



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO DISCRETO DE GRAVITACIÓN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

INGRID AMARANTA MEMBRILLO SOLIS

TUTOR:

DR. JUAN MANUEL GARCÍA ISLAS



Ciudad Universitaria

2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Hola de Datos del Jurado**

### 1. Datos de la alumna

Membrillo

Solis

Ingrid Amaranta

15176733

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

098171916

### 2. Datos del tutor

Dr.

Juan Manuel

García

Islas

### 3. Datos del sinodal 1

Dr.

Ricardo

Berlanga

Zubiaga

### 4. Datos del sinodal 2

Dr.

Oscar Alfredo

Palmas

Velasco

### 5. Datos del sinodal 3

Dr.

Luis Octavio

Silva

Pereyra

### 6. Datos del sinodal 4

Dr.

Jerónimo Alonso

Cortez

Quezada

### 7. Datos del trabajo escrito

Modelo discreto de gravitación

69 p

2014

# Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Juan Manuel García Islas por su asesoría y apoyo, pero en especial por brindarme su amistad.

A los miembros del jurado, por sus valiosos comentarios y sugerencias durante la revisión de este trabajo.

A la UNAM, que me ha regalado las alas que ahora tengo para volar.

A la Facultad de Ciencias, por la magia que guardan los pasillos, salones, El Prometeo, sus alumnos y profesores.

A mi familia, por creer siempre en mí y darme todo sin pedir nada a cambio. Gracias Mamá por buscar siempre lo mejor para mí, gracias Greta y Marlene, ¡gracias por ser las mejores hermanas del mundo! Gracias Papá por los momentos felices y por tus palabras. A mis abuelas, Elvira y Paz, a mis abuelos, “Chino” y “Don Agus”, gracias por su ejemplo, ojalá algún día pueda ser como ustedes. A mis inigualables tías, tíos, primas y primos, quienes han estado en todo momento a mi lado, gracias.

A mis maravillosos amigas y amigos de antaño. A mis médicos, biólogos, ingenieros y químicos que me han regalado horas inigualables de risas y alegrías, y quienes con su inconmensurable cariño han sabido apaciguar las tormentas que se han cruzado en mi camino.

A los estupendos amigos que conocí en la carrera, porque sin esas noches de trabajo, de charlas, de café, de música, de risas, de llanto, mi paso por la Facultad de Ciencias no sería tan inolvidable, tan entrañable.

Al amigo que estuvo conmigo cuando comencé a escribir esta historia, pues este período tan importante de mi vida no sería lo que es sin aquellas horas de pláticas y discusiones, de bromas y risas. Gracias.

A Nikolas, por cuidar tan amorosamente de mí al final de este recorrido. Gracias Schatzi.

Y a la vida, gracias, por darme tanto.

Dedicado  
a la  
alegría de vivir

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Triangulación de variedades</b>	<b>9</b>
1.1. Simplejos . . . . .	9
1.2. Complejos simpliciales . . . . .	12
1.3. Triangulaciones . . . . .	15
<b>2. Gravitación en espacios simpliciales</b>	<b>17</b>
2.1. Geometría en superficies . . . . .	17
2.2. Curvatura en variedades simpliciales . . . . .	25
2.3. Ecuaciones de campo en espacios simpliciales . . . . .	28
<b>3. Gravitación cuántica en 3-variedades</b>	<b>30</b>
3.1. El modelo de Ponzano-Regge . . . . .	31
3.2. Tensores diagramáticos . . . . .	32
3.3. Movimientos de Reidemeister . . . . .	38
3.4. Redes de espin . . . . .	39
3.5. Las redes de espin y el modelo semiclásico . . . . .	49
<b>Apéndices</b>	<b>50</b>
<b>A. Geometría en variedades</b>	<b>51</b>
<b>B. Grupo Fundamental</b>	<b>61</b>
<b>C. Mecánica cuántica y gravitación</b>	<b>63</b>
C.1. La acción clásica . . . . .	63
C.2. La integral de trayectoria en mecánica cuántica . . . . .	64
C.3. Ecuaciones de campo de Einstein . . . . .	66

*ÍNDICE GENERAL*

6

**BIBLIOGRAFÍA**

**67**

# Introducción

Actualmente uno de los retos enfrentados por la física es la creación de una teoría que sea capaz de unificar los principios de la mecánica cuántica y de la relatividad general, dos teorías aparentemente incompatibles que han logrado describir con bastante precisión diversos fenómenos físicos.

Por un lado, la mecánica cuántica se ocupa de la descripción de sistemas a escalas muy pequeñas, en donde la discretización de ciertas cantidades físicas, así como el uso de cálculos probabilísticos se vuelven trascendentales. Por otro, la relatividad general se encarga principalmente del estudio de fenómenos a gran escala; de acuerdo con esta teoría, el espacio físico, denominado espacio-tiempo, puede ser modelado a través de una variedad de Lorentz 4-dimensional, y su deformación o curvatura es lo que da origen a la gravedad.

Como una primera aproximación que conduzca a la unificación de ambas teorías, algunos físicos han propuesto comenzar con la discretización del espacio-tiempo y emplear posteriormente algunas herramientas de la mecánica cuántica. Así, el objetivo del presente trabajo es indagar en el desarrollo de modelos matemáticos que permitan avanzar hacia la formulación de una teoría de gravitación cuántica.

El Capítulo 1 es una introducción a los conceptos básicos que servirán para modelar el espacio-tiempo. De esta forma, en el primer capítulo se definen los conceptos de simplejo, complejo simplicial, triangulación y poliedro, ya que el espacio-tiempo es descrito en capítulos posteriores como un espacio simplicial (discreto).

En el Capítulo 2 se discute el modelo propuesto por Regge [13] para



desarrollar la Teoría de la Relatividad General o de gravitación en espacios simpliciales. Para ello se comienza con la revisión de algunos conceptos básicos de geometría sobre superficies y se describe el modelo que permite calcular la curvatura de un espacio-tiempo discreto en 2 dimensiones. Al final de este capítulo se hace una generalización para determinar la curvatura de un espacio-tiempo discreto  $n$ -dimensional, y con ello obtener ecuaciones análogas a las ecuaciones de campo de Einstein.

En el Capítulo 3 se discute un modelo cuántico de gravitación en 3 dimensiones basado en los trabajos desarrollados por Penrose [11], y por Ponzano y Regge [12]. Este modelo se apoya en algunos conceptos de la mecánica cuántica junto con principios combinatorios. Para desarrollar el modelo se parte de la descripción de los tensores diagramáticos y la construcción de las redes de espín, que serán los bloques constructores de los espacios discretos. Las coloraciones o estados admisibles de las redes de espín se definen posteriormente con el propósito de desarrollar la versión discreta de la integral de trayectorias en gravitación. Al final del capítulo se verá que bajo un cierto límite, la evaluación de la red de espín conocida como *símbolo*  $\{6j\}$  deriva prácticamente en la versión discreta de la acción  $S$  en la Teoría de la Relatividad General.

# Capítulo 1

## Triangulación de variedades

En este capítulo se introducirán algunos conceptos que servirán para desarrollar el modelo discreto de gravitación en los capítulos posteriores. Las referencias correspondientes a este capítulos son [1], [2] y [3]. Se comenzará definiendo los conceptos de complejo simplicial, triangulación, poliedros y variedad simplicial. Se verá que los complejos simpliciales son objetos geométricos formados por bloques denominados simplejos, los cuales pueden ser puntos, líneas, triángulos, tetraedros y sus correspondientes análogos de dimensión superior. Un espacio topológico  $M$  se dirá triangulable si es homeomorfo al espacio topológico generado por un complejo simplicial, y el complejo simplicial junto con el correspondiente homeomorfismo se denominará triangulación. A los espacios topológicos triangulables se les denominará poliedros. Si además el espacio topológico es una variedad entonces se le denominará variedad simplicial.

### 1.1. Simplejos

**Definición 1.1.1.** Un conjunto  $\{x_0, \dots, x_p\}$  de puntos en  $\mathbb{R}^n$  es *geoméricamente independiente* si para cada escalar  $c_i \in \mathbb{R}$  las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^p c_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p c_i x_i = 0 \quad (1.1)$$

implican que  $c_0 = c_1 = \dots = c_p = 0$ . Es claro que el conjunto que consiste en un solo punto es geoméricamente independiente y en general,  $\{x_0, \dots, x_p\}$  es

geoméricamente independientes si y sólo si los vectores  $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$  son linealmente independientes en el sentido del álgebra lineal.

**Definición 1.1.2.** Dado un conjunto geoméricamente independiente  $\{x_0, \dots, x_p\}$ , se define el  $p$ -plano generado por estos puntos como el conjunto que consiste en todos los puntos  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$x = \sum_{i=0}^p c_i x_i$$

para algunos escalares  $c_i \in \mathbb{R}$  y con  $\sum_{i=0}^p c_i = 1$ . Puesto que los puntos  $x_i$  son geoméricamente independientes, los escalares  $c_i \in \mathbb{R}$  están determinados de manera única para cada  $x$ . Nótese que cada punto  $x_i$  pertenece al plano  $P$ . El plano  $P$  también puede ser descrito como el conjunto de puntos tales que

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^p c_i (x_i - x_0) \quad (1.2)$$

para algunos escalares  $c_i$ .

**Definición 1.1.3.** Una transformación afín  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  es un mapeo que resulta de la composición de una traslación seguida de una transformación lineal no singular. Si  $T$  es afín, es inmediato de la definición que  $T$  preserva conjuntos geoméricamente independientes, y que lleva el plano generado por  $x_0, \dots, x_p$  al plano generado por  $T(x_0), \dots, T(x_p)$ .

**Definición 1.1.4.** Sean  $\{x_0, \dots, x_p\}$   $p + 1$  puntos de  $\mathbb{R}^n$  geoméricamente independientes. Se define el  $p$ -simplejo  $\sigma^p \equiv \langle x_0, \dots, x_p \rangle$  con vértices  $x_0, \dots, x_p$  como el conjunto de puntos  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$x = \sum_{i=0}^p c_i x_i \quad \text{con} \quad c_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p c_i = 1 \quad (1.3)$$

Los números  $c_0, \dots, c_p$  están determinados de manera única para cada  $x$  y se denominan *coordenadas baricéntricas* del punto  $x$  en  $\sigma^p$  con respecto a  $x_0, \dots, x_p$ .

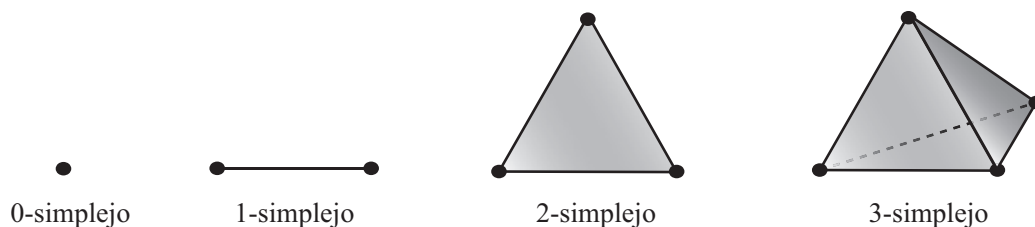


Figura 1.1: Los simplejos de dimensión 0, 1, 2 y 3.

**Ejemplo 1.1.1.**

(a)  $\langle x_0 \rangle = \{x_0\}$ , luego un punto es un 0-simplejo.

(b) Si  $x_0 \neq x_1$  entonces

$$\langle x_0, x_1 \rangle = \left\{ cx_0 + (1 - c)x_1 \mid 0 \leq c \leq 1 \right\}.$$

Así, un 1-simplejo es un segmento de recta con extremos  $x_0$  y  $x_1$ .

(c) Si  $x_0, x_1, x_2$  no son puntos colineales entonces

$$\langle x_0, x_1, x_2 \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^2 c_i x_i \mid 0 \leq c_i \leq 1, \sum_{i=0}^2 c_i = 1 \right\}$$

luego un 2-simplejo es el triángulo y su interior con vértices  $x_0, x_1, x_2$ .

Recordando que un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice *convexo* si para cada par  $x, y \in A$ , el segmento de línea que los une pertenece a  $A$ , entonces todo  $p$ -simplejo es un conjunto compacto y convexo de  $\mathbb{R}^n$ , y es igual a la intersección de todos los conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $x_0, x_1, \dots, x_p$ . El número  $p$  es llamado la *dimensión* de  $\sigma$ .

**Definición 1.1.5.** Se define el  $p$ -simplejo abierto asociado a  $\sigma^p$ , denotado por  $o(\sigma^p)$ , como el conjunto de puntos

$$o(\sigma^p) = \sum_{i=0}^p c_i x_i \quad \text{con} \quad c_i > 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p c_i = 1.$$

Al simplejo abierto  $o(\sigma)$  a veces se le llama el interior de  $\sigma$ .

**Definición 1.1.6.** Una cara de un  $p$ -simplejo es siempre cualquier simplejo cuyos vértices son un subconjunto de  $\{x_0, \dots, x_p\}$ . Las caras distintas del mismo simplejo  $\sigma^p$  se denominan caras propias. Las 0-caras o bien caras de dimensión cero se denominan vértices, las 1-caras se llaman aristas, y las caras de dimensión  $p-1$  se denominan caras frontera. A la unión de las caras propias de un simplejo  $\sigma^p$  se denomina *frontera* de  $\sigma^p$  y se denota como  $\partial\sigma^p$ .

## 1.2. Complejos simpliciales

**Definición 1.2.1.** Un *complejo simplicial*  $K$  es una colección de simplejos en  $\mathbb{R}^n$  tales que si  $\sigma_1^p \in K$  entonces todas las caras de  $\sigma_1^p$  también están en  $K$ , y si  $\sigma_1^p, \sigma_2^q \in K$  entonces  $\sigma_1^p \cap \sigma_2^q$  es cara de ambos o es vacío.

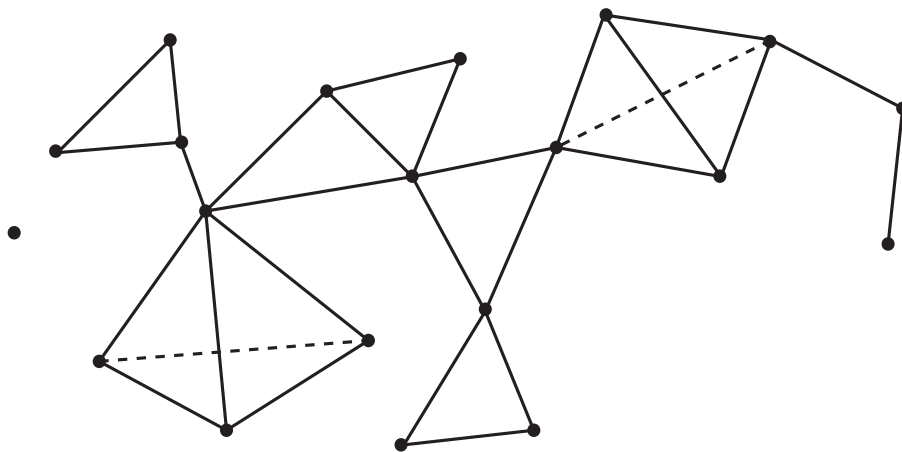


Figura 1.2: Complejo simplicial.

### Ejemplo 1.2.1.

- (a) La colección  $K_1$  que consiste de un 2-simplejo y sus caras, es un complejo simplicial. La colección  $K_2$  que consiste de dos 2-simplejos con una arista en común, junto con sus caras, es un complejo simplicial.

- (b) El  $h$ -esqueleto de  $K$  es un complejo simplicial o *subcomplejo*  $K_h \subset K$  que consiste en todos los simplejos de  $K$  de dimensión menor o igual que  $h$ . Por ejemplo, el 0-esqueleto es el conjunto de vértices de  $K$ .
- (c) Sea  $K$  la colección de todos los 1-simplejos  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  y sus vértices, donde  $\sigma_i$  es el 1-simplejo en  $\mathbb{R}^2$  que tiene como vértices  $(0, 0)$  y  $(1, 1/i)$ .

Se define la *dimensión* de  $K$  como el supremo de las dimensiones de los simplejos de  $K$ . Un complejo simplicial  $K$  es finito si tiene un número finito de vértices o equivalentemente, si tiene un número finito de simplejos.

**Definición 1.2.2.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Sea  $|K|$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que es la unión de los simplejos de  $K$ :

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \quad (1.4)$$

Dando a cada simplejo su topología natural como un subespacio topológico de  $\mathbb{R}^n$ , se puede topologizar  $|K|$ , declarando que un subconjunto  $A \in |K|$  sea cerrado en  $|K|$  si y sólo si  $A \cap \sigma^p$  es cerrado en  $\sigma$ , para cada  $\sigma$  en  $K$ . Al espacio topológico  $|K|$  se le denomina el *polítopo o espacio subyacente* del complejo simplicial  $K$ :

Nótese que  $|K|$  puede verse también como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas tales que

$$|K| \ni \mu := \left\{ \sum_{\sigma_i^0 \in K} \mu(\sigma_i^0) \sigma_i^0 \mid 0 \leq \mu(\sigma_i^0) \leq 1, \sum_{\sigma_i^0 \in K} \mu(\sigma_i^0) = 1 \right\} \quad (1.5)$$

de vértices  $\sigma_i^0$  de  $K$ . El conjunto  $\{\mu(\sigma_i^0)\}$  son las *coordenadas baricéntricas* del punto  $\mu$  de  $|K|$ .

**Lema 1.2.1.** Un mapeo  $f : |K| \rightarrow X$ , es continuo si y sólo si la restricción de  $f$  a  $\sigma$  es continua para cada  $\sigma \in K$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Si  $f$  es continua entonces  $f|_{\sigma}$  también lo es, ya que  $\sigma$  es subespacio de  $K$ .

$\Leftarrow$ ) Supóngase que cada mapeo  $f|_{\sigma}$  es continuo. Si  $A$  es un conjunto cerrado de  $X$  entonces,

$f^{-1}(A) \cap \sigma = (f|_{\sigma})^{-1}(A)$ , el cual es cerrado en  $\sigma$  por continuidad de  $f|_{\sigma}$ . Entonces  $f^{-1}(A)$  es cerrado en  $|K|$  por definición.  $\square$

**Lema 1.2.2.**  $|K|$  es Hausdorff.

*Demostración.* Dado  $x_0 \neq x_1$ , existe al menos un vértice  $v$  tal que  $c_v(x_0) \neq c_v(x_1)$ . Escogiendo  $r$  entre estos dos números, entonces los conjuntos  $\{x | c_v(x) < r\}$  y  $\{x | c_v(x) > r\}$  son los requeridos conjuntos abiertos disjuntos.  $\square$

**Lema 1.2.3.** Si  $K$  es finito, entonces  $|K|$  es compacto.

*Demostración.* Si  $K$  es finito, entonces  $|K|$  es una unión finita de subespacios  $\sigma$  compactos, y por lo tanto es compacto.  $\square$

Para estudiar las propiedades locales de  $|K|$ , en algunas ocasiones se usan tres subespacios siguientes:

**Definición 1.2.3.** Si  $v$  es un vértice de  $K$ , la *estrella* de  $v$  en  $K$ , denotada por  $St(v)$ , es la unión de los interiores de todos los simplejos de  $K$  para los cuales  $v$  es un vértice. Su cerradura, denotada por  $\bar{St}(v)$  es llamada la *estrella cerrada* de  $v$  en  $K$ , y es la unión de todos los simplejos para los cuales  $v$  es un vértice, y es un polítopo de algún subcomplejo de  $K$ .

Nótese que mientras la estrella abierta es un subconjunto abierto de  $|K|$ , la estrella es una subcolección de simplejos en el complejo simplicial  $K$ .

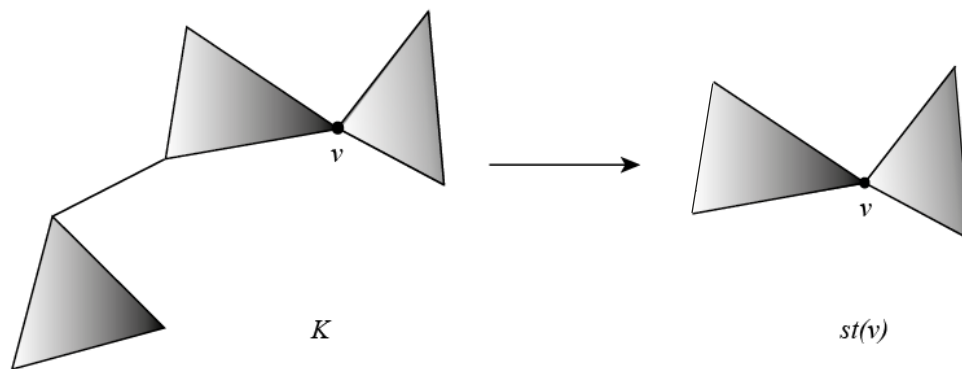


Figura 1.3: Estrella de un vértice

**Definición 1.2.4.** El conjunto  $\bar{St}(v) - St(v)$  es llamado la *unión* de  $v$  en  $K$  y se denota por  $Lk v$ .

**Definición 1.2.5.** Sea  $S$  una colección de simplejos en  $K$  complejo simplicial. La *cerradura* de  $S$ ,  $cl(S)$  es el subcomplejo más pequeño de  $K$  que contiene a  $S$ .

### 1.3. Triangulaciones

**Definición 1.3.1.** Una *triangulación* de un espacio topológico  $M$  es un par  $(K, \phi)$  que consiste en un complejo simplicial  $K$  junto con un homeomorfismo  $\phi: |K| \rightarrow M$ .

**Definición 1.3.2.** Un *poliedro* es un espacio topológico  $M$  que admite alguna triangulación. Si  $M$  es una variedad, entonces el poliedro se denomina *variedad simplicial*. Obsérvese que un poliedro puede admitir varias triangulaciones y que cualquier complejo simplicial con  $p+1$  vértices admite una inmersión canónica dentro de un simplejo de dimensión  $p$  y, consecuentemente, dentro de un espacio euclídeo.

**Ejemplo 1.3.1.**

- (a) El intervalo  $[0, 1]$  es un poliedro pues es homeomorfo al 1-simplejo. Otra triangulación de  $[0,1]$  es  $(I_n, f)$  donde  $n$  es un número natural y  $f: |I_n| \rightarrow [0,1]$  se define de manera que  $f(i) = i$  y  $f|_{|\{i,i+1\}|}$  es un homeomorfismo entre  $|\{i, i + 1\}|$  y  $[\frac{i}{n}, \frac{i + 1}{n}]$ .
- (b) Considérese un cilindro cerrado. La subdivisión en la Figura 1.4 (a) no es una triangulación para el cilindro ya que  $T \cap T'$  es  $(P_0, P_1) \cup (P_2)$ . En cambio la subdivisión de la derecha sí es una triangulación, la cual permite definir el complejo simplicial  $K = \{(P_0), \dots, (P_5), (P_0, P_1), \dots, (P_0, P_5), \dots, (P_3, P_4, P_5)\}$ .

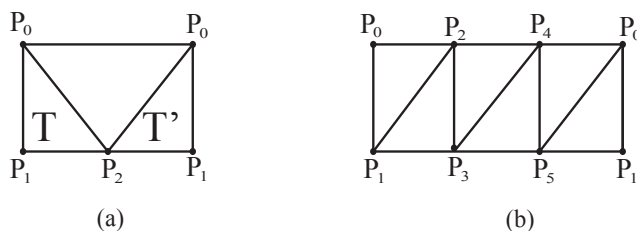


Figura 1.4: Triangulación de un cilindro



- (c) La banda de Möbius y el toro también son poliedros. Una triangulación de estos espacios topológicos se muestra en la figura 1.5

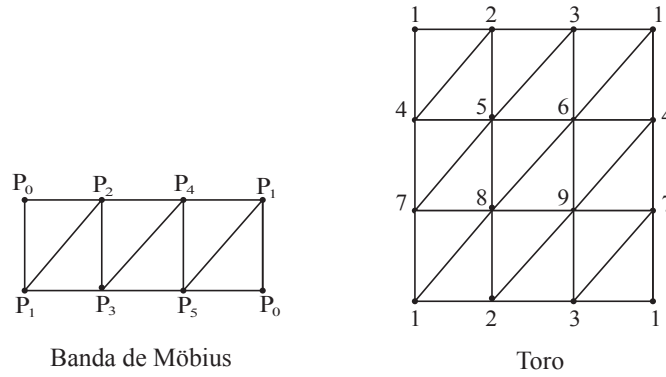


Figura 1.5: Toro y banda de Möbius

De este modo, es posible ver que la estructura de variedades simpliciales corresponde a la discretización de las variedades ordinarias.

En muchos casos, la triangulación de una variedad no se da en un inicio. En su lugar, se genera una variedad “pegando” un conjunto finito de  $p$ -simplejos  $\{\sigma^p\}$ .

## Capítulo 2

# Gravitación en espacios simpliciales

En este capítulo se describe la aproximación matemática desarrollada por Regge para formular las ecuaciones de campo de la relatividad general en espacios simpliciales. Los espacios simpliciales se denominarán *espacios discretos*. Para alcanzar su objetivo, Regge tuvo que desarrollar métodos que le permitieron medir curvaturas en variedades simpliciales, siendo el caso particular para superficies (2-variedades) su primera aproximación. Así, este capítulo comienza con la introducción de algunas nociones de geometría en superficies. Al considerar una superficie como el caso límite de una sucesión de poliedros con un creciente número de caras, cada superficie podrá ser descrita en términos de un apropiado poliedro. La integral de curvatura para cada poliedro se definirá a través del uso de triángulos geodésicos. Para la generalización de los cálculos de Regge en variedades  $n$ -dimensionales se darán una serie de axiomas para la construcción de una métrica en términos del complejo simplicial asociado. Finalmente se utilizará el principio variacional para modelar el espacio-tiempo en espacios simpliciales. Las referencias correspondientes a este capítulo son [3],[5] y [13].

### 2.1. Geometría en superficies

**Definición 2.1.1.** Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si para cada punto  $p \in S$  existe una vecindad abierta  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$ , y un mapeo  $F : U \rightarrow V \cap S$  de un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que

i)  $F$  es diferenciable. Esto significa que si  $F$  se escribe como

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

las funciones  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

ii)  $F(U) = S \cap V$  y  $F : U \rightarrow S \cap V$  es un homeomorfismo y

iii) La matriz jacobiana  $D_q F$  tiene rango 2 para todo punto  $q \in U$  con

$$D_q F = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

**Definición 2.1.2.** El mapeo  $F : U \rightarrow S \cap V$  de la definición anterior es llamada una *parametrización* o un *sistema local de coordenadas* en una vecindad de  $p$ . La vecindad  $V \cap S$  de  $p$  se llama una vecindad coordenada.

**Definición 2.1.3.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular, sea  $p \in S$ . Entonces  $T_p S = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ y una curva parametrizada } \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = X\}$  es llamado el plano tangente de  $S$  en  $p$ . Los elementos del plano tangente son llamados vectores tangentes.

La manera en que se escoja una parametrización  $F$  determina una base  $\{(\partial F/\partial u)(q), (\partial F/\partial v)(q)\}$  de  $T_p S$ . Las coordenadas de un vector  $w \in T_p S$  en la base asociada a la parametrización  $F$  son determinadas como sigue:  $w$  es el vector velocidad  $\alpha'(0)$  de una curva  $\alpha = F \circ \beta$ , donde  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  está dado por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ , con  $\beta(0) = q = F^{-1}(p)$ . Entonces

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}(F \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}F(u(t), v(t))(0) = \frac{\partial F}{\partial u}(q)u'(0) + \frac{\partial F}{\partial v}(q)v'(0) = w$$

**Definición 2.1.4.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular. Un campo normal sobre  $S$  es un mapeo  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que el vector  $N(p)$  es ortogonal a  $T_p S$  para todo  $p \in S$ . Un campo normal sobre  $S$  se dice que es unitario si adicionalmente  $\|N(p)\| = 1$  para todo  $p \in S$ .

**Definición 2.1.5.** Una superficie  $S$  es orientable si existe un campo normal unitario suave sobre  $S$ .

**Definición 2.1.6.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular orientable con campo normal unitario suave  $N$ . Visto como un mapeo entre superficies,  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es llamado *mapeo de Gauss*.

Sea  $p \in S$ . Considérese la diferencial de  $N$  en el punto  $p$ :

$$d_p N : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$$

La diferencial  $d_p N$  de  $N$  en  $p \in S$  es un mapeo lineal de  $T_p S$  a  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ . Puesto que  $T_p S$  y  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$  son planos paralelos,  $d_p N$  puede ser visto como un mapeo lineal sobre  $T_p S$ . El mapeo  $d_p N : T_p S \rightarrow T_p S$  opera de la siguiente forma: Para cada curva parametrizada  $\alpha(t)$  en  $S$  con  $\alpha(0) = p$ , considérese la curva parametrizada  $N \circ \alpha(t) = N(t)$  en la esfera  $\mathbb{S}^2$ ; esto es la restricción del campo normal a la curva  $\alpha(t)$ . El vector tangente  $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$  es un vector en  $T_p(S)$ .  $d_p N$  mide la velocidad a la cual cambia el vector normal  $N$ , restringido a la curva  $\alpha(t)$  a  $t = 0$ .

**Definición 2.1.7.** Sea  $p \in S$  y sea  $d_p N : T_p S \rightarrow T_p S$  la diferencial del mapeo de Gauss. El determinante de  $d_p N$  es la *curvatura Gaussiana*  $K$  de  $S$  en el punto  $p$ .

**Definición 2.1.8.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular. Un *campo vectorial* sobre  $S$  es un mapeo  $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Definición 2.1.9.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular, y sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva parametrizada. Un *campo vectorial sobre  $S$  a lo largo de  $\alpha$*  es un mapeo  $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $v(t) \in T_{\alpha(t)} S$  para toda  $t \in I$ .

**Definición 2.1.10.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular, sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva parametrizada y sea  $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial diferenciable sobre  $S$  a lo largo de  $\alpha$ . Para cada punto  $p \in S$  sea  $\Pi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p S$  la proyección tangencial, es decir si  $N(p)$  es un vector normal unitario sobre  $S$  en el punto  $p$ , entonces

$$\Pi_p(X) = X - \langle X, N(p) \rangle N(p)$$

Entonces

$$\frac{D}{dt} w(t) := \Pi_{\alpha(t)}(w'(t)) \quad (2.1)$$

$t \in I$ , es llamada la *derivada covariante* de  $w$ .  $D/dt(w(t))$  es un campo vectorial sobre  $S$  a lo largo de  $\alpha$ .

**Definición 2.1.11.** Sea  $S$  una superficie regular,  $v$  un campo vectorial diferenciable sobre  $S$  y  $w_p \in T_p S$  un vector tangente. Entonces la derivada covariante  $D_{w_p} v \in T_p S$  se define como sigue:  
 escoger una curva parametrizada  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  con  $\alpha'(0) = w_p$  y defínase

$$D_{w_p} v := \frac{D}{dt}(v \circ \alpha)(0) \quad (2.2)$$

**Definición 2.1.12.** Un campo vectorial  $w$  a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  se dice *paralelo* si  $Dw/dt = 0$  para todo  $t \in I$ .

**Definición 2.1.13.** Una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  es una geodésica en  $t \in I$  si el campo de sus vectores tangentes  $\alpha'(t)$  es paralela a lo largo de  $\alpha$  en  $t$ . Esto es:

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0; \quad (2.3)$$

$\alpha$  es una geodésica parametrizada si es una geodésica para toda  $t \in I$ .

**Definición 2.1.14.** Sea  $w$  un campo vectorial diferenciable de vectores unitarios a lo largo de la curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  sobre una superficie orientada. Puesto que  $w(t)$ ,  $t \in I$  es un campo vectorial unitario,  $(dw/dt)(t)$  es normal a  $w(t)$ , y por lo tanto

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \times w(t)).$$

El número real  $\lambda = \lambda(t)$ , denotado por  $[Dw/dt]$  es llamado el valor algebraico de la derivada covariante de  $w$  en  $t$ .

**Definición 2.1.15.** Sea  $c$  una curva regular orientada contenida en una superficie  $S$  y sea  $\alpha(s)$  la parametrización por longitud de arco de  $c$  en una vecindad de  $p \in S$ . El valor algebraico de la derivada covariante  $\frac{D}{ds}\alpha'(s) = k_g$  de  $\alpha'(s)$  en  $p$  es llamada la *curvatura geodésica* de  $c$  en  $p$ .

Las geodésicas, que son curvas regulares, son caracterizadas entonces como curvas cuya curvatura geodésica es cero. El siguiente teorema es presentado sin demostración; una exposición de ésta puede consultarse por ejemplo en [5].

**Teorema 2.1.1.** (*Teorema Local de Gauss-Bonnet*) Sea  $x : U \rightarrow S$  una parametrización ortogonal de una superficie orientada  $S$  donde  $U \subset \mathbb{R}^2$  es

homeomorfo a un disco abierto y  $x$  es compatible con la orientación de  $S$ . Sea  $R \subset x(U)$  una región simple de  $S$  tal que su frontera es  $\alpha(I)$ . Asuma que  $\alpha$  es orientada positiva, parametrizada por longitud de arco  $s$ , y sean  $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$  y  $\theta_0, \dots, \theta_k$  los vértices y los ángulos externos de  $\alpha$  respectivamente. Entonces

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi$$

donde  $k_g$  es la curvatura geodésica de los arcos regulares de  $\alpha$  y  $K$  es la curvatura Gaussiana de  $S$ .

Una aplicación del teorema de Gauss-Bonnet es la siguiente. Sea  $T$  un triángulo geodésico (esto es, los lados de  $T$  son geodésicas) en una superficie orientada  $S$ . Sean  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  los ángulos externos de  $T$  y sean  $\varphi_1 = \pi - \theta_1$ ,  $\varphi_2 = \pi - \theta_2$ ,  $\varphi_3 = \pi - \theta_3$  los ángulos interiores. Por el teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_T K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi$$

Entonces,

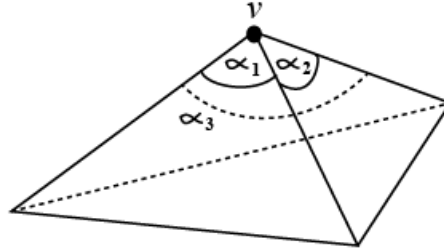
$$\iint_T K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i) = -\pi + \sum_{i=1}^3 \varphi_i$$

En los siguientes párrafos se describirá el método desarrollado por Regge para describir la curvatura en poliedros. Dado un complejo simplicial  $X$  2-dimensional, se usará la notación:

$$\begin{aligned} v(X) &= \text{número de vértices de } X \\ e(X) &= \text{número de aristas de } X \\ f(X) &= \text{número de caras de } X \end{aligned}$$

**Definición 2.1.16.** Sea  $S$  una superficie triangulada  $(X, \phi)$  y sea  $v$  un vértice de  $X$ . Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  los ángulos interiores en los vértices  $v$  en todas las caras (triángulos)  $f$  de  $X$  para los cuales  $v$  es un vértice. Entonces

$$\varepsilon_v := 2\pi - \sum_{i=1}^k \alpha_i \text{ se denomina defecto de ángulo de } S \text{ en } v.$$

Figura 2.1: Ángulos interiores en el vértice  $v$ 

Será necesario para definir la integral de curvatura de un poliedro o de una superficie compacta triangulada utilizar triángulos geodésicos. Si la geometría dentro del triángulo no es euclídea, por el teorema local de Gauss-Bonnet se tiene que  $\alpha + \beta + \gamma \neq \pi$ , donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son los ángulos internos de  $t$ . La integral de curvatura Gaussiana  $\varepsilon_t$  se puede definir como  $\varepsilon_t = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ . Si  $t$  se reduce hasta convertirse en un punto  $p$  y el límite  $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_t}{A_t}$  existe, entonces dicho límite se puede tomar como la definición de la curvatura local gaussiana en  $p$ .

Por otro lado, considérese la definición original de la integral de curvatura Gaussiana  $\varepsilon_t$  de  $t$

$$\varepsilon_t = \int_t K(p) dA \quad (2.4)$$

donde  $dA$  es el elemento de área de la superficie,  $K(p)$  es la curvatura gaussiana en el punto  $p$  y la integración se lleva a cabo dentro de  $t$ .

Considérese además una superficie  $S$  sobre la cual se traza un triángulo  $t$  geodésico con ángulos internos  $\alpha, \beta, \gamma$ . Si  $t$  yace completamente sobre una de las caras de  $M$ , se tiene que  $\varepsilon_t = 0$  ya que en este caso  $T$  es plano. Este mismo resultado se obtiene si  $t$  no contiene ningún vértice de  $M$  y sólo una arista lo cruza, pues la vecindad de un punto en una arista es homeomorfa a una vecindad en el plano. Por lo tanto  $K(p) = 0$  si  $p$  no es un vértice. Si  $t$  contiene un sólo vértice  $V$ , la curvatura de  $t$  no dependerá de la forma explícita de  $t$  sino únicamente de  $V$ . Es decir, la curvatura de  $t$  es una constante característica de la deficiencia de  $V$ ,  $\varepsilon_t = \varepsilon_V$  y se obtiene a través

de la fórmula

$$\varepsilon_V = 2\pi - \sum_i \alpha_i$$

donde  $i$  suma sobre todos los ángulos  $\alpha_i$  en el vértice  $v$ . Si varios vértices  $V_1, \dots, V_n$  están dentro de  $t$  se tiene que

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{V_1} + \dots + \varepsilon_{V_n} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{V_i}$$

Los resultados anteriores pueden condensarse en la fórmula original de la integral de curvatura Gaussiana, siempre y cuando se considere la función  $K(p)$  como una distribución de Dirac con los vértices como soporte, es decir  $K(p) \sim \sum_V \delta(p - V)$ . Así, con todo lo anterior se obtiene la relación entre la curvatura del poliedro y la deficiencia de sus vértices.

Si  $S$  es una superficie cerrada, el teorema global de Gauss Bonnet [5] une la curvatura de  $S$  con la característica de Euler  $\chi(S) = 2 - 2g$

$$\int_M K(p) dA = 2\pi(2 - 2g) \quad (2.5)$$

donde  $g$  es el número de asas de la superficie  $S$ ,  $g = 0$  para una esfera y  $g = 1$  para un toro. Por lo tanto en el caso de un poliedro, la deficiencia de ángulo en un vértice y la característica de Euler están conectadas de tal manera que es posible obtener la fórmula de Euler-Poincaré, que relaciona el número de asas del poliedro con el número de aristas, vértices y caras. Si se denota por  $\alpha_{f_n}$  el ángulo interno de la cara  $f$  con vértice  $n$ , se tiene que

$$\sum_f \alpha_{f_n} = 2\pi - \varepsilon_n$$

donde la suma se realiza sobre las caras  $f$  que tengan a  $n$  como vértice. Por otro lado, es claro que

$$\sum_n \alpha_{f_n} = \pi$$

donde la suma se lleva a cabo sobre todos los vértices que pertenecen a la cara  $f$ . La suma  $\sum_{f_n} \alpha_{f_n}$  puede llevarse a cabo de dos maneras distintas, sumando primero sobre todas las caras o bien sumando primero sobre todos



los vértices. Con el primer método y empleando el teorema de Gauss-Bonnet se obtiene:

$$\sum_{f_n} \alpha_{f_n} = 2\pi v - 2\pi(2 - 2g)$$

con el segundo método

$$\sum_{f_n} \alpha_{f_n} = \sum_n \pi = \pi f$$

Dado que ambas maneras deben conducir a resultados iguales se tiene que  $f = 2(v - 2 + 2g)$ . Como las caras de  $S$  son triángulos, se tiene que  $2e = 3f$ , donde  $e$  denota las aristas. Así combinando estas dos ecuaciones se obtiene la fórmula de Euler para poliedros:

$$v - e + f = 2 - 2g. \quad (2.6)$$

### Ejemplo 2.1.1.

La triangulación más simple de  $\mathbb{S}^2$  es un tetraedro. Por lo tanto, la deficiencia en cada vértice es  $\varepsilon_V = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \pi$ . Esto da una curvatura de  $4\pi$  que es el mismo valor que se obtiene al calcular la integral de curvatura de una esfera de radio  $R$  y  $K = 1/R^2$ ,  $\varepsilon_S = \int_S K dA = 4\pi$ .

Resulta importante notar que la geometría intrínseca de una superficie compacta  $S$  está completamente determinada por la matriz de conexión y la longitud de las aristas. La matriz de conexión es esencialmente una lista de todas las caras, aristas y vértices de  $S$  y una lista de sus mutuas relaciones. Es decir, esta matriz especifica qué vértices y aristas pertenecen a una cara dada. Así, la matriz de conexión provee la información topológica necesaria para la construcción de  $S$ .

Una vez que se da una división de  $S$  en triángulos, el conocimiento de las longitudes de todas las aristas de  $S$  implican el conocimiento de todos los ángulos interiores a las caras y, en consecuencia, se conocen las deficiencias de ángulo y finalmente con ello la curvatura intrínseca de  $S$ . La noción de una red compuesta de simplejos reemplaza por tanto la noción de una red coordinada. Si el número de simplejos de la superficie se incrementa, la curvatura local Gaussiana en  $p$  se aproximará a una función continua de la densidad de los vértices  $\rho$  y su deficiencia  $\varepsilon$ ,  $K(p) = \rho\varepsilon$ , siempre que la variación de este producto dentro del triángulo sea pequeña.

## 2.2. Curvatura en variedades simpliciales

En el Apéndice A se hace una revisión sobre algunos conceptos relacionados con la geometría de variedades Riemannianas. Estos conceptos serán útiles para entender el concepto desarrollado en el presente capítulo sobre curvatura en espacios simpliciales o curvatura discreta, así como el modelo de gravitación en espacios discretos.

Para generalizar el concepto de curvatura discreta sobre poliedros  $n$ -dimensionales, se empleará ahora la noción de transporte paralelo, es decir, un mapeo ortogonal entre el espacio tangente  $T_P M$  en el punto  $P$  y el espacio tangente de  $T_Q M$  de otro punto  $Q$ , siempre que los puntos  $P$  y  $Q$  estén conectados por una trayectoria  $a$  en  $M$ . Si en particular  $P = Q$  y  $a$  es un lazo, el transporte paralelo mapea  $T_P M$  sobre sí mismo. Este mapeo es una rotación de  $T_P M$  alrededor de  $P$  por algún ángulo  $\varepsilon(a)$ . Puesto que la rotación es proporcional a la curvatura, se tiene que

$$\varepsilon(a) = \int_a K(P) dA$$

y por tanto  $\varepsilon(t) = \varepsilon_t$ . La función  $\varepsilon$  es aditiva de los lazos, es decir, si  $a$  y  $b$  son lazos, entonces  $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$ . Siempre que un vértice yace sobre el lazo, el transporte paralelo no se puede definir sin ambigüedades. Si un lazo  $a$  puede ser deformado continuamente a un lazo  $b$  manteniendo  $P$  fijo y evitando la situación mencionada anteriormente entonces  $\varepsilon(a) = \varepsilon(b)$  y se escribe  $a = b$ . Así, se considerará la homotopía de equivalencia sólo en  $M \setminus w$  donde  $w$  denota el conjunto de todos los vértices en  $M$ . De esta manera, el grupo fundamental de  $M \setminus w$ , denotado por  $\pi(M \setminus w)$ , es no trivial si  $w \neq \emptyset$ . La existencia de un conjunto de curvatura  $w$  implica la existencia de clases de equivalencia en el conjunto de lazos con un punto final dado  $P$ .

**Definición 2.2.1.** El *grupo fundamental* de un espacio topológico  $M$  basado en un punto  $P$  es el conjunto de clases de homotopía de curvas cerradas (lazos) con la operación producto entre las clases. Una descripción más amplia del grupo fundamental de  $M \setminus w$  se encuentra en el Apéndice B.

Para el caso de una variedad  $M$   $n$ -dimensional, se definirán generalizaciones de poliedros donde la curvatura depende del  $(n - 2)$ -*esqueleto*  $\subset M$ . Se comienza con una descomposición de  $M$  en simplejos. Esto determina la

topología del espacio, pero no la métrica; ésta tiene que ser definida de la siguiente forma:

**Definición 2.2.2.** Se define una métrica sobre variedades simpliciales de acuerdo con los siguientes axiomas:

1. La métrica en el interior de cualquier simplejo  $p$ -dimensional cerrado  $\sigma^p$  es euclídea. Así, la distancia entre dos puntos dentro de  $\sigma^p$  se obtiene definiendo un sistema de coordenadas, y dando los puntos coordenados de los vértices de  $\sigma^p$ .
2. En la métrica de  $\sigma^p$ , la frontera de  $\sigma^p$  se descompone en  $p + 1$  simplejos cerrados  $\sigma^{p-1}$  y dichos simplejos son planos.
3. Si un simplejo  $\sigma^{p-1}$  es una cara de  $\sigma^p$  y  $\tau^p$ , la distancia entre dos puntos de  $\sigma^{p-1}$  es la misma en los sistemas de coordenadas de  $\sigma^p$  y  $\tau^p$ .
4. Si  $P \in \sigma^p$ ,  $P' \in \tau^p$  y  $P, P'$  están lo suficientemente cerca de  $\sigma^{p-1}$ , se define la distancia  $PP'$  como  $d(P, P') = \inf_{Q \in \sigma^{p-1}} PQ + QP'$ .

Con esta definición, la métrica es euclídea también en el interior de  $\sigma^{p-1}$  excepto quizás para el  $(p - 2)$ -esqueleto de  $\sigma^{p-1}$ . El problema con  $\sigma^{p-2}$  es que, con estos axiomas, no es posible definir una métrica, ya que comenzando con la métrica sobre  $\sigma^{p-1}$  no se asegura que en su frontera la métrica seguirá estando bien definida. Puede suceder que la métrica definida sobre otros  $\sigma^{p-1}$  adyacentes sea diferente, de manera que la métrica sería ambigua. Esta definición es local pero es suficiente para unir simplejos de manera suave. La variedad será entonces euclídea en todas partes fuera de la unión  $w$  de todas las fronteras de los  $(p - 2)$ -simplejos.

En una  $3 - variedad$ ,  $M_3$ , el esqueleto está formado por 1-simplejos, a los que también se les puede denominar huesos. Cada hueso se conecta con dos  $0 - simplejos$ . Si la longitud de los huesos está dado, la estructura geométrica de los simplejos y de  $M_3$  está determinada y en particular sus ángulos diédricos pueden ser calculados a partir de fórmulas trigonométricas esféricas. Si no existiera curvatura sobre un hueso, entonces la suma de todos los ángulos diédricos debería ser  $2\pi$ .

La transición de un espacio esqueleto hacia una variedad diferenciable puede realizarse incrementando la densidad  $\rho$  de huesos mientras que al mis-

mo tiempo se mantiene la curvatura local,  $\rho\epsilon$ , variando lentamente. Lo anterior ya se ha mostrado para 2-variedades. Aquí se procederá de manera similar sobre una  $n$ -variedad  $M_n$   $n > 2$ .

Considérese un haz de huesos paralelos sobre  $M_3$ , el cual induce una pequeña curvatura. Sea  $U$  el vector unitario paralelo a los huesos. Pruébese la curvatura transportando un vector  $V$  alrededor de un pequeño lazo de área  $\Sigma$  y vector unitario normal  $\vec{n}$ ,  $\vec{\Sigma} = \Sigma \vec{n}$ . Entonces, el vector  $V$  sería rotado alrededor del vector  $U$  por un ángulo  $\theta = N\epsilon$ , donde  $N$  es el número de huesos dentro del lazo y se asume que cada hueso contribuye con la misma deficiencia  $\epsilon$ . Asumiendo una densidad uniforme de huesos y que  $\vec{\Sigma}$  es paralelo a  $U$ , se tiene que  $N = \rho(U, \vec{\Sigma})$ , siendo el número de huesos que atraviesan el lazo  $\sigma = U$ . Supóngase que la rotación es infinitesimal, de modo que a primer orden, el vector rotado puede ser expresado como  $V' = V + \theta(U \times V)$ . Entonces, para el cambio del vector se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta V &= \rho\epsilon(U, \Sigma)(U \times V) \\ \Delta V^\alpha &= (\rho\epsilon U_\kappa \Sigma^\kappa)(\epsilon^{\alpha\beta\gamma} U_\beta V_\gamma)\end{aligned}$$

con  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$  igual a 1 si  $(\alpha\beta\gamma)$  es una permutación par de  $(1, 2, 3)$ ,  $-1$  si es una permutación impar y 0 si es índice repetido. Insertando  $\delta_\kappa^\tau = (1/2)\epsilon^{\delta\omega\tau}\epsilon^{\alpha\gamma\kappa}$ , y definiendo  $U_{\alpha\gamma} = \epsilon_{\alpha\gamma\beta}U^\beta$  y  $\Sigma^{\delta\omega} = \epsilon^{\delta\omega\tau}\Sigma_\tau$  se obtiene

$$\Delta V^\alpha = \frac{1}{2}\rho\epsilon U^{\gamma\alpha} U_{\delta\omega} \Sigma^{\delta\omega} V_\gamma. \quad (2.7)$$

Por otro lado, se conoce que si se transporta paralelamente un vector  $V$  a lo largo de una curva cerrada, la desviación  $\Delta V$  del vector inicial puede ser medida a través de la curvatura [3]:

$$\Delta V^\mu = V^\kappa R_{\kappa\lambda\nu}^\mu \epsilon^\lambda \delta^\nu \quad (2.8)$$

donde  $\epsilon^\lambda \delta^\nu = (1/2)\epsilon^{\lambda\nu\tau}\Sigma_\tau$ . Comparando las ecuaciones (2.8) y (2.7) se obtiene

$$R_{\mu\sigma\alpha\beta} = \rho\epsilon U_{\mu\sigma} U_{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

que tiene todas las propiedades de simetría del tensor de Riemann, como la primera identidad de Bianchi  $U_{\mu\sigma} U_{\alpha\beta} + U_{\mu\alpha} U_{\beta\sigma} + U_{\mu\beta} U_{\sigma\alpha} = 0$  y con  $U_{\mu\sigma} U^{\mu\sigma} = 2$  se tiene que el escalar de curvatura  $R = 2\rho\epsilon$  es independiente de la dimensión  $n$  del espacio.

### 2.3. Ecuaciones de campo en espacios simpliciales

La manera más directa de aproximarse al espacio-tiempo a través de un espacio simplicial es usando el principio variacional calculado sobre el esqueleto y variándolo sobre las longitudes de todas los 1-simplejos (tanto el Principio variacional o de mínima acción, así como su aplicación en la obtención de las ecuaciones de Einstein son discutidos en el Apéndice C). La acción de Einstein Hilbert viene dada por la ecuación

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int R d^4x \sqrt{-g} \quad (2.10)$$

donde  $g = \det(g_{\mu\nu})$  es el determinante del tensor métrico y  $R$  es el escalar de curvatura. Por otra parte, recordando la discusión respecto a la métrica se debe notar que no hay una contribución que provenga del interior de los 3-simplejos y 4-simplejos. Esto significa que  $R$  es una distribución con soporte  $w$ . Por tanto, la acción  $\mathcal{S}_{Regge}$  se puede expresar en términos de las deficiencias de ángulo,  $\epsilon_n$ , y las áreas de los huesos, los cuales son etiquetados por  $n$ :

$$\mathcal{S}_{Regge} = \sum_n F(\sigma_n^2) \quad (2.11)$$

La función  $F$  es la misma función para todos los huesos. Puesto que el hueso es homogéneo,  $F(\sigma_n^2)$  es proporcional al área del hueso  $F(\sigma_n^2) = L_n f(\epsilon_n)$ , donde  $f$  depende únicamente de  $\epsilon_n$ . El simplejo  $\sigma_n^2$  puede ser considerado como la superposición de dos huesos  $\sigma_{n'}^2$  y  $\sigma_{n''}^2$  con la misma forma y área y tales que  $\epsilon_n = \epsilon_{n'} + \epsilon_{n''}$ . Se sigue que  $f(\epsilon_n) = f(\epsilon_{n'}) + f(\epsilon_{n''})$ . La última condición implica que  $f(\epsilon) = C\epsilon$ , donde  $C$  es una constante. Este resultado tiene que compararse con  $\mathcal{S} = \frac{1}{8\pi} \int \rho \epsilon d^4x$  en el límite discutido en la sección 2.3 en donde el producto  $\rho\epsilon$  se varía lentamente, y para un haz de huesos idénticos y con áreas iguales. De la comparación, se obtiene que  $C = \frac{1}{8\pi}$  y

$$\mathcal{S} = \frac{1}{8\pi} \sum_n \epsilon_n L_n \quad (2.12)$$

En una  $m$ -variedad  $M_m$  el resultado correspondiente es

$$\mathcal{S} = \frac{1}{8\pi} \sum_n \epsilon_n L_n^m \quad (2.13)$$

donde  $L_n^m$  es la medida  $(m - 2)$  dimensional de  $\sigma_{m-2}^n$ .

Puesto que las longitudes  $l_p$  de todos los  $\sigma_1^p$  simplejos contienen la misma información que el tensor métrico, el siguiente paso es obtener la variación de  $\mathcal{S}$  respecto a esas longitudes. Regge probó en el apéndice de [13] que es posible llevar a cabo variaciones de  $\mathcal{S}$  manteniendo las deficiencias  $\epsilon_n$  constantes, obteniéndose para una variedad  $M_4$  un conjunto de ecuaciones de campo (análogas a las ecuaciones de Einstein) de la forma:

$$\sum_n \epsilon_n \frac{\partial L_n}{\partial l_p} = 0 \quad (2.14)$$

donde  $p$  corre sobre todos los 1-simplejos en la descomposición de la variedad. Utilizando la ley de cosenos  $l_p^2 = l_{p'}^2 + l_{p''}^2 - 2l_{p'}l_{p''}\cos\theta_{pn}$  para el ángulo  $\theta_{pn}$  opuesto a  $l_p$  en  $\sigma_2^n$ , el hecho de que  $l_p = \sqrt{A_\mu A^\mu}$  para cada arista  $A_\mu$  y  $\frac{\partial L^2}{\partial l_p} = 2L \frac{\partial L}{\partial l_p}$  se obtiene

$$\frac{\partial L_n}{\partial l_p} = l_p \text{ctg} \theta_{pn} \quad (2.15)$$

siendo  $\theta_{pn}$  el ángulo opuesto a  $l_p$  en  $\sigma_2^n$ . Finalmente se concluye que las ecuaciones de Einstein para un espacio vacío en la aproximación de Regge están dadas por

$$\sum_n \epsilon_n \text{ctg} \theta_{pn} = 0 \quad (2.16)$$

donde la suma corre sobre todos los 2-simplejos que tienen la  $p$ -ésima arista en común. En resumen, los cálculos de Regge son una aproximación de una variedad Riemanniana  $n$ -dimensional en términos de una colección de simplejos  $n$ -dimensionales, siendo estos planos en su interior y unidos en sus caras de menos dimensión. La curvatura de la variedad está contenida en la deficiencia de ángulos del  $(n - 2)$ -esqueleto junto con su medida. Permitiendo que el número de  $(n - 2)$ -caras tienda hacia infinito y manteniendo el límite  $K(P) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\epsilon_T}{A_T}$  variando lentamente se puede obtener la integral de volumen del escalar de curvatura de la variedad suave original.

## Capítulo 3

# Gravitación cuántica en 3-variedades

En esta sección se discutirá un modelo de gravitación cuántica en tres dimensiones, basado principalmente en el trabajo de Ponzano y Regge [12], así como en uno de los trabajos de Penrose [11]. A lo largo de este capítulo se verá que una de las ideas fundamentales de este modelo es la construcción de objetos matemáticos conocidos como *redes de espin*; estas redes permitirán discretizar el espacio-tiempo; además, el modelo hará uso de los conceptos de amplitud e integral de trayectorias, los cuales aparecen en la formulación de Feynman de la mecánica cuántica (Ver Apéndice C).

Así, al inicio de este capítulo se dará una descripción del modelo de gravitación cuántica de Ponzano y Regge, en el que se describe la versión discreta de la integral de trayectorias en gravitación. Posteriormente se desarrollará el modelo de gravitación cuántica basado en el concepto de redes de espin, el cual fue introducido inicialmente por Penrose y desarrollado posteriormente por diversos autores [8], [9], [15]. Con el fin de evaluar o asignar una amplitud o peso a las redes de espin, se introducirá la noción de tensor diagramático. La función de partición o suma de estados será definida como la suma de las amplitudes sobre todos los estados admisibles de una 3-variedad simplicial. Con ello se completará la descripción del modelo de sumas de estados de gravitación cuántica.

### 3.1. El modelo de Ponzano-Regge

El primer modelo de gravitación cuántica en una variedad 3-dimensional triangulada es el de Ponzano-Regge; este modelo tiene sus orígenes en el trabajo de Regge descrito en el capítulo anterior. El formalismo de la mecánica cuántica es empleada en gravitación para tratar de definir una integral de trayectorias sobre métricas.

$$\int e^{iS_{GR}[g]} \mathcal{D}[g_{\mu\nu}(x)] \quad (3.1)$$

En particular, se pueden considerar dos métricas en tres dimensiones, una inicial  $g'$  y una final

$$\int_{g|_{t=0}=g'}^{g|_{t=1}=g} e^{iS_{GR}[g]} \mathcal{D}[g_{\mu\nu}(x)]$$

donde  $S_{GR}$  es la acción definida entre  $t=0$  y  $t=1$ .

Considérese una triangulación  $\Delta$  de una variedad espacio-temporal de tres dimensiones. Como se vio en el capítulo 2, la acción de un campo gravitacional en un espacio tridimensional dado puede ser aproximado por la acción de Regge,  $\mathcal{S}_{Regge}(l_n)$  que depende de las longitudes  $l_n$  de los 1-simplejos de la triangulación. Como la acción continua es una integral sobre el espacio-tiempo, la acción de Regge es una suma sobre la acción individual de los 3-simplejos (tetraedros),  $v$ , de la triangulación.

$$\mathcal{S}_{Regge} = \sum_v \mathcal{S}_v \quad (3.2)$$

Entonces, empleando la acción de Regge se puede obtener una versión discreta de (3.1) de la forma

$$Z = \int dl_1 \dots dl_N e^{i\mathcal{S}_{Regge}(l_f)}. \quad (3.3)$$

Usando (3.2) se puede escribir

$$Z = \int dl_1 \dots dl_N \prod_v e^{i\mathcal{S}_v(l_f)}. \quad (3.4)$$

Ponzano y Regge asumieron adicionalmente que las longitudes de cada 1-simplejo pueden tomar sólo valores discretos

$$l_n = j_n \quad j_n = 1, 2, 3, 4, \dots$$



en unidades en las cuales la longitud de Planck,  $l_P$ , toma el valor de 1. Entonces, la ecuación (3.4) queda expresada como

$$Z_{PR} = \sum_{j_1 \dots j_N} \prod_v e^{iS_v(j_n)}. \quad (3.5)$$

En las siguientes secciones se introducirán diversos conceptos que van a permitir, al final del capítulo, desarrollar una expresión alternativa de la ecuación (3.5) para el caso tridimensional.

### 3.2. Tensores diagramáticos

En esta sección se comenzará con una descripción diagramática del álgebra de matrices donde las matrices tienen varios índices. Puesto que los tensores son tradicionalmente estos objetos (provistos con propiedades de transformación específicos), los diagramas que aquí se describirán pueden ser llamados tensores diagramáticos. Los tensores diagramáticos serán utilizados en secciones posteriores para asignar una amplitud a cada 3-simplejo.

De forma diagramática, una matriz  $M = (M_j^i)$ , con entradas  $M_j^i$  para  $i, j$  en el conjunto de índices  $I$  será una caja con una cuerda superior para los índices superiores y una cuerda inferior para los índices inferiores:

$$M = (M_j^i) \longleftrightarrow \begin{array}{c} | \\ \boxed{M} \\ | \end{array}$$

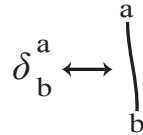
En general, un tensor tiene algunos índices superiores e inferiores. En una representación diagramática, estos índices son líneas o cuerdas que emanan de su caja correspondiente:

$$T_{lm}^{ijk} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \frown \\ \boxed{T} \\ \smile \end{array}$$

La *delta de Kronecker*  $\delta_a^b$  entonces puede ser vista como cada una de las entradas de la matriz identidad de  $2 \times 2$ . Así,

$$(\delta_a^b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

y  $\delta_0^0 = \delta_1^1 = 1$  mientras  $\delta_1^0 = \delta_0^1 = 0$ . Las letras  $a$  y  $b$  en esta expresión pueden tomar uno de dos valores, 0 o 1. En la notación diagramática, la *delta de Kronecker* se denota por una cuerda estirada:



La posición de los índices sobre  $\delta$  determina la localización de las etiquetas sobre los extremos de la línea. Aplicando las definiciones se tiene

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 1 \end{array} = 1 \qquad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 0 \end{array} = 0$$

De acuerdo con la definición de multiplicación entre matrices:

$$(MN)_j^i = \sum_k M_k^i N_j^k.$$

Esta multiplicación en la convención de suma de Einstein (Apéndice A) se escribe como  $M_k^i N_j^k$ , donde la suma es sobre todos los posibles valores de los pares de índices repetidos superiores e inferiores. La correspondiente convención de suma de las representaciones diagramáticas es que una línea que conecta dos cajas implica la suma sobre todos los posibles valores que toma el índice asociado a esa cuerda.

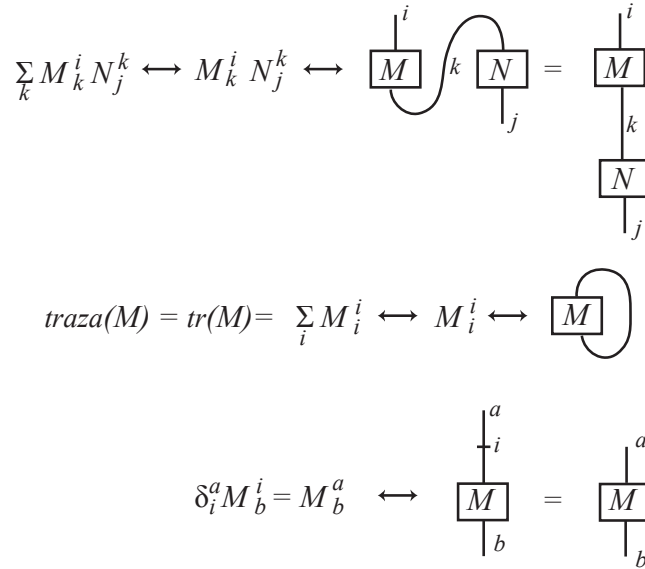
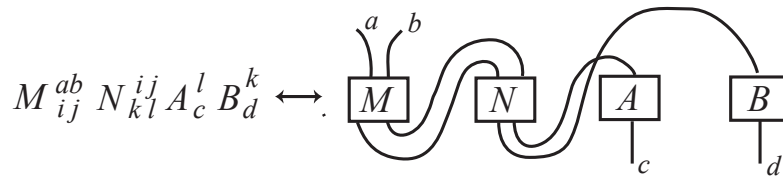


Figura 3.1: Operaciones matriciales diagramáticas

Así, la matriz de multiplicación equivale a conectar dos cajas, una encima de la otra, y la traza de la matriz corresponde a conectar una caja sobre sí misma. Ahora se pueden escribir varios productos diagramáticamente:



En este ejemplo, ocurre un entrecruzamiento. En adelante se adoptará la siguiente convención:

$$\delta_d^a \delta_c^b \longleftrightarrow \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \\ c \quad d \end{array}$$

Si la matriz identidad se asocia con una cuerda estirada, es razonable identificar una cuerda doblada con una matriz que posee dos índices, o bien superiores, o bien inferiores. De este modo, se cuenta con una cierta libertad para escoger a dicha matriz. Una posibilidad es escoger la matriz antisimétrica definida por los símbolos  $\epsilon_{ab}$  de la siguiente forma: Dado el conjunto de índices  $I = \{1, 2\}$ ,  $\epsilon_{ab} = \epsilon^{ab}$  y

$$\epsilon_{ab} = \begin{cases} 1 & i < j \\ -1 & i > j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se tiene que

$$(\epsilon_{ab}) = (\epsilon^{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{ab} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ a \quad b \end{array}$$

Similarmente

$$\epsilon^{ab} \longleftrightarrow \begin{array}{c} a \quad b \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

De acuerdo con las convenciones adoptadas, es posible escribir  $\delta_a^c \epsilon_{cb} = \epsilon_{ab}$ . Después de un análisis sobre las identificaciones descritas en los párrafos anteriores, se pueden descubrir dos características poco deseables. Primero, los diagramas no se ajustan a los movimientos esperados para cuerdas elásticas en un plano. Puesto que  $\delta_a^c \epsilon_{cd} \epsilon^{de} \delta_e^b = \epsilon_{ad} \epsilon^{db} = -\delta_a^b$ , el estiramiento de una línea genera un signo negativo

$$\text{wavy line } a \rightarrow b = - \text{straight line } a \rightarrow b$$

Segundo, como consecuencia de  $\epsilon_{ad}\epsilon_{bc}\epsilon^{cd} = -\epsilon_{ab}$ ,

$$\text{two parallel arcs } a \rightarrow b = - \text{single arc } a \rightarrow b$$

Sin embargo, estas dificultades topológicas se pueden evitar si se modifica la definición de una línea doblada. Es posible multiplicar por una  $i$  a los tensores antisimétricos

$$\epsilon_{ab} \rightarrow \tilde{\epsilon}_{ab} = i\epsilon_{ab}$$

de modo que  $(\tilde{\epsilon}_{ab}) = (\tilde{\epsilon}^{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$  y

$$\tilde{\epsilon}_{ab} \leftrightarrow \text{arc } a \rightarrow b$$

Puesto que cada una de las características mencionadas contiene un par de matrices  $\epsilon$ , la  $i$  fija el problema de los signos. De modo que

$$\text{wavy line } a \rightarrow k \rightarrow b = \sum \tilde{\epsilon}_{ak}\tilde{\epsilon}^{kb} = \delta_a^b = \text{straight line } a \rightarrow b$$

Por otro lado, si se analiza la relación  $\delta_a^d\delta_b^c\tilde{\epsilon}_{ab} = -\tilde{\epsilon}_{ab}$  nuevamente se obtiene un comportamiento distinto al esperado para cuerdas pues

$$\begin{array}{c} c \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \end{array} = - \begin{array}{c} \text{arc} \\ a \quad b \end{array}$$

Este problema puede ser eliminado asociando un signo negativo a cada cruce. Así, asociando una  $i$  a cada  $\epsilon$  y un signo a cada cruce, los diagramas se comportan como líneas continuamente deformadas en un plano. De este modo, se tienen estructuras topológicas siempre que se puedan mover de este modo. La asociación de curvas a las matrices  $\delta$  y  $\epsilon$  permite llevar a cabo cálculos algebraicos moviendo líneas en el plano. Así, es posible representar a través de diagramas cualesquiera dos expresiones algebraicas equivalentes las cuales pueden ser transformadas continuamente una en la otra.

De las definiciones anteriores se siguen otras dos propiedades interesantes:

- 1) El valor de un lazo simple cerrado toma un valor negativo

$$\begin{array}{c} \text{loop} \\ a \quad b \end{array} = \sum_{a,b} \tilde{\epsilon}_{ab} \tilde{\epsilon}^{ab} = - \epsilon_{ab} \epsilon^{ab} = -2$$

Este resultado muestra que un tensor diagramático cerrado es un número.

- 2) La relación entre la multiplicación de un par de matrices épsilon con un par de productos de deltas está dada por la siguiente ecuación, conocida como *identidad espinorial*.

$$\epsilon_{ac} \epsilon^{bd} = \delta_a^b \delta_c^d - \delta_a^d \delta_c^b.$$

De esta ecuación y de la definición de las matrices  $\tilde{\epsilon}$ , se puede ver que la ecuación anterior queda representada diagramáticamente de la siguiente forma

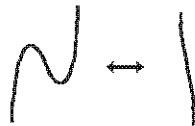
The diagram shows an equality between three configurations of four strands labeled  $a, b, c, d$  from bottom-left to top-right. On the left, two strands  $b$  and  $d$  form a cup shape at the top, and two strands  $a$  and  $c$  form another cup shape at the bottom. This is equal to the configuration of two parallel vertical strands  $b$  and  $d$  on top, and  $a$  and  $c$  on the bottom. This is also equal to the configuration of two strands crossing, with  $b$  and  $d$  on top and  $a$  and  $c$  on the bottom.

Las manipulaciones algebraicas de  $\delta$  y  $\epsilon$  y otras matrices de  $2 \times 2$  es equivalente a las manipulaciones de líneas abiertas o cerradas. Cualesquiera dos expresiones algebraicas equivalentes son representadas por dos diagramas que pueden ser transformados continuamente uno en otro. Haciendo uso de un resultado de Reidemeister junto con las identidades mencionadas se muestra que los diagramas de redes de espín, que serán descritos en la siguiente sección, son topológicamente invariantes en un plano [9].

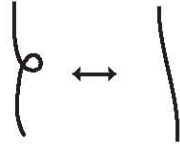
### 3.3. Movimientos de Reidemeister

Un nudo en un espacio de tres dimensiones puede ser continuamente deformado en otro nudo si y sólo si la proyección sobre el plano de un nudo puede ser transformada en la proyección sobre el plano del otro a través de una sucesión de cuatro movimientos llamados *movimientos de Reidemeister*. Aunque el modelo diagramático de tensores que ha sido descrito es 2-dimensional, los movimientos de Reidemeister son dados a continuación como proyecciones de nudos en un espacio de tres dimensiones. Mientras que en dos dimensiones solamente existe una intersección, cuando dos líneas se cruzan en tres dimensiones se tiene un cruzamiento por arriba, un cruzamiento por abajo, así como la intersección. Los cuatro movimientos permitidos son:

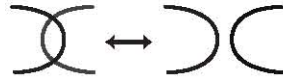
- a) *Movimiento tipo 0*: En el plano de proyección, se pueden hacer deformaciones suaves de la cuerda.



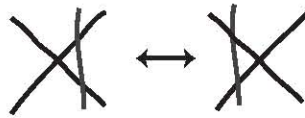
b) *Movimiento tipo 1*: Un rizo se puede deshacer.



c) *Movimiento tipo 2*: Curvas distintas superpuestas no forman un nudo.



d) *Movimiento tipo 3*: Se pueden llevar a cabo deformaciones planares por arriba o por debajo de un diagrama.



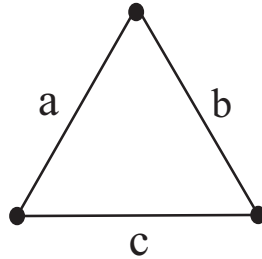
Con una sucesión finita de estos movimientos, la proyección de un nudo puede ser transformada en la proyección de cualquier otro nudo que sea topológicamente equivalente al original. Los nudos que se relacionan de esta manera se llaman isotópicos. La isotopía planar es generada por los cuatro movimientos, con la diferencia de que no existen cruzamientos por arriba ni por abajo, sólo intersecciones.

### 3.4. Redes de espín

**Definición 3.4.1.** Sea  $M$  una 3-variedad triangulada compacta y sea  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  el conjunto de espines o colores. Una *coloración* o estado admisible de  $M$  es una función  $s : 1 - \text{simplejos} \subset M \rightarrow S$  tal que para cada 2 - simplejo con aristas  $a, b, c$  se cumple lo siguiente:

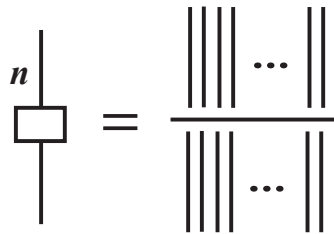


1.  $s(a) + s(b) + s(c) = 2k$  para alguna  $k \in S$
2.  $s(a) \leq s(b) + s(c)$ ,  $s(b) \leq s(a) + s(c)$  y  $s(c) \leq s(a) + s(b)$



Cada arista está identificada con un valor de espín, el cual indica la multiplicidad de la arista; esto es, el valor de espín indica el número de cuerdas que pasan a través de dicha arista. Cada arista con espín  $n$  tiene  $n$  cuerdas con  $n$  puntos iniciales y  $n$  puntos finales. El mapeo de los puntos iniciales a los puntos finales es una permutación.

**Definición 3.4.2.** El antisimetrizador es un diagrama tensorial asociado a un conjunto de líneas paralelas que se denota por



donde  $n$  indica el número de líneas que atraviesan la caja. El antisimetrizador está definido por la fórmula

$$\begin{array}{c} n \\ | \\ \square \\ | \end{array} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \begin{array}{c} | \\ \square \\ | \end{array}$$

donde  $\sigma$  corre sobre todas las permutaciones de  $S_n$  (el conjunto de permutaciones sobre  $n$  elementos) y  $\sigma$  dentro de la caja denota la representación diagramática asociada a dicha permutación.

Diagramáticamente, una permutación en  $S_n$  (sobre el conjunto de  $n$  cuerdas) se puede representar como la trenza que se forma al identificar cada cuerda con un punto inicial y un punto final.

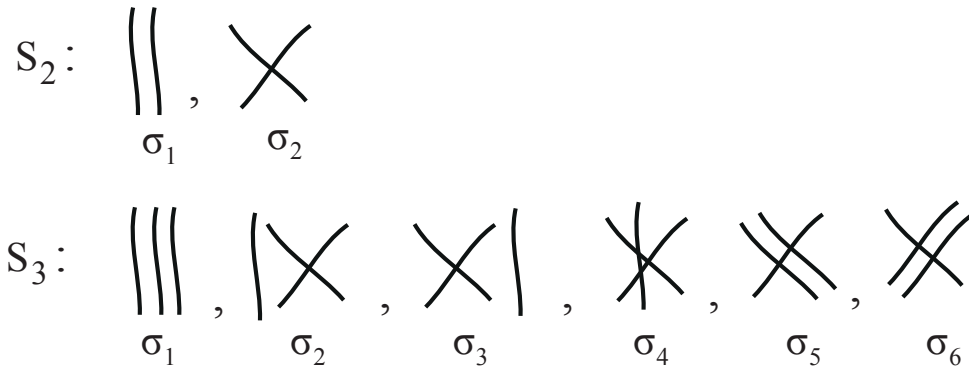


Figura 3.2: Representación diagramática de  $S_2$  y  $S_3$

El antisimetrizador cumple con las siguientes propiedades:

- (1) El antisimetrizador vale cero cuando una línea cruza dos veces por el mismo lado de la caja.

$$\text{Diagram} = 0$$

(2) La combinación de dos antisimetrizadores es igual a uno.

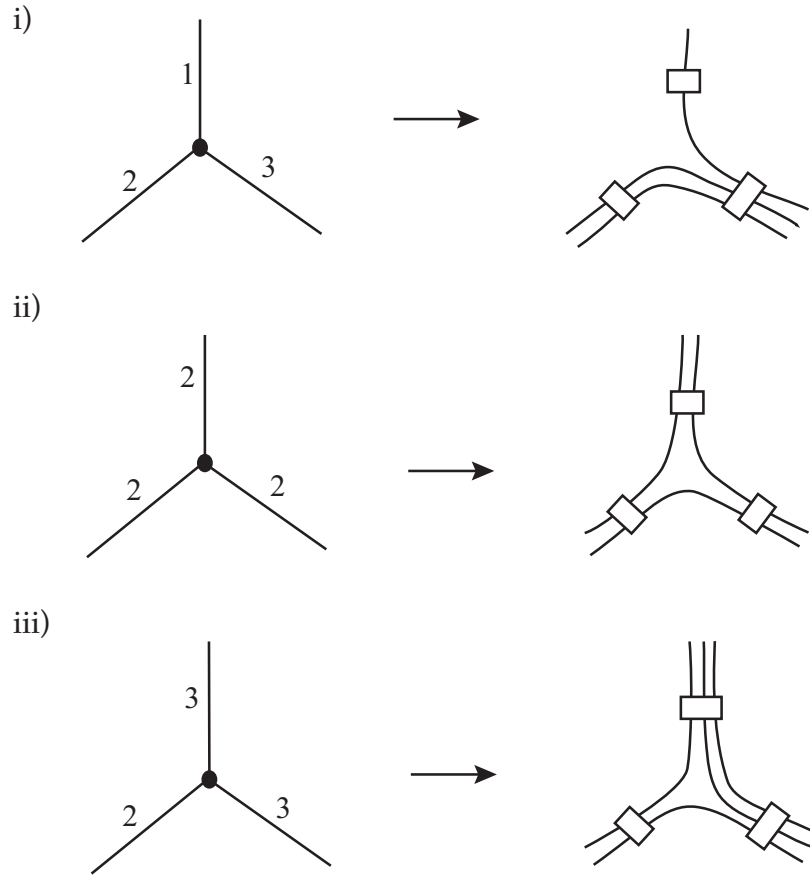
$$\text{Diagram} = \text{Diagram}$$

(3) Cuando las líneas de la caja se cierran sobre sí mismas la evaluación de este diagrama es

$$\text{Diagram} = \text{tr}(\text{Diagram}) = C_n^{-2} = (-1)^n (n+1)$$

**Definición 3.4.3.** Un vértice trivalente es el punto de encuentro de tres aristas con multiplicidades  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  satisfacen las condiciones impuestas sobre las coloraciones (ver definición 3.4.1).





Con los vértices trivalentes se pueden construir redes mucho más complejas.

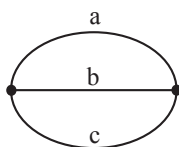
**Definición 3.4.4.** Una *red de espin* es un conjunto de vértices unidos a través de aristas tal que todos sus vértices son trivalentes y cada arista tiene asociado un valor de espin. Una arista con espin  $n$  representa entonces  $n$  líneas paralelas y un antisimetrizador.

El 1-esqueleto de una 3-variedad formada pegando tetraedros genera una red de espin cerrada. Al utilizar las propiedades de los tensores diagramáticos para el caso de las redes de espin, es posible asociar un número a cada una de estas redes. A este número se le conoce como *evaluación*.

Cada arista etiquetada con cero puede ser eliminada de la red. A continuación se muestran algunos ejemplos de evaluaciones sobre redes de espín:

**Ejemplo 3.4.1.**

1. Sea  $\theta$  la red de espín cerrada que está formada por dos vértices trivalentes:



Un estado admisible de  $\theta$  es  $a = c = 1$  y  $b = 2$ ; calculando la amplitud de esta coloración se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ 2 \\ \text{---} \\ \circ \\ 1 \end{array} &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( (-2)^2 - \left( - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( 4 + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (4 + 4 - 2) = 3
 \end{aligned}$$

Otro estado admisible para el mismo ejemplo es  $a = 2$ ,  $c = 1$  y  $c = 3$ ; calculando la amplitud de esta coloración se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ \text{1} \\ \text{---} \\ 3 \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\
 & = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
 & = \frac{1}{2} \left( -4 - \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \right) \\
 & = \frac{1}{2} \left( -4 - (4 - 0) \right) = -4
 \end{aligned}$$

2. Tetraedro con 6 vértices con valores distintos de cero



$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \\
 & = \frac{1}{2} \left( \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \right) \\
 & = \frac{1}{2} \left( 0 + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \right) \\
 & = \frac{1}{2} \left( 0 + (-1)^2 (2+1) \right) = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

En el modelo de gravitación cuántica empleando redes de espin, la expresión de la suma de trayectorias viene dada por la suma de las amplitudes de todas las coloraciones posibles para el espacio-tiempo dada una triangulación fija. A continuación se formulará dicha expresión.

**Definición 3.4.5.** Sea  $M$  una 3-variedad triangulada. Los vértices, aristas y caras de  $M$  se llaman externas si pertenecen a la frontera, de otra forma se llamarán internas. Se denotan los 3-simplejos de  $M$  por  $\langle Tet \rangle_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ). Para cada coloración fija  $s$  de  $M$  se define la *amplitud* o *peso*  $A(s)$  como el número real dado por la fórmula:

$$A(s) := \prod_{A \text{ int}} (-1)^j (j+1) \prod_{T \text{ int}} (-1)^{j_1+j_2+j_3} \prod_{k=1}^r \langle Tet \rangle_k \quad (3.7)$$

donde  $A_{int}$  denota las aristas interiores,  $t_{int}$  denota los triángulos interiores y

$$\langle Tet \rangle = \left( \begin{array}{c} \text{Diagrama de un tetraedro con aristas interiores } j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Diagrama de un tetraedro con aristas interiores } j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 \end{array} \right)$$

denota la evaluación de la red de espín del tetraedro.

En esta fórmula, las amplitudes para cada complejo simplicial están determinadas por las etiquetas sobre los 1-simplejos. A  $\langle Tet \rangle$  se le conoce también como *símbolo*  $\{6j\}$ .

**Definición 3.4.6.** Se define la función de partición o suma de estados  $Z$  de  $M$  para una 3-variedad triangulada como:

$$Z(M) := \sum_s A(s). \tag{3.8}$$

### 3.5. Las redes de espín y el modelo semiclásico

Ponzano y Regge afirmaron que la evaluación de un tetraedro se aproxima a la acción de la relatividad general. Aunque ellos no lo probaron en su artículo, algunas pruebas que fueron dadas posteriormente [14],[7] muestran que cuando los valores de los espines  $j_i$  se incrementan, la parte positiva de la evaluación del tetraedro se aproxima a la fórmula asintótica

$$\langle Tet \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \cos \left( \sum_{i=1}^6 j_i \theta_i + \frac{\pi}{4} \right) \tag{3.9}$$

donde  $V$  es el volumen euclídeo del tetraedro,  $j_i$  son los espines del tetraedro,  $\theta_i$  es el ángulo entre las normales exteriores a las caras que comparten la arista  $j_i$  de el tetraedro asociado.

Entonces, la ecuación (3.8) así definida puede tomarse como una versión discreta de la integral de trayectorias para el caso de gravitación cuántica en

tres dimensiones. Con todas estas definiciones entonces queda desarrollado el modelo de sumas de estado de gravitación cuántica en 3 dimensiones.

# Apéndice A

## Geometría en variedades

En este apéndice se pretende profundizar sobre algunas nociones fundamentales de la geometría Riemanniana, las cuales pueden ser consultadas en diversos libros de texto [4],[3],[16]. Esto es con el fin de dar una mayor claridad a la exposición de los resultados discutidos en los capítulos que componen el presente trabajo.

En el desarrollo de este trabajo se utilizará la convención de suma de Einstein: si el mismo índice aparece dos veces, una como superíndice y una como subíndice, entonces el índice es sumado sobre todos los posibles valores. Por ejemplo, si  $\mu$  corre de 1 a  $n$ , se tiene

$$C^\nu = A^\mu B_\mu^\nu = \sum_{\mu=1}^n A^\mu B_\mu^\nu.$$

**Definición A.1.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Una *variedad diferenciable de dimensión  $n$*  es un conjunto  $M$  con una familia de mapeos biyectivos  $\phi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  de  $U_\alpha \subset M$  tal que

- i)  $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$
- ii) para todos  $\alpha, \beta$  tales que  $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , los conjuntos  $\phi_\alpha(U_{\alpha\beta})$  y  $\phi_\beta(U_{\beta\alpha})$  son abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y los mapeos

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

son infinitamente diferenciables o suaves.

iii) La familia  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  es máxima con respecto a las condiciones i) y ii).

Cada par  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  se llama una *parametrización*, *carta* o *sistema local de coordenadas*, mientras que  $\phi_\alpha$  es la *función coordenada*. Las funciones  $\phi_\alpha$  están representadas a su vez por  $n$  funciones  $x^1, \dots, x^n$ .  $\{x^\mu\}$  también se llama el conjunto de coordenadas. Dada una variedad diferenciable  $M$  existe una topología natural sobre  $M$ : se define  $U \subset M$  abierto si y sólo si  $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  para todo  $\alpha$ . Además, se va a requerir que  $M$  satisfaga que para dos puntos distintos en  $M$  existan vecindades abiertas de estos dos puntos que no se intersectan, y que  $M$  pueda ser cubierta por un número contable de cartas locales.

**Definición A.2.** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente. Un mapeo continuo  $F : M \rightarrow N$  se llama *diferenciable* en un punto  $p \in M$  si para toda carta local  $(V, \phi)$  de  $F(p) \in V$  existe una carta local  $(U, \psi)$  con  $p \in U$  tal que  $F(U) \subset V$  y

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(F^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es diferenciable en el punto  $\phi(p)$ .

**Definición A.3.** Sea  $F : M \rightarrow N$  diferenciable y biyectiva, con la propiedad de que  $F^{-1} : N \rightarrow M$  también es diferenciable. Entonces  $F$  se llama un *difeomorfismo*.

**Definición A.4.** Una función  $f$  sobre  $M$  es un mapeo diferenciable de  $M$  a  $\mathbb{R}$ . Sobre una carta local  $(U, \phi)$ , la presentación coordenada de  $f$  está dada por  $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual es una función real valuada de  $n$  variables. Se denota el conjunto de todas las funciones suaves sobre  $M$  por  $\mathcal{F}(M)$ .

**Definición A.5.** Sea  $p \in M$  y considérese  $(U, \phi)$  una carta local alrededor del punto  $p$  con funciones coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ . Dada una función diferenciable, la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x^\mu$  en el punto  $p$  es

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial u^\mu}(\phi(p))$$

donde  $(u^1, \dots, u^n)$  son las funciones de coordenadas en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición A.6.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Sean  $p \in M$  y  $\varepsilon > 0$ . Una función diferenciable  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  se llama *curva* (diferenciable) en  $M$ . Supóngase que  $\alpha(0) = p \in M$  y sea  $D_p$  el conjunto de todas las funciones sobre  $M$  que son diferenciables en  $p$ . El *vector tangente* a la curva  $\alpha$  en  $t = 0$  es una función  $\alpha'(0) : D_p \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \right|_{t=0}, \quad f \in D_p \quad (\text{A.1})$$

En términos de las coordenadas locales, A.1 se transforma en

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (\text{A.2})$$

Nótese que la derivada  $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$  en realidad significa  $\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^\mu}$ . En otras palabras,  $\frac{df(\alpha(t))}{dt}$  a  $t = 0$  se obtiene al aplicar el operador diferencial  $X$  a  $f$ , donde

$$X = X^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad \left( X^\mu = \left. \frac{dx^\mu(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} \right) \quad (\text{A.3})$$

esto es

$$\left. \frac{df(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} = X^\mu \left( \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \equiv X[f] \quad (\text{A.4})$$

La última igualdad define  $X$  el cual ahora se define como el *vector tangente* a  $M$  en  $p = \alpha(0)$  a lo largo de la dirección dada por la curva  $\alpha(0)$ . Dos curvas  $\alpha_1, \alpha_2$  están relacionadas si generan el mismo operador diferencial  $X$  en  $p$ . Esta relación es de equivalencia, lo cual genera clases de equivalencia. Se identifica entonces el vector tangente  $X$  con la clase de equivalencia de curvas más que con la curva en sí misma.

**Definición A.7.** El conjunto de todas las clases de equivalencia de curvas, es decir, todos los vectores tangentes en  $p \in M$  por  $T_p M$  forman un espacio vectorial y se le llama el *espacio tangente en el punto  $p$* . El *haz tangente* es el conjunto  $TM := \{(p, X) | p \in M, X \in T_p M\}$ .

A partir de A.3 se puede ver que  $e_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  ( $1 \leq \mu \leq m$ ) forman una base de vectores de  $T_p M$  y que la dimensión de  $T_p M$  es igual a la dimensión de  $M$ . La base de  $\{e_\mu\}$  es llamada la base coordenada.

**Definición A.8.** Un *campo vectorial* sobre una variedad diferenciable  $M$  es una transformación  $X$  que asocia a cada punto  $p \in M$  un vector  $X_p \in T_p M$ .

Considérese una carta local  $(U, \phi)$  y  $p \in U$ . Si  $u_\mu$  son las funciones coordenadas en  $\mathbb{R}^n$  y  $x^\mu = u^\mu \circ \phi$  entonces un campo vectorial se representa como

$$X_p = X[x^\mu] \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p$$

donde  $X[x^\mu]$  son funciones reales y  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$  es la base asociada a  $\phi$ . Un campo vectorial es diferenciable si y sólo si las funciones  $X[x^\mu]$  son diferenciables. Se denotará por  $\mathcal{X}(M)$  a la clase de campos vectoriales suaves sobre  $M$ .

**Definición A.9.** Si  $V$  es un espacio vectorial,  $V^*$  denota su espacio dual. Puesto que  $T_p M$  es un espacio vectorial, existe su espacio dual, cuyos elementos son funciones lineales de  $T_p M$  a  $\mathbb{R}$ . El espacio dual se llama el *espacio cotangente* en  $p$ , denotado por  $T_p^* M$ . Un elemento  $w : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  en  $T_p^* M$  es llamado el *vector dual* o el *vector cotangente*.

El ejemplo más simple de una 1-forma es la diferencial  $df$  de una función  $f \in \mathcal{F}(M)$ . La acción de  $df \in T_p^* M$  sobre  $V \in T_p M$  está definida por

$$(df)(V) \equiv V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}$$

Nótese que  $df$  queda expresado en términos de la carta local  $x = \phi(p)$  como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

de manera que es natural ver al conjunto  $\{dx^\mu\}$  como una base de  $T_p^* M$ . Tómese un vector  $V = V^\mu \partial / \partial x^\mu \in T_p M$  y una 1-forma  $w = w_\mu dx^\mu \in T_p^* M$ . El producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^* \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  está definido por

$$\langle w, V \rangle = w_\mu V^\nu \langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rangle = w_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = w_\mu V^\mu.$$

**Definición A.10.** Si  $V_1, \dots, V_n$  son espacios vectoriales de dimensión finita, entonces  $V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^*$  denota el espacio de mapeos multilineales  $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$ . El espacio de tensores sobre  $V$  es  $T_s^r(V) = V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$  donde hay  $r$  factores sin estrella y  $s$  factores con estrella y  $(r, s)$  es el tipo de cada *tensor* en  $T_s^r(V)$ . Supóngase que  $S \in T_s^r(V)$  y  $T \in T_q^p(V)$ , entonces  $T \otimes S \in T_{s+q}^{r+p}(V)$  denota el *producto tensorial*.

**Definición A.11.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $p \in M$ . Sea  $(T_p M)_s^r$  el conjunto de los tensores de tipo  $(r, s)$  definidos sobre  $V = T_p M$ . Un *campo tensorial de tipo  $(r, s)$  sobre  $M$*  es una función  $t$  que asigna a cada punto  $p \in M$  un tensor  $t_p \in (T_p M)_s^r$ . Se denota por  $\mathcal{T}_s^r(M)$  la clase de campos tensoriales del tipo  $(r, s)$  que son diferenciables. En particular  $\mathcal{T}_0^0(M) = \mathcal{F}(M)$ ,  $\mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{X}(M)$ .

**Definición A.12.** Una distancia o métrica sobre un conjunto  $X$  es una función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  que cumple las siguientes propiedades:

- i)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$
- iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

para toda  $x, y, z \in X$ .

**Definición A.13.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una *métrica Riemanniana*  $g$  sobre  $M$  es un campo tensorial de tipo  $(0, 2)$  sobre  $M$  el cual satisface los siguientes axiomas:

- i)  $g_p(U, V) = g_p(V, U)$ .
- ii)  $g_p(U, U) \geq 0$ , donde la igualdad se cumple sólo cuando  $U = 0$ .

donde  $U, V \in T_p M$  y  $g_p = g|_p$ . Un tensor  $g$  de tipo  $(0, 2)$  es una *métrica pseudo-riemanniana* si satisface i) y

(ii') Si  $V \in T_p M$  es tal que  $g_p(U, V) = 0$  para cualquier  $U \in T_p M$ , entonces  $V = 0$ .

Sea  $(U, \phi)$  una carta en  $M$  y  $\{x^\mu\}$  las coordenadas. Puesto que  $g \in \mathcal{T}_2^0$ , se expande en términos de  $dx^\mu \otimes dx^\nu$  como

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

y además

$$g_{\mu\nu} = g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\nu\mu}(p) \quad (p \in M)$$

Si existe una métrica  $g$ , se define el producto interior entre dos vectores  $U, V \in T_p M$  por  $g_p(U, V)$ . Es común ver a  $(g_{\mu\nu})$  como una matriz cuya  $(\mu, \nu)$ -ésima entrada es  $g_{\mu\nu}$ . Como  $(g_{\mu\nu})$  es una matriz simétrica, sus eigenvalores



- i)  $\frac{D}{dt}(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \frac{Dv_1}{dt} + \frac{Dv_2}{dt}$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $v_1, v_2 \in \mathcal{X}(\alpha)$
- ii)  $\frac{D}{dt}(fv) = f \frac{Dv}{dt} + \frac{df}{dt}v$ , donde  $f$  es una función diferenciable definida en la imagen de  $\alpha$  y  $v \in \mathcal{X}(\alpha)$

**Definición A.16.** Se dice que una derivada covariante  $D/dt$  es compatible con una conexión  $\nabla$  si y sólo si dado un campo  $X \in \mathcal{X}(M)$  que puede extenderse a un campo  $Y \in \mathcal{X}(\alpha)$ , se tiene que

$$\frac{DX}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}Y$$

Si  $(U, \phi)$  es una carta,  $u^\mu$  son las funciones coordenadas usuales en  $\mathbb{R}^n$  y  $x^\mu = u^\mu \circ \phi$ , la curva  $\alpha(t)$  se escribe como  $(x^1(t), \dots, x^n(t))$  y su derivada como

$$\alpha'(t) = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

y la expresión para la derivada covariante de un campo  $Y = Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  está dada por

$$\frac{DY}{dt} = \left( \frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} Y^\lambda \right) \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

**Definición A.17.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow M$  un curva en  $M$ . Por simplicidad supóngase que se cubre con una sola carta  $(U, \phi)$  cuya coordenada es  $x = (\phi(p))$ . Sea  $X$  un campo vectorial definido a lo largo de  $\alpha$ . Si  $X$  satisface la condición

$$\nabla_V X = 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

se dice que  $X$  es transportado paralelamente a lo largo de  $\alpha(t)$ , donde  $V$  es el vector tangente a  $\alpha(t)$ . Si el mismo vector tangente  $V$  es transportado paralelamente a lo largo de  $\alpha(t)$ , es decir, si  $\nabla_V V = 0$ , la curva  $\alpha(t)$  se denomina *geodésica*. En términos de sus componentes, la expresión de la geodésica obtenida es

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

donde  $x^\mu$  son las coordenadas de  $\alpha(t)$ .

**Definición A.18.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$  y una métrica Riemanniana  $g$ . Se dice que una conexión es *compatible* con la métrica  $g$  cuando para cualquier curva suave  $\alpha$  y cualquier par de campos vectoriales  $P$  y  $P'$  a lo largo de  $\alpha$ , se tiene que  $g(P, P') = \text{constante}$ .

Una conexión es compatible con la métrica si y sólo si para cualesquiera campos vectoriales  $V$  y  $W$  a lo largo de la curva  $\alpha : I \rightarrow M$  se tiene

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right), \quad t \in I$$

**Definición A.19.** Se dice que una conexión afín  $\nabla$  es simétrica cuando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

donde  $[X, Y] = \left(a^\mu \frac{\partial b^\nu}{\partial x^\mu} - b^\mu \frac{\partial a^\nu}{\partial x^\mu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  con  $X = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  y  $Y = b^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

Dada una variedad Riemanniana  $M$  existe una única conexión afín  $\nabla$  que es simétrica y es compatible con la métrica Riemanniana. Esta conexión se conoce como la *conexión de Levi-Civita* (o *Riemanniana*). En términos de los componentes de la métrica y los componentes de su inversa, los símbolos de Christoffel quedan expresados como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\sigma\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu} \right)$$

**Definición A.20.** La *curvatura*  $R$  de una variedad Riemanniana  $M$  es una correspondencia que asocia a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  un mapeo  $R(X, Y)Z : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  dado por

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M)$$

donde  $\nabla$  es la conexión Riemanniana.

Obsérvese que si  $M = \mathbb{R}^n$  entonces  $R(X, Y)Z = 0$  para todos  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ . Así, es posible pensar a  $R$  como una forma de medir qué tanto se desvía  $R$  de ser euclídeo. La curvatura presenta las siguientes propiedades:

i)  $R$  es bilineal en  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ , esto es

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

$$f, g \in \mathcal{F}(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M).$$

ii) para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , el operador de curvatura  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  es lineal, esto es

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

$$f \in \mathcal{F}(M), Z, W \in \mathcal{X}(M).$$

La curvatura cumple además con

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \quad (\text{A.5})$$

que se conoce como la *identidad de Bianchi*.

**Definición A.21.** El *tensor de curvatura*  $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  de tipo (0,4) por

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle := (X, Y, Z, T). \quad (\text{A.6})$$

El tensor de curvatura cumple con las siguientes propiedades:

- i)  $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$
- ii)  $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$
- iii)  $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, Y, Z)$
- iv)  $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$

Resulta conveniente utilizar un sistema coordenado para expresar todo lo concerniente a la curvatura de Riemann. Entonces dada una carta local  $(U, \phi)$  alrededor de un punto  $p \in M$  con una base coordenada  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$  se tiene

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} = R_{\mu\nu\lambda}^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$$

De manera que  $R_{\mu\nu\lambda}^\sigma$  son los componentes de la curvatura en  $(U, \phi)$ . Además se puede ver que

$$\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \right\rangle = R_{\mu\nu\lambda}^\sigma g_{\sigma\rho} = R_{\mu\nu\lambda\rho}$$

A partir del tensor de curvatura de Riemann, se construyen nuevos tensores empleando la métrica.

son reales. Si la  $g$  es Riemanniana, todos sus eigenvalores son positivos y si es pseudo-Riemanniana, algunos de ellos son negativos. Si  $i$  son los eigenvalores positivos y  $j$  sus eigenvalores negativos, el par  $(i, j)$  se llama el *índice* de la métrica. Si  $j = 1$ , la métrica se llama *Lorentziana* o *métrica de Lorentz*. Si una variedad diferenciable  $M$  admite una métrica Riemanniana  $g$ , el par  $(M, g)$  se llama *variedad Riemanniana*, si  $g$  es pseudo-Riemanniana,  $(M, g)$  se llama *variedad pseudo-Riemanniana*, si  $g$  es Lorentziana,  $(M, g)$  es una *variedad Lorentziana*.

**Definición A.14.** Una conexión afín  $\nabla$  sobre una variedad  $M$  es un mapeo  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , que asocia a cada pareja  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  otro campo  $\nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$  con las siguientes propiedades:

- i)  $\nabla_{fX+Y} Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z$
- ii)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

donde  $f \in \mathcal{F}(M)$  y  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ .

Sea  $x$  una parametrización con coordenadas locales  $x^1, \dots, x^n$  correspondientes, y sean  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , entonces se puede escribir

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Sea  $\nabla$  una conexión afín, entonces usando sus propiedades se encuentra que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= X^i \left[ \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

donde se han definido los *coeficientes de la conexión* o *símbolos de Christoffel*  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  a través de

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

**Definición A.15.** Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva diferenciable. Denótese por  $\mathcal{X}(\alpha)$  al conjunto de campos diferenciables definidos en la imagen de  $\alpha$ . Una *derivada covariante* a lo largo de  $\alpha$  es una transformación de  $\mathcal{X}(\alpha)$  en  $\mathcal{X}(\alpha)$  denotada por  $\frac{D}{dt}$  que satisface las siguientes propiedades:

**Definición A.22.** El *tensor de Ricci*,  $Ric$ , es un tensor de tipo (0,2) definido por

$$Ric(X, Y) := \left\langle dx^\mu, R\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, Y\right)X \right\rangle$$

cuyas componentes son

$$Ric_{\mu\nu} = Ric\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda.$$

**Definición A.23.** Se define el *escalar de curvatura* o *escalar de Ricci*  $\mathcal{R}$  y el tensor de Einstein  $\mathcal{G}$  mediante

$$\mathcal{R} = Tr Ric = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{G} = Ric - \frac{1}{2}\mathcal{R}g$$

donde  $g$  es la métrica Riemanniana y  $Tr$  denota la traza del tensor de Ricci.

# Apéndice B

## Grupo Fundamental

**Definición B.1.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad. Se define la trayectoria  $a$  sobre  $M$  como un mapeo continuo  $A : [0, 1] \rightarrow M$ , siendo  $A(1)$  el punto final de la trayectoria. Si  $A(0) = A(1) = P$ , con  $P$  un punto sobre la variedad, la trayectoria se denomina *lazo*.

Dos lazos  $A(s)$  y  $A(s'(s))$  serán iguales si  $s'(s)$  es un mapeo continuo no decreciente y  $s(0) = 0$ ,  $s(1) = 1$ .

Si se tienen dos trayectorias  $a, b$  definidas por las funciones  $A(s)$  y  $B(s)$  tales que  $A(1) = B(0)$  entonces el producto  $c = ab$  une  $A(0)$  con  $B(1)$  y se define por la función

$$C(s) = \begin{cases} A(2s) & s \leq \frac{1}{2} \\ B(2s - 1) & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

El producto  $ab$  es asociativo pero en general no es conmutativo. Si  $a, b$  son lazos con el mismo punto final  $P$  entonces  $ab, ba$  existen y son lazos con punto final  $P$ .

**Definición B.2.** Sea  $a$  una trayectoria. Se define la *trayectoria inversa* de  $a$ ,  $a^{-1}$ , como  $A(s - 1)$ , con  $s$  el parámetro de  $A$ . Sea  $M$  una variedad. Tómense dos trayectorias  $a, b$  con el mismo punto final definido por  $A(s) \notin w$  y  $B(s) \notin w$ . Si existe una función  $P(s, t)$  de  $s, 0 \leq s \leq 1$ , y  $t, 0 \leq t \leq 1$  tal que  $P(s, 0) = A(s)$ ,  $P(s, 1) = B(s)$  se dice que se ha deformado a  $a$  en  $b$  y que  $a, b$  son *homotópicas*. A la función  $P(s, t)$  se le llama *deformación*. Si existe una deformación  $P(s, t) \notin w$  de  $a$  en  $b$  se escribirá  $a \sim b$ . El símbolo  $\sim$  (homotopía) satisface las propiedades formales de una equivalencia.

**Proposición B.1.** La homotopía es una relación de equivalencia entre trayectorias.

*Demostración.* i)  $a \sim a$  ya que una deformación está dada por  $P(s, t) = A(s)$ .

ii)  $a \sim b$  define  $b \sim a$  a través de la función  $P(s, 1 - t)$  que deforma a  $b$  en  $a$  y  $P(s, 1 - t) \notin w$ .

iii) Sean  $P(s, t)$  una deformación de  $a$  en  $b$  y  $Q(s, t)$  una deformación de  $b$  en  $c$ . Defínase la función

$$R(s, t) = \begin{cases} P(s, 2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ Q(s, 2t - 1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

por lo que  $R(s, t)$  deforma  $a$  en  $c$  y  $R(s, t) \notin w$ . Así,  $a \sim b$  y  $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ .  $\square$

Estas definiciones aplican también para lazos con la condición de que el lazo se preserve durante la deformación o que  $P(0, t) = P(1, t)$  para toda  $t$ . Si además de eso se tiene que  $P(0, t) = P(1, t) = P$  entonces se escribirá  $a \approx b$ . Claramente  $a \approx b$  implica  $a \sim b$ , pero el inverso no es cierto. El símbolo  $\approx$  define una relación de equivalencia sólo para lazos.

**Definición B.3.** Se define el lazo unitario  $u$  en el punto  $P$  a través de la función  $U(s) = P = \text{constante}$ . Claramente  $aa^{-1} \approx u$ .

**Proposición.**  $a \approx a'$  y  $b \approx b'$  implica que  $ab \approx a'b'$ .

Supóngase que  $a \approx a'$  y  $b \approx b'$ . Sea  $P(s, t)$  una deformación de  $a$  en  $a'$  y  $Q(s, t)$  una deformación de  $b$  en  $b'$ . La función

$$R(s, t) = \begin{cases} P(2s, t) & s \leq \frac{1}{2} \\ Q(2s - 1, t) & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

es una deformación con  $R(0, t) = R(1, t) = p$  de  $ab$  en  $a'b'$  y  $R(s, t) \in w$ . Por tanto  $a \approx a'$  y  $b \approx b'$  implica que  $ab \approx a'b'$ .

**Definición B.4.** Las *clases de homotopía* son las clases de equivalencia, entre lazos con punto final  $P$ , generadas por la relación de ser homotópicas. Una clase es identificada a través de un elemento que pertenezca a ella, y se utilizará a dicho representante para etiquetar a la clase en su totalidad.

Si  $a$  y  $b$  son clases entonces todos los productos  $a'b'$ , donde  $a \approx a'$  y  $b \approx b'$ , son homotópicos y pertenecen a una nueva clase la cual se define como el producto de las clases  $a$  y  $b$  y se escribe como  $ab$ . Más aún, si  $a$  es una clase y  $u$  es la clase unitaria entonces  $au = a = ua$ . Para cualquier clase  $a$  se puede asociar la clase inversa  $a^{-1}$  y  $aa^{-1} = a^{-1}a = u$ . El producto de clases es asociativa.

# Apéndice C

## Mecánica cuántica y gravitación

El presente apéndice tiene como finalidad definir los conceptos físicos que han motivado el desarrollo de los modelos discutidos a lo largo de este trabajo [6],[3], [10].

La *posición* de un sistema físico a cualquier *tiempo* en el espacio puede ser especificada por una coordenada  $x$ , una función del parámetro  $t$ . Por una trayectoria se entenderá la función  $x(t)$ . Si una partícula a un tiempo inicial  $t_a$  comienza en un punto  $x_a$  y termina en un punto final  $x_b$  a un tiempo  $t_b$ , se dice simplemente que la partícula va de  $a$  a  $b$  y la función  $x(t)$  deberá tener la propiedad tal que  $x(t_a) = x_a$  y  $x(t_b) = x_b$ . En mecánica clásica, existe una única trayectoria, denominada *trayectoria clásica*,  $\bar{x}(t)$ , seguida por el sistema físico para ir de  $a$  a  $b$ . En contraste, en mecánica cuántica se tendrá una *amplitud de probabilidad*,  $K(b, a)$ , para ir del punto  $a$  al punto  $b$ . Esta amplitud será la suma sobre las contribuciones de todas las posibles trayectorias que unen los puntos  $a$  y  $b$ . Antes de examinar el caso cuántico se examinará el caso clásico.

### C.1. La acción clásica

Una de las formas para determinar la trayectoria particular  $\bar{x}(t)$  sobre todas las posibles trayectorias que un sistema físico determinado seguirá es a través del *principio variacional* o de *mínima acción*. Esto es, existe una cierta cantidad  $\mathcal{S}$  que debe ser computada para cada una de las trayectorias posibles  $x(t)$ . La trayectoria clásica  $\bar{x}(t)$  es aquella para la cual  $\mathcal{S}$  es un extremo, es



decir, el valor de  $\mathcal{S}$  no cambia a primer orden si la trayectoria  $\bar{x}(t)$  se modifica ligeramente. La cantidad  $\mathcal{S}$ , llamada la *acción*, está definida como

$$\mathcal{S} = \int_{t_a}^{t_b} L(x', x, t) dt \quad (\text{C.1})$$

donde  $L$  es una función denominada el *Lagrangiano* del sistema. La forma de la trayectoria  $\bar{x}(t)$  está determinado con el usual procedimiento del cálculo de variaciones. Entonces, supóngase que la trayectoria se aleja de  $\bar{x}(t)$  por una cantidad  $\delta x(t)$ ; la condición de que los puntos iniciales y finales de  $\bar{x}$  estén fijos requiere que

$$\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$$

La condición de que  $\bar{x}$  sea un extremo de  $\mathcal{S}$  significa que

$$\delta \mathcal{S} = \mathcal{S}[\bar{x} + \delta x] - \mathcal{S}[\bar{x}] = 0$$

a primer orden en  $\delta x$ . Usando la definición (C.1) se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[x + \delta x] &= \int_{t_a}^{t_b} L(x' + \delta x', x + \delta x, t) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left[ L(x', x, t) + \delta x' \frac{\partial L}{\partial x'} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt \\ &= \mathcal{S}[x] + \int_{t_a}^{t_b} \left[ \delta x' \frac{\partial L}{\partial x'} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt \end{aligned}$$

Empleando integración por partes, la variación  $\mathcal{S}$  se convierte en

$$\delta \mathcal{S} = \delta x \frac{\partial L}{\partial x'} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \delta x \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x'} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt$$

Dado que  $\delta x$  es 0 en los puntos extremos, el primer término del lado derecho es igual a 0. Entonces, el extremo es la trayectoria a lo largo de la cual la siguiente condición se satisface:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x'} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.2})$$

## C.2. La integral de trayectoria en mecánica cuántica

La *amplitud de probabilidad* es uno de los conceptos fundamentales en mecánica cuántica. Dentro de la formulación de esta teoría se establece que

existe una cantidad llamada amplitud de probabilidad que está asociada con cada vía a través de la cual un evento en la naturaleza puede tener lugar. Además es posible asociar una amplitud de probabilidad total al evento mediante la suma de cada una de las amplitudes asociadas a las distintas vías. El cuadrado del valor absoluto de la amplitud de probabilidad total se interpreta como la probabilidad de que el evento ocurra.

Así, dentro de la mecánica cuántica para ir de un punto  $a$  a un punto  $b$  es necesario especificar cuánto contribuye cada una de las posibles trayectorias a la amplitud de probabilidad total. Esto significa que no sólo la trayectoria  $\bar{x}(t)$  que minimiza  $S$  contribuye a la amplitud. Todas las trayectorias contribuyen en cantidades iguales pero con una *fase* distinta. La fase de la contribución de una trayectoria dada es la acción  $\mathcal{S}$  para esa trayectoria en unidades de la acción cuántica  $\hbar$ . En resumen, la probabilidad  $P(b, a)$  para ir de  $x_a$  a un tiempo  $t_a$ , a  $x_b$  a un tiempo  $t_b$  es el cuadrado del valor absoluto de una amplitud  $K(b, a)$  para ir de  $a$  a  $b$ :

$$P(b, a) = |K(b, a)|^2$$

Esta amplitud es la suma de las contribuciones  $\phi[x(t)]$  de cada trayectoria

$$K(b, a) = \sum \phi[x(t)] \quad (\text{C.3})$$

y la suma es sobre todas las trayectorias que van de  $a$  a  $b$ . La contribución de una trayectoria tiene una fase proporcional a la acción  $\mathcal{S}$ :

$$\phi[x(t)] = C e^{(i/\hbar)\mathcal{S}[x(t)]}$$

donde  $C$  es una constante y  $\mathcal{S}$  es la acción clásica.

Feynman define la suma sobre todas las trayectorias posibles haciendo una analogía con la integral de Riemann [6], es decir construir trayectorias tomando una integral múltiple sobre todos los valores de  $x_i$  para  $i$  entre 1 y  $N - 1$ , donde  $N\epsilon = t_b - t_a$ ,  $\epsilon = t_{i+1} - t_i$ ,  $t_0 = t_a$ ,  $t_N = t_b$ ,  $x_0 = x_a$ ,  $x_N = x_b$ , y empleando un factor de normalización. De manera que el resultado es

$$K(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \iint \dots \int e^{(i/\hbar)\mathcal{S}[b,a]} \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \dots \frac{dx_{N-1}}{A} \quad (\text{C.4})$$

donde la acción clásica,  $\mathcal{S}$ , es una integral de línea tomada sobre todas las trayectorias que pasan a través de los puntos  $x_i$  con sección rectas intermedias.

En una notación menos restrictiva Feynman reescribe la integral sobre todas las trayectorias como

$$K(b, a) = \int_a^b e^{(i/\hbar)S[b,a]} \mathcal{D}x(t) \quad (\text{C.5})$$

### C.3. Ecuaciones de campo de Einstein

La gravitación o gravedad es un fenómeno natural por el cual los objetos físicos se atraen entre sí. Newton describe este fenómeno a través de una teoría conocida como la *ley de la gravitación universal*. Esta teoría establece que la fuerza de atracción ejercida sobre una masa  $m$  por una masa  $M$  es

$$\vec{F} = -\frac{MmG}{r^3} \vec{r} \quad (\text{C.6})$$

donde  $r$  es la distancia que separa a las masas,  $G$  es la constante gravitacional y  $\vec{r}$  tiene la dirección de  $M$  a  $m$ . Así, por ejemplo, la posición, velocidad y aceleración de una partícula con masa  $m$  podían ser afectados por la fuerza atractiva ejercida por alguna otra masa  $M$ . Durante siglos esta descripción fue bastante utilizada por astrónomos para calcular el movimiento de los planetas y de otros cuerpos celestes.

Einstein en 1916 revolucionó las ideas sobre la gravitación con la introducción de la *teoría de relatividad general*. Esta teoría considera que los efectos de la gravitación no son consecuencia de una fuerza, sino que en realidad son debidos a la curvatura del espacio-tiempo generado por la presencia de materia. En esta teoría, los sistemas físicos evolucionan dentro de un espacio de 4 dimensiones conocido como *espacio-tiempo*, el cual es a su vez modelado como una variedad de Lorentz. El principio variacional permite derivar las ecuaciones que describen cómo se deforma el espacio-tiempo debido a la presencia de materia. Puesto que en esta teoría la métrica es el elemento que permitirá caracterizar la geometría y las propiedades gravitacionales del espacio-tiempo, la acción  $\mathcal{S}$  deberá depender de la métrica  $g$ . Así, la acción para obtener las ecuaciones gravitacionales se expresa como:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int \mathcal{R} \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{C.7})$$

donde  $\mathcal{R}$  es el escalar de curvatura (Apéndice A) y  $g = \det g_{\mu\nu}$ . Esta expresión es conocida como la *acción de Einstein-Hilbert*. Aplicando las herramientas del principio de mínima acción se llega a las *ecuaciones de campo de Einstein en el vacío*:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g = \mathcal{G}_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Nótese que las ecuaciones  $\mathcal{G}_{\mu\nu} = 0$  son equivalentes a  $R_{\mu\nu} = 0$ , ya que la traza del tensor de Einstein  $Tr\mathcal{G} = g^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu} = -\mathcal{R}$  es cero si y sólo si  $\mathcal{R} = 0$ .

# Bibliografía

- [1] Spanier, Edwin H, *Algebraic topology*, Springer, 1994.
- [2] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Reading, 1984.
- [3] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics, (Graduate student series in physics)*. Taylor & Francis, 2003.
- [4] Manfredo P Do Carmo. *Riemannian geometry*. Springer, 1992.
- [5] Manfredo P Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces, Volumen 2*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1976.
- [6] Richard P Feynman and Albert R Hibbs. *Quantum mechanics and path integrals: Emended edition*. DoverPublications, 2012.
- [7] Razvan Gurau. The Ponzano–Regge asymptotic of the 6j symbol: an elementary proof. In *Annales Henri Poincare*, Volume 9, pages 1413–1424. Springer, 2008.
- [8] Louis H Kauffman. *Knots and physics*. World Scientific Publishing Company, 2013.
- [9] Seth A Major. A spin network primer. *American Journal of Physics*, 67:972, 1999.
- [10] Charles W Misner and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Macmillan, 1973.
- [11] Roger Penrose. Angular momentum: an approach to combinatorial space-time. *Quantum theory and beyond*, pages 151–180, 1971.

- [12] Giorgio Ponzano and Tullio Regge. Semiclassical limit of Racah coefficients. Technical report, Princeton Univ., NJ, 1969.
- [13] T. Regge. General relativity without coordinates. *Il Nuovo Cimento Series 10*, 19(3):558–571, 1961.
- [14] Justin Roberts. Classical 6j-symbols and the tetrahedron. *Geom. Topol.* Volume 3, pages 21-66, 1999.
- [15] Carlo Rovelli. *Quantum gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [16] Héctor Sánchez y Oscar Palmas. *Geometría Riemanniana*. Las prensas de ciencias, UNAM, 2007.