UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RETÍCULAS MODULARES EN ÁLGEBRA: EL ZOCLO Y EL RADICAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

ALBERTO ALCALÁ ALVAREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA

2013

Alcalá
Alvarez
Alberto
5363·3153
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
303799856

Dr. Hugo Alberto
Rincón
Mejía

Dr. José
Ríos Montes

Dr. Alejandro
Alvarado
García

M. en C. César
Cejudo
Castilla

M. en C. Alma Violeta
García
López

Retículas modulares en Álgebra: el zoclo y el radical
70 p.
2013

a mis padres,
por haberme enseñado a hacerme preguntas

Agradezco infinitamente a mis padres su ejemplo y la educación que me brindaron; a mi madre, todo el cariño que me regalaba cada día, y a mi padre su apoyo continuo e incondicional. En segundo lugar está la Universidad, siempre puertas abiertas para el conocimiento, que me ha permitido adoptarle como hogar y trinchera, y me ha dado hermanos, maestros, bibliotecas y jardines, de entre los cuales debo destacar a mis amigos y a los miembros del jurado, en particular al Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía, por toda su humanidad, su amistad, su paciencia y sus enseñanzas dentro y más allá de lo académico.
Concluyo dedicando un inspirado aunque lejano pensamiento de gratitud hacia mis maestros y compañeros de otras artes, otros lados y otros tiempos.

Índice general

Introducción.

Las retículas modulares son una especie particular de conjunto parcialmente ordenado de principal interés para el Álgebra Abstracta. Esto se debe a que numerosos resultados en las teorías de grupos, anillos, módulos, etc. dependen en buena medida de propiedades de la estructura ordenada que conforman los subobjetos algebraicos. Es decir, la forma en que están ordenados los subobjetos de un grupo, anillo, módulo, etc. , determina propiedades importantes del propio objeto. La estructura ordenada de subobjetos es una *retícula*, y nos da una especie de radiografía de los módulos, grupos, etc. : un esquema de las relaciones entre los subobjetos que los conforman y cómo se encuentran acomodados dentro del total. Lo anterior nos muestra la estructura misma del objeto. A la vez, las retículas nos dan información sobre las subestructuras y sobre las estructuras cociente. Citando (**[1]** , p.115) : "la retícula de submódulos de un módulo revela una cantidad sustancial de información sobre el módulo y provee un medio natural para clasificarlo" .

Por ejemplo, el Teorema de Jordan-Hölder, símil del Teorema Fundamental de la Aritmética, establece la unicidad de cierta manera de descomponer un grupo en grupos simples, indescomponibles. Tanto el enunciado del teorema como el tratamiento de su demostración y los principales conceptos involucrados, como el de serie de composición, hablan de propiedades de la retícula de submódulos, grupos, etc. , y no propiamente de propiedades de las operaciones algebraicas del objeto en cuestión.

A fines del siglo XIX, Dedekind estableció el concepto de *retícula* al trabajar con los ideales de un anillo, dando una definición equivalente a la usual actualmente: la que aparece en el teorema 1.2.8 del presente trabajo ([**5**], p.130). Además de esto, Dedekind enunció la ley modular (para ideales), que define una de las clases de retículas más relevantes para el Álgebra. Posteriormente, Emmy Noether y Emil Artin generalizaron algunos teoremas de descomposición y estructura de anillospara aquéllos que satisfacieran las condiciones abstractas de cadena ascendete y descendente (que tratamos en la sección 1.6), respectivamente ([**5**], pp. 59-60). Con todo esto, el estudio de las retículas (sobretodo modulares) por parte de los algebristas se volvío más y más frecuente, sobretodo desde los 1970s, según apunta Calugareanu al inicio de **[2]** .

En la Teoría de Grupos encontramos algunas caracterizaciones notables en términos reticulares, como el Teorema de Ore (la retícula de un grupo abeliano es distributiva si y sólo si cualesquiera dos elementos generan un subgrupo cíclico) ; teorema 1.2.3. en [**6**], [**4**], p. 127), o que los grupos abelianos cuya retícula es una cadena son exactamente los grupos $\mathbb{Z}_{p^k}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ([**6**], p. 16) .

En general, existen dos subestructuras comunes a todas las estructuras algebraicas: el radical y el zoclo, que cuando no son triviales, nos permiten entender a la retícula completa en términos de cadenas cuyos eslabones abarcan a todos los átomos o coátomos intermedios. La parte sustancial de este trabajo se centra justamente en la descripción de estas dos estructuras, sus propiedades elementales y algunas de sus aplicaciones.

Por otro lado, durante nuestra exposición establecemos las propiedades esenciales de las clases más comunes de retículas que surgen naturalmente en Álgebra, tanto aquéllas identificadas con estructuras específicas, como las que describen el tipo de retícula que es *algebraica*.

El objetivo principal del presente texto es mostrar la gran utilidad de entender los aspectos puramente reticulares envueltos en el estudio de las estructuras algebraicas en general, a través de resultados clásicos y ejemplos, para después enfocarse en aquéllos que involucran el zoclo y el radical. Presentamos algunas proposiciones relevantes sobre R–módulos al lado de sus equivalentes reticulares, como corolarios de éstos (o viceversa), o como ejemplos. Tratamos sobretodo propiedades de las retículas (completas) compactamente generadas y modulares.

Este trabajo se basa principalmente en [**2**], y adoptamos en la mayoría de los casos su notación y el orden de los resultados, pues ambos resultan muy naturales. Tal volumen es una monografía sobre los "resultados de la Teoría de Módulos demostrables usando *solamente* la Teoría de Retículas" ([**2**], introducción) .

Otra buena parte de los resultados (específicamente, los de series de composición, retículas distributivas y muchos de los ejemplos) se deben al libro de Stenström ([**7**]), y en menor medida a Schmidt ([**6**]).

Capítulo 1

Retículas.

Como se ha señalado en la introducción, hay una conexión íntima entre los conjuntos ordenados y los conjuntos con operaciones binarias dada mediante la asociación a un objeto algebraico de su retícula de subobjetos, la cual nos da información sobre propiedades del objeto mismo. En este capítulo desarrollamos los conceptos y herramienas básicos de la teoría de retículas, en particular de las modulares y algebraicas, que son las de mayor interés para el Álgebra.

1.1. Ordenes parciales.

DEFINICIÓN 1.1.1. Un par (P, r) en el cual P es un conjunto y r una relación binaria en P (es decir, $r \subseteq P \times P$), se dice **conjunto parcialmente ordenado** (reflexivamente) si r cumple con ser reflexiva (esto es, $\forall x \in P((x,x) \in r)$), transitiva ($\forall x, y, z \in P((x,y),(y,z) \in r \Rightarrow (x,z) \in r)$) y antisimétrica ($\forall x, y \in P((x,y),(y,x) \in r \Rightarrow x = y)$). En este caso, se dice también que r es un **orden parcial**.

NOTACIÓN 1.1.2. Si r es una relación en un conjunto, escribiremos casi siempre arb en lugar de $(a,b) \in r$, y si (P, r) es un orden parcial, como es usual, denotaremos a r por $\leq$, y si $a \leq b$, escribiremos también $b \geq a$. En este caso, diremos que a es **menor o igual que** b, o bien que b **contiene a** a.

DEFINICIÓN 1.1.3. Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dos elementos $a, b \in P$ se dicen **comparables** si se tiene $a \leq b$ o $b \leq a$, e **incomparables** si no están relacionados por $\leq$. En este caso, usaremos la notación $a||b$.

Si cualesquiera dos elementos de P son comparables, entonces se dice que $\leq$ es **tricotómica** y que $(P, \leq)$ es una **cadena**. También se dice que $\leq$ es un **orden total**.

Si $a \leq b$ pero $a \neq b$, escribiremos $a < b$, y diremos que a es **menor que** b o bien que b es mayor que a; si $a < b$ y no hay c tal que $a < c < b$, diremos que b **cubre** a a, y lo denotaremos por $a \prec b$.

Sean $(P, \leq)$ un orden parcial y $S \subseteq P$. Se dice que un elemento $a \in P$ es:

(1) **cota superior (inferior)** de S si $\forall x \in S(x \leq a)$ (respectivamente, $a \leq x$).
(2) el **mayor (menor)** de S si $a \in S$ y $\forall x \in S(x \leq a)$ (respectivamente, $a \leq x$).
(3) **máximo (mínimo)** en S si $a \in S$ y $\forall x \in S(a \leq x \Rightarrow a = x)$ (respectivamente, $x \leq a \Rightarrow a = x$).

Definición 1.1.4. Sea S un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado P. Un elemento $a \in P$ es el **supremo (ínfimo)** de S si a es el menor del conjunto de cotas superiores de S (respectivamente, si a es el mayor del conjunto de cotas inferiores de S). Si tal elemento existe, lo denotaremos por $\vee S$ ($\wedge S$) , y si $S = \{x, y\}$, escribiremos $\vee S = x \vee y$ ($\wedge S = x \wedge y$).

1.2. Retículas.

Definición 1.2.1. Una **retícula** es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ donde cada par de elementos a, b tiene un supremo y un ínfimo, a los que denotaremos respectivamente por $a \vee b$, $a \wedge b$. Se dice además que L es **completa** si todo subconjunto X de L tiene supremo e ínfimo (denotados por $\vee X$, $\wedge X$).

A los elementos mayor y menor de una retícula L, si existen, los denotaremos por $1 = \vee L = \wedge\emptyset$ y por $0 = \wedge L = \vee\emptyset$.

Ejemplo 1.2.2. Son retículas completas:

(1) La colección de subconjuntos de un conjunto X, $\mathcal{P}(X)$, con el orden de la contención y $\wedge\{S_i\}_I = \bigcap\limits_I S_i$, $\vee\{S_i\}_I = \bigcup\limits_I S_i$.
(2) La retícula $(S(G), \subseteq)$ de subgrupos de un grupo, con $\wedge\{S_i\}_I = \bigcap\limits_I S_i$, $\vee\{S_i\}_I = \langle\bigcup\limits_I S_i\rangle$.
(3) La retícula $(S_R(M), \subseteq)$ de submódulos de un R–módulo M, con $\wedge\{S_i\}_I = \bigcap\limits_I S_i$, $\vee\{S_i\}_I = \sum\limits_I S_i$.

Definición 1.2.3. Más generalmente, se dice que un subconjunto D de un orden parcial P es **dirigido superior(inferior)mente** si todo subconjunto finito de D tiene una cota superior (inferior) en D.

Observación 1.2.4. Para que un conjunto parcialmente ordenado sea dirigido superiormente, basta asegurar la existencia de cotas superiores para todos los pares $\{a, b\} \subseteq P$, y para que un orden parcial sea una retícula completa, basta asegurar la existencia de supremos (o ínfimos) arbitrarios.

Demostración. La primera parte es consecuencia inmediata del principio de inducción. Ahora supongamos que todo subconjunto X de un orden parcial P tiene supremo en P. Sean $X \subseteq P$ y $A = \{y \in P \mid \forall x \in X(y \leq x)\}$. Entonces $\vee\emptyset \in A$, pues toda $x \in X$ (de hecho, toda $x \in P$) es cota superior del vacío. Ahora, veamos que $\vee A = \wedge X$: si $x \in X$ y $a \in A$, entonces $a \leq x$, así que $\vee A \leq x$; además, si $P \ni c \leq x \forall x \in X$, entonces $c \in A$ y luego $\vee A \geq c$. La demostración es simétrica si suponemos que hay ínfimos arbitrarios. $\square$

Observación 1.2.5. La asignaciones $\{a, b\} \mapsto a \wedge b$, $a \vee b$ son operaciones binarias en la retícula L. Desde esta perspectiva, ambas son asociativas, conmutativas y cumplen la ley de absorción: $a \vee (a \wedge b) = a = a \wedge (a \vee b)$.

Demostración. Demostramos la asociatividad del supremo $a \vee (b \vee c) \geq a, b, c$ así que también $a \vee (b \vee c) \geq a \vee b$ y luego $a \vee (b \vee c) \geq (a \vee b) \vee c$. Por otro lado, $a, b, c \leq (a \vee b) \vee c \geq b \vee c$ con lo cual $a \vee (b \vee c) \leq (a \vee b) \vee c$. La segunda afirmación es consecuencia del axioma de extensionalidad, pues $\{a, b\} = \{b, a\}$. Para la tercera: es trivial que $a \leq a \vee (a \wedge b)$; además $a \leq a \geq a \wedge b$, así que $a \vee (a \wedge b) \leq a$, con lo que se tiene la primera igualdad. La segunda se da porque $a \vee b \geq a \leq a$ implica $a \leq a \wedge (a \vee b)$, y la otra desigualdad es, de nuevo, trivial. $\square$

Hacemos notar también que las operaciones $\wedge, \vee$ de una retícula, son compatibles con el orden.

Observación 1.2.6. Si $x \leq y \in L$, entonces, para todo $a \in L$, $a \wedge x \leq a \wedge y$ y $a \vee x \leq a \vee y$.

Demostración. Es claro que $a \geq a \wedge x \leq x \leq y$, así que $a \wedge x \leq a \wedge y$. Simétricamente: $a \leq a \vee y \geq y \geq x$, y luego $a \vee x \leq a \vee y$. $\square$

Además de lo recién dicho, $\wedge$ y $\vee$ nos dan otra manera de definir el orden:

Observación 1.2.7. En una retícula L, $a \wedge b = a$ si y sólo si $a \leq b$ si y sólo $a \vee b = b$.

Demostración. Si $a \wedge b = a$, entonces claramente $a = a \wedge b \leq b$; recíprocamente, si $a \leq b$, entonces $a \geq a \leq b$, con lo cual $a \leq a \wedge b \leq a$, y luego $a \wedge b = a$.

Para la segunda equivalencia, tenemos: si $a \leq b$, entonces $a \leq b \geq b$, así que $b \leq a \vee b \leq b$ y $a \vee b = b$. Por último, si tenemos esta última igualdad, entonces es obvio que $a \leq a \vee b = b$. $\square$

A continuación establecemos que también las retículas emergen naturalmente de las álgebras:

Teorema 1.2.8. *Sea $(L, \wedge, \vee)$ un álgebra con dos operaciones asociativas y conmutativas que cumplen la ley de absorción, enunciada en la observación 1.2.5. Entonces L es una retícula si definimos $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$.*

Demostración. Primero, notamos que por la ley de absorción, $a \wedge b = a \wedge ((a \wedge b) \vee b) = a \wedge (a \vee b) = a \Leftrightarrow b = (a \wedge b) \vee b = a \vee b$. Ahora, probamos que $a \leq b$ definido como en el enunciado es un orden parcial:

- Por la ley de absorción, $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge a)) = a$, así que $a \leq a \forall a$.
- Por definición, si $a \leq b, b \leq a$, entonces , $b \wedge a = a = a \vee b$ y $a \vee b = b = b \wedge a$, con lo que $a = b$.
- Si $a \leq b, b \leq c$, entonces $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$, y luego $a \leq c$.

Además, es claro que $a \leq a \vee b \geq b$, pues por absorción $a = a \wedge (a \vee b), b = b \wedge (a \vee b)$. También, si $a \leq x \geq b$, entonces $x = x \vee b = (x \vee a) \vee b = x \vee (a \vee b)$, y así $a \vee b \leq x$. De este modo, $a \vee b$ es el supremo de $\{a, b\}$. Simétricamente, vemos que $a \wedge b$ es el ínfimo de $\{a, b\}$, así que $(L, \leq)$ es una retícula.

$\square$

DEFINICIÓN 1.2.9. Un subconjunto S de una retícula L es una **subretícula** si $x, y \in S$ implica $x \wedge y, x \vee y \in S$. Una subretícula S de una retícula completa L es **completa** si es cerrada bajo supremos e ínfimos arbitrarios; es decir, si $X \subseteq S$ implica $\wedge X, \vee X \in S$. A las subretículas de la forma $\{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$, donde $a \leq b$, las llamaremos **intervalos** o **subretículas cociente**, y las denotaremos por b/a o $[a, b]$; si b cubre a a, diremos que $b/a = \{a, b\}$ es **simple**.

EJEMPLO 1.2.10. La retícula de subgrupos normales de un grupo G, a la que denotaremos por $N(G)$, es una subretícula completa de $S(G)$, la retícula de subgrupos de G.

DEFINICIÓN 1.2.11. Una función entre dos retículas, $L \xrightarrow{\varphi} L'$ es un **morfismo de retículas** si $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b), \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ para todas $a, b \in L$. Un morfismo de retículas con inverso que sea morfismo es un **isomorfismo**. Más abajo vemos que el inverso de un morfismo de retículas necesariamente también lo es. Para expresar que L, L' son isomorfas, escribiremos $L \cong L'$.

OBSERVACIÓN 1.2.12. La función inversa de un isomorfismo de retículas, es también un isomorfismo de retículas:

DEMOSTRACIÓN. Sea $L \xrightarrow{\varphi} L'$ un isomorfismo de retículas. Entonces, si $a = \varphi(x), b = \varphi(y)$, tenemos: $\varphi^{-1}(a \wedge b) = \varphi^{-1}(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) = \varphi^{-1}(\varphi(x \wedge y)) = x \wedge y = \varphi^{-1}(a) \wedge \varphi^{-1}(b)$, y también $\varphi^{-1}(a \vee b) = \varphi^{-1}(\varphi(x \vee y)) = \varphi^{-1}(a) \vee \varphi^{-1}(b)$. $\square$

De una vez hacemos notar que los morfismos de retículas son un tipo particular de morfismos entre órdenes parciales:

OBSERVACIÓN 1.2.13. Todo morfismo de retículas es un morfismo de órdenes: si $a \leq b$ y f es un morfismo de retículas, entonces $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, así que $f(a) \leq f(b)$.

PROPOSICIÓN 1.2.14. *Una función entre dos retículas L, L' es un isomorfismo de órdenes si y sólo si es un isomorfismo de retículas.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Sea $L \xrightarrow{\varphi} L'$ un isomorfismo de órdenes. Demostraremos sólo que $\varphi(a) \vee \varphi(b) = \varphi(a \vee b)$, pues la demostración es dual para $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$:

Primero, notemos que $a \leq a \vee b \geq b \implies \varphi(a) \leq \varphi(a \vee b) \geq \varphi(b)$. Ahora usamos el hecho de que el inverso de un isomorfismo de órdenes es también un isomorfismo de órdenes: si $\varphi(a) \leq x \geq \varphi(b)$, entonces existe una y tal que $x = \varphi(y)$ y luego $a \leq y = \varphi^{-1}(x) \geq b$, así que $y \geq a \vee b$ y $x = \varphi(y) \geq \varphi(a \vee b)$, con lo que $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$.

($\Longleftarrow$) Es consecuencia directa de la observación 1.2.13. $\square$

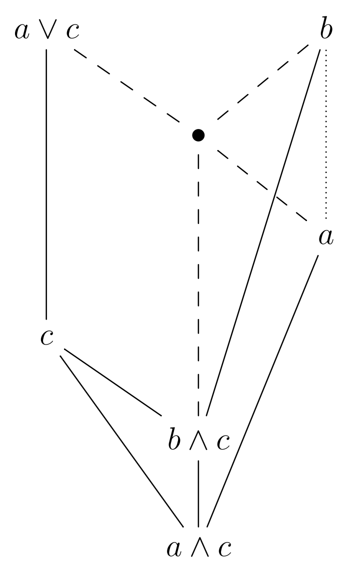
EJEMPLO 1.2.15. (Teorema de la Correspondencia para módulos). Sean ${}_RM, {}_RN$ dos módulos y $M \overset{f}{\twoheadrightarrow} N$. Entonces $K \mapsto f(K)$ es un isomorfismo de retículas completas entre el intervalo $[Ker(f), M] \subseteq S_R(M)$ y $S_R(N)$.

Demostración. Aplicaremos la equivalencia establecida en la observación anterior. Es claro que $f(\_)$ es un morfismo de órdenes. Más aún, es una biyección, pues tiene inversa $f^{-1}(\_)$: es claro que $ff^{-1}(K) = K$, y también que $f^{-1}f(K) = K + Ker(f) = K$, ya que $K \in [Ker(f), M]$. Por último, el hecho de que $f^{-1}(\_)$ sea un morfismo de órdenes, es también obvio. □

1.3. Retículas modulares.

En esta sección introducimos un tipo particular de retículas: uno que abstrae una propiedad característica de algunas retículas de subestructuras algebraicas de especial interés, como la de submódulos de un R–módulo y la de subgrupos normales de un grupo. Las retículas modulares fueron descubiertas por Dedekind Lo definimos a continuación:

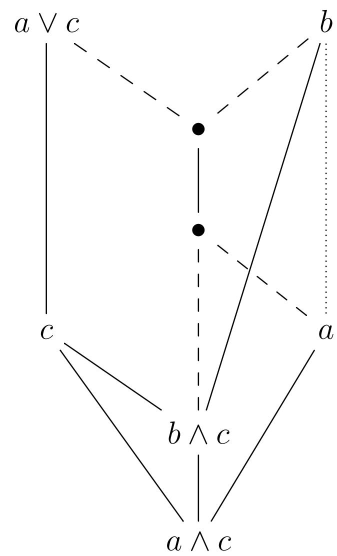
Definición 1.3.1. Una retícula L es **modular** si para todos $a, b, c \in L$ tales que $a \leq b$, se tiene la igualdad $a \vee (b \wedge c) = (a \vee c) \wedge b$.



De inmediato hay que hacer notar que en toda retícula, se tiene siempre una desigualdad:

Observación 1.3.2. En cualquier retícula, si $a \leq b$ entonces, para toda c, $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee c) \wedge b$.

Demostración. Hay que mostrar que $a, b \wedge c \leq (a \vee c) \wedge b$. Por un lado, es claro que $b \geq a \leq a \vee c$. Esto implica que $a \leq (a \vee c) \wedge b$. Por otro lado, como tomar supremos e ínfimos respeta desigualdades, entonces $b \wedge c \leq (a \vee c) \wedge b$ puesto que $c \leq a \vee c$. $\therefore a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee c) \wedge b$.



$\square$

En vista de lo anterior, establecer la modularidad de una retícula se reduce a verificar que $b \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge c)$ siempre que $a \leq b$. La siguiente observación es obvia, pero conviene hacerla de una vez:

Observación 1.3.3. La clase de las retículas modulares es cerrada bajo subretículas.

Ejemplo 1.3.4. Las siguientes son retículas modulares:

(1) $N(G)$, la retícula de subgrupos normales de un grupo G.
(2) $S_R(M)$, la retícula de submódulos de un R–módulo M.

Demostración. Haremos sólo la correspondiente a $N(G)$; el segundo ejemplo se reduce a las propiedades de la suma; esto es, a las de un grupo abeliano.

Antes de comenzar, recordemos dos hechos de la Teoría de Grupos: primero, si A, B son subgrupos de un grupo, entonces AB es un también un subgrupo si y sólo si $AB = BA$, lo cual ocurre, por ejemplo, si alguno de los subgrupos es normal. También en ese caso, se tiene que $A \vee B = \langle A \cup B \rangle = AB$, pues $\langle A \cup B \rangle$ es el menor subgrupo que contiene a $A \cup B$ y siempre ocurre que $AB \subseteq \langle A \cup B \rangle$.

Tomemos pues $H \leq K \leq G \geq L$. Sabemos, por la observación 1.3.2 y lo dicho en el párrafo anterior, que sólo hace falta demostrar que $(HL) \cap K \leq H(K \cap L)$. Sea $x \in (HL) \cap K$. Entonces podemos escribir $hl = x = k$ con $h \in H, l \in L, k \in K$, de modo que $l = h^{-1}k$, que pertenece a K pues $h^{-1} \in H \subseteq K$. Así, resulta que $l \in K \cap L$ y luego $x \in H(K \cap L)$. $\square$

Damos a continuación dos caracterizaciones alternativas de las retículas modulares: la primera en términos de cancelación de elementos (con respecto a las operaciones $\wedge, \vee$), y la otra en términos de subretículas.

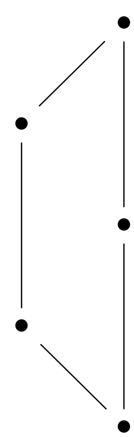
TEOREMA 1.3.5. *Una retícula L es modular si y sólo si* $\forall a, b, c\,(a \leq b, a \wedge c = b \wedge c, a \vee c = b \vee c \Longrightarrow a = b)$.

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Si $a \leq b, a \wedge c = b \wedge c, a \vee c = b \vee c$, entonces $a = a \vee (a \wedge c) = a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c) = b \wedge (b \vee c) = b$.

($\Longleftarrow$) Sean $a' = a \vee (b \wedge c), b' = (a \vee c) \wedge b$. Entonces, si $a \leq b$, tenemos $a \leq a' \leq b' \leq b$. Usando estas desigualdades y la monotonía de $(\_) \wedge c, (\_) \vee c$, establecida en 1.2.6, vemos que $a' \vee c \leq b' \vee c$, y que $b' \leq a \vee c \leq a' \vee c \geq c$, con lo cual $b' \vee c \leq a' \vee c$ y así $a' \vee c = b' \vee c$. Simétricamente, $a' \wedge c \leq b' \wedge c$ y $c \geq b' \wedge c \leq b \wedge c \leq a'$, así que $a' \wedge c = b' \wedge c$. Estamos ahora en condición de aplicar directamente la hipótesis para concluir que $a' = b'$; es decir, L es modular. □

Para la segunda caracterización de la modularidad, definimos la siguiente retícula:

DEFINICIÓN 1.3.6. La retícula del **pentágono** (N_5) es una con cinco elementos $0, a, b, c, 1$ tales que $0 < a < b < 1,\ 0 < c < 1,\ a||c,\ b||c$. Es decir, N_5 es la retícula representada por el siguiente diagrama:



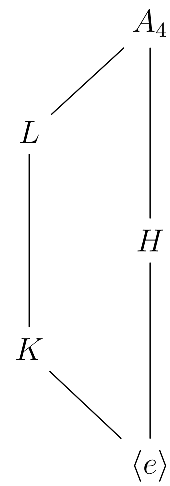
OBSERVACIÓN 1.3.7. La retícula del pentágono **no** es modular, ya que $a \vee (b \wedge c) = a < b = b \wedge (a \vee c)$.

TEOREMA 1.3.8. *L es modular si y sólo si no contiene una subretícula isomorfa al pentágono.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Se da por la observación anterior y 1.3.3.

($\Longleftarrow$) Por el teorema anterior, si L no es modular, existen a, b, c tales que $a < b$ y $a \wedge c = b \wedge c, a \vee c = b \vee c$. Pero entonces $\{a \wedge c, a, b, c, b \vee c\}$ es una subretícula de L isomorfa al pentágono. □

Ejemplo 1.3.9. La retícula de subgrupos de un grupo, en general, no es modular: $A_4 = \langle(123),(234)\rangle = \{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)\}$ tiene como subgrupos a $H = \langle(123)\rangle, K = \langle(12)(34)\rangle \leq L = \langle(12)(34),(13)(24)\rangle$, con $|H| = 3, |K| = 2, |L| = 4$, y éstos forman un pentágono:



Las retículas modulares encierran algunas propiedades importantes de las estructuras algebraicas, como el Segundo Teorema de Isomorfismos, que presentamos ahora en su versión reticular:

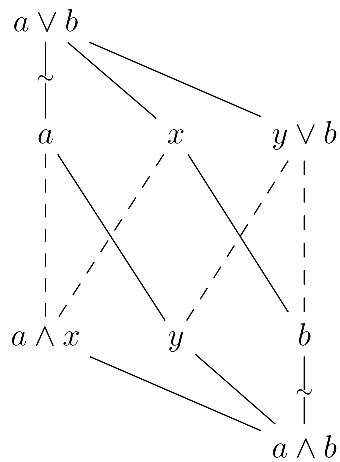
Teorema 1.3.10. *(Segundo teorema de isomorfismos para retículas modulares) Para cualesquiera dos elementos a, b de una retícula modular L, los intervalos $a \vee b/b, a/a \wedge b$ son isomorfos.*

Demostración. Veamos que la función $a \vee b/b \xrightarrow{\varphi} a/a \wedge b$, $x \mapsto a \wedge x$, es un morfismo de retículas, con inversa $y \mapsto y \vee b$:

Primero, notemos que si x está en el dominio de φ, entonces en efecto $a \wedge b \leq \varphi(x) = a \wedge x \leq a \wedge (a \vee b) = a$. Por la observación 1.2.14, basta ver que φ es isomorfismo de órdenes, para lo cual es suficiente mostrar que es un morfismo de órdenes cuya inversa es también un morfismo de órdenes. La inversa de φ es la función dada por $\varphi^{-1}(y) = y \vee b$, pues por la ley modular, tenemos: $\varphi^{-1}\varphi(x) = (a \wedge x) \vee b = x \wedge (a \vee b) = x$, ya que $b \leq x \leq a \vee b$. Simétricamente, $\varphi\varphi^{-1}(y) = a \wedge (y \vee b) = y \vee (a \wedge b) = y$, ya que $a \wedge b \leq y \leq a$.

Por último, el hecho de que φ, φ^{-1} preserven el orden es consecuencia de lo señalado en la observación 1.2.6. $\therefore$ φ es un isomorfismo de retículas. $\square$

Observación 1.3.11. En el teorema anterior podemos intercambiar los papeles de a y b para obtener $a \vee b/a \cong b/a \wedge b$.



El teorema anterior conduce a definir una clase particular de isomorfismo entre dos intervalos de una retícula modular:

DEFINICIÓN 1.3.12. Si dos intervalos de una retícula modular pueden expresarse de la forma $a \vee b/b$, $a/a \wedge b$ para algunos a, b en la retícula, se dice que son **similares**.

Más aún, como el teorema establece un isomorfismo que se da simétricamente en ambos lados de la retícula $\{a \wedge b\,,\, a\,,\, b\,,\, a \vee b\}$, podemos pensar en que dos intervalos I, J de una retícula modular sean isomorfos y además haya una lista finita de intervalos similares que los unan.

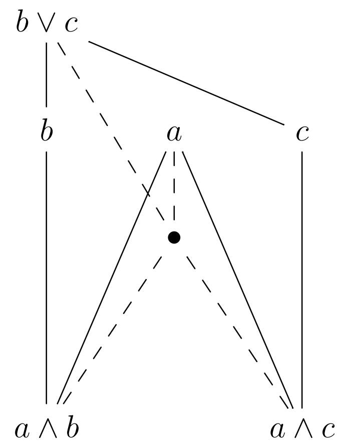
DEFINICIÓN 1.3.13. Dos intervalos I, J de una retícula modular son **proyectivos** si hay intervalos $I = I_0, \dots, I_n = J$ tales que $\forall\, 1 \leq k \leq n$, I_{k-1} e I_k sean similares.

OBSERVACIÓN 1.3.14. El Segundo Teorema de Isomorfismos para módulos asegura que si $[A, C]$, $[L, N]$ son dos intervalos proyectivos en $S_R(M)$, entonces $\frac{C}{A} \cong \frac{N}{L}$, pues podemos escribir dos intervalos similares como $[X, V]$, $[W, Y]$, donde $X = V \cap W, Y = V + W$, de modo que $\frac{V}{X} \cong \frac{Y}{W}$.

1.4. Retículas distributivas.

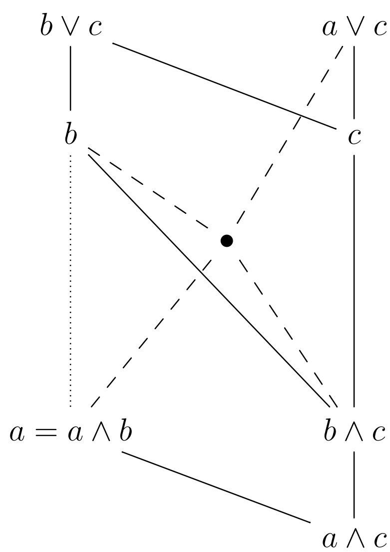
Ahora presentamos un tipo particular de retículas modulares, que tiene particular interés algebraico al ser la generalización de la distributividad de la unión y la intersección de conjuntos (en este caso tal relación no está sujeta a condición alguna entre los elementos que en ella aparecen).

DEFINICIÓN 1.4.1. Una retícula L es **distributiva** si para todos $a, b, c \in L$ se tiene $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.



Observación 1.4.2. Toda retícula distributiva es modular.

Demostración. Si $a \leq b$, entonces $a \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$, así que si L es distributiva, tenemos $a \vee (b \wedge c) = (a \vee c) \wedge b$.

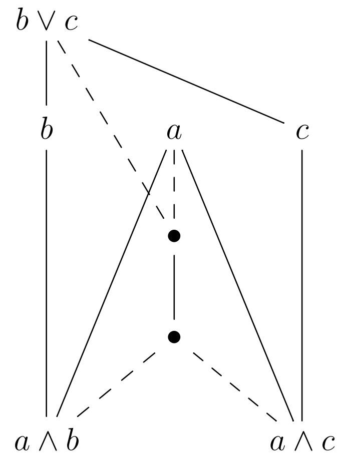


□

Al igual que en el caso de la modularidad, siempre se cumple la mitad de la igualdad de la definición:

Observación 1.4.3. En toda retícula, para cualesquiera a, b, c, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$.

Demostración. $b, c \leq b \vee c \implies a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)\,,\ a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$, con lo cual se da la desigualdad deseada.



□

Así, la distributividad puede definirse entonces en términos de una desigualdad: que para todos a, b, c se cumpla $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \geq a \wedge (b \vee c)$. Además, puede darse la definición dual:

Observación 1.4.4. Una retícula L es distributiva si y sólo si $\forall a, b, c \in L\,(a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c))$, y en este caso se tiene, para toda retícula, $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Demostración. $(\implies)$ $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) = a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) = (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$.

$(\impliedby)$ $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c) = a \wedge ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) = a \wedge (b \vee c)$.

Sea ahora L una retícula cualquiera. Entonces, para todos $a, b, c \in L$: $a \vee b \geq a \leq a \vee c\,,\ a \vee b \geq b \wedge c \leq a \vee c$, así que $a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq b \wedge c$, con lo cual $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. □

También la distributividad se hereda a las subretículas:

Observación 1.4.5. La clase de las retículas distributivas es cerrada bajo subretículas.

Damos a continuación dos caracterizaciones de la distributividad, análogas a aquéllas que presentamos para las retículas modulares.

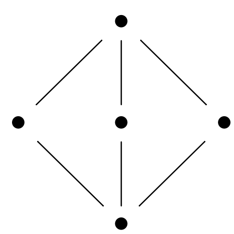
Teorema 1.4.6. *L es distributiva si y sólo si* $\forall a, b, c\,(a \wedge c = b \wedge c\,,\ a \vee c = b \vee c \implies a = b)$.

Demostración. $(\implies)$Sean $a, b, c \in L$ tales que $a \wedge c = b \wedge c\,,\ a \vee c = b \vee c$. Entonces $a = a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c) = b \wedge (b \vee c) = b$.

$(\impliedby)$ Por la hipótesis y el teorema 1.3.5, L es modular. Entonces, como $a \wedge b \leq a \vee b$, tenemos que $u \ddot{=} (a \wedge b) \vee ((a \vee b) \wedge c) = (a \vee b) \wedge ((a \wedge b) \vee c)$. Análogamente, $b \wedge c \leq b \vee c$ implica que $v \ddot{=} (b \wedge c) \vee ((b \vee c) \wedge a) = (b \vee c) \wedge ((b \wedge c) \vee a)$. Notemos ahora que $a \wedge u = a \wedge (a \vee b) \wedge ((a \wedge b) \vee c) = a \wedge ((a \wedge b) \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, donde la última igualdad se da por modularidad, y también $v \wedge a = (b \vee c) \wedge ((b \wedge c) \vee a) \wedge a = (b \vee c) \wedge a$. Así, basta mostrar que $u = v$, para lo cual, por la hipótesis, es suficiente ver que $u \wedge b = v \wedge b$, $u \vee b = v \vee b$. Demostraremos sólo la segunda igualdad: usando la modularidad y el hecho de que $b \leq a \vee b$, $b \vee u = b \vee (a \wedge b) \vee ((a \vee b) \wedge c) = b \vee ((a \vee b) \wedge c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$; simétricamente, como $b \leq b \vee c$, tenemos que $b \vee v = b \vee (b \wedge c) \vee ((b \vee c) \wedge a) = b \vee ((b \vee c) \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$. Con lo anterior, hemos establecido que $u \vee b = v \vee b$; dualmente, se tiene que $u \wedge b = v \wedge b$, y en consecuencia $u = v$. □

Como antes, definimos una retícula particular, representativa de este tipo de retículas:

DEFINICIÓN 1.4.7. La retícula del **diamante**, denotada por M_5, es la retícula representada por el siguiente diagrama:



OBSERVACIÓN 1.4.8. La retícula del diamante **no** es distributiva:

DEMOSTRACIÓN. Llamemos a los elementos intermedios de la retícula a, b, c, digamos, de izquierda a derecha, siguiendo el diagrama anterior, y $0, 1$ a sus extremos inferior y superior, respectivamente. Entonces es claro que $a \wedge c = 0 = b \wedge c$, $a \vee c = 1 = b \vee c$, pero $a \neq b$. Aplicando el resultado anterior, concluimos que esta retícula no es distributiva. □

La condición equivalente que hemos dado de la distributividad puede enunciarse de otro modo: no existen a, b, c tales que $a \neq b$ y $a \wedge c = b \wedge c$, $a \vee c = b \vee c$, o bien en términos de la retícula del diamante:

TEOREMA 1.4.9. *L es distributiva si y sólo si es modular y no contiene una subretícula isomorfa al diamante.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Por la observaciones 1.4.5 y 1.4.8, L no puede contener una subretícula isomorfa al diamante.

($\Longleftarrow$) Demostraremos la contrapositiva de esta implicación, suponiendo que la retícula L es modular pero no distributiva, para mostrar que entonces contiene una subretícula isomorfa al diamante:

Por el teorema anterior, existen en L elementos a, b, c tales que $a \neq b$, pero $a \wedge c = b \wedge c$, $a \vee c = b \vee c$. Ahora bien, por el teorema 1.3.5, debe ocurrir que $a||b$, pues de lo contrario se tendría $a = b$. A continuación mostraremos que $a||c$. Por dualidad tendremos también que $b||c$, con lo cual $D \mathrel{\ddot{=}} \{a \wedge c = b \wedge c, a, b, c, a \vee c = b \vee c\}$ será una subretícula de L isomorfa al diamante.

Supongamos que $a \leq c$. Entonces $c = a \vee c = b \vee c$, así que $b \leq c$, con lo cual $a = a \wedge c = b \wedge c = b$, lo cual es una contradicción, pues $a \neq b$. Si por el contrario, se tuviera que $c \leq a$, entonces $c = a \wedge c = b \wedge c$, y luego $c \leq b$ y $a = a \vee c = b \vee c = b$, la misma contradicción.

Como aquí a, b juegan papeles intercambiables, por dualidad se tiene también que $b||c$, de modo que a, b, c son incomparables dos a dos. Por último, es claro que la subretícula D definida anteriormente es isomorfa al diamante. □

COROLARIO 1.4.10. *Un R–módulo es distributivo si y sólo no tiene un subcociente isomorfo a la suma directa de dos copias de un simple. (2.32 de* [**8**]*)*

1.5. Complementos.

DEFINICIÓN 1.5.1. Sea L una retícula con 0 y 1. Un elemento $a' \in L$ es un **complemento** de $a \in L$ si $a \vee a' = 1$ y $a \wedge a' = 0$. Denotaremos este hecho por $a \oplus a' = 1$, y diremos también que 1 es la **suma directa** de a y a'. Si todo elemento de una retícula tiene al menos un complemento, diremos que ésta es **complementada**; si todo elemento tiene al menos un complemento en cada intervalo que lo contenga, diremos que la retícula es **relativamente complementada**.

EJEMPLO 1.5.2. $S_F(V)$, la retícula de subespacios de un espacio vectorial V sobre un campo F es complementada: si $W \leq V$ y γ es una base de W, entonces podemos extenderla a una base β de todo el espacio, con lo cual el subespacio generado por $\beta - \gamma$, digamos W', es un complemento de W, puesto que $V = W + W'$ al ser éste un subespacio que contiene a β, y si $0 \neq x \in W \cap W'$, digamos $a_1\gamma_{i_1} + \dots + a_n\gamma_{i_n} = x = b_1\beta_{j_1} + \dots + b_m\beta_{j_m}$ con $a_i, b_j \in F, a_1 \neq 0$, $\gamma_{i_k} \in \gamma$, $\beta_{j_l} \in \beta - \gamma$, entonces, despejando a γ_{i_1}, éste se encontraría en el subespacio generado por $(\beta - \gamma) \cup \{\gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_n}\}$, en contradicción con la independencia lineal de β, así que $W \cap W' = 0$ y $W \oplus W' = V$.

Ahora generalizamos el ejemplo anterior para decir precisamente cuáles son los complementos en la retícula $S_R(M)$ de submódulos de un R–módulo (izquierdo) M.

OBSERVACIÓN 1.5.3. $N \leq M$ es un complemento en $S_R(M)$ si y sólo si N es un sumando directo de M.

Esta afirmación es inmediata de la definición, y nos lleva a la sigiuente, que es una de las caracterizaciones de los módulo es semisimples (ver, por ejemplo, [**1**], pp. 116,117):

PROPOSICIÓN 1.5.4. *Son equivalentes para ${}_RM$:*

(1) M es semisimple.
(2) Todo submódulo de M es sumando directo suyo.
(3) $S_R(M)$ es complementada.

La suma directa es asociativa en las retículas modulares:

PROPOSICIÓN 1.5.5. *En una retícula modular, si se tiene* $a \oplus (b \oplus c)$, *entonces también* $(a \oplus b) \oplus c$, *y ambas coinciden.*

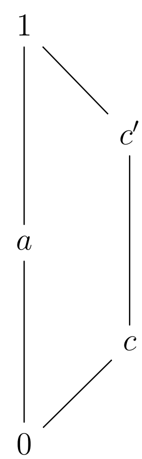
DEMOSTRACIÓN. Primero, observemos que $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c) = 0$, así que $a \wedge b = 0$. Por otro lado, la modularidad implica que $(a \vee b) \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge (b \vee c)) = b \vee 0 = b$, y luego $(a \vee b) \wedge c \leq b \wedge c = 0$.

Por último, basta observar que $a \oplus (b \oplus c) = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = (a \oplus b) \oplus c$. $\square$

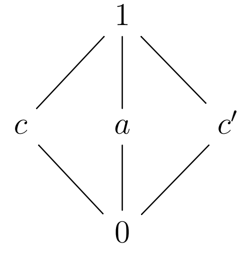
Ahora tratamos la unicidad de los complementos:

OBSERVACIÓN 1.5.6. Los complementos son únicos en las retículas distributivas, y los complementos comparables son únicos en las retículas modulares.

DEMOSTRACIÓN. Sean $c \leq c'$ complementos de a en una retícula modular. Podemos aplicar 1.3.5 para obtener la igualdad $c = c'$, pues $c \wedge a = 0 = c' \wedge a$, $c \vee a = 1 = c' \vee a$. También podemos decir que si se tuviera $c < c'$, entonces $0, a, c, c', 1$ formarían un pentágono.



Si ahora tomamos c, c' dos complementos de un elemento a en una retícula distributiva, entonces de nuevo $c \wedge a = 0 = c' \wedge a$, $c \vee a = 1 = c' \vee a$, así que aplicando el teorema 1.4.6 podemos concluir que $c = c'$. Dicho de otro modo, si a tuviera dos complementos c, c' entonces $0, a, c, c', 1$ formarían un diamante si $c||c'$, o bien un pentágono si fueran comparables (ver 1.4.9).



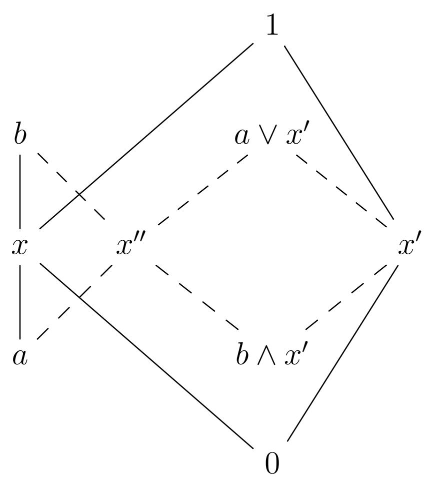
□

A continuación mostramos que para las retículas modulares, las nociones de ser *complementada* y *relativamente complementada* coinciden.

PROPOSICIÓN 1.5.7. *Una retícula modular L es complementada si y sólo si es relativamente complementada.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longleftarrow$) Es trivial: por definición, todo elemento tiene al menos un complemento en el intervalo $1/0 = L$.

($\Longrightarrow$) Sean $a \leq x \leq b$ y x' un complemento de x en L. Entonces $x'' \ddot{=} a \vee (b \wedge x') = b \wedge (a \vee x')$ es un complemento de x en b/a: $x \wedge x'' = x \wedge b \wedge (a \vee x') = x \wedge (a \vee x') = a \vee (x \wedge x') = a \vee 0 = a$ y $b = 1 \wedge b = (x \vee x') \wedge b = x \vee (b \wedge x') = x \vee a \vee (b \wedge x') = x \vee x''$.



□

1.6. Condiciones de cadena.

DEFINICIÓN 1.6.1. Si un conjunto parcialmente ordenado tiene la propiedad de que cualquier subconjunto no vacío suyo tiene al menos un elemento mínimo (máximo), se dice que es **artiniano** (**neteriano**).

Se dice que un conjunto parcialmente ordenado cumple la **condición de cadena descendente** (**ascendente**) (**CCD**, respectivamente **CCA**) si para cualquier sucesión $x_0 \geq x_1 \geq ...$ ($x_0 \leq x_1 \leq ...$) hay un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x_{k+1} = ...$.

PROPOSICIÓN 1.6.2. *Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ es artiniano (neteriano) si y sólo si cumple la CCD (CCA).*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Sea $x_0 \geq x_1 \geq ...$ una cadena en P. Por hipótesis, ésta tiene un elemento mínimo, digamos x_k. Entonces, para toda $i \geq 1$, $x_k = x_{k+i}$ pues $x_k \geq x_{k+i}$.

($\Longleftarrow$) Si P no es artiniano, existe $P \supseteq A \neq \emptyset$ que no tiene mínimo. Sea entonces $x_0 \in A$. Como x_0 no es mínimo en A, existe $x_1 \in A$ tal que $x_1 < x_0$. Pero x_1 tampoco es mínimo en A, de modo que hay algún elemento $x_2 \in A$ tal que $x_2 < x_1$. Así, podemos seguir haciendo elecciones sucesivas de elementos de A tales que $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$, con lo cual P no cumple la CCD.

La equivalencia para el caso neteriano se da por dualidad. $\square$

Proposición 1.6.3. *Sea $(P, \leq)$ un orden parcial donde todo subconjunto no vacío tiene ínfimo (supremo). Entonces P es artiniano (neteriano) si y sólo si para todo $L \supseteq A \neq \emptyset$ existe $A \supseteq F$ finito tal que $\wedge A = \wedge F$ ($\vee A = \vee F$).*

Demostración. De nuevo, haremos la demostración sólo para el caso artiniano, siendo dual la del caso neteriano.

($\Longrightarrow$) Sean $A \neq \emptyset$ y $S \doteqdot \{\wedge F \mid F \subseteq A\,,\, F \text{ finito}\}$. Entonces $S \neq \emptyset$ y existe un elemento mínimo en S, digamos $\wedge F_0$. Por un lado, es claro que $\wedge F_0 \geq \wedge A$. Por el otro, $\forall\, a \in A\, (\wedge F_0 \geq (\wedge F_0) \wedge a = \wedge(F_0 \cup \{a\}))$ y por la minimidad de $\wedge F_0$ se tiene que $(\wedge F_0) \wedge a = \wedge F_0$; es decir, $a \geq \wedge F_0$ para toda $a \in A$. Así, $\wedge A \geq \wedge F_0$, y se da la igualdad.

($\Longleftarrow$) Veremos que cumple la CCD (ver la proposición anterior). Si $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ es una cadena en P, entonces existe $\underset{\mathbb{N}}{\wedge} a_k$ y además $\underset{\mathbb{N}}{\wedge} a_n = \wedge\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ para algunos índices que podemos etiquetar de manera que $i_1 \leq \ldots \leq i_k$. Pero entonces $\wedge\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} = a_{i_k}$, con lo cual $\underset{n > i_k}{\wedge} a_n \geq \underset{\mathbb{N}}{\wedge} a_n = a_{i_k}$; es decir, $a_n \geq a_{i_k}$ para toda $n > i_k$. Pero como también para toda $n > i_k$ se tiene $a_{i_k} \geq a_n$, resulta que $a_n = a_{i_k}$ si $n \geq i_k$. $\square$

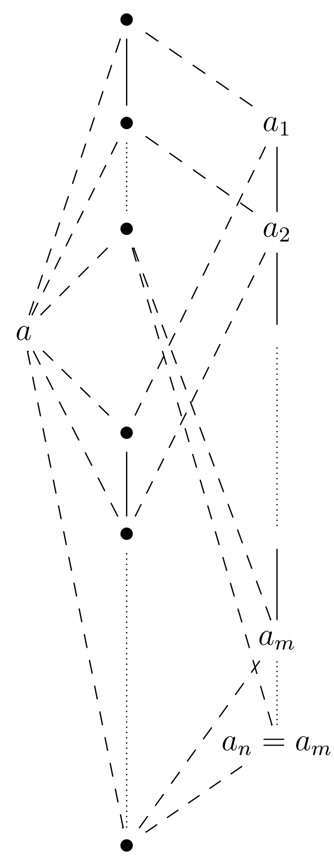
Hacemos notar el siguiente hecho, que es inmediato de la definición:

Observación 1.6.4. La clase de las retículas artinianas (neterianas) es cerrada bajo subretículas.

Proposición 1.6.5. *Sea $a \in L$, una retícula modular. Entonces L es artiniana (neteriana) si y sólo , las subretículas $L' \doteqdot \{x \mid x \leq a\}$, $L'' \doteqdot \{x \mid x \geq a\}$ son artinianas (neterianas).*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Es obvio (ver 1.6.4).

($\Longleftarrow$) Haremos la demostración para el caso artiniano: sean $a \in L$ y $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ una cadena en L. Entonces tenemos también las cadenas $a \wedge a_1 \geq a \wedge a_2 \geq \ldots$ y $a \vee a_1 \geq a \vee a_2 \geq \ldots$, en L' y L'', respectivamente. Luego, por la hipótesis, existen $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $\forall\, n \geq k\, (a \wedge a_n = a \wedge a_k)$ y $\forall\, n \geq l\, (a \vee a_n = a \vee a_l)$. Así, si definimos $m \doteqdot \text{máx}\{k, l\}$, tenemos que $\forall\, n \geq m\, (a \wedge a_n = a \wedge a_m\,,\, a \vee a_n = a \vee a_m)$. Entonces, como L es modular, $\forall\, n \geq m\, (a_n = a_n \vee (a \wedge a_n) = a_n \vee (a \wedge a_m) = a_m \wedge (a \vee a_n) = a_m \wedge (a \vee a_m) = a_m)$, con lo que L satisface la CCD y es, por lo tanto, artiniana.



□

En vista del Teorema de la Correspondencia (1.2.15), el resultado anterior nos dice que los módulos artinianos (neterianos) constituyen una clase de Serre; esto es, una clase cerrada bajo submódulos, cocientes y extensiones.

Reformulamos la parte no trivial de la demostración anterior a manera de corolario, pues nos será útil más adelante.

COROLARIO 1.6.6. *Si a es elemento de una retícula modular y $x_1 < x_2 < \ldots$ es una cadena estrictamente ascendente (descendente), entonces también lo es alguna de la cadenas $\{a \vee x_i\}$, $\{a \wedge x_i\}$.*

Por otro lado, en vista del Primer Teorema de Isomorfismos para módulos, la proposición nos da también el siguiente corolario.

COROLARIO 1.6.7. *Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta, entonces M es artiniano (neteriano) si y sólo si M'' y M' lo son.*

DEMOSTRACIÓN. Por el citado teorema se tiene $M' \cong N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \frac{M}{N} \cong M''$, así que $S(M') \cong [0, N]$, $S_R(M'') \cong [N, M]$, y entonces puede aplicarse el resultado anterior. □

1.7. Retículas compactamente generadas.

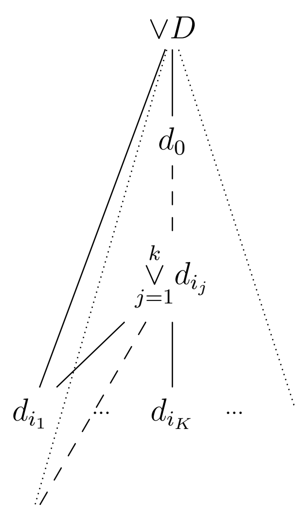
En numerosos casos importantes de estructuras algebraicas, los elementos son sumas o combinaciones lineales *finitas*. Esta manera de formar los elementos de las álgebras, grupos, módulos, nos lleva a estudiar una clase particular de retículas: aquéllas cuyos elementos son supremos de elementos *compactos*. En nuestro ámbito, compacto quiere decir justamente expresable como imagen de una operación con un número finito de argumentos. En esta sección tratamos la noción de compacidad en una retícula, y exponemos algunas propiedades de esta clase de retículas.

DEFINICIÓN 1.7.1. Un elemento c de una retícula completa L es **compacto** si $\forall X \subseteq L\,(c \leq \vee X \implies \exists F \subseteq X(c \leq \vee F$ y F es finito$)\,)$, y es S–**compacto** si para cada $L \supseteq D$ dirigido superiormente $(c \leq \vee D \implies \exists d_0 \in D(c \leq d_0))$.

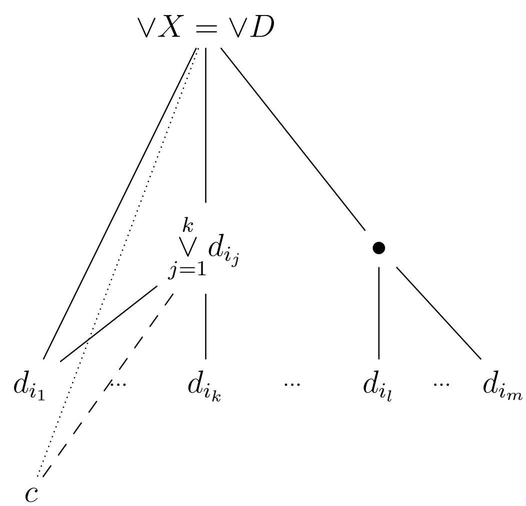
Lo primero que establecemos es que las dos definiciones anteriores son equivalentes.

PROPOSICIÓN 1.7.2. *Un elemento de una retícula completa es compacto si y sólo si es S–compacto.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Sea c un elemento compacto de una retícula completa L tal que $c \leq \vee D$, con D un subconjunto dirigido superiormente de L. Entonces, por la definición de compacidad, hay un subconjunto finito $F \subseteq D$ tal que $c \leq \vee F$. Este subconjunto F, por ser finito, tiene una cota superior en D, digamos d_0, así que $c \leq \vee F \leq d_0$ y c es S–compacto.



($\Longleftarrow$) Sean ahora $c \in L$ S–compacto tal que $c \leq \vee X$. Para aplicar la definición, necesitamos un conjunto dirigido superiormente D que cumpla que $c \leq \vee D$ y sus elementos sean supremos de subconjuntos finitos de X. Proponemos entonces $D \ddot{=} \{\vee F \mid F \subseteq X\,,\, F \text{ finito}\}$. Si $a \ddot{=} \vee F, b \ddot{=} \vee F' \in D$, entonces es claro que $a \vee b = \vee(F \cup F') \in D$, así que en efecto se trata de un conjunto dirigido superiormente. Más aún, $\vee D = \vee X$: trivialmente $\vee X$ contiene a cualquier elemento de D, de modo que $\vee D \leq \vee X$; por otro lado, si $x \in X$, tenemos que $x = \vee\{x\} \in D$, con lo cual $x \leq \vee D$ y en consecuencia $\vee X \leq \vee D$, y se da la igualdad. Por lo tanto, $c \leq \vee D$ y luego, por la S–compacidad de c, existe un $\vee F \in D$ que contiene a c, lo cual completa la demostración.



□

Establecemos dos propiedades elementales de los elementos compactos en una retícula:

Observación 1.7.3. Los supremos finitos de compactos también son compactos.

Demostración. Es suficiente hacer la demostración para el supremo de dos elementos compactos. Sean a, b elementos compactos. Por la proposición anterior, si $L \supseteq D$ es un conjunto dirigido superiormente tal que $a \vee b \leq \vee D$, entonces existen $d, d' \in D$ tales que $a \leq d$, $b \leq d'$ (pues $a, b \leq a \vee b$). Luego, hay un elemento $d'' \in D$ tal que $d \vee d' \leq d''$, así que $a \vee b \leq d \vee d' \leq d''$, con lo cual $a \vee b$ es S–compacto. □

Observación 1.7.4. Si c es compacto en una retícula L con 1 y a es cualquier elemento de L, entonces $a \vee c$ es compacto en $1/a$.

Demostración. Supongamos que $a \vee c \leq \vee D$ con D un conjunto dirigido superiormente en $1/a$. Entonces $c \leq d_0$ para algún $d_0 \in D$, y $a \vee c \leq a \vee d_0 = d_0$. □

Lema 1.7.5. *Sea L compactamente generada y $a \leq k \leq b$. Entonces k es compacto en b/a si y sólo si hay un c compacto en L tal que $k = a \vee c \leq b$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Sea $k = \bigvee_I c_i$ con c_i compacto en L. Entonces $k = a \vee k = \bigvee_I (a \vee c_i)$, pues L es continua superiormente (ver la definición 1.8.1 y la proposición 1.8.4). Notemos que cada $a \vee c_i \leq b$, puesto que $c_i \leq k \leq b$, así que $k \leq b$. Además, hay $F \subseteq I$ finito tal que $k = \bigvee_F (a \vee c_i) = a \vee (\bigvee_F c_i)$. Sea $c \doteqdot \bigvee_F c_i$. Entonces $k = a \vee c \leq b$ y c es compacto en L, por ser supremo finito de compactos (1.7.3).

($\Longleftarrow$) Sea $X \subseteq b/a$ tal que $k \leq \vee X$. Como $c \leq k = a \vee c$, existe $F \subseteq X$ finito tal que $c \leq \vee F$. Luego, $a \vee c \leq \vee F$ ya que $F \subseteq b/a$. $\therefore$ k es compacto en b/a. $\square$

La siguiente proposición caracteriza la compacidad en las retículas de submódulos y subgrupos. Hacemos la demostración para el primer caso.

Proposición 1.7.6. *Sea ${}_RM$. Entonces $N \leq M$ es compacto si y sólo si N es finitamente generado:*

Demostración. Como $N = \sum_{x \in N} Rx$, si N es compacto existe $N \supset F$ finito tal que $N \leq \sum_{x \in F} Rx$, así que $N = \sum_{x \in F} Rx$ y es finitamente generado. Por otro lado, si N es finitamente generado, digamos por $\{x_1, \ldots, x_n\}$, y $N \leq \sum_{i \in I} N_i$ con $N_i \leq M$, entonces $x_k = \sum_{j=1}^{m_k} a_{k,j} n_{k_j}$ con $a_{i,j} \in R$, $n_{k_j} \in N_{k_j}$, $k_j \in I$, para toda $k = 1, \ldots, n$. Luego, podemos tomar $F \doteqdot \{k_j \in I \mid 1 \leq k \leq n\,, 1 \leq j \leq m_k\}$, que es finito y cumple que $N \leq \sum_{k_j \in F} N_{k_j}$. Esto último nos dice N es compacto. $\square$

Definición 1.7.7. Una retícula completa es **compacta** si el elemento 1 es compacto.

Ejemplo 1.7.8. $S_R(M)$ es compacta si y sólo si M es finitamente generado.

A continuación vemos que podemos relacionar la propiedad neteriana con la compacidad; es decir, con la generación finita (de submódulos, subgrupos, . . .):

Proposición 1.7.9. *Una retícula completa L es neteriana si y sólo si todos sus elementos son compactos.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Es consecuencia directa de la proposición 1.6.3.

($\Longleftarrow$) Sean $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ una cadena en L. Por la hipótesis, $\bigvee_{\mathbb{N}} a_n \leq \vee\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ para algunos $i_1 \leq \ldots \leq i_k \in \mathbb{N}$. Pero $\vee\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} = a_{i_k}$, así que $a_m \leq \bigvee_{\mathbb{N}} a_n \leq a_{i_k} \leq a_m$ para toda $m \geq i_k$; es decir, $a_m = a_{i_k}$ si $m \geq i_k$. $\therefore$ L cumple la CCA y luego es neteriana (ver 1.6.2). $\square$

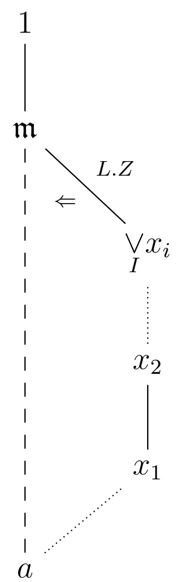
De las dos proposiciones anteriores obtenemos precisamente una de las caracterizaciones de los módulos neterianos:

Corolario 1.7.10. *${}_RM$ es neteriano si y sólo si todos sus submódulos son finitamente generados.*

Definición 1.7.11. Sea L una retícula con 0. Decimos que x es un **átomo** de L si $0 \prec x$, y un **átomo dual** *o* **coátomo** (en una retícula L con 1) si es un elemento máximo en $L \backslash \{1\}$.

LEMA 1.7.12. *(Krull) Sean L compacta y $1 \neq a \in L$. Entonces L tiene al menos un coátomo.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que podemos aplicar el Lema de Zorn al conjunto $A \ddot{=} 1/a - \{1\}$: si C es una cadena en A, entonces, usando la S–compacidad de 1, si $\vee C = 1$, se tendría $1 \leq c_0$ para algún $c_0 \in C$, con lo cual $1 = c_o$, pues toda cadena es un conjunto dirigido. Pero esto contradice que $c_0 \in A$. Así, $\vee C \neq 1$, y es obvio que también $a \leq \vee C$; es decir, tenemos que $\vee C \in A$, y luego puede aplicarse dicho lema para asegurar la existencia de un máximo en A, que es lo que queríamos.



□

DEFINICIÓN 1.7.13. Una retícula completa es **compactamente generada** o **algebraica** si todos sus elementos son supremos de elementos compactos.

OBSERVACIÓN 1.7.14. La generación compacta generaliza la propiedad neteriana (ver 1.6.2): si $a_0 \leq a_1 \leq \ldots$ en una retícula compactamente generada (completa), entonces $\bigvee\limits_{\mathbb{N}} a_k = \bigvee\limits_I c_i$ para algún conjunto de índices I, con cada c_i compacto. Si I es finito entonces, usando la S–compacidad, como una cadena es un conjunto dirigido superiormente, tenemos que para toda $i_j \in I$, $c_{i_j} \leq a_{k_j}$ para algún $k_j \in \mathbb{N}$. Así, existe k_n tal que $c_i \leq a_{k_n}\ \forall i \in I$, y luego $\bigvee\limits_I c_i \leq a_{k_n} \leq \bigvee\limits_{\mathbb{N}} a_k = \bigvee\limits_I c_i$, con lo cual $m \geq k_n \implies a_m = a_{k_n}$.

En cuanto a la cerradura bajo subretículas de las compactamente generadas, sólo podemos decir, en general, lo siguiente:

OBSERVACIÓN 1.7.15. Un intervalo de la forma $a/0$ de una retícula compactamente generada L, es también compactamente generado.

Demostración. Si $x \in a/0$, entonces $x = \bigvee_I c_i$ con cada $c_i \in L$ un elemento compacto. Obviamente, para cada i, $c_i \leq x \leq a$; es decir, $c_i \in a/0$. Además, cada c_i es compacto en $a/0$, pues un conjunto dirigido superiormente en $a/0$ es a fin de cuentas un conjunto dirigido superiormente en L. Así, la subretícula $a/0$ es compactamente generada. $\square$

A continuación justificamos la denominación algebraica para esta clase de retículas completas:

Proposición 1.7.16. *La retícula de submódulos (o subgrupos) de cualquier R–módulo izquierdo M (grupo) es compactamente generada.*

Demostración. Hacemos la demostración para módulos: siempre podemos escribir $M = \sum_{x \in M} Rx$, y cada Rx es compacto (finitamente generado; ver 1.7.6). $\square$

Definición 1.7.17. Una retícula es H–**neteriana** si toda cota inferior de cada uno de sus elementos compactos es también compacta.

Presentamos ahora un resultado de R–módulos que nos dará una caracterización de los módulos cuya retícula pertenece a esta clase.

Teorema 1.7.18. *Son equivalentes, para un anillo R:*

(1) R es neteriano izquierdo.
(2) R tiene un generador neteriano.
(3) Todo R–módulo izquierdo finitamente generado es neteriano.
(4) La clase de los R–módulo izquierdos finitamente generados es cerrada bajo submódulos.

Demostración. (1. $\Longrightarrow$ 2.) Es trivial, pues R es un generador de sí mismo.

(2. $\Longrightarrow$ 3.) Sea $_RG$ tal generador. Un módulo finitamente generado es isomorfo a un cociente de una suma directa finita de copias de R (y por tanto de copias de G). Además, sabemos que las sumas directas finitas de módulos neterianos (artinianos) son también neterianas (artinianas). Así, un módulo finitamente generado es isomorfo a un cociente de un módulo neteriano. Entonces, aplicando el Teorema de la Correspondencia (1.2.15) y la proposición 1.6.5, podemos concluir que todo módulo finitamente generado es neteriano.

(3. $\Longrightarrow$ 4.) Es inmediato del corolario 1.7.10 .

(4. $\Longrightarrow$ 1.) Como $_RR$ es finitamente generado, la hipótesis implica que todo submódulo suyo también lo es. Por lo tanto, aplicando de nuevo 1.7.10, $_RR$ es neteriano. $\square$

Con el teorema anterior y la proposición 1.7.6, obtenemos:

Corolario 1.7.19. *La retícula de submódulos de un R–modulo es H–neteriana si y sólo si R es neteriano.*

1.8. Retículas continuas superiormente.

Para terminar este capítulo, definimos otros dos tipos de retículas, los cuales incluyen a las compactamente generadas:

DEFINICIÓN 1.8.1. Una retícula completa L es **continua superiormente** si para todos $a \in L \supseteq D$ dirigido superiormente, $a \wedge (\vee D) = \bigvee_{d \in D} a \wedge d$.

OBSERVACIÓN 1.8.2. Usando la misma notación que en la definición anterior, en toda retícula L se da la desigualdad $a \wedge (\vee D) \geq \bigvee_D (a \wedge d)$, pues claramente $a \wedge (\vee D) \geq a \wedge d$ para toda $d \in D$. Además, la clase de las retículas continuas superiormente es (obviamente) cerrada bajo subretículas.

PROPOSICIÓN 1.8.3. *Toda retícula completa neteriana es continua superiormente.*

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que en toda retícula neteriana, cualquier conjunto dirigido superiormente D tiene un elemento mayor:

Si $d_0 \in D$ es un elemento máximo en D y d es cualquier otro elemento suyo, entonces existe $d' \geq d, d_0$, lo cual implica $d' = d_0 \geq d$ para toda $d \in D$.

Ahora tomemos cualquier $a \in L$ y $D \subseteq L$ dirigido superiormente con elemento mayor d_0. Entonces $\vee D = d_0$ y $\bigvee_D (a \wedge d) = a \wedge d_0$ (pues $a \wedge d_0$ es el mayor del conjunto $\{a \wedge d\}_D$). Así, $a \wedge (\vee D) = a \wedge d_0 = \bigvee_D (a \wedge d)$, con lo que L es continua superiormente. □

PROPOSICIÓN 1.8.4. *Si L es compactamente generada, entonces es continua superiormente.*

DEMOSTRACIÓN. Queremos ver que Sean $a \in L \supseteq \{x_i\}_I$ dirigido superiormente. Por la observación anterior, basta mostrar que $a \wedge (\bigvee_I x_i) \leq \bigvee_I (a \wedge x_i))$. Tomemos $\{c_j\}_J \in L$ un conjunto de elementos compactos tales que $a \wedge (\bigvee_I x_i) = \bigvee_J c_j$. Claramente, $\forall\, j \in J\, (c_j \leq a \wedge (\bigvee_I x_i))$, así que $c_j \leq \bigvee_I x_i$ y la compacidad implica que $\forall\, j \in J\, \exists\, i_j \in I\, (c_j \leq x_{i_j})$. Además, $\forall\, j\, (c_j \leq a)$, con lo cual $c_j \leq a \wedge x_{i_j} \leq \bigvee_I (a \wedge x_i)$. Entonces vemos que $a \wedge (\bigvee_I x_i) = \bigvee_J c_j \leq \bigvee_I (a \wedge x_i)$. □

PROPOSICIÓN 1.8.5. *En una retícula continua superiormente L, todo átomo es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $a \in L$ un átomo y $L \supseteq D$ un conjunto dirigido superiormente tal que $a \leq \vee D$, y supongamos que $\forall\, d \in D\, (a \not\leq d)$. Como a es un átomo, $\forall\, d \in D\, (a \wedge d \in \{0, a\})$, así que por nuestra suposición, $\forall\, d \in D\, (a \wedge d = 0)$ (pues $a \wedge d = a \Leftrightarrow a \leq d$). Entonces $a = a \wedge (\vee D) = \bigvee_{d \in D} (a \wedge d) = \vee 0 = 0$, lo cual es imposible. □

LEMA 1.8.6. *Una retícula L es continua superiormente si y sólo si para cada $a \in L \supseteq X$, $\mathcal{P}_0(X)$ el conjunto de subconjuntos finitos de X, $a \wedge (\vee X) = \bigvee_{F \in \mathcal{P}_0(X)} (a \wedge (\vee F))$.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Obviamente, $a \wedge (\vee X) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{P}_0(X)} (a \wedge (\vee F))$, pues para cada $F \in \mathcal{P}_0(X)$, $a \wedge (\vee X) \geq a \wedge (\vee F)$. Además, la igualdad es trivial si $|X| \in \mathbb{N}$. Supongamos entonces que X es infinito, para proceder por inducción transfinita:

Supongamos que la igualdad es verdadera para cualquier subconjunto de L de tamaño estrictamente menor que $|X|$, que α es el mínimo ordinal tal que $|\alpha| = |X|$ y que $X = \{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$. Si escribimos $X_\xi = \{x_\eta\}_{\eta<\xi}$, entonces $|X_\xi| < |X|$ para toda $\xi < \alpha$ y $\{\vee X_\xi\}_{\xi<\alpha}$ es una cadena. Además, $\vee X = \bigvee_{\xi<\alpha} (\vee X_\xi)$: $\forall x \in X \, \exists \eta_x < \alpha \, \forall \rho > \eta_x \, (x = x_{\eta_x} \leq \vee X_\rho \leq \bigvee_{\xi<\alpha} (\vee X_\xi))$ y por tanto, $\vee X \leq \bigvee_{\xi<\alpha} (\vee X_\xi)$; la otra desigualdad es obvia. Así, por la continuidad superior de L y la hipótesis de inducción,

$$
\begin{aligned}
a \wedge (\vee X) &= a \wedge (\bigvee_{\xi<\alpha} (\vee X_\xi)) = \bigvee_{\xi<\alpha} (a \wedge (\vee X_\xi)) \\
&\underset{\text{H.I.}}{=} \bigvee_{\xi<\alpha} (\bigvee_{F \in \mathcal{P}_0(X_\xi)} (a \wedge (\vee F))) = \bigvee_{F \in \mathcal{P}_0(X)} (a \wedge (\vee F))
\end{aligned}
$$

La última igualdad se da porque claramente todo subconjunto finito de X es un subconjunto finito de algún X_ξ.

($\Longleftarrow$) Sea $D \subseteq L$ dirigido superiormente. Para cada $F \in P_0(D)$ existe $d_F \in D$ tal que $d_F \geq \vee F$, con lo cual $a \wedge (\vee F) \leq a \wedge d_F \leq \bigvee_{d \in D} (a \wedge d)$. Entonces $a \wedge (\vee D) = \bigvee_{F \in \mathcal{P}_0(D)} (a \wedge (\vee F)) \leq \bigvee_{d \in D} (a \wedge d)$. Por otro lado, la desigualdad contraria siempre se cumple, pues $d = \vee \{d\}$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.8.7. *Sea L continua superiormente. Si $a/0$ es neteriana, entonces a es compacto en L.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $a \leq \vee X$. Por 1.7.9, a es compacto en $a/0$ y por el lema anterior $a = a \wedge (\vee X) = \bigvee_{F \in \mathcal{P}_0(X)} (a \wedge (\vee F))$. Entonces, como cada $a \wedge (\vee F) \in a/0$, hay $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{P}_0(X)$ tales que $a = \bigvee_1^n (a \wedge (\vee F_i))$. Si definimos $F \doteq \bigcup_1^n F_i$, entonces $F \in \mathcal{P}_0(X)$ y $\vee F \geq \vee F_i$ para toda $1 \leq i \leq n$, de modo que $a = \bigvee_1^n (a \wedge (\vee F_i)) \leq a \wedge (\vee F) \leq \vee F$ y a es compacto en L. $\square$

DEFINICIÓN 1.8.8. Decimos que $a \in L$ es **neteriano** si $a/0$ es neteriana.

LEMA 1.8.9. *Sea a un elemento de una retícula continua superiormente L. Entonces los elementos compactos en $a/0$ son exactamente los elementos compactos en L que pertenecen a $a/0$.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente, todo $c \in a/0$ compacto en L es compacto en $a/0$, pues un sistema dirigido en $a/0$ es también un sistema dirigido en L. Por otro lado, si $c \in a/0$ es compacto en $a/0$ y $c \leq \vee D$, D un subconjunto de L dirigido superiormente, entonces, por la continuidad superior de L, $c = a \wedge c \leq a \wedge (\vee D) = \bigvee_{d \in D} (a \wedge d)$ y luego $c = \bigvee_{d \in F} (a \wedge d)$ para algún $F \subseteq D$ finito (pues cada $a \wedge d \in a/0$ y $\{a \wedge d\}_{d \in D}$ es dirigido superiormente). Luego existe $d_0 \in D$ tal que $d_0 \geq d$ para toda $d \in F$, con lo cual $c \leq a \wedge d_0 \leq d_0$. Así, c es compacto en L. $\square$

TEOREMA 1.8.10. *Sea L continua superiormente. Entonces todo elemento compacto es neteriano si y sólo si L es H–neteriana.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) En vista de la proposición anterior, si todo elemento compacto es neteriano, entonces es lo mismo ser neteriano en L que ser compacto en L. Además, es claro que toda cota inferior de un elemento neteriano es también neteriana. Por lo tanto, toda cota inferior de un elemento compacto es a su vez, compacta.

($\Longleftarrow$) Sea ahora c compacto en L. Entonces, por la hipótesis, todo elemento de $c/0$ es compacto en L y por el lema anterior, todo elemento de $c/0$ es compacto en $c/0$. En consecuencia, $c/0$ es neteriana (1.7.9). $\square$

Ahora definimos la noción de inductividad, que generaliza la de continuidad superior.

DEFINICIÓN 1.8.11. Una retícula completa L es **inductiva** si cada uno de sus intervalos satisface la siguiente condición, llamada *condición (B)* :

Para toda cadena $\{x_i\}_I \subseteq L$ y $a \in L$, si $a \wedge x_i = 0$ para toda i, entonces $a \wedge (\bigvee_I x_i) = 0$.

OBSERVACIÓN 1.8.12. Si L es continua superiormente, entonces es inductiva.

DEMOSTRACIÓN. Si $\{x_i\}_I \subseteq L \ni a$ como en la definición, entonces

$$a \wedge (\bigvee_I x_i) = \bigvee_I (a \wedge x_i) = \vee 0 = 0$$

. $\square$

Capítulo 2

El zoclo y el radical.

Hay dos nociones generales de descomposición y composición: la primera está dada en forma de un supremo o ínfimo particular de la retícula; la segunda, por una cadena máxima de elementos entre, por ejemplo, 0 y el sujeto en cuestión. En otras palabaras, la primera forma de descomponer un módulo, grupo, etc. , es escribiendo $X = \vee S$ ($X = \wedge S$); la otra es dar una cadena de elementos contenidos en X, que formen intervalos simples, a la cual se conoce como serie de composición. En este trabajo nos enfocamos en la segunda manera de describir la estructura de una retícula. Sabemos que hay una caracterización fundamental de este proceso: el Teorema de Jordan-Hölder, que afirma la unicidad, salvo permutaciones, de los factores simples que componen un módulo, grupo, etc. . Sin embargo, no todas las retículas tienen una serie de composición. ¿Qué es entonces lo más cercano a ella que podemos construir? El zoclo y el radical, conceptos mutuamente duales, nos proporcionan formas naturales de producir una serie ascendente o descendente en una retícula, tomando en cuenta a cada paso todos los elementos mínimos o máximos, respectivamente.

2.1. Elementos esenciales y seudocomplementos.

A lo largo de esta sección, L denotará una retícula completa.

Definición 2.1.1. Se dice que $e \in L$ es **esencial** en L si para todo $0 \neq x \in L$, $e \wedge x \neq 0$. Un elemento $u \in L$ es una **extensión esencial** de otro elemento a si $a \leq u$ y a es esencial en el intervalo $u/0$; y un elemento $a \in L$ es **esencialmente cerrado** si no tiene extensiones esenciales propias.

Por otro lado, diremos que $b \in L$ es un **seudocomplemento** de $a \in L$ si $a \wedge b = 0$ y b es máximo con respecto a esta propiedad. Diremos que L es **seudocomplementada** si todo elemento suyo tiene al menos un seudocomplemento, y que es **relativamente seudocomplementada** si todo intervalo suyo es seudocomplementado.

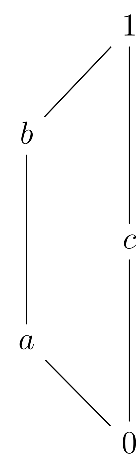
Primero, damos una relación entre los conceptos de *complemento* y *seudocomplemento:*

Proposición 2.1.2. *En una retícula modular con 0 y 1, todo complemento es un seudocomplemento.*

Demostración. Si a' es un complemento de a, entonces, por definición, $a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = 1$. Sea ahora $b' \geq a'$ tal que $a \wedge b' = 0$. Entonces $b' = b' \wedge 1 = b' \wedge (a \vee a') =$

$a' \vee (a \wedge b') = a' \vee 0 = a'$, y en consecuencia a' es máximo con respecto a la propiedad $a \wedge x = 0$. □

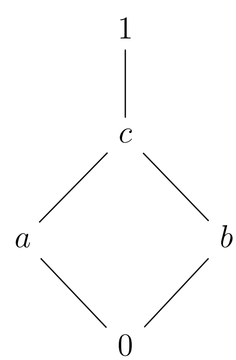
OBSERVACIÓN 2.1.3. Si en la proposición anterior eliminamos la hipótesis de la modularidad, la conclusión es, en general, falsa: en la retícula del pentágono,



a es complemento pero no seudocomplemento de c.

Además, aún en retículas modulares, el recíproco de la proposición anterior no siempre es válido:

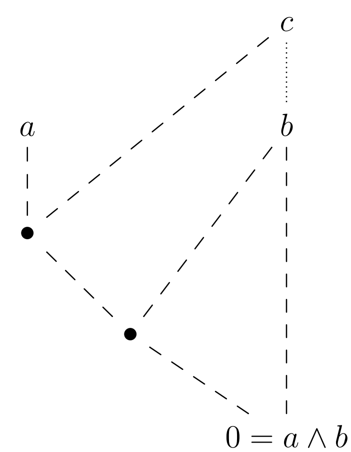
OBSERVACIÓN 2.1.4. En la siguiente retícula modular, b es seudocomplemento mas no complemento de a:



PROPOSICIÓN 2.1.5. *En una retícula con* 0*, todo seudocomplemento es esencialmente cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Si b es un seudocomplemento de a en L y $c > b$ es una extensión esencial suya, entonces se tiene $a \wedge c \neq 0$. Más aún, como b es esencial en $c/0$, entonces $0 \neq b \wedge (a \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, pero esto contradice que $a \wedge b = 0$. Por lo tanto, b no puede tener extensiones esenciales propias. □

En esencia, la proposición anterior se cumple porque en una retícula no puede ocurrir $a \wedge b < x \leq a, b$. Una extensión esencial propia de b en la proposición anterior tendría un diagrama como el siguiente, que no representa una retícula:

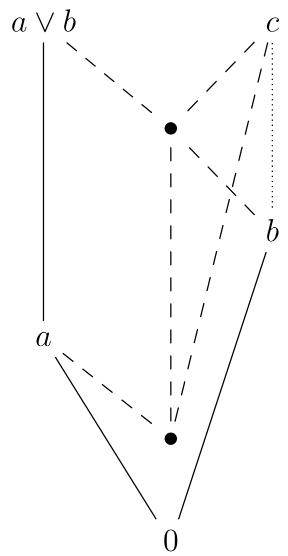


A continuación damos otra descripción de los seudocomplementos, válida en toda retícula (completa) modular acotada :

PROPOSICIÓN 2.1.6. *Sea L una retícula modular con 0 y 1. Entonces b es seudocomplemento de a en L si y sólo si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b$ es esencial en $1/b$.*

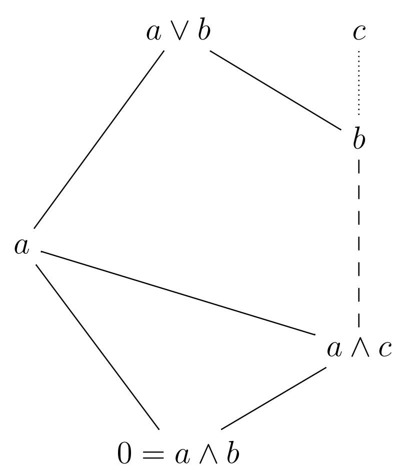
DEMOSTRACIÓN. b es seudocomplemento de a en L si y sólo si $a \wedge b = 0$ y $\forall\, c > b\, (a \wedge c \neq 0)$, lo cual ocurre si y sólo si $a \wedge b = 0$ y $\forall\, c > b\, (a \wedge c \not\leq b)$ (pues $a \wedge c \leq b \implies a \wedge c = a \wedge (a \wedge c) \leq a \wedge b = 0$ con lo que $a \wedge c = 0$; además, si $a \wedge c = 0$, entonces obviamente $a \wedge c \leq b$). Lo anterior también es equivalente a que $a \wedge b = 0$ y $\forall\, c > b\, (b < b \vee (a \wedge c) = c \wedge (a \vee b))$, ya que siempre ocurre que $b \leq b \vee (a \wedge c)$ y $b = b \vee (a \wedge c) \iff a \wedge c \leq b$. Lo último nos dice justamente que $a \wedge b = 0$ y el elemento $a \vee b$ es esencial en el intervalo $1/b$. $\square$

En esta demostración vemos que la modularidad (ver 1.3.1) fuerza a que haya un diagrama como éste:

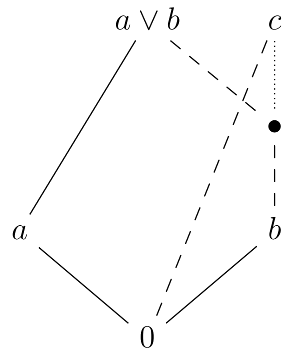


También podemos presentar la demostración de otra manera:

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Supongamos que b es seudocomplemento de a en L, pero $a \vee b$ no es esencial en $1/b$. Entonces existe algún $c > b$ tal que $(a \vee b) \wedge c = b$, pues sabemos que siempre ocurre que $b \leq b \vee (a \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$ (ver 1.3.2). Pero entonces también $b \vee (a \wedge c) = b$, así que $a \wedge c \leq b$ y luego $(a \wedge c) \vee (a \wedge b) = a \wedge c > 0 = a \wedge b = (a \vee (a \wedge c)) \wedge b$, en contradicción con la desigualdad establecida en 1.3.2, pues ésta nos dice que $(a \wedge c) \vee (a \wedge b) \leq (a \vee (a \wedge c)) \wedge b$. En otras palabras, bajo esta suposición, tendríamos un diagrama como el siguiente, en el cual se tendría $0 = a \wedge b < a \wedge c \leq a, b$, lo cual es imposible en una retícula.



($\Longleftarrow$) Ahora supongamos que $a \vee b$ es esencial en $1/b$ y $a \wedge b = 0$, pero b no es seudocomplemento de a. Entonces existe $c > b$ tal que $a \wedge c = 0$ pero $(a \vee b) \wedge c > b$, con lo que tendríamos una retícula no modular, pues $0, a, b, (a \vee b) \wedge c, a \vee b$ formarían un pentágono (ver 1.3.8) :



$\square$

Corolario 2.1.7. *Sea L una retícula modular con 0. Si b es seudocomplemento de a en L, entonces $a \vee b$ es esencial en L.*

Demostración. Sea $0 \neq x \in L$. Distinguimos dos casos:

Si $x \leq b$, entonces $x \leq a \vee b$ y $(a \vee b) \wedge x = x \neq 0$.

Por otro lado, si $x \nleq b$, entonces $b < b \vee x$ (pues $b \leq b \vee x$ y $b = b \vee x$ implica $b \geq x$). Además, como vimos en la demostración del resultado anterior, tenemos que $\forall\, c > b\,(b < b \vee (a \wedge c) = c \wedge (a \vee b))$, de modo que $b < (b \vee x) \wedge (a \vee b) = b \vee ((a \vee b) \wedge x)$, lo cual nos dice que $(a \vee b) \wedge x \neq 0$. $\square$

Las retículas inductivas (ver 1.8.11) son seudocomplementadas. Esta clase de retículas incluye a las continuas superiormente (ver 1.8.12), en particular a las compactamente generadas (ver 1.8.4). Daremos la demostración de este hecho, partiendo de las compactamente generadas, para tener una mayor claridad de cómo se relacionan estos conceptos.

Proposición 2.1.8. *Una retícula L compactamente generada es seudocomplementada.*

Demostración. Sea $a \in L$. Como L es completa (por ser compactamente generada), entonces $\wedge L = 0 \in L$, el cual cumple que $a \wedge 0 = 0$. Así, el conjunto parcialmente ordenado $A \ddot{=} \{x \in L \mid a \wedge x = 0\}$ es no vacío. Veamos ahora que toda cadena en él está acotada superiormente, para luego aplicar el Lema de Zorn, el cual nos proporcionará un seudocomplemento de a: si C es una cadena en A y $a \wedge (\vee C) \neq 0$, entonces hay un elemento compacto, digamos c, tal que $0 \neq c \leq a \wedge (\vee C)$. Esto último pues como L es compactamente generada, $a \wedge (\vee C) = \bigvee_{I} c_i$ con c_i compacto; luego, como $a \wedge (\vee C) \neq 0$, $c_i \neq 0$ para alguna $i \in I$, y es este elemento al que llamamos c antes. Así, $c \leq a, \vee C$, y al ser una cadena un conjunto dirigido superiormente, resulta que $c \leq x_0 \in C$, y luego $0 < c \leq a \wedge x_0$, lo cual contradice que $x_0 \in A$. Entonces debe tenerse $a \wedge (\vee C) = 0$, con lo que se cumplen las hipótesis del Lema de Zorn y A tiene al menos un elemento máximo; esto es, existe un seudocomplemento de a en L. $\square$

Ejemplo 2.1.9. Usando el ejemplo 1.7.16 y la proposición anterior, vemos que para todo R–módulo M, $S_R(M)$ es seudocomplementada.

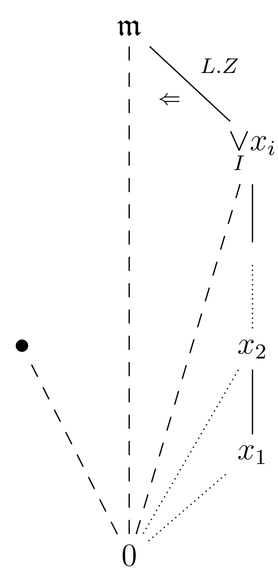
La proposición anterior es de hecho consecuencia de los siguientes dos resultados más generales (ver 1.8.4 y 1.8.12)

Proposición 2.1.10. *Toda retícula continua superiormente es seudocomplementada.*

Demostración. Sean $a \in L$ continua superiormente y $A \ddot{=} \{x \in L \mid a \wedge x = 0\}$. Claramente $0 \in A$ y si $\{x_i\}_I$ es cualquier cadena en A, entonces $a \wedge (\bigvee_I x_i) = \bigvee_I (a \wedge x_i) = \vee\{0\} = 0$ ya que L es continua superiormente y toda cadena es un conjunto dirigido superiormente. Esto nos dice que $\bigvee_I x_i \in A$ y obviamente este elemento es una cota superior para la cadena. Entonces estamos en condiciones de aplicar el Lema de Zorn, que asegura la existencia de máximos en A, que no son otra cosa que los seudocomplementos de a en L. □

En el argumento anterior, lo importante es que puede asegurarse que si $a \wedge x_i = 0$ para alguna cadena $\{x_i\}_I \subseteq L$, entonces $a \wedge (\bigvee_I x_i) = 0$. Luego puede aplicarse el Lema de Zorn para obtener un seudocomplemento de a en L. Tomando en cuenta lo anterior, la proposición siguiente es consecuencia inmediata de la definición 1.8.11:

Proposición 2.1.11. *Toda retícula inductiva es seudocomplementada.*



Teorema 2.1.12. *Sean L una retícula modular continua superiormente y b un seudocomplemento de a en L. Entonces existe $c \in L$ máximo con respecto a las propiedades $a \leq c$, $b \wedge c = 0$, que es una extensión esencial máxima de a en L. Más aún, b y c son mutuamente seudocomplementos.*

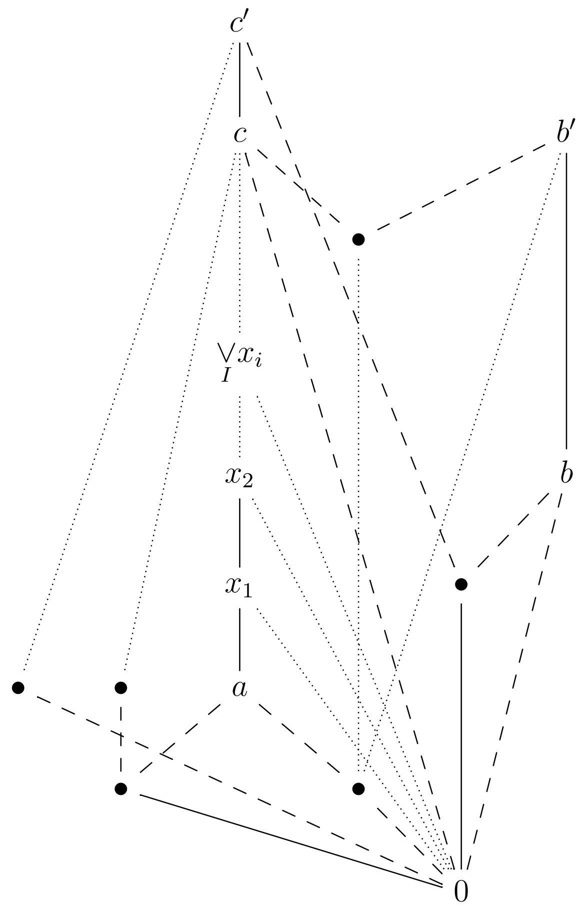
Demostración. Primero mostramos la existencia de tal elemento c:

Consideremos el conjunto $A \ddot{=} \{x \in L \mid a \leq x\,,\, b \wedge x = 0\}$ parcialmente ordenado por la contención, y una cadena $\{x_i\}_I \subseteq A$. Obviamente, $a \in A \neq \emptyset$, y por la continuidad superior de L, $b \wedge (\bigvee_I x_i) = \bigvee_I (b \wedge x_i) = \vee\{0\} = 0$. Además es claro que $a \leq \bigvee_I x_i$, de modo que $\bigvee_I x_i \in A$ y podemos aplicar el Lema de Zorn para asegurar la existencia de un máximo en A, al cual llamamos c.

Veamos que a es esencial en el intervalo $c/0$: supongamos que para algún $y \leq c$, $a \wedge y = 0$. Demostraremos que $y \leq b$, y así obtendremos $y = b \wedge y \leq b \wedge c = 0$, con lo cual a es esencial en $c/0$. En efecto, $y \leq b$, ya que $b \vee y = b$ pues $a \wedge (b \vee y) = (a \wedge c) \wedge (b \vee y) = a \wedge (c \wedge (b \vee y)) = a \wedge (y \vee (b \wedge c)) = a \wedge y = 0$ y $b \vee y \geq b$, que es seudocomplemento de a en L.

Ahora mostramos la maximidad de c como extensión esencial de a: si $c' > c$ es otra extensión esencial de a en L, entonces $b \wedge c' \neq 0$, y luego $a \wedge (b \wedge c') \neq 0$ (pues a es esencial en $c'/0$). Pero entonces $a \wedge b \geq a \wedge (b \wedge c') > 0$, lo cual contradice que b sea un seudocomplemento de a ($a \wedge b = 0$).

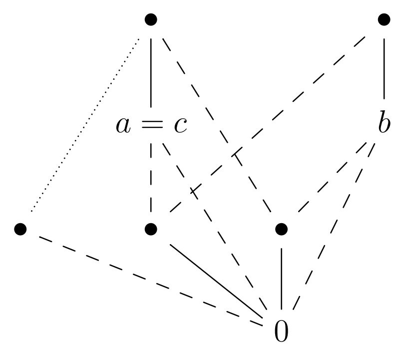
Por último, es claro que el elemento c es un seudocomplemento de b en L, y por otro lado, si $b' > b$, tenemos: $0 \neq a \wedge b' \leq c \wedge b'$, así que b es máximo con respecto a la propiedad $c \wedge u = 0\,,\, u \in L$. $\square$



Como corolario del resultado anterior y la proposición 2.1.5, obtenemos otra caracterización de los seudocomplementos en la clase de las retículas modulares continuas superiormente.

Corolario 2.1.13. *En una retícula modular continua superiormente L, los seudocomplementos (en L) son precisamente los elementos esencialmente cerrados (en L).*

Demostración. Por la recién mencionada proposición, basta mostrar que los elementos esencialmente cerrados de L son seudocomplementos (de algún elemento) en L. Sea entonces a esencialmente cerrado en L. Por la proposición 2.1.10, existe b un seudocomplemento de a en L. Aplicando entonces el teorema anterior, tenemos un $c \in L$ seudocomplemento de b, que es a la vez una extensión esencial de a en L. Pero entonces $a = c$, por ser esencialmente cerrado, y éste es un seudocomplemento (de b) en L.



□

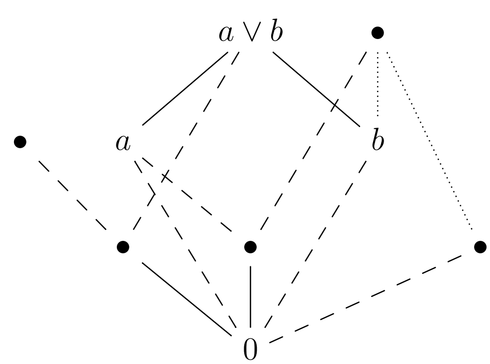
Combinando este corolario con el teorema, obtenemos directamente:

COROLARIO 2.1.14. *Sea b un seudocomplemento de a en una retícula modular continua superiormente. Entonces a es esencialmente cerrado si y sólo si a es seudocomplemento de b.*

PROPOSICIÓN 2.1.15. *En una retícula modular seudocomplementada L, un elemento b es seudocomplemento de a en L si y sólo si $a \wedge b = 0$, $a \vee b$ es esencial en L y b es esencialmente cerrado en L.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Se da por la definición de seudocomplemento, el corolario 2.1.7 y la proposición 2.1.5.

($\Longleftarrow$) Usaremos la caracterización de los seudocomplementos establecida en 2.1.6, para lo cual es suficiente demostrar que $a \vee b$ es esencial en $1/b$. Supongamos lo contrario. Entonces existe algún elemento $u > b$ tal que $(a \vee b) \wedge u = b$. Por otro lado, como b es esencialmente cerrado en L, b no es esencial en $u/0$, así que existe un $0 < v \leq u$ tal que $b \wedge v = 0$. Pero entonces $0 = b \wedge v = (a \vee b) \wedge u \wedge v = (a \vee b) \wedge v$, lo cual contradice la hipótesis de que $a \vee b$ sea esencial en L. Así, debe ocurrir que $a \vee b$ es esencial en $1/b$, y luego b es seudocomplemento de a en L.



□

2.2. El zoclo.

En general, en una retícula podemos tomar un elemento, al que fijamos como 0 , y tratar de encontrar átomos por arriba de él, para luego tomar el objeto más pequeño que los contenga a todos (en el sentido de orden; no estrictamente de contención) ; es decir, se trata de ir agregando recursivamente los supremos de los elementos que son *simples* a partir del elemento anterior.

A lo largo de esta sección y la siguiente, L denotará una retícula con cero.

DEFINICIÓN 2.2.1. El **zoclo** de L, denotado por $z(L)$, es el supremo de todos los átomos de L.

Establecemos algunas de sus propiedades básicas:

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Sean* $a, b \in L \supseteq \{a_i\}_I$. *Entonces:*

(1) $z(a/0) \leq a$
(2) $a \leq b \implies z(a/0) \leq z(b/0)$
(3) $z((\bigwedge_I a_i)/0) \leq \bigwedge_I z(a_i/0)$
(4) $\bigvee_I z(a_i/0) \leq z((\bigvee_I a_i)/0)$

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación es obvia. Para la segunda, basta notar que todo átomo en $a/0$ es también un átomo en $b/0$, pues $b \geq a$.

(3.) Por la propiedad 2. , para cada i, $z((\bigwedge_I a_i)/0) \leq z(a_i)$ (pues $\bigwedge_I a_i \leq a_i$). Esto implica que $z((\bigwedge_I a_i)/0) \leq \bigwedge_I z(a_i/0)$.

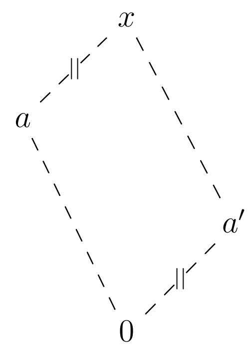
(4.) Aplicando de nuevo la propiedad 2. , esta vez a $a_i \leq \bigvee_I a_i$, obtenemos, para cada i, la desigualdad $z(a_i/0) \leq z((\bigvee_I a_i)/0)$, la cual implica que $\bigvee_I z(a_i/0) \leq z((\bigvee_I a_i)/0)$. □

DEFINICIÓN 2.2.3. Si todo elemento de L es un supremo de átomos, diremos que L es **generada por átomos** o **localmente atómica**, y si todo intervalo de L de la forma $x/0$ con $x > 0$ contiene al menos un átomo, diremos que L es **atómica**.

EJEMPLO 2.2.4. Obviamente toda retícula artiniana es atómica.

PROPOSICIÓN 2.2.5. *Si un intervalo de la forma* $x/0$ *en una retícula modular complementada tiene un máximo propio, entonces tiene también un átomo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea x un elemento que contiene un átomo dual a. Consideremos el intervalo $x/0$. Por 1.5.7, existe un complemento de a en $x/0$, digamos a'. Entonces, aplicando 1.3.10 obtenemos: $x/a = a \vee a'/a \cong a'/a \wedge a' = a'/0$, así que $a'/0$ es simple; es decir, a' es un átomo.



□

Lema 2.2.6. *Una retícula modular compactamente generada y complementada es generada por átomos.*

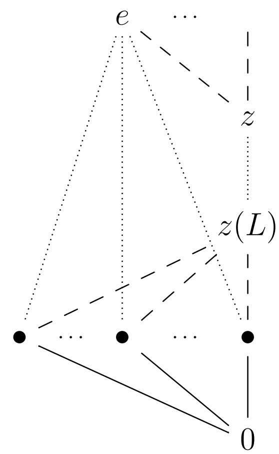
Demostración. Todo elemento compacto c que no es un átomo, contiene al menos un coátomo: esto se sigue de aplicar el lema 1.7.12 a la subretícula compacta $c/0$. Además, aplicando a este intervalo la proposición anterior, vemos que c contiene algún átomo. Así, como la retícula en cuestión es compactamente generada, concluimos que todo elemento $x \neq 0$ contiene por lo menos un átomo.

Ahora, para $x \neq 0$, definimos $z_x \doteq \bigvee \{a \mid 0 \prec a \leq x\}$, el cual claramente cumple que $x \geq z_x$. Veamos que se da la igualdad: si $z_x < x$, por la proposición 1.5.7 podemos encontrar un complemento c de z_x en el intervalo $x/0$. Pero $c \neq 0$ (pues de otro modo $x = z_x \vee c = z_x < x$) y luego c contiene algún átomo, con lo que $z_x \wedge c \neq 0$, lo cual es imposible al ser c un complemento de z_x en $x/0$. $\therefore$ $x = z_x$ y la retícula es generada por átomos. □

Lema 2.2.7. *Si e es esencial en L, entonces $z(L) \leq e$.*

Demostración. Si a es un átomo de L, entonces es claro que $a \wedge e \in \{0, a\}$. Además, como e es esencial y $a \neq 0$ (pues $0 \prec a$), $a \wedge e \neq 0$, de modo que $a \wedge e = a$. Así, $a \leq e$. Como esto ocurre para cualquier átomo, entonces $z(L) \leq e$. □

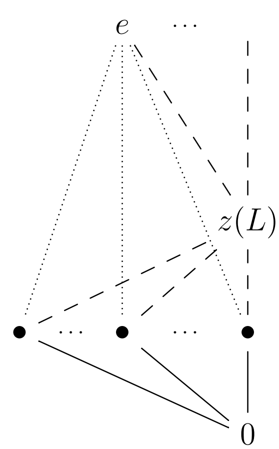
Tenemos entonces el siguiente diagrama, donde llamamos z al ínfimo de todos los esenciales en L.



Teorema 2.2.8. *En una retícula modular compactamente generada L, el zoclo es el ínfimo de todos los elementos esenciales.*

Demostración. Sea $z \doteq \wedge\{x \mid x \text{ es esencial en } L\}$. El lema anterior nos dice que $z(L) \leq z$. Para establecer la desigualdad contraria, aplicaremos el lema 2.2.6 a la subretícula $z/0$ para ver que es generada por átomos. Así, z será un supremo de átomos, de lo cual es inmediato que $z \leq z(L)$.

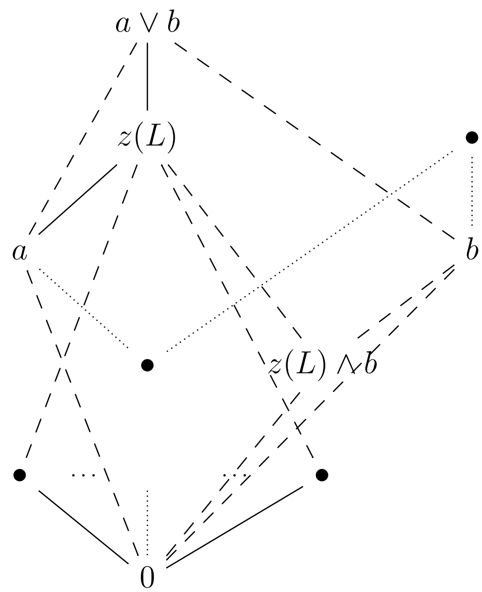
Veamos entonces que $z/0$ cumple con las hipótesis de dicho lema: por 1.3.3, $z/0$ es modular, y por 1.7.15, es compactamente generada. Por otro lado, como L es seudocomplementada (ver 2.1.8), si $x \in z/0$, entonces podemos tomar un seudocomplemento suyo en L, digamos c. Por 2.1.7 sabemos que $x \vee c$ es esencial en L, así que $z \leq x \vee c$, con lo cual $z = z \wedge (x \vee c) = x \vee (z \wedge c)$. Pero $x \wedge (z \wedge c) \leq x \wedge c = 0$; es decir, $z \wedge c$ es un complemento de x en el intervalo $z/0$ y luego éste es complementado, con lo que se cumplen las suposiciones de 2.2.6 y como dijimos antes, $z \leq z(L)$. Con lo anterior,$z = z(L)$, que es lo que queríamos demostrar.



□

Corolario 2.2.9. *En una retícula modular compactamente generada L, la subretícula $z(L)/0$ es complementada.*

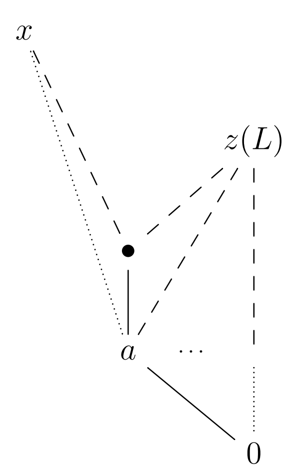
Demostración. Como en la demostración del lema anterior, $z(L)/0$ es modular y compactamente generada; por otro lado, L es seudocomplementada (2.1.8). Sean entonces $a \in z(L)/0$ y b un seudocomplemento de a en L. Por 2.1.6, $a \vee b$ es esencial en L, y por el teorema anterior $a \vee b \geq z(L) = z(L) \wedge (a \vee b) = a \vee (z(L) \wedge b)$. Además, $a \wedge (z(L) \wedge b) \leq a \wedge b = 0$. $\therefore$ $a \oplus (z(L) \wedge b) = z(L)$.



□

Proposición 2.2.10. *Una retícula atómica completa tiene zoclo esencial.*

Demostración. Sea $x > 0$. Entonces, por hipótesis, hay un átomo $a \leq x$, así que $0 < a \leq z(L) \wedge x$, pues por definición $a \leq z(L)$.



□

Usando la proposición y el teorema anteriores tenemos directamente:

COROLARIO 2.2.11. *En una retícula modular atómica y compactamente generada, el zoclo es el menor elemento esencial.*

Por último, observemos que el zoclo nos da una forma de ir ascendiendo en una retícula, por los *escalones* más pequeños que contienen todo lo que hay entre cada uno y su antecesor: se comienza por el 0, luego se considera $z(L)$, luego $z(1/z(L))$, etc. . Esta idea da pie a construir por recursión una cadena no decreciente de zoclos, a la que se conoce como serie de Loewy:

DEFINICIÓN 2.2.12. Para una retícula con 0, definimos su **serie de Loewy** como sigue: $z_0(L) \doteqdot 0$, $z_{\alpha+1}(L) \doteqdot z(1/z_\alpha(L))$ para cualquier ordinal α, y $z_\alpha(L) \doteqdot \bigvee_{\xi<\alpha} z_\alpha(L)$ si α es un ordinal límite.

Es obvio que $z_0(L) \leq z_1(L) \leq \ldots$, y que existe algún ordinal α tal que $z_\alpha(L) = z_\eta(L)$ para todo $\eta > \alpha$; más aún, que $|\alpha| \leq| L|$. Tomando en cuenta que los ordinales están bien ordenados, tenemos naturalmente la siguiente noción de *longitud* :

DEFINICIÓN 2.2.13. Al mínimo ordinal con la propiedad anterior, se le llama **longitud de Loewy de L**.

2.3. Torsión.

El zoclo se construye con la finalidad de saber hasta dónde podemos llegar en una retícula modular, subiendo de dos en dos *niveles* enteros, abarcando todo en el medio. De este modo, es una herramienta natural para medir si una retícula modular contiene átomos; más aún, hasta qué *altura* existen átomos en una retícula. Esto nos lleva a pensar en la siguiente propiedad para retículas modulares: que a cualquier *altura* puedan encontrarse átomos. En la teoría de retículas, a esta propiedad se le llama torsión. Traducida a módulos, la propiedad define la clase de los semiartinianos, que son aquéllos para los cuales una imagen homomórfica no nula suya, siempre contiene algún simple.

DEFINICIÓN 2.3.1. Una retícula tiene **torsión** (o es de torsión, o semiartiana) si para todo $1 \neq a \in L$, el intervalo $1/a$ contiene algún átomo. Si para todo $0 \neq a \in L$ el intervalo $a/0$ es infinito, entonces se dice que L es **libre de torsión**. Así, una retícula no es semiartiniana si y sólo si tiene algún $x < 1$ tal que $1/x$ es libre de torsión, y en particular toda retícula artiniana es semiartiniana.

OBSERVACIÓN 2.3.2. La clase de las retículas semiartinianas es cerrada bajo subretículas de la forma $1/a$ con $a \neq 1$. En particular, la clase de los módulos semiartinianos es cerrada bajo cocientes (por el Teorema de la Correspondencia; ver 1.2.15).

Comenzamos con una caracterización:

PROPOSICIÓN 2.3.3. *Una retícula modular L es semiartiniana si y sólo si existe un ordinal σ tal que $z_\sigma(L) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Como L es semiartiniana, para todo ordinal α, el intervalo $1/z_\alpha(L)$ contiene átomos, lo cual equivale a decir que $z_{\alpha+1}(L) > z_\alpha(L)$. Entonces la serie de Loewy de L es estrictamente creciente, y eventualmente llega al 1; es decir, $z_\sigma(L) = 1$ para algún $|\sigma| \leq | L|$.

($\Longleftarrow$) Procedemos por inducción transfinita:

Si $0 = z_0(L) = 1$ entonces $L = \{0\}$ y trivialmente es semiartiniana.

Si el enunciado es verdadero para algún ordinal α y $z_{\alpha+1}(L) = 1$, tomemos $1 > x \in L$. Notemos que podemos suponer $z_\alpha(L) < z_{\alpha+1}(L)$, pues de otro modo habríamos terminado. Primero, supongamos que $x \leq z_\alpha(L)$. Si $x < z_\alpha(L)$, por la hipótesis de inducción $z_\alpha(L)/x$ contiene átomos, así que $1/x$ también; por otro lado, si $x = z_\alpha(L)$, obviamente $1/x$ contiene átomos, pues $1 = z_{\alpha+1}(L) = z(1/z_\alpha(L))$. Ahora, consideremos el caso en que $x \not\leq z_\alpha(L)$. Entonces $x > x \wedge z_\alpha(L) \leq z_\alpha(L)$ y por el argumento anterior, $z_\alpha(L)/x \wedge z_\alpha(L) \underset{\text{mod.}}{\cong} x \vee z_\alpha(L)/x$ contiene átomos si $x \wedge z_\alpha(L) < z_\alpha(L)$, o bien $x \wedge z_\alpha(L) = z_\alpha(L) < x$. En este último caso, notemos que hay algún átomo en $1/z_\alpha(L)$ independiente de x, pues de otro modo x contendría a tales átomos y $x \geq z(1/z_\alpha(L)) = 1$. Entonces, si a es un átomo en $1/z_\alpha(L)$ independiente de x, tenemos que $a/z_\alpha(L) = a/(a \wedge x) \underset{\text{mod.}}{\cong} a \vee x/x$, de modo que $1/x$ contiene un átomo.

Por último, supongamos que la implicación es verdadera para todo $\xi < \alpha$, con α un ordinal límite, y que $z_\alpha(L) \doteqdot \bigvee_{\xi<\alpha} z_\xi(L) = 1 > x$. Primero notemos que si hay algún ξ_0 tal que $x < z_{\xi_0}(L)$, la hipótesis de inducción implica que $z_{\xi_0}(L)/x$ y por lo tanto $1/x$ tienen átomos. Por otro lado, si $x = z_{\xi_0}(L)$, entonces, como $x < 1 = \bigvee_{\xi<\alpha} z_\xi(L)$, para todo $\eta > \xi_0$ debe ocurrir $x < z_\eta(L)$, pues la serie de Loewy es no dectreciente. Así, hemos cubierto el caso $x \leq z_{\xi_0}(L)$ para algún ξ_0. Si en cambio, $\forall\, \xi < \alpha\, (x \not\leq z_\xi(L))$, entonces $\forall\, \xi < \alpha\, (x > x \wedge z_\xi(L) \leq z_\xi(L))$, pero debe haber un ξ_0 tal que $x \wedge z_{\xi_0}(L) < z_{\xi_0}(L)$, pues de otro modo $x \geq z_\xi(L)$ para todo $\xi < \alpha$, lo que implicaría $x \geq z_\alpha(L) = 1$. Luego, por el argumento para el caso $x < z_{\xi_0}(L)$, $z_{\xi_0}(L)/x \wedge z_{\xi_0}(L) \cong x \vee z_{\xi_0}(L)/x$ contiene átomos, con lo cual $1/x$ también. $\square$

LEMA 2.3.4. *Una retícula modular seudocomplementada y semiartiniana es atómica.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $a > 0$ y b un seudocomplemento suyo. Entonces $b < 1$, pues de otro modo $a = a \wedge b = 0$. Luego, $1/b$ contiene un átomo, digamos u, para el cual se tiene $a \wedge u \neq 0$. Veamos que este elemento es un átomo en el total de la retícula: si $0 < x \leq a \wedge u$, entonces $b < b \vee x \leq b \vee u = u$, donde la primera desigualdad se da pues $b = b \vee x \Longrightarrow x \leq b \Longrightarrow x \leq a \wedge b = 0$, lo que contradice la suposición sobre x. Más aún, $b < b \vee x \leq u \Longrightarrow b \vee x = u$, así que $a \wedge u = u \wedge (a \wedge u) = (b \vee x) \wedge (a \wedge u) = x \vee (b \wedge a \wedge u) = x \vee 0 = x$ y por tanto $0 \prec a \wedge u \leq a$. $\square$

Con este lema y la proposición2.2.10 obtenemos directamente:

PROPOSICIÓN 2.3.5. *Una retícula modular seudocomplementada y semiartiniana tiene zoclo esencial.*

En vista del lema anterior, las retículas semiartinianas también pueden caracterizarse de manera análoga a como se caracterizan las artinianas y neterianas (ver1.6.5):

PROPOSICIÓN 2.3.6. *Sean L una retícula modular continua superiormente y $a \in L$. Entonces L es semiartiniana si y sólo si los intervalos $1/a$, $a/0$ lo son.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Ya hicimos notar que todo intervalo $1/a$ de cualquier retícula semiartiniana es a su vez semiartiniano. Por otro lado, si $x < a$, entonces $1/x$ es semiartiniana y por tanto atómica (lema 2.3.4 y proposición 2.1.10). En consecuencia, hay un átomo u en a/x; es decir, $a/0$ es semiartiniana.

($\Longleftarrow$) Sea $b < 1$. Si $a \leq b$, entonces $1/b$ tiene átomos, pues por hipótesis $1/a$ es de torsión. Por otro lado, si $a \nleq b$, entonces $a \wedge b < a$ y $a/a \wedge b$ es de torsión, pues por hipótesis $a/0$ es de torsión. Con esto, $a/a \wedge b$ contiene átomos. Pero como L es modular, entonces $a/a \wedge b \cong a \vee b/b$, con lo cual $1/b$ también contiene átomos. □

Como consecuencia de lo anterior, los módulos semiartinianos forman una clase de Serre.

PROPOSICIÓN 2.3.7. *Sean L una retícula modular y $a = \bigvee_I a_i$. Si cada $a_i/0$ es semiartiniana, entonces también lo es $a/0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x < a$. Si $\forall\, i\, (a_i \leq x)$, entonces se tendría $a \leq x$, lo cual contradice la elección de x. Entonces $a_i \nleq x$ para algún índice i. Esto equivale a decir que $a_i \wedge x < a_i$, lo cual implica que $a_i/a_i \wedge x$ contiene átomos. Pero $a_i/a_i \wedge x \cong a_i \vee x/x$, con lo que a/x también contiene átomos. □

COROLARIO 2.3.8. *Una suma de módulos semiartinianos, es a su vez semiartiniana.*

Recordamos que todo R–módulo es cociente de una suma directa de copias de R. Entonces, aplicando el Teorema de la Correspondencia y el corolario anterior, tenemos:

COROLARIO 2.3.9. *Todo módulo izquierdo sobre un anillo semiartiniano izquierdo, es a su vez semiartiniano.*

Ahora damos una condición suficiente para que una retícula semiartiniana sea artiniana, pero antes un lema:

LEMA 2.3.10. *Sea a un elemento de una retícula modular con 0 y 1. Si $a/0$ es artiniana y u es un átomo en $1/a$, entonces también $u/0$ es artiniana.*

Demostración. Sea $x_1 \geq x_2 \geq \ldots$ una cadena en $u/0$. Si hay alguna n tal que $x_n \leq a$, como $a/0$ es artiniana, la sucesión debe ser finita. Si en cambio, para toda n se tiene $x_n \nleq a$, entonces $a < a \vee x_n \leq u$ y así $a \vee x_n = u$, para toda n. Además, si $x_i < x_j$, entonces $a \vee x_i = u = a \vee x_j$ y $a \wedge x_i \leq a \wedge x_j$, pero la igualdad de estos dos elementos implicaría, por la modularidad, que $x_i = x_j$ (ver 1.3.5). En consecuencia, si $x_i < x_j$, $a \wedge x_i < a \wedge x_j$, de modo que si $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ fuera una sucesión infinita, también lo sería la sucesión $\{a \wedge x_n\}_{\mathbb{N}}$, lo cual contradice la suposición sobre $a/0$. $\therefore$ $u/0$ cumple la CCD y es, por tanto, artiniana. $\square$

Teorema 2.3.11. *Una retícula modular semiartiniana y neteriana es artiniana (y por tanto, de longitud finita).*

Demostración. Como la retícula es neteriana, hay un elemento a máximo con la propiedad de que $a/0$ sea artiniana. Mostraremos que necesariamente $a = 1$. De no ser así, el intervalo $1/a$ contendría un átomo u. Pero por el lema anterior, $u/0$ resulta ser también artiniano, en contradicción con la maximidad de a. $\square$

Definición 2.3.12. Sea L una retícula con 0 y 1. $a \in L$ es un **elemento de torsión** si $a/0$ es de torsión (semiartiniana). Denotamos por $\tau(L)$ al conjunto de elementos de torsión de L.

Proposición 2.3.13. *Sea L seudocomplementada y modular. Entonces:*

(1) Sean $b \leq a$. Entonces $a \in \tau(L)$ si y sólo si $b \in \tau(L)$ y a/b es semiartiniana.
(2) Si $\{a_i\}_I \subseteq \tau(L)$, entonces $\bigvee_I a_i \in \tau(L)$.

Demostración. Para la primera propiedad, basta aplicar 2.3.6 a la retícula $a/0$.

Para la segunda: si $x < \bigvee_I a_i$, entonces $a_j \nless x$ para alguna $j \in I$ (de otro modo, $x \geq \bigvee_I a_i$). Así, se tiene $x \wedge a_j < a_j$ y luego $a_j/x \wedge a_j \underset{\text{mod.}}{\cong} x \vee a_j/x$ contiene algún átomo, y por tanto $(\bigvee_I a_i)/x$ también. $\square$

Las propiedades enunciadas en esta proposición son las de una teoría de torsión hereditaria.

Definición 2.3.14. Se define la **parte de torsión** de una retícula L como el supremo de todos sus elementos de torsión, y se denota por $t(L)$. En símbolos: $t(L) = \vee\tau(L)$.

Corolario 2.3.15. *Si L es modular y completa, entonces $\tau(L) = t(L)/0$.*

Demostración. obviamente se da $\subseteq$. Por otro lado, por la proposición anterior, $t(L) \in \tau(L)$, y si $x \leq t(L)$, entonces $x \in \tau(L)$. $\square$

Proposición 2.3.16. *Sea L modular y completa. Entonces*$z(L) \leq t(L)$*, y* $z(L) = 0$ *si y sólo si* $t(L) = 0$*. Más aún, si* α *es la longitud de Loewy de* L*, entonces* $t(L) = z_\alpha(L) = \bigvee_{\xi \leq \alpha} z_\xi(L)$.

Demostración. La primera desigualdad se da por la proposición anterior, pues los átomos son trivialmente elementos de torsión, así que $z(L) \in \tau(L)$ y luego $z(L) \leq t(L)$.

($\Longleftarrow$) Es trivial por la desigualdad anterior.

($\Longrightarrow$) Si $x > 0$, entonces, como $z(L) = 0$, $x/0$ no puede tener átomos. Así, $t(L) = 0$.

Ahora establecemos la segunda parte de la proposición: es obvio que puede escribirse $z_\alpha(L) = \bigvee_{\xi \leq \alpha} z_\xi(L)$, pues los zoclos forman una cadena. Veamos primero que $t(L) \geq z_\alpha(L)$. Para esto, mostraremos que $t(L) \geq z_\xi(L)$ para todo $\xi \leq \alpha$, para lo cual basta ver que $z_\xi(L) \in \tau(L)$. Procedemos por inducción:

Si L tiene longitud de Loewy 0, obviamente $z_0(L) \doteqdot 0 = z_1(L) \doteqdot z(L)$, y por lo antes dicho, $t(L) = 0$.

Supongamos ahora que el enunciado es verdadero para α, y tomemos L con longitud de Loewy $\alpha + 1$ y $x < z_{\alpha+1}(L)$. Veamos que $z_{\alpha+1}(L)/x$ tiene átomos: si $x \not\geq z_\alpha(L)$, entonces $x \wedge z_\alpha(L) < z_\alpha(L)$ y por la hipótesis de inducción $z_\alpha(L)/x \wedge z_\alpha(L) \underset{\text{mod.}}{\cong} x \vee z_\alpha(L)/x$ contiene átomos; si $x \geq z_\alpha(L)$, como $z_{\alpha+1}(L) \doteqdot z(1/z_\alpha(L))$, por la primera parte de la proposición $z_{\alpha+1}(L) \leq t(1/z_\alpha(L))$ y luego $z_{\alpha+1}(L)/z_\alpha(L)$ es de torsión, así que $z_{\alpha+1}(L)/x$ tiene átomos. $\square$

Corolario 2.3.17. *Si para $a \in L$ modular y completa, $t(1/a) = a$, entonces $a \geq t(L)$.*

Demostración. Veamos que $\forall\, x \in \tau(L)\, (x \leq a)$:

Sea $x \in \tau(L)$. Por la proposición anterior, la hipótesis implica que $z(1/a) = a$, que equivale a que $1/a$ no contenga átomos. Entonces el intervalo $a \vee x/a \underset{\text{mod.}}{\cong} x/a \wedge x$ no contiene átomos, y como x es de torsión, debe ocurrir que $x = a \wedge x$, que es lo mismo que decir que $x \leq a$. $\therefore$ $t(L) \doteqdot \bigvee \tau(L) \leq a$. $\square$

Es obvio que para una retícula L con 0, $t(t(L)/0) = t(L)$. Además, un morfismo $L \overset{f}{\twoheadrightarrow} L'$ suprayectivo de retículas con 0 se restringe a un morfismo $\tau(L) \to \tau(L')$: $x \in \tau(L) \iff x \leq t(L)$ y si $y = f(u) < f(x)$, como f es un morfismo de órdenes y existe $a \succ u$, existe $v > u$ tal que $f(v) \succeq f(a) \succeq f(u) = y$ donde alguna de las desigualdades es estricta. La siguiente propiedad, corolario de 2.3.16, nos dice que $t(\_)$ se comporta como un radical:

Corolario 2.3.18. *En una retícula modular completa, $t(1/t(L)) = t(L)$.*

Demostración. Por la equivalencia establecida en la proposición anterior, basta demostrar que $z(1/t(L)) = t(L)$. Para llegar a una contradicción, supongamos que $z(1/t(L)) > t(L)$; es decir, que hay un átomo u en $1/t(L)$. Veamos que $u \in \tau(L)$, con lo cual $u \leq t(L)$ y tendremos una contradicción (pues $u > t(L)$) :

Sea $x < u$. Si $x = t(L)$, entonces u es ya un átomo en u/x pues es un átomo en $1/t(L)$; si $x < t(L)$, como $t(L) \in \tau(L)$ (por 2.3.15), $t(L)/x$ tiene átomos, así que u/x también.

Por otro lado, si $x \not\leq t(L)$, entonces $u \geq x \vee t(L) > t(L)$, así que $u = x \vee t(L)$. Luego, $u/x \underset{\text{mod.}}{\cong} t(L)/x \wedge t(L)$ que tiene átomos ya que $t(L) \in \tau(L)$. Así, $u \in \tau(L)$ y terminamos. $\square$

La demostración anterior se basa en el hecho de que la torsión se preserva si extendemos la retícula por un átomo. Esto es parte del siguiente lema, para el que damos primero una definición:

Definición 2.3.19. Un elemento de una retícula es **libre de torsión** si no es cubierto por ningún otro elemento.

Lema 2.3.20. *Sean L modular con 0 y 1, $t \in \tau(L)$. Si $t \vee y \leq u$ y $z(u/y) = y$, entonces $t \leq y$; lo mismo si y es libre de torsión. Además, si $x \succ t$ entonces $x \in \tau(L)$.*

Demostración. Supongamos en el primer caso que $t \not\leq y$; es decir, que $t \wedge y < t$. Sea $t/t \wedge y \ni a$ un átomo. Entonces, como $a \succ t \wedge y$, $y = y \vee (t \wedge y) \underset{\text{mod.}}{\preceq} a \vee y \leq t \vee y \underset{\text{hip.}}{\leq} u$, de donde $a \vee y = y$ pues u/y no tiene átomos. Entonces $a \leq y\,, t$ y $a \leq t \wedge y$, lo cual es imposible. $\therefore\ t \leq y$.

Ahora, supongamos que y es un elemento libre de torsión; es decir, que $1/y$ no tiene átomos. Entonces, como siempre $t \vee y \leq 1$, podemos aplicar la parte anterior con $u = 1$ para concluir que $t \leq y$.

Por último, sean x un átomo en $1/t$ y $a \leq x$. Mostraremos que si a forma un cociente x/a sin átomos, entonces debe ocurrir $a = x$: si $z(x/a) = a$, como $t \vee a \leq x$, por la primera parte del lema $t \leq a$. Así, $t \leq a \leq x \succ t$ y $a \neq t$, pues de otro modo x sería un átomo en x/a. Entonces debe tenerse $a = x$, así que x es de torsión. $\square$

Proposición 2.3.21. *En una retícula modular, son libres de torsión los ínfimos de elementos libres de torsión.*

Demostración. Sea X un conjunto de elementos libres de torsión. Para llegar a una contradicción, supongamos que existe un a tal que $a \succ \wedge X$. Entonces para toda $x \in X$, $x = x \vee (\wedge X) \underset{\text{mod.}}{\preceq} x \vee a$, lo que implica que $x \vee a = x$, pues x es libre de torsión. Así, para toda $x \in X$, $a \leq x$ y luego $a \leq \wedge X$, lo cual es una contradicción. $\square$

Lema 2.3.22. *En toda retícula modular hay un elemento que es a la vez el mayor elemento de torsión y el menor elemento libre de torsión.*

Demostración. Como $t(L) \in \tau(L)$ (ver 2.3.13), por definición $t(L)$ es el mayor elemento de torsión. Por otro lado, si $a = \wedge\{y \mid y \text{ es libre de torsión}\}$, entonces por la proposición anterior a es el menor elemento libre de torsión. Aplicando nuestro último lema, $t(L) \leq a$. Si se diera la desigualdad estricta, por la minimidad de a, $t(L)$ no sería libre de torsión y habría $x \succ t(L)$. Pero el lema anterior también nos dice que $x \in \tau(L)$, lo que contradice la maximidad de $t(L)$. $\square$

Echando mano de esto, el resultado siguiente establece la existencia de un elemento libre de torsión particular para cada elemento de una retícula modular; tomamos de su enunciado la definición de tal elemento.

TEOREMA 2.3.23. *Sea $a \in L$ modular. Entonces existe un menor elemento libre de torsión $t(a) \geq a$. Más aún, $t(a)/a$ es de torsión (semiartianiana).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $t(a)$ el elemento garantizado por el lema previo para $1/a$. Luego, $t(a)$ es también el menor elemento libre de torsión en $t(a)/a$; es decir, $\forall x \in t(a)/a \, \exists u \succ x$, que es lo mismo que decir que $t(a)/a$ es de torsión. □

El teorema anterior, en conjunción con el lema 2.3.4 y el hecho de que la continuidad superior implica la existencia de seudocomplementos (2.1.10),tenemos:

COROLARIO 2.3.24. *Si $a \in L$ modular y continua superiormente, entonces $t(a)/a$ es atómica.*

Por último, mostramos que $t(\_)$ es compatible con $\_ \wedge \_$:

PROPOSICIÓN 2.3.25. *Sean $a, b \in L$ modular y continua superiormente. Entonces $t(a \wedge b) = t(a) \wedge t(b)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como no hay nadie que cubra a $t(a)\,,\, t(b)$ en L (ambos elementos son libres de torsión), entonces tampoco hay quien los cubra en el intervalo $1/(a \wedge b)$ y así $t(a \wedge b) \leq t(a)\,,\, t(b)\,,\, t(a) \wedge t(b)$, por la definición de $t(a \wedge b)$.

Para exhibir la desigualdad contraria aplicaremos el Lema de Zorn para ver que $t(a) \wedge b \leq t(a \wedge b)$. Luego, por simetría, $t(a) \wedge t(b) \leq t(a \wedge b)$. Sea $X \ddot{=} \{x \in L \mid a \leq x \leq t(a)\,,\, x \wedge b \leq t(a \wedge b)\}$. Notemos que trivialmente $a \in X$; además, si $C \subseteq X$ es una cadena, entonces $a \leq \vee C \leq t(a)\,,\, (\vee C) \wedge b \underset{\text{cont. sup.}}{=} \bigvee_{c \in C} (c \wedge b) \leq t(a \wedge b)$, de modo que $\vee C \in X$. Así, podemos aplicar el Lema de Zorn a X para obtener un máximo, digamos m, que para llegar a una contradicción supondremos estrictamente menor que $t(a)$. Como $t(a)/a$ es de torsión y $m < t(a)$, existe $m \prec u \leq t(a)$, así que $m \wedge b \underset{\text{mod.}}{\preceq} u \wedge b\,,\, t(a \wedge b) = (m \wedge b) \vee t(a \wedge b) \underset{\text{mod.}}{\preceq} (u \wedge b) \vee t(a \wedge b)$. Más aún, al ser $t(a \wedge b)$ libre de torsión, debe ocurrir $(u \wedge b) \vee t(a \wedge b) = t(a \wedge b)$; es decir, $u \wedge b \leq t(a \wedge b)$, con lo cual $u \in X$. Pero esto contradice la maximidad de m, por lo que m debe ser igual a $t(a)$. Entonces $t(a) \in X$ y por lo tanto $t(a) \wedge b \leq t(a \wedge b)$.

Ahora tomamos $Y \ddot{=} \{y \in L \mid b \leq y \leq t(b)\,,\, t(a) \wedge y \leq t(a \wedge b)\} \ni b$ y aplicamos el argumento anterior para concluir que $t(a) \wedge t(b) \leq t(a \wedge b)$. $\therefore\;\; t(a \wedge b) = t(a) \wedge t(b)$. □

2.4. Independencia y retículas semiatómicas.

DEFINICIÓN 2.4.1. Un subconjunto $\{x_i\}_I$ de elementos distintos de 0 de una retícula completa L es **independiente** si para toda $i \in I$, $a_i \wedge (\bigvee\limits_{j \neq i} a_j) = 0$. En esta situación, escribimos $\bigvee\limits_I a_i = \bigoplus\limits_I a_i$ y decimos que este supremo es una **suma directa**.

LEMA 2.4.2. *Sea L superiormente continua. Entonces $\{a_i\}_I$ es independiente si y sólo si todo subconjunto suyo lo es.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad de la condición es obvia. Para mostrar la suficiencia, notemos que por el lema 1.8.6, para cada $j \in I$ $a_j \wedge (\bigvee\limits_{i \neq j} a_i) = \bigvee\limits_{\substack{j \notin F \subseteq I \\ \text{fin.}}} (a_j \wedge (\bigvee\limits_F a_i)) \underset{\text{hip.}}{=} \vee 0 = 0$, así que $\{a_i\}_I$ es independiente. ☐

LEMA 2.4.3. *Sean L una retícula modular, $A \subseteq L \backslash \{0\}$ un conjunto independiente y $0 \neq x \notin A$. Entonces $A \cup \{x\}$ es independiente si y sólo si $x \wedge (\vee A) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente sólo hace falta establecer la suficiencia. Para ello, basta mostrar que para cada $a \in A$. $a \wedge (x \vee (\vee(A \backslash \{a\}))) = 0$. Notemos que

$$(\vee A) \wedge (x \vee (\vee(A\backslash\{a\}))) \underset{\text{mod.}}{=} (x \wedge (\vee A)) \vee (\vee(A\backslash\{a\})) = 0 \vee (\vee(A\backslash\{a\})) = \vee(A\backslash\{a\})$$

de modo que

$$\begin{aligned} a \wedge (x \vee (\vee(A\backslash\{a\}))) &= (a \wedge (\vee A)) \wedge (x \vee (\vee(A\backslash\{a\}))) = a \wedge ((\vee A) \wedge (x \vee (\vee(A\backslash\{a\})))) \\ &= a \wedge (\vee(A\backslash\{a\})) \underset{A \text{ ind.}}{=} 0 \end{aligned}$$

☐

DEFINICIÓN 2.4.4. Una retícula L es **semiatómica** si 1 es una suma de átomos de L.

Para un R–módulo M, $S_R(M)$ es semiatómica si y sólo si M es semisimple. Al final de la sección damos una caracterización de esta clase de retículas, análoga a la caracterización clásica de los módulos semisimples (ver, por ejemplo, 9.6 en **[1]**). Por lo pronto, nuestro primer teorema sobre esta clase de retículas nos da condiciones suficientes para que una retícula semiatómica sea complementada:

TEOREMA 2.4.5. *Toda retícula modular continua superiormente y semiatómica es complementada.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $1 \neq x \in L$ y $\{a_i\}_I$ el conjunto de los átomos de L. Como L es semiatómica, debe haber algún átomo tal que $a_{i_0} \wedge x = 0$, pues de otro modo $a_i \leq x$ para toda i, con lo cual $1 = \bigvee\limits_I a_i \leq x < 1$, lo cual es absurdo. Consideramos entonces $A = \{J \subseteq I \mid \{a_j\}_J$ es independiente y $x \wedge (\bigvee\limits_J a_j) = 0\} \ni \{i_0\}$ y $\{J_k\}_K$ una cadena en

A. Ésta nos da una cadena $\{\{a_j\}_{J_k}\}_K$ de conjuntos independientes. Ahora bien, como todo subconjunto finito de la unión de una cadena de esta forma es un subconjunto finito de algún $\{a_j\}_{J_{k_0}}$, el lema 2.4.2 nos garantiza que $\bigcup_K \{a_j\}_{J_k} = \{a_j\}_{\bigcup_K J_k}$ es independiente. Además, si escribimos $b_k = \bigvee_{J_k} a_j$, entonces $\{b_k\}_K$ es una cadena en L y

$$x \wedge (\bigvee_{\bigcup_K J_k} a_j) = x \wedge (\bigvee_K b_k) \underset{\text{cont. sup.}}{=} \bigvee_K (x \wedge b_k) = \vee 0 = 0$$

Así, $\bigcup_K J_k \in A$ y podemos aplicar el Lema de Zorn para obtener un elemento máximo en A, digamos M. Sea $b \ddot{=} \bigvee_M a_m$. Entonces $x \wedge b = 0$. A continuación mostraremos que $x \vee b = 1$, lo cual hace a b un complemento de x en L. Como L es semiatómica, basta verificar que $a_i \leq x \vee b$ para toda $i \in I$, pues entonces $1 \leq \bigvee_I a_i \leq x \vee b = 1$:

Supongamos que existe algún átomo a tal que $a \not\leq x \vee b$. Obviamente $a \notin M$, pues $\forall\, m \in M\, (a_m \leq b \leq x \vee b)$. Afirmamos que el subconjunto de I correspondiente a $\{a_m\}_M \cup \{a\}$ pertenece al conjunto A, en contradicción con la maximidad de M. Como $a \not\leq x \vee b$, entonces $a > a \wedge (x \vee b) = 0$ y luego $b = b \vee (a \wedge (x \vee b)) \underset{\text{mod.}}{=} (x \vee b) \wedge (a \vee b) \geq x \wedge (a \vee b) \leq x$ y $0 = x \wedge b \geq x \wedge (a \vee b) = 0$. Así, el conjunto de índices en cuestión cumple una de las condiciones para estar en A. Aplicaremos el lema 2.4.2para establecer que $\{a_m\}_M \cup \{a\}$ es independiente. Consideremos un subconjunto finito suyo, digamos F.

Si F no contiene a a, claramente $F \subseteq M$ y es independiente. Si contiene a a y J_F es el conjunto de índices en $F \cap \{a_m\}_M$, vemos que $a \wedge (\bigvee_{J_F} a_i) \leq a \wedge (\bigvee_M a_m) \ddot{=} a \wedge b \leq a \wedge (x \vee b) = 0$, y también $\forall\, j \in J_F\, (a_j \wedge (a \vee (\bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i)) = 0)$, pues si no $\exists\, j \in J_F (0 < a_j \wedge (a \vee (\bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i)) \leq a_j)$, lo que implica $a_j \wedge a \vee (\bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i) = a_j$, pues a_j es un átomo; lo último implica que $a \vee (\bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i) = a_j \vee (a \vee (\bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i)) \geq a_j \vee (\bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i)$. Si esta desigualdad fuera estricta, como $\bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i \underset{\text{mod.}}{\preceq} a \vee (\bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i)$, se tendría $a_j \vee (\bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i) = \bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i$; es decir, $a_j \leq \bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i$. Pero entonces $a_j \wedge (\bigvee_{J_F \setminus \{j\}} a_i) = a_j > 0$, lo cualcontradice que $\{a_i\}_{J_F}$ es independiente (al ser subconjunto de $\{a_m\}_M$). Entonces podemos concluir que $\{a_m\}_M \cup \{a\}$ es independiente y por tanto le corresponde un elemento de A que es mayor que M. Pero esto último es imposible, así que para todo átomo a_i de L, $a_i \leq x \vee b$ y así $x \vee b = 1$ y b es complemento de x. □

Corolario 2.4.6. *Sea L una retícula modular continua superiormente y semiatómica. Entonces hay un conjunto independiente de átomos cuyo supremo es 1.*

Demostración. Es una aplicación directa del teorema, tomando $a = 0$. □

Corolario 2.4.7. *Sea $a \in L$ modular continua superiormente y semiatómica. Entonces $1/a$ y $a/0$ también son semiatómicas.*

Demostración. Sea A el conjunto de los átomos de L. Entonces $1 \leq \vee A \leq \bigvee_{u \in A}(a \vee u) = 1$, pues $\forall\, u \in A\,(u \leq a \vee u)$. Notemos que para cada $u \in A$, $a \vee u = a$ o bien $a \vee u \underset{\text{mod.}}{\succ} a$. Entonces, si $A' = \{u \in A \mid a \vee u \neq a\}$, $1 = \bigvee_{u \in A}(a \vee u) = a \vee (\bigvee_{u \in A'}(a \vee u)) = \bigvee_{u \in A'}(a \vee u)$. $\therefore$ $1/a$ es semiatómica.

Por otro lado, por el teorema anterior podemos tomar un complemento de a en L, digamos c. Entonces $a/0 = a/a \wedge c \underset{\text{mod.}}{\cong} a \vee c/c = 1/c$, así que por el párrafo anterior, $1/c$ y por lo tanto $a/0$ son semiatómicas. $\square$

Observación 2.4.8. Este corolario nos dice que una retícula modular continua superiormente y semiatómica, es generada por sus átomos; es decir, todo elemento suyo es un supremo de átomos.

Ahora vemos una condición suficiente para que una retícula complementada sea semiatómica:

Teorema 2.4.9. *Toda retícula modular compactamente generada y complementada es semiatómica.*

Demostración. Demostraremos que $1 = z(L)$, para lo cual supondremos lo contrario y llegaremos a una contradicción. Si $z(L) \neq 1$, entonces existe un complemento suyo no 0, digamos b. La contradicción vendrá del hecho de que todo elemento de la retícula contiene átomos (es decir, L es atómica), con lo cual $z(L) \wedge b > 0$, un absurdo. Entonces nos enfocamos en mostrar que las hipótesis implican que L es atómica.

Como la retícula es compactamente generada, basta mostrar que para cada c compacto, $c/0$ tiene átomos. Por el Lema de Krull (1.7.12), hay un elemento máximo en $c/0 - \{c\}$, digamos m. Sea m' un complemento suyo en L. Entonces claramente $m \vee (c \wedge m') = m$, $0 = m \wedge m' \geq m \wedge (c \wedge m') = 0$, así que $c \wedge m'$ es un complemento de m en $c/0$. Por la modularidad, esto último implica que $c \wedge m'$ es un átomo en $c/0$ (pues m es máximo propio en $c/0$). $\square$

Corolario 2.4.10. *Toda retícula modular compactamente generada y complementada es atómica.*

De este corolario y el teorema 2.4.5, junto con el hecho de que toda retícula compactamente generada es continua superiormente (ver 1.8.4), extraemos:

Corolario 2.4.11. *Toda retícula modular compactamente generada y semiatómica es atómica.*

También hacemos notar que en la demostración del teorema anterior, las hipótesis de ser compactamente generada y moduar sólo sirven para establecer que la retícula es atómica. Luego se ve que $1 = z(L)$, usando la hipótesis de ser complementada. Es decir, se tiene lo siguiente:

COROLARIO 2.4.12. *Toda retícula modular atómica y complementada es semiatómica.*

LEMA 2.4.13. *En una retícula modular compactamente generada sin elementos esenciales $\neq 1$, todo seudocomplemento es un complemento.*

DEMOSTRACIÓN. Por 2.1.8 L es seudocomplementada, al ser compactamente generada. Sea b un seudocomplemento de a en L. Entonces $a \wedge b = 0$ y $a \vee b$ es esencial en L (2.1.7), así que por la hipótesis, $a \vee b = 1$. Con esto, b es un complemento de a en L. $\square$

De los dos teoremas anteriores y este último argumento obtenemos:

COROLARIO 2.4.14. *Toda retícula modular compactamente generada es semiatómica si y sólo si no tiene elementos esenciales propios.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longleftarrow$) Por el lema anterior, todo seudocomplemento es un complemento. El teorema anterior implica entonces que es semiatómica.

($\Longrightarrow$) Sea a un elemento esencial. Por el teorema 2.4.5, existe un complemento suyo, digamos b. Como $a \wedge b = 0$ y a es esencial, debe ocurrir que $b = 0$. En consecuencia, $a = 1$. $\square$

Todo lo anterior se sintetiza en el siguiente resultado, que es la motivación principal de esta sección:

TEOREMA 2.4.15. *Para una retícula modular, son equivalentes:*

(1) L es compactamente generada y semiatómica.
(2) L es compactamente generada y complementada.
(3) L es continua superiormente y semiatómica.
(4) L es continua superiormente, atómica y complementada.

DEMOSTRACIÓN. Primero, recordamos que ser compactamente generada implica ser continua superiormente (1.8.4).

Entonces 1. $\Longrightarrow$ 3. es obvio, y por los teoremas 2.4.5 y 2.4.9, se tiene la equivalencia entre 1. y 2. . También 3. $\Longrightarrow$ 4. es en parte consecuencia de 2.4.5; que L sea atómica se debe a que L es generada por sus átomos (ver la observación 2.4.8). Así, se tiene 3. $\Longrightarrow$ 4.

Por otro lado, 4. $\Longrightarrow$ 3. se da por 2.4.12 y, por último, la citada observación y el hecho de que en una retícula continua superiormente todo átomo es compacto (proposición 1.8.5), nos dan 3. $\Longrightarrow$ 1. $\square$

COROLARIO 2.4.16. *En una retícula modular continua superiormente y semiatómica, todo elemento $\neq 1$ está contenido en un máximo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $1 \neq x \in L$. Por el teorema anterior, x tiene un complemento en L, digamos c. Además L es atómica, así que hay un átomo a en $c/0$, que tiene un seudocomplemento $m \geq b$ por ser L continua superiormente. También L es compactamente generada, así que por el corolario 2.4.14 y el lema 2.4.13, m es también un complemento de a. La modularidad implica entonces que m es máximo en L. □

Terminamos esta sección con

COROLARIO 2.4.17. *Son equivalentes, para un elemento a de una retícula modular compactamente generada L:*

(1) a es supremo de átomos.
(2) a es el supremo de todos los átomos contenidos en $a/0$.
(3) a es supremo de un conjunto independiente de átomos.
(4) La subretícula $a/0$ es complementada.

DEMOSTRACIÓN. Antes que nada, recordemos que por 1.7.15, la subretícula $a/0$ es compactamente generada.

(1. $\Longrightarrow$ 2.) Es obvio que si $a = \vee a_i$ con a_i un átomo en L, entonces $a_i \leq a$ y $a = \vee a_i \leq \vee\{a \in a/0 \mid a \succ 0\} \leq a$.

(2. $\Longrightarrow$ 3.) $a/0$ es semiatómica, así que por el corolario 2.4.6 se tiene la implicación.

(3. $\Longrightarrow$ 4.) De nuevo, observemos que $a/0$ es semiatómica. El teorema 2.4.5 nos dice que también es complementada.

(4. $\Longrightarrow$ 1.) Se da por el teorema 2.4.9. □

2.5. El zoclo II.

LEMA 2.5.1. *Una retícula artiniana no tiene conjuntos independientes infinitos.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\{a_\xi\}_\alpha$ es un subconjunto independiente, entonces se tiene la serie descendente $\bigvee\limits_{\xi<\alpha} a_\xi > \bigvee\limits_{\xi\geq 1} a_\xi > \overset{\alpha}{\bigvee\limits_{\xi\geq 2}} a_\xi > \ldots$. Esto porque si $\bigvee\limits_{\xi\geq\eta+1} a_\xi = \bigvee\limits_{\xi\geq\eta} a_\xi$ para alguna η, se tendría $a_\eta \leq \bigvee\limits_{\xi\geq\eta+1} a_\xi$, así que $0 \neq a_\eta = a_\eta \wedge (\bigvee\limits_{\xi\geq\eta+1} a_\xi) \leq a_\eta \wedge (\bigvee\limits_{\xi\neq\eta} a_\xi) = 0$. □

El último teorema de la sección anterior, junto con este lema, nos da el siguiente resultado:

COROLARIO 2.5.2. *El zoclo de una retícula modular, artiniana y continua superiormente es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Por el citado teorema, la subretícula $z(L)/0$, que es continua superiormente y semiatómica, es compactamente generada. Entonces $z(L)$ es supremo de un conjunto independiente de átomos, que por el lema anterior debe ser finito. Por último, como cada átomo es compacto (1.8.5), $z(L)$ también lo es (ver 1.7.3). □

LEMA 2.5.3. *Sea $\{a_i\}_I$ un subconjunto finito de una retícula modular completa L, $b \leq \bigvee\limits_I a_i$ y $\overline{a_i} \doteqdot \bigvee\limits_{j\neq i} a_j$. Entonces $b \leq \bigvee\limits_I (a_i \wedge (b \vee \overline{a_i}))$. Más aún, si $\{a_i\}_I$ es un conjunto independiente, entonces $b \leq \bigoplus\limits_I (a_i \wedge (b \vee \overline{a_i}))$ y para cada i, $\frac{a_i \wedge (b\vee\overline{a_i})}{0} \cong \frac{b}{b\wedge\overline{a_i}}$.*

Demostración. Primero establecemos la desigualdad $b \leq \bigvee_I (a_i \wedge (b \vee \overline{a_i}))$, por inducción sobre $n = |I|$:

Si $n = 1$, sea a_i el único elemento de $\{a_i\}_I$. Entonces $\overline{a_i} = 0$, $b \leq \bigvee_I a_i = a_i$ y $b \leq \bigvee_I (a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})) = a_i \wedge b = b$.

Para $n \geq 2$, sean $k \in I$ y $K \doteqdot I \setminus \{k\}$. Entonces es claro que, para cada $i \in K$, $a_i \wedge (b \vee \overline{a_i}) \leq a_i \leq \overline{a_k} \leq b \vee \overline{a_k}$. Esto implica que $\bigvee_K (a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})) \leq b \vee \overline{a_k}$. Más aún, $a_k \leq \overline{a_i} \leq b \vee \overline{a_i}$, así que por modularidad y las propiedades de $\vee$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\bigvee_I (a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})) &= (\bigvee_K (a_i \wedge (b \vee \overline{a_i}))) \vee (a_k \wedge (b \vee \overline{a_k})) \\
&\underset{\text{mod.}}{=} ((\bigvee_K (a_i \wedge (b \vee \overline{a_i}))) \vee a_k) \wedge (b \vee \overline{a_k}) \\
&= \bigvee_K ((a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})) \vee a_k) \wedge (b \vee \overline{a_k}) \\
&\underset{\text{mod.}}{=} \bigvee_K ((a_i \vee a_k) \wedge (b \vee \overline{a_i})) \wedge (b \vee \overline{a_k})
\end{aligned}$$

Ahora bien, como por hipótesis $b \leq \bigvee_I a_i$, tenemos que $b \vee a_k \leq \bigvee_K (a_i \vee a_k)$ y podemos aplicar la hipótesis de inducción a $b \vee a_k$ y el conjunto $\{a_i \vee a_k\}_{i \in K}$, para lo cual definimos $J \doteqdot K \setminus \{i\}$ y $s_i \doteqdot \bigvee_J (a_j \vee a_k)$. Así,

$$b \vee a_k \leq \bigvee_K ((a_i \vee a_k) \wedge ((b \vee a_k) \vee s_i)) = \bigvee_K ((a_i \vee a_k) \wedge (b \vee \overline{a_i}))$$

pues claramente $a_k \vee s_i = s_i = \overline{a_i}$. Por otro lado, $b \leq (b \vee a_k) \wedge (b \vee \overline{a_k})$ (pues $b \vee a_k \geq b \leq b \vee \overline{a_k}$) y entonces, por lo ya establecido,

$$b \leq (b \vee a_k) \wedge (b \vee \overline{a_k}) \leq \bigvee_K ((a_i \vee a_k) \wedge (b \vee \overline{a_i})) \wedge (b \vee \overline{a_k}) = \bigvee_I (a_i \wedge (b \vee \overline{a_i}))$$

Consideremos ahora el caso en que $\{a_i\}_I$ es un conjunto independiente. Es claro que sólo hace falta mostrar que para cada $i \in I$, $(a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})) \wedge (\bigvee_{j \neq i} (a_j \wedge (b \vee \overline{a_j}))) = 0$. En efecto,

$$(a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})) \wedge (\bigvee_{j \neq i} (a_j \wedge (b \vee \overline{a_j}))) \leq a_i \wedge (b \vee \overline{a_i}) \wedge (\bigvee_{j \neq i} a_j) = a_i \wedge (b \vee \overline{a_i}) \wedge (\overline{a_i}) \leq a_i \wedge \overline{a_i} = 0$$

así que $b \leq \bigoplus_I (a_i \wedge (b \vee \overline{a_i}))$.

Por último, es claro que para cada $i \in I$, $(a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})) \wedge \overline{a_i} = 0$ (pues $a_i \wedge \overline{a_i} = 0$) y $(a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})) \vee \overline{a_i} \underset{\text{mod.}}{=} (a_i \vee \overline{a_i}) \wedge (b \vee \overline{a_i}) = b \vee \overline{a_i}$ (pues $a_i \wedge \overline{a_i} = 1$). Así,

$$\frac{a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})}{0} = \frac{a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})}{(a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})) \wedge \overline{a_i}} \underset{\text{mod.}}{\cong} \frac{(a_i \wedge (b \vee \overline{a_i})) \vee \overline{a_i}}{\overline{a_i}} = \frac{b \vee \overline{a_i}}{\overline{a_i}} \underset{\text{mod.}}{\cong} \frac{b}{b \wedge \overline{a_i}}$$

□

Proposición 2.5.4. *Sea $\{a_i\}_I$ un conjunto independiente finito de una retícula modular. Entonces $z((\bigoplus_I a_i)/0) = \bigoplus_I z(a_i/0)$.*

Demostración. Primero, notemos que como para cada i se tiene $z(a_i/0) \leq a_i$ (1. de 2.2.2), el conjunto $\{z(a_i/0)\}_I$ es independiente y luego $z((\bigoplus_I a_i)/0) \geq \bigoplus_I z(a_i/0)$ (4. de 2.2.2) . Para establecer la desigualdad contraria, basta verificar que para cada átomo $a \leq \bigoplus_I a_i$, $a \leq \bigoplus_I z(a_i/0)$:

Sea a un átomo en $(\bigoplus_I a_i)/0$. Por el lema anterior, $a \leq \bigoplus_I (a_i \wedge (a \vee \overline{a_i}))$, donde $\overline{a_i} = \bigoplus_{j \neq i} a_j$ y para cada i, $\frac{a_i \wedge (a \vee \overline{a_i})}{0} \cong \frac{a}{a \wedge \overline{a_i}}$, de modo que $a_i \wedge (a \vee \overline{a_i}) = 0$ o bien $a_i \wedge (a \vee \overline{a_i})$ es un átomo (en $a_i/0$). En cualquier caso se obtiene $a_i \wedge (a \vee \overline{a_i}) \leq z(a_i/0)$, con lo cual $a \leq \bigoplus_I (a_i \wedge (a \vee \overline{a_i})) \leq \bigoplus_I z(a_i/0)$ y se da la desigualdad deseada. $\square$

Proposición 2.5.5. *Sea $\{a_i\}_I$ un conjunto independiente (no necesariamente finito) de una retícula modular e inductiva L. Entonces $z((\bigoplus_I a_i)/0) = \bigoplus_I z(a_i/0)$.*

Demostración. Como en la demostración anterior, sólo nos hace falta verificar que $z((\bigoplus_I a_i)/0) \leq \bigoplus_I z(a_i/0)$, para lo cual mostraremos que para cada átomo $a \in (\bigoplus_I a_i)/0$, $a \leq \bigoplus_I z(a_i/0)$:

Sea a un átomo en $(\bigoplus_I a_i)/0$. Notemos que todo átomo en una retícula inductiva es compacto: si D es un conjunto dirigido superiormente tal que para toda $d \in D$ $a \nleq d$, entonces $a > a \wedge d = 0$ para toda $d \in D$ y luego $a \wedge (\vee D) = 0$, con lo que $a \nleq \vee D$. Entonces existe un $F \subseteq I$ finito tal que $a \leq \bigoplus_F a_i$ y por la proposición anterior,

$$a \leq z((\bigoplus_F a_i)/0) = \bigoplus_F z(a_i/0) \leq \bigoplus_I z(a_i/0)$$

$\square$

Proposición 2.5.6. *Si $\{a_i\}_I$ es un subconjunto independiente máximo de átomos en una retícula modular L, entonces $z(L) = \bigoplus_I a_i$.*

Demostración. Claramente se da la desigualdad $\bigoplus_I a_i \leq z(L)$. Para establecer la otra desigualdad mostraremos que para cada átomo a se tiene $a \leq \bigoplus_I a_i$:

Suponiendo lo contrario, habría algún átomo a tal que $a \wedge \bigoplus_I a_I = 0$, de modo que $\{a\} \cup \{a_i\}_I$ es independiente (2.4.3), lo cual contradice la maximidad de $\{a_i\}_I$. $\square$

Teorema 2.5.7. *En toda retícula inductiva $z(L)$ es una suma directa de átomos.*

Demostración. Si L no tiene átomos, entonces $z(L) = 0$, la suma directa de un conjunto vacío de átomos. En otro caso, invocando el Lema de Zorn obtenemos un conjunto máximo independiente de átomos, al cual aplicamos la proposición anterior. $\square$

2.6. Superfluidad.

DEFINICIÓN 2.6.1. En una retícula con 1, un elemento s es **superfluo** si para todo $x \neq 1$, $s \vee x \neq 1$.

OBSERVACIÓN 2.6.2. El 0 siempre es un elemento superfluo, y el 1 nunca lo es, si es distinto de 0.

LEMA 2.6.3. *Un elemento mayor en $L - \{1\}$ es superfluo.*

DEMOSTRACIÓN. Llamemos m a tal elemento. Entonces obviamente, para toda $x \neq 1$, $m \vee x = m \neq 1$. □

OBSERVACIÓN 2.6.4. Si s, s' son superfluos en una retícula L, entonces también lo es $s \vee s'$.

DEMOSTRACIÓN. Si $1 = (s \vee s') \vee x = s \vee (s' \vee x)$, entonces $s' \vee x = 1$ y luego $x = 1$. □

LEMA 2.6.5. *Sean $a < b$ en una retícula L. b es superfluo en L si y sólo si a es superfluo en L y b es superfluo en $1/a$.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) a es superfluo ya que $a \vee x \leq b \vee x < 1$ si $x \neq 1$; por otro lado, es obvio de la definición que b es superfluo en cualquier intervalo que los contenga a él y al 1 .

($\Longleftarrow$) Si $1 = b \vee x$, entonces $b \vee (a \vee x) = 1$ y por la hipótesis sobre b, $a \vee x = 1$, con lo cual $x = 1$, pues a es superfluo en L. □

En este mismo sentido, podemos dar el siguiente resultado, un poco más general:

LEMA 2.6.6. *Sean $a \leq b \leq c$ elementos de una retícula modular L. Si b es superfluo en $c/0$, entonces a es superfluo en L. Más aún, si $a < b$, b es un sumando directo en L y a es superfluo en L, entonces a es superfluo en $b/0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $a \vee x = 1$, entonces también $b \vee x = 1$ y luego $c = (b \vee x) \wedge c = b \vee (c \wedge x)$. Ahora, como b es superfluo en $c/0$, $c \wedge x = c$, de modo que $c \leq x$. Así, resulta que $a \leq x$ y $x = a \vee x = 1$.

Para demostrar la segunda afirmación, supongamos que $1 = b \oplus u$ y $a \vee x = b$, con $x \leq b$. Entonces $a \vee (x \vee u) = 1$ y por hipótesis $x \vee u = 1$. De aquí que $x = x \vee 0 = x \vee (b \wedge u) = b \wedge (x \vee u) = b \wedge 1 = b$, con lo cual queda demostrado que a es superfluo en $b/0$. □

Con este lema, podemos decir qué ocurre con la superfluidad al tomar supremos finitos:

COROLARIO 2.6.7. *Si en una retícula modular, a' es superfluo en $a/0$ y b' es superfluo en $b/0$, entonces $a' \vee b'$ es superfluo en $(a \vee b)/0$.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos tomar $L = (a \vee b)/0$, y aplicar el lema anterior para concluir que a' , b' son superfluos en L. Entonces, por 2.6.4, $a' \vee b'$ también es superfluo en $(a \vee b)/0$. □

El siguiente lema nos muestra cómo la propiedad de ser superfluo se preserva en una retícula modular, bajo morfismos de la forma $a \vee (\_)$:

LEMA 2.6.8. *Si $b < c$ son elementos de una retícula modular y b es superfluo en $c/0$, entonces para todo $a \in L$, $a \vee b$ es superfluo en $(a \vee c)/a$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $(a \vee b) \vee x = a \vee c$, con $a \leq x \leq a \vee c$. Entonces $b \vee ((a \vee x) \wedge c) \underset{\text{mod.}}{=} (b \vee a \vee x) \wedge c = (a \vee c) \wedge c = c$, así que la hipótesis sobre b implica que $(a \vee x) \wedge c = c$, o lo que es lo mismo, $c \leq a \vee x = x$, de modo que $a \vee c \leq x$, y se da la igualdad. $\therefore$ $a \vee b$ es superfluo en $(a \vee c)/a$. $\square$

Ahora damos un criterio para saber cuándo una retícula compactamente generada es compacta, en términos de elementos superfluos.

PROPOSICIÓN 2.6.9. *Sea s un elemento superfluo en una retícula L compactamente generada. Entonces L es compacta si y sólo $1/s$ es compacta.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Longrightarrow$) Sea $1 = \bigvee_I c_i$ con cada c_i compacto. Como una retícula compactamente generada es continua superiormente (1.8.4), $1 = 1 \vee s = \bigvee_I (s \vee c_i)$ donde cada $s \vee c_i$ es compacto en $1/s$ (ver 1.7.4).

($\Longleftarrow$) Sea $1 = \bigvee_I k_i$ con k_i compacto en $1/s$. A la luz del lema 1.7.5, cada k_i puede escribirse como $k_i = a \vee c_i$ con c_i compacto en L. Luego, $1 = \bigvee_I (s \vee c_i) = s \vee (\bigvee_I c_i)$, de modo que $\bigvee_I c_i = 1$. $\square$

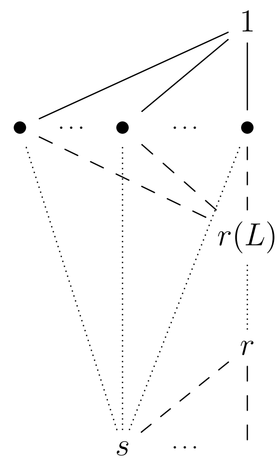
2.7. El radical

Aquí presentamos resultados duales a los de la sección 2.2 .

DEFINICIÓN 2.7.1. El **radical** de una retícula completa L, denotado por $r(L)$, es el ínfimo de todos los coátomos de L.

LEMA 2.7.2. *Si s es superfluo en L, entonces $s \leq r(L)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea a un coátomo en L. Como s es superfluo, $s \vee a \neq 1$, así que $s \vee a = a$ pues éste es máximo en $L \backslash \{1\}$. Así, s es cota inferior de cualquier coátomo, y por definición se tiene $s \leq r(L)$. $\square$



Lema 2.7.3. *Si c es compacto en L y $c \leq r(L)$, entonces c es superfluo en L.*

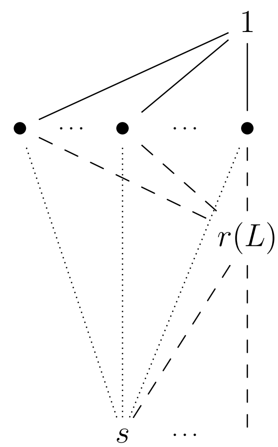
Demostración. Si suponemos que c no es superfluo, hay algún $a \neq 1$ tal que $a \vee c = 1$. Notemos que además $c \not\leq a$, pues de otro modo se tendría $a \vee c = a \neq 1$. Entonces el conjunto $A \ddot{=} \{x \in L \mid x \neq 1\,,\, c \not\leq x\,,\, c \vee x = 1\}$ es no vacío. Además, si podemos encontrar un máximo en A, digamos $\mathfrak{m}$, éste también será máximo en $L \backslash \{1\}$: si $\mathfrak{m} < y < 1$, como $1 = c \vee \mathfrak{m} \leq c \vee y = 1$, por la maximidad de $\mathfrak{m}$ resulta que $c \leq y$, pero entonces $1 = c \vee y = y$, una contradicción.

Veamos ahora que podemos aplicar el Lema de Zorn al conjunto A para obtener así un máximo: si C es cualquier cadena en A, entonces claramente $c \vee (\vee C) = 1$ (pues $\forall\, x \in C\, (1 = c \vee x \leq c \vee (\vee C))$), y además $c \not\leq \vee C$, pues por ser compacto (S–compacto) se tendría $c \leq x_0$ para algún $x_0 \in C$, lo cual es imposible. De esto último resulta trivial que $\vee C \neq 1$, con lo cual $\vee C \in A$ y luego podemos aplicar el Lema de Zorn para asegurar la existencia de un máximo $\mathfrak{m}$ en A. Pero esto lleva a una contradicción, pues entonces $c \leq r(L) \leq \mathfrak{m}$. □

Teorema 2.7.4. *En una retícula compactamente generada L, el radical es el supremo de todos los elementos superfluos.*

Demostración. Sea $r \ddot{=} \vee \{x \mid x$ es superfluo en $L\}$. El lema 2.7.2 nos dice que $r \leq r(L)$. Por otro lado, como L es compactamente generada, $r(L) = \bigvee_I c_i$ para algunos c_i compactos que por el lema anterior son superfluos en L y por tanto están contenidos en r. Entonces

$\forall\, i\, (c_i \leq r)$, de modo que $r(L) \leq r$ y se da la igualdad.



□

LEMA 2.7.5. *Sea $a \in L$. Entonces $a \vee r(L) \leq r(1/a)$ y si $a \leq r(L)$, $r(1/a) = r(L)$. Además, si 1 es compacto, entonces $r(L)$ es superfluo; más aún, en este caso $r(L) \neq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Obviamente, si m es máximo en $1/a - \{1\}$, entonces $a \leq m \geq r(L)$ y $a \vee r(L) \leq m$. Así, $a \vee r(L) \leq r(1/a)$, y si $a \leq r(L)$, entonces $r(L) = a \vee r(L) \leq r(1(/a)$. La desigualdad contraria ($r(1/a) \leq r(L)$) se da porque si m es máximo en $L - \{1\}$, entonces $m \geq r(L) \geq a$ y m es máximo en $1/a - \{1\}$. De esto se sigue que $r(1/a) \leq m$, con lo cual $r(1/a) \leq r(L)$.

Ahora supongamos que el 1 es compacto y que $a \neq 1 = a \vee r(L)$. Sea $A = \{x \in L \mid a \leq x < 1\}$. Claramente $a \in A$, y si C es una cadena en A, $\vee C \in A$, pues de otro modo $1 = \vee C \leq c_0 = 1$, $c_0 \in C$, en contradicción con que c_0 sea elemento de A. Entonces estamos en posición de aplicar el Lema de Zorn al conjunto A para asegurar que hay m máximo en A, el cual no es otra cosa sino un máximo en $L - \{1\}$. De aquí que $r(L) \leq m$ y luego $1 = a \vee r(L) \leq a \vee m = m < 1$, lo cual es absurdo.

Por último, aplicando el Lema de Krull (1.7.12) tenemos que hay algún máximo en $L - \{1\}$ y por lo tanto $r(L) \neq 1$. □

COROLARIO 2.7.6. *Si todo elemento propio de L está contenido en un máximo $\neq 1$, entonces $r(L)$ es superfluo.*

DEMOSTRACIÓN. Si $a \neq 1 = a \vee r(L)$ y m es un máximo que contiene a a, entonces, como en el argumento del lema, $1 = a \vee r(L) \leq m < 1$. $\therefore$ $a = 1$ y $r(L)$ es superfluo en L. □

TEOREMA 2.7.7. *Sea L una retícula modular y continua superiormente. Si $1/r(L)$ es semiatómica y $r(L)$ es superfluo, entonces todo elemento $\neq 1$ está contenido en un máximo.*

Demostración. Sea $1 \neq a \in L$. Primero, notamos que $r(L) \neq 1$, pues el 1 nunca es superfluo. Así, L tiene máximos propios. Además, $a \vee r(L) < 1$, pues $r(L)$ es superfluo y $a \neq 1$.

Si $a \leq r(L)$, obviamente a está contenido en cualquier elemento máximo.

Si $a \not\leq r(L)$, entonces $r(L) < a \vee r(L) < 1$; es decir, $a \vee r(L) \in 1/r(L)$, que por hipótesis es continua superiormente (por ser subretícula de una retícula continua superiormente) y semiatómica. Entonces, por el corolario 2.4.16, $a \vee r(L)$ está contenido en un máximo. □

Lema 2.7.8. *Toda retícula modular compactamente generada y semiatómica tiene radical cero.*

Demostración. Por el corolario 2.4.11, la retícula es atómica, así que es suficiente verificar que para todo átomo a, $a \wedge r(L) = 0$. Por el teorema 2.4.5, L es complementada, y por modularidad, un complemento m de a es máximo en $L - \{1\}$, y a vez todo máximo propio es complemento de algún átomo, así que en efecto $0 = a \wedge m \geq a \wedge r(L) = 0$. □

Proposición 2.7.9. *Una retícula modular continua superiormente y generada por átomos tiene radical cero.*

Demostración. Por ser generada por átomos, la retícula en cuestión es, en particular, semiatómica. Invocando 2.4.15, vemos que también es compactamente generada (además de que por, los átomos son elementos compactos 1.8.5). Entonces podemos aplicar directamente el lema anterior para concluir que $r(L) = 0$. □

Proposición 2.7.10. *Sean L una retícula modular y $a \in L$. Entonces $r(a/0) \leq r(L)$.*

Demostración. Veamos que para cada máximo en L, digamos m, $r(a/0) \leq m$: si $a \leq m$, es la afirmación es obvia; en otro caso, $m < a \vee m = 1$ y luego $1/m \underset{\text{mod.}}{\cong} a/a \wedge m$, así que $r(a/0) \leq a \wedge m \leq m$ ($a \wedge m$ es máximo en $a/0$). □

Lema 2.7.11. *Si $(\bigvee_I a_i) \wedge b = 0$ en una retícula modular completa, entonces $(\bigwedge_I a_i) \vee b = \bigwedge_I (a_i \vee b)$.*

Demostración. Por 1.3.10, $\bigvee_I a_i/0 \cong (\bigwedge_I a_i) \vee b/b$, y el isomorfismo está dado por $(\_) \vee b$, así que para I finito $(\bigwedge_I a_i) \vee b = f(\bigwedge_I a_i) = \bigwedge_I f(a_i) = \bigwedge_I (a_i \vee b)$. Ahora bien, es claro que para cualquier I, $f(\bigwedge_I a_i) \leq \bigwedge_I f(a_i)$. Si suponemos que la desigualdad es estricta, entonces hay algún $a > \bigwedge_I a_i$ tal que $f(a) = \bigwedge_I f(a_i)$. Pero esto implica que $a \leq a_i$ para cada índice, lo cual es absurdo ya que $a > \bigwedge_I a_i$. □

Proposición 2.7.12. *Si $a \oplus c = 1$ en una retícula modular, entonces $r(L) = r(a/0) \oplus r(c/0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior, se tiene $r(L) \geq r(a/0) \oplus r(c/0)$, donde escribimos $\oplus$ pues $r(a/0) \wedge r(c/0) \leq a \wedge c = 0$. Por otro lado, si $\{m_i\}_I$ es el conjunto de coátomos de $a/0$, entonces por modularidad, para cada i, $1/m_i \vee c = (m_i \vee c \vee a)/m_i \vee c \underset{\text{mod.}}{\cong} a/a \wedge (m_i \vee c) = a/m_i \vee (a \wedge c) = a/m_i$; es decir, $m_i \vee c$ es máximo en L. Así, por el lema anterior, $r(a/0) \oplus c = (\bigwedge_I m_i) \oplus c = \bigwedge_I (m_i \vee c) \geq r(L)$. Simétricamente, $r(L) \leq a \oplus r(c/0)$, de modo que

$$r(L) \leq (r(a/0) \oplus c) \wedge (a \oplus r(c/0)) \underset{\text{mod.}}{=} r(a/0) \vee ((a \oplus r(c/0)) \wedge c)$$
$$\underset{\text{mod.}}{=} r(a/0) \vee ((a \wedge c) \vee r(c/0)) = r(a/0) \oplus r(c/0)$$

□

LEMA 2.7.13. *Sea L una retícula modular completa. Si L es artiniana y $r(L) = 0$, entonces L es neteriana.*

DEMOSTRACIÓN. Como L es artiniana, $r(L)$ puede expresarse como un ínfimo finito de elementos máximos, digamos $m_1, \ldots, m_n$ (de lo contrario se tendría una serie decreciente infinita de ínfimos de máximos). Supongamos que hay una cadena $a_1 < a_2 < \ldots$. Entonces el corolario 1.6.6 nos dice que $\{a_i \wedge m_1\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una cadena estrictamente creciente. Aplicando varias veces este resultado, vemos que $\{a_i \wedge m_1 \wedge \ldots \wedge m_n\}_{i \in \mathbb{N}}$. Pero $a_i \wedge m_1 \wedge \ldots \wedge m_n \leq m_1 \wedge \ldots \wedge m_n = r(L) = 0$, lo cual es una contradicción. □

Al igual que para el zoclo, hay una cadena (en este caso no ascendente) de radicales:

DEFINICIÓN 2.7.14. La **serie de radicales de Loewy** queda definida como sigue:

$r_0(L) \doteqdot 1$. Para cada ordinal α, $r_{\alpha+1}(L) \doteqdot r(r_\alpha(L)/0)$, y $r_\eta(L) \doteqdot \bigwedge_{\xi<\eta} r_\xi(L)$ si η es un ordinal límite.

Claramente, para cada L existe un ordinal α tal que $r_\alpha(L) = r_\xi(L)$ para todo $\xi > \alpha$. Al menor ordinal α_0 con esta propiedad se le llama **longitud** de la serie, y escribimos $r_{\alpha_0}(L) \doteqdot r_\infty(L)$.

A continuación presentamos el dual de 2.3.11, que es un análogo del Teorema de Hopkins-Levitzki para anillos ([**3**]) :

TEOREMA 2.7.15. *Sea L una retícula modular completa y artiniana tal que $r_\infty(L) = 0$. Entonces L es neteriana (y de longitud finita).*

DEMOSTRACIÓN. Por ser L artiniana, su serie de radicales debe tener longitud finita, digamos $r_\infty(L) = r_n(L) = 0$. Consideremos, para cada $i = 1, \ldots n$, el intervalo $r_{i-1}(L)/r_i(L)$. Notemos que es modular y artiniano al ser una subretícula de una retícula modular artiniana. Además, por definición $r(r_{i-1}(L)/r_i(L)) = r(r_{i-1}(L)/0) = r_i(L)$, así que por el lema anterior, cada intervalo es neteriano,. Aplicando varias veces 1.6.5, vemos que L es neteriana. □

Definición 2.7.16. En una retícula con 1, c es un **suplemento** de b si es mínimo con respecto a la propiedad $b \vee c = 1$.

Es decir, el concepto de suplemento es el dual del concepto de seudocomplemento. Entonces tenemos, por dualidad (ver 2.1.2):

Proposición 2.7.17. *En una retícula modular con 0 y 1, todo complemento es un suplemento.*

También presentamos el dual de 2.1.6:

Proposición 2.7.18. *En una retícula modular con 0 y 1, c es suplemento de b si y sólo si $b \vee c = 1$ y $b \wedge c$ es superfluo en $c/0$.*

Teorema 2.7.19. *Sean L una retícula modular compactamente generada y $a \in L$. Son equivalentes:*

(1) $a/0$ es generada por átomos y de longitud finita, y a tiene un complemento en L.
(2) $a \wedge r(L) = 0$ y $a/0$ es artiniana.
(3) $a \wedge r(L) = 0$ y $a/0$ es neteriana y semiartiniana.
(4) $a \wedge r(L) = 0$, $a/0$ es neteriana y para cada $b \not\geq a$, existe un átomo u tal que $u \leq a$ y $u \wedge b = 0$.
(5) $a \wedge r(L) = 0$, $a/0$ es neteriana y cada $b \leq a$ tiene un suplemento en L.

Demostración. Primero, recordemos que la subretícula $a/0$ es también compactamente generada (1.7.15), y que una retícula modular es de longitud finita si y sólo si es neteriana y artiniana.

(1. $\Longrightarrow$ 4.) Sea c es un complemento de a en L. Por el lema 2.7.12,

$$a \wedge r(L) = a \wedge (r(a/0) \oplus r(c/0)) \underset{\text{mod.}}{=} r(a/0) \vee (a \wedge r(c/0)) = r(a/0) \vee 0 = r(a/0)$$

pues $0 = a \wedge c \geq a \wedge r(c/0) = 0$. Además $a/0$ es continua superiormente, al ser compactamente generada (1.8.4). Entonces, por la proposición 2.7.9, $a \wedge r(L) = r(a/0) = 0$.

Por otro lado, $a/0$ es neteriana por ser de longitud finita. Por último, si b fuera para tal que para todo átomo $u \leq a$ se tuviera $u \wedge b \neq 0$, entonces $u \wedge b = u$; es decir, $u \leq b$. Entonces, como a es un supremo de átomos, $b \geq a$.

(4. $\Longrightarrow$ 3.) Sólo hace falta ver que $a/0$ es semiartiana: si $x < a$, por hipótesis existe un átomo $u \in a/0$ tal que $u \wedge x = 0$. Entonces $u \vee x > x$ y por modularidad, $u \vee x \succ x$. Así, $a/0$ es semiartiniana.

(3. $\Longrightarrow$ 2.) Se da por el teorema 2.3.11.

(2. $\Longrightarrow$ 1.) Primero estableceremos que a tiene un complemento en L. Entonces, como en (1. $\Longrightarrow$ 4.), tendremos $0 = a \wedge r(L) = r(a/0)$, así que por 2.7.13, $a/0$ será neteriana y por

tanto, de longitud finita. Después mostraremos que $a/0$ es complementada. Así, por el teorema 2.4.9, $a/0$ será semiatómica, y por 2.4.8, generada por átomos.

Supongamos que no hay un complemento de a en L. Consideramos el conjunto de elementos en $a/0$ que no tienen complemento en L, el cual tiene un mínimo por ser $a/0$ artiniano y dicho conjunto no vacío (por nuestra suposición). Llamemos b a tal elemento. Notemos que $b \neq 0$, pues el 0 siempre tiene complemento (el 1). Además, $b \wedge r(L) \leq a \wedge r(L) \underset{\text{hip.}}{\leq} 0$, con lo cual debe haber un elemento máximo en $L \backslash \{1\}$, digamos m, tal que $b \vee m = 1$; de lo contrario, para todo máximo propio m se tendría $b \vee m = m$, que equivale a $b \leq m$ e implica $r(L) \geq b = b \wedge r(L) = 0$, en contradicción con lo ya establecido sobre b. Entonces, como $b \not\leq m$, $b \wedge m < b$ y por tanto $b \wedge m$ tiene un complemento c en L. Afirmamos ahora que $c \wedge m$ es un complemento de b en L, lo cual es absurdo por la elección de b:

$$
\begin{aligned}
b \wedge (c \wedge m) &= (b \wedge m) \wedge c = 0 \\
1 = b \vee m = b \vee (1 \wedge m) &= b \vee (((b \wedge m) \vee c) \wedge m) \\
&\underset{\text{mod.}}{=} b \vee ((b \wedge m) \vee (c \wedge m)) \\
&= b \vee (c \wedge m)
\end{aligned}
$$

Así, podemos concluir que a tiene al menos un complemento en L. Similarmente, para $x \leq a$ existe un complemento en L ya que $x \wedge r(L) \leq a \wedge r(L) = 0$ y $x/0$ es artiniana. Por lo tanto, $a/0$ es complementada, pues si $x \in a/0$ y c es un complemento de x en L, entonces

$$
\begin{gathered}
x \wedge (c \wedge a) \leq x \wedge c = 0 \\
x \vee (c \wedge a) \underset{\text{mod.}}{=} a \wedge (x \vee c) = a \wedge 1 = a
\end{gathered}
$$

(1. $\Longrightarrow$ 5.) De nuevo, como en la demostración de (1. $\Longrightarrow$ 4.), $a \wedge r(L) = r(a/0) = 0$, y $a/0$ es neteriana. Por otro lado, si $b \leq a$ no tuviera suplemento en L, habría una cadena $1 > x_1 > x_2 > \ldots$ tal que para toda n, $b \vee x_n = 1$. Entonces para toda n, $a \vee x_n \geq b \vee x_n = 1$, así que por el corolario 1.6.6, $\{a \wedge x_n\}_{\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente. Pero esto es imposible pues $a/0$ es de longitud finita (artiniana). Así, todo $b \leq a$ debe tener un suplemento en L.

(5. $\Longrightarrow$ 1.) Como en (2. $\Longrightarrow$ 1.) , basta demostrar que cada $x \in a/0$ tiene un complemento en L. Sea $x \leq a$. Por hipótesis, x tiene un suplemento c en L. Entonces $x \vee c = 1$ y $x \wedge c$ es superfluo en L (2.7.18). En consecuencia, por 2.7.4, $x \wedge c \leq r(L)$. Entonces, como $x \wedge c \leq x \leq a$, $x \wedge c \leq a \wedge r(L) = 0$, con lo que c es un complemento de x en L. □

Corolario 2.7.20. *Una retícula modular L es generada por átomos y de longitud finita si y sólo si es artiniana y $r(L) = 0$.*

Demostración. Inmediato del teorema anterior, tomando $a = 1$. □

TEOREMA 2.7.21. *Si L es modular, compacta y artiniana, entonces $1/r(L)$ es semiatómica.*

DEMOSTRACIÓN. Como el elemento 1 sigue siendo compacto en $1/r(L)$ y este cociente tiene radical cero, podemos suponer que L también y reemplazar L con $1/r(L)$. Consideremos la retícula opuesta L^0 (donde el orden de L se ha invertido). Esta retícula es neteriana y por tanto también es compacta (1.7.9). Además, por 1.8.3, L^0 también es continua superiormente, y como $r(L) = z(L^0) = 0$, L^0 es semiatómica. Entonces, por 2.4.5, L^0 es complementada. Pero ser complementada es una propiedad autodual, de modo que también L es complementada. Por último, notemos que por ser artiniana, L es también atómica. Entonces, por el teorema 2.4.15 podemos concluir que L es semiatómica. $\square$

COROLARIO 2.7.22. *Si R es un anillo artiniano, entonces $R/rad(R)$ es semisimple ($rad(R)$ el radical de Jacobson).*

Conclusiones.

Las retículas forman un aspecto fundamental en el estudio de las estructuras algebraicas, dado que contienen una gran cantidad de información sobre el objeto en cuestión: nos revelan su estructura interna, a la vez que nos dan otro enfoque para hablar de sus propiedades. Los conceptos y técnicas reticulares resultan muy pertinentes para el estudio de estructuras algebraicas, pues resultan herramientas muy efectivas para la clasificación de los objetos algebraicos (modularidad, distributividad, compacidad), así como para la enunciación y esclarecimiento de algunas nociones (longitud, complementos, independencia, atomicidad semiatomicidad). Asimismo, nos ayudan a aclarar ciertos argumentos en las demostraciones, pues nos permiten dejar de lado las operaciones en el objeto dado, para trabajar con las operaciones y el orden en la retícula, que en muchos casos son más manejables que las expresiones en aquéllos términos.

Esencialmente, la retícula de un objeto algebraico describe su estructura: nos dice cómo está constituido a partir de bloques más pequeños, y cómo están éstos ordenados. La dualidad que presentan las retículas de ser a la vez conjuntos ordenados y algebraicos, habla de la estrecha relación entre operaciones y estructuras, las cuales son mutuamente dependientes. Lo anterior lleva en ocasiones a resultados insospechados, como los teoremas de Hopkins-Levitzki (todo anillo artiniano es neteriano) y Bass-Papp (un anillo es neteriano si y sólo si la clase de sus módulos inyectivos es cerrada bajo sumas directas).

Por otro lado, al abstraer las propiedades esenciales del orden en las estructuras, las retículas son ideales para hablar de subestructuras comunes a los objetos algebraicos, como son el radical y el zoclo, los cuales proporcionan una manera natural de analizar y clasificar la retícula de algún módulo, grupo, etc. .

Todo lo anterior da motivos de peso para decir que las retículas merecen un lugar central en el estudio del Álgebra, pues constituyen un aspecto esencial de sus objetos.

Bibliografía

[1] Anderson F.W. , Fuller K.R. , *Rings and Categories of Modules*, segunda edición, Springer Verlag, Nueva York ,1992.

[2] Calugareanu G. , *Lattice Concepts of Module Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

[3] Guzmán F. , *The Hyperradical and the Hopkins-Levitzki Theorem for Modular Lattices*, en *Actas del XVI Coloquio Latinoamericano de Álgebra*, Revista Matemática Iberoamericana, 2007.

[4] Hall M. , *The Theory of Groups*, AMS Chelsea Publishing, segunda edición, Providence, 1991.

[5] Kleiner I. *A History of Abstract Algebra*, Birhäuser, Boston, 2007.

[6] Schmidt R. , *Subgroup Lattices of Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[7] Stenström B. , *Rings of Quotients*, Springer Verlag, Nueva York, 1975.

[8] Tuganbaev A.A., *Distributive Modules and Related Topics*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1999.