UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
FACULTAD DE ESTUDIO SUPERIORES ACATLÁN
MATEMÁTICAS

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA COMPRENSIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS MEDIANTE EL TRABAJO EN GRUPO EN EL BACHILLERATO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR, MATEMÁTICAS

PRESENTA:

DANIEL GONZÁLEZ MURGUÍA

TUTOR: M. EN C. ALEJANDRO RAÚL REYES ESPARZA

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

MÉXICO, D. F. ENERO 2014

Agradecimientos.

A Lulú y Alonso por su cariño y apoyo.

A mis padres y familia.

Al profesor Alejandro Reyes Esparza por su enorme apoyo para la conclusión de este trabajo.

Al Doctor José Manuel Moreno Vargas por su conocimiento y sabiduría.

A los profesores Dr. Carlos Hernández García Diego, Dr. Ignacio Pineda Pineda ,
Dr. Miguel Mercado, M. en C. Juan B. Recio Zubieta, Dr. Mauricio Pilatowsky, Dra. Asela Carlón y Dr. Sergio Cruz.

A mis compañeros y amigos Caro, Tania, Alberto, Oscar, Gamaliel, Adán , Octavio y Gabriel por su amistad y apoyo.

A los alumnos del grupo 408A y 414A por la participación en el presente trabajo.

Tabla de contenido

Índice de Figuras y Tablas

Figuras

Tablas

INTRODUCCION

El tema surge inicialmente de una inquietud personal al reconocer que en los estudios a nivel licenciatura se presentan carencias y dificultades conceptuales que limitan el aprendizaje y desarrollo de temas matemáticos de mayor profundidad y nivel de complejidad. Haciendo una revisión inicial se observa que son los temas y conceptos básicos los que se encuentran confusos o mal entendidos. Es importante hacer una propuesta didáctica que permita al alumno estructurar conceptos y procedimientos con el propósito de desarrollar su capacidad para aprender en grupo de manera auténtica y efectiva conceptos básicos.

En el presente trabajo se llevó a cabo la aplicación de la Secuencia Didáctica basada en el Trabajo en Grupo diseñada por los profesores Tania Reyes Zúñiga y Alejandro Reyes Esparza con alumnos del cuarto semestre del Curso de Matemáticas IV, en el Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Azcapotzalco, perteneciente al nivel bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México. Para aplicar la Secuencia Didáctica se trabajó con dos grupos del turno matutino: un grupo Piloto y uno de Referencia.

El interés de esta tesis surge de la problemática observada en la clase de tipo expositiva donde la responsabilidad queda centralizada en el profesor y el alumno realiza un papel de espectador imitando de manera mecánica lo expuesto. Es indudable que la clase magistral contiene elementos didácticos efectivos que permiten al alumno orientar el aprendizaje hacia un objetivo concreto, sin embargo es importante extender los ambientes, herramientas y posibilidades que permitan al alumno desarrollar un aprendizaje auténtico, responsable y autónomo. Para ello es necesario presentar al alumno actividades y formas de trabajo que le permitan construir conocimientos a partir de la discusión y análisis entre sus iguales para unificar conceptos, definiciones y procedimientos que lleven al alumno a dar significado y razón a lo que buscan aprender.

Con la perspectiva de Trabajo en Grupo se espera que la Matemática sea accesible, dinámica y atractiva. Se considera que con esta forma de trabajo el alumno aprende a formular, perfeccionar y explorar conjeturas partiendo de evidencias y utilizando razonamientos diversos así como distintas técnicas para confirmar o refutar dichas conjeturas. Se considera también que en un ambiente grupal es posible experimentar la libertad de proponer diversas formas de solucionar problemáticas matemáticas a través de la comunicación de ideas entre alumnos desarrollando la responsabilidad de aprender en conjunto dejando al margen la imagen del profesor como autoridad principal y única a una de moderador o guía. Es por ello que se espera que en el grupo Piloto el resultado cuantificable sea superior al grupo de Referencia; así mismo se observen actitudes de trabajo responsables, autónomas y respetuosas.

La exposición del contenido de la tesis se desarrolla en 4 capítulos:

En el Capítulo 1 se describen las características del Modelo Educativo del Colegio de Ciencias y Humanidades, su población estudiantil y la forma en que se aborda el tema de las Funciones Trigonométricas en el marco de la enseñanza de las Matemáticas del Colegio. Este modelo permite la adaptación de estrategias, técnicas y procedimientos didácticos que se enfocan a resolver problemáticas particulares que enfrentan tanto el alumno como el profesor en la actividad didáctica. Observar y analizar estas situaciones con detenimiento orienta la actividad a un diseño integral utilizando recursos acordes a las necesidades y circunstancias que limitan el aprendizaje. Estas limitaciones se manifiestan en el equilibrio entre la libertad y la responsabilidad tanto en el alumno como en el profesor, las suposiciones que el docente realice respecto al aprendizaje tienen consecuencias cognitivas sobre el alumno. Es por ello necesario que el profesor ante el contexto de la libertad de cátedra que ofrece el modelo reflexione acerca de su quehacer educativo identificando las resistencias, carencias y obstáculos que posiblemente limitan el desarrollo de la actividad académica.

El Capítulo 2 presenta la problemática del estudio de las Matemáticas y los fundamentos del Trabajo en Grupo. Se analiza la importancia del Currículo como la base para la actividad académica orientada a la definición de objetivos y procesos de la enseñanza. Este capítulo detalla el ambiente educativo y su influencia en el desarrollo de nuestra labor educativa como profesores.

La Secuencia Didáctica y las Actividades son descritas en el Capítulo 3 así como la evaluación, siendo la planeación y la elección de materiales el antecedente de esta actividad. Los actores e interacciones, la forma de organizar las actividades y el desarrollo se presentan con el propósito de mostrar la actividad educativa como una labor articulada con el propósito de permitir al alumno el trabajo en grupo.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos y se realiza un análisis de los mismos. Con respecto a los resultados obtenidos se utilizó como herramienta un examen compuesto de elementos teóricos y prácticos expresados en ejercicios. La consideración para elaborar el examen parte del supuesto de que el alumno no solamente debe conocer el concepto sino aplicarlo a la resolución de situaciones matemáticas que reclaman el análisis y vínculo sobre el tema relacionado. Los indicadores utilizados en el examen fueron conceptuales, analíticos, de identificación visual y de aplicación. Un tema que demanda la aplicación de estos elementos es por ejemplo el de la tangente de $\frac{\pi}{2}$ debido a que se debe conocer la definición de la identidad trigonométrica (conceptual), analizar la consecuencia de dividir un número entre cero (analítico), su interpretación gráfica expresada en asíntota (visual) y su utilización en problemas de aplicación.

CAPÍTULO 1

MARCO REFERENCIAL

1.1 Introducción al Marco Referencial.

Las Matemáticas permiten al alumno adquirir conocimientos que promueven el razonamiento y la extensión de su campo de conocimiento. Este pensamiento ordenado y lógico posibilita adquirir habilidades para otras disciplinas que requieren de un pensamiento con tales características.

En la presente tesis se plantea que el alumno al trabajar en grupo logra desarrollar y adquirir habilidades no solamente matemáticas sino de respeto y colaboración social. De igual manera el profesor adquiere también la responsabilidad de encaminar la actividad no solamente como una guía sino como un elemento que transmite al alumnado valores más allá de adquirir conocimientos (Bermejo Fuentes, 1997). Es entonces necesario subrayar que los profesores tendrán un papel vital para favorecer y propiciar un ambiente próspero para el desarrollo del aprendizaje, con las decisiones que este tome, la comunicación que establezca con los alumnos y el escenario tanto físico como intelectual que genere (NTCM, 2000).

Con la perspectiva de trabajo en conjunto se espera inicialmente que la Matemática sea atractiva para los alumnos, de esta manera aprende a formular y explorar conjeturas partiendo de evidencias y utilizando su propio lenguaje para confirmar o refutar un conocimiento. En un ambiente colectivo es posible experimentar la libertad de proponer diversas ideas propias sujetas al análisis grupal. Es entonces que el alumno desarrolla la responsabilidad de aprender en conjunto dejando a un lado la imagen del profesor como autoridad principal pasando a una de moderador o guía. En ésta forma de trabajo el alumno se enfrenta a las actividades siendo él mismo el elemento principal de la actividad. Jeremy Kilpatrick menciona que al enfrentar la resolución de un problema el sujeto se desenreda a sí mismo de su problema o situación (Kilpatrick, 2000).Es hasta que el alumno se apropia de las actividades en el aula que opera sobre conceptos, ideas, procedimientos y cuestionamientos que de manera pasiva no lograría realizar.

Desde el punto de vista histórico las matemáticas han sido claves para el desarrollo del pensamiento humano. Su evolución a lo largo del tiempo ha involucrado a innumerables intelectuales e investigadores en torno a ellas. Se desataca entonces la naturaleza de las Matemáticas y de quienes la estudian (De Lorenzo, 1998):

- El Matemático ha sido un pensador.
- Las Matemáticas hacen ver lo que no se ve y no ver lo que se ve.

Las matemáticas son un producto cultural y de libertad intelectual de la humanidad (Díaz-Barriga, Larios Osorio, Padilla Gómez, Bravo Mojica, Meda Guardiola, & Fernández Villanueva, 2002) .Bajo ésta perspectiva se presenta al alumno el tema de las Funciones Trigonométricas intentando que su aprendizaje contenga un componente histórico sin dejar a un lado los elementos propios de la disciplina. Se busca también el tránsito paulatino entre un conocimiento estático al vínculo entre este y su aplicación en fenómenos físicos como lo es el de la electricidad o el sonido.

1.1.1 Problemática General de la Matemática.

Como se ha mencionado las Matemáticas son el resultado de un proceso histórico que involucra la colaboración de diferentes pensadores e investigadores en problemas y temas de interés matemático. En el aula se presentan entonces conocimientos que tienen la característica de ser compactos y sintetizados, prueba de ello son las fórmulas utilizadas en geometría analítica, procedimientos mecánicos en la obtención de funciones polinomiales, la presentación misma de un número imaginario obedece a la aceptación inicial de su existencia no obstante su demostración o análisis de la historia de procedencia. A manera de ejemplo de esta problemática se presenta una breve discusión sobre la dificultad de entender el contexto y el antecedente de un conocimiento que se ha convertido en rutinario pero que resulta de una situación que reclama un análisis y reflexión matemática.

1.1.1.1 La multiplicación de dos números.

El pensamiento de René Descartes se destaca por su gran capacidad de presentar conocimientos sustanciales, su aplicación posterior se presenta como un conocimiento preciso y su extensión nos lleva a otro nivel superior al planteado inicialmente. Prueba de ello es el siguiente análisis de la expresión planteada en La Geometría de Descartes:

“Todos los problemas de la Geometría pueden ser reducidos fácilmente a términos tales que no sea necesario posteriormente para construirlos, sino conocer la longitud de algunas líneas. Tomando una línea que consideraré como la unidad y teniendo otras dos líneas, encontrar una cuarta línea que sea cada una de las líneas dadas como la otra es la unidad (lo cual es lo mismo que la multiplicación) (Descartes,1637,p.6) ”

En el párrafo anterior se presenta un concepto fundamental en la matemática moderna: el invariante. Descartes presenta a ***la unidad*** como el elemento que nos permite realizar comparaciones entre diferentes segmentos. Este aparente sencillo elemento es la base para todo el análisis geométrico moderno. En su momento Euclides plantea un invariante que permite el desarrollo de la Geometría Plana: el ángulo recto. Sin estos elementos la construcción de conceptos superiores se encuentran limitados. La multiplicación que se plantea obedece a una construcción geométrica que se analiza a continuación.

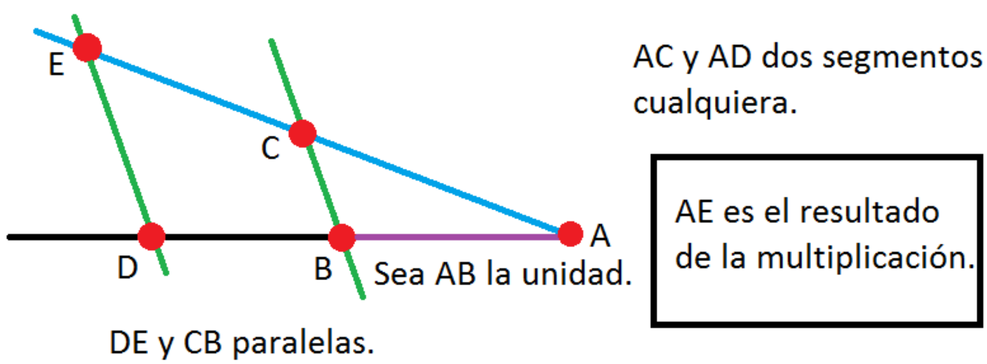


Figura 1 Multiplicación Geométrica

Al analizar en el texto “la cuarta línea sea a cada una de las líneas dadas como *la otra* es a la unidad” puede representarse como sigue:

Líneas iniciales: AD y CD.

La cuarta línea o resultado: AE.

La unidad: AB.

Así, la línea AD cabe en AE el mismo número de veces que AB cabe en CD.

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

De manera correspondiente AC cabe en AE el mismo número de veces que AB cabe en AD.

$$\frac{AE}{CD} = \frac{AD}{AB}$$

Esta forma de presentar la multiplicación no implica el manejo numérico acostumbrado sino la búsqueda de una línea que cumpla con una doble proporción combinada, es decir, encontrar una línea que se compare con una línea dada así mismo con la unidad y la otra línea. Cumpliéndose ésta situación con ambos segmentos.

Con esta perspectiva el resultado de multiplicar 4 por 2 no obedece al recurso mnemotécnico del registro de una tabla sino a la búsqueda de una línea que tenga las características anteriores.

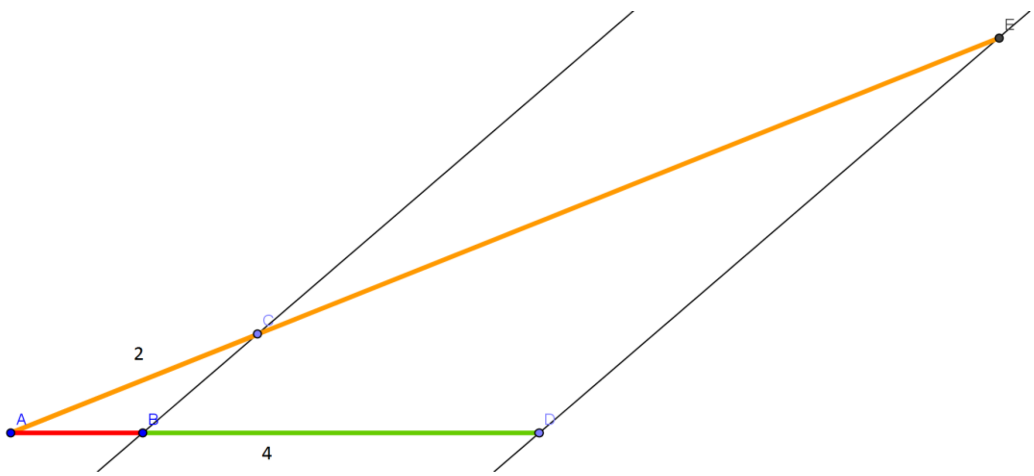


Figura 2 Multiplicación con líneas.

El segmento AC=2 , AD= 4 . Estos es:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{8}{4} \text{ cabe lo mismo que } \frac{AC}{AB} = \frac{2}{1} \text{ (2 veces)}$$

De igual forma:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{8}{2} \text{ cabe lo mismo que } \frac{AD}{AB} = \frac{4}{1} \text{ (4 veces)}$$

El segmento buscado es AE dadas la líneas AC y AD, igual a 8.

Con este ejemplo se destaca la importancia del contexto histórico-conceptual de un saber matemático que en muchas ocasiones se presenta sintetizado o compactado para que el alumno lo utilice de manera mecánica y automática sin reflexionar sobre el origen y trascendencia.

1.1.2 La función.

Antecedentes.

Pese a los estudios que se han realizado sobre la historia de las matemáticas existen escasos estudios específicos sobre el origen del concepto de función además de que algunos resultan contradictorios. Mientras que algunos autores admiten cierto carácter funcional en los trabajos de astronomía de los babilonios, otros sitúan el nacimiento junto con la aparición de la Geometría Analítica de Descartes. Algunos todavía sitúan su aparición en pleno siglo XIX con las definiciones clásicas de función planteadas por Dirichlet y Lobatchevsky (Alsina & Fortuny, 1997).

Si se tiene que fijar un periodo en el cual situar el nacimiento del concepto de función, este se encontraría a mediados del siglo XVII. En este siglo se ubica el trabajo de Descartes, Fermat, Newton y Leibniz. No obstante que el trabajo sobre el Cálculo Infinitesimal fue intenso en este periodo la idea de función era todavía muy restringida, pues se reducía a las funciones analíticas, las que se pueden expresar mediante una ecuación algebraica y las desarrolladas en series de potencias. Fue hasta el siguiente siglo cuando Euler dio la primera definición de función, a partir de este momento las generalizaciones ocurrirán como el resultado de incluir funciones cada vez más complejas, hasta llegar a definiciones modernas que incorporan el lenguaje de conjuntos.

A continuación se presentan los tres momentos en donde el concepto de función ha transitado para llegar a su idea moderna:

- Mundo Antiguo: es la época en la que, a pesar de la existencia de estudios sobre casos particulares de dependencia entre dos cantidades, no aparecen nociones generales sobre cantidades variables y funciones. Dentro de este periodo se presentan aportaciones de los babilonios, es la cultura de referencia obligada para el estudio de fenómenos de cambio y de la determinación de leyes cuantitativas obtenidas por medio de tablas. De igual forma la cultura griega destaca por su importancia y su influencia en diversas áreas matemáticas.

- Edad Media: en este periodo se tienen de manera explícita nociones generales, en forma geométrica o mecánica, en donde existe una dependencia entre dos cantidades variables y se expresa mediante una descripción verbal o a lo más con un gráfico, quedando relegada la determinación de leyes cuantitativas de los fenómenos de cambio. Dentro de esta etapa se presenta el cambio de mentalidad que se produce al estudiar los fenómenos naturales, prueba de ello en Francia e Inglaterra con los estudios del movimiento así como las aportaciones de Oresme haciendo los primeros intentos de representación gráfica de la dependencia entre variables.
- Periodo Moderno: se inicia a finales del siglo XVI y se puede considerar como el de la aparición del concepto de función con aproximaciones cada vez más amplias y generales, en el cual el estudio del movimiento se convierte en un problema esencial, al mismo tiempo que el descubrimiento de la Geometría Analítica permite el desarrollo de las expresiones algebraicas de funciones. En la segunda mitad del siglo XVII la expresión de funciones por medio de series de potencias permitió ampliar el campo de las funciones tratadas analíticamente. Fue precisamente el método analítico para introducir las funciones lo que revolucionó las matemáticas y aseguró un lugar privilegiado al concepto de función. Ya en el siglo XVII esta interpretación de las funciones como expresiones analíticas resultó restrictiva, produciéndose nuevas definiciones del concepto general de función que serán aceptadas universalmente al análisis matemático.

1.1.3 Definición de Función.

De una forma general podemos decir que una función matemática no es más que una ley o regla que regula la dependencia entre cantidades y objetos variables. Su importancia se debe al enorme campo de aplicaciones teóricas y prácticas. Por ejemplo en física se puede relacionar magnitudes como la velocidad o el calor en relación con la presión o la aceleración.

La definición que se presenta relaciona los conjuntos (Gómez, 2004):

La función es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento del conjunto D uno y solo un elemento del conjunto C. Tenemos una función cuyo dominio es el conjunto D y su contradominio es C, siendo su representación:

$$F: D \rightarrow C$$

En la siguiente figura se presentan ejemplos de la diferencia entre una función y de simples relaciones entre conjuntos.

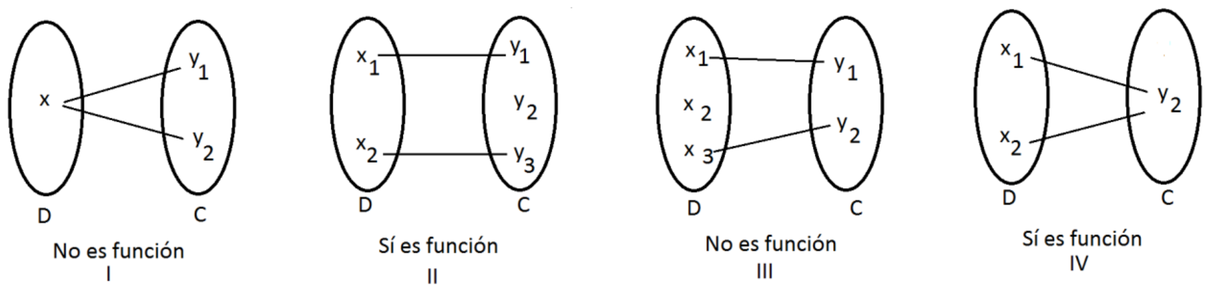


Figura 3 Ejemplos de Función.

Destaca la situación en el caso IV donde aparentemente dos elementos del conjunto del Dominio se relacionan con uno del Contradominio. Un ejemplo podría ser la siguiente función en donde dos elementos del dominio se asocian con uno del Contradominio no rompiendo la definición de Función.

$$f(x)= \sqrt{x^2 - 9}$$

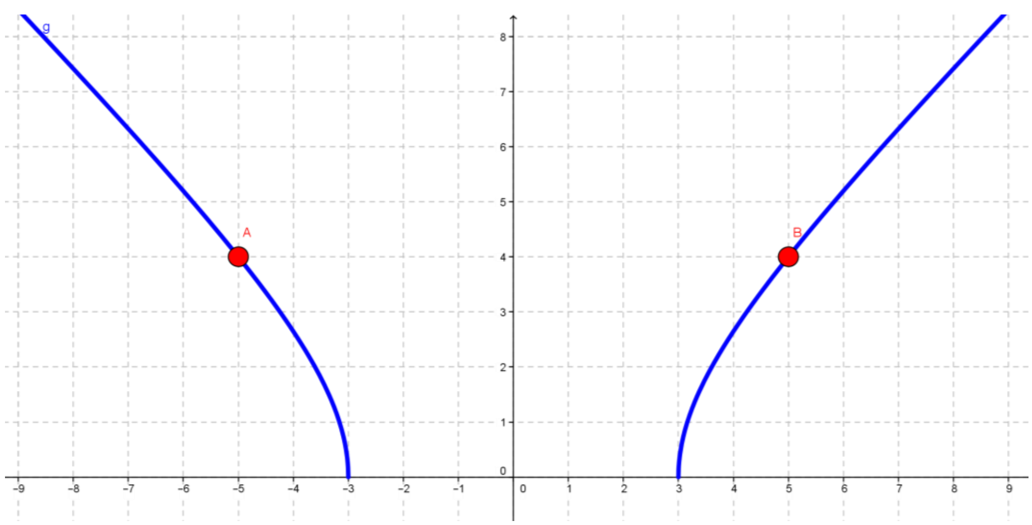


Figura 4 Ejemplo de Función

Para dos valores del Dominio existe asociado un valor del contradominio:

A(5,**4**) y B(-5,**4**)

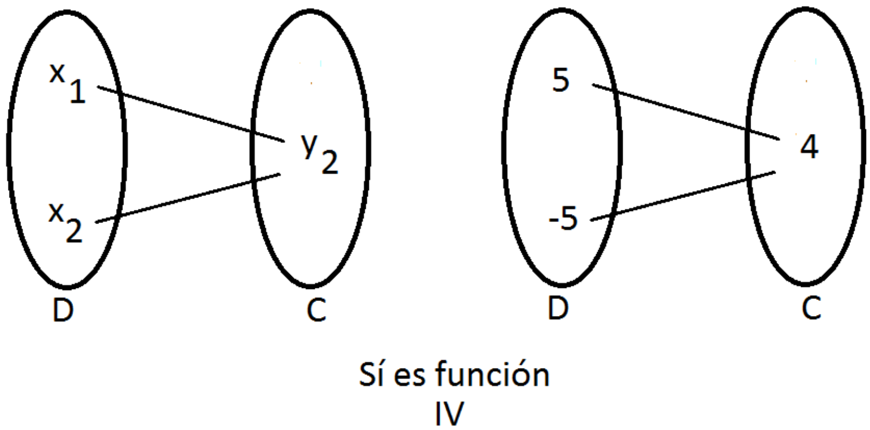


Figura 5 Casos Especiales

Otra forma de conocer si una relación es función es aplicando la condición de la recta paralela al eje de las ordenadas en relación al caso I con la expresión:

$$y^2\text{-}6x= -9$$

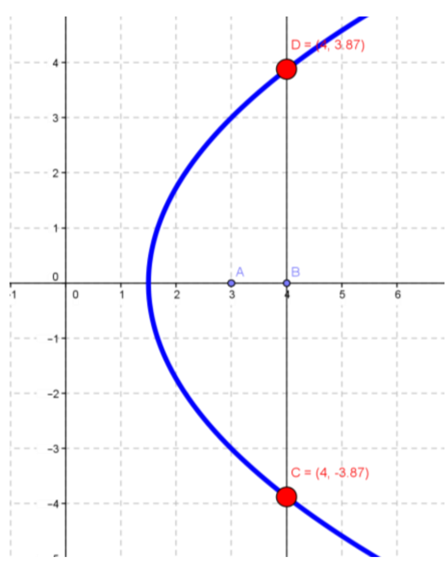


Figura 6 Relación asociada a dos puntos.

La expresión anterior no es una función debido a que a un elemento del Dominio se le asocian dos valores del Contradominio. Esto se puede observar con los puntos C y D.

C(4,3.87) y D(4,-3.87)

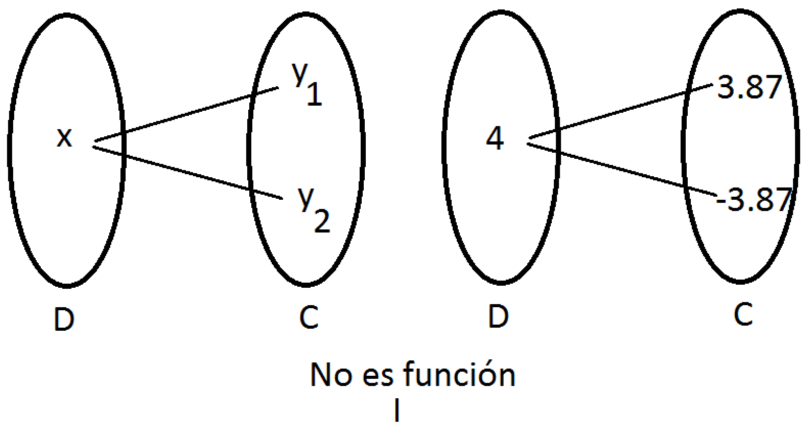


Figura 7 Relación con dos elementos.

La función en el Currículo.

El concepto de función destaca en el currículo por su importancia para el desarrollo del lenguaje de las gráficas ya que constituyen una forma de conocimiento y de transmisión de la información básica en diversos contextos y debido que a través de estas es posible construir nuevos conceptos, ya sea de manera intuitiva o visual, que posteriormente permitan elaborar conceptos articulados y de mayor profundidad conceptual.

La idea de función nace a partir del estudio de fenómenos de cambio, y se expresa a través de diversos lenguajes (Gómez, 2004):

- Verbal
- Tabulado
- Gráfico
- Algebraico

Cada uno de estos pone en relieve las características inherentes de la función. Uno de los ejes fundamentales de la función ha sido el estudio del movimiento, y es la necesidad de determinar con precisión cómo varían ciertas magnitudes que interactúan y dependen entre sí lo que ha dado sentido el estudio de las funciones. Es entonces necesario que el alumno esté capacitado para la lectura e interpretación de la información que se presenta gráficamente a través de una función, llegando a extraer las características esenciales de la misma.

El manejo de las funciones permite al alumno no solamente utilizar el lenguaje matemático para la construcción de gráficas a través del análisis y la operación de herramientas algebraicas sino la formulación de conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica.

1.1.4 Las Funciones Trigonométricas.

La trigonometría como actualmente la estudiamos fue el resultado del análisis e investigación de matemáticos Persas y Árabes de la era Islámica. Hay que recordar que la trigonometría de Ptolomeo fue principalmente concebida como la ***medida*** de cuerdas en los círculos. Los matemáticos Hindúes aportaron la “cuerda-media” (el predecesor del seno) pero fueron los árabes quienes crearon y usaron las cantidades trigonométricas (Suzuky, 2001).

Hasta el siglo XVII, el seno (y las otras funciones trigonométricas) fueron consideradas generalmente como longitudes de “sombras” (miqyas en árabe) perpendiculares a una “pared vertical” (la “sombra inversa”), se observa que éstas longitudes fueron importantes para la construcción de relojes de sol.

Sin embargo, en la era de Nasir Eddin, estas líneas fueron definidas en términos de longitudes relacionadas al círculo. Este no es nuestro concepto absoluto moderno, dado que es una longitud y no una “proporción”.

Para seguir con esta forma antecedente se presenta gráficamente los elementos que de las proyecciones (sombras) correspondientes:

1.- Seno de la cuerda AB: línea AC que es perpendicular al radio OB.
2.- Seno del arco complementario (restante) AE: línea AD.
3.- Línea Tangente: BF
4.-Línea Tangente: EG
5.- La hipotenusa de la sombra: OF
6.- La hipotenusa de la sombra inversa:OG

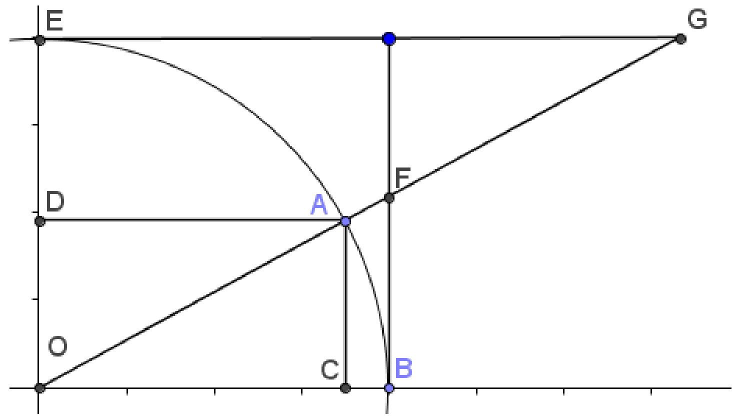


Figura 8 Longitudes Trigonométricas

La transición conceptual de las identidades trigonométricas de longitudes a razones transcurren con el devenir histórico de los avances e investigaciones del conocimiento matemático. Como se ha mencionado anteriormente es a partir de la definición de función a través de conjuntos asociados con una regla o ley de correspondencia que se logra presentar la Función Trigonométrica como la asociación de las proyecciones sobre los ejes coordenados de la relación de las identidades trigonométricas que serán presentadas gráficamente. De esta forma se plantea que a través de una función se puede relacionar el giro del círculo unitario con cualquier identidad trigonométrica. Esto es:

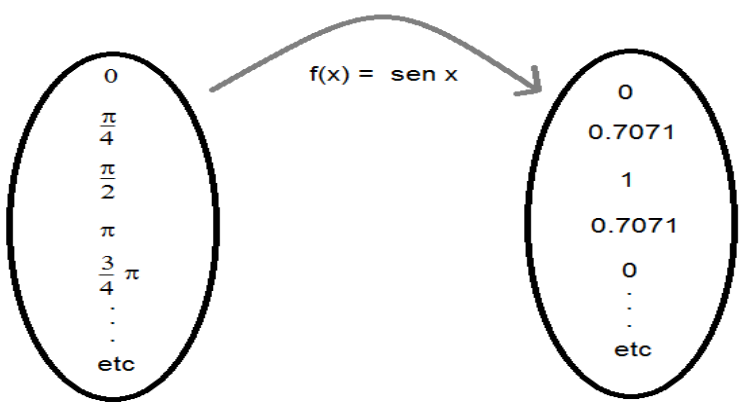


Figura 9 Relación de Conjuntos en Función Seno

Problemática del Aprendizaje de las Funciones Trigonométricas.

El uso del lenguaje y la esquematización (Freudental, 1976) han sido las herramientas principales tanto del aprendizaje como de la construcción de conceptos matemáticos. Es por ello que en el presente trabajo se observa la necesidad de que el alumno utilice inicialmente un lenguaje coloquial o cercano a su campo de conocimiento para transitar paulatinamente hacia el lenguaje matemático formal y compacto. Prueba de ello es la identificación como “sombras” en el eje cartesiano a las proyecciones del radio del círculo unitario, siendo utilizado al final del aprendizaje como sigue:

“proyección de la sombra en el piso”: cos x

“proyección de la sombra en la pared”: sen x

Es entonces necesario enfocarse a la problemática de encontrar el camino hacia la transición de un conocimiento inicial básico a uno cada vez más sofisticado. Por ejemplo el proceso de abstracción de una situación cotidiana, como lo es la sombra producida por una lámpara o sol, hacia un esquema o gráfica en el plano cartesiano. El cambio de perspectiva es fundamental para plantear diversas proposiciones acerca de lo observado. Aquí un ejemplo:

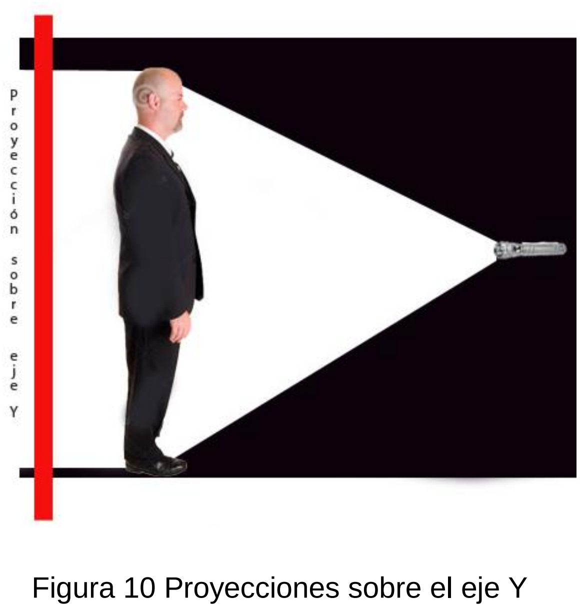


Figura 10 Proyecciones sobre el eje Y

Figura 11 Proyecciones sobre el eje X

Situar al alumno a un contexto conocido es una de las problemáticas iniciales ya que esta es la base para la transición, en las figuras anteriores se destaca la visualización en un ambiente (cuarto obscuro) y elementos que interactúan entre sí (hombre, lámpara, sombra). De esta forma la relación entre “sombra” y proyección se entrelaza y vincula con el cambio de perspectiva (cambio de posición de la lámpara).La observación de esta situación conlleva a que, en el caso de la proyección sobre el eje X, la proyección no “exista”, lo que matemáticamente se presenta como un valor igual a cero.

Adicional al cambio de perspectiva se presenta la problemática de que el objeto (hombre) tiene la propiedad de movimiento. Es así como la transición de un objeto conocido (hombre) transita a un objeto matemático (radio del círculo unitario).

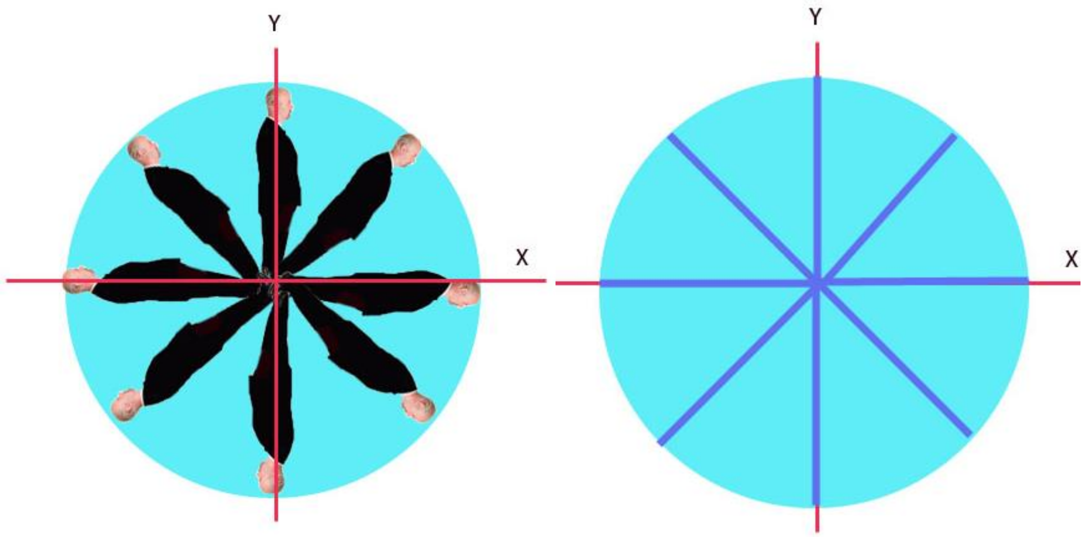


Figura 12 Transición de Representaciones

Es así como el proceso de abstracción se registra al transitar de una idea básica inicial a una de mayor nivel jerárquico conceptual como lo es asociar las proyecciones con el ejes cartesianos con “sombras” relacionados con un movimiento del objeto matemático. El siguiente estado de aprendizaje obedece a la manipulación de las identidades trigonométricas que anteceden y su posterior representación gráfica vinculando el giro con el aumento o disminución de las proyecciones.

1.2 Modelo Educativo del Colegio de Ciencias y Humanidades.

El Colegio de Ciencias y Humanidades fue fundado en 1971 como un Bachillerato que adopta principios donde se considera al estudiante como un individuo capaz de captar por sí mismo el conocimiento y sus aplicaciones. Este bachillerato es considerado de Cultura Básica, lo que significa que preparará al estudiante para ingresar a la licenciatura con los conocimientos necesarios para su vida profesional (http://www.cch.unam.mx/misionyfilosofia).

Bajo la concepción de que el alumno es un sujeto de cultura y de su propia educación se derivan los siguientes puntos:

a) Formar e incrementar en el alumno actitudes como la propia del conocimiento científico ante la realidad, la curiosidad y el deseo de aprender, así como aptitudes para la reflexión metódica y rigurosa.
b) Acentuar su participación y actividad en el proceso del aprendizaje.

c) Favorecer su libertad de opinión y que esta se ejerza de manera cada vez más exigente, así como fomentar, en el trabajo en grupo y en las distintas formas de producción personal.

El Modelo Educativo promueve las siguientes habilidades (Camacho, 2005):

- Saber buscar y analizar información.
- Saber leer e interpretar textos y comunicar sus ideas.
- Saber observar y formular hipótesis.
- Saber experimentar y verificar procedimientos.
- Saber establecer modelos y resolver procedimientos.
- Desarrollar procesos mentales inductivos, deductivos y analógicos.

Las tres orientaciones del quehacer educativo del Colegio de Ciencias Humanidades se sintetizan en: aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a ser. Con estas perspectivas el alumno podrá adquirir conocimientos por sí mismos, desarrollando su autonomía. Desarrollará habilidades para utilizar diferentes elementos, métodos y procedimientos para contribuir en su proceso de aprendizaje. Y finalmente sus actividades estarán inmersas en valores que contribuirán al desarrollo como ser humano.

El trabajo que se presenta está enmarcado en el Modelo del Colegio y busca contribuir en el desarrollo del alumno cubriendo no solamente aspectos temáticos sino, en lo posible, en el aprendizaje de la convivencia y el respeto hacia los demás.

La Secuencia Didáctica busca fomentar el trabajo individual, en equipo y grupal en beneficio del desarrollo del alumno teniendo como marco el ambiente que se puede fomentar dentro del Colegio de Ciencias y Humanidades. La búsqueda del conocimiento auténtico y la formación de actitudes representan uno de los desafíos más importantes en el trabajo colectivo e individual.

1.3 Características de la Población Estudiantil

La población estudiantil está conformada por jóvenes cuyas edades se encuentran entre 16 a 17 años, es posible que existan casos especiales fuera de rango , sin embargo esta es la edad promedio de los alumnos. Los alumnos, en su mayoría, pertenecen al área metropolitana de la Cd. de México en función del Plantel de cercanía. En el caso del Plantel Azcapotzalco en su mayoría proviene del Distrito Federal y zona conurbada (Atizapán de Zaragoza, Cuautitlán y Tultitlán).

Con información obtenida del documento Características Socio-Escolares y Trayectoria Académica de los Alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades Generación 2006, se ha podido determinar que el 90% de los alumnos recibe apoyo económico de uno o ambos padres y su familia está conformada de dos a cinco personas, alrededor del 50% de los padres tiene un nivel de escolaridad mayor que la secundaria; y que el ingreso económico familiar del 76% es mayor de 2 pero menor de 10 salarios mínimos. No obstante a estos datos se señala que se presentan casos diferentes en los que las familias se encuentran desintegradas, cuyos padres no cuentan con estudios mayores a la secundaria o que su ingreso es menor a los 2 o mayor de los 10 salarios mínimos.

Resulta importante considerar el tiempo que los alumnos dedican al estudio de los contenidos temáticos analizados. Es necesario entonces recordar que los alumnos se encuentran en un proceso de adaptación y aprendizaje social y psicológico, por ello es importante resaltar que existirán comportamientos, como la rebeldía o inestabilidad, durante el proceso de aprendizaje y es necesario comprender y respetar el comportamiento propio de los mismos.

1.3.1 Adolescencia en alumnos.

El adolescente tiene la tendencia de afirmar su personalidad propia y el sentimiento de desequilibrio inherente de esta etapa. El alumno se encuentra ante un conflicto entre sus aspiraciones y temores, esto le provoca manifestaciones como rebeldía, desasosiego y desequilibrio. En esta etapa el alumno se encuentra en la interacción social y su conducta es moldeada por el equilibrio del exterior social con el interior psicológico. El adolescente asume actitudes diversas, busca demostrar su fuerza y convicción ante los demás y se encuentra en un constate aprendizaje y sobre todo regulación de emociones y acciones dentro y fuera del aula. Estas conductas son particulares a cada individuo y género manifestándose de gran variedad de formas y generando situaciones que en ocasiones no son predecibles. Es así como el adolescente sufre un proceso de regulación y experimenta gran cantidad de emociones y pensamiento, registrando en ocasiones emociones extremas y en ocasiones paradójicas.

Es por ello necesario reflexionar sobre el momento en el que se encuentra el alumno para actuar conforme al respeto y equilibrio que esta etapa reclama para presentar al alumno un ambiente en donde pueda aprender no solamente aspectos temáticos matemáticos sino valores de respeto y convivencia.

Hay que recordar que la adolescencia debe contemplarse como una transformación social, más que biológica, este enfoque psicosocial constituye una forma de caracterizar al alumno que asiste al Colegio de Ciencias y Humanidades. La adolescencia no existe independientemente de un contexto social definido. La idea misma de la adolescencia es una creación de las fuerzas psicosociales operantes en una época dada (Rutter, 2003):

“La adolescencia es reconocida y tratada como una etapa distintiva del desarrollo debido a que la coincidencia de una educación más extensa y una maduración sexual temprana han dado lugar a una fase prolongada de madurez física asociada con una dependencia económica y psicosocial; a que muchas de las teorías psicológicas ampliamente aceptadas especifican que la adolescencia debería ser diferente; a que los intereses comerciales exigen una cultura de los jóvenes, y a que los colegios y universidades determinan que grandes cantidades de jóvenes se mantengan juntos en un grupo social segregado por la edad(Rutter,2003:p.65)”.

La búsqueda de identidad es un aspecto esencial de la experiencia misma de la adolescencia y los problemas relativos a la misma. Se puede definir como alguna perspectiva y dirección fundamental que cada joven debe forjarse por sí mismo (Erikson, 1958) .

En la ponencia presentada por la Licenciada en Pedagogía Consuelo Velázquez Méndez Técnica Académica del Área de Psicopedagogía del Colegio de Ciencias y Humanidades se caracteriza al alumno describiendo sus vínculos con diferentes subsistemas:

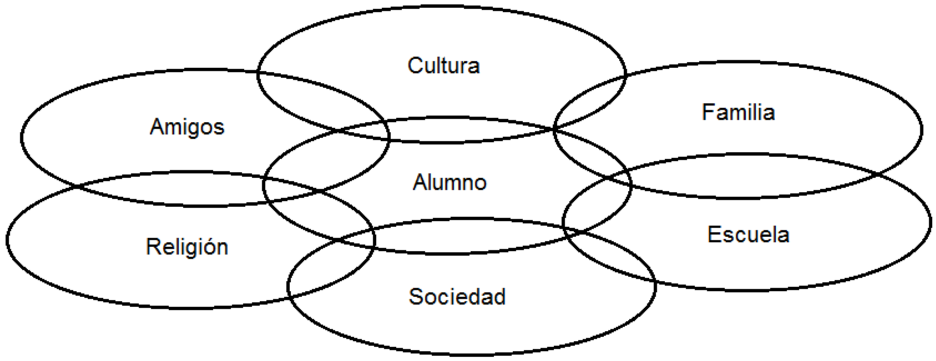


Figura 13 Vínculos con Subsistemas

Estos elementos influyen de manera particular a cada alumno produciendo un proceso interior de adaptación y regulación a los ámbitos que interactúan con mayor intensidad. Velázquez apunta que los orígenes de los “problemas” en la adolescencia no residen únicamente en una relación directa entre las figuras parentales y los hijos en esta etapa. Existen tensiones entre pares que pueden ejercer una enorme influencia sobre los adolescentes. Es en esta etapa que la irregularidad del comportamiento se presenta con mayor intensidad y el alumno se encuentra expuesto al medio en el que se desarrolla. Durante los últimos 20 años se han producido grandes cambios en la vida familiar; la familia vertical tradicional de tres generaciones, ha sido gradualmente reemplazada por la organización horizontal compuesta por padres, amigos y “mundo externo”. Y aún este sistema horizontal ha estado sufriendo una mayor variación que el sistema vertical de las generaciones anteriores.

Una consecuencia del hecho de que la familia se haya convertido en una institución más inestable es que el adolescente recurre más a sus pares y hermanos, siendo esta la influencia más fuerte para ellos. Se constata que en la medida en que el subsistema parental es débil se produce una efectiva renuncia a la autoridad parental y la consecuencia es que el subsistema fraterno se vuelve aún más poderoso. Resalta le reflexión de que una característica común a las familias que presentan situaciones difíciles de manejar como delincuencia, violencia o adicciones; es que la autoridad ha sido debilitada de alguna manera o en caso de existir se trataba de una figura paterna transitoria. Dentro de esta segunda categoría, el padre tiende a delegar la crianza y la formación de los hijos enteramente en la madre.

En relación al aspecto académico, los hábitos y estrategias de estudio de los alumnos que ingresan al Colegio, se observa que cerca del 90% estudian solos; mientras que el 10% estudia en equipo. Un 90% estudia en casa y el 10% se distribuye entre la biblioteca, el transporte y el parque (Muñoz Corona & Avila Ramos , 2012) . Se observa entonces que no es común el hábito del trabajo en equipo para el desempeño de las actividades escolares. También se reporta en este estudio que la mayoría de los estudiantes tienen acceso a internet y al uso de las computadoras, sin embargo las actividades realizadas son generalmente de entretenimiento, por lo que es necesario canalizar estos recursos como herramientas para mejorar el aprendizaje.

1.3.2 Disciplina y Conducta.

Las conductas negativas pueden entorpecer el desarrollo de las actividades en el aula y fuera de ella, es necesario entonces reconocer que la negligencia es una forma disimulada de rebeldía, es el desinterés por cumplir con las reglas y tareas .La negligencia representa también el símbolo de una provocación a la imagen de autoridad, un desapego con lo que se establece. La indisciplina al igual que la negligencia manifiesta la inconformidad del alumno adolescente a asumir lo que la autoridad plantea, la historia previa del alumno en ciclos anteriores (primaria y secundaria) estuvo plagada del cumplimiento de reglas y normas de conducta que en el ciclo bachillerato se comienzan a romper en función del marco psico-social de cada alumno adolescente.

La disciplina tiene varias acepciones, el término de manera directa designa a una rama del conocimiento o a una materia de estudio, sin embargo ha sido portador de varios significados, tales como sanción, dolor, instrumento de castigo, dirección moral, regla de conducta así como la obediencia a ella (Estrela, Autoridad y Disciplina en la Escuela, 2005). Hoy en día cuando hablamos de disciplina no solo se refiera a las reglas y el orden sino las sanciones ligadas a su infracción y los sufrimientos que de ello siguen. La disciplina se inscribe en un marco ético de orden social, el cual es resultado de determinada modalidad de convivencia que contribuye al equilibrio de dicho orden (Andueza, 1985).

El acto pedagógico, basado en el profesor como centro del proceso de aprendizaje, exige orden y disciplina con objeto de que el mensaje no sufra perturbaciones. El desafío que presenta el trabajo en grupos es la posibilidad de transitar de la disciplina impuesta a la disciplina autónoma, con lo que el alumno se adhiere consciente y voluntariamente a las reglas para permitir un adecuado desarrollo de las actividades. Es entonces necesario lograr el equilibrio entre la disciplina y las tareas desarrolladas en el aula como elemento de motivación para el alumno al encontrar en ellas una plataforma y ambiente propicio no solamente para aprender un tema sino actitudes que contribuyan a su desarrollo social y personal.

En los alumnos del Colegio se presentan actitudes de resistencia inicial al trabajo en grupo de acuerdo a aspectos interpersonales. Esta situación no es general ya que debido a la diversidad de caracteres en cada grupo puede presentarse diferente dinámica y situaciones particulares como conflictos abiertos entre los integrantes de un equipo. Resulta importante la influencia que un alumno conflictivo puede tener sobre el resto del grupo o equipo. La estabilidad general puede comprometerse al no atender aspectos como el respeto e igualdad entre los estudiantes, esto podría generar un clima hostil e inadecuado.

En el alumno se ve reflejado entonces la conducta inherente a la etapa de adolescencia y el comportamiento desarrollado en los diferentes ambientes (familiar y social).Trabajar en grupo dentro del salón de clase involucra la adaptación del adolescente a un ambiente y situación, son estos elementos los que influyen en la actividad académica. En general la conducta de los alumnos del Colegio es participativa y existe disposición al trabajo en grupo, sin embargo es posible que en el desarrollo de las actividades se presenten situaciones de resistencia y conflicto en la interacción personal.

1.4 La Enseñanza de las Funciones Trigonométricas en el CCH.

1.4.1 Enseñanza de las Matemáticas.

El Colegio de Ciencias y Humanidades busca proporcionar a sus egresados una formación que les permita contar con los conocimientos suficientes tanto para continuar su formación posterior profesional como para incorporarse responsablemente a la sociedad. Para llevar acabo esto se realiza una selección de asignaturas que contengan conceptos y procedimientos previos para fortalecer los más profundos.

El Colegio concibe a la enseñanza desde esta perspectiva:

- La Matemática es un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurado que, a través de sus diversas ramas íntimamente vinculadas y en constante desarrollo, estudia las características y las relaciones cuantitativas y cualitativas de objetos abstractos que surgen de analizar situaciones concretas, mediante procesos y razonamientos cada vez más depurados. Para trabajar con ellos, se utilizan diversos lenguajes sujetos a reglas específicas, que contribuyen a dotar al conocimiento matemático de sus cualidades de generalidad y abstracción.
- El carácter abstracto y general de los conceptos, procesos, enunciados y procedimientos otorgan a la Matemática un gran potencial de aplicaciones.
- El rigor lógico con el que se aceptan como ciertas las propiedades, proposiciones y teorías matemáticas, obliga a proporcionar una rigurosa demostración de la validez de un enunciado que se establece acerca de un objeto matemático.
- No obstante la importancia del rigor lógico en la estructura del conocimiento matemática, también en su desarrollo han estado presentes la búsqueda intuitiva, los titubeos, el tanto, las suposiciones, las dudas e incluso los errores, que, si bien generalmente son desechados en el tamiz de la lógica, en ocasiones han abierto nuevos campos de exploración y contribuido a depurar los caminos para obtener respuestas a las necesidades de la ciencia y de la sociedad.

Entre los contenidos básicos en el modelo del Colegio se incluye Aritmética, Álgebra, Funciones y Geometrías Plana y Analítica. En cuanto a los métodos se plantean la resolución de problemas, formas de razonamiento y argumentación, comunicación de resultados, establecimiento de conexiones y en el uso de representaciones.

El proceso de formación del pensamiento matemático desde la perspectiva del Área Matemática en el CCH tiene un papel fundamental la interrelación entre los contextos en donde surgen y se aplican los conceptos y la construcción de la teoría propiamente matemática. El recorrido intelectual que siguen los conceptos matemáticos para ser considerados como abstracciones de contenidos concretos, constituye un valioso apoyo para el estudiante en el desarrollo gradual de su pensamiento matemático. Para ello es necesario que el alumno desarrolle una disposición y forma de pensar con las que constantemente busque y examine diferentes tipos de relaciones, plantee conjeturas, utilice distintos sistemas de representación, establezca conexiones, emplee varios argumentos y comunique sus resultados.

En el proceso gradual de pensamiento matemático interviene el uso frecuente de formas de trabajo vinculadas con características de la propia Matemática, como son: identificación de similitudes y diferencias, reconocimiento de patrones de comportamiento, resolución de problemas, construcción de procedimientos y algoritmos eficaces y expeditos. Con esto se fomenta a la vez el desarrollo de habilidades matemáticas entre las que se destacan:

- Estimación: identificar el rango de valores en los que puede estar un resultado, redondear cantidades para facilitar operaciones y contar así con una apreciación del resultado de las mismas.
- Generalización: percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente.
- Formalizar el Material Matemático: operar con estructuras más que con el contexto de una situación, operar con numerales y símbolos, combinando reglas y estrategias.
- Reversibilidad de Pensamiento: invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento.
- Flexibilidad de Pensamiento: disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito, para utilizar otros nuevos.
- Visualización Espacial: percibir esquemas geométricos contenidos en otros más complejos, o bien adelantar mentalmente el tipo de figura resultante al aplicar algún movimiento o transformación a una figura dada.

Por su naturaleza, muchos de los contenidos temáticos de los programa de Matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades forman parte del currículo de cualquier institución educativa de nivel medio superior del país. Sin embargo, la forma de enfocarlos, presentarlos y trabajarlos con el estudiante es lo que hace la diferencia. En el Colegio la concepción de la

Matemática conlleva una intención de búsqueda del desarrollo de habilidades de pensamiento que permitan al estudiante adquirir por su cuenta nuevos conocimientos y, en consecuencia, se plantea que la enseñanza considere:

I. Introducir el estudio de contenidos mediante el planteamiento de situaciones o problemas que no conlleven el inicio de fuertes dificultades operatorias, de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o las características y propiedades que se van a estudiar.
II. Propiciar que el alumno adquiera paulatinamente la habilidad de analizar enunciados y problemas y que, con el tiempo, sea capaz de hacerlo de manera independiente.
III. Proporcionar diversas actividades, con la intención de presentar oportunidades para que el alumno avance en su desarrollo conceptual, practique los procedimientos básicos y entienda la mecánica de los mismos a partir de ideas o estrategias unificadoras.
IV. Promover la formación de significados de los conceptos y procedimientos tratando, en lo posible, de que surjan como necesidades del análisis de situaciones o de la resolución de problemas y se consoliden con una actividad práctica de aplicación en diversos contextos.
V. Propiciar sistemáticamente el tránsito tanto entre distintas formas de representación matemática, como entre éstas y la expresión verbal.
VI. Enfatizar las conexiones entre diversos conceptos, procedimientos, métodos o ramas de la Matemática.
VII. Fomentar el trabajo en equipos: para la exploración de características, relaciones y propiedades tanto de conceptos como de procedimientos, lograr la discusión razonada, respetuosa y tolerante, así como la comunicación oral y escrita de las observaciones o resultados encontrados.

1.4.2 Importancia del Estudio de las Funciones Trigonométricas.

El conocimiento científico es el resultado histórico del trabajo intelectual de la humanidad, detrás de este resalta el interés por explicar la naturaleza, representarla y modificarla. Es entonces cuando las Matemáticas contribuyen a explicar dichos fenómenos (Brihuega, 1997). El correcto entendimiento y su utilización permitirán al alumno introducirse a una nueva forma de ver el mundo que le rodea, transitará de observaciones iniciales a modelos, generalizaciones y abstracciones de los fenómenos naturales. En el marco del presente trabajo son dos perspectivas las que motivan el estudio de las Funciones Trigonométricas: el desarrollo cognitivo obtenido al abordar el tema y la aplicación de éstas en otras disciplinas. La importancia del estudio radica en la utilización de las Funciones Trigonométricas para acercarse a las explicaciones de los fenómenos que se presentan en la naturaleza tales como la electricidad, las fuerzas, los movimientos y toda variación periódica que puede ser expresada en lenguaje matemático.

En relación a la aplicación de las Funciones Trigonométricas a otras disciplinas resulta esencial su comprensión debido a la amplia variedad de aplicaciones. Prueba de ello es el estudio de la acústica. Si el propósito es explicar el fenómeno del sonido la herramienta matemática por excelencia es la Función Trigonométrica. De esta forma es posible analizar los fenómenos como el timbre, volumen, tono y duración a través de la extensión de un conocimiento básico, Función Seno por ejemplo, a un conocimiento más elaborado como la Composición de Funciones (suma y resta). La diferencia de un sonido agudo y uno grave radica en la frecuencia de vibración de la onda de sonido. Gráficamente se observa así:

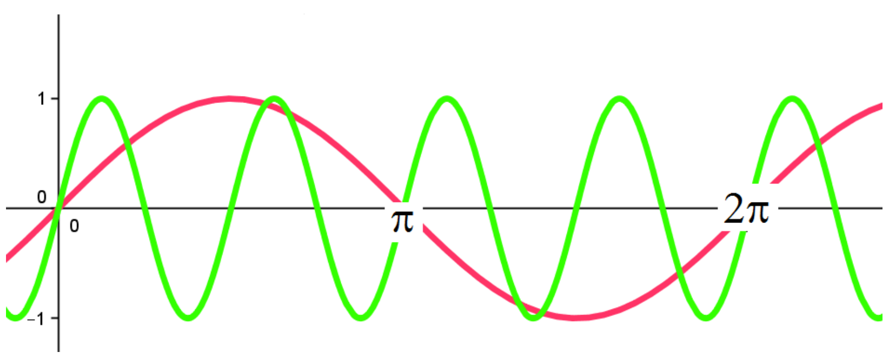


Figura 14 Sonido grave y agudo.

La idea de frecuencia permite distinguir un sonido agudo de uno grave comparando el número de repeticiones por ciclo. Un sonido fuerte comparado con uno débil se distingue por su amplitud o intensidad con la que fue producido.

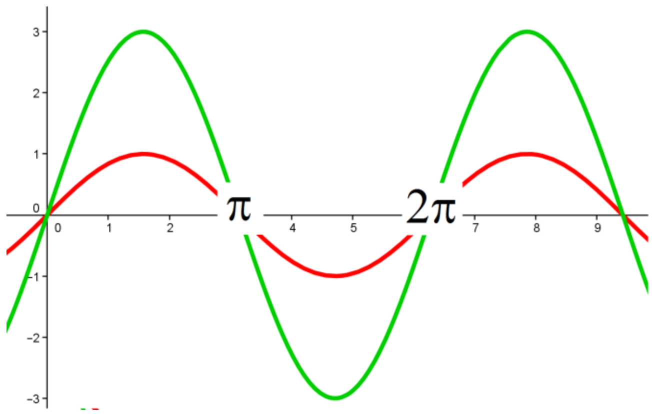


Figura 15 Intensidad de Volumen.

El timbre de un sonido es el ejemplo ideal para observar la extensión de un conocimiento básico en uno de mayor nivel jerárquico conceptual. Además se utiliza el cambio de perspectiva como una herramienta clave en la representación del fenómeno, es decir, en lugar de presentar una función en el Dominio del Tiempo se utiliza la Frecuencia para destacar el comportamiento de las componentes armónicas de un sonido.

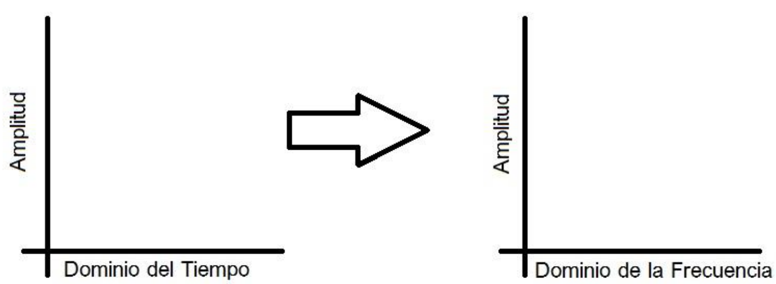


Figura 16 Cambio de Perspectiva

Así, un sonido compuesto por varias ondas se puede representar por sus frecuencias que las componen.

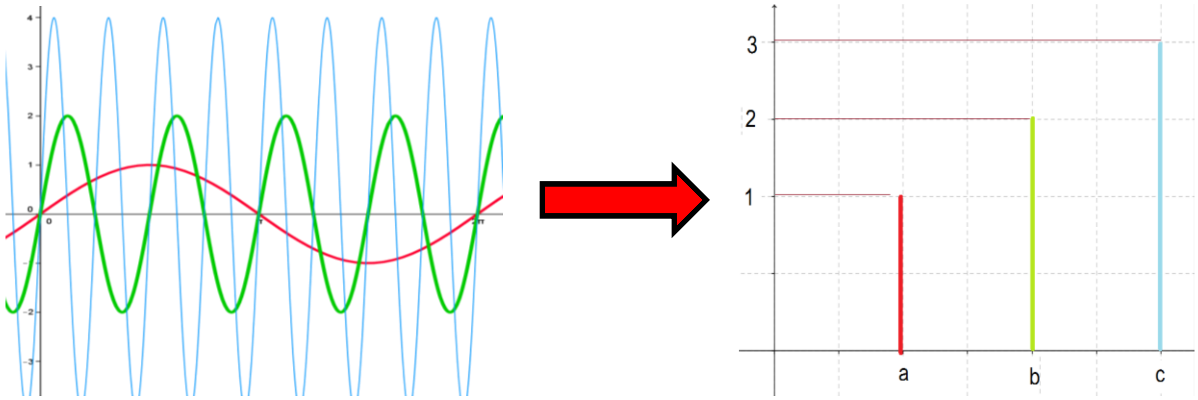


Figura 17 Transición de Análisis

En la figura anterior la onda primaria (color rojo) y las secundarias (verde y azul) se representan por su frecuencia y su amplitud. Se observa que las complementarias tienen mayor frecuencia y amplitud que la inicial. El timbre de un sonido posteriormente se representara por frecuencias que en un principio se expresaron en señales senoidales. De esta forma un concepto escala a un nivel superior de profundidad y complejidad. Es por ello necesario que el tema de Funciones Trigonométricas debe permitir al alumno contar con los elementos fundamentales de un conocimiento base para su posterior utilización para el siguiente nivel de abstracción. En otro nivel de análisis la perspectiva vinculara los fenómenos reales con su representación matemática.

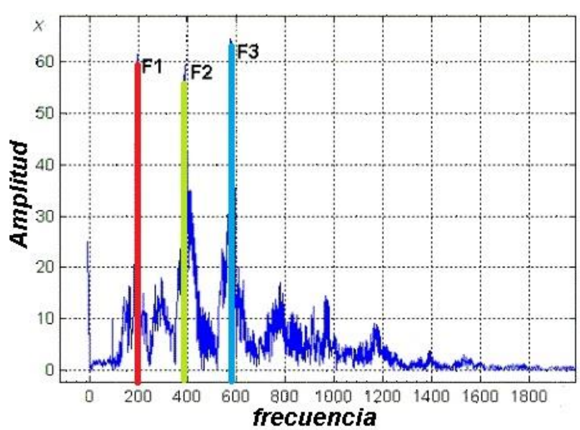


Figura 18 Voz Humana en Analizador Digital

1.4.2.1 Desarrollo Cognitivo y Aprendizaje de las Funciones Trigonométricas.

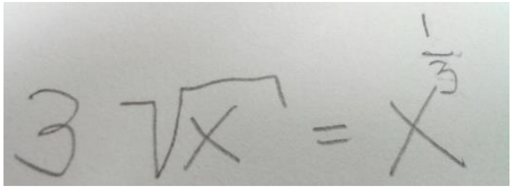
1.4.2.1.1 Aprendizaje.

Se entiende por aprendizaje al proceso registrado al cambiar una actividad que no puede explicarse con fundamento en las tendencias innatas de respuesta, la maduración o estados transitorios del organismo (Hilgard & Bower, 1979). Los escenarios que sean presentados permiten el cambio en la estructura cognitiva, los procesos individuales influyen en la profundidad de este y su desarrollo puede ser evaluado con instrumentos diseñados para este fin. En relación al aprendizaje de las matemáticas se reconoce que el individuo desarrolle un dominio de las ideas básicas de las matemáticas (Cockcroft, 1982).

Kilpatrick (2001) caracteriza las competencias matemáticas en términos de:

a) La comprensión conceptual: entendimiento de conceptos, operaciones y relaciones matemáticas.
b) La fluidez en Conocimientos: Destrezas para llevar a cabo procedimientos matemáticos de manera flexible, eficiente , apropiada y precisa.
c) La competencia estratégica: Habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.
d) Razonamiento Adaptativo: capacidad para el pensamiento lógico, explicar y justificar argumentos matemáticos y reflexionar acerca de ellos.
e) Disposición Productiva: Inclinación habitual para ver las matemáticas como algo sensible, útil y que vale la pena aprehenderse.

El proceso de aprendizaje, no obstante que se puede llevar a cabo de manera colectiva, es completamente individual. Una idea se interioriza de manera particular frente a un medio propicio para que esto se lleve a cabo. Cada individuo percibe el entorno y las situaciones de manera diferente, existe una cierta generalidad, sin embargo, acorde a ciertos elementos de referencia el individuo aprende lo que alcanza a observar y entender. Por ejemplo, un alumno escribe en su cuaderno la aplicación de una regla de exponentes:



$$\sqrt[m]{a^{n}} = a^{\frac{n}{m}}$$

Figura 19 Interpretación Inicial del Alumno.

No alcanza a vincular lo “aprendido” acerca de las leyes de exponentes con lo planteado, ya que no entiende como una multiplicación se convierte en una expresión exponencial. Después de un momento de análisis el alumno cae en cuenta que hizo una mala observación y su apunte es incorrecto, ya que lo que inicialmente había entendido como una multiplicación era la indicación de una raíz cúbica.

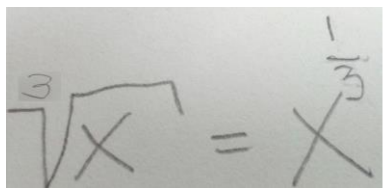


Figura 20 Corrección de lo observado.

En Matemáticas los procesos de observación, interpretación, análisis e interiorización de los conceptos y procedimientos son llevados a cabo de manera particular por el alumno. Inicialmente no hay una evidencia que permita suponer lo que el alumno está aprendiendo. Es común que los exámenes aporten evidencias de lo que el alumno alcanzó a percibir, entender y aprender correctamente. A continuación se definen conceptos y presentan ideas acerca del proceso cognitivo y su manifestación en el aprendizaje de las Matemáticas y las Funciones Trigonométricas.

Richard Lesh plantea una pregunta que se considera fundamental para el proceso cognitivo: ¿podemos saber qué piensa una persona? (Lesh, 2003).La reflexión alrededor de esta idea implica dos situaciones particulares:

a) La información y situaciones didácticas que se le presentaron al alumno para aprender cierta temática.
b) Las ideas y conceptos que alcanzaron a procesarse y adherirse en el interior de la estructura cognitiva del alumno.

El proceso de aprendizaje inicialmente está sujeto entonces al marco teórico y estrategias didácticas seleccionadas para abordar una temática. Así, por ejemplo, en una clase expositiva el docente presenta información y procedimientos que el alumno intentará imitar, reproducir y memorizar. En una segunda instancia el alumno enfrenta el proceso de la revisión y reproducción de la información y encuentra dificultades conceptuales y operativas que se reflejan en la evaluación. El proceso intermedio entre la exposición y la evaluación se encuentra resguardado en el interior del alumno, oculto por la desconfianza generada al adquirir un conocimiento que no fue construido por sí mismo. Es natural que un conocimiento, en particular matemático, no será construido en su esencia ya que existe un marco histórico-conceptual intenso detrás, sin embargo puede ser edificado a través de estrategias cuyo objetivo sea tal. Es entonces necesario considerar ese proceso que en buena medida se encuentra velado.

Una de las problemáticas en la enseñanza de las Matemáticas es la presentación de la información. Por ejemplo, en Geometría la formación de conceptos y construcción de sistemas conceptuales tiene su fundamento en la observación de objetos y situaciones reales y no puede completarse sin el uso de símbolos para designarlos y transmitirlos (Alsina & Fortuny, 1997). Alsina apunta que los objetos reales pueden ser edificios, paisajes, seres, automóviles, etcétera; cualquier forma o movimiento que se puede observar en el entorno y tan real es el objeto que se puede medir, palpar o visualizar. Los conceptos (recta, paralelismo, función) requieren para su asimilación, manipulación y transmisión el uso de sonidos, imágenes, etiquetas lingüísticas, es decir, símbolos con los cuales referenciar o expresar la idea fundamental.

Es así como las representaciones visuales permiten comprender los conceptos, no obstante la importancia de una expresión escrita o verbal; es por ello necesario hacer una reflexión acerca del impacto que tiene la presentación visual en provecho de la transición hacia lo abstracto (a través de expresiones compactas y sintetizadas).

Se considera, en una primera etapa, que la representación visual es fundamental para el fijar el soporte cognitivo que permite abordar el siguiente nivel superior conceptual. Este nivel permite al alumno visualizar un objeto matemático con mayor profundidad destacando atributos que en una primera representación no eran significativos. Así, por ejemplo, al abordar la Función Trigonométrica Tangente el soporte cognitivo es la división entre cero, para ello es necesario el trabajo inicial con segmentos de igual, menor y mayor tamaño. La comparación se realiza a través de la división: ”¿cuántas veces cabe un segmento en otro?”. La comparación de un elemento entre uno de mucho menor tamaño lleva al alumno a extender su estructura inicial al grado de poder visualizar un segmento pequeño al extremo de “casi” desaparecer. Es en esta etapa donde la representación visual inicial transita a una operación cognitiva superior en el interior del alumno: “imaginar” (visualizar) que algo puede ser tan pequeño que casi desaparece. El resultado es la producción de un concepto de nivel jerárquico conceptual superior (infinito) que tiene una representación visual que sintetiza una idea de mayor profundidad y potencia.

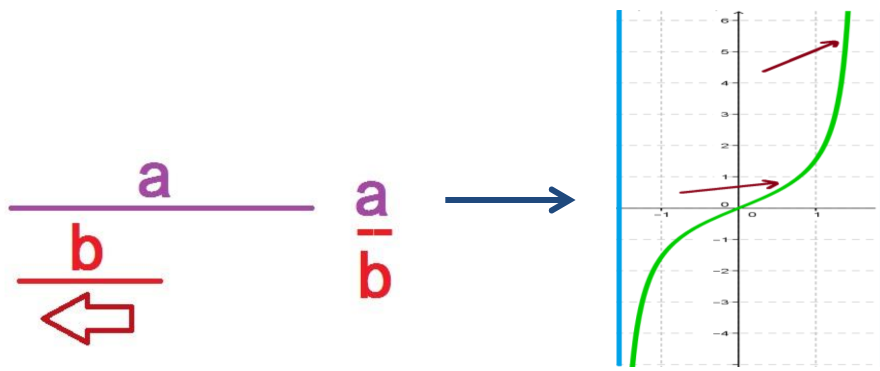


Figura 21 Transiciones Visuales

En la figura se representa la transición de la comparación de un segmento con uno muy pequeño que tiende a cero, la representación visual siguiente reclama el proceso de interiorización de la idea para que gráficamente se pueda decir que la Función Tangente representa el comportamiento hacia el infinito cuando el denominador se hace pequeño, casi cero.

A continuación se presentan los beneficios cognitivos que el alumno adquiere al estudiar las Funciones Trigonométricas.

- Transita de una observación basada en los sentidos (tacto, vista, oído) a una expresión utilizando el lenguaje matemático para describir formalmente los elementos relevantes de dicha observación, lleva a cabo un proceso de abstracción.
- Lleva a cabo una conexión entre los conceptos aprendidos anteriormente y los extiende para aplicarlos en la construcción de nuevos conceptos en situaciones que involucran una estructura de mayor complejidad.

- Visualiza el comportamiento de un elemento de manera dinámica para observar su naturaleza y las consecuencias de su movimiento (Como lo es el caso del movimiento del radio en el círculo unitario).
- Interpreta elementos gráficos con una perspectiva dinámica, es decir, vincula el origen de una gráfica (variación) con su representación.(Por ejemplo en la función seno: la proyección del eje de las ordenadas se ve representado gráficamente en la variación de la función).
- Relaciona el conocimiento adquirido con otras disciplinas adquiriendo una visión articulada del estudio de las ciencias (Física, Química, Biología) (Preisser Rodríguez & Cuevas de la Rosa, 2004).

1.4.2.2 Aplicación

Una de las inquietudes que presenta el alumno es la razón de estudiar matemáticas, cotidianamente surge la pregunta de "¿en dónde voy a aplicar lo que estoy aprendiendo?". El Estudio de las Funciones Trigonométricas permite presentar al alumno gran cantidad de aplicaciones en donde el dominio de éstas es fundamental para entender y explicar fenómenos como la electricidad, el movimiento en péndulos, el electromagnetismo, etcétera. Esto permite al alumno presentar la necesidad de entender los conceptos para utilizar la Matemática como una herramienta para explicar algo que de otra manera sería imposible entender, el aprendizaje entonces tendrá sentido para el alumno.

La aplicación de un conocimiento lleva implícito el dominio de las herramientas para utilizarlo, esta afirmación presenta al alumno el desafío de adoptar una postura más profunda ante el proceso de aceptación de una idea un tanto compleja: el mundo reclama un lenguaje más sofisticado para entenderlo, explicarlo y modificarlo. Por ejemplo, para entender y explicar cómo un mensaje es enviado y recibido por dispositivos electrónicos (teléfonos celulares) es necesario estudiar y entender las ondas electromagnéticas rebasando por mucho la observación visual que en este caso equivale a no "ver" nada entre dichos dispositivos.

1.4.3 Ubicación del tema en el Currículo.

El tema de Funciones Trigonométricas constituye la Unidad III del curso de Matemáticas IV de los programas de estudios vigentes del Plan de Estudios Actualizado (PEA) del Colegio de Ciencias y Humanidades.

1.4.3.1 Antecedentes de la Unidad.

La Unidad III tiene como antecedente fundamentalmente el Concepto de Función que comprende su definición y características. A continuación se presentan los objetivos previos al tema de Funciones Trigonométricas.

- Comprender y manejar los conceptos de variable, variación y relación funcional.
- Comprender y manejar los elementos de una función y su notación.
- Comprender y manejar la vinculación entre los parámetros de la representación algebraica de una función y sus registros tabular y gráfico.
- Analizar las características de una función: crecimiento o decrecimiento, puntos o intervalos donde no está definida, tendencias, simetrías en su gráfica, valores extremos, cero de la función.

1.4.3.2 Funciones Trigonométricas.

El tema de Funciones Trigonométricas tiene como objetivo inicial identificar la variación periódica y sus características en fenómenos naturales. La construcción de las gráficas de dichas funciones se sustenta en el correcto entendimiento del círculo unitario y la observación de las proyecciones sobre los ejes coordenados. Posteriormente es necesario construir el modelo que describa una situación o fenómeno que involucre este tipo de variación en un fenómeno físico. A continuación se presenta un diagrama (figura 22) que representa las conexiones conceptuales en el desarrollo de la unidad.

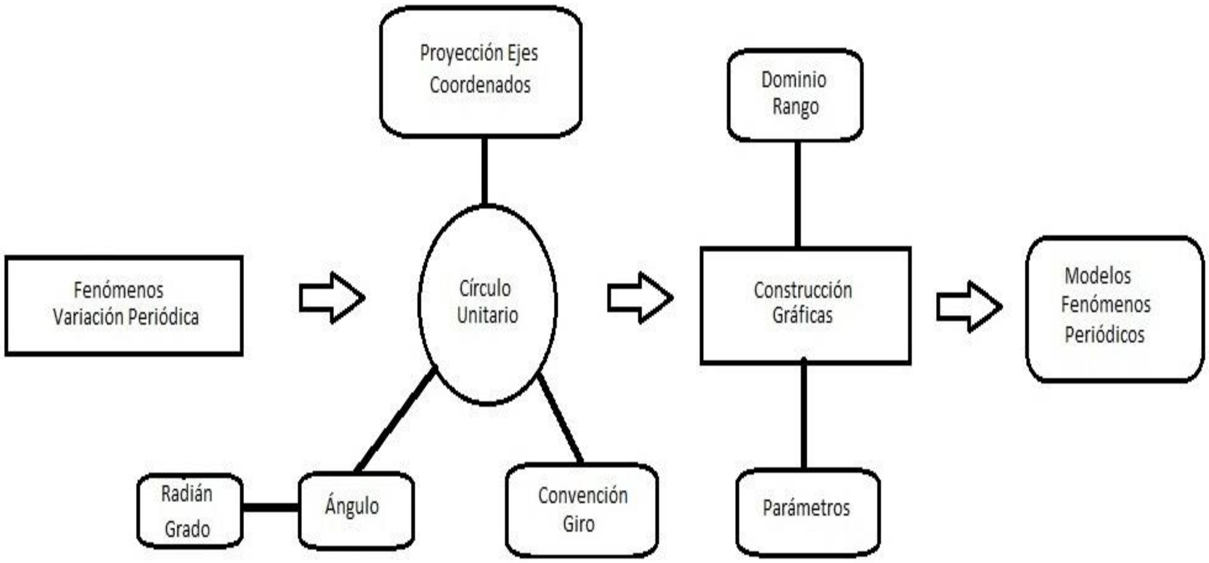


Figura 22 Conexiones conceptuales en el desarrollo de la unidad.

1.4.3.3 Temas de Interés.

La proyección sobre los ejes coordenados del radio en el Círculo Unitario se considera un tema fundamental para la construcción de las Funciones Trigonométricas, este elemento permite observar la variación periódica en la representación gráfica. En particular la ausencia de proyección o proyección nula es un tema sensible que repercute en la presentación correspondiente de asíntotas en las gráficas donde el denominador sea igual a cero (tangente, cotangente). Estas situaciones temáticas permiten dar cohesión y sentido a los conceptos revisados con el fin de utilizarlos como herramientas para entender, modelar y representar fenómenos que involucran variación periódica.

No obstante su carácter técnico, el uso de calculadora, conversión de grados y manejo de herramientas como el software Geogebra reclaman atención para poder verificar datos numéricos con elementos conceptuales. Su correcto uso permitirá consolidar un conocimiento válido en el proceso de aprendizaje de las Funciones Trigonométricas.

En este capítulo se hizo una revisión del Modelo Educativo del Colegio destacando las características que permiten el trabajo en grupo de las Funciones Trigonométricas. El espacio que brinda el Modelo del Colegio permite la implementación de escenarios diseñados para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se enmarca la etapa en la que el alumno se desarrolla y sus características dentro de un contexto social. La introducción a la problemática general de las matemáticas y su desarrollo particular de las Funciones Trigonométricas resaltan las problemáticas que se presentan al abordar su estudio.

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1 Currículo

2.1.1 Importancia del Currículo.

El currículo permite orientar la actividad docente a responder las siguientes preguntas (Contreras, 1991):

- ¿Qué es lo que debo enseñar?
- ¿Cómo debo enseñar?
- ¿Para qué enseñar?

Es entonces una guía que demanda la capacidad del profesor a responder a las expectativas delineadas por la institución. Contreras (1991) lo plantea de la siguiente forma:

"Es en este sentido en que digo que el currículum es la herramienta de trabajo de un oficio que no se realiza sólo por la capacidad de disponer de instrumental con el que operar, sino también con la capacidad de tener respuestas a preguntas. Por eso mismo, podemos hablar también del currículum como el problema profesional con el que se encuentran todos los profesores. En definitiva, lo que uno anda buscando siempre, como si fuera la piedra filosofal, es aquella manera de plantearse la acción de enseñanza que contenga todas aquellas virtudes educativas que le pedimos a la práctica de nuestro trabajo (Contreras,1991:p.78)"

Deberá entonces existir la intención de que el profesor utilice el currículo no solamente como una lista de objetivos temáticos y operativos sino como la posibilidad de dotar al aprendizaje del alumno herramientas cognitivas que respondan a los lineamientos pedagógicos del Colegio, estos es, que el alumno entienda y desarrolle no solamente los temas sino aprenda a construirlos y a apropiarse de ellos bajo su pensamiento autónomo y original.

¿Qué enseñar?

La naturaleza de un conocimiento refleja la trascendencia histórico-cultural de este, de igual forma el currículo expresa la visión del conocimiento que el alumno debe adquirir acorde a su tiempo. La necesidad de que el individuo desarrolle una competencia matemática que le permita entender eventos cotidianos y del área laboral resulta fundamental en nuestros días (NCTM 2000). Los aspectos que resaltan en la enseñanza son:

a) Matemáticas para la vida
b) Matemáticas como una parte de la herencia cultural

c) Matemáticas para el trabajo
d) Matemáticas para la comunidad científica y tecnológica.

La acción de la enseñanza entonces se fundamenta en el currículo y acorde a su primaria importancia define las cualidades y capacidades que se esperan desarrollar en el alumno. Cruz hace una reflexión acerca del contenido e importancia del saber matemático en nuestros días:

> "¿Qué consecuencias pudiese tener el hecho de que un ciudadano tuviese "deficiencias" en su pensamiento matemático? Por "deficiencias" se entiende desconocimiento y/o escaso desempeño en contenidos y procesos asociados comúnmente a las matemáticas elementales: principios de Aritmética, Álgebra, Geometría, Probabilidad y Estadística y en procesos generales como resolver problemas, construir representaciones, comunicar resultados . Las deficiencias en la cultura matemática experimente un ciudadano se puede sentir en la sociedad en su conjunto. Es posible que tales consecuencias se reflejen en acciones, decisiones, interpretaciones, explicaciones, creencias, y actitudes con relación a determinados aspectos de su vida cotidiana. Es más, su propio nivel de conciencia acerca de su situación en su entorno familiar y comunitario podría verse influido por su cultura matemática (Cruz, 2006: p:5) ".

¿Cómo enseñar?

Debido a la complejidad y extensión del tema del aprendizaje resulta difícil llegar a un consenso sobre las formas, estrategias y conocimientos que debe conocer y llevar a cabo un profesor; esta situación depende de la opción teórica y pedagógica que se adopte, así como la visión filosófica y de valores y fines de la educación con los que se enfrente el compromiso educativo.

A continuación se identifican algunas áreas conformes a una enseñanza constructiva, ubicando al alumno como un actor principal en interacción con su entorno (Cooper, 1999):

1. Conocimiento teórico suficientemente profundo y pertinente acerca del aprendizaje, el desarrollo y el comportamiento humano.
2. Despliegue de valores y actitudes que fomente el aprendizaje y las relaciones humanas genuinas,
3. Dominio de los contenidos o materias que enseña.
4. Control de estrategias de enseñanza que facilitan el aprendizaje del alumno y lo hacen motivante.
5. Conocimiento personal práctico sobre la enseñanza.

La actividad docente y los procesos de formación tendrán la intensión de generar un conocimiento didáctico que trascienda el análisis crítico y teórico para llegar a propuestas concretas y realizables, que permitan una transformación positiva de la actividad docente (Gil & Carrascosa, 1991). El “cómo enseñar” refleja las soluciones a los problemas y situaciones vivenciales que el docente enfrenta en su práctica cotidiana constituyendo la plataforma para construir un conocimiento didáctico integrador. Gil y Carrascosa hacen una propuesta sobre el quehacer didáctico:

1.- Conocer la materia que enseñarán.

2.- Conocer y cuestionar el pensamiento docente espontáneo.

3.- Adquirir conocimiento sobre el aprendizaje de las ciencias.

4.-Criticar con fundamentos los métodos habituales de enseñanza.

5.- Saber preparar actividades.

6.- Saber dirigir las actividades que plantean los alumnos.

7.- Saber evaluar.

8.- Utilizar la investigación e innovación disciplinaria y psicopedagógica en el campo de la docencia.

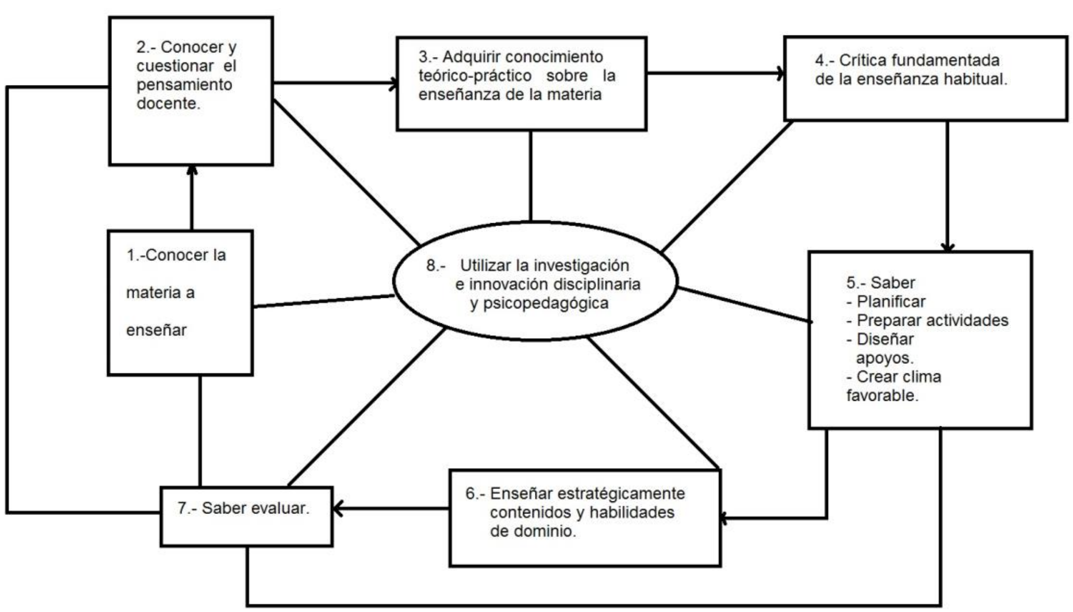


Figura 23 Saberes pedagógicos.

¿Para qué enseñar?

La educación deberá estar dirigida a promover capacidades y competencias y no solamente conocimientos cerrados o técnicas programadas (Pozo & Monereo, 1999). Esto implica que el desarrollo de la capacidad de aprender se sitúa dentro de todo proyecto educativo y el punto central de los procesos educativos debe estar en formar personas que gestionen sus propios aprendizajes, adopten una autonomía y dispongan de herramientas intelectuales que les permitan un aprendizaje continuo a lo largo de su vida. Es así como el docente tiene un papel en los procesos educativos que permitan al alumno la construcción del conocimiento y el desarrollo de sus capacidades cognitivas. Hay que recordar que aprender no es sólo acumular información o ejercitar habilidades, es por ello necesario reflexionar acerca de la importancia del aprendizaje. La concepción de lo que implica aprender requiere un planteamiento desde una teoría social del aprendizaje, donde el acto de aprender se concibe como un acto de participación social en una comunidad educativa. Visto de esta forma, el aprendizaje implica la construcción de significados, la generación de una identidad y la afiliación a una determinada comunidad (Wenger, 2001).

2.1.2 Orientaciones para abordar el Currículo.

Para mejorar la actividad académica es necesario conocer que el Colegio ofrece a los profesores modos alternativos y variados para desarrollar su clase, presentándole la posibilidad de utilizar diferentes orientaciones didácticas en un ambiente de libertad y pluralidad. Se espera que los profesores al utilizar los proyectos, trabajos y materiales existentes mejoren su actividad académica. Un elemento fundamental que permite el Colegio es la posibilidad de elegir libremente la herramienta, método u orientación didáctica que mejor parezca conveniente al profesor para aplicarla con sus alumnos en beneficio de su desarrollo escolar. Así es posible utilizar en un momento académico herramientas tecnológicas como Geogebra y en otro el Trabajo en Grupo.

Desde esta perspectiva el docente tiene la importante tarea de conocer y elegir las técnicas y perspectivas educativas que considere necesarias para contribuir al desarrollo académico del alumno vinculado al modelo educativo del Colegio.

2.2 La Enseñanza.

La actividad docente conlleva una reflexión importante al finalizar un curso: aciertos y errores presentados en el proceso. Dicha reflexión forma un conocimiento que de acuerdo a Estebaranz puede ser popular, local, ordinario o científico. Apunta que será científico cuando se desprende o deriva de algún cuerpo de conocimientos; ordinario cuando no es especializado, que se adquiere por experiencia y se corrige, se enriquece o se rechaza mediante la investigación para transformarse en científico; popular cuando emerge de costumbre, se aprende y se practica en forma semi-insconsciente. Como la generalidad de los actos que constituyen la vida de las personas, también se le conoce como de sentido común, por lo que todos los que participan en una cultura enseñan algo; local que se adquiere por el ejercicio de la función de enseñanza en el contexto concreto de una institución en la interacción con unos compañeros que tienen sus propias visiones de la enseñanza, en la interacción con unos alumnos determinados que presentan sus propias posibilidades y dificultades al aprender, en una cultura en la que se consideran relevante y buenos determinados métodos de aprendizajes o no (Estebaranz,2001).

Está presente la observación que no todos los resultados que arroja la reflexión sean los deseados, es muy común detectar problemas y situaciones en donde existe la discrepancia entre las teorías y los hechos. Esto lleva a realizar un estudio de la enseñanza el cual se puede realizar desde dos puntos de vista: el filosófico, que se preocupa por la consideración y demostración racional de lo que debería ser la enseñanza; y el empírico, que analiza lo que ocurre en los procesos determinados.

La Doctora Estebaranz señala que para referirse a los procesos de enseñanza aprendizaje, algunos autores, desde un punto de vista científico técnico (Gagne y Briggs, 1979; Ausubel, 1983; Anderson, 1989; Villar Angulo, 1990) emplean el término de ***instrucción*** porque define un proceso de enseñanza normativizado y prescrito que se fundamenta en el conocimiento científico y que no se confunde con la enseñanza que ocurre de manera informal en cualquier ámbito de la vida humana por la interacción de las personas. A la vez, menciona que otros autores prefieren hablar de ***enseñanza*** (Zabalza, 1987; Pérez Gómez, 1992; Gimeno y Pérez, 1983; Contreras, 1991). (Estebaranz, 2001).

En este trabajo se enfatizará en la idea de los procesos de **enseñanza aprendizaje** porque se considera un proceso articulado y nunca separado. La enseñanza intenta promover el aprendizaje y lo pone en marcha. Estudiar los procesos de enseñanza aprendizaje como un todo y no como partes permite tener una visión formal y seria para modificar errores y prácticas que entorpecen dicho proceso.

Una visión inicial de la enseñanza aprendizaje debe contemplar:

1. Una problemática. En la que se considere que el lenguaje, las prácticas y la política de la enseñanza son socialmente construidas y dinámicas, no dadas y para siempre.

2. Un conocimiento de la enseñanza. Los profesores construyen el conocimiento y generan teoría así como usan teoría trasladándola a la práctica. Los profesores son expertos sobre la base de su conocimiento de la escuela desde dentro, que es diferente a la del experto externo, los administradores y especialistas. Los profesores extraen experiencia de los internos y los externos a la escuela, y de sus conocimientos de la política escolar en la toma de decisiones, y cuando es necesario cambian las decisiones de otros para proteger y apoyar a sus estudiantes.
3. El currículum e instrucción. Los profesores son creadores e intérpretes del currículo, no simples implantadores. Los profesores ajustan, adaptan, descartan y construyen el currículo sobre los recursos de sus estudiantes, exponiéndose a un mundo multicultural, y preparándolos para participar en una democracia. Para enseñar efectivamente, los profesores están implicados continuamente en un proceso de construcción de teoría y uso de teoría, basado en la observación precisa de los jóvenes, reflexión colaborativa sobre la experiencia, y lecturas amplias de contenido pedagógico y de otras áreas, ya que no hay evidencia empírica de técnicas más efectivas de enseñanza.

4. Los estudiantes son individuos que aprenden, que traen sus propios recursos para aprender en el contexto de la escuela, y construyen sus propios significados desde ellos. La vulnerabilidad de los estudiantes es bien dirigida si se ajusta el contexto de aprendizaje para aprovechar estos recursos y construir sobre las bases del estudiante. La observación directa, desde múltiples perspectivas, ayuda a los profesores a aprender cómo enseñar a los niños o jóvenes individualmente tanto como en conjunto.

Al considerar esta visión general se abren una gran cantidad de puntos o aspectos desde los cuales se puede comentar, precisar o señalar qué se debe considerar cuando se hace referencia a la educación.

2.3 Problemas de la Enseñanza Matemática

2.3.1 Hans Freudenthal.

Para Hans Freudenthal la educación significa tres cosas: El proceso educativo que se realiza en la familia, en la escuela, en la calle y en cualquier lugar; una institución administrativa; y, una actividad teórica llamada investigación educativa. Es necesario precisar la diferencia que existe entre los problemas de la matemática y los de la educación de la misma. Los problemas matemáticos son problemas dentro de una ciencia, que surgen de la ciencia misma o de otras ciencias. Y los problemas de educación son problemas de la vida que surgen de necesidades variables de una sociedad de transformación. Por ello, los problemas de la educación matemática se deben ver como una actividad social. Precisa que en general se puede señalar que el proceso de aprendizaje de las matemáticas por la humanidad consistió en: Conocimiento adquirido por discernimiento intelectual, transformado por una esquematización y memorización en habilidades y discernimiento intelectual en un orden más alto. (Freudental H, 1991)

2.3.1.1 ¿Cómo aprende la gente?

Para resolver esta pregunta es necesario observar los procesos de aprendizaje, lo cual implicaría analizar cómo sí aprende la gente para entonces trasladar este conocimiento a enseñar a aprender en las aulas. Lo cual obviamente desembocaría en la construcción de una teoría del aprendizaje basada en la evidencia y no en la intuición o ideas preconcebidas del docente. La esquematización es la clave en el aprendizaje de las matemáticas porque eso quiere decir que entendemos lo que estamos haciendo, tanto que podemos pasar de lo particular a lo general proponiendo un método y más aun comprendiendo la esencia y existencia de ese método. Pero esquematizar es un proceso psicológico más que histórico porque el estudiante no puede partir de la última esquematización adquirida por la última generación que le precede (el conocimiento no se hereda, se comprende y entonces se aprende), él tiene que elegir su propia trayectoria para llegar a ella, valiéndose en su camino de los conocimientos adquiridos hasta su época.

En el marco del Modelo del Colegio los alumnos aprenden desde los lineamientos teóricos del colegio:

- Aprender a aprender
- Aprender a ser
- Aprender a hacer

Sin embargo existe la dificultad de las diferentes concepciones docentes de lo que esto significa, así la aplicación de múltiples formas y estrategias didácticas diversifica la forma en que los alumnos aprenden. El espacio que el Colegio presenta posibilita la aplicación de estrategias y técnicas tradicionales de enseñanza así como actividades creativas y experimentales encaminadas a la adquisición de conocimiento significativo.

2.4.1.2 ¿Cómo utilizar esquematización?

Muchas de las matemáticas aprendidas se aprenden por discernimiento solo que no lo advertimos dado que una vez que una idea ha sido aprendida, el que la aprendió se olvida de su proceso de aprendizaje. Esto no es malo lo malo es que una vez que una fuente de discernimiento es obstaculizada por rutinas adquiridas nunca más se vuele abrir. Es decir, si como docente enseñaste a tus alumnos a resolver problemas algebraicos simples aplicando fórmulas sin haberles permitido a ellos mismos llegar a ellas, les ha cerrado el camino a la esquematización. Luego es muy importante la preservación del discernimiento y evitar en todo lo posible el entrenamiento prematuro, demasiado entrenamiento y el entrenamiento como tal.

2.3.1.2 ¿Cómo crear contextos?

¿Cómo crear contextos convenientes para enseñar matemáticas? En la estructura del aprendizaje el tema que se desea enseñar no es el problema como tampoco lo es la cantidad de matemáticas que debiéramos enseñar, ni si lo que se enseñara es aplicable a la realidad. Porque entonces caeríamos en los mismos errores de los que venimos huyendo. Y nos dice que la consigna correcta es: el mundo real primero y después la matematización. El enseñar a matematizar el mundo real está representado por un contexto significativo que involucra un problema matemático. Es decir, el problema matemático debe tener un significado tangible para quienes aprenden. Por ejemplo para los egipcios sus conocimientos matemáticos tenían significado pues la matemática que desarrollaron estaba encaminada a resolver problemas prácticos de su realidad. Las matemáticas deben ser enseñadas dentro de contextos y en el proceso de aprendizaje la matematización de una situación merece prioridad ante la resolución de problemas verbales por medio de esquematizaciones.

2.3.1.3 Computadoras y Calculadoras

¿Cómo se pueden usar las calculadoras y las computadoras para despertar el entendimiento matemático? La tecnología influye en la educación más de una forma meramente casual que intencional. Entonces esta puede favorecer o no al proceso educacional. Pero más que ser tratada como tecnología educacional debería ser considerada como una opción o herramienta poderosa para despertar e incrementar el entendimiento matemático. Pudieran incluso ser una llave para entender conceptos matemáticos fundamentales.

Ante esta diversidad de problemas que se han encontrado en la educación matemática, en este trabajo se pretende generar una propuesta de intervención que atienda de manera simultánea a las preguntas de: ¿Cómo se estructura el aprendizaje matemático de acuerdo a niveles, y puede ser usada esta estructura para intentar la diferenciación? ¿Cómo crear contextos convenientes para enseñar matemáticas?

2.3.2 Problemáticas Observadas.

El problema que se presenta es la dificultad que presenta el alumno al abordar temas matemáticos debido a que se le concibe – en algunos casos- como un elemento pasivo en la actividad escolar.

Dicha dificultad se manifiesta en diferentes formas:

- Imitación mecánica. El alumno repite procedimiento que el profesor realiza en el pizarrón sin reflexionar acerca de la construcción de conceptos.
- Conceptos Desarticulados. Las definiciones y conceptos que son presentados por el profesor no tienen relación antecedente ni consecuente en la estructura cognitiva del alumno.
- Rigidez de pensamiento. El alumno no desarrolla la capacidad de cambiar la perspectiva ante un problema o situación matemática.
- Incapacidad de Comunicación. El alumno queda limitado a memorizar conceptos y procedimientos sin poder explicarlos cara y coherentemente con sus propias palabras.

2.4 Entorno

2.4.1 Ambiente Educativo.

El ambiente se deriva de la interacción del hombre con el entorno natural que lo rodea. Se trata de una concepción activa que involucra al ser humano y por tanto involucra acciones pedagógicas en las que, quienes aprenden, están en condiciones de reflexionar sobre su propia acción y sobre las de otros, en relación con el ambiente. El ambiente debe trascender entonces la noción de espacio físico, como contorno natural y abrirse a las diversas relaciones humanas que aportan sentido a su existencia. Desde esta perspectiva se trata de un espacio de construcción significativa de la cultura.

El desarrollo de la noción de ambiente ha derivado a otros ámbitos como los de la cultura y la educación, para definir dinámicas y procesos específicos que otros conceptos o categorías no permiten. El estudio de los diferentes discursos y la observación de las diversas prácticas en la educación relativa al ambiente ha permitido identificar seis concepciones sobre el mismo (Sauvé, 2006):

1. El ambiente como *problema…* para solucionar: este modelo intenta llevar al estudiante a la identificación de problemas ambientales después de apropiarse unos conocimientos relacionados con la investigación, evaluación y acción de los asuntos ambientales.

2. El ambiente como *recurso*…para administrar. Se refiere al patrimonio biológico colectivo, asociado con la calidad de vida. Por ser un recurso, el ambiente se agota y se degrada, por ello se debe aprender a administrarlo con una perspectiva de desarrollo sostenible y de participación equitativa.

3. El ambiente como *naturaleza*…para apreciar, respetar y preservar. Ello supone el desarrollar de una alta sensibilidad hacia la naturaleza y su conocimiento y la toma de conciencia de que somos parte de ella.

4. El ambiente como *biosfera*…para vivir juntos por mucho tiempo. Lo cual invita a reflexionar en una educación global, que implica la comprensión de los distintos sistemas interrelacionados: físicos, biológicos, económicos, políticos. Desde ésta noción se otorga un especial interés a las distintas culturas y civilizaciones y se enfatiza el desarrollo de una comunidad global (ciudadanía global), con una responsabilidad global.

5. El ambiente como *medio de vida*…para conocer y para administrar. Es el ambiente cotidiano en cada uno de los espacios del hombre: Escolar, familiar, laboral, ocio. El ambiente propio para desarrollar un sentimiento de pertenencia, donde los sujetos sean creadores y actores de su propio medio de vida.

6. El ambiente *comunitario*…para participar. Se refiere a un medio de vida compartido, solidario y democrático. Se espera que los estudiantes se involucren en un proyecto comunitario y lo desarrollen mediante una acción conjunta y de reflexión crítica.

Cada una de estas concepciones define unas prácticas que desde su especificidad se complementan, de manera que pensar en el ambiente implica una realidad compleja y contextual, que sólo se puede abordar desde la pluralidad de perspectivas para pensar el ambiente educativo.

2.4.2 La Escuela y el Medio

La escuela es concebida de diversas maneras y cada una define estilos diferentes de interacción. Juan Carlos Pérgolis (2000, pp. 33-34) la concibe como un mediador fundamental de la cultura urbana, en tanto puede expresarse en tres dimensiones:

- La escuela como lugar de la ciudad: ¿es parte del barrio, es del barrio, está en el barrio? La escuela explica y propone sus fronteras y su localización. Por lo general ha estado asociada a una idea de lugar con fronteras duras y lejanas de la ciudad, como aislada en un gran territorio.
- La escuela como formación para la ciudad: La escuela parece como lugar de significado. Independiente del territorio y la localización, la escuela se asume como lugar para el todo de la ciudad y ve a ésta como su proyecto. Es una ciudad en pequeño.
- La escuela como punto de encuentro: aquí la escuela opera para ser un foro en el que las diferentes versiones de ciudad se encuentren. Todos los sectores de la ciudad se reúnen y ponen en común sus propias comprensiones. Así, la escuela se ofrece como lugar de transacción hacia la construcción de una ciudad compartida.

Según Pérgolis, estas tres dimensiones pueden operar individualmente o cruzarse en diversas combinaciones. De esta manera los ambientes educativos pueden ser vistos como contenido, como proyecto o como construcción y fundamentalmente deben responder a una escuela donde predomina la complejidad; en donde cada institución educativa es reconocida desde sus particularidades. Sin embargo, estas complejas consideraciones declinan frente al carácter disciplinario y de control social que ha moldeado a la escuela y que todavía conserva. Según Gildardo Moreno y Adela Molina (1993), en las escuelas actuales el ambiente educativo se mantiene inalterado: En cuanto al ordenamiento sigue siendo prescriptivo, en cuanto a las relaciones interpersonales es dominado por consideraciones asimétricas de autoridad (autoritarismo) En cuanto a la relación con el conocimiento está inmerso en concepciones transmisionistas y en lo referente a valores se halla sumido en una farsa en donde lo que se hace está orientado más por la conveniencia que por consideraciones éticas, en donde se privilegia "el saber racionalista e instrumental" y se descuida el arte y las diversas posibilidades de reconocimiento cultural y de otros saberes.

2.5 Aprendizaje

2.5.1 Aprendizaje grupal.

La forma de trabajo en grupo está vinculada al planteamiento de que el aprendizaje es una actividad social, histórica y situada culturalmente, orientada al desarrollo de funciones psicológicas. Este enfoque se considera un acercamiento socicultural al aprendizaje y tiene su origen en el trabajo de Vigotsky (1931) y colaboradores (Rodríguez & Alom). El trabajo en grupo destaca por los actores que interactúan y los factores implicados en el desarrollo de esta forma de aprender. Además "el desarrollo cognitivo es el resultado de un aprendizaje que ocurre mediante la participación guiada en actividades sociales con el acompañamiento de pares y adultos que apoyan y retan el dominio de destrezas y entendimientos"(Rodríguez & Alom, 2009,p.4).

Es necesario establecer que la secuencia de las Funciones Trigonométricas se instrumenta considerando la idea de un aprendizaje grupal. Al respecto, solo se mencionará como lo hace Díaz Barriga, de manera breve, lo siguiente:

> "En cuanto al aprendizaje colaborativo, es una propuesta que puede rastrearse bastante lejos en la historia del pensamiento didáctico. Ya Comenio señalaba que un grupo escolar se podía formar por decurias, integrando un alumno

aventajado en ellas. En el siglo XIX la escuela lancasteriana mexicana se apoyaba en la influencia de los alumnos con mayor desarrollo de aprendizaje sobre sus compañeros. Aunque también debemos reconocer que fue sólo hasta el desarrollo de las teorías grupales, inicialmente de la dinámica de grupos, que esta propuesta comenzó a transitar de los ámbitos laboral o clínico (grupos operativos, grupos de encuentro) hacia un enfoque en la educación.

El problema desde la perspectiva del aprendizaje colaborativo sigue siendo el mismo que se formulaba al trabajo grupal, esto es, la cuestión nodal no es de conocimiento y manejo de técnicas grupales (lluvia de ideas, corrillos, entre otros), sino de entender las manifestaciones grupales como expresiones con significados particulares, y diferenciar las posibilidades de trabajo grupal en cada situación didáctica."(Díaz, 2005:p.49)

2.5.2 Las técnicas grupales.

El alcance general de estas técnicas es doble: propician y aceleran el logro de los objetivos informativos de aprendizaje, y permiten el logro de algunos de los objetivos de tipo formativo. Además, este tipo de técnicas estimula la motivación del estudiante, ya que al poder participar y discutir con sus compañeros siente más ameno el proceso de aprendizaje.

A continuación se presenta a manera de ejemplo la Técnica de JigSaw (Aronson, 2011) .

La técnica se utilizó por primera vez en 1971 en Texas en un marco de segregación racial donde jóvenes blancos, hispanos y afro-americanos se encontraron en la misma aula por primera vez. Aronson reestructura el aula para que alumnos que estaban formando pequeños grupos se integraran. Los resultados fueron la integración de los distintos subgrupos y el desarrollo de habilidades de aprendizaje.

La técnica consiste en dividir en grupos de 4 a 5 estudiantes , trabajan un subtema en particular y al término de un tiempo específico se conforman en un nuevo grupo en donde se encuentran los "especialistas" de diferentes subtemas. Así , como un rompecabezas, se conforma un tema a partir del aprendizaje de cada elemento que lo conforma. El producto del trabajo en grupo se presenta al pleno y se discute la temática general y particular.

El proceso de rompecabezas anima a escuchar, el compromiso y la empatía. Los miembros del grupo deben trabajar juntos como un equipo para lograr objetivos en común, cada persona depende de las demás.

Ningún estudiante puede tener éxito a menos que todo el mundo trabaje completamente de manera colectiva, esto lleva a valorar a los alumnos entre sí.

En general, las técnicas grupales tienen tres momentos en su instrumentación: el trabajo individual, en equipos y en plenario.

2.5.2.1 El trabajo individual.

Cuando se habla del "grupo" se hace referencia todos sus integrantes, sin distinguir individualmente a ninguno de ellos. El grupo no es un ente que exista por sí mismo, independientemente de sus integrantes. Son estos los que conforman el grupo. El ser grupo se refiere simplemente que entre sus miembros existe determinada estructura de relaciones que los enlaza estrechamente entre sí pero sin sus miembros, el grupo no existiría. En última instancia son los individuos los que aprenden aunque en la didáctica grupal lo hacen a través del trabajo colegiado y del esfuerzo compartido.

El trabajo grupal no sustituye al trabajo individual, lo puede acelerar, enriquecer, o potenciar. Por ello, se considera que el trabajo individual es el cimiento en que se sustenta todo aprendizaje. En consecuencia, toda técnica grupal debe iniciarse con un trabajo individual.

Algunas de las actividades se pueden realizar durante la hora de clase; sin embargo, otras son tareas a realizar fuera de la escuela. El objetivo general de estas tareas individuales es doble. Por un lado, que el alumno trabaje la información recibida en clase, que la elabore, la analice, la comprenda a fondo con todas sus implicaciones y aprenda a manejarla, a aplicarla en diferentes situaciones. Por otro lado, sirven para preparar el trabajo grupal que se desarrollara en la sesión de clase, ya que si no hay un trabajo individual previo, los equipos de discusión perderán tiempo y no alcanzarán su objetivo.

2.5.2.2 El trabajo en equipos.

Los objetivos generales de las actividades que se realizan en equipos o grupos pequeños dentro de la clase son los siguientes: Continuar trabajando la información acerca del tema que se está viendo. Propiciar cierto grado de homogeneidad en el avance del grupo, en relación con el aprendizaje. Y avanzar hacia el logro de aquellos objetivos formativos que se refieren al desarrollo de habilidades para el trabajo grupal, así como la comunicación y discusión de ideas propias.

Sin lugar a dudas, este es el momento más enriquecedor y más productivo del proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de la didáctica grupal, siempre y cuando se prepare y desarrolle adecuadamente y exista en los participantes un compromiso real para aprender grupalmente.

En los equipos de trabajo, al estar integrados sólo por cuatro, cinco o seis personas, todos tienen tiempo de participar, de compartir sus ideas; se sienten más en confianza, en privado, sin temor de hacer el ridículo. Si alguien se equivoca y se lo hacen notar, lo acepta más fácilmente. La discusión es más fluida y se facilita el profundizar en el tema.

También se genera la posibilidad que cada uno de los integrantes del equipo hable de sus experiencias personales, con lo que se logra una mayor integración entre la teoría y la práctica.

Por todo esto, se dice que el trabajo en equipos es el momento más productivo del proceso grupal de aprendizaje. Para llevarlo a la práctica, el profesor debe tener claros los siguientes aspectos: La forma en que se integraran los equipos, el número de participantes en ellos, el producto que cada equipo debe presentar al término del trabajo y el tiempo que dispondrán para su realización.

2.5.2.3 El trabajo en plenario.

Existen diversos tipos de plenario, cada uno está encaminado a lograr diferentes objetivos particulares. Sin embargo, los objetivos comunes a todos ellos son los siguientes: Profundizar y aprender más sobre el tema, así como construir un esquema referencial grupal, un lenguaje y un código comunes.

Los diferentes usos que se le pueden dar al plenario en el proceso de enseñanza aprendizaje son los siguientes:

-Plenario de información, para que cada equipo informe al resto del grupo los resultados de su trabajo. Este tipo de plenario es indispensable cuando cada equipo pude llegar a conclusiones diferentes a cerca del mismo tema.

-Plenario de discusión, para discutir y analizar el mismo tema que se trabajó en los equipos o para empezar a discutir un tema nuevo.

-Plenario de complementación, para que el profesor aclare dudas, responda preguntas o complemente lo dicho por los equipos. Se trata de evitar errores en los conceptos y aclarar las dudas que hubiesen surgido.

-Plenario de exposición, para recibir información nueva sobre el tema, sea por parte del profesor o de los mismos alumnos. Nos referimos aquí a uso de la técnica expositiva como parte de la estrategia para el aprendizaje grupal, y no tanto a la exposición como sistema único de enseñanza.

-Plenario de acuerdos, para tomar decisiones y llegar a acuerdos que incumben a todos los participantes.

2.5.3 Problemáticas del Trabajo en Grupo

No obstante que el trabajo colectivo permite desarrollar habilidades del alumno, tanto intelectuales como psicológicas, es necesario considerar que existen comportamientos negativos que hay que atender. Dicha consideración sobresale debido a que los alumnos cursan un proceso de adolescencia y en determinado momento podrían presentarse conflictos interpersonales que limitan el desarrollo adecuado del trabajo en equipo. Algunos autores identifican también a alumnos con comportamientos identificados como "polizones". El equilibrio entre la libertad y la responsabilidad es clave para el desarrollo en el trabajo en grupo, es necesario entonces mantener la disciplina no como una herramienta de coacción sino como la expresión de la responsabilidad y auto-regulación del comportamiento en el marco de la formación de un ciudadano comprometido con la comunidad (grupo de trabajo) .El mantenimiento de la disciplina en el aula no excluye de sanciones, el alumno deberá acatar reglas mínimas para el adecuado desarrollo en clase, tales como respeto a la opinión de los demás.

El trabajo individual, el trabajo en grupo y el trabajo colectivo requieren de una nueva disciplina y una actitud diferente por parte del profesor en relación con el poder. La disciplina es organizada y planificada, pero también es dinámica y eficaz, observada como consecuencia natural de una buena organización del trabajo en grupo y del clima moral prevaleciente en el curso, y no el resultado de una voluntad exterior con sus prohibiciones y castigos (Estrela, Autoridad y Disciplina en la Escuela, 2005). Existirá desorden cuando existen fallas en la organización del trabajo y en la observación del trabajo de los alumnos en el aula.

En este capítulo se revisó la importancia del Currículo como guía para orientar el trabajo en el aula, el papel de la Enseñanza y la problemática de la Enseñanza de las Matemáticas desde la perspectiva de Hans Freudenthal.El proceso educativo visto como una articulación de los ambientes educativos, la escuela y el medio en el que se desarrolla. El aprendizaje grupal como eje fundamental de la construcción de un conocimiento matemático. Destaca la importancia de los trabajos de Vigotsky para llevar a cabo un aprendizaje en grupo de manera que el conocimiento mismo sea una construcción no solamente individual sino social.

CAPÍTULO 3

SECUENCIA DIDÁCTICA

3.1 Descripción de Recursos y Materiales.

En el presente trabajo se considera importante que el alumno cuente con la mayor cantidad de recursos que pueda obtener de diversas fuentes con el propósito de permitirle tener una visión amplia de las herramientas que existen para abordar el tema de Funciones Trigonométricas. La lectura de documentos, la manipulación de materiales tangibles, la observación de fenómenos matemáticos dinámicos en la computadora, la realización de ejercicios, entre otras actividades, permitirán al alumno introducirse al tema desde diversas perspectivas que le permitan no solamente aprender el tema sino elegir el recurso que mejor se adapte y beneficie a su proceso de aprendizaje. De esta forma son presentados al alumno recursos que tienen por objetivo mejorar su entendimiento del tema.

3.1.1 Documentos

3.1.1.1 Secuencia Principal

Las actividades tuvieron como eje fundamental la Secuencia Didáctica de la Unidad III del Curso de Matemáticas IV diseñadas por los profesores Alejandro Raúl Reyes Esparza y Tania Reyes Zúñiga con base en el Trabajo en Grupo. Cabe mencionar que la Unidad III consiste en extender el concepto de razones trigonométricas e iniciar el estudio de las funciones trascendentes a través de las funciones circulares, cuya variación periódica permite modelar fenómenos cíclicos muy diversos. Esta unidad se aplica reforzando el análisis las relaciones entre gráfica y parámetros, resaltando la importancia de ajustar los parámetros para construir el modelo que se ciña a un fenómeno determinado.

Se eligió ésta secuencia por tener las siguientes características:

- Planeación Estratégica: Un elemento fundamental que incide en cualquier actividad humana y en particular en una clase es el tiempo. El manejo de este puede llevar al éxito o fracaso de la actividad docente, si se destina gran cantidad de tiempo a un tema en particular se descuidará a otro y su consecuencia será el desequilibrio cognitivo del alumno. Este material tiene un diseño adecuado que contempla el tiempo destinado a las actividades de manera específica observando la naturaleza y complejidad propia de cada uno de los temas planteados en el plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades.

- Articulación de Contenidos: Se elige este material porque hay una cohesión y secuencia lógica de los temas y productos obtenidos para el aprendizaje de las Funciones Trigonométricas. Resulta accesible dar seguimiento al material porque cada sesión tiene vínculos entre el aprendizaje, la actividad realizada y el producto obtenido en los diferentes momentos académicos.

3.1.1.2 Actividades Extra clase.

El alumno obtuvo material impreso para realizar actividades fuera del aula con los objetivos de ejercitar y recordar los temas vistos en clase así como introducirse a los temas de las sesiones siguientes. El desarrollo de estas actividades permite también optimizar el tiempo invertido en temas que el alumno pueda abordar y desarrollar su capacidad de trabajo individual autónomo.

3.1.2 Blogs y Correo Electrónico

No obstante que el trabajo en equipo es el eje fundamental del desarrollo de las actividades en clase, se utilizan recursos tecnológicos para compartir información y agilizar el proceso de comunicación entre los alumnos y el docente. Un blog es un sitio web periódicamente actualizado que recopila cronológicamente textos, artículos o ligas de páginas web. Para el desarrollo particular de las actividades es utilizado para publicar información como vínculos a videos en YouTube, páginas de Geogebra, Artículos e información relacionada a las Funciones Trigonométricas. Otro medio utilizado es el Correo Electrónico el cual permite intercambio de información rápida y eficiente entre el alumno y el profesor con el fin de optimizar el tiempo para el desarrollo efectivo de la clase.

3.1.3 Geogebra

Geogebra es un software matemático interactivo libre para la educación, es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico. Con Geogebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas y elementos geométricos básicos. Permite el trazo dinámico de construcciones de tipo variado. Esta herramienta fue utilizada con el objetivo de presentar al alumno una forma dinámica de los elementos geométricos para la construcción de las gráficas de las Funciones Trigonométricas como los es el movimiento del radio en un círculo unitario y sus correspondientes proyecciones sobre los ejes cartesianos.

3.1.4 Videos

YouTube es un sitio web en el cual los usuarios pueden subir y compartir videos, es también un reproductor en línea, es popular gracias a la posibilidad de alojar videos personales de manera sencilla. Esta herramienta es utilizada como apoyo a las actividades extra-clase debido a la posibilidad de que el alumno revise la información temática las veces y en los momentos que considere conveniente. Se elige este medio también debido a la diversidad de materiales que se pueden encontrar respecto a la temática de las Funciones Trigonométricas.

3.1.5 Diversos

Los materiales utilizados en algunas actividades permiten al alumno la manipulación de elementos tangibles (como estambre e hilos) para realizar comparaciones entre segmentos tales como el radio y diámetro de un círculo en relación con su perímetro. A pesar de que estos conceptos (número π y perímetro) son antecedentes se considera necesario reafirmarlos con el uso de este tipo de materiales en las actividades correspondientes.

3.2 Descripción de Actividades.

3.2.1 Ubicación de Actividades.

Las actividades se llevaron a cabo físicamente en dos lugares: en el aula y fuera de ella. A pesar de que el Trabajo por Equipo es el eje fundamental de este trabajo de tesis se considera importante la actividad individual dentro y fuera del aula para fortalecer los conceptos y ejercicios abordados. Las instalaciones del Colegio de Ciencias y Humanidades permiten el acomodo de los alumnos en distintas formas de trabajo en equipo. El trabajo extra-clase permite al alumno reforzar los conocimientos que adquirió o revisó en clase y plasmarlos a través de las actividades que previamente se le proporcionó. Las actividades en la biblioteca o en casa anteceden a las actividades en el aula para las posteriores sesiones introduciéndolo a un tema nuevo en su momento.

Fuera del aula se realizaron actividades enfocadas al fortalecimiento de lo aprendido y la visualización de materiales en medios como YouTube y Software como Geogebra, además de los materiales impresos que se encuentran en el Anexo.

En el estudio de las Funciones Trigonométricas con la Secuencia Didáctica se plantea que el alumno obtenga previamente el material e inicie la revisión del tema fuera del aula, posteriormente en clase las analizará y desarrollará el proceso de articulación de conceptos y métodos para cumplir con los aprendizajes planteados.

3.2.2 Formas de Trabajo.

El desarrollo de las actividades se plantea de tres formas:

- Las actividades personales o individuales: aquellas que permiten que el alumno exprese los antecedentes, conozca los contenidos, los métodos, generalice y construya su conocimiento sobre las temáticas que se está abordando. Así mismo, el alumno expresa los propios errores y busca corregirlos.
- Las actividades en equipo: permiten que el alumno compare con sus compañeros lo que ha realizado y tenga la oportunidad de corregir o de explicar cómo lo hizo ante sus demás compañeros. En estas actividades se espera que el profesor observe cómo interaccionan entre ellos y detecte los errores que son comunes entre los alumnos, con el fin de superarlos.
- Las actividades grupales permiten que el alumno conozca que las formas de solución de un problema son comunes o bien se pueden desarrollar otras alternativas. En estas actividades el profesor generaliza los métodos utilizados, expresa las diferentes alternativas, destaca cuales son los principales errores en lo que se pueden caer y cómo evitarlos. Además realiza un cierre de la actividad explicando cómo lo realizado está conectado con las actividades anteriores y destaca la utilidad para las futuras actividades a realizar.

3.2.3 Rol del Profesor.

En la clase magistral o tradicional el profesor expone y desarrolla los temas, plantea conclusiones y ejemplos que llevan al alumno a realizar actividades que se desprenden de dicha exposición siendo el elemento principal la exposición frente a grupo. En la Secuencia Didáctica presentada el profesor tiene las siguientes características.

- Coordina operativamente las actividades.
- Promueve el trabajo en equipo propiciando un ambiente de respeto.
- Corrige en su momento conductas que pueden entorpecer el desarrollo de las actividades.
- Coordina el proceso de discusión, análisis, ejercicios y cierre de los temas.

3.2.4 Organización de Actividades en Aula.

Anteriormente se mencionó que el tiempo es un elemento que debe controlarse para el buen desarrollo de las actividades en clase, es por ello que se deben considerar los siguientes puntos para que el trabajo en equipo sea lo más eficiente posible.

- Obtención de material de manera eficiente y puntual de los diferentes medios planteados: blog, correo, copias, etcétera.

- Puntualidad para la asistencia de la sesión indicando el tiempo de tolerancia para el desarrollo.

- Presentación de Reglas de respeto para todos y cada uno de los integrantes del equipo y del grupo dentro del aula.

- Especificación de objetivos y actividades a desarrollar de manera general y específica en el pizarrón y de manera verbal.

3.2.5 Desarrollo de la Secuencia Didáctica.

La Secuencia Didáctica plantea tres momentos de trabajo:

1. Actividad Personal Previa: en ésta etapa se obtienen los materiales y se da lectura individual de los materiales correspondientes al tema en específico que se abordará en la sesión.
2. Actividad por equipo: se revisan y analizan los materiales teniendo una aproximación inicial al tema. En este momento académico se resuelven las actividades y se comparten opiniones e información relevante a la solución de los cuestionamientos y ejercicios .Posteriormente se comparan los resultados obtenidos y se lleva a cabo una discusión interna de los mismos, se hacen acuerdos sobre los resultados que serán presentados ante el grupo.
3. Actividad Grupal: se analizan abiertamente los resultados en el pizarrón o de manera verbal de las respuestas y resultados obtenidos. Se lleva a cabo una discusión grupal comparando los resultados de cada equipo y analizando las razones de su forma y

procedimiento en que fueron obtenidos. El profesor y los alumnos destacan los errores y aciertos para presentar una síntesis de los elementos temáticos de mayor relevancia.

El siguiente esquema (figura 24) presenta los momentos didácticos en el desarrollo de ésta secuencia.

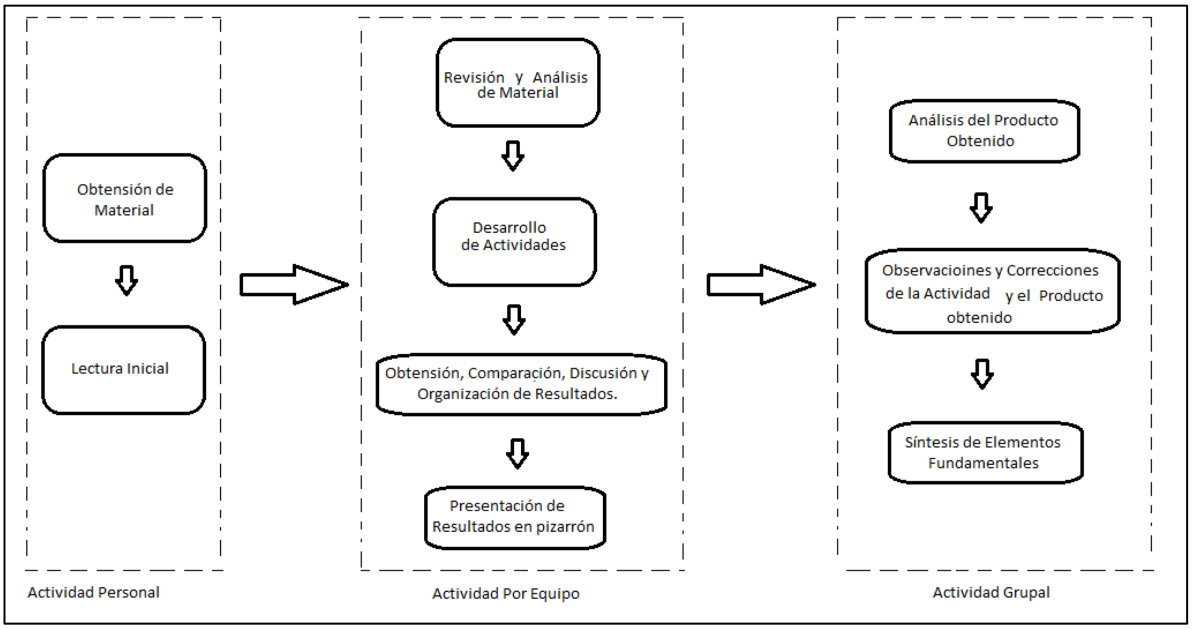


Figura 24 Momentos didácticos en el desarrollo de la secuencia

3.2.6 Descripción de las Sesiones.

El tema de Funciones Trigonométricas tiene asignado un número de 20 horas, sin embargo se utilizaron 5 horas adicionales debido a problemas de distribución del material y cierres de sesión. Se requiere de tiempo para detallar a los alumnos las direcciones y correos electrónicos para familiarizarse con este medio de comunicación. También la organización y distribución de materiales retrasó el tiempo del desarrollo de actividades. En particular la conclusión de los temas por sesión requirió de mayor tiempo debido a las dudas surgidas de los alumnos, el cierre y síntesis de los temas desarrollados en el aula reclaman la atención del profesor ya que el alumno participa en esta etapa y resulta necesario orientar este momento académico para evitar confusiones y distracciones.

A continuación, en la tabla 3.1, se presenta la distribución de tiempos destinados a cada tema en consideración de su complejidad inherente.

Tabla 3.1 Distribución de los tiempos para cada tema.

Tema	Tiempo destinado (horas)
Situaciones que involucran variación periódica. Extensión de las razones trigonométricas Manejo de Calculadora	2
Concepto del número π Relaciones entre grados y radianes. Longitud de arco. Problemas de Aplicación	4
Problemas de Aplicación	1
Transformaciones de Funciones de ángulos cualesquiera a ángulos agudos.	3
Círculo Unitario: proyecciones y convenciones de giro.	3
Funciones Trigonométricas en el círculo unitario.	3
Construcción de las funciones seno, coseno y tangente. Dominio y Rango	2
Definición de Función Periódica Amplitud Frecuencia Periodo Desplazamiento vertical y horizontal.	4
Problemas de Aplicación	1
Evaluación.	2

3.3 Descripción del Examen.

Las actividades realizadas en la Unidad III del curso de Matemáticas IV tuvo como eje principal la utilización de los materiales diseñados por los profesores Alejandro Raúl Reyes Esparza y Tania Reyes Zúñiga con base en el Trabajo en Grupo.

El examen aplicado fue elaborado en estrecha relación con dichos materiales, se buscó contrastar los aprendizajes perseguidos y los resultados obtenidos. Se revisaron los conceptos referidos en los aprendizajes correspondientes al plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades.

3.3.1 Antecedentes de la Unidad.

La unidad III tiene por antecedentes los conocimientos de los Fundamentos de Trigonometría vistos en la Unidad V del Curso de Matemáticas II y que se presentan en la tabla 3.2:

Tabla 3.2 Antecedentes de los conocimientos que se van a conocer en la unidad.

Aprendizaje	Temática
El alumno: Conoce que las razones trigonométricas se derivan de una propiedad fundamental de los triángulos rectángulos.	**Razones Trigonométricas**: Seno, coseno y tangente para ángulos agudos.
Adquiere habilidad en el manejo dela calculadora al resolver ejercicios y problemas de corte trigonométrico.	**Valores Recíprocos** Solución de Triángulos Rectángulos: -Conociendo un ángulo y un lado. -Conociendo dos lados.

Dentro de los antecedentes se consideró importante el tema de Manejo de calculadora para omitir problemas operativos al realizar operaciones en la construcción de las Funciones Trigonométricas. De igual forma se retoman el triángulo rectángulo para recordar las identidades trigonométricas destacando la identificación de los ángulos dentro de este.

3.3.2 Composición del Examen.

El examen estuvo dividido en dos secciones:

a) Una parte teórico conceptual cuyas respuestas estuvieron estructuradas por incisos.
b) Una segmento de aplicación de los conocimientos a través de Ejercicios.

4.2.2.1 Segmento Teórico-Conceptual.

Las actividades tienen por objetivo articular los Conceptos Fundamentales para orientar el aprendizaje hacia una comprensión global de la Unidad III y así poder tener una visión secuencial de los aprendizajes adquiridos por los alumnos.

A continuación (figura 25) se presenta un esquema básico de los elementos conceptuales que se buscó destacar en el examen resaltando el concepto de Proyección sobre los ejes coordenados para poder construir la gráfica correspondiente a Seno, Coseno y Tangente.

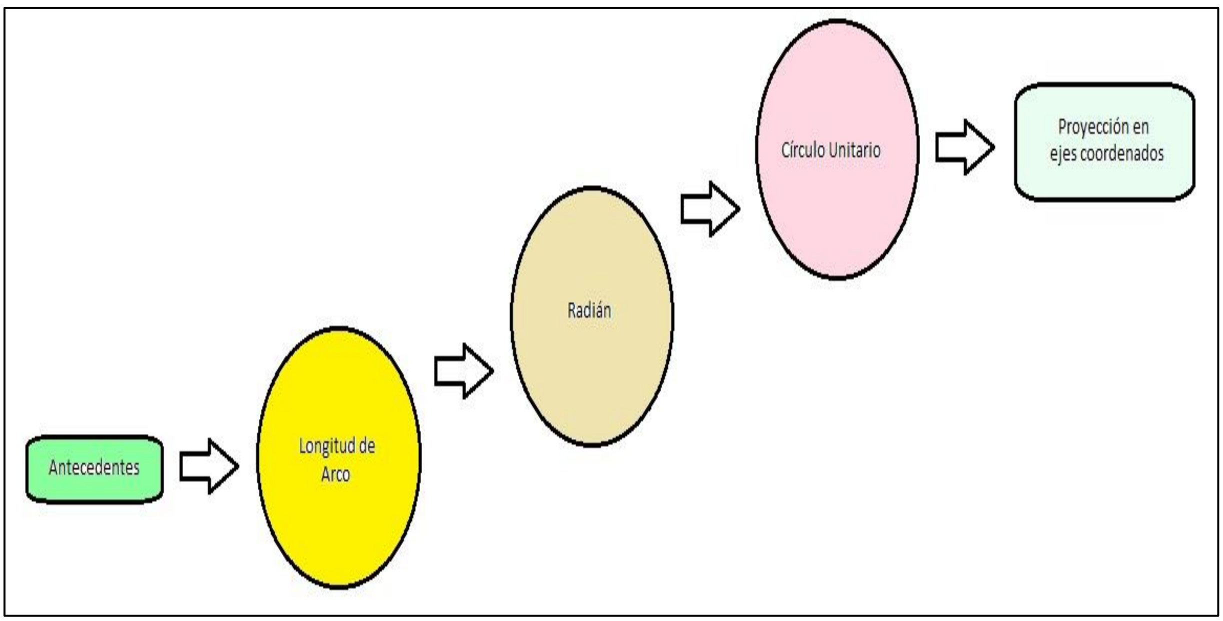


Figura 25 Elementos Conceptuales

En la tabla 3.3 se describe el objetivo que se pretende con la pregunta enunciada.

Tabla 3.3 Relación de objetivos:sección teórica.

Pregunta	Objetivo
1	Situar al alumno en el objeto de estudio de la Trigonometría.
2	Definición de Seno, Coseno y Tangente y sus inversos.
3	Manejo de Calculadora: Transformación de Radianes,Gradianes y Grados.
4	Definición de Radián.
5	Equivalencia numérica de Radián
6	Longitud de Arco
7	Definición de Círculo Unitario
8	Equivalencia de Proyecciones
9	Identificación de ángulos en dónde se presenta la indeterminación en la Función Tangente.
10	Explicación de la Indeterminación en ángulo de indeterminación de la Función Tangente.
11	Identificación de: Función Seno y Coseno Amplitud Desplazamiento Vertical

En la tabla anterior se presentan los objetivos que se pretende el alumno alcance articulando conceptos desde un nivel básico hasta la identificación de parámetros y elementos dinámicos como lo es el desplazamiento del seno, coseno y tangente en los ejes cartesianos. Un objetivo que se destaca es que el alumno explique la presentación de la asíntota como resultado de la división entre cero, esta situación se analiza en las actividades comparando magnitudes en la división (cuando el denominador disminuye hasta casi cero).

3.3.2.1 Segmento Práctico: Ejercicios.

En esta etapa el alumno realiza ejercicios y problemas que le permitirán aplicar sus conocimientos adquiridos. Se destina un espacio para que exprese sus ideas a través de dibujos, esquemas y símbolos. Con estos ejercicios se busca que el alumno vincule los procedimientos analizados con anterioridad utilizando convenciones establecidas observando su vínculo con otras materias como la Física por ejemplo.

Se busca observar si se lleva a cabo un proceso de abstracción inicial para replantear problemas y transitar del dibujo a una expresión matemática que represente la solución del problema.

En la tabla 3.4 se describen los aprendizajes que se buscan evidenciar en cada pregunta.

Tabla 3.4 Relación de las preguntas por objetivo:sección práctica.

Pregunta	Objetivo
12	Antecedente. Manejo de Calculadora: uso de función inversa . Angulo cuya tangente es el resultado y tecla inversa de secante. Visualización de la Función en cuestión.
13	Ejercicio de Aplicación de Función Trigonométricas
14	Aplicación de Identidades Trigonométricas Utilización tecla inversa para cálculo de ángulo Identificación de Angulo Central Angulo Complementario Convención de Giro : signo.
15	Convención de Giro Identificación de Angulo Central
16	Concepto de Periodo Frecuencia Ciclos por unidad estándar Dominio y Rango

17	Amplitud Dominio Desplazamiento Horizontal Desplazamiento Vertical

En la pregunta 16 y 17 de la tabla anterior se pretende que el alumno identifique los parámetros de manera práctica expresándolos de manera gráfica determinando las cuatro etapas del ciclo de las Funciones Trigonométricas para el seno, coseno y tangente.

3.4 Evaluación.

La evaluación se llevó a cabo a través de un examen que comprende una parte teórica y otra de ejercicios sobre el tema. Las actividades extra-clase tienen un carácter complementario que si bien no influye directamente en la cuantificación de la calificación de la unidad permiten al alumno tener una visión de los temas que se presentarán en el examen.

Examen de la Unidad III.

Lee las preguntas siguientes y escribe el inciso que corresponda.

1**.- La trigonometría tiene por objeto**:

a) Demostrar las relaciones entre los ángulos, su geometría y los lugares geométricos.

b) Comparar las magnitudes de los segmentos para establecer relaciones cualitativas

c) Resolver los problemas relativos a las magnitudes angulares y determinar los elementos desconocidos de un triángulo.

d) Obtener lugares geométricos y sus relaciones físicas expresadas en magnitudes.

2.- Relacione las columnas

( ) Inverso de Csc	I) Proyección en X
( ) Coseno	II) Cotangente
( ) Seno	III) Cateto Opuesto/ Hipotenusa
( ) Inversa de la Tangente	IV) Cateto Opuesto/ Hipotenusa

3.- Obtén con la calculadora el valor de las siguientes funciones :

i) Tan($\frac{\pi}{3}$)

a) 0.018279 b) 0.016450 c) 1.732050 d) -2

ii) Sen(35)

a) 0.573576 b) 0.522498 c) 0.112314 d) 4.5

iii) Cos($\frac{\pi}{8}$)

a) 0.9999765 b) 0.999980 c) 1.2 d) 0.923879

iv) Cos(100)

a) -0.173648 b) 0.173648 c) 0 d) -1

4.- Un radián es:

a) Es la medida de radio igual a 1 cuyo perímetro es π.

b) La medida del ángulo central subtendido por un arco de igual longitud que el radio del círculo.

c) Es el número de veces que cabe el perímetro en el diámetro del círculo.

d) La medida del ángulo central subtendido por un arco de longitud igual a 2π.

5.- Un radian equivale a :

a) 2π b) 360° c) 57°17’45’’ d) $\frac{\pi}{2}$

6.- **Para un círculo con radio 20 cm obtén el ángulo central de un arco de longitud de 45 cm.**

a) π b) $\frac{9}{4}$ π c) $\frac{20}{45}$ cm d) $\frac{2}{3}$ π

7.- Un círculo unitario es :

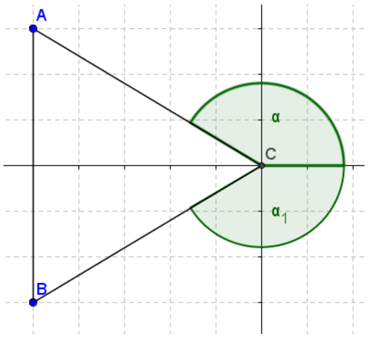
a) Un círculo cuyo radio es igual a la unidad y su perímetro es igual a π.

b) Un círculo cuyo radio es igual a la unidad y su perímetro es igual a 2π.

c) Un círculo cuyo diámetro es igual a 2π.

d) Un círculo cuya área es igual a 2πr^2.

8.- En la siguiente figura, la componente en "y" de un ángulo negativo es igual a la componente en y de ese mismo ángulo con signo contrario. Esta expresión corresponde a:



a) Cos(-α) = + Cos (α)
b) –Sen(-α)=-Sen(α)
c) Sen (-α) = -Sen(α)
d) Tan(-α) =- Tan α

9**.- En la función tangente los ángulos de indeterminación son**:

a) $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{2}{3}$ π   b) π y 2π   c) $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3}{2}$ π   d) $\frac{2}{3}$π y$\frac{3}{2}$ π

10.- En la función tangente la indeterminación se presenta cuando:

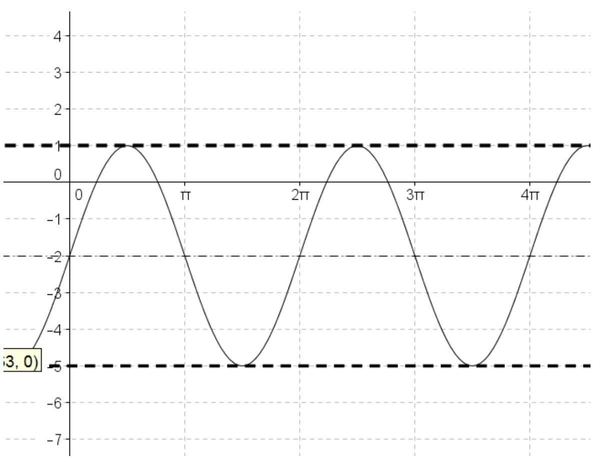
a) La proyección en el eje y es igual a cero y se presenta un efecto asintótico.

b) La proyección en el eje x es cero y se presenta un efecto asintótico.

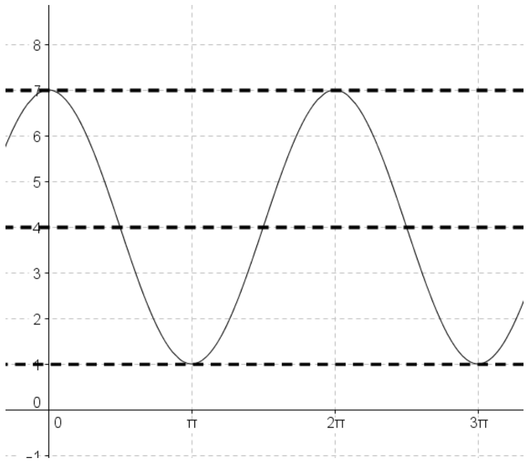
c) El denominador es igual a 1 en tan θ= $\frac{\cos\theta}{sen\ \theta}$

d) El denominador es igual a 0 en tan θ= $\frac{\cos\theta}{sen\ \theta}$

11.- Identifique la gráfica que corresponde al inciso.



a) y= 6 sen x – 2
b) y= 3 cos x - 2
c) y= 3 sen x – 2
d) y= 6 sen x - 2



a) y= 3 cos x + 4
b) y= 3 sen x + 4
c) y= 6 cos x + 4
d) y= 6 sen x + 4

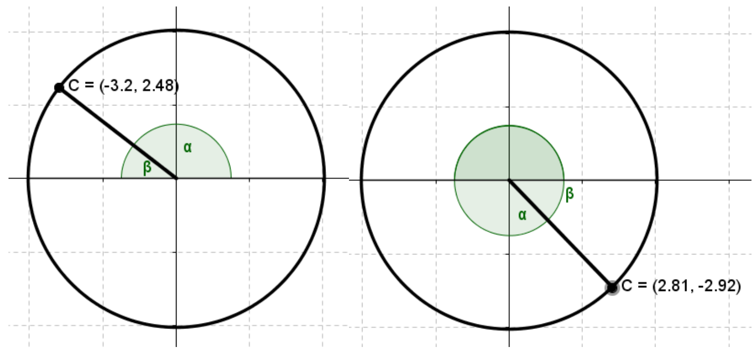
12.- **Con la ayuda de tu calculadora (y la función “inversa”) llena la siguiente tabla. (Recuerda configurarla en modo radián):**

Θ= $\frac{\pi}{2}$	
Seno Θ=	Ctg Θ =
Cos Θ=	Sec Θ =
Tan Θ=	Csc Θ=

13.- **Sobre una carretera que tiene una inclinación de 20°30’ con la horizontal, un auto que pesa 1000 kg está detenido por sus frenos, los que ejercen la misma fuerza que un cable atado a un extremo del auto y sostenido por varios hombres. Calcula la fuerza que ejercen los frenos.**

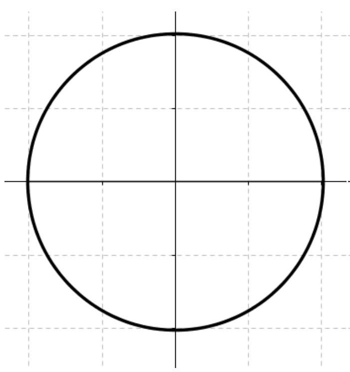
Realiza el dibujo y las operaciones en el recuadro.

14.- Encuentra el ángulo α, β y el radio dado el punto C:

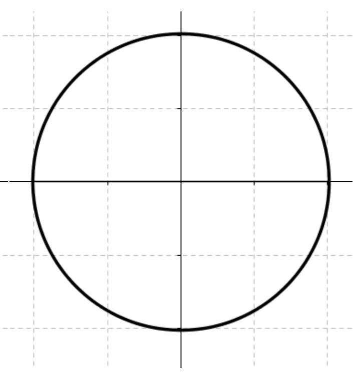


15.- **Dibuja en el Plano Cartesiano (de acuerdo a la Convención de Giro) el ángulo θ en cada caso** :

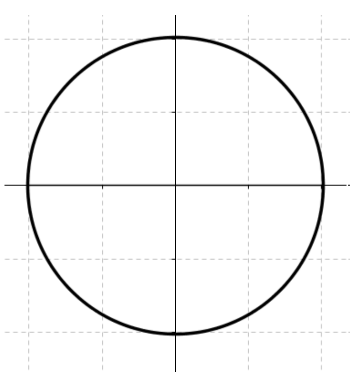
a) θ= -220°



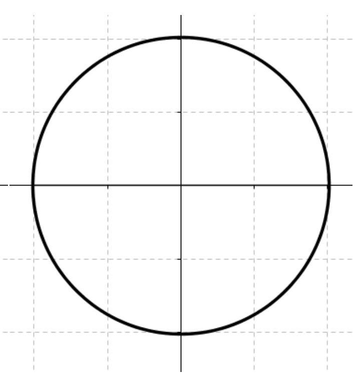
b)θ= 110°



c) θ= - 140°



d)   θ = 190°



16.- En la siguiente funciones encuentra el Periodo , dibuja la gráfica correspondiente e indica cuántos ciclos realizará en un periodo de 2π.

a) $y = \cos \frac{1}{2} x$

17.- Grafica la siguiente funciones indicando la amplitud y el desplazamiento horizontal. Dominio y Rango.

a) $y = 2 \text{ sen } x + 3$

3.4.1 Relación de Aprendizajes en Examen.

A continuación se presenta, en la tabla 3.5, la relación de aprendizaje por pregunta.

Tabla 3.5 Relación de los aprendizajes con las preguntas del examen.

Pregunta	Aprendizaje
1.- Objeto de la trigonometría tiene por objeto.	Recuerda el significado de las razones trigonométricas para ángulos.
2.- Definición de Funciones Trigonométricas	Recuerda el significado de las razones trigonométricas para ángulos agudos, en particular seno, coseno y tangente.
3.- Obtención de Valores de con Calculadora	Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa. Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos.
4.- Definición de Radián	Identifica el concepto de Radián relacionando el diámetro con el radio de una circunferencia.
5.- Angulo Central y Longitud de Arco	Aplica los conocimientos para relacionar el radio con la longitud de arco en un círculo.
6.- Equivalencia de Radián	Identifica la equivalencia en grados de un radián, comprobando la relación entre grado y radián.
7.- Definición de Círculo Unitario	Identifica la característica del radio en un círculo tomando este valor como una convención básica.
8.- Equivalencias de Ángulos	Utiliza la convención de giro para ángulos positivos y negativos. Identifica la proyección de giro como una magnitud con signo. Identifica equivalencia de expresiones trigonométricas.
9.- Angulo de Indeterminación de la Función Tangente	Identifica ángulos en radianes. Ubica el ángulo de giro en el plano cartesiano. Identifica los ángulos que generan la indeterminación en la Función Tangente.

10.- Indeterminación de la Función Tangente	Recuerda la definición de Función Tangente. Identifica la importancia del denominador en la Función Tangente. Vincula la situación de asíntota en caso de que el denominador sea igual a cero.
11.- Identificación de Gráfica	Identifica una variación periódica. Identifica la Función Seno y Coseno. Identifica la diferencia entre Seno y Coseno. Aplica el concepto de : Amplitud Periodo Dominio y Rango Desplazamiento Vertical.
12.- Obtención numérica de Funciones Trigonométricas.	Recuerda las definiciones de Funciones Trigonométricas. Identifica las Funciones Trigonométricas Inversas. Realiza los cálculos numéricos con la calculadora. Identifica las Funciones Trigonométricas en donde el denominador es cero. Identifica las Funciones Trigonométricas en donde existe asíntotas.
13.- Ejercicio de Aplicación.	Identifica una situación en las que está involucradas las Funciones Trigonométricas. Utiliza las Funciones Trigonométricas para descomponer una fuerza en componentes verticales y horizontales. Realiza operaciones de para encontrar valores desconocidos.
14.-Ejercicio de Obtención de ángulos.	Recuerda las componentes de un punto en el plano cartesiano. Identifica el giro del radio y un punto de la circunferencia. Recuerda el Teorema de Pitágoras para resolver una triángulo rectángulo. Aplica una definición trigonométrica para resolver el triángulo rectángulo. Utiliza ángulos complementarios para encontrar los ángulos solicitados.
15.- Convención de Giro.	Utiliza la convención de Giro para ubicar ángulos cualesquier en el plano cartesiano.
16.-Dibujo de Gráfica. Obtención de Periodo. Dominio y Rango.	Dada un Función Trigonométricas: Identifica el comportamiento de la Función. Obtiene el periodo de la Función. Grafica la Función. Aplica los conceptos de Dominio y Rango

17.- Dibujo de Gráfica. Obtención de Amplitud, Desplazamiento y Frecuencia.	Dada un Función Trigonométricas: Identifica el comportamiento de la Función. Obtiene la Amplitud. Expresa gráficamente el Desplazamiento Horizontal y Vertical. Calcula la Frecuencia.

La variación periódica es uno de los elementos centrales en la unidad III del temario del Colegio, la observación de los fenómenos naturales que tienen este tipo de comportamiento es el inicio de la construcción formal de las Funciones Trigonométricas. La presentación del Círculo Unitario como elemento fundamental permite que se puedan utilizar las proyecciones sobre los ejes como objetos de variación (aumento y disminución) que visualmente el alumno puede registrar como válidos en su estructura cognitiva ya que puede asociársele a través de herramientas tecnológicas con el movimiento de radio a través del Círculo Unitario. Resulta fundamental que el alumno identifique la consecuencia de dividir un número entre otro que disminuye y tiende a cero (Función Tangente). El uso de la calculadora en cierta medida permite evidenciar la diferencia por ejemplo entre tangente de 89.0^{o} y 89.999^{o} conforme se acerca a tangente de 90^{o}. Es entonces cuando se vincula el concepto de asíntota aprendido en unidades anteriores para presentar gráficamente dicho comportamiento. Es así como se pretende que el alumno articule conceptos básicos como lo es la proyección sobre los ejes con el efecto asintótico representado gráficamente en la función tangente.

CAPÍTULO 4

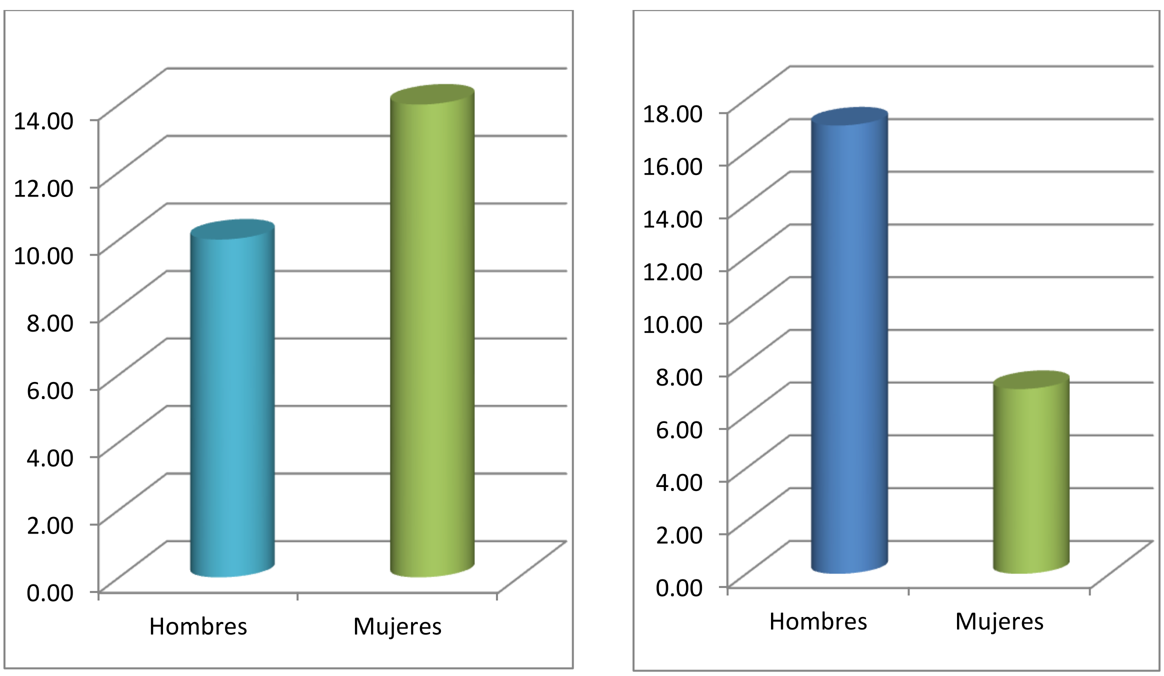
RESULTADOS

4.1 Descripción de Grupos.

Se aplicó examen a dos grupos de Matemáticas IV teniendo como grupo Piloto al grupo 414A y como grupo Testigo al grupo 408A, con horario de 7:00-9:00 y 11:00-13:00 horas,respectivamente. El número de alumnos para el grupo Piloto fue de 24 y de 25 para el grupo testigo. En el grupo Piloto se aplicó la Secuencia Didáctica de Trabajo en Grupo y en el grupo de Testigo recibió la enseñanza típica del tema con el objetivo de comparar los resultados obtenidos acorde a los temas de la disciplina con el objetivo de determinar los aprendizajes obtenidos en ambos casos se diseñó el examen.

4.1.1 Composición por Género de Grupos.

Se observa, en la figura 26, que en el grupo testigo el número de mujeres es mayor que en el de hombres, en el caso del grupo Piloto sucede lo contrario.



Grupo de Referencia

Grupo Piloto

Figura 26 Composición por Género de Grupos

4.2 Resultados

Los resultados fueron organizados por Número de Aprobados, Composición Porcentual,Promedios, Desviación Estándar y Resultados por Pregunta.A continuación se presentan.

4.2.1 Aprobados.

En la figura 27 se representan los alumnos que aprobaron por grupo, mientras que en la figura 28 se representan los alumnos que no aprobaron.

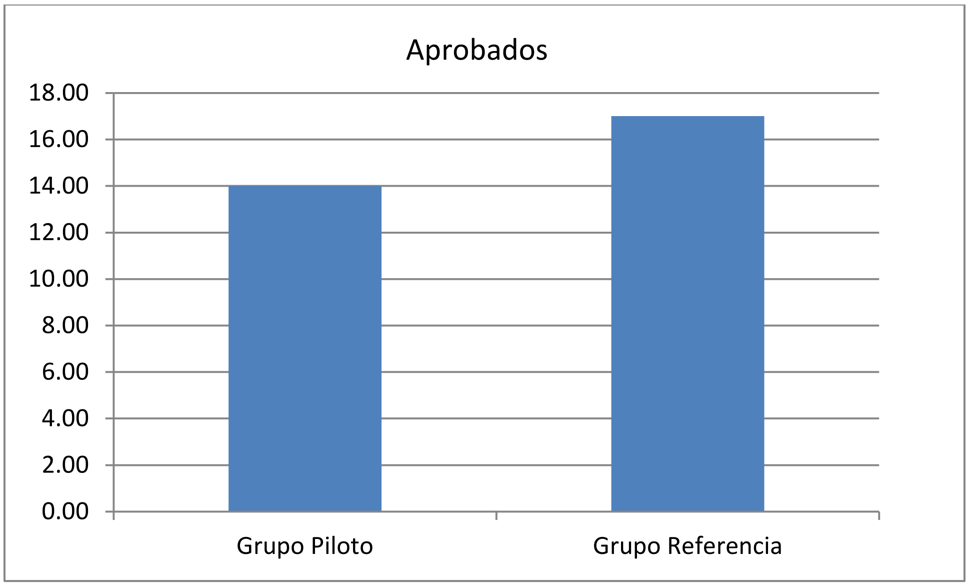


Figura 27 Gráfica de Alumnos Aprobados

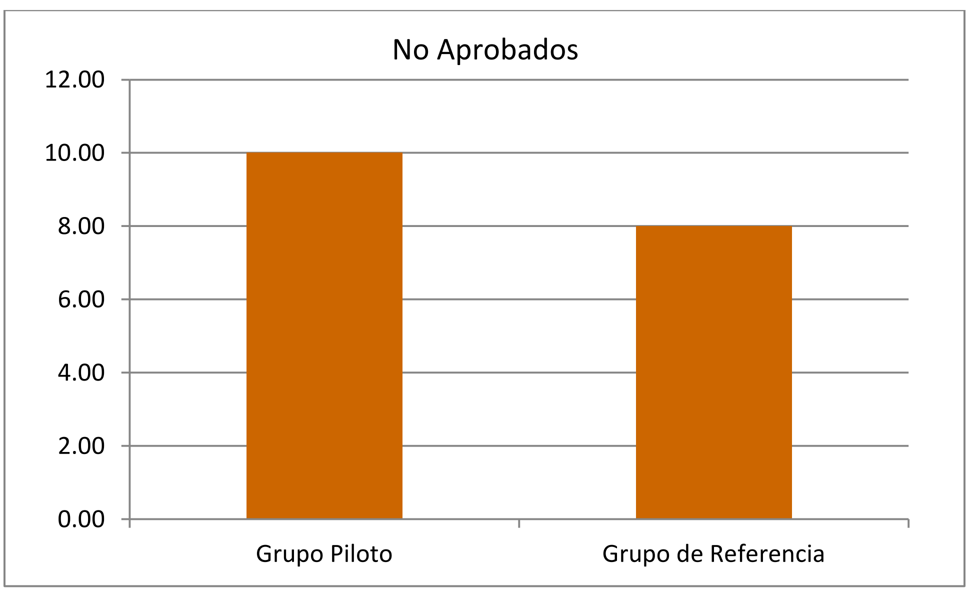


Figura 28 Gráfica de Alumnos No Aprobados

En la figura 29 se presenta una gráfica comparativa por género de los alumnos aprobados y los no aprobados considerando cada grupo.

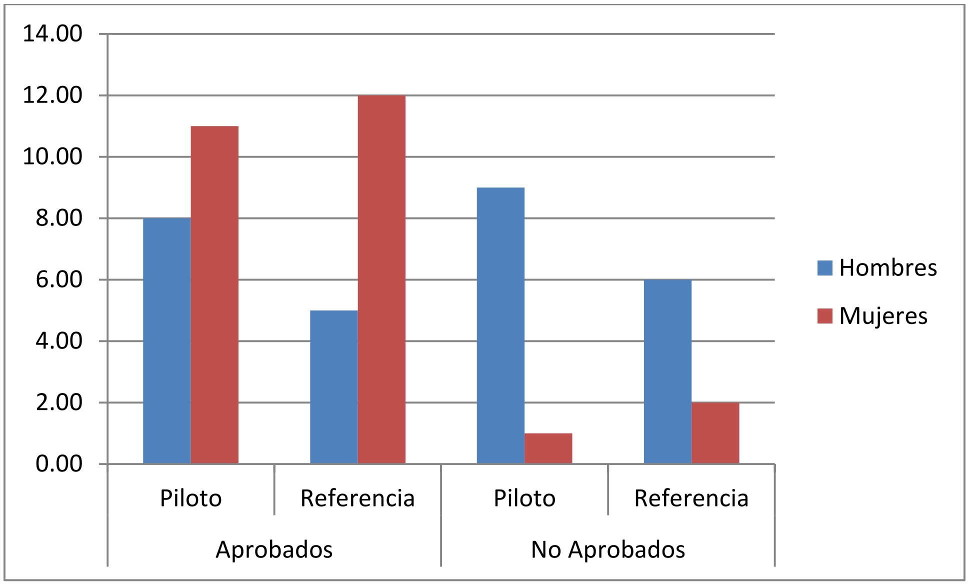


Figura 29 Gráfica Comparativa por Género de Aprobados y No Aprobados.

En la tabla 4.1 se presentan algunos estadísticos descriptivos de ambos grupos.

Tabla 4.1 Estadísticos Descriptivos de los grupos.

Grupo	Piloto	Referencia
Calificación Media	60.74	63.61
Calificación Mínima	37.15	28.26
Calificación Máxima	87.21	98.33

4.2.2 Composición Porcentual.

En la figura 30 se presenta una gráfica con los alumnos aprobados y no aprobados del grupo Piloto.

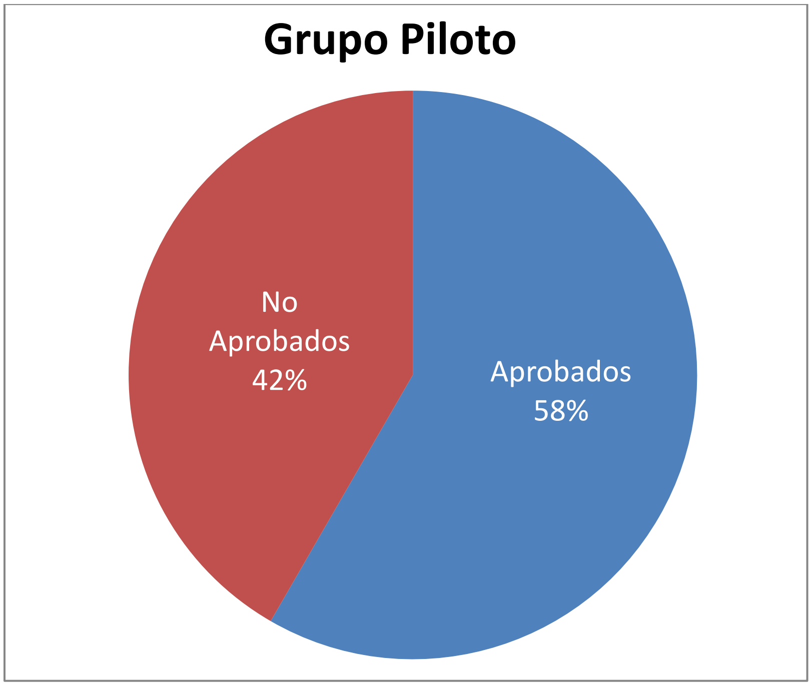


Figura 30 Alumnos aprobados y no aprobados del grupo piloto.

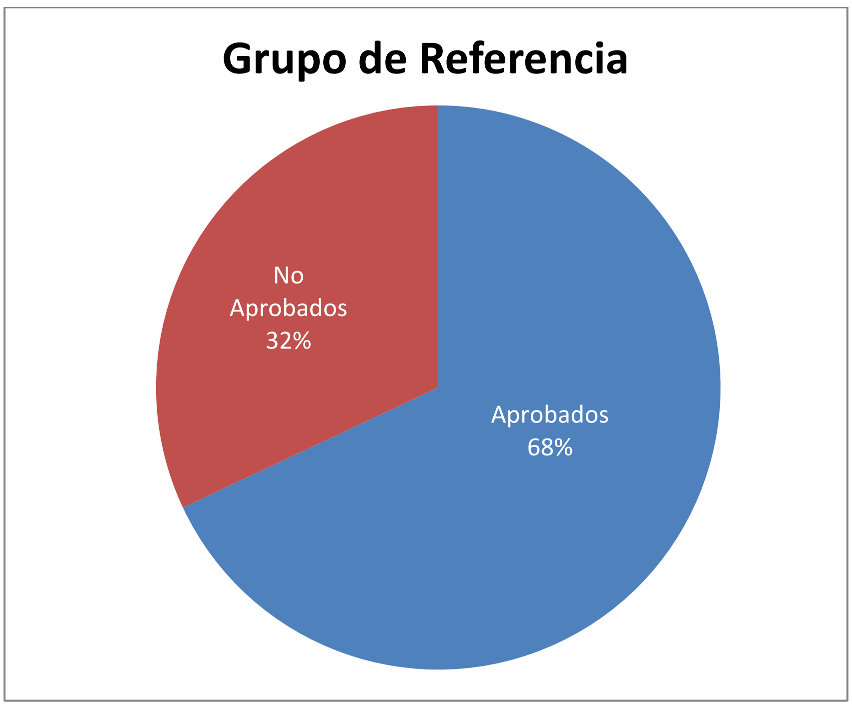


Figura 31 Alumnos aprobados y no aprobados del grupo de Referencia

4.2.3 Promedios

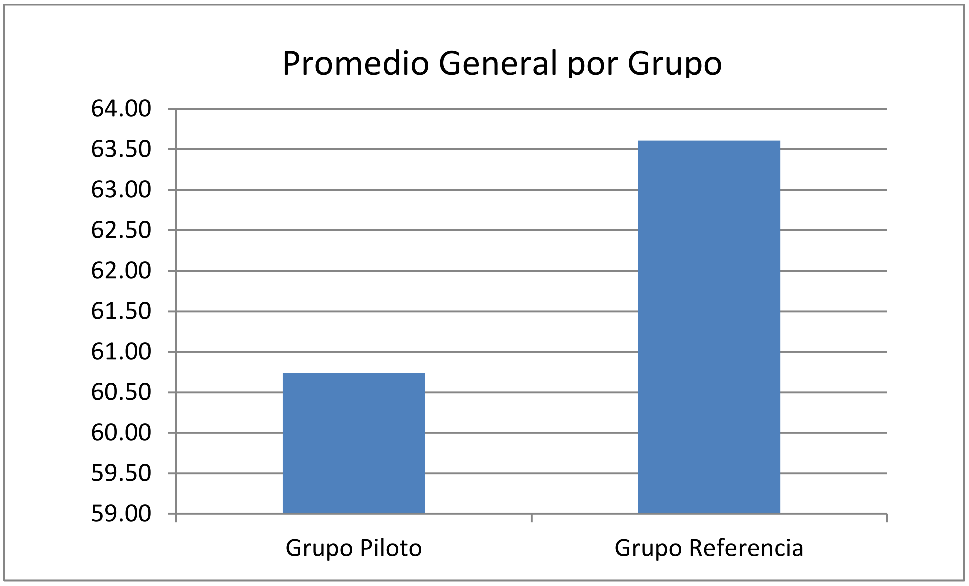


Figura 32 Promedio General de Grupo Piloto y Referencia

4.2.4 Desviación Estandar.

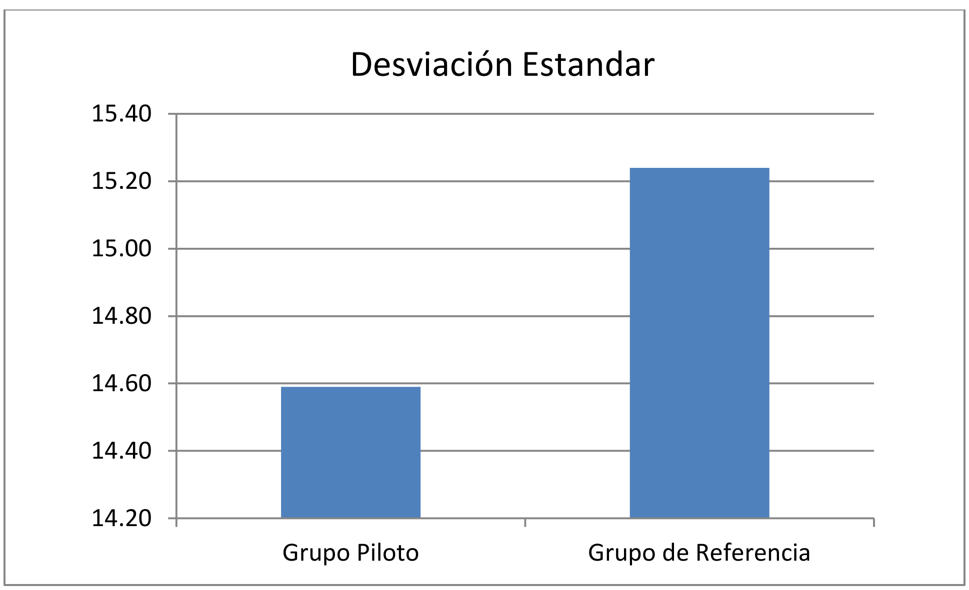


Figura 33 Desviación Estándar

4.2.5 Respuestas: Elementos Teórico-Conceptuales.

A continuación se presentan en la tabla 4.2 los resultados correctos a las diferentes preguntas del examen aplicado, expresados en términos de porcentaje para el grupo de referencia y el grupo piloto.

Tabla 4.2 Comparativa de Resultados Correctos.

Pregunta	Grupo Referencia	Grupo Piloto
1.- Objeto de la trigonometría tiene por objeto.	66.66%	52%
2.- Definición de Funciones Trigonométricas.	Inciso I: 62.5% Inciso II: 37.5% Inciso III: 25% Inciso IV: 91.66%	Inciso I: 48% Inciso II: 60% Inciso III: 32% Inciso IV: 88%
3.- Obtención de Valores de con Calculadora	I: 100% Ii: 41.66% Iii: 91.66% Iv: 87.5%	I: 96% II: 88% III: 96% IV: 88%
4.- Definición de Radián	37.5%	76%
5.- Angulo Central y Longitud de Arco	25%	80%
6.- Equivalencia de Radián	37.5%	52%
7.- Definición de Círculo Unitario	62.5%	72%
8.- Equivalencias de Ángulos	54.16%	32%
9.- Angulo de Indeterminación de la Función Tangente	37.5%	28%
10.- Indeterminación de la	66.66%	24%

Función Tangente		
11.- Identificación de Gráfica	a) 79.16% b) 75%	a) 88% b) 92%
12.- Obtención numérica de Funciones Trigonométricas.	Seno: 95.83% Coseno: 95.83% Tangente: 95.83% Cotangente: 8.3% Secante: 91.66% Cosecante: 26.08%	Seno: 84% Coseno: 80% Tangente: 76% Cotangente: 4% Secante: 64% Cosecante: 44%
13.- Ejercicio de Aplicación.	20.83%	20%
14.-Ejercicio de Obtención de ángulos.	I: 8.33% Ii: 8.33%	I: 4% Ii: 4%
15.- Convención de Giro.	a) 62.5% b) 87.5% c) 75% d) 83.33%	a) 52% b) 88% c) 60% d) 80%
16.-Dibujo de Gráfica. Obtención de Periodo. Dominio y Rango.	41.66%	40%
17.- Dibujo de Gráfica. Obtención de Amplitud, Desplazamiento y Frecuencia.	58.33%	84%

En forma gráfica estas respuestas se expresan en las figuras 34 y 35:

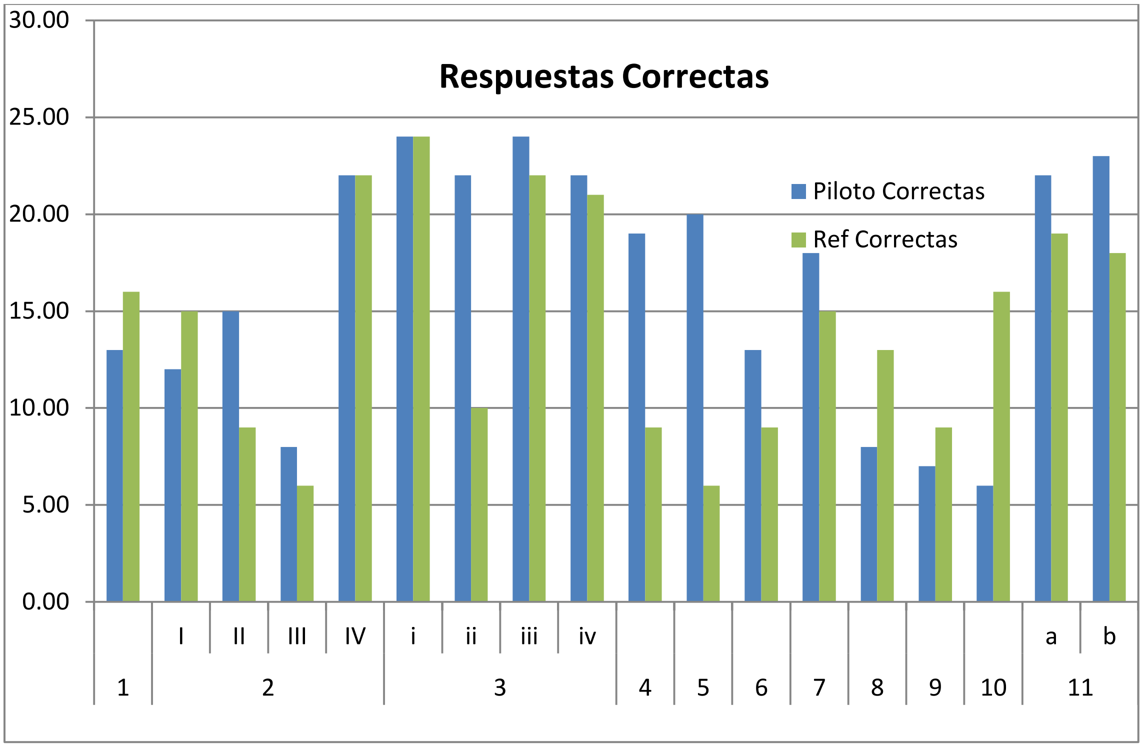


Figura 34 Comparación de Respuestas Correctas en Preguntas Teóricas

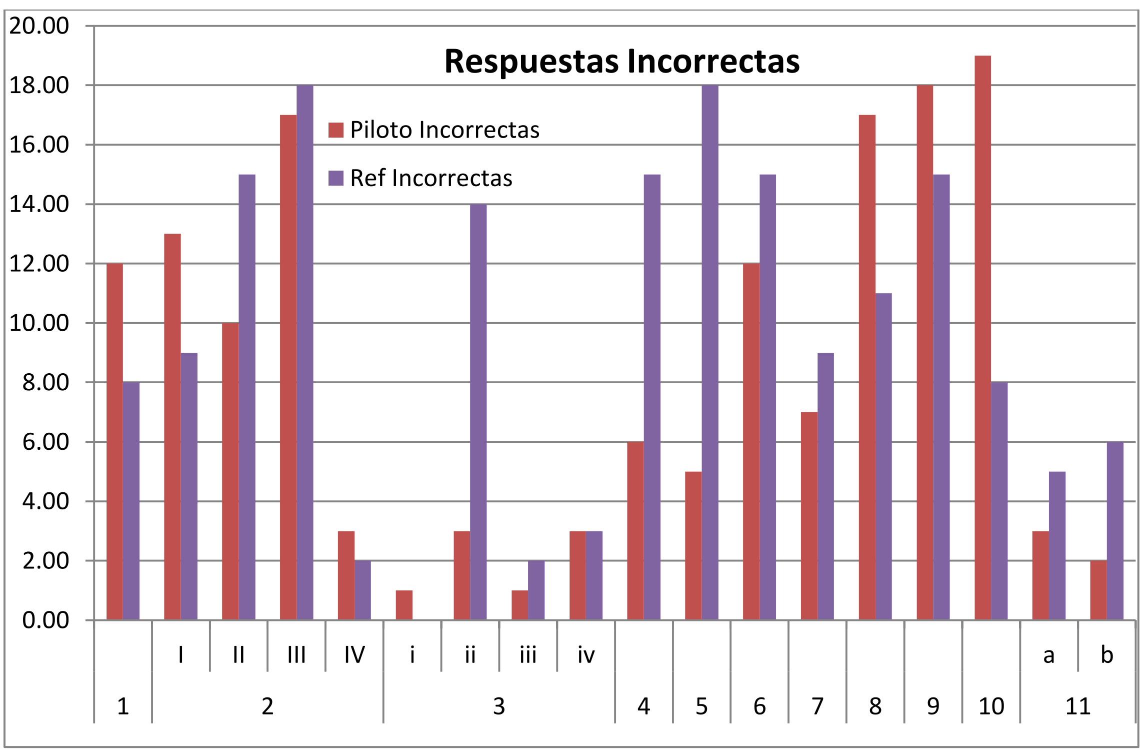


Figura 35 Comparación de Respuestas Incorrectas en Preguntas Teóricas

4.2.7 Ejercicios Prácticos

En las figuras 36 y 37 se describen las respuestas correcta e incorrectas, respectivamente, a los ejercicios prácticos.

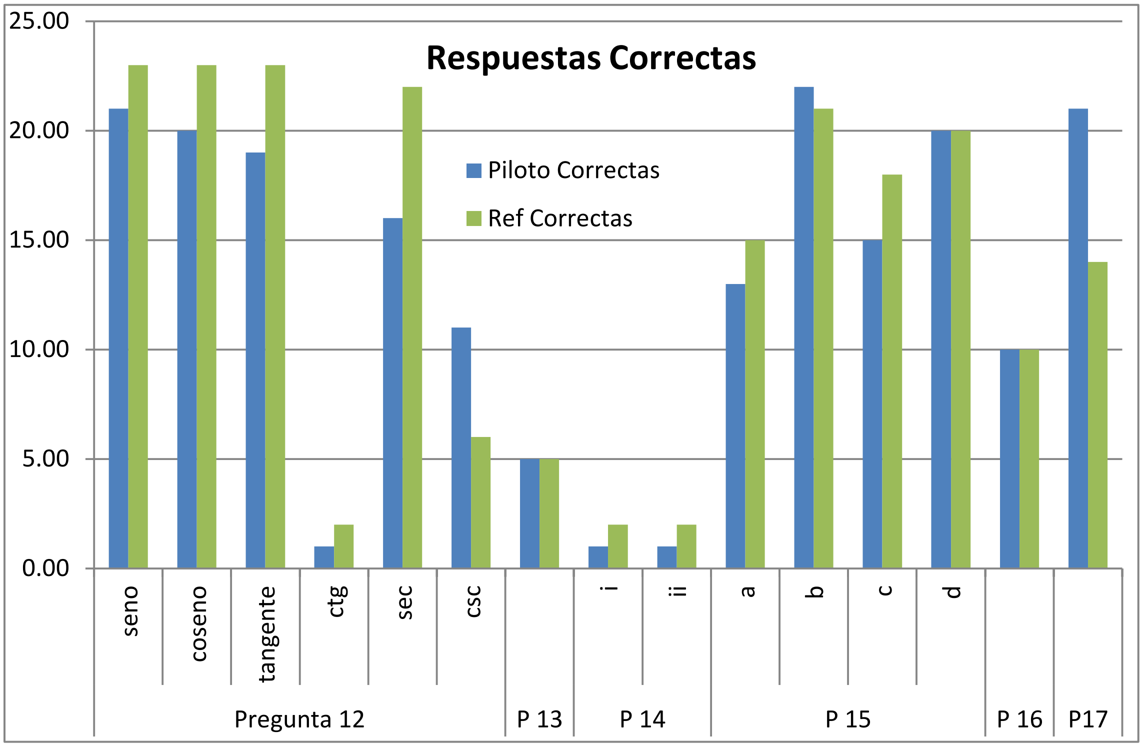


Figura 36 Respuestas Correctas Ejercicios Prácticos

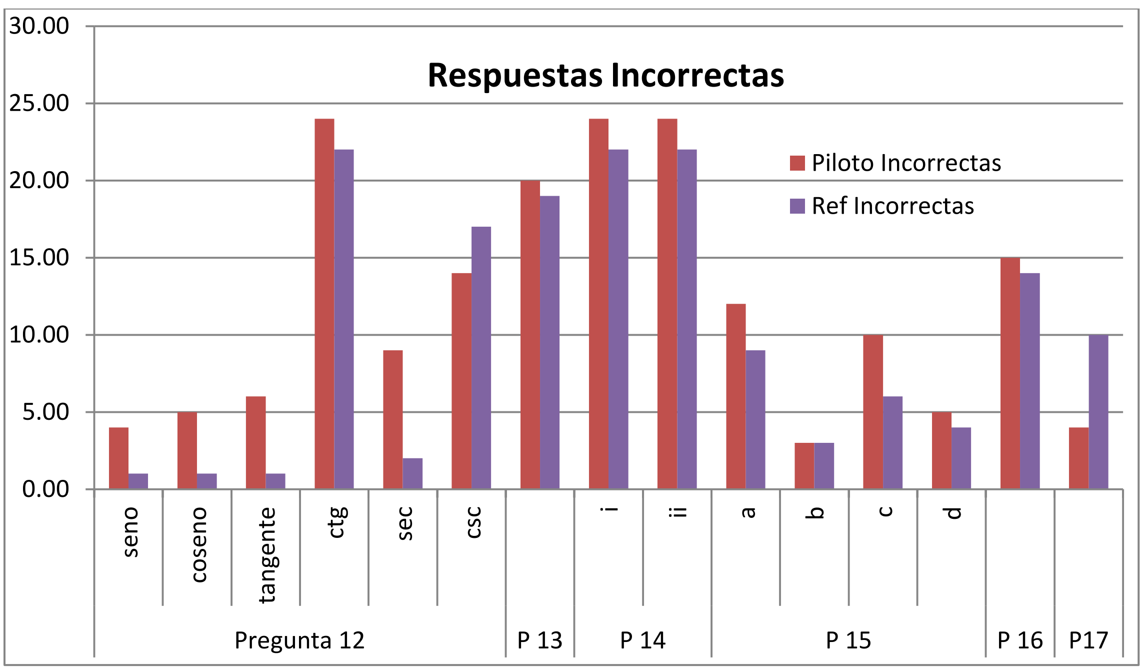


Figura 37 Respuestas Incorrectas Ejercicios Prácticos

4.3 Análisis de los Resultados.

4.3.1 Elementos Teórico Conceptuales

En el estudio de las Funciones Trigonométricas resulta fundamental que el alumno comprenda como elemento básico la proyección del Radio del Círculo Unitario sobre los ejes coordenados para observar su variación en la gráfica correspondiente (seno, coseno, etc.). Por ello se presenta ésta situación en la pregunta número 2 del examen y el resultado obtenido refleja confusión en los alumnos ya que no alcanzan a identificar las identidades inversas y las proyecciones correspondientes.

La operatividad en la calculadora permite obtener resultados confiables que permiten confirmar los datos relacionados a conceptos tales como radián y longitud de arco. Los resultados en la pregunta 3 referente a dicho tópico son positivos ya que en su mayoría se obtuvieron datos correctos respecto al uso de la calculadora.

Los conceptos de Radián, Equivalencia en grados y Círculo Unitario fue mejor entendido en el caso del grupo Piloto que en el testigo.

La pregunta número 8 (Figura 38) reclama dos elementos importantes: por un lado la identificación de la convención de giro del ángulo central y por el otro la identificación de la proyección correspondiente al seno (en el eje y) y al coseno (en el eje x). Se observa que los resultados correctos fueron por parte del grupo Testigo.

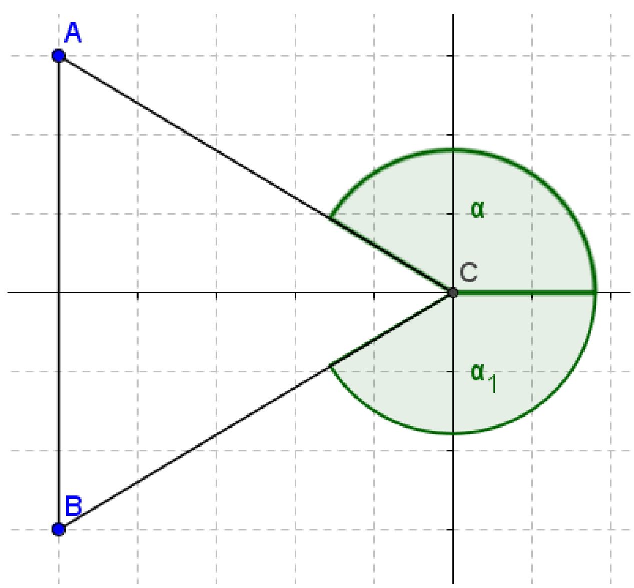


Figura 38 Proyección sobre Ejes Cartesianos

La función tangente requiere de la identificación del detalle en el denominador como causa de indefinición en el caso de que la proyección en el eje x sea igual a cero lo que conlleva a la asíntota en 90° y 270°. Esta situación se presenta en la pregunta 9 y 10; los resultados fueron contestados correctamente en el grupo testigo que en el Piloto.

Resulta importante diferenciar a las funciones seno y coseno por su inicio y proyección sobre los ejes coordenados. En los incisos a y b de la pregunta 10 se observa que ambos grupos identifican correctamente cada uno de ellos así como su amplitud y desplazamiento vertical.

4.3.2 Elementos Prácticos

Como se ha mencionado con anterioridad las Funciones Trigonométricas reclaman la claridad del concepto de Proyección sobre los ejes coordenados ya que –en particular- para dibujar sus gráficas correspondientes y obtener valores numéricos correctos es necesario identificar los momentos en el que el denominador es igual a cero, lo que conducirá a que se presente una asíntota. En la pregunta 12 del segmento de ejercicios se plantea que se obtengan valores numéricos en los que se deberá reconocer la asíntota como lo es en el caso de la tangente y la secante. Así también se deberá hacer la diferencia entre obtener un valor igual a cero como lo es el caso del Coseno y la Cotangente y un valor indefinido como lo es en el caso de la tangente y la secante. También es importante destacar que el alumno en esta etapa debe aplicar las funciones inversas para poder obtener correctamente un valor numérico.

Los resultados apuntan que son la Cotangente y la Secante las Funciones Trigonométricas que más dificultad tienen los alumnos para obtener tanto su inverso como su valor numérico.

Son pocos los alumnos que resuelven el problema de aplicación en el tema de Fuerzas, se observa la dificultad de plantear una fuerza como una componente en dos ejes: el de las ordenadas y las abscisas. Debido a esto no llegan al resultado numérico. Los planteamientos gráficos resultan mínimos y manifiestan su confusión para plantear la solución a este problema, el porcentaje de alumnos que lo resolvieron correctamente fue muy bajo.

De igual forma en los problemas siguientes se resalta la dificultad de aplicar los conceptos e identidades trigonométricas enmarcados en el círculo de radio diferente a uno. La aplicación del teorema de Pitágoras y el uso del criterio del alumno para aplicar alguna identidad dificulta la obtención del resultado correcto del valor del ángulo solicitado.

La convención de giro fue en su mayoría identificado correctamente, sin embargo existió una problemática particular en los casos de giro negativo, siendo evidente que existe una confusión en los cuadrantes II y III a dicho giro.

En la construcción de las Funciones Trigonométricas fue la función Coseno la que representó mayor problemática ya que el inicio no fue dibujado correctamente. El periodo, la amplitud, la frecuencia fueron representadas en general de manera correcta. El desplazamiento horizontal implicó un elemento de confusión ya que el inicio de la función fue presentada incorrectamente, es decir, en lugar de iniciar la Función Coseno en el máximo de amplitud fue identificado en el “cero” o inicio de la Función, también se observa que en algunos casos el alumno no alcanza a plantear claramente las cuatro fases del giro del Círculo Unitario.(Figura 39)

a) y = 3 cos x -2

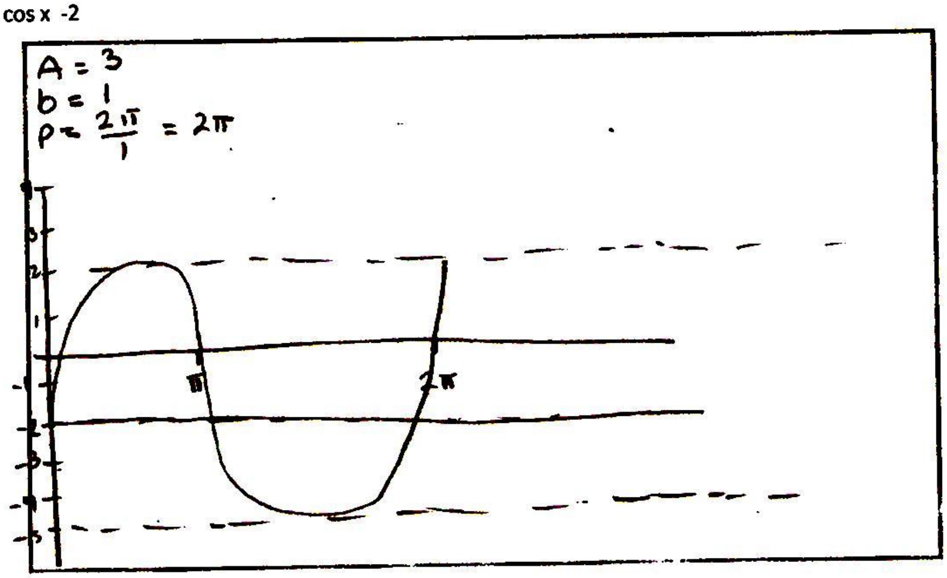


Figura 39 Planteamiento del Fases de Giro

4.3.3 Observaciones por Tipo de Respuesta.

4.3.3.1 Respuestas Correctas.

El examen estuvo compuesto por una parte teórica y otra parte de ejercicios de aplicación. En la primera etapa no solamente fue necesario aprender conceptos sino ligarlos a otros de mayor complejidad. Se observa que el Grupo Piloto logra articular los siguientes conceptos:

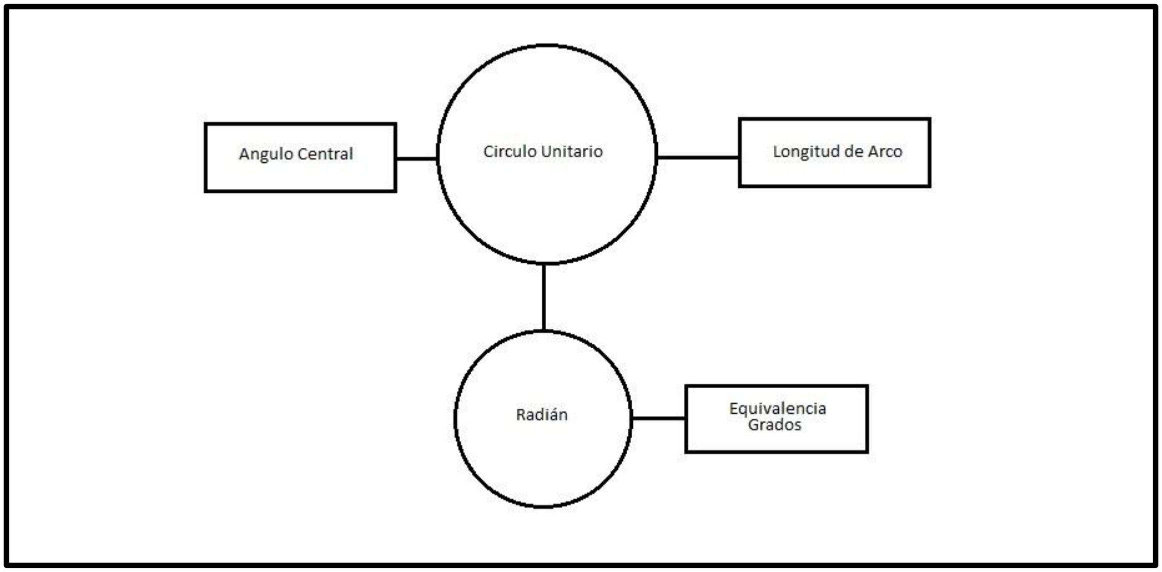


Figura 40 Conceptos Grupo Piloto.

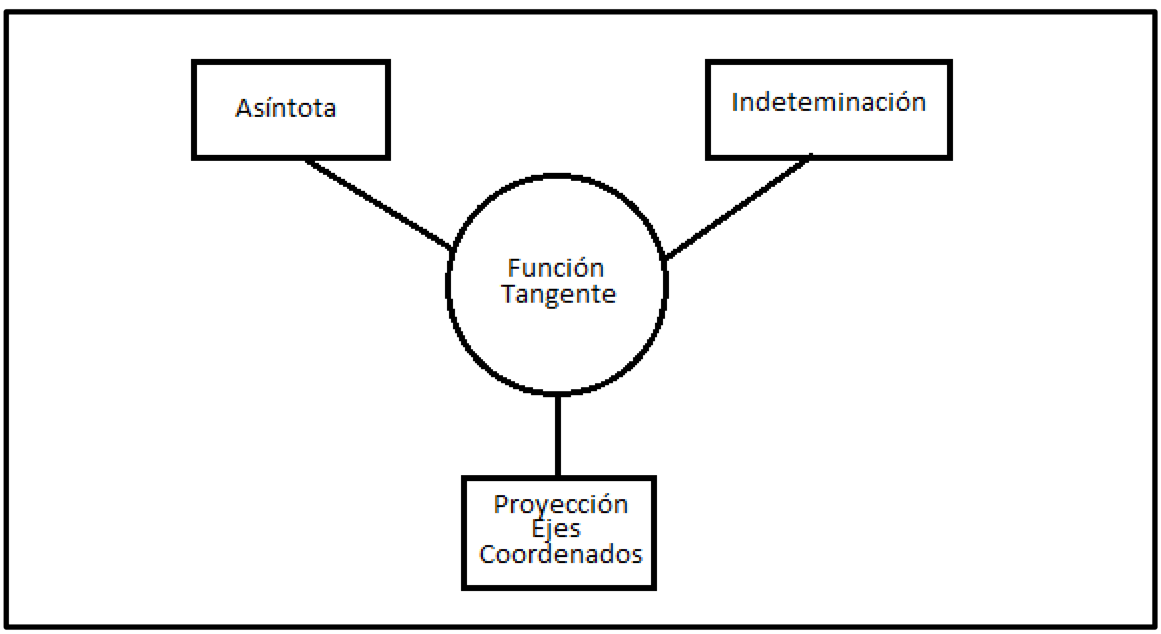


Figura 41 Conceptos Grupo Referencia

4.3.3.2 Respuestas Incorrectas.

Son dos las preguntas que representaron la mayor dificultad de respuesta. Por un lado el problema de aplicación en un sistema de fuerza en donde las proyecciones en los ejes coordenados permitían visualizar una fuerza y su ángulo de aplicación resultó inaccesible para los alumnos inicialmente por la resistencia a utilizar un conocimiento matemático en una disciplina como la física. Algunos alumnos reportaron que “esos problemas son de la clase de física y no de matemáticas”. Los alumnos que intentaron resolver el problema tuvieron la dificultad de expresar en un dibujo o esquema el comportamiento de los elementos en cuestión. Pocos alumnos llegaron a visualizar las componentes y despejar la variable para encontrar el resultado correcto. Cabe mencionar que el problema fue tomado de los materiales de la Secuencia Didáctica.

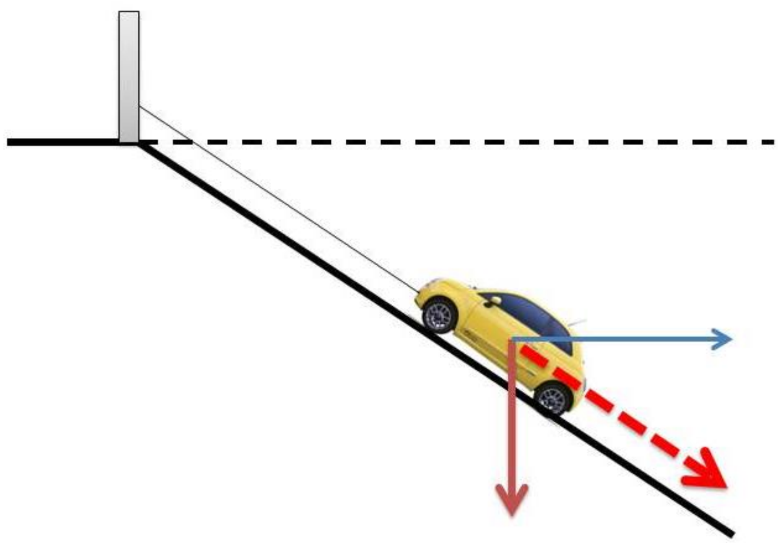


Figura 42 Problema de Aplicación.

El cálculo de ángulos dentro de un círculo utilizando el radio como hipotenusa dado un punto contenido en ella resultó una pregunta que la mayoría de los alumnos no contestó correctamente debido que inicialmente no utilizaron la información del punto como elementos conocidos, es decir, no visualizaron el triángulo rectángulo contenido en el círculo para obtener el radio del círculo. Posteriormente no utilizaron alguna Función Trigonométrica para encontrar el ángulo con la operación inversa. Finalmente no se realizó la operación de ángulo suplementario para encontrar los ángulos correspondientes.

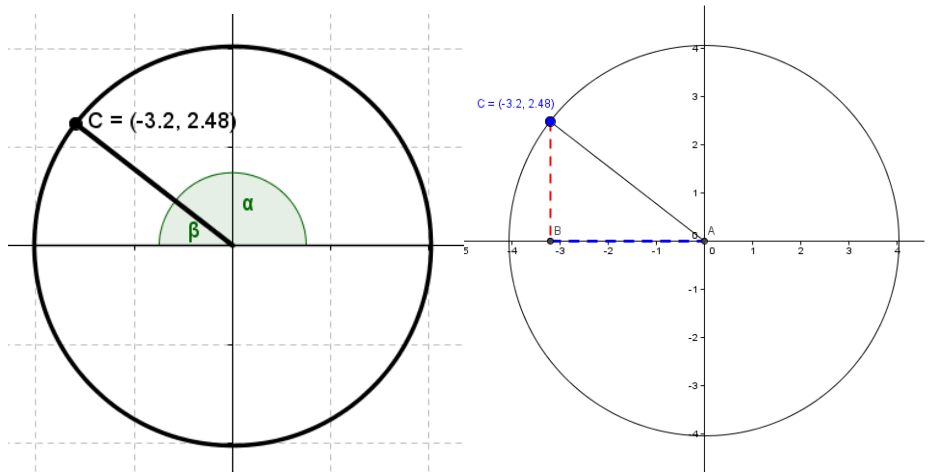


Figura 43 Visualización de Proyecciones

4.3.4Elementos de Análisis.

Se observa que en términos generales en el rubro de calificación total de examen los resultados fueron más altos en el grupo de Referencia que en el grupo Piloto. Los materiales utilizados en ambos casos fue el mismo. La diferencia fue la forma de Trabajo en Grupo para el grupo Piloto y Clase Magistral para el de Referencia.

A continuación se presentan puntos de reflexión al respecto.

4.3.4.1 Planeación y Desarrollo.

El Trabajo en Grupo reclama una planeación de tiempo y actividades de desarrollo en clase así como consideraciones operativas y organizativas para la confrontación del trabajo individual, por equipo y grupal. Una situación que provocó el retraso de las actividades fue la distribución de materiales entre los alumnos y la adaptación del uso de herramientas tecnológicas como el internet y el software Geogebra. Aunque podría decirse que los alumnos tienen un contacto con las herramientas tecnológicas se observa que los programas y software utilizado por los alumnos cotidianamente (Facebook y Twitter) no contribuye efectivamente al desarrollo de las actividades. No solamente el software Geogebra sino la simple visualización de presentaciones en internet fue limitado a la visualización por parte de un menor número de alumnos.

Otro elemento que limitó el desarrollo de actividades fue la etapa de cierre grupal del tema debido al manejo de tiempos y dudas que se presentaron a lo largo de las actividades. Existió un desfasamiento de actividades debido a la falta de control en el manejo de tiempos de cada etapa de los momentos académicos.

4.3.4.2 Actitudes frente al Trabajo en Grupo.

En la educación secundaria el trabajo en equipo tiene la característica de la división de un tema en varias partes correspondientes a cada alumno, estos desarrollan la parte que les fue designada y de manera improvisada se unen los subtemas teniendo como resultado un producto desarticulado y sin cohesión. Esta experiencia es en su mayoría registrada por el alumno y es el antecedente previo al Trabajo en Grupo que se plantea en el presente trabajo.

El alumno presenta entonces una actitud previa hacia el trabajo en equipo, se desarrollan conductas que generan un clima de resistencia inicial a trabajar con compañeros cuya empatía no es positiva. En las actividades se observó una actitud selectiva de acercamiento o rechazo con los compañeros de trabajo, esto dificultó el desarrollo de las tareas en el aula. Existieron situaciones de conflicto interpersonal, hubo incluso la solicitud de una alumna de trabajar de manera individual argumentando que con ninguno de sus compañeros podía trabajar. Otros alumnos mencionaron que con anterioridad no les gustaba trabajar en equipo debido a la dificultad de ponerse de acuerdo y la desigualdad de trabajo por parte de los integrantes del equipo.

A lo largo del desarrollo de las actividades se observó que un equipo completo no se presentó a la sesión debido a la visión previa del trabajo en equipo, es decir, no les mereció importancia esta forma de trabajo y confiaron en que obteniendo el material de dicha actividad podrían estudiar para el examen. Así mismo la asistencia no fue constante de manera general.

Los resultados del examen reflejan en cierta forma la dificultad inherente del Trabajo en Grupo pese a que los materiales utilizados se vinculaban coherentemente con el examen aplicado.

4.3.4.3 Clase Magistral Grupo de Referencia.

En ambos grupos se utilizó el mismo material didáctico con la diferencia de que en el Grupo de Referencia se trabajó de manera expositiva con las consideraciones típicas de una clase magistral. Se observa que el material didáctico permitió un trabajo más fluido y dinámico debido a que los alumnos daban seguimiento a la clase con el material didáctico en sus manos evitando la distracción y contrastando lo expuesto con los conceptos, procedimientos y elementos contenidos en dicho material. Los alumnos incluso pudieron participar leyendo el material y dando cuenta de su validez en la explicación en el pizarrón y en los ejercicios desarrollados en su cuaderno. Se administró más efectivamente el tiempo para presentar explicaciones y detalles importantes de las temáticas que así lo reclamaran. Los ejercicios realizados por parte de los alumnos fueron revisados con mayor detenimiento y corregidos o verificados en su momento.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados el número de aprobados en el examen fue mayor en el grupo de Referencia(68%) que en el Piloto(58%).Se puede concluir entonces que existieron elementos que limitaron el desarrollo del Trabajo en Grupo, a continuación se presentan reflexiones al respecto:

- Resultó difícil romper la resistencia inicial que el alumno tiene como antecedente ante el trabajo en equipo, presentándose conductas como el individualismo y falta de una actitud cooperativa ante el equipo de trabajo.
- La falta de control de disciplina e inasistencia provocó que existiera una irregularidad y falta de conexión de los temas trabajados en el aula.
- La formación de una conducta autónoma en el aprendizaje requiere de un proceso paulatino a mediano y largo plazo ya que es un proceso que implica elementos psicológicos y sociales formados con anterioridad.
- No se llevaron a cabo procesos de análisis y discusión en equipo de manera cotidiana y efectiva debido a que se observó un interés por realizar las actividades con el objetivo de cumplir el requisito de entrega de productos.

Por otro lado la Secuencia Didáctica ayudó a los alumnos en el proceso de aprendizaje ya que a pesar de no haber obtenido el mayor porcentaje de acreditación la diferencia porcentual fue del 10% lo que indica que los resultados se mantuvieron cercanos a una proporción semejante al de referencia. Es importante mencionar que durante el trabajo en el aula algunos estudiantes fueron mostrando una actitud de interés a las Matemáticas debido a que podían expresar libremente sus dudas sin temor a ser sancionado por el profesor o por la burla de sus compañeros. Se observa que algunos alumnos presentaron una apertura y disposición para trabajar con los materiales ya que el Trabajo en Grupo generó un ambiente flexible para desarrollar las actividades.

Los alumnos a través del Trabajo en Grupo lograron aprender conceptos a partir de la manipulación de elementos tangibles vinculando un conocimiento básico previo con la extensión de su aplicación a otros de mayor complejidad.

Para continuar y mejorar la aplicación de la Secuencia Didáctica es necesario considerar lo siguiente:

- Planear con anticipación el desarrollo de las actividades para que los alumnos estén preparados para esta forma de trabajo.
- Constatar que los ejercicios realizados por los alumnos sean revisados con mayor detenimiento para presentar las correcciones y errores.
- Limitar considerablemente la inasistencia porque esto hace que se pierda la coherencia temática para el alumno.

El método de trabajo se puede generalizar y utilizar en otras materias debido a que la esencia de esta forma de trabajo es la construcción de cualquier conocimiento a través de la aportación de las ideas y el trabajo en grupo.

Se concluye entonces que el Trabajo en Grupo puede llevar al alumno a desarrollar aprendizajes efectivos en la medida en que se cuiden las formas de interacción entre los alumnos, de igual forma se debe registrar las experiencias positivas y negativas después de la labor académica para corregir y mejorar la aplicación de esta forma de trabajo. La selección de materiales resulta un elemento fundamental para el manejo de tiempos ya que la extensión de sesiones puede limitar la cobertura general del curso.

Bibliografía

Alsina, J., & Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría?* Madrid: Sintesis.

Andueza, M. (1985). *Dinámica de Grupos .* México: Trillas.

Aronson, E. (2011). *Cooperation in the Classroom: The Jigsaw Method.* Londres: Pinter and Martin.

Bermejo Fuentes, A. (1997). La transversalidad y los valores en las Matemáticas de la ESO. *SUMA*, 67-65.

Brihuega, J. (1997). Las Matemáticas en el Bachillerato. *Suma:Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.*, 113-122.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics Count.* London: HMSO.

Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I., y otros. (2007). *El Constructivismo en el aula.* España: GRAO.

Contreras, J. (1991). *El currículum como formación.* México: Cuadernos de Pedagogía.

Cooper, J. (1999). *Classroom Teacher Skills.* Boston: Houghton Mifflin Company.

Cruz, S. (2006). *Competencias Matemáticas Básicas que muestran estudiantes de Bachillerato en la Resolución de Problemas que involucran análisis y Toma de Decisiones.* México: UPN.

De Lorenzo, J. (1998). *Análisis Infinitesimal.* España: Tecnos.

Descartes, R. (1986). *La Geometría.* México: Alfaguara.

Díaz-Barriga, A., Larios Osorio, V., Padilla Gómez, A., Bravo Mojica, A., Meda Guardiola, A., & Fernández Villanueva, M. (2002). Hacia las aplicaciones de las Matemáticas en la escuela media superior de México. *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, 59-71.

Erikson, E. (1958). *Infancia y Sociedad.* México: Horme-Paidos.

Estrela, M. T. (2005). *Autoridad y Disciplina en la Escuela.* México: Trillas.

Gil, D., & Carrascosa, J. (1991). *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria.* Barcelona: ICE/HORSORI.

Gómez, G. (2004). *Matemáticas III: Cuaderno de Trabajo.* México: Trillas.

Hilgard, E., & Bower, G. (1979). *Teoría del Aprendizajez.* México.

Kilpatrick, J. (2000). Un recuento retrospectivo de los pasados 25 años de Investigación sobre Resolución de Problemas Matemáticos. *Universidad de Georgia*, 1-15.

Lesh, R. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learnin, and Teaching.* Chicago: Tylor & Francis Group.

Muñoz Corona, L., & Avila Ramos , J. (2012). *Población Estudiantil del CCH : ingreso, tránsito y egreso.* México: UNAM.

NTCM. (2000). *Principios y Estándares para le Educación Matemática.* EUA: NCTM.

Pozo, J., & Monereo, C. (1999). *El aprendizaje estratégico.* Madrid: Santillana.

Preisser Rodríguez, & Cuevas de la Rosa, O. (2004). *Programa de Estudios de Matemáticas Semestres I a IV.* México: UNAM.

Rodríguez, W., & Alom, A. (s.f.). *Redalyc*. Recuperado el 4 de Agosto de 2013, de http://www.redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?%C2%A1Cue=44713052004

Rutter, M. (2003). *La Conducta antisocial de los Jóvenes.* México: AKAL.

Sauvé, L. (2006). La educación ambiental y la globalización: desafíos curriculares y pedagógicos. *Revista Iberoamericana de Educación*, 83-102.

Suzuky, J. (2001). *A History of Mathematics.* Estados Unidos: Addison Wesley.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Paidós.

ANEXOS

A.1 Secuencia Didáctica Eje.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

SECRETARIA ACADÉMICA

DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN DE PROFESORES

Curso: Conocimiento y Aplicación de los programas de

Matemáticas IV

Secuencia didáctica para la Unidad 3: Funciones Trigonométricas

de Matemáticas IV con base en el trabajo cooperativo

Elaboración: Alejandro Raúl Reyes Esparza y Tania Reyes Zúñiga.

Marzo de 2009

ACTIVIDAD 1	
Tiempo:	20 – 30 min.
Actividad Personal:	Lectura extractase
Indicaciones:	Leer el material correspondiente a las sesiones 1 y 2. En particular hacer una síntesis, en una cuartilla y utilizando tus palabras, de la sección denominada función racional.
Producto:	Síntesis de conversión de grados a radianes y viceversa; razones trigonométricas.

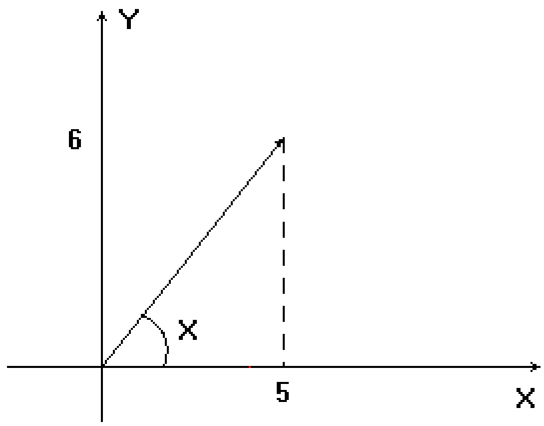
ACTIVIDAD 2	
Tiempo:	20 – 30 min.
Actividad Personal:	
Indicaciones:	1.- Escribir la equivalencia en radianes de los siguientes ángulos dados en grados: a) 60º b) 120ºc) 150º d) 330º e) 240º f) 315º g) 270º h) 135º 2. Escribir la equivalencia en grados de los siguientes ángulos dados en radianes: a) π/4 b) π/3 c) 2π/5
Producto:	Conversión de grados a radianes y viceversa

.

ACTIVIDAD 3	
Tiempo:	15 - 20 min.
Actividad por equipos:	En equipos heterogéneos formados por 4 o 5 alumnos se comparan los resultados obtenidos en la Actividad 2 con la finalidad de obtener entre todos el resultado correcto
Indicaciones:	
Producto:	Conversión de grados a radianes y viceversa

ACTIVIDAD 4	
Tiempo:	30 - 40 min
Actividad Grupal:	En los equipos formados por 4 o 5 alumnos de la Actividad 2
Indicaciones:	Un representante de cada uno de los equipos realiza la exposición en el pizarrón de los resultados obtenidos en la Actividad 2 y el grupo en su conjunto analiza el producto obtenido. De manera análoga se procede con cada uno de los problemas.
Producto:	Conversión de grados a radianes y viceversa

ACTIVIDAD 5	
Tiempo:	20 – 30 min.
Actividad Personal:	
Indicaciones:	Escribe las funciones trigonométricas del ángulo X:

	
Producto:	Funciones trigonométricas del ángulo X

ACTIVIDAD 6	
Tiempo:	15 - 20 min.
Actividad por equipos:	En equipos heterogéneos formados por 4 o 5 alumnos se comparan los resultados obtenidos en la Actividad 5 con la finalidad de obtener entre todos el resultado correcto
Indicaciones:	
Producto:	Funciones trigonométricas del ángulo X

ACTIVIDAD 7	
Tiempo:	30 - 40 min
Actividad Grupal:	En los equipos formados por 4 o 5 alumnos de la Actividad 5
Indicaciones:	Un representante de cada uno de los equipos realiza la exposición en el pizarrón de los resultados obtenidos en la Actividad 5 y el grupo en su conjunto analiza el producto obtenido. De manera análoga se procede con cada uno de los problemas.
Producto:	Funciones trigonométricas del ángulo X

ACTIVIDAD 8	
Tiempo:	20 – 30 min.
Actividad Personal:	
Indicaciones:	Elabora la gráfica de las siguientes funciones. 1.- f(x) = 4 sen x 2..- g(x) = $\frac{1}{5}$ sen x 3.- h(x) = 3 cos x 4.- j(x) = $\frac{1}{2}$ cos x
Producto:	Gráfica de funciones trigonométricas

ACTIVIDAD 9	
Tiempo:	15 - 20 min.
Actividad por equipos:	En equipos heterogéneos formados por 4 o 5 alumnos se comparan los resultados obtenidos en la Actividad 8 con la finalidad de obtener entre todos el resultado correcto
Indicaciones:	
Producto:	Gráfica de funciones trigonométricas

ACTIVIDAD 10	
Tiempo:	30 - 40 min
Actividad Grupal:	En los equipos formados por 4 o 5 alumnos de la Actividad 8
Indicaciones:	Un representante de cada uno de los equipos realiza la exposición en el pizarrón de los resultados obtenidos en la Actividad 8 y el grupo en su conjunto analiza el producto obtenido. De manera análoga se procede con cada uno de los problemas
Producto:	Gráfica de funciones trigonométricas

ACTIVIDAD 11	
Tiempo:	15 - 20 min
Actividad Personal:	Lectura extractase
Indicaciones:	Leer el material correspondiente a la sesión 7. En particular hacer una síntesis, en una cuartilla y utilizando tus palabras, de la sección denominada dominio y rango de una función trigonométrica.
Producto:	Determinación de dominio y rango de funciones trigonométricas.

ACTIVIDAD 12	
Tiempo:	20 – 30 min.
Actividad Personal:	
Indicaciones:	Determina el dominio y el rango de las siguientes funciones: 1.- $f(x) = 4 \text{ sen } x$ 2..- $g(x) = \frac{1}{5} \text{ sen } x$ 3.- $h(x) = 3 \cos x$ 4.- $j(x) = \frac{1}{2} \cos x$

Producto:	Determinación de dominio y rango de funciones trigonométricas.
ACTIVIDAD 13	
Tiempo:	20 – 30 min.
Actividad Personal:	
Indicaciones:	En equipos heterogéneos formados por 4 o 5 alumnos se comparan los resultados obtenidos en la Actividad 12 con la finalidad de obtener entre todos el resultado correcto
Producto:	Determinación de dominio y rango de funciones trigonométricas.

ACTIVIDAD 14	
Tiempo:	15 - 20 min.
Actividad Grupal:	En los equipos formados por 4 o 5 alumnos de la Actividad 13
Indicaciones:	Un representante de cada uno de los equipos realiza la exposición en el pizarrón de los resultados obtenidos en la Actividad 13 y el grupo en su conjunto analiza el producto obtenido. De manera análoga se procede con cada uno de los problemas
Producto:	Determinación de dominio y rango de funciones trigonométricas.

ACTIVIDAD 15	
Tiempo:	30 - 40 min
Actividad Personal:	Lectura extractase
Indicaciones:	Leer el material correspondiente a la sesión 8. En particular hacer una síntesis, en una cuartilla y utilizando tus palabras, de la sección denominada noción de amplitud, periodo y frecuencia de una función trigonométrica.
Producto:	Determinación de amplitud, periodo y frecuencia de funciones trigonométricas.

.

ACTIVIDAD 16	
Tiempo:	20 – 30 min.
Actividad Personal:	
Indicaciones:	Determina la amplitud, el periodo y la frecuencia de las siguientes funciones: 1.- f(x) = 4 cos x 2.- $f(x) = \frac{1}{2}$ sen x 3.- g(x) = cos 3x 4.- $h(x) = \text{sen } \frac{1}{4}x$
Producto:	Determinación de amplitud, periodo y frecuencia de funciones trigonométricas.

ACTIVIDAD 17	
Tiempo:	15 - 20 min.
Actividad por equipos:	En equipos heterogéneos formados por 4 o 5 alumnos se comparan los resultados obtenidos en la Actividad 16 con la finalidad de obtener entre todos el resultado correcto
Indicaciones:	
Producto:	Determinación de amplitud, periodo y frecuencia de funciones trigonométricas.

ACTIVIDAD 18	
Tiempo:	30 - 40 min
Actividad Grupal:	En los equipos formados por 4 o 5 alumnos de la Actividad 16
Indicaciones:	Un representante de cada uno de los equipos realiza la exposición en el pizarrón de los resultados obtenidos en la Actividad 16 y el grupo en su conjunto analiza el producto obtenido. De manera análoga se procede con cada uno de los problemas
Producto:	Determinación de amplitud, periodo y frecuencia de funciones trigonométricas.

ACTIVIDAD 19	
Tiempo:	30 - 40 min
Actividad Personal:	Lectura extractase
Indicaciones:	Leer el material correspondiente a la sesiones 9, 10 y 11. En particular hacer una síntesis, en una cuartilla y utilizando tus palabras, del comportamiento de una función trigonométrica, en función de las constantes a sen (bx + c) + d.
Producto:	Determinación del comportamiento de las funciones trigonométricas.

ACTIVIDAD 20	
Tiempo:	20 – 30 min.
Actividad Personal:	
Indicaciones:	Determina el comportamiento de las siguientes funciones trigonométricas: 1.- $g(x) = 2 \text{ sen } (x - 3) + 4$ 2.- $h(x) = 3 \text{ sen } (x + 4) - 2$

	3.- $m(x) = 4 \cos (x + 1) - 3$ 4.- $n(x) = 2 \cos (\frac{1}{3} x - 5) + 1$
Producto:	Determinación del comportamiento de las funciones trigonométricas.

ACTIVIDAD 21	
Tiempo:	15 - 20 min.
Actividad por equipos:	En equipos heterogéneos formados por 4 o 5 alumnos se comparan los resultados obtenidos en la Actividad 20 con la finalidad de obtener entre todos el resultado correcto
Indicaciones:	
Producto:	Determinación del comportamiento de las funciones trigonométricas.

ACTIVIDAD 22	
Tiempo:	30 - 40 min
Actividad Grupal:	En los equipos formados por 4 o 5 alumnos de la Actividad 16
Indicaciones:	Un representante de cada uno de los equipos realiza la exposición en el pizarrón de los resultados obtenidos en la Actividad 20 y el grupo en su conjunto analiza el producto obtenido. De manera análoga se procede con cada uno de los problemas
Producto:	Determinación del comportamiento de las funciones trigonométricas.

ACTIVIDAD 23	
Tiempo:	30 min
Indicaciones:	El profesor realiza una síntesis de los elementos más importantes de la unidad, explica aquellos conceptos que al alumno le hayan generado dudas y propone algunos ejercicios complementarios.
Producto:	Síntesis de la unidad.

ACTIVIDAD 24	
Tiempo:	60 minutos
Actividad Individual:	
Indicaciones:	El alumno resuelve la propuesta de autoevaluación que se presenta al final de la unidad.
Producto:	El alumno adquiere una idea de los puntos que requiere retroalimentar.

.

A.2 Actividades Adicionales.

Actividad	001	Manejo de Calculadora
Objetivo	Configurar calculadora modos: Deg y Rad Introducir valores de forma sexagesimal Obtener valores de seno coseno y tangente . Convertir valores directos con la calculadora.	
Producto	Resultados Numéricos por incisos	

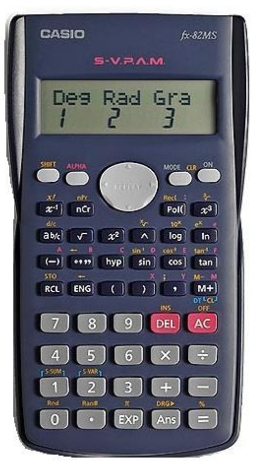
Introducción:

Es importante que conozcas el manejo de tu calculadora científica para poder realizar cálculos precisos que te permitirán obtener resultados para el aprendizaje de las Funciones Trigonométricas. Es por ello necesario que consideres lo siguiente:

- Tener el manual de tu calculadora científica, en caso de que no lo tengas búscalo en internet e imprímelo.(Si es muy extenso el manual selecciona solo la información que te sea útil para su funcionamiento)
- Se te recomienda el uso de la calculadora CASIO para que no existan diferencias de configuración, sin embargo puedes conseguir de otra marca siempre y cuando sea científica.
- No se permite el uso de celular debido a la dificultad de configuración y variedad de marcas.

Instrucciones:

1.- Identifica los botones para el cambio de modo para radianes y grados.



Existen 3 modos básicos para el trabajo con grados:

- **Deg**: en inglés Degree para grados.
- **Rad**: Radianes
- **Grad**: Gradientes, grados cenetesimales

Para modificar es necesario ubicar la tecla Shift y Mode.
Pulsar Shift+Mode.
Teclear el número (3) para Deg y (4) para Rad.

2.- Observa en el Display el cambio de letra para cada modo: D para Degree, R para Radian y G para Gradian.

3.-Identifica la tecla de grados Sexagecimales e introduce a manera de ejemplo el siguiente valor:

23°23’12’’. Cada elemento deberá ser seguido de ésta tecla:

4.- Una vez que hayas realizado la configuración obtén los valores que se te piden y responde los incisos de la página siguiente en la tabla. Considera que al ingresar el valor de π utiliza –si es posible- la tecla correspondiente y cambia el modo según corresponda a radianes, gradianes o grados.

Nota: en algunas calculadoras la tecla tiene la identificación: EXP.

Actividad	002	Manejo de Calculadora
Objetivo	Configurar calculadora modos: Deg y Rad Introducir valores de forma sexagesimal Obtener valores de seno coseno y tangente . Convertir valores directos con la calculadora.	
Integrantes:	1.- 2.- 3.- 4.- 5-	

Grupo:		Fecha:	
Producto	Resultados Numéricos por incisos	Calificación:	

Ejercicio	Valor a convertir	Modo	Incisos	Resultado
1	Tan$(\frac{\pi}{3})$	Rad	a) 0.018279 b) 0.016450 c) 1.732050 d) -2	
2	Sen(35)	Deg	a) 0.573576 b) 0.522498 c) 0.112314 d) 4.5	
3	Cos$(\frac{\pi}{8})$	Rad	a) 0.9999765 b) 0.999980 c) 1.2 d) 0.923879	
4	Cos(100)	Grad	a) -0.173648 b) 0.173648 c) 0 d) -1	
5	Sen(98°56’12’’)	Deg	a) 1 b) 0.990268 c) 0.999506	

			d) 0.987860	
6	Tan(89.9)	Deg	a) 2 b) 6.250193 c) 356 d) 572.9572134	
7	Sen(265)	Grad	a) -0.996194 b) -0.852640 c) 1 d) 0.852640	
8	Cos(2 π)	Rad	a) 1 b) 0.993993 c) -1 d) 0.995133	
9	Tan(21°7’6’’)	Deg	a) 0 b) 2.5257116 c) -9.5143644 d) 0.386235	
10	Sen(3.5)	Rad	a) 0.061048 b) -0.350783 c) 0.054950 d) -1	

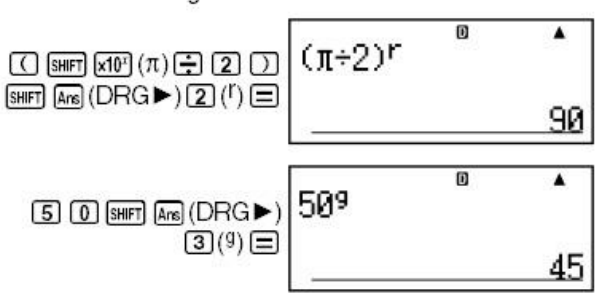
5.- Analiza la forma de convertir de manera directa los valores en la calculadora y llena la tabla siguiente.

Ejemplo: Convertir los valores siguientes a grados:

$\frac{\pi}{2}$ radianes = 90°, 50 grados centesimales = 45°

El procedimiento siguiente supone que la unidad angular fijada por omisi n de la calculadora es grados.

LINE



Ejercicio	Valor a convertir	Incisos	Resultado
1	$(\frac{\pi}{4})$	a) 0.018279 b) 45 c) 1.732050 d) 22.5	
2	60 centesimal	a) 0.573576 b) 0.522498 c) 54 d) 4.5	
3	$(\frac{\pi}{9})$	a) 20 b) 0.999980 c) 1.2 d) 0.923879	
4	100 centesimal	a) -0.173648 b) 90 c) 0 d) -1	
5	98 centesimal	a) 1 b) 0.990268 c) 88.2 d) -0.987687	

Actividad	003	Evaluación Individual	
Objetivo	Evaluación individual de actividad		
Nombre:			
Grupo:		Fecha:	
Producto	Resultados Numéricos	Calificación:	

1.- Determina con la calculadora el valor de las siguientes funciones (con seis decimales):

Inciso	Valor
a) Sen44°	
b) Cos 23°17’43’’	
c) Tan($\frac{\pi}{4}$)	
d) Cos ($\frac{\pi}{7}$)	
e) Tan 56°18’37’’	

2.- Determina el valor de las funciones trigonométricas de 45° considerando que los catetos miden 5 unidades y verifica que son los mismos valores ya obtenidos para este ángulo (Dibuja en el cuadro siguiente el triángulo y sus operaciones correspondientes).

Función Trigonométrica	Valor	Función Trigonométrica	Valor
Sen 45°		Ctg 45°	
Cos 45°		Sec 45°	
Tan 45°		Csc 45°	

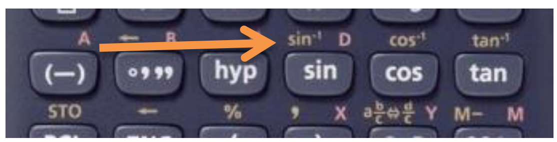
3.- Determina los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo de 30° .(Dibuja en el cuadro siguiente el triángulo y sus operaciones correspondientes).

Función Trigonométrica	Valor	Función Trigonométrica	Valor
Sen 30°		Ctg 30°	
Cos 30°		Sec 30°	
Tan 30°		Csc 30°	

Actividad	004	Actividad Individual Extraclase	
Objetivo	Usar la calculadora para sen^{-1} ,cos^{-1} y tan^{-1}. Conversión de formato sexagesimal.		
Nombre:			
Grupo:		Fecha:	
Producto	Resultados Numéricos	Calificación:	

En la página 119 realizaste la siguiente operación:

Sen θ = $\frac{5}{13}$ = 0.384615 , este valor es la relación entre la hipotenusa y el cateto opuesto, sin embargo **NO** es el valor del ángulo. Para ello es necesario utilizar la función inversa del seno: sen^{-1}, en tu calculadora por lo regular se obtiene con la combinación : shift+ sen.



Nota: en algunas calculadoras se identifica al seno como ***sin*** (en inglés) o ***sen*** (en español).

El ángulo entonces será:

Θ= 22.619864° (en grados)

Para convertir ese resultado al formato sexagesimal es necesario teclear la combinación:

shift+ 

el resultado obtenido será:

Θ=22°37’11’’

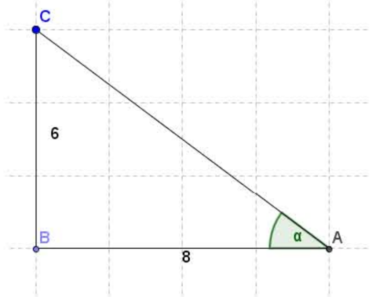
Teniendo en cuenta las anotaciones anteriores encuentra el valor de los ángulos correspondientes.

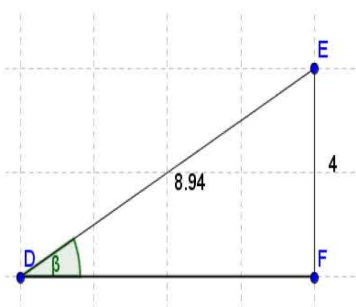
Escribe en el rectángulo lateral :

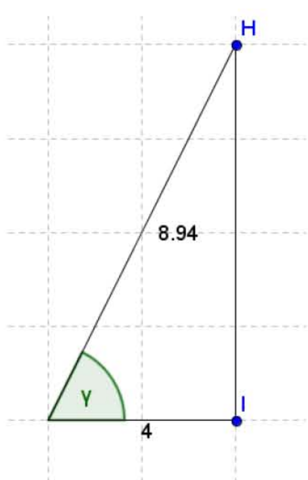
1.- La función que utilizaste para obtener el valor del ángulo.

2.- Las operaciones.

3.- El valor del ángulo en grados y el valor del ángulo en formato sexagesimal.


C
6
B
8
α
A


E
8.94
4
D
β
F


H
8.94
γ
4
I

Actividad	005	Concepto Número π
Objetivo	Expresar el número π de manera longitudinal con un círculo.	
Nombre:		

Grupo:		Fecha:	
Producto		Calificación:	

Introducción.

Las Funciones Trigonométricas requieren comprender claramente el valor de un número especial: π. Este número lo has utilizado en diversas ocasiones como un valor, el de 3.14159. En esta actividad recordaremos que tiene no solamente un significado numérico sino **comparativo**, es decir: nos indica "***cuántas veces cabe un elemento en otro"***. Para ello deberás recordar el concepto de perímetro de un círculo y su expresión para calcularlo.

Materiales:

-Cordón 60 cm

- PegamentoInstrucciones:

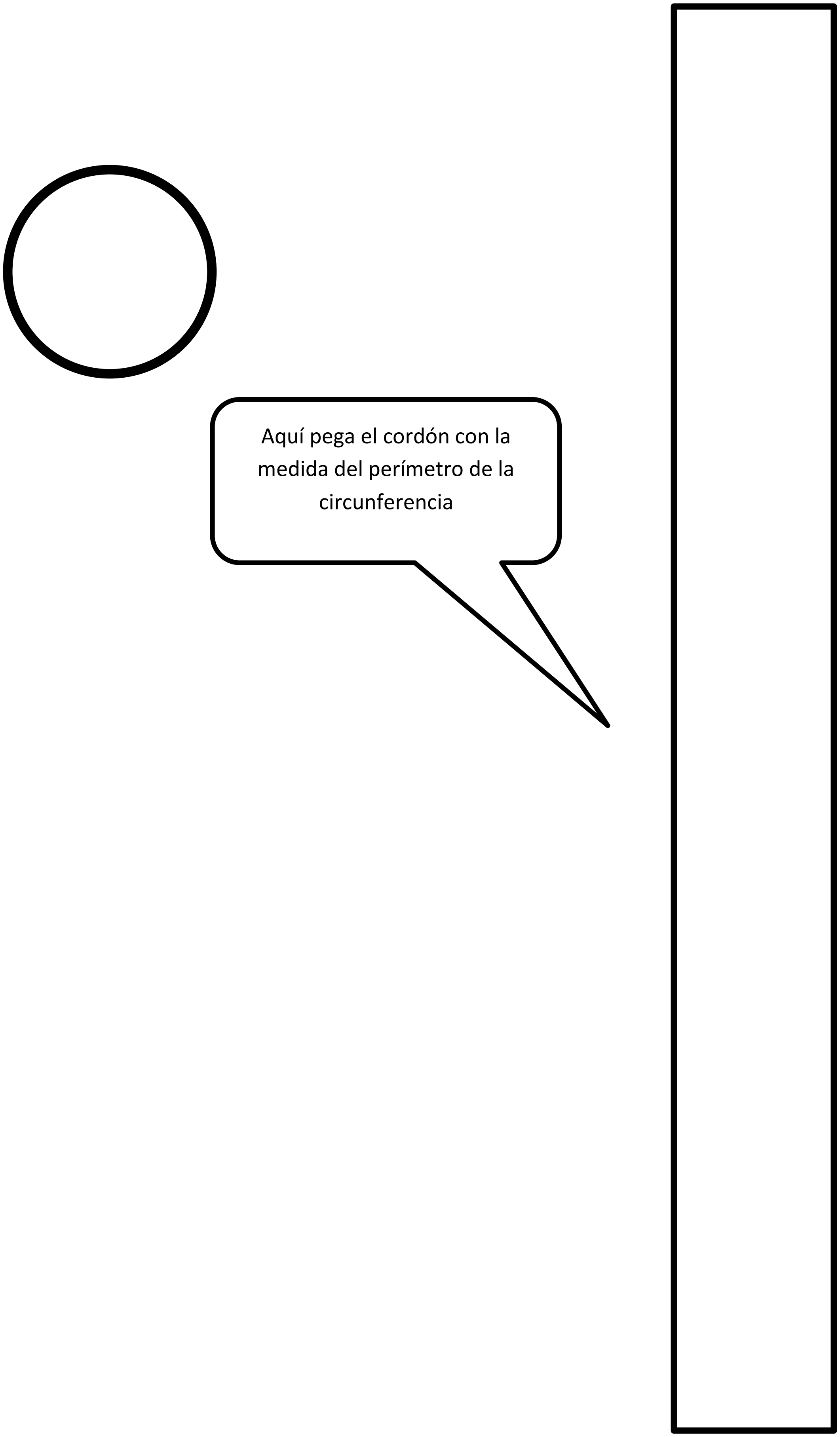
1.- Medir radio y diámetro del círculo.

2.-Cortar tramos de: radio, diámetro y perímetro.

3.- Pegar en el recuadro el tramo del diámetro en el recuadro.

4.- Responde las preguntas.

-Tijeras


Aquí pega el cordón con la medida del perímetro de la circunferencia

Preguntas:

1.- ¿Cuántas veces cabe el radio en el perímetro?

2.- ¿Cuántas veces cabe el diámetro en el perímetro?

3.- ¿ Cuál es la fórmula para encontrar el perímetro de un círculo?

4.- Con la fórmula encuentra el perímetro del círculo.

5.- ¿La longitud del perímetro es igual/parecida/diferente al perímetro calculado numéricamente?

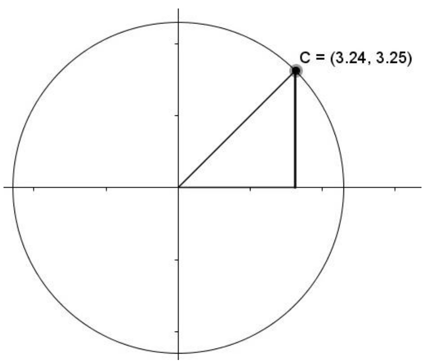
6.- Si el radio de un círculo es igual a 5 , ¿ cuál es su perímetro?

7.- Si el radio de un círculo es igual a 1 , ¿ cuál es su perímetro?

Actividad	006	Transformaciones de Funciones Trigonométrcias.
Objetivo	Dado un punto obtener el ángulo agudo correspondiente.	
Nombre:		

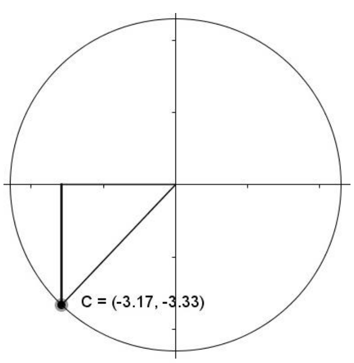
Grupo:		Fecha:	
Producto	Ejercicios	Calificación:	

Encuentra el valor del ángulo correspondiente así como las Funciones Trigonométricas.



Senoθ=	Cosθ=	Tanθ=
Ctgθ=	Secθ=	Cscθ=

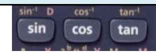
Θ=



Senoθ=	Cosθ=	Tanθ=
Ctgθ=	Secθ=	Cscθ=

Θ=

Actividad	007	Manejo de Calculadora	
Objetivo	Obtener valor de ángulo con función inversa de Funciones Trigonométricas.		
Nombre:			
Grupo:		Fecha:	
Producto	Ejercicios	Calificación:	

La calculadora tiene las funciones seno,coseno y tangente. 

Para obtener la cotangente, secante y cosecante es necesario ubicar la función inversa en la calculadora con la tecla , para ello es necesario conocer y dominar las funciones inversas que se presentan a continuación:

$$\text{Seno } \theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$\text{Ctg } \theta = \frac{catetoadyacente}{catetoopuesto}$$

$$\text{Sec } \theta = \frac{hipotenusa}{catetoadyacente}$$

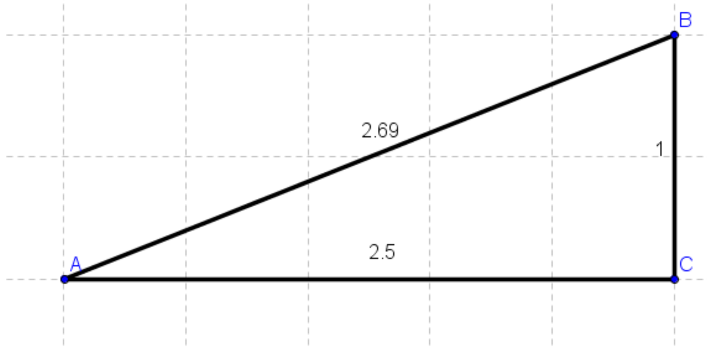
$$\text{Csc } \theta = \frac{hipotenusa}{catetopuesto}$$

El seno es el inverso de la cosecante.

El coseno es el inverso de la secante.

La tangente es el inverso de la cotangente.

Observa en el siguiente ejemplo:



Seno θ =$\frac{1}{2.69}$ =0.371747 Con cualquier de las tres funciones se puede obtener el ángulo

Cos θ = $\frac{2.5}{2.69}$ =0.929368 utilizando sen^{-1} ,cos^{-1} ó tan^{-1}.

Tan θ =$\frac{1}{2.5}$ = 0.4

Recuerda que al utilizar las teclas inversas se encuentra el valor del ángulo cuyo resultado fue el obtenido, es decir:

"Se encuentra el valor del ángulo cuyo resultado es 0.371747: cuando se obtiene el seno".

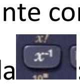
"Se encuentra el valor del ángulo cuyo resultado es0.929368 : cuando se obtiene el coseno".

"Se encuentra el valor del ángulo cuyo resultado es 0.4 cuando se obtiene la tangente".

Ese ángulo se obtiene tecleando la inversa en cualquiera de las opciones anteriores:

Θ= 21.82 grados.

Comprueba lo anterior en los tres casos.

Ahora, para encontrar la cotangente, secante y cosecante conociendo un ángulo es necesario saber la inversa de cada una y utilizar la tecla antes mencionada:

Sen 21.82 = 0.371747, el inverso de ese valor es 2.692582 (COSECANTE)

Cos 21.82 = 0.929368, el inverso de ese valor es 1.077172 (SECANTE)

Tangente 21.82 = 0.4, el inverso de ese valor es 2.49≈2.5 (COTANGENTE)

Comprobando numéricamente se tiene:

Seno θ =$\frac{1}{2.69}$ el inverso es : Csc θ =$\frac{2.69}{1}$= 2.69

Cos θ =$\frac{2.5}{2.69}$ el inverso es : Sec θ =$\frac{2.69}{2.5}$= 1.076

Tan θ =$\frac{1}{2.5}$ el inverso es : Ctg θ =$\frac{2.5}{1}$= 2.5

Ejercicios.

Dado un ángulo θ, encuentre todas las Funciones Trigonométricas con la tecla inversa en donde corresponda.

Θ= 35	
Seno Θ=	Ctg Θ =
Cos Θ=	Sec Θ =
Tan Θ=	Csc Θ=

Θ= 279.89	
Seno Θ=	Ctg Θ =
Cos Θ=	Sec Θ =
Tan Θ=	Csc Θ=

Actividad	008	Círculo Unitario
Objetivo	Relacionar π con el círculo unitario para construir posteriormente la Función Trigonométrica.	
Nombre:		

Grupo:		Fecha:	
Producto	Ejercicios	Calificación:	

En la Actividad 004 observaste la relación que guarda el radio y el diámetro con respecto del perímetro de cualquier círculo:

El radio cabe: __________________ veces en el perímetro.

El diámetro cabe:_______________ veces en el perímetro.

Ahora necesitamos que imagines que en la figura siguiente su radio mide 1 unidad longitudinal, es necesario establecer que por ahora no nos interesa si son centímetros, pulgadas, kilómetros o yardas las unidades en la que se mide ésta longitud especial, simplemente decimos que su longitud es igual a 1.

La siguiente consideración es la utilización de π como un valor de ubicación y no solamente comparativo (cuántas veces cabe el diámetro en el perímetro) o numérico. Para ello es necesario no utilizar el valor numérico (3.1415…) sino el símbolo. Entonces si calculamos el perímetro se expresa:

$P= 2 \text{ (radio) } (\pi) = 2\,(1)(\pi)= 2\pi$

El acuerdo ahora es que todo el perímetro del círculo unitario es ***cubierto*** con 2π.

Con este acuerdo ¿cuánto cubre del perímetro 2π?

Actividad	009	Análisis del denominador y numerador en la Función Tangente.
Objetivo	Constatar la indefinición en 90° y 270° destacando la reducción de la proyección en el eje x como causa de ésta.	
Nombre:		
Grupo:		Fecha:

Introducción.

Cuando se divide un valor entre otro -que tiene la particularidad de ser muy pequeño- observamos que el resultado es muy grande.

Encuentra el resultado de las siguientes divisiones:

Caso 1	$\frac{3}{0.01} =$	
Caso 2	$\frac{3}{0.000001} =$	
Caso 3	$\frac{3}{3} =$	
Caso 4	$\frac{3}{0.0000000001} =$	
Caso 5	$\frac{3}{1} =$	
Caso 6	$\frac{3}{0.5} =$	

Preguntas.

1.- Observa el denominador en cada caso. ¿Cuál caso es el más pequeño y cuál el más grande?

2.- ¿En qué caso el resultado es el más grande?

3.- ¿Cuál es la razón de que el valor sea muy grande?

4.- Escribe las funciones trigonométricas, anota en cuáles el denominador es constante y en cuáles el denominador varía.

Es constante	Varía

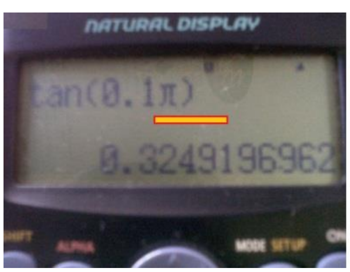
Función Tangente.

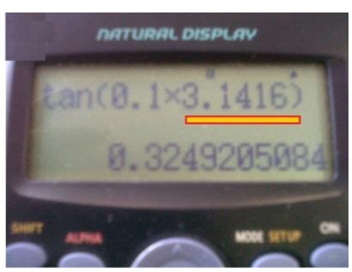
Sabes que tan θ= $\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$, en el círculo unitario la proyección del cateto adyacente es sobre el eje de las abcisas y el opuesto sobre el eje de las ordenadas. Cuando el radio del círculo unitario se mueve las proyecciones varían. En particular observaremos que el denominador (cateto adyacente) conforme se acerca a los 90° disminuye. Llena y analiza la siguiente tabla:

Modo D (Grados)   Modo R (Radián)

Modo D (**Grados**)		Modo R(**Radianes**)	
Tan θ	Resultado	Tan απ	Resultado
Tan 80°		Tan (0.1π)	
Tan 85°		Tan (0.2π)	
Tan 88°		Tan (0.3π)	
Tan 89°		Tan (0.4π)	
Tan 89.1°		Tan (0.41π)	
Tan 89.5°		Tan (0.42π)	
Tan 89.6°		Tan (0.43π)	
Tan 89.7°		Tan (0.44π)	
Tan 89.8°		Tan (0.49π)	
Tan 89.9999°		Tan (0.4999π)	
Tan 89.999999999°		Tan (0.49999999π)	
Tan 90°		Tan (0.5π)	

Nota: en algunas calculadoras – en el caso de Modo R- es posible ingresar el valor de pi o su equivalente decimal, por ejemplo con el valor de tan (0.1 π).





Preguntas:

5.- ¿Cómo son los valores conforme se acercan al valor de 90° o $\frac{\pi}{2}$?

6.- ¿Cuál es la razón de que esto suceda?

Actividad	010	Resumen de Videos.
Objetivo	Constatar que el alumno ha revisado los videos alojados en Internet	
Nombre:		

Grupo:		Fecha:	

Detalla el tema y realiza una breve explicación de los videos exhibidos en Youtube. Los videos están contenidos en http://gruporegular414.blogspot.mx/

Número de video.	Tema	Descripción
01		
02		
03		
04		
05		
06		
07		

Actividad	011	Construcción Gráfica Tangente
Objetivo	Realizar a través de la tabla la gráfica de la función tangente.	
Nombre:		

Grupo:		Fecha:	

Angulo	
0	
15	
30	
45	
60	
75	
89.1	
89.9	
89.9999	
89.99999999	
90	
105	
120	
135	
150	
165	

180	
195	
210	
225	
240	
255	
269	
269.1	
269.9	
269.9999	
270	
285	
300	
315	
330	
345	
360	

1.- ¿ Qué observas confirme el valor del ángulo se acerca a 90 grados?

2.- ¿ Qué observas conforme el valor del ángulo se acerca a 270 grados?

Dibuja la gráfica.

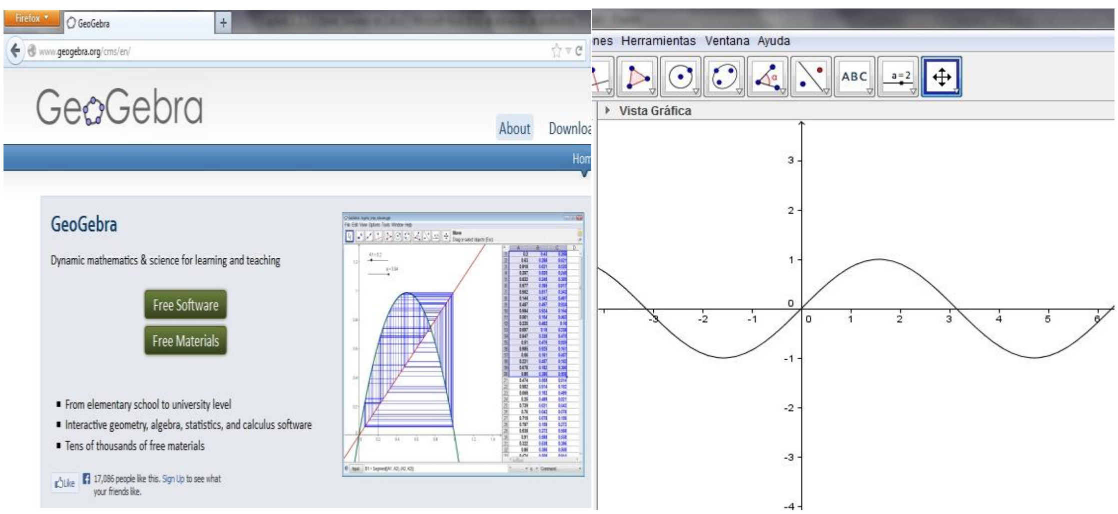
A.3 Videos.

Nombre del Video	Descripción	Liga en Youtube
Configuración_Calculadora_001	Configurar la calculadora para cambiar los modos Radián y Grados .	http://www.youtube.com/watch?v=YiIwyIwIDmE&feature=youtu.be1
Conversioni_grados_minutos_002	Ingreso de grados en forma sexadecimal y obtensión de seno con radianes,grados y sexagecimales	http://www.youtube.com/watch?v=kYj9rBO8IsY&feature=youtu.be
Sesión002AnguloCentral	Movimiento a través de los cuadrantes del ángulo central	http://www.youtube.com/watch?v=GWrmoX-orJE&feature=youtu.be
Círculo_unitario_v1	Proyecciones del círculo unitario	http://www.youtube.com/watch?v=rwG17jGtS1Y&feature=youtu.be
Circulo_unitario2	Continuación de la explicación	http://www.youtube.com/watch?v=nvjQxEAxp5I&feature=youtu.be
Circulo_unitario_seno	Proyección y análisis del seno	http://www.youtube.com/watch?v=WiC83lCfMQw&feature=youtu.be
Circulo_unitario_coseno	Proyección sobre el eje x y la liga con la calculadora.	http://www.youtube.com/watch?v=rQAD1bv4iNE
Función Tangente	Construcción de Función Tangente	http://www.youtube.com/watch?v=XHbKZTbKWwU

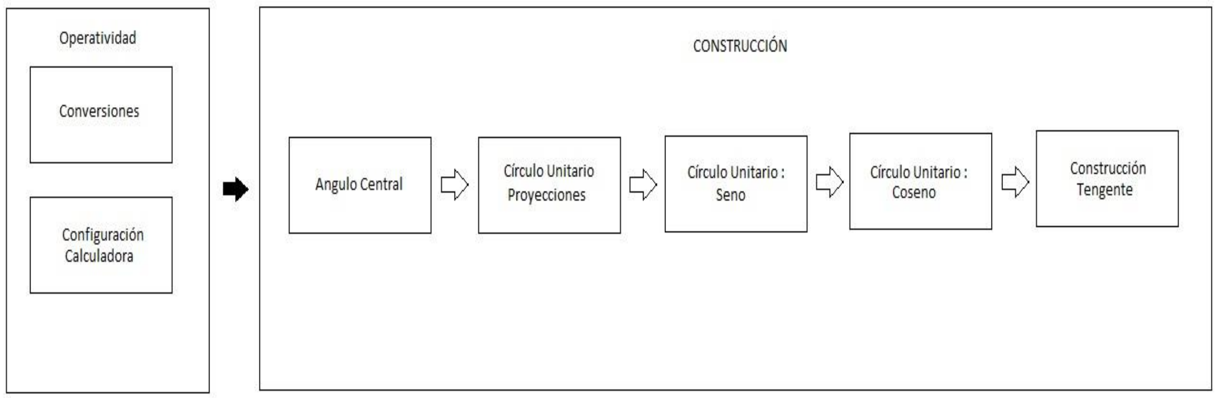
A.4 Propuesta de Secuencia de Actividades Adicionales.

Una de las dificultades que se presenta al abordar el tema de Funciones Trigonométricas es la visualización dinámica de los elementos que constituyen a las Funciones Trigonométricas como lo es el movimiento del radio dentro del círculo unitario, la variación de las proyecciones sobre los ejes coordenados y la relación entre el radio y los catetos que se forman con las proyecciones en dicho círculo. Se plantea entonces el uso de videos en donde se pueda observar el movimiento de estos elementos así como de la utilización del software educativo Geogebra para presentar la construcción de las gráficas observando la variación conforme al giro del radio en el círculo unitario. De igual forma se utiliza Youtube para visualizar videos donde explican temas que si bien no son propios del temario representan una dificultad técnica al momento de desarrollar la temática como lo es la configuración de la calculadora.

La presente Secuencia Didáctica planteautilizar medios tecnológicos para contribuir al desarrollo del aprendizaje en el aula y utilizar el tiempo de la manera más efectiva posible.



A continuación se presenta un esquema de actividades:



Descripción.

Operatividad. En esta etapa se aprende a configurar la calculadora para cambiar los modos Radián y Grados. Se utilizan los modos para realizar conversiones y se calculan algunas Funciones Trigonométricas para confirmar su correcta utilización. También se explican detalles técnicos sobre Geogebra (Descarga de Software, Problemáticas de los Plug Ins, Herramientas Básicas, Visulización en internet de Materiales) y materiales en YouTube.

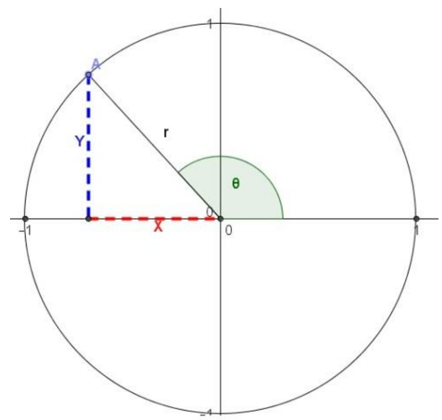
Construcción. Se llevan a cabo breves actividades en Geogebra para familiarizarse con este software educativo y manejar los elementos dinámicos así como sus proyecciones en el plano. Se visualiza la construcción de las Funciones Trigonométricas Seno, Coseno y Tangente mediante el movimiento del radio en el círculo unitario.

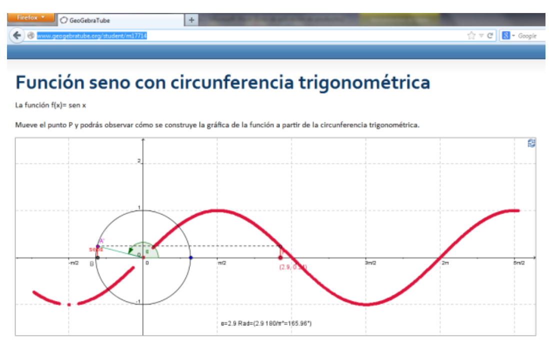
Actividades.

ACTIVIDAD 1	
Tiempo:	15–20 min.
Actividad Personal:	Adquirir Calculadora y Manual de Calculadora.
Indicaciones:	Leer el manual correspondiente de la calculadora e investigar la configuración en los diferentes modos. Realizar ejercicios.
Producto:	Ejercicios numéricos de modos radián, gradian y grados.

ACTIVIDAD 2	
Tiempo:	15–20 min.
Actividad Personal:	Adquirir Calculadora y Manual de Calculadora.
Indicaciones:	Configurar calculadora en diferentes modos y obtener valores del Seno, Coseno y Tangente.
Producto:	Ejercicios numéricos de modos radián, gradian y grados de Sesno Coseno y Tangente.

ACTIVIDAD 3	
Tiempo:	30–50 min.
Actividad Personal:	Obtener Software Geogebra portátil e instalar en PC personal (si es posible). Instalar navegador adecuado y Plug ins para visualizar páginas de Geogebra.
Indicaciones:	Utilizar el software geogebra para utilizar barra de herramientas elementos básicos. 
Producto:	Hoja Impresa de: Punto, Línea y Circunferencia.

ACTIVIDAD 4	
Tiempo:	30–50 min.
Actividad Personal:	Ingresar en Blog de Información y visualizar el Applet de Angulo Central.
Indicaciones:	Utilizar Geogebra para utilizar herramienta  para mover el radio en el círculo unitario y observar la variación del ángulo central. 
Producto:	Archivo Actividad_Angulo_Central.ggb

ACTIVIDAD 5	
Tiempo:	30–50 min.
Actividad Personal:	Ver videos en Youtube Círculo_Unitario_V1 http://www.youtube.com/watch?v=rwG17jGtS1Y&feature=youtu.be Circulo_unitario 2 http://www.youtube.com/watch?v=nvjQxEAxp5I&feature=youtu.be Círculo:_unirario_seno http://www.youtube.com/watch?v=WiC83lCfMQw&feature=youtu.be Círculo_unitario_coseno http://www.youtube.com/watch?v=rQAD1bv4iNE
Indicaciones:	En la página de Materiales de Geogebra.org visualizar la página: http://www.geogebratube.org/student/m17714 Mover el punto P para observar el crecimiento y la variación de las proyecciones. 
Producto:	Reporte de las Observaciones de la Actividad.

ACTIVIDAD 6	
Tiempo:	30–50 min.
Actividad Personal:	Construir la gráfica de la Función Tangente de manera tabular observando los ángulos de indeterminación (asíntota).
Indicaciones:	Abrirá la página : http://www.geogebratube.org/student/m42079 Visualizar la función tangente y mover el punto P para comprobar el comportamiento observado de manera tabular.
Producto:	Reporte de Observaciones.