

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA.

DISCUSION SOBRE LA RESONANCIA EN PUERTOS, APLICANDO LA FUNCION DE GREEN PROPUESTA EN EL CAPITULO 3 DEL LIBRO: "THE HIDRODYNAMICS OF WAVES AND TIDES, WITH APPLICATIONS", DE M. RAHMAN.

*Trabajo terminal que para obtener
el grado de Maestría en Ingeniería (Hidráulica)
presenta Enrique A. Sánchez Camacho.*

Octubre de 1992.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPFI

T. UNAM

1 9 9 2

SAN

Ej. 2

INDICE

	Pág.
Introducción	1
1. Importancia del fenómeno de resonancia	2
2. Explicación del método propuesto	3
2.1 Formulación matemática	3
2.2 Igualdad de condiciones	13
2.3 Solución final	18
2.4 Factor de amplificación	19
3. Comentarios de la aplicación del método al puerto de Kincardine	21
4. Crítica del método	24
5. Conclusiones	25
Referencias	26

G(2)- 502392

INTRODUCCION.

Entre las manifestaciones de la naturaleza, que se conocen genéricamente con el nombre de fenómenos, -mas por ignorancia en cuanto a los mecanismos que los provocan, que por el hecho de que ocurran-, existen los que se presentan en forma eventual y aquellos que ocurren en forma ordinaria.

En este escrito se abordará uno de los últimos: la resonancia en puertos. En forma breve se indicará la importancia que tiene el fenómeno, así como un método para calcular la respuesta de un puerto, sujeto a un determinado tipo de oleaje.

Con lo anterior, se conocen las características del oleaje con las que se presenta o no la resonancia, tomando en cuenta la geometría del puerto. El consabido método se apoya en la aplicación del teorema y la función de Green.

1. IMPORTANCIA DEL FENOMENO DE RESONANCIA.

Es frecuente que una escala de mareas (mareómetro), muestre la existencia de oscilaciones dentro del puerto -elevación del nivel del agua en determinado momento-, que van desde 10 segundos hasta algunas decenas de minutos; tales oscilaciones aparecen superpuestas a las fluctuaciones de la marea.

Las oscilaciones ocurren debido al arribo de olas de largo período desde mar abierto hacia dentro del puerto. Dichas olas son reflejadas por las orillas del puerto y por las olas atrapadas dentro del mismo.

La resonancia ocurre cuando la frecuencia de las olas que arriban y las que se reflejan, son similares con uno o más de los períodos naturales de oscilación del puerto, amplificándose el oleaje dentro del puerto.

De aquí que dichas oscilaciones han sido vistas con mayor cuidado, dados los problemas que ocasionan a las embarcaciones que están ancladas o próximas a detenerse dentro de puerto. Esto es debido a que efectúan sus maniobras con mayor riesgo, lentitud y por ende con un costo más elevado a causa de sus inestabilidades. Por otro lado, las embarcaciones pequeñas sufren daños por colisiones, cuando la resonancia las consigue ladear en forma importante y aun voltear a pesar de encontrarse ancladas.

En virtud de que las olas de largo período están asociadas a tsunamis, mareas de tormenta, tifones, variaciones microbarométricas consecuencia de un frente migratorio, siendo ninguno de ellos controlables por el hombre; y por otra parte la única manera de evitar el ingreso de estas olas hacia dentro del puerto, es cerrando la entrada de este último, lo cual no es sensato por razones evidentes. Se hace necesario el estudio del fenómeno a fin de conocer bajo que períodos o longitudes del oleaje, dadas las características geométricas y batimétricas del puerto, se presenta la resonancia.

2. EXPLICACION DEL METODO PROPUESTO.

2.1 FORMULACION MATEMATICA.

Para resolver problemas de hidrodinámica clásica, y en el caso particular del estudio de la hidrodinámica de puertos, es necesario resolver un sistema determinado de ecuaciones, que son las ecuaciones generales de movimiento de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, cuyas incógnitas son: la presión (p) y las tres componentes de la velocidad (u,v,w) en las direcciones de un sistema de ejes coordenados (x,y,z) y el tiempo (t)..

El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + X = \frac{du}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + Y = \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + Z = \frac{dw}{dt} \quad (3)$$

$$y \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

donde

ρ masa específica

ν viscosidad cinemática del líquido

X,Y,Z fuerzas másicas en el sentido de los ejes de referencia

además se ha empleado al operador laplaciano en tres direcciones, es decir

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5)$$

Se aceptan las siguientes hipótesis:

1. La viscosidad cinemática del fluido es nula, por tanto el término $\nu \nabla^2$ puede ignorarse.
2. El flujo es irrotacional, por tanto existe una función escalar ϕ , llamada potencial de la velocidad, tal que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (6)$$

3. El flujo es incompresible, esto es, ρ permanece constante.

Adicionalmente se considera que la presión (p) es "negativa", por que corresponde a una "compresión", y por otra parte el potencial de las fuerzas másicas es el gravitacional definido como $-gz$.

Se tiene que las ecuaciones generales de movimiento de Navier-Stokes para flujo con potencial quedan expresadas como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{\rho} + gz = 0 \quad (7)$$

por lo tanto para el potencial de velocidad $\phi(x,y,z,t)$, se tiene

$$\text{que} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

además la solución a la ecuación anterior (ecuación de Laplace), está sujeta a las condiciones de frontera siguientes

$$\text{condición de frontera en la orilla} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (9)$$

n coordenada normal a la frontera

$$\text{condición de frontera en el fondo} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

cuando $z = -h$

siendo h la profundidad del puerto

$$\text{condición cinemática} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (11)$$

cuando $z = 0$

$$\text{condición dinámica} \quad \eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (12)$$

cuando $z = 0$

η elevación de la superficie del agua

Las soluciones que satisfacen las condiciones de frontera 11 y 12 tienen la forma que se indica a continuación, debiendo señalarse que dicha solución se obtiene a partir de la linealización de las ecuaciones que gobiernan el movimiento, así como de sus respectivas condiciones de frontera (Sánchez J.L. 1987)

$$\phi(x,y,z,t) = - \frac{B_0 e^{kh}}{i \sigma} \cosh k(z+h) f(x,y) e^{-i\sigma t} \quad (13)$$

donde B_0 constante

k número de ola dado por $\frac{2\pi}{L}$, L : longitud de ola

σ frecuencia angular $\frac{2\pi}{T}$, T : período de la ola

Con la condición dinámica se obtiene

$$\eta(x,y,t) = - \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=0} = \left[- \frac{1}{g} Z(0) \right] f(x,y) e^{-i\sigma t} \quad (14)$$

donde $Z(0) = B_0 e^{kh} \cosh(kh)$ (15)

$$\sigma \text{ y } k \text{ están relacionadas por } \sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (16)$$

Si $\frac{h}{L} < 1$ es válido simplificar la ecuación 16 como

$$\sigma^2 = k^2 gh \quad (17)$$

De aquí se hace necesario conocer la función f , para poder valuar la ecuación 14, y por ende la elevación de la superficie.

Para conocer la función f se establece la ecuación de Helmholtz, la cual se obtiene a partir del planteamiento de la ecuación de Bernoulli y de continuidad en un canal muy ancho, para flujo en dos dimensiones. Asimismo, se asume que la pendiente es nula, la carga de velocidades despreciable y la pendiente hidráulica esta dada por la fórmula de Chezy, además de que el área puede representarse mediante un ancho medio y un tirante promedio, así como que la versión del teorema de Bernoulli mas comúnmente usado en hidráulica marítima es la que describe el movimiento bidimensional -como ya antes se indicó-. La ecuación se escribe como sigue:

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0 \quad (18)$$

misma que debe ser resuelta, bajo las condiciones de frontera siguientes

• A lo largo de las fronteras sólidas no existe cruce de flujo, es decir $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ (19)

- las olas radiadas desde la entrada del puerto decaen hasta cero a una distancia muy grande (matemáticamente se considera infinita).
- $$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[\frac{\partial f}{\partial n} - ikf \right] = 0 \quad (20)$$

La solución de f en cualquier punto dentro del dominio del puerto o fuera de él, puede ser encontrada en términos de la función $f(\xi, \zeta)$, en que (ξ, ζ) es un punto de la frontera, y la función de Green $G(x, y; \xi, \zeta)$. Se sabe que ambas funciones satisfacen la ecuación de Helmholtz, pues la función de Green tiene la particularidad de tomar el valor de cero en los extremos y distinto de cero en puntos intermedios.

De este modo es posible utilizar la segunda fórmula fundamental de Green, que relaciona a dos funciones dentro de una región R con sus derivadas normales sobre una superficie de frontera S (Levi E. 1965).

Por lo que se puede escribir

$$\iint_R [f (\nabla^2 + k^2) G - G (\nabla^2 + k^2) f] dx dy = \int_S \left[f \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds \quad (21)$$

Usando la propiedad de la función generalizada se obtiene

$$f(\xi, \zeta) = \int_S \left[f \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds \quad (22)$$

Utilizando la propiedad de simetría del argumento de la función de Green, al hacer un cambio de (x, y) por (ξ, ζ) , donde el primero es un punto dentro de la región y el último uno sobre la frontera S . Amen de escribir la ecuación 22 en forma explícita, se tiene

$$f(x, y) = \int_S \left[f(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y; \xi, \zeta) - G(x, y; \xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial n} f(\xi, \zeta) \right] ds(\xi, \zeta) \quad (23)$$

Del cálculo funcional se sabe que la función de Green puede construirse a partir de la función Gamma (Γ), encontrando una función simétrica -que se llama H - la cual es solución regular de $\mathcal{L} w = 0$, donde \mathcal{L} : operador lineal y w : función escalar, la cual no tiene características singulares en $P=P'$ donde P, P' son puntos de la región en que está definida la función de Green

$$G(P, P') = H(P, P') + \Gamma(P, P') \quad (24)$$

Para el operador de Helmholtz en dos dimensiones se tiene que

$$\Gamma(P, P') = \frac{1}{4} H_0^{(1)} \{k |P P'|\} \quad (25)$$

En la cual la función de Hankel ($H_0^{(1)}$) de primera especie y de orden cero, está dada en términos de las funciones de Bessel, como se indica a continuación (Green C. 1969)

$$H_0^{(1)} = J_0 + iY_0 \quad (26)$$

En cuanto a las funciones de Bessel, no son sino las integrales de la ecuación de Bessel, que se escribe como sigue

$$\frac{d}{dx} (x y') + \left(x - \frac{p^2}{x}\right) y = 0 \quad (27)$$

y cuyas soluciones llamadas de primera y segunda especie respectivamente son

$$J_p(x) = \left[\frac{x}{2}\right]^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+p)} \left[\frac{x}{2}\right]^{2n} \quad (28)$$

para $x > 0$
para $p \geq 0$

$$Y_p = J_p(x) \log x - \frac{1}{2} \left[\frac{x}{2}\right]^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)}{n!} \left[\frac{x}{2}\right]^{2n}$$

$$- \frac{1}{2} \left[\frac{x}{2}\right]^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h_n + h_{n+p}}{n! (n+p)!} \left[\frac{x}{2}\right]^{2n} \quad (29)$$

para $x > 0$
para $p \geq 0$

donde $h_0 = 0$

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{para } n \geq 1 \text{ y } x > 0, p \geq 0$$

en ambos casos p indica el número de orden (Apostol T. 1969).

Con las consideraciones anteriores, se puede encontrar una expresión para valuar la función f en cualquier punto del dominio, a través de una integral de línea alrededor de la frontera en el dominio, como se anota a continuación

$$f(x, y) = \frac{-i}{4} \int_s \left[f(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(kr) \right] - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} f(\xi, \zeta) \right] ds(\xi, \zeta) \quad (30)$$

Ahora bien, para encontrar el valor de la función f sobre la frontera, el punto (x, y) -perteneciente al dominio- es permitido aproximararlo a la frontera en el punto (ξ', ζ') , con lo cual la ecuación 23 queda

$$f(\xi', \zeta') = \frac{-i}{2} \int_{\sigma} \left[f(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(kr') \right] - H_0^{(1)}(kr') \frac{\partial}{\partial n} f(\xi, \zeta) \right] ds \quad (\xi, \zeta) \quad (31)$$

donde $r' = [(\xi' - \xi)^2 + (\zeta' + \zeta)^2]^{1/2} \quad (32)$

Con el objeto de resolver la ec 31, se usa integración numérica dividiendo la frontera del puerto en un número suficientemente grande de segmentos cuyo tamaño es arbitrario, y al puerto en varias regiones de acuerdo a la batimetría del mismo. Debe mencionarse que el valor de la función de ola f sobre la frontera de cada subregión o sus derivadas normales se consideran constantes para cada segmento e iguales al valor de la función en el punto medio del segmento.

Por lo anterior se puede escribir la ec 31 en forma de suma como:

$$f(x_i, y_i) = \frac{-i}{2} \sum_{j=1}^N f(x_j, y_j) \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(kr) \right] - H_0^{(1)}(kr_{ij}) \frac{\partial}{\partial n} f(x_j, y_j) \Delta s_j \quad (33)$$

donde (x_i, y_i) punto sobre la frontera

(x_j, y_j) punto frontera

Δs_j longitud del j -ésimo segmento de la frontera

$$r_{ij} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2]^{1/2} = r_{ji}$$

N número total de segmentos

En la ecuación 33 puede observarse, que para obtener un solo valor $f(x_i, y_i)$ es necesario efectuar un barrido sobre todos los puntos conocidos de la subregión, lo cual es -en forma discreta- la integral de línea de la ec 31.

Así para calcular f_i , considerando

$$b_0 = -\frac{i}{2}$$

$$f_i = f(x_i, y_i)$$

$$f_{jj} = f(x_j, y_j)$$

$$g_{n_{ij}} = \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr_{ij}))$$

$$g_{ij} = H_0^{(1)}(kr_{ij})$$

$$d_{jj} = \frac{\partial}{\partial n} f(x_j, y_j)$$

se tiene

$$f_1 = b_o \{ f_{11} \varepsilon_{n,11} + f_{22} \varepsilon_{n,12} + \dots + f_{N,N} \varepsilon_{n,1,N} \} - \{ \varepsilon_{11} d_{11} + \varepsilon_{12} d_{22} + \dots + \varepsilon_{1,N} d_{N,N} \}$$

Procedimiento que puede repetirse para tantos valores de la función f , como segmentos en que se haya dividido la frontera. Lo cual lleva a que dicha ecuación pueda escribirse en forma matricial como

$$F = b_o (G_n F - G P) \quad (34)$$

Sin embargo por conveniencia, la ecuación 34 puede escribirse como

$$F = (b_o G_n - I)^{-1} (b_o G P) \quad (35)$$

donde

$$b_o = -\frac{i}{2} \quad (36)$$

$$F = f(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (37)$$

$$P = \frac{\partial}{\partial n} f(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (38)$$

$$(G)_{ij} = \{ J_o (k r_{ij}) + i Y_o (k r_{ij}) \} \Delta s_j \quad (39)$$

para $i \neq j$ $i, j = 1, 2, \dots, N$

Es evidente que cuando $i = j$, $r = 0$, por lo que $Y_o(kr)$ se vuelve singular, y los elementos de la diagonal principal se valúan como

$$(G)_{ii} \cong \left[1 + \frac{2i}{\pi} \left[\text{Ln} \left[\frac{k \Delta s_i}{4} \right] - 0.42278 \right] \right] \Delta s_i \quad (40)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

$$y (G_n)_{ij} = -k H_1^{(1)}(k r_{ij}) \frac{\partial r_{ij}}{\partial n} \Delta s_j \quad (41)$$

para $i \neq j$ $i, j = 1, 2, \dots, N$

$$\left[\frac{\partial r_{ij}}{\partial n} \right] = -\frac{x_i - x_j}{4} \left[\frac{\Delta y}{\Delta s} \right]_j + \frac{y_i - y_j}{4} \left[\frac{\Delta x}{\Delta s} \right]_j \quad (42)$$

$$r_{ij} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{1/2} = r_{ji} \quad (43)$$

Pero una vez más para $i=j$ la función de Hankel es singular, y los elementos de la diagonal principal se calculan como

$$(G_n)_{ii} \cong \frac{i}{\pi} \left[\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \frac{\partial y}{\partial s} \right] \Delta s_i \quad (44)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N$$

I es la matriz identidad

Considerando que P esta formada por las derivadas de la función f , se establece para conocerlas lo siguiente

$$P = \frac{\partial}{\partial n} f(x_i, y_i) = U D \quad (45)$$

donde D es un vector columna de valores desconocidos y U es una matriz, por lo cual la ecuación 35 se puede escribir como

$$F = (b_o G_n - I)^{-1} (b_o G U) D \quad (46)$$

En la ecuación 46, el orden de las matrices que la componen es el siguiente, G y G_n son ambas de $N \times N$, donde N es el número de segmentos en que se ha dividido toda la frontera de una zona.

La matriz U es de $N \times B$, donde B es la suma de los segmentos en que se ha dividido la frontera o fronteras imaginarias con otras zonas. En tanto D es un vector columna con B elementos.

Para una mayor claridad de la anterior explicación considérese la figura que se presenta a continuación. A manera de ejemplo se utilizará la ecuación 46 para la zona I.

$$F_1 = (b_o G_n - I)^{-1} (b_o G P_1) \quad (47) \quad \text{donde}$$

$$F_1 = f_1(x_i, y_i); i=1, 2, \dots, N_1 \quad (48)$$

$$P_1 = \frac{\partial}{\partial n} f_1(x_j, y_j); i=1, 2, \dots, N_1 \quad (49)$$

G y G_n son matrices de tamaño $N_1 \times N_1$ que se pueden calcular en forma

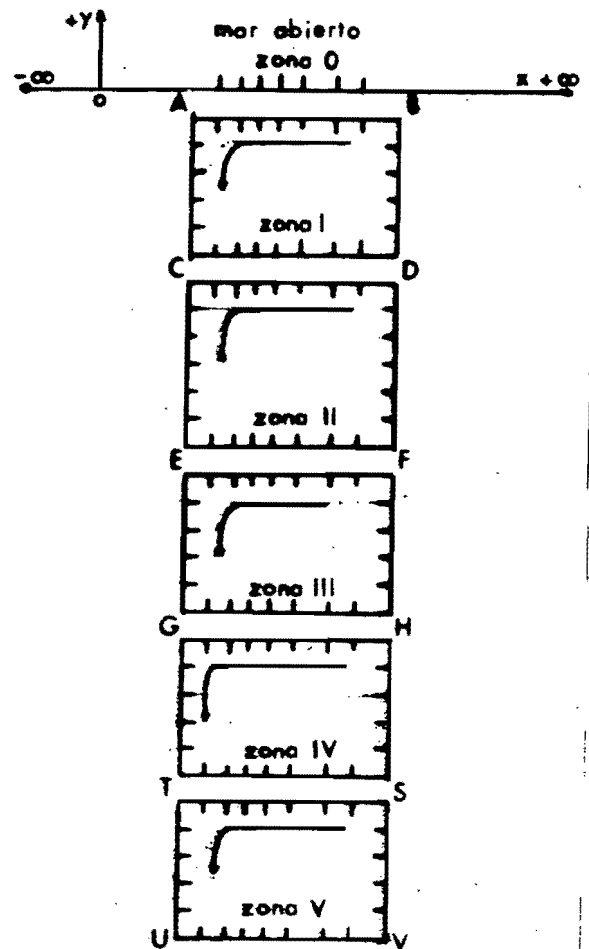


Fig 1 Esquema de un puerto dividido en zonas

directa. N_1 es el número de segmentos en que se ha dividido la zona I, incluyendo los segmentos de las fronteras con la zona de mar abierto (AB) y con la zona II (CD). Dichos segmentos comienzan en el punto B y están numerados en forma antihoraria -debido a que en ese sentido, se establece el recorrido positivo de la integral de línea de la fórmula de Green-.

Los valores desconocidos del vector P_1 se indican como $(D_1)_{11}, (D_1)_{12}, \dots, (D_1)_{1b_1}$ en la frontera con la zona de mar abierto, $(D_1)_{1m_2}, (D_1)_{1m_2+1}, \dots, (D_1)_{1n_2}$ en la frontera con la zona II, y cero en los puntos de las fronteras sólidas. La matriz U_1 es de tamaño $N_1 \times B_1$, donde $B_1 = b_1 + b_2$, D_1 es un vector columna con B_1 elementos. Por otro lado llamando a

$$M_1 = (b_0 G_n - I)^{-1} (b_0 G U_1) \quad (50)$$

donde M_1 es una matriz de $N_1 \times B_1$, se puede escribir la ecuación 47 del modo siguiente

$$F_1 = M_1 D_1 \quad (51)$$

Efectuando el procedimiento anterior, para el resto de las zonas se tiene, que los valores de la función f , en cada zona se pueden conocer a través del planteamiento de ecuaciones matriciales similares a la ecuación 51, como se anota a continuación

$$\text{zona 2} \quad F_2 = M_2 D_2 \quad (52)$$

$$\text{zona 3} \quad F_3 = M_3 D_3 \quad (53)$$

$$\text{zona 4} \quad F_4 = M_4 D_4 \quad (54)$$

$$\text{zona 5} \quad F_5 = M_5 D_5 \quad (55)$$

Cabe señalar que estas ecuaciones se han puesto en función de f , y de su derivada, por tanto aun no es posible conocer dicha función. Otro punto importante en el método, es el planteamiento de una ecuación que permita conocer la función f en la región de mar abierto.

Dicha función puede aproximarse a través de una combinación lineal de la ola incidente, la ola reflejada y la ola radiada. Donde la primera se debe a la ola que arriba desde mar abierto hacia la línea de costa, la segunda ocurre desde el puerto y la tercera se debe a que la ola es "radiada" desde la entrada del puerto. Esta última es

también conocida como función de ola diseminada, y resulta -como ya se mencionó- al desplazarse la ola en el interior del puerto desde la entrada del mismo.

Respecto a esta última función - f_s -, puede ser expresada según la solución de Weber a la ecuación de Helmholtz (Rahman M. 1988), para la frontera de la region 0 en forma simplificada como

$$f_s(\xi', 0) = \frac{i}{2} \int_A^B H_0^{(1)}(k_0 r') \frac{\partial}{\partial n} f_s(\xi, 0) d\xi \quad (56)$$

que en forma discreta se escribe

$$f_s(x_i, 0) = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^1 H_0^{(1)}(k_0 r_{ij}) \frac{\partial}{\partial n} [f_s(x_j, 0)] \Delta s_j \quad (57)$$

donde

$(x_i, 0)$ coordenadas del punto medio del segmento i en la entrada del puerto.

$(x_j, 0)$ coordenadas del punto medio del segmento j en la entrada del puerto.

Δs_j longitud del j -ésimo segmento de la entrada del puerto.

En forma matricial la ecuación 57 se puede escribir en la forma

$$F_s = -b_0 H_s D_s \quad (58)$$

En donde

$$b_0 = -\frac{i}{2}$$

$$F_s = f_s(x_i, 0) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, b_1 \quad (59)$$

$$D_s = \frac{\partial}{\partial n} [f_s(x_j, 0)] \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, b_1 \quad (60)$$

$$(H_s)_{ij} = \{ J_0(k_0 r_{ij}) + i Y_0(k_0 r_{ij}) \} \Delta s_j \quad (61)$$

$$\text{para } i \neq j \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, b_1 \\ j = 1, 2, \dots, b_1 \end{array}$$

$$(H_s)_{ii} \cong \left[1 + \frac{2i}{\pi} \left[\text{Ln} \left(\frac{k_0 \Delta s_i}{4} \right) - 0.42278 \right] \right] \Delta s_i \quad (62)$$

$$i = 1, 2, \dots, b_1$$

En la entrada del puerto $y=0$, entonces la ola incidente y la ola reflejada son una constante igual a la unidad. Por lo que la función a la entrada del puerto puede expresarse

$$F_o = 1 - b_o H_s \quad D_s = 1 - H D_s \quad (63)$$

En la cual

$H = b_o H_s$, siendo una matriz de tamaño $b_1 \times b_1$

$$F_o = f_o(x_i, 0) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, b$$

1 vector columna con b_1 elementos iguales a la unidad.

2.2 IGUALDAD DE CONDICIONES

Anteriormente, se evaluó la función f en la frontera de cada zona en que se subdividió el puerto y en la zona de mar abierto, particularmente a la entrada del puerto, todo ello en términos de la derivada normal $\frac{\partial f}{\partial n}$. Con el fin de conocer tal derivada se usará ahora la "igualdad de condiciones" en las fronteras imaginarias y en la entrada del puerto.

Para realizar lo antes señalado, se echará mano de dos condiciones de continuidad.

1. En la frontera imaginaria entre dos zonas cualesquiera i y j , en cualquier tiempo, la elevación de la superficie del agua debe ser continua, i.e.

$$\eta_i = \eta_j \quad (64)$$

de la ecuación 14

$$\eta_i = - \frac{B_o e^{k_i h_i}}{g} \cosh(k_i h_i) f_i(x, y) e^{-i\omega t} \quad (65)$$

Sustituyendo esta última ecuación en la ecuación 64 y reorganizando términos

$$f_i(x, y) = \frac{e^{k_j h_j} \cosh(k_j h_j)}{e^{k_i h_i} \cosh(k_i h_i)} f_j(x, y) \quad (66)$$

2. El intercambio de masa a través de la frontera imaginaria de la zona i a la zona j debe ser de igual magnitud y signo contrario. En términos de la función potencial esta dada por

$$\int_{-h_i}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dz = - \int_{h_i}^0 \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dz \quad (67)$$

De este modo la ecuación 13 queda

$$\int_{-h_i}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dz = - \frac{B_o e^{k_i h_i}}{i \sigma k_i} \sinh(k_i h_i) \frac{\partial}{\partial n} f_j(x,y) e^{-i\omega t}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación 67 y reorganizando términos

$$\frac{\partial}{\partial n} f_i(x,y) = - \frac{k_i e^{k_j h_j} \sinh(k_j h_j)}{k_j e^{k_i h_i} \sinh(k_i h_i)} \frac{\partial}{\partial n} f_j(x,y) \quad (68)$$

Para explicar como se obtiene la solución de las ecuaciones matriciales previamente establecidas, a través de las condiciones de igualdad señaladas - 66 y 68-. Se hará uso de la fig. 1, la cual considera un puerto dividido en 5 zonas según su batimetría:

A fin de que la explicación resulte mas clara, debe recordarse lo siguiente en las fronteras imaginarias entre cada zona, así como en la frontera con la zona de mar abierto

Zona	# elem. que forman la frontera	Zona	Frontera
Mar abierto	1,2,3.....,b ₀	I	AB
I	1,2,3.....,b ₁	Mar abierto	AB
I	m ₂ ,m ₂₊₁,n ₂	II	CD
II	1,2,3.....,b ₂	I	CD
II	m ₃ ,m ₃₊₁,n ₃	III	EF
III	1,2,3.....,b ₃	II	EF
III	m ₄ ,m ₄₊₁,n ₄	IV	GH
IV	1,2,3.....,b ₄	III	GH
IV	m ₅ ,m ₅₊₁,n ₅	V	TS
V	1,2,3.....,b ₅	IV	TS

Debido a que se tiene como condición de frontera, que la derivada normal de la función f, en las fronteras sólidas vale cero. Se utilizarán los valores de f en las fronteras imaginarias, y en la frontera con el mar abierto.

Zona I

Para escribir la ecuación 51 que considere solo la entrada al puerto AB y la frontera imaginaria CD, se debe definir otra matriz, que se llamará M_{1A} . La cual estará formada por los b_1 renglones y los m_2 -ésimos a n_2 -ésimos renglones de la matriz M_1 . Siendo éstos últimos los valores de la función f_1 sobre la frontera AB y CD respectivamente.

Los valores de la función f_1 en la entrada AB se denotarán como $(F_1)_1, (F_1)_2, \dots, (F_1)_{b_1}$ y los de la frontera imaginaria CD $(F_1)_{m_2}, (F_1)_{m_2+1}, \dots, (F_1)_{n_2}$; por lo que podemos escribir

$$F_{1A} = M_{1A} D_1 \quad (69)$$

F_{1A} vector columna con B_1 elementos

M_{1A} matriz de tamaño $B_1 \times B_1$

D_1 vector columna con B_1 elementos, $B_1 = b_1 + b_2$

Zona II

Los valores de la función f_2 en las fronteras imaginarias CD y EF respectivamente se denotan como $(F_2)_1, (F_2)_2, \dots, (F_2)_{b_2}$ y $(F_2)_{m_2}, (F_2)_{m_2+1}, \dots, (F_2)_{n_2}$

F_{2A} vector columna con B_2 elementos

M_{2A} matriz de tamaño $B_2 \times B_2$

D_2 vector columna con B_2 elementos, $B_2 = b_2 + b_3$

La matriz M_{2A} , esta formada por los primeros b_2 renglones y los m_2 -ésimos a n_2 -ésimos renglones de la matriz M_2 . (Valores de f_2 en CD y EF respectivamente)

$$F_{2A} = M_{2A} D_2 \quad (70)$$

Ahora los primeros b_2 elementos de los vectores F_{2A} y D_2 están relacionados con los m_2 -ésimos a n_2 -ésimos elementos de los vectores F_{1A} y D_1 , por estar todos en la frontera imaginaria CD. De este modo se tiene según las ecuaciones 66 y 68

$$\begin{bmatrix} (F_2)_1 \\ \vdots \\ (F_2)_{b_2} \end{bmatrix} = \frac{e^{k_1 h_1} \cosh(k_1 h_1)}{e^{k_2 h_2} \cosh(k_2 h_2)} \times \begin{bmatrix} (F_1)_{n_2} \\ \vdots \\ (F_1)_{m_2} \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\begin{bmatrix} (D_2)_{b_2} \\ \vdots \\ (D_2)_1 \end{bmatrix} = \frac{-k_2 e^{k_1 h_1} \sinh(k_1 h_1)}{k_1 e^{k_2 h_2} \sinh(k_2 h_2)} \times \begin{bmatrix} (D_1)_{m_2} \\ \vdots \\ (D_1)_{n_2} \end{bmatrix} \quad (72)$$

Sustituyendo las dos últimas expresiones en la ecuación 70, tenemos que ambas ecuaciones 71 y 72 pueden sustituirse en los primeros b_2 renglones, y en los m_2 -ésimos a n_2 -ésimos se puede sustituir sólo la ecuación 72.

Así que luego de efectuar los productos y simplificar queda

* primeras b_2 ecuaciones del sistema de la ecuación 70

$$\begin{bmatrix} (F_2)_1 \\ \vdots \\ (F_2)_{b_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (M'_2)_{1,1} \dots (M'_2)_{1,b_2} & (M''_2)_{1,b_2+1} \dots (M''_2)_{1,b_2+1} \\ \vdots & \vdots \\ (M'_2)_{b_2,1} \dots (M'_2)_{b_2,b_2} & (M''_2)_{b_2,b_2+1} \dots (M''_2)_{b_2,b_2+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (D_1)_{m_2} \\ \vdots \\ (D_1)_{n_2} \\ (D_2)_{n_2} \\ \vdots \\ (D_2)_{m_2} \end{bmatrix} \quad (73)$$

En donde debido a las simplificaciones realizadas, las primeras b_2 columnas marcadas como primas están multiplicadas por el factor

$$\frac{k_2 \tanh(k_1 h_1)}{k_1 \tanh(k_2 h_2)}$$

y las últimas b_2 columnas marcadas como doble prima están multiplicadas por

$$\frac{e^{k_2 h_2} \cosh(k_2 h_2)}{e^{k_1 h_1} \cosh(k_1 h_1)}$$

* últimas b_3 ecuaciones del sistema de la ecuación 70

$$\begin{bmatrix} (F_2)_{m3} \\ \vdots \\ (F_2)_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (M_2''')_{m3,1} \dots (M_2''')_{m3,b2} & (M_2)_{m3,b2+1} \dots (M_2)_{m3,B2} \\ \vdots & \vdots \\ (M_2''')_{n3,1} \dots (M_2''')_{n3,b2} & (M_2)_{n3,b2+1} \dots (M_2)_{n3,B2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (D_1)_{m2} \\ \vdots \\ (D_1)_{n2} \\ (D_2)_{n3} \\ \vdots \\ (D_2)_{m3} \end{bmatrix} \quad (74)$$

Donde las primeras b_2 columnas marcadas con triple prima, luego de la sustitución realizada, están multiplicadas por el factor

$$\frac{-k_2 e^{k_1 h_1} \sinh(k_1 h_1)}{k_1 e^{k_2 h_2} \sinh(k_2 h_2)}$$

Este mismo procedimiento se aplica a las restantes zonas en que se dividió el puerto, esto es, plantear para dos zonas adyacentes el sistema matricial reducido $F_{mA} = M_{mA} D_m$, $m = 1,3,4,5$. Luego establecer las condiciones de igualdad para la frontera imaginaria entre las dos zonas.

Sustituir las consabidas relaciones entre vectores de la función f y de su derivada normal, para obtener arreglos matriciales en cada zona semejantes a 73 y 74.

Es pertinente señalar que las ecuaciones matriciales para el puerto son de forma similar -ecuaciones 51 a 55-, no así la correspondiente a la zona de mar abierto -ecuación 63-; pero ello no obsta para darle el mismo tratamiento, en conjunto con el sistema matricial de la zona 1.

2.3 SOLUCION FINAL

Luego de efectuar lo anterior es necesario efectuar dos combinaciones matriciales. Cada una de las cuales tendrá como incógnitas a todos los valores de la función f y su derivada normal, en las fronteras imaginarias y la entrada del puerto.

1. El primer arreglo se efectúa con los elementos de las matrices M'_{1A} , M'_{3A} y M'_{5A} . La primera contiene los elementos de las fronteras AB y CD, en tanto la segunda los correspondientes a las fronteras EF y GH; la última está formada por los elementos de la frontera TS. Cabe señalar que las dos últimas matrices, son el resultado de aplicar la igualdad de condiciones para la zona que indica el subíndice; por tanto son semejantes a las ecuaciones 73 y 74, para su respectiva zona, como ya se indicó.

El arreglo matricial se escribe así:

$$F_A = M_A D_A \quad (75)$$

donde F_A vector columna con B elementos

M_A matriz de tamaño $B \times B$

D_A vector columna con B elementos

$$B = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

2. El segundo arreglo se obtiene de las matrices de las regiones 0, II y IV, quedando éste de la siguiente manera

$$F_A = C_A + H_A D_A \quad (76)$$

donde

C_A vector columna con B elementos, sus primeros b_1 elementos son

$$\frac{e^{k_0 h_0} \cosh(k_0 h_0)}{e^{k_1 h_1} \cosh(k_1 h_1)}$$

y los otros valen cero.

H_A matriz de tamaño $B \times B$

Esta última matriz está formada por las matrices H' , M'_{2A} y M'_{4A} . Donde la primera matriz contiene los elementos de la frontera AB, la segunda los correspondientes a las fronteras CD y EF, y la tercera los de la frontera TS.

En ambos casos la matriz formada - M_A y H_A - es una matriz con muchos ceros, estando los elementos distintos de cero agrupados cerca de la diagonal principal.

A continuación se igualan las ecuaciones 75 y 76, para posteriormente despejar el vector D_A y entonces conocer los valores de la derivada normal de la función f , en todas las fronteras imaginarias y en la entrada del puerto.

$$D_A = (M_A - H_A)^{-1} C_A \quad (77)$$

Conocidas dichas derivadas, es posible evaluar f en la frontera de cada zona, según las ecuaciones 51 a 55.

Con ello es posible evaluar f en cualquier punto dentro del puerto. De la ecuación 30, reescrita en forma de suma y aplicada para cada región se tiene

$$f(x,y) = \frac{-i}{4} \sum_{j=1}^{N_m} \left\{ f_m(x_j, y_j) \left[k_m H_1^{(1)}(k_m r) \frac{\partial r}{\partial n} \right] - H_0^{(1)}(k_m r) \frac{\partial}{\partial n} f_m(x_j, y_j) \right\} \Delta s_j \quad (78)$$

$m = 1, 2, 3, 4, 5$



2.4 FACTOR DE AMPLIFICACION

El factor de amplificación R , se define como la relación entre la sollicitación a la entrada y a la salida de un sistema forzado. Es decir, se induce una determinada excitación al sistema (entrada), y el sistema arroja cierta respuesta (salida).

En las oscilaciones de un puerto, el factor de amplificación en cualquier punto (x,y) dentro del puerto está definido como la relación de la amplitud de ola en el punto (x,y) y la suma de las olas reflejadas e incidentes en la línea de costa con la entrada cerrada.

$$R_m = \frac{Z_m(0)}{Z_0(0)} |f_m(x,y)| \quad (79)$$

$$Z(0) = B_0 e^{kh} \cosh(kh), \quad m = 1, 2, 3, 4, 5$$

m denota la región en la que se valúa f y se toma el valor absoluto de f , porque se trata de una función de variable compleja.

Es evidente que para ciertas frecuencias del oleaje -entiéndase período del mismo-, el factor R_m tomará valores superiores a uno, lo

cual indica que se esta obteniendo una respuesta mayor a la inducida, y por tanto amplificaciones de la ola incidente. Lo cual significa presencia del fenómeno de resonancia.

3. COMENTARIOS DE LA APLICACION DEL METODO AL PUERTO DE KINCARDINE.

Para la aplicación del método al puerto canadiense de Kincardine, se dividió a éste en cinco zonas de acuerdo a su batimetría, además cada zona fue considerada con profundidad constante.

La frontera de cada zona fue dividida como en seguida se indica, la longitud de los segmentos no es constante, además las fronteras entre las zonas adyacentes así como la entrada al puerto, fueron divididas en seis segmentos.

Zona	# total de segmentos	prof.(m)
I	43	5.3
II	50	4.0
III	43	4.4.
IV	90	3.3
V	48	1.9
0	---	5.6

La respuesta (presencia o ausencia de resonancia) fue calculada para 10 puntos dentro del puerto, por otra parte, estudios anteriores mostraron que puede mejorarse la precisión de los resultados, si

$$\frac{\Delta S}{L} \leq \frac{1}{10} \quad , \quad L : \text{longitud de la ola}$$

dicha condición fue empleada en el cálculo.

Un esquema con la forma del puerto, así como las regiones en que fue dividido y la ubicación de los puntos calculados (estaciones), se muestran en la figura 2.

Los resultados obtenidos por medio del método, fueron dibujados, con la frecuencia de ola (σ) en el eje horizontal y el factor de amplificación (R) en el vertical. Los consabidos dibujos muestran lo siguiente:

* la respuesta es bastante parecida para puntos contenidos en una misma zona.

* para las dos primeras zonas el factor de amplificación mas grande ocurre para frecuencias de aproximadamente 0.005 y 0.008 Hz. La magnitud del primero es de 2.5 en la zona I ($\sigma = 0.008$ Hz), y de 5.7 a 7.5 en la zona II ($\sigma = 0.005$ Hz).

* a medida que la ola se aproxima a la región mas grande del puerto, el factor de amplificación aumenta en forma notable; el valor mas

grande alcanzado es de 10 (estación h).

* la respuesta en los puntos contenidos dentro de la zona mas grande, es bastante singular, en cuanto a que presenta factores de amplificación grandes -superiores en magnitud a 7- para dos frecuencias, una de 0.010 Hz y otra cercana a 0.035 Hz, lo cual muestra en forma evidente la presencia de resonancia para las citadas frecuencias.

* de acuerdo con el último punto señalado, para un mismo oleaje y una zona mayor, es factible encontrar más modos libres de oscilación.

* es notable como para una frecuencia de aproximadamente 0.015 Hz, el factor de amplificación toma un valor cercano a cero, en la zona de mayor tamaño dentro del puerto.

* lamentablemente no se presentan valores de mediciones, para con ellos establecer alguna comparación con los resultados del cálculo.

* sin embargo es posible que existan o bien se pretenda hacer dichas mediciones, pues todos los puntos calculados se encuentran relativamente cerca de la orilla.

Finalmente, para aclarar un poco mas lo referente a los resultados obtenidos de la aplicación del método al puerto de Kincardine, a continuación se presenta la figura 3, donde se dibujaron los resultados obtenidos para la estación g en la zona IV.

En dicha figura puede observarse la presencia de tres picos para las siguientes frecuencias

σ (Hz)	T (s)	Rm
0.025	251.3	5.4
0.038	165.3	3.0
0.047	133.7	0.9

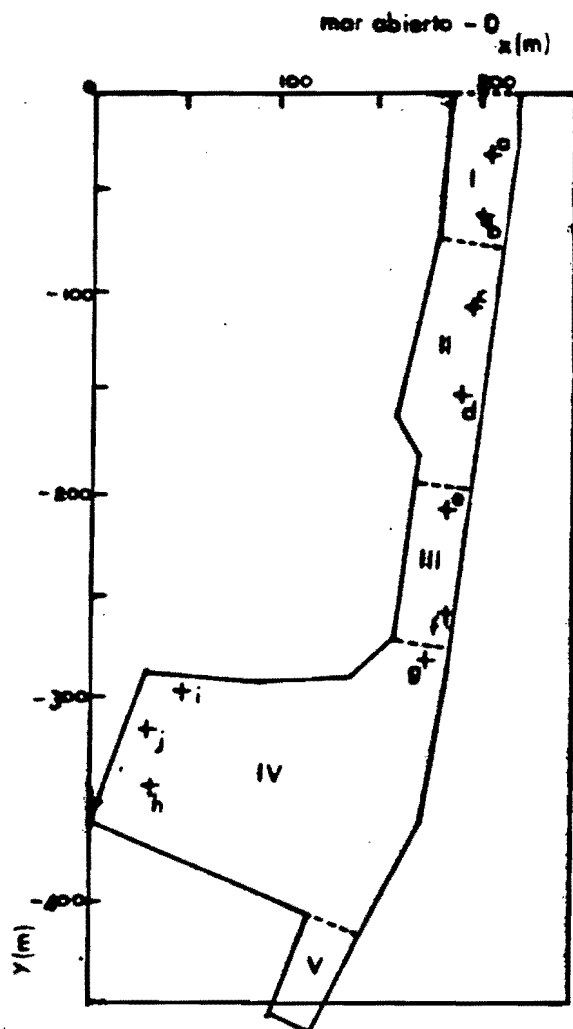


Fig 2 Diagrama esquemático del puerto de Kincardine.

Esta disposición decreciente en los valores de los factores de amplificación se presentó, aunque no en forma tan clara para las zonas anteriores (zonas I, II y III). Una característica más es la nula existencia de valores uniformes en el factor de amplificación, para distintos valores de la frecuencia.

Esto último muestra que las medidas preventivas y su frecuencia, dependen del riesgo que se quiera correr. En otras palabras si se acepta un riesgo mínimo, se estará aceptando un factor de amplificación máximo igual a uno, el cual para el caso específico de la estación g en la zona IV es superado en el intervalo de frecuencias entre 0.019 y 0.04 Hz.

En tanto que si se acepta un factor de amplificación igual a 2 los rangos de la frecuencia en que se rebasa este último son de 0.021 a 0.032 Hz y de 0.036 a 0.038 Hz. Con este ejemplo se aprecia que a menor riesgo, mayor rango de la frecuencia en el que se limita la actividad portuaria.

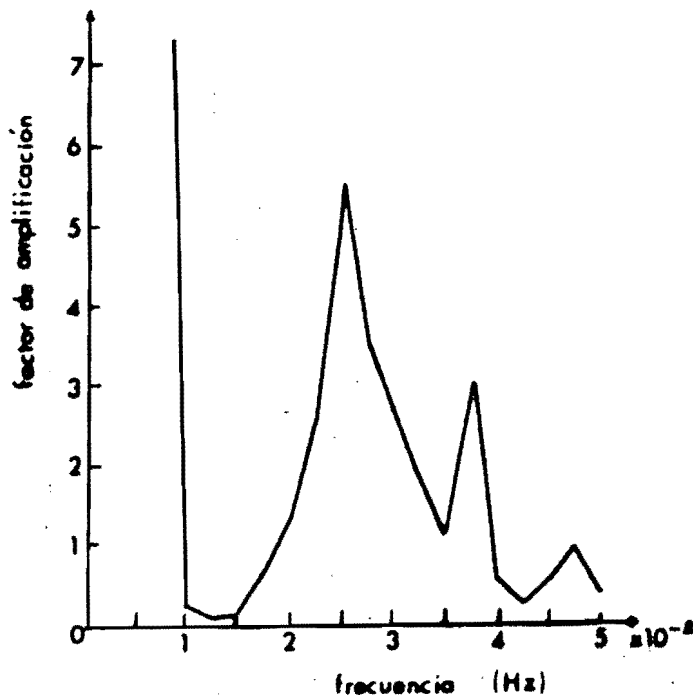


Fig 3 Respuesta numérica del puerto de Kiicardine.
Zona IV, estación g.

4. CRITICA DEL METODO

La manera de resolver la ecuación de Helmholtz, a través de una ecuación integral, así como aprovechar las características de la función de Green, resultan por demás una herramienta poderosa para atacar el problema.

Lo antes mencionado, en virtud de que permite ligar en forma directa la acción del mar sobre el puerto, aunque debe aclararse que dicha acción se ha simplificado, pero no por ello se aleja demasiado de una condición real.

Una gran ventaja del método es que la solución final se trabaja a través de un sistema matricial reducido, lo cual implica rapidez en la obtención de resultados. Aunado a lo anterior, con esos resultados es posible calcular la respuesta del puerto en cualquier punto del mismo.

Sin embargo para la obtención de los elementos del sistema matricial reducido, se requiere un cálculo bastante elaborado, primero para formar las matrices de cada zona, y más tarde para efectuar la combinación apropiada de ellas.

Por otra parte no puede dejarse de lado que todas las funciones planteadas - a consecuencia de utilizar la función de Green-, son de variable compleja. De este modo, si se piensa en sistematizar el método a través de una computadora, es necesario considerar lo que ahora se menciona, a fin de dar el manejo adecuado a las operaciones.

Adicionalmente, este método es en cierto modo una continuación de otros, de ahí que resulte un avance más en el estudio del fenómeno de la resonancia en puertos.

Finalmente un poco al margen de la esencia del método, es insoslayable mencionar la gran cantidad de errores de tipo mecanográfico, que tiene el escrito sobre el cual se apoyó el presente trabajo; así como la forma tan poco clara que está escrito en alguna de sus partes.

5. CONCLUSIONES

Debido a que el problema teórico ofrece bastantes dificultades, el método expuesto resulta por demás notable e ingenioso, en cuanto a la serie de argucias matemáticas que utiliza, para salvar dichas dificultades y aproximarse en lo posible a una condición real.

Existen en él -como en todo lo que el ser humano produce- ventajas y desventajas. Entre las últimas se puede mencionar, el cálculo tan elaborado que se necesita para obtener los resultados finales que proporciona el método, pues si se piensa en un puerto de mayor tamaño que el presentado anteriormente, el cálculo inicial se incrementa en forma notable.

En cuanto a los aspectos positivos existen varios, tales como, hacer intervenir como agente excitador del sistema no sólo a la ola incidente, sino también a la ola reflejada, así como obtener la respuesta en cualquier punto dentro del puerto, a partir del conocimiento de los valores de unos cuantos puntos (en las fronteras imaginarias). Sin necesidad de resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales.

Asimismo es posible analizar formas complicadas de puertos, gracias a que una parte importante del método se sustenta en la división en partes del puerto; aun cuando existe la limitante de considerar una profundidad constante en cada división hecha.

Respecto a esto último, existe la duda de que tan aceptable o no es esa hipótesis, dado que no se presentan resultados experimentales, ya fueran de un modelo, o mejor aún -aunque más difícil obtenerlos, ciertamente- de un prototipo. Ellos servirían de punto de referencia para estimar la calidad cuantitativa -ingenierilmente es la que más interesa- y cualitativa -para mejorarlo a través de nuevas investigaciones- del método.

REFERENCIAS

1. Apostol T. Calculus Vol. II. Wiley International 1969.
2. Bruun P. Port Engineering. Gulf Publishing Co. 1989.
3. Green C. Integral Equations Methods. Nelson & Sons 1969.
4. Horikawa K. Coastal Engineering. Halsted Press 1978.
5. Kaplan W. Cálculo Avanzado. Ed. Continental 1962.
6. Lee J.J & Raichlen F. Oscillations in harbors with connected basins, J. of the Waterway, Harbors and Coastal Engineering, ASCE vol. 98 No.WW3, August 1972.
7. Levi E. Teorías y Métodos de las Matemáticas Aplicadas. DEPMI U.N.A.M. México 1965.
8. Rahman M. The Hydrodynamics of Waves and Tides, with Applications. 1988
9. Sánchez J.L. Doce Algoritmos para Resolver Problemas de Hidráulica No. 412. Instituto de Ingeniería, U.N.A.M. 1978.
10. Sánchez J.L. Manual de Hidráulica Marítima Elemental. C.F.E, México 1987 .
11. Wiegel R.L. Oceanographical Engineering. Prentice-Hall 1966.