(n,p1,p2)}
20 if(dist==3)
21   {X<-runif(n,p1,p2)}
22 if(dist==4)
23   {X<-rlnorm(n,p1,p2)}
24 if(dist==5)
25   {X<-rburr(n,p1,1,p2)}
26 if(dist==6)
27   {X<-rweibull(n,p1,p2)}
28 if(dist==7)
29   {X<-rburr(n,p1,p2,p3)}
30 S<-cumsum(X)
31
32 ###Calculo de la Probabilidad
33 ###flag cuenta el numero de veces que ocurre la ruina
34 Ut=0
35 for(i in 1:n)
36 {Ut[i]=u+c*W[i]-S[i]}
37 i=0
38 repeat
39   {
40     if(i<n)
41       {i=1+i

```

```

42     if(Ut[i]<0)
43       {flag=flag+1
44         break}}
45     else
46       {break}
47   }
48 }
49 Proba=flag/N
50 Proba
51 }

```

Función $Met2Graf(t, N, u, c, k, dist, p1, p2, p3)$.

La función aquí presentada utiliza el algoritmo II de la simulación Monte Carlo para generar las gráficas de las trayectorias del proceso de riesgo. El programa comienza simulando el número de reclamaciones hasta nuestro horizonte de tiempo t después se generan variables aleatorias $uniformes(0, t)$ y se ordenan de menor a mayor (las variables ordenadas denotan los tiempos entre arribo). Según la distribución seleccionada ($dist = 1, \dots, 7$) se generan las reclamaciones con parámetros $p1, p2$ y $p3$, al final se grafican las trayectorias.

```

1  ###Metodo 2_Graficas
2
3  Met2Graf=function(t,N,u,c,k,dist,p1,p2,p3){
4  for(r in 1:N)
5  {
6  ###Simulacion del numero de reclamaciones.
7  n<-rpois(1,k*t)
8  ###Obtenemos los tiempos en los que ocurren las reclamaciones.
9  w<-runif(n, min=0, max=t)
10 W<-sort(w)
11 ###Simulacion de las reclamaciones.
12 if(dist==1)
13   {X<-rexp(n,p1)}
14 if(dist==2)
15   {X<-rgamma(n,p1,p2)}
16 if(dist==3)
17   {X<-runif(n,p1,p2)}
18 if(dist==4)
19   {X<-rlnorm(n,p1,p2)}
20 if(dist==5)
21   {X<-rburr(n,p1,1,p2)}
22 if(dist==6)
23   {X<-rweibull(n,p1,p2)}
24 if(dist==7)
25   {X<-rburr(n,p1,p2,p3)}

```

```

26 S<-cumsum(X)
27
28 ###Grafica del proceso de riesgo
29 m=2+2*n
30 G=0
31 #####Eje X
32 G[1]=0
33 for(i in seq(from=2, to= m-2, by=2))
34   {j=(i-2)/2+1
35     G[i]=W[j]
36     G[i+1]=W[j]}
37 G[m]=t
38 #####Eje Y
39 U=0
40 U[1]=u
41 U[2]=u+c*G[2]-0
42 U[3]=u+c*G[3]-S[1]
43 for(i in seq(from=4, to= m-2, by=2))
44   {j=(i-2)/2+1
45     U[i]=u+c*G[i]-S[j-1]
46     U[i+1]=u+c*G[i]-S[j]
47   }
48 U[m]=u+c*t-S[n]
49 if(r==1)
50   {plot(G,U, type="l", col=4,ylim=c(-10,60),xlab="Tiempo",ylab="U(t)
51     )")
52   title(main="Simulacion Algoritmo II")}
53 else
54   {points(G,U, type="l", col=4)}
55 }
56 ###Colocando lineas de referencia
57 abline(h=0, lty=3)
58 abline(v=t, lty=3)
59 }

```

Función $Met2Prob(t, N, u, c, k, dist, p1, p2, p3)$.

El código que se presenta a continuación arroja como resultado la probabilidad de ruina usando el algoritmo II, el usar tal resultado disminuye considerablemente la catidad de código escrito. Las funciones basadas en el algoritmo II no utilizan otras funciones auxiliares.

```

1 ###Metodo 2_Probabilidad
2
3 Met2Prob=function(t,N,u,c,k,dist,p1,p2,p3){

```

```

4 flag=0
5 for(r in 1:N)
6 {
7   ###Simulacion del numero de reclamaciones.
8   n<-rpois(1,k*t)
9   ###Obtenemos los tiempos en los que ocurren las reclamaciones.
10  w<-runif(n, min=0, max=t)
11  W<-sort(w)
12  ###Simulacion de las reclamaciones.
13  if(dist==1)
14    {X<-rexp(n,p1)}
15  if(dist==2)
16    {X<-rgamma(n,p1,p2)}
17  if(dist==3)
18    {X<-runif(n,p1,p2)}
19  if(dist==4)
20    {X<-rlnorm(n,p1,p2)}
21  if(dist==5)
22    {X<-rburr(n,p1,1,p2)}
23  if(dist==6)
24    {X<-rweibull(n,p1,p2)}
25  if(dist==7)
26    {X<-rburr(n,p1,p2,p3)}
27  S<-cumsum(X)
28
29  ###Calculo de la Probabilidad
30  ###flag cuenta el numero de veces que ocurre la ruina
31  Ut=0
32  for(i in 1:n)
33    {Ut[i]=u+c*W[i]-S[i]}
34  i=0
35  repeat
36    {
37      if(i<n)
38        {i=1+i
39          if(Ut[i]<0)
40            {flag=flag+1
41              break}}
42          else
43            {break}
44        }
45    }
46  Proba=flag/N
47  Proba
48 }

```

Función $p(u, k, t, N)$.

La función $p(u, k, t, N)$ calcula la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo finito t cuando las reclamaciones son exponenciales ($exp(1)$) y $c = 1$. Los valores que usa la función p son: el capital inicial u , la intensidad del proceso Poisson k , el horizonte de tiempo t y el número de simulaciones N . Cabe mencionar que se usa una integral Monte Carlo con la fórmula exacta de la probabilidad de ruina. La función p depende de la función $f4$ que a su vez depende de $f1$, $f2$ y $f3$.

```

1 f1=function(u,k,t,x){
2 k*exp(2*sqrt(k)*t*cos(x)-(1+k)*t+u*(sqrt(k)*cos(x)-1))}
3
4 f2=function(u,k,x){
5 cos(u*sqrt(k)*sin(x))-cos(u*sqrt(k)*sin(x)+2*x)}
6
7 f3=function(k,x){
8 1+k-2*sqrt(k)*cos(x)}
9
10 f4=function(u,k,t,x){
11 (f1(u,k,t,x)*f2(u,k,x))/f3(k,x)}
12
13 ###Calculo de la integral por medio de metodo Monte Carlo
14 ## N-numero de simulaciones.
15
16 p=function(u,k,t,N)
17 {
18 z<-runif(N,0,pi)
19 z1<-f4(u,k,t,z)
20 k*exp(-1*(1-k)*u)-mean(z1)
21 }
```

Función $probaLaplace(u, k, a, c, t, N)$.

La función $probaLaplace(u, k, a, c, t, N)$ tiene como objetivo calcular la probabilidad de ruina cuando las reclamaciones son exponenciales, basandose en los resultados teoricos de la transformada de la distribución del tiempo de ruina. El resultado teórico esta integrado por sumas infinitas pero en el programa se truncan a N sumandos.

```

1 ###Probabilidad de no ruina Transformada del tiempo.
2 ##N-numero de sumandos en la suma truncada.
3 ##k-intensidad del proceso Poisson
4 ##c-constante de ingresos
5 ##a-parametro de las reclamaciones exponenciales
6 ##u-capital inicial
```

```

7 ##t-horizonte de tiempo
8 ###En la practica se recomienda que N sea muy grande
9 ###ya que se puede rebasar la capacidad del ordenador.
10
11 probaLaplace=function(u,k,a,c,t,N){
12 V1=numeric(N)
13 for(i in 1:N){
14 V1[i]=((u+c*t)^(i-1)*(k*a*t)^(i))/(factorial(i-1)*factorial(i))}
15 sum(V1)
16
17 (exp(-(k+c*a)*t+a*u))/a*sum(V1)
18
19 V2=numeric(N)
20 suma=0
21 for(i in 1:N){
22   for(j in 1:N){
23     suma=suma+((c/k)^(i-1)+(1/a)^(i-1))*(((u+c*t)^(j-1)*(k*a*t)^(i+j
24       -1))/(factorial(j-1)*factorial(i+j-1)))
25   }
26 suma
27
28 ###probabilidad de ruina
29 (exp(-(k+c*a)*t+a*u))/a*(suma-sum(V1))
30 }

```

Función *aproxSegerdahl*(u, t, C, R, mL, wL).

El código que se presenta abajo genera la aproximación Segerdahl, se remarca que el código es válido únicamente cuando $c = 1$ (constante de ingresos), no debe confundirse con C que es una constante (véase capítulo 2).

```

1 ###Aproximacion Segerdahl Normal
2 ##u-capital inicial
3 ##C
4 ##mL
5 ##wL
6 ##t-tiempo
7 ##R-coeficiente de ajuste
8
9 aproxSegerdahl=function(u,t,C,R,mL,wL){
10 C*exp(-R*u)*pnorm((t-u*mL)/(wL*sqrt(u)), mean = 0, sd = 1)
11 }

```


Función *InversaGaussiana*(x, z, u).

El código diseñado para la inversa gaussiana es utilizado por las funciones que aproximan la probabilidad de ruina mediante el movimiento Browniano.

```

1 InversaGaussiana=function(x,z,u){
2 1-pnorm(u/sqrt(x)-z*sqrt(x), mean = 0, sd = 1)+exp(2*z*u)*pnorm(-u/
   sqrt(x)-z*sqrt(x), mean = 0, sd = 1)
3 }
4 InversaGaussiana(10,1,5)

```

Función *AproxBrowniano*(u, t, muc, sc).

El código que se muestra a continuación fue el utilizado para calcular la aproximación al proceso de riesgo por medio de un movimiento Browniano. Los parámetros muc y sc corresponden a los valores μ_c y σ_c mostrados en el capítulo 2.

```

1 ###Aproximacion basada en el movimiento Browniano.
2 ##muc
3 ##sc
4 ##t-tiempo
5 ##u-monto inicial
6
7 AproxBrowniano=function(u,t,muc,sc){
8 InversaGaussiana((t*muc^2)/sc^2,-1,(u*abs(muc))/sc)
9 }

```

Función *AproxBrownianoCorregida*($u, t, g1, g2, R$).

Las líneas abajo mostradas corresponden a las usadas para obtener la aproximación corregida basada en el movimiento Browniano para el proceso de riesgo. Los valores $g1$ y $g2$ corresponden a γ_1 y γ_2 vistos en el capítulo 2.

```

1 ###Aproximacion corregida basada en el movimiento Browniano
2 ##t-tiempo
3 ##u-capital inicial
4 ##R-coeficiente de ajuste
5 ##g1-parametro
6 ##g2-parametro
7
8 AproxBrownianoCorregida=function(u,t,g1,g2,R){
9 InversaGaussiana((t*g1)/u^2+g2/u,-(R*u)/2,1+g2/u)
10 }

```

Función *PollaczekKinchineUNIFORME*($u, N1, a, b, k, mu, c$).

La siguiente función fue usada para calcular la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito cuando las reclamaciones son uniformes, usando como base teórica el resultado Pollaczek-Kinchine. Los parámetros de la función son u que denota la reserva inicial, $N1$ hace referencia al número de simulaciones, los valores a y b denotan los parámetros de la distribución uniforme, el valor k es el que se asocia a la intensidad del proceso Poisson, mu es la esperanza de las reclamaciones y c especifica la constante de ingresos por primas. De forma adicional la función señalada usa la función auxiliar *INVColaIntUNIF*(u, a, b) que se detalla más adelante.

```

1 PollaczekKinchineUNIFORME=function(u, N1, a, b, k, mu, c)
2 {
3   N=rgeom(N1, 1-(k*mu)/c)
4   flag=0
5   for(i in 1:N1)
6   {
7     if(N[i]==0)
8       {flag=flag+1}
9     if(N[i]>0)
10      {A=0
11       B=0
12       A=INVColaIntUNIF(runif(N[i], 0, 1), a, b)
13       B=cumsum(A)
14       if(B[N[i]]<= u)
15         {flag=flag+1}
16      }
17   }
18 1-(flag/N1)
19 }

```

Función *INVColaIntUNIF*(u, a, b).

Las siguientes líneas tienen el código de la función $F_I^{-1}(x)$ cuando las reclamaciones son uniformes, observese que bastará con evaluar números aleatorios $unif(0, 1)$ para obtener variables aleatorias con distribución $F_I(x)$.

```

1 INVColaIntUNIF=function(y, a, b)
2 {(b-a)-sqrt(y*(a^2-b^2)+(b-a)^2)}

```

Función *PollaczekKinchineLOGNORM*($u, N1, W, Z, k, mu, c, Num$).

Las líneas que se muestran a continuación fueron usadas para obtener la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito, cuando las reclamaciones son lognormal. La justificación teórica la proporciona el resultado de Pollaczek-Kinchine. Los parámetros usados son u el capital inicial, k hace referencia a la intensidad del proceso Poisson, mu señala la esperanza de las reclamaciones, c contiene el valor de la constante de ingresos por primas. Los últimos tres valores (W, Z, Num) se relacionan con la aproximación a la función inversa de F_I . La función de los parámetros se abordará cuando se explique la función auxiliar *ValBusInvLN*(u, W, Z, Num).

```

1 PollaczekKinchineLOGNORM=function(u,N1,W,Z,k,mu,c,Num)
2 {
3   N=rgeom(N1,1-(k*mu)/c)
4   flag=0
5   for(i in 1:N1)
6     {
7       if(N[i]==0)
8         {flag=flag+1}
9       if(N[i]>0)
10        {A1=0
11          B1=0
12            for(l in 1:N[i])
13              {A1[l]=ValBusInvLN(runif(1,0,1),W,Z,Num)}
14          B1=cumsum(A1)
15          if(B1[N[i]]<= u)
16            {flag=flag+1}
17        }
18    }
19  1-(flag/N1)
20 }

```

Función *ColaIntLN*(mu, s, x).

El código que se muestra abajo se utiliza para obtener valores de la cola integrada de una distribución lognormal. Los valores mu y s son equivalentes a los parámetros μ y σ de una distribución lognormal. El valor x denota el punto en donde se desea evaluar $F_I(x)$.

```

1 ColaIntLN=function(mu,s,x)
2 {
3   g=(1/s)*(log(x)-mu)
4   muB=exp(mu+.5*(s^2))
5   A=pnorm(g, mean=0, sd=1)
6   B=pnorm(g-s, mean=0, sd=1)

```

```

7 | (1/muB)*(x-x*A+muB*B)
8 | }

```

Función $BusInvLN(u, B, Num)$.

En el presente trabajo se uso la función $ColaIntLN(mu, s, x)$ para generar una aproximación discreta de $F_I(x)$, en concreto en el ejemplo mostrado en el capítulo 3 (caso lognormal) se decidió realizar una partición de 12000 puntos en el soporte $[0, 120)$ de $F_I(x)$ obteniendo dos series de datos X (valores de la partición en el dominio de $F_I(x)$) y B (valores obtenidos de evaluar la partición en $F_I(x)$). La función que se muestra abajo busca el elemento de la partición que genera el valor más parecido a u , el parámetro Num denota el tamaño de la partición (en este caso $Num = 12000$).

```

1 | BusInvLN=function(u, B, Num)
2 | {
3 | k=0
4 | for(i in 1:Num)
5 | { if(u<B[Num])
6 |   {if(u>=B[i] && u<B[i+1]){k=i}}
7 |   if(u>=B[Num])
8 |     {k=Num}
9 | }
10 | k
11 | }

```

Funció $ValBusInvLN(u, B, X, Num)$.

La siguiente función nos dice cual es el valor x que hace que $F_I(x) \approx u$ (caso lognormal), los valores $F_I(x)$ se encuentran en el vector B y todos los valores x 's en el vector X , el parámetro Num denota la longitud de los vectores.

```

1 | ValBusInvLN=function(u, B, X, Num)
2 | {X[BusInvLN(u, A, Num)]}

```

Función $IntMC(u, o, m, N, N1)$.

El siguiente código ayuda a encontrar la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito cuando las reclamaciones son Pareto. La función se basa en los

resultados de Ramsay, Colin M. (2003). Los parámetros de la función son u la reserva inicial, o denota al margen de seguridad, m es el parámetro de la distribución Pareto, $N1$ indica la cantidad de simulaciones y N denota el número de sumas consideradas en la función Ei_θ

```

1 IntMC=function(u,o,m,N,N1)
2 {
3 A=rexp(N1,rate=1+u/m)
4 B=EspFunc(o,m=1,A,N)
5 C=(1/(1+u/m))*(1/o)*(1/N1)*sum(B)
6 C
7 }

```

Función $EspFunc(o, m, x, N)$.

El siguiente código es la implementación de la función $H(\rho, \theta, x)$ descrita en el capítulo 3.3.5 .

```

1 EspFunc=function(o,m,x,N)
2 {
3 A=o
4 B=1
5 C=((x))*pi*exp(-x)
6 D=Eim0(x,m,N)
7 E=o+x*exp(-x)*D
8
9 (A^2)/(B*(E^2+C^2))
10 }

```

Función $Eim0(x, m, N)$.

En las siguientes líneas se implemento la función $Ei_\theta(x)$ cuando $\theta = 1$.

```

1 Eim0=function(x,m,N){
2 g=0.5772156649
3 sum=0
4 for(i in 1:N)
5 {
6 if(i!=0){sum=((x^i)/(i*factorial(i)))+sum}
7 }
8 g+log(x)+sum
9 }

```

Función *PollaczekKinchineBURR*($u, N1, W, Z, k, mu, c, Num$) .

El código que se muestra a continuación fue usado para calcular la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo infinito, cuando las reclamaciones son BURR. El resultado teórico que sustenta la función es la fórmula de Pollaczek-Kinchine. El parámetro u expresa el capital inicial, k denota la intensidad del proceso Poisson, mu contiene el valor de la esperanza de las reclamaciones, c hace referencia a la constante de ingresos por primas. Los parámetros W , Z y Num se explican más adelante con la función *ValBusInvBURR*(u, W, Z, Num).

```

1 PollaczekKinchineBURR=function(u,N1,W,Z,k,mu,c,Num)
2 {
3   N=rgeom(N1,1-(k*mu)/c)
4   flag=0
5   for(i in 1:N1)
6   {
7     if(N[i]==0)
8       {flag=flag+1}
9     if(N[i]>0)
10      {A1=0
11       B1=0
12       for(l in 1:N[i])
13         {A1[l]=ValBusInvBURR(runif(1,0,1),W,Z,Num)}
14       B1=cumsum(A1)
15       if(B1[N[i]]<= u)
16         {flag=flag+1}
17     }
18   }
19   1-(flag/N1)
20 }

```

Función *ColaIntBURR*(mu, x) .

Con las siguientes líneas se obtuvieron valores de la función $F_I(x)$ en el caso Burr, se remarca que únicamente se programó la función con los valores del ejercicio. Los parámetros usados en la función son mu que denota la esperanza de las reclamaciones y x un número real positivo.

```

1 ColaIntBURR=function(mu,x)
2 {
3   a=sqrt(2)
4   A=4*x^2+(2*a)*x+1
5   B=4*x^2-(2*a)*x+1
6   C=(1/8)*a*log(A/B)
7

```

```

8 D=(1/4)*a*( atan((2*a)*x+1)+atan((2*a)*x-1) )
9
10 F=(1/(2*mu))*(C+D)
11 F
12 }

```

Función $BusInvBURR(u, B, Num)$.

Con la función anterior $ColaIntBURR(mu, x)$ se realizó una aproximación discreta de la función $F_I(x)$, en concreto en el ejemplo mostrado en el capítulo 3 (caso BURR) se decidió realizar una partición de 20000 puntos en el soporte $[0, 40)$ de $F_I(x)$ obteniendo dos series de datos X (valores de la partición en el dominio de $F_I(x)$) y B (valores obtenidos de evaluar la partición en $F_I(x)$). La función que se muestra abajo busca el elemento de la partición que genera el valor más parecido a u , el parámetro Num denota el tamaño de la partición (en este caso $Num = 20000$).

```

1 BusInvBURR=function(u,B,Num)
2 {
3 k=0
4 for(i in 1:Num)
5 { if(u<B[Num])
6   {if(u>=B[i] && u<B[i+1]){k=i}}
7   if(u>=B[Num])
8     {k=Num}
9 }
10 k
11 }

```

Función $ValBusInvBURR(u, A, X, Num)$.

La siguiente función nos dice cual es el valor x que hace que $F_I(x) \approx u$ (caso Burr), los valores $F_I(x)$ se encuentran en el vector B y todos los valores x 's en el vector X , el parámetro Num denota la longitud de los vectores.

```

1 ValBusInvBURR=function(u,A,X,Num)
2 {X1[BusInvBURR(u,A,Num)]}

```

Apéndice D

Gráficas en R project.

Los códigos¹ aquí mostrados se usaron para generar gráficas con ejemplos específicos y observar algunas características del proceso de riesgo. Las ilustraciones generadas aparecen en las diversas secciones del presente trabajo.

Código gráfica 1.

La líneas abajo mostradas fueron usadas para obtener la gráfica de un proceso de riesgo discreto con reclamaciones discretas y parámetros específicos.

```
1 #####Simulaciones bernulli
2 r<-rbinom(10,1,.65)
3 #####Obtenemos v.a. uniformes discretas en el intervalo 1 y 2
4 x<-c(1,2)
5 k<-sample(x,10,replace=TRUE)
6 mean(k)
7 #####Monto inicial
8 u=5
9 #####Proceso de riesgo
10 w<-0:10
11 w
12 y<-0
13 y[11]=0
14 y[1]=u
15
16 for(i in 1:10)
17   {y[i+1]=y[i]+1-r[i]*k[1]}
18 y
19 plot(w,y,type="p",col=4,xlab="Tiempo",ylab="U(t)")
20 title(main="Proceso de riesgo en tiempo discreto",sub="
    Reclamaciones uniformes{1,2}, prob. de reclamacion 0.65")
```

¹Las líneas de código que a continuación se presentan pueden descargarse de la dirección: <http://ubuntuone.com/3MqK23agUpYxIPvB5FxxQY>


```

21 abline(h=0,v=0,lty=3)
22 abline(h=1,v=1,lty=3)
23 abline(h=2,v=2,lty=3)
24 abline(h=3,v=3,lty=3)
25 abline(h=4,v=4,lty=3)
26 abline(h=5,v=5,lty=3)
27 abline(h=6,v=6,lty=3)
28 abline(h=7,v=7,lty=3)
29 abline(h=8,v=8,lty=3)
30 abline(h=9,v=9,lty=3)
31 abline(h=10,v=10,lty=3)

```

Código gráfica 2.

Código utilizado para generar un proceso de riesgo especificando el número de reclamaciones que deseamos generar, solamente se usaron reclamaciones exponenciales.

```

1 x<-rexp(10, rate=7)
2 y<-1
3 y[1]<-0
4 y[2]<-x[1]
5 for(i in 2:10)
6 {y[i+1]=y[i]+x[i]}
7 print(y)
8
9 z<-0
10 for(i in 1:11)
11 {z[i]=i-1}
12 print(z)
13
14 plot(y,z, type="s", main="Proceso Poisson homogeneo con tasa = 7",
15       xlab="Tiempo", ylab="Numero de ocurrencias")
16 #####Intendo de modelar el proceso de riesgo
17 #####Sabemos que el vector y tiene los tiempos
18 k<-rexp(9, rate=4)
19 print(k)
20
21 #####w denotara los tiempos de arrivo
22 w<-1
23 w[20]<-1
24 j=0
25 for(i in seq(1,20,by=2))
26 {j=j+1
27  w[i-1]=y[j]

```

```

28 w[i]=y[j]
29 }
30 w[20]=y[11]
31 #####Ahora evaluamos la funcion de riesgo en los tiempos de arrivo
32 m<-1
33 m[1]=2
34
35 for(i in 1:9)
36 {m[2*i]=m[2*i-1]+(w[2*i]-w[2*i-1])
37   m[2*i+1]=m[2*i]-k[i]
38 }
39 m[20]=m[19]+(w[20]-w[19])
40 plot(w,m,type="o",main="P.P.C.(intensidad=7), siniestros
    exponenciales (6.5)", xlab="Tiempo", ylab="monto en recervas")

```

Código gráfica 3.

Las líneas que se muestran a continuación fueron usadas para generar las gráficas de las versiones escaladas del proceso de riesgo.

```

1 ##PROCESO DE RIESGO U(t)
2 ##-----
3 #####
4 ###INICIO-tiempos###
5 ###redondea
6 r<-rexp(10,1)
7 r
8 T<-round(r,digits=2)
9 T
10 W<-1:11
11 W
12 W[1]=0
13 for(i in 1:10){W[i+1]=T[i]+W[i]}
14 W
15 ###FIN-tiempos###
16 ####
17 ###INICIO-reclamaciones###
18 s<-rexp(10,1)
19 s
20 S<-rep(0,10)
21 S[1]=s[1]
22 for(i in 2:10)
23 {S[i]=s[i]+S[i-1]}
24 S
25 ###FIN-reclamaciones###
26 ####

```

```

27 ###INICIO-Grafica###
28 u=3
29 c=2
30 x<-seq(from=0, to=10, by=.01)
31 x<-x
32 y<-rep(0,1001)
33 grafica<-function(x)
34 {for(i in 1:1001)
35   { if(x[i]<W[2])
36     {y[i]=u+c*x[i]}
37     if(x[i]>=W[2] && x[i]<W[3])
38       {y[i]=u-S[1]+c*x[i]}
39     if(x[i]>=W[3] && x[i]<W[4])
40       {y[i]=u-S[2]+c*x[i]}
41     if(x[i]>=W[4] && x[i]<W[5])
42       {y[i]=u-S[3]+c*x[i]}
43     if(x[i]>=W[5] && x[i]<W[6])
44       {y[i]=u-S[4]+c*x[i]}
45     if(x[i]>=W[6] && x[i]<W[7])
46       {y[i]=u-S[5]+c*x[i]}
47     if(x[i]>=W[7] && x[i]<W[8])
48       {y[i]=u-S[6]+c*x[i]}
49     if(x[i]>=W[8] && x[i]<W[9])
50       {y[i]=u-S[7]+c*x[i]}
51     if(x[i]>=W[9] && x[i]<W[10])
52       {y[i]=u-S[8]+c*x[i]}
53     if(x[i]>=W[10] && x[i]<W[11])
54       {y[i]=u-S[9]+c*x[i]}
55   }
56 return(y)}
57 y<-grafica(x)
58 length(x)
59 length(y)
60
61 plot(x,y,type='l',xlab="Tiempo.",ylab="U(t).",xlim=c(0,20))
62 title(main="Proceso de riesgo U(t).",sub="Parametros u=3, c=2, ?=1
63       y reclamaciones exp(1).")
64 #####
65 ##GRAFICA DE U(t/2)
66
67 m<-2*x
68 plot(m,y,type='l',xlab="Tiempo.",ylab="U(t/2).",xlim=c(0,20))
69 title(main="Proceso de riesgo U(t/2).")
70 #####
71 ##GRAFICA DE U(3t)
72
73 M<-(1/3)*x
74 plot(M,y,type='l',xlab="Tiempo.",ylab="U(3t).",xlim=c(0,20))

```

```
75 title(main="Proceso de riesgo U(3t).")
```

Código gráfica 4.

Las siguientes líneas fueron usadas para graficar el proceso agregado de las reclamaciones $L(t)$ y sus modificaciones, el proceso agregado de las reclamaciones reversible e intercambiable.

```

1 t=10
2 k=1
3 u=0
4 c=1
5 ### Tiempos entre arribo (T) y numero de reclamaciones (n)
6 T=0
7 h=rexp(1,k)
8 Suma=sum(h)
9 n=1
10
11 while(Suma<t)
12 {
13   c1=rexp(1,k)
14   h<-c(h,c1)
15   Suma=sum(h)
16   if (Suma<t)
17     {T=h
18      n=n+1}
19 }
20
21 ### Tiempos de arribo (W)
22 W=0
23 W=T[1]
24 for(i in 2:n)
25 {c2<-W[i-1]+T[i]
26  W<-c(W,c2)}
27
28 ### Simulacion de las (n) reclamaciones
29 ###y monto agragado hasta la n-esima reclamacion S(n)
30 X<-rexp(n,1)
31 X
32 S=0
33 S=X[1]
34 for(i in 2:n)
35 {c3<-S[i-1]+X[i]
36  S<-c(S,c3)}
37 S
38

```

```

39 ###Grafica
40 m=2+2*n
41 G=0
42 ###Eje X
43 G[1]=0
44 for(i in seq(from=2, to= m-2, by=2))
45   {j=(i-2)/2+1
46     G[i]=W[j]
47     G[i+1]=W[j]}
48 G[m]=t
49 ###Eje Y
50 U=0
51 U[1]=u
52 U[2]=-(u+c*G[2]-0)
53 U[3]=-(u+c*G[3]-S[1])
54
55 for(i in seq(from=4, to= m-2, by=2))
56   {j=(i-2)/2+1
57     U[i]=-(u+c*G[i]-S[j-1])
58     U[i+1]=-(u+c*G[i]-S[j])
59   }
60 U[m]=-(u+c*t-S[n])
61
62 ###PROCESO AGREGADO DE LAS RECLAMACIONES.
63 plot(G,U, type="l", col=4,ylim=c(-20,10), ylab='L(t)', xlab='tiempo
64   ')
65 title(main="Proceso agregado de las reclamaciones L(t)",sub="
66   Parametros c=5, k=5 y reclamaciones exp(1).")
67 abline(h=0, lty=3)
68 abline(v=0, lty=3)
69
70 ###PROCESO AGREGADO DE LAS RECLAMACIONES REVERSIBLE L*(t).
71 ###Eje Y
72 U=0
73 U[1]=u
74 U[2]=-(u+c*G[2]-0)
75 U[3]=-(u+c*G[3]-S[n]+S[n-1])
76
77 for(i in seq(from=4, to= m-2-2, by=2))
78   {j=(i-2)/2
79     U[i]=-(u+c*G[i]-S[n]+S[n-j])
80     U[i+1]=-(u+c*G[i+1]-S[n]+S[n-j-1])
81   }
82 U[m-2]=-(u+c*G[m-2]-S[n]+S[1])
83 U[m-1]=-(u+c*G[m-1]-S[n]+0)
84 U[m]=-(u+c*t-S[n])
85 plot(G,U, type="l", col=4,ylim=c(-5,5), ylab='L(t)', xlab='tiempo')
86 title(main="Proceso agregado de las reclamaciones reversible L*(t)"
87   ,sub="Parametros c=5, k=5 y reclamaciones exp(1).")

```

```

85 abline(h=0, lty=3)
86 abline(v=0, lty=3)
87
88 #####PROCESO INTERCAMBIABLE DE LAS RECLAMACIONES  $L^t$ .
89 v=2.9
90
91 ###Eje X
92 G1=G-v
93 for(i in seq(from=1, to= 7, by=1))
94 {G1[i]=G[i]-v+10}
95 G2=0
96 G2[1]=0
97 for(i in seq(from=8, to= 16, by=1))
98 {G2[i-6]=G1[i]}
99 for(i in seq(from=1, to= 6, by=1))
100 {G2[i+10]=G1[i]}
101 G2[16]=10
102 G2
103
104 ###EJE Y
105 S1=0
106 S1[1]=S[1]
107 for(i in seq(from=2, to= n-1, by=1))
108 {S1[i]=S[i]-S[i-1]}
109 S2=0
110 for(i in seq(from=3,to= 6, by=1))
111 {S2[i-2]=S1[i]}
112 for(i in seq(from=1,to= 2, by=1))
113 {S2[i+4]=S1[i]}
114 S3<-cumsum(S2)
115
116 U=0
117 U[1]=u
118 U[2]=-(u+c*G2[2]-0)
119 U[3]=-(u+c*G2[3]-S3[1])
120
121 for(i in seq(from=4, to= m-2, by=2))
122 {j=(i-2)/2+1
123   U[i]=-(u+c*G2[i]-S3[j-1])
124   U[i+1]=-(u+c*G2[i]-S3[j])
125 }
126 U[m]=-(u+c*t-S3[n])
127
128 plot(G2,U, type="l", col=4,ylim=c(-5,5), ylab='L(t)', xlab='tiempo'
      )
129 title(main="Proceso agregado de las reclamaciones intercambiable  $L^t$ 
      ",sub="Parametros c=5, k=5 y reclamaciones exp(1).")
130 abline(h=0, lty=3)
131 abline(v=0, lty=3)

```

Código gráfica 5.

Las siguientes líneas fueron usadas para rotar 180 grados las trayectorias del monto agregado de las reclamaciones y generar las gráficas correspondientes. Se tomó un horizonte de tiempo 10, reclamaciones $exp(2)$ e intensidad del proceso Poisson (1).

```

1  ###Graficas proceso S_{t} rotado 180 grados
2  t=10
3  k=1
4  alpha=2
5  ###Numero de reclamaciones en un intervalo (0,t)
6  n<-rpois(1,k*t)
7
8  ###Tiempos de arribo
9  T<-runif(n,0,t)
10 W<-sort(T)
11 W<-c(0,W)
12 ###Reclamaciones exponenciales
13 x<-rexp(n,alpha)
14 X<-cumsum(x)
15 X<-c(0,X)
16
17 ###Grafica sin rotar
18 Wa<-c(W,10)
19 Xa<-c(X,8)
20 plot(Wa,Xa, type="s",ylim = c(-1 ,10 ),xlim = c(-1 ,10 ),xlab = "
    Tiempo",ylab = "S(i)")
21 abline(a=0,b=1,lty=3)
22 abline(h=0,v=0,lty=1)
23 abline(h=8,lty=4)
24 abline(v=10,lty=5)
25
26 ###Rotacion de 180 grados
27 teta=pi
28 xa<- W*cos(teta)-X*sin(teta)
29 ya<- W*sin(teta)+X*cos(teta)
30 xa<-c(xa,-10)
31 ya<-c(ya,-8)
32 plot(xa,ya,type="s",ylim = c(-11,0),xlim = c(-11,0),xlab = "Tiempo",
    ylab = "S(i)")
33 abline(a=0,b=1,lty=3)
34 abline(h=0,v=0,lty=3)
35 abline(h=-8,lty=3)

```

```
36 | abline(h=-10,v=-10,lty=2)
```


Apéndice E

Dualidad.

El propósito del apéndice es revisar algunos de los elementos usados en la demostración de la expresión de la probabilidad de ruina con horizonte de tiempo finito cuando el proceso de riesgo considera reclamaciones exponenciales.

Teoría de colas y riesgo.

En el apartado se explica de forma breve la relación existente entre teoría de colas y el proceso de riesgo. Un sistema de colas describe el arribo de entidades que serán atendidas por uno o varios servidores, son muchos los componentes de estudio, por ejemplo el tiempo de espera o la capacidad de trabajo del sistema. Se muestran los elementos más relevantes en la determinación de un sistema de colas, como son:

- El proceso de entrada, describe la ley de probabilidad que rige los arribos de los clientes.
- La distribución del servicio, asocia una ley de probabilidad al tiempo de atención de los clientes.
- La disciplina de la cola, denota el número de servidores y las preferencias de atención en la cola.

Existen otros componentes del modelo, pero solo consideramos los anteriores para los fines deseados, la notación comúnmente usada para describir un sistema de este tipo se compone por letras y números separados por diagonales como $M/M/1$ donde la primera letra M dice que la distribución de los tiempos entre arribo es exponencial de parámetro λ , la segunda asocia un distribución exponencial de parámetro α a los tiempos de servicio, el valor uno denota el número de servidores involucrados. Adicionalmente suponemos que los clientes son atendidos en el orden de llegada. Algunas de las variables de interés para las colas son:

- $A(t)$, que denota el número de arribos al sistema hasta el tiempo t (es un proceso Poisson de intensidad λ).
- $D(t)$, denota el número de clientes atendidos en el sistema hasta el tiempo t (es un proceso Poisson de intensidad α).
- $Q(t)$, denota el número de clientes presentes en el sistema al tiempo t .

La cantidad $Q(t)$ es similar a $A(t) - D(t)$ con la diferencia que $Q(t)$ tiene una barrera en cero, por tanto no toma valores negativos, mientras que $A(t) - D(t)$ puede tomar valores negativos. Una variable relacionada con $Q(t)$ es $V(t)$, tal variable denota la carga de trabajo al tiempo t y expresa el tiempo necesario para atender a los clientes presentes al tiempo t . De forma explícita la relación del proceso de riesgo con la teoría de colas ocurre de la siguiente forma, tomemos los siguientes procesos:

Proceso de riesgo. Denotemos el proceso de riesgo por U_t , tomemos un intervalo de tiempo $[0, T]$ y denotemos a los tiempos entre arribo como $0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_N \leq T$. con las correspondientes reclamaciones X_1, X_2, \dots, X_N . Además consideremos que la tasa de cobro por primas es c , por lo que el proceso de riesgo se conforma como:

$$U_t = u + ct - S_t \quad \text{donde} \quad S_t = \sum_{k:W_k \leq t} X_k,$$

además $U_0 = u$ y el tiempo de ruina es denotado por $\tau(u)$.

Proceso de almacenamiento. El proceso análogo al proceso de riesgo en teoría de colas es llamado un proceso de almacenamiento. Para construir el proceso se debe considerar los tiempos W_1^*, \dots, W_N^* definidos como $W_k^* = T - W_{N-k+1}$, justo antes del tiempo W_k^* el proceso V_t realiza un salto hacia arriba de tamaño $X_k^* = X_{N-k+1}$. Entre los saltos el proceso V_t decrece a una tasa c . Por tanto:

$$V_t = A_t^* - ct \quad \text{donde} \quad A_t^* = \sum_{k:W_k^* \leq t} X_k^*,$$

se considera que $V_0 = 0$ y cuando V_t alcanza el nivel cero se mantiene ahí, hasta el próximo salto (no decrece por debajo de cero).

Bajo las características anteriores Asmussen (2010) propone los siguientes teoremas.

Teorema E.1 *Los eventos $\{\tau(u) \leq T\}$ y $\{V_t > u\}$ coinciden, en particular $\psi(u, T) = P(V_T > u)$.*

Teorema E.2 *Cuando $t \rightarrow \infty$ el proceso V_t tiende a un límite en distribución llamado V si y solo si $\psi(u) < 1$ para toda u , entonces:*

$$\psi(u) = P(V > u).$$

Ecuaciones de Bessel.

La ecuación de Bessel proviene de las ecuaciones diferenciales del siguiente tipo:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)y = 0$$

donde las soluciones tienen la siguiente forma, o son combinaciones de la expresión que a continuación se muestra:

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(v+k+1)} \quad \text{para } |x| < \infty$$

Sin embargo para los objetivos fijados será de mayor utilidad la ecuación de Bessel modificada, que se obtiene de resolver la ecuación diferencial del tipo:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(i^2 - \frac{v^2}{x^2}\right)y = 0,$$

donde el argumento real de la solución a la ecuación anterior es:

$$I_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(v+k+1)}. \quad (\text{E.1})$$

Algunas de las propiedades de (E.1) son las siguientes:

- $I_n(x) = I_{-n}(x)$ con n entero.

Demostración:

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k! \Gamma(n+k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+n)-n}}{(k+n-n)!(n+k)!} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{(k-n)!(k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{(k)! \Gamma(k-n)} \\ &= I_{-n}(x). \end{aligned}$$

□

- $e^{\frac{x}{2}(t+t^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n I_n(x)$, conocida como la función generatriz.

Demostración:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(t+t^{-1})} &= e^{\frac{xt}{2}} e^{\frac{x}{2t}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{xt}{2}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2t}\right)^j \frac{1}{j!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{k+j} t^{k-j}}{2^{k+j} k! j!} \end{aligned}$$

realizando el cambio de variable $n = k - j$ se tiene:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{n+2j} t^n}{2^{n+2j} (n+j)! j!} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n} \frac{1}{(n+j)! j!} t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n I_n(x) \end{aligned}$$

□

Una consecuencia del resultado anterior es el siguiente, si definimos $L_j = e^{-(1+\lambda)T} \lambda^{\frac{j}{2}} I_j(2\sqrt{\lambda}T)$ entonces:

- $\sum_{j=-\infty}^{\infty} L_j = 1$.

Veamos que es cierto pues:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} L_j &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-(1+\lambda)T} \lambda^{\frac{j}{2}} I_j(2\sqrt{\lambda}T) \\ &= e^{-(1+\lambda)T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\sqrt{\lambda})^j I_j(2\sqrt{\lambda}T) \\ &= e^{-(1+\lambda)T} e^{\frac{2\sqrt{\lambda}T}{2}(\sqrt{\lambda}+(\sqrt{\lambda})^{-1})} \\ &= e^{-(1+\lambda)T} e^{(1+\lambda)T} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Otra propiedad de interés es una de las representaciones integrales de $I_n(x)$,

- $I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos(\theta)} \cos(n\theta) d\theta$ cuando n es entero.

Una demostración de tal propiedad puede realizarse utilizando la función generatriz para sustituir $t = e^{i\theta}$ y $t = ie^{i\theta}$, con los resultados obtenidos la función $I_n(x)$ puede interpretarse como la integral de la parte real de una función compleja sobre un círculo. Existe una gran cantidad de propiedades adicionales sobre las funciones de Bessel que pueden revisarse en Olver, Loizer, Boisvert y Clark (2010).

Números complejos.

El campo de los números complejos es una extensión al campo de los números reales donde podemos encontrar soluciones a algunas ecuaciones que no tienen solución en los reales. El número imaginario i es aquel que da solución a la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0,$$

en otras palabras $i^2 = -1$. Un número complejo tiene la estructura $r = a + bi$ donde a es la parte real del número r ($Re(a) = a$) y la parte imaginaria de r es b ($Im(r) = b$). Existe una gran cantidad de propiedades solo se enumeran algunas.

- Conjugado de $r = a + bi$,
 $\bar{r} = a - bi$.
- Norma de un número complejo.
 $|r| = \sqrt{r * \bar{r}} = \sqrt{R^2e(r) + I^2m(r)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Fórmula de Euler.
 $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$.
- Fórmula de De Moivre.
 $(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$.
- $e^{i\pi} = -1$.
- $e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$.
- $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.
- $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Bibliografía

- [1] ALBRECHER, Hansjörg y Kortschak, Dominik. On ruin probability and aggregate claim representations for Pareto claim size distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 45(3), 362-373.
- [2] ASMUSSEN, Søren y Binswanger K. Simulation of ruin probabilities for subexponential claims. *ASTIN Bulletin*, Vol. 27, No. 2, 1997, 297-318.
- [3] ASMUSSEN, Søren. Approximations for the probability of ruin within finite time. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1984:1, 31-57.
- [4] ASMUSSEN, Søren y Albrecher, Hansjörg. *Ruin probabilities*, second edition, Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.: 2010.
- [5] BRAVO, M. A., Rincón M. H. y Rincón O. C. *Álgebra superior*, primera edición, México, UNAM : 2006.
- [6] Circular única de seguros. *Diario Oficial de la Federación*, 13 de diciembre 2012.
- [7] CÍŽEK P., Härdle W. K. y Weron R. (Eds), *Statistical tools for finance and insurance*, second edition, Springer: 2011.
- [8] CSÖRGÓ S., Teugels J. L. Empirical Laplace Transform and Approximation of Compound Distributions, *Journal of Applied Probability* Vol. 27, No.1 (1990), pp. 88-101.
- [9] DICKSON David C. M. *Insurance risk and ruin*, United Kingdom, Cambridge University Press: 2005.
- [10] DIMOV I. T. *Monte carlo methods for applied scientists*, Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.: 2008.
- [11] DREKIC S. D. y Willmot G. E. On the density and moments of the time of ruin with exponential claims. *ASTIN Bulletin*, 2003, 33(1), 11-21.
- [12] GARCÍA A. Miguel A. *Introducción a la teoría de la probabilidad*. Primer curso, México, Fondo de Cultura Económica: 2005.

- [13] GARCÍA A. Miguel A. *Introducción a la teoría de la probabilidad*. Segundo curso, México, Fondo de Cultura Económica: 2005.
- [14] GARCÍA J. M. A. Explicit solutions for survival probabilities in the classical risk model. *ASTIN bulletin*, Vol. 35, No. 1, 2005, pp. 113-130.
- [15] GERBER H. U. Mathematical fun with the compound binomial process. *ASTIN bulletin*, Vol. 18, No. 2, 1988, pp. 161-168.
- [16] GRENDER U. A survey of the life and works of Harald Cramér. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1995:1, 2-5.
- [17] IGLEHART D. L. Diffusion approximations in collective risk theory. *Journal of Applied Probability* Vol. 6, No.2 (Aug., 1969), pp. 285-292.
- [18] IGNATOV Z. G. y Kaishev V. K. A finite-time ruin probability formula for continuous claim severities. *Journal of Applied Probability* Vol. 41, No.2 (Jun., 2004), pp. 570-578.
- [19] KLUGMAN S. A., Panjer H. H. y Willmot G. E. *Loss models: from data to decisions*, second edition, United States of America, Wiley series in probability and statistics: 2004.
- [20] KROESE D. P., Taimre T. y Botev Z. I. *Handbook of Monte Carlo Methods*, United States of America, Wiley series in probability and statistics: 2011.
- [21] LEFÈVRE C. y Loisel S. Finite-time horizon ruin probabilities for independent or dependent claim amounts, *Methodology and computing in applied probability* 11, 3(2009) 425-441.
- [22] LEFÈVRE C. y Loisel S. On finite-time ruin probabilities for classical risk models, *Scandinavian Actuarial Journal*, 2008:1,41-60.
- [23] MALINOVSKII V. K. Corrected normal approximation for the probability of ruin within finite time, *Scandinavian Actuarial Journal*, 1994:2, 161-174.
- [24] LI Shuanming, Lu Yi y Garrido José. A review of discrete-time risk models, *Rev. R. Acad. Cien., Serie A Mat.*, Vol. 103 (2), 2009, pp 321-337.
- [25] OLDERSHAW Sarah. Laplace transforms for finding explicit solutions for survival probabilities: the finite time case. *Final year project submitted to the Dept. of Mathematics of the University of Portsmouth.*, May 2011.
- [26] OLVER F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F. y Clark W. C. *NIST Handbook of Mathematical Functions*, United States of America, NIST y Cambridge University Press: 2010.
- [27] PANJER H. H. Recursive evaluation of a family of compound distribution. *ASTIN bulletin*, Vol. 12, No. 1, 1981, pp. 22-26.

- [28] PERVOZVANSKY A. A. Jr. Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 23, 1998, pp. 287-295
- [29] PRABHU N. U. *Queues and Inventories*, Wiley: 1965.
- [30] RAMSAY C. M. A solution to the ruin problem for Pareto distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2003, 33(1), 109-116
- [31] RINCÓN Luis. *Introducción a la teoría del riesgo*, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2012.
- [32] ROLSKI T., Schmidli H., Schmidt V. y Teugels J. *Stochastic processes for Insurance and finance*, England, Wiley series in probability and statistics: 1998.
- [33] ROSS S. M. *Introduction to Probability Models*, tenth edition, United States of America, Academic Press: 2010.
- [34] SEGERDAHL C. O. When does ruin occur in the collective theory of risk?. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1955:1-2, 22-36
- [35] SCHIFF J. L. *The Laplace transform: theory and applications*, United States of America, Springer: 1999.
- [36] SPIEGEL M. R. *Theory and problems of Laplace transforms*, United States of America, McGRAW-HILL: 1965.
- [37] TAYLOR H. M. y Karlin S. *An introduction to stochastic modeling*, third edition, United States of America, Academic Press: 1998.
- [38] THORIN, O. y Wikstrand, N. Calculation of ruin probabilities when the claim distribution is lognormal. *ASTIN bulletin*, Vol. 9, No. 1, 1997, pp. 231-246.
- [39] WILLMOT G. E. Ruin probabilities in the compound binomial model, *Insurance: Mathematics and Economics* Vol. 12 , issue 2, April 1993, pp. 133-142.
- [40] ZHANG Mao-Jun, Nan Jian-Xia y Wang Sen. Ruin probabilities in the risk model with two compound binomial processes, *Journal of Applied Probability* Vol. 41, No.2 (2008), pp. 191-201.