

1832

U N A M  
FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

" PANDEO DE UN CASCARON CILINDRICO CIRCULAR BAJO LA ACCION  
COMBINADA DE CARGA AXIAL Y PRESION LATERAL UNIFORMES "

TRABAJO QUE PARA SUSTENTAR EL  
EXAMEN DE MAESTRIA PRESENTA -

CARLOS RAMIREZ TOLEDO

MARZO 1986.

MAESTRÍA EN INGENIERÍA (MECÁNICA)



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPFI

T. UNAM  
1 9 8 6  
RAM

NOTACION :

$D$	Rigidez a la flexión del cascarón [ $D= Eh^3/12(1-\nu^2)$ ]
$E$	Módulo de Elasticidad
$G$	Módulo de Elasticidad en cortante
$h$	Espesor de la pared del cascarón
$L$	Longitud del cascarón
$m$ $2n$	Número de medias ondas longitudinal y circunferencial en que se pandea el cascarón.
$M_x, M_\theta$	Momentos de flexión por unidad de longitud
$M_{x\theta}, M_{\theta x}$	Momentos de torsión por unidad de longitud
$N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}$	Fuerzas normales y cortantes por unidad de longitud
$(N_x)_{cr}$	Carga crítica en un cascarón cilíndrico sujeto a -- compresión axial
$q$	Presión uniforme
$q_{cr}$	Presión lateral crítica en un cascarón cilíndrico
$Q_x, Q_\theta$	Fuerzas cortantes por unidad de longitud
$r_x, r_y$	Radios de curvatura del cascarón
$u, v, w$	Desplazamientos en las direcciones $x, y, z$ respectivamente.
$x, y, z$	Coordenadas rectangulares
$\alpha$	Parámetro de delgadez del cascarón [ $\alpha=h^2/12a^2$ ]
$\gamma$	Deformación unitaria cortante
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Deformaciones unitarias normales en las direcciones $x, y, z$ respectivamente
$\lambda$	Factor de pandeo longitudinal
$\theta$	Angulo
$\nu$	Relación de Poisson
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Esfuerzos normales en las direcciones $x, y, z$ respectivamente.

- $\sigma_{cr}$  Esfuerzo crítico de compresión axial
- $\sigma_{ced}$  Esfuerzo de cedencia
- $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  Esfuerzos cortantes actuando en planos normales a los ejes X,Y,Z y paralelos a los ejes Y,Z,X respectivamente
- $\phi$  Parámetro adimensional
- $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$  Cambio de curvatura y torsión de un cascarón

NOTACION ABREVIADA PARA DERIVACION PARCIAL :

$$\begin{aligned}
 u_x &\equiv \frac{\partial u}{\partial x} ; & u_{xx} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; & u_{xxx} &\equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \dots \dots \dots etc. \\
 u_\theta &\equiv \frac{\partial u}{\partial \theta} ; & u_{x\theta} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} ; & u_{xx\theta} &\equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \theta} \dots \dots \dots etc. \\
 N_{x,x} &\equiv \frac{\partial N_x}{\partial x} ; & N_{x,xx} &\equiv \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} ; & N_{x,xxx} &\equiv \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} \dots \dots \dots etc. \\
 N_{x\theta,x} &\equiv \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} ; & N_{x\theta,x\theta} &\equiv \frac{\partial^2 N_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} ; & & \dots \dots \dots etc.
 \end{aligned}$$

## I.- ANTECEDENTES :

Siempre que se usan varillas, placas planas ó curvas muy delgadas en las construcciones, es necesariamente conveniente considerar la posibilidad de PANDEO, y de ésta forma se origina el problema general de ESTABILIDAD ELASTICA. Las primeras investigaciones de problemas de pandeo fueron realizadas por L. Euler y J.L. Lagrange hace más de dos siglos, con lo cual se han podido resolver un cierto número de problemas aislados.

La teoría del pandeo trata principalmente de las condiciones bajo las cuales el equilibrio deja de ser estable.

Equilibrio :

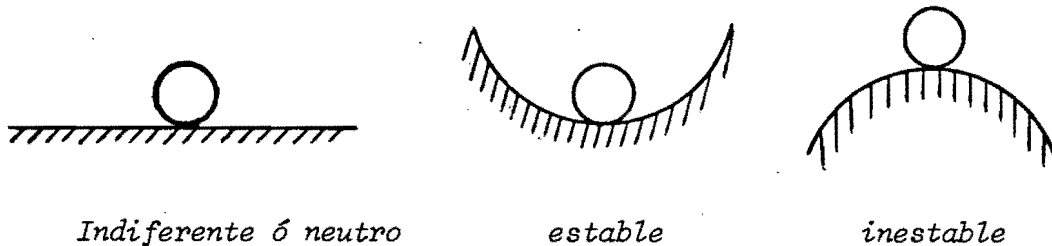


Fig. No.1 Formas de equilibrio.

En el sentido práctico una configuración de equilibrio de un sistema mecánico se dice que es ESTABLE si fuerzas accidentales, choques vibraciones, excentricidades, imperfecciones, heterogeneidades, esfuerzos residuales y otras posibles irregularidades no causan que el sistema se aparte excesiva ó desastrosamente de tal configuración.

En el sentido matemático, la estabilidad es interpretada usualmente como el hecho de que perturbaciones infinitesimales originen únicamente desviaciones infinitesimales de la configuración dada de equilibrio.

El sólo hecho que un montaje sea estable en este refinado sentido no necesariamente implica que el mismo sea seguro desde el punto de vista --

ingenieril, por ejemplo un barco puede ser estable en el sentido de que las pequeñas olas de una bahía no lo hacen zozobrar, sin embargo éste puede no ser lo suficientemente estable para un viaje en el oceano.

Similarmente una estructura convexa tipo cascarón, tal como el domo de un estadio puede estar en una configuración de equilibrio estable, sin embargo una sacudida puede causar que se deforme instantaneamente de lado a lado.

Tales ilustraciones indican que la teoría infinitesimal de la estabilidad debiera ser usada con discreción, no obstante que ha tenido innumerables aplicaciones prácticas.

Entonces el significado clásico de ESTABILIDAD es: LAS PERTURBACIONES INFINITESIMALES DE UN SISTEMA ESTABLE CAUSAN UNICAMENTE DESPLAZAMIENTOS INFINITESIMALES EN EL ESPACIO DE CONFIGURACIONES.

Se dice que un sistema está en un estado de equilibrio INESTABLE si una arbitrariamente pequeña cantidad de energía, suministrada de una fuente externa origina que el sistema experimente desplazamientos grandes. Sin embargo esto no es del todo cierto; por ejemplo una mesa en reposo sobre el piso está ciertamente en un estado de equilibrio estable, no obstante que teóricamente se puede mover la mesa hasta donde se quiera sin que se realice ningún trabajo.

Para hacer esto, se levanta la mesa ligeramente de forma tal que las reacciones del piso cesen de actuar sobre la mesa y entonces se desplaza horizontalmente la misma. Ciertamente si las fuerzas externas ejecutan trabajo positivo para producir cualquier desplazamiento pequeño del sistema dado, el equilibrio es estable, puesto que entonces las perturbaciones infinitesimales no producen grandes efectos.

Sin embargo, de acuerdo al ejemplo dado anteriormente, esta condición es sólo suficiente para propósitos de estabilidad, pero no es necesaria.

En la teoría del pandeo se considera una clase  $\Gamma$  de configuraciones sin pandeo, correspondientes a un rango de valores de un parámetro real  $P$ . Ordinariamente las configuraciones no pandeadas son caracterizadas por simetría geométrica. Usualmente  $P$  designa una carga externa actuando sobre el sistema, sin embargo esto no es esencial dado que por ejemplo en problemas de pandeo -- térmico  $P$  puede denotar temperatura.

En el problema clásico de pandeo, la configuración en la clase  $\Gamma$  es estable si  $P$  es pequeña, pero no es estable si  $P$  es grande, el problema consiste en determinar el valor de  $P$  para el cual la configuración en la clase  $\Gamma$  deja de ser estable, este valor es llamado el "valor crítico de  $P$ ", de notándose por  $P_{cr}$ .

En la práctica, la mera existencia de estabilidad no garantiza un -- diseño seguro, lo que es importante en Ingeniería es el grado de estabilidad. T. Von Karman y H.S. Tsien en 1939 notaron que algunas estructuras, particularmente del tipo "cascañón" pueden experimentar estados de escasa estabilidad, -- tales que vientos pequeños u otros disturbios originan que éstos se deformen -- instantáneamente en formas inconvenientes. Esta condición, conocida como "arrugamiento total" es caracterizada por un hundimiento en la curva de carga-deflección.

La teoría de "arrugamiento total" es esencialmente no-lineal, puesto que ella involucra el estudio de formas pandeadas. El grado de estabilidad -- puede ser medido por la cantidad de trabajo externo de las fuerzas laterales -- requerido para producir el estado de "arrugamiento total". El hecho de que el estado de "arrugamiento total" a menudo puede ser producido con una pequeña -- cantidad de trabajo suplementario, sugiere que el valor crítico de Euler es -- casi inalcanzable en algunos casos.



## II.- DEFINICIONES :

### 1.- CASCARON:

Podemos definir a un cascarón como un objeto, el cual para propósitos de análisis de esfuerzos, puede ser considerado como la materialización de una superficie curvada, lo que implica que el espesor (el cual se supondrá que es constante) del mismo es pequeño comparado con otras dimensiones, sin que ello implique tampoco que tal pequeñez sea extrema; tampoco se requiere que el cascarón esté hecho de un material elástico, dado que por ejemplo la existencia de flujo plástico en un cascarón hecho de acero no evita que éste sea tratado como un cascarón ó bien una burbuja de jabón la cual está hecha de un líquido puede ser tratada por los métodos de la teoría de cascarones.

Por supuesto que muchos cascarones están hechos de un material sólido y para los efectos del presente trabajo se considerará que este material es elástico de acuerdo con la ley de Hooke.

Como ejemplo de cascarones delgados podemos citar los siguientes :

- Tanques de diversas formas para contener fluidos
- El domo en el techo de un estadio ó una fábrica
- Recipientes sometidos a presión
- Tuberías
- Las llantas de un automóvil, camión, avión, etc.
- La cubierta exterior de un cohete
- El casco de un barco ó submarino
- Las alas de un avión
- Lámparas incandescentes
- Casquetes
- Projectiles
- La cubierta ó capacete de un automóvil
- etc.

Todos y cada uno de ellos poseen paredes curvadas.

## 2.- SUPERFICIE MEDIA.

Se define como tal a la superficie que bisecta al espesor del cascarón. Si se conoce la forma de la superficie media y el espesor del cascarón -- para cada uno de sus puntos, entonces geométricamente el cascarón queda descrito totalmente.

## 3.- SUPOSICIONES CINEMATICAS BASICAS.

En la teoría de cascarones, se usan todas las suposiciones que se -- usan en placas, las cuales establecen que :

A.- La relación entre el espesor del cascarón y el radio de curva -- tura de la superficie media es pequeño en comparación con la -- unidad, ésto es :

$$\frac{h}{a} \ll 1.0$$

B.- Las deflexiones que sufre el cascarón son pequeñas en compara -- ción al espesor del cascarón.

C.- Las secciones planas en todo el cascarón tomadas normales a la -- superficie media, permanecen planas y normales a la superficie -- media deformada después que el cascarón es sometido a flexión.

Esta hipótesis implica que las deformaciones transversales  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  son despreciables. La deformación normal  $\epsilon_z$  debida a -- la carga transversal puede también despreciarse.

D.- El esfuerzo normal  $\sigma_z$  es despreciable.

## 4.- CASCARON CILINDRICO.

La más simple de las geometrías de cascarones, es el cascarón cilin -- drico circular, el cual se puede formar moviendo una línea recta llamada GENE-

RADOR en forma paralela a una direcci3n y a lo largo de una trayectoria cerrada. Todos los planos que son normales a los generadores intersectan al cilindro en curvas id3nticas llamadas perfiles, d3ndole el nombre gen3rico al cascar3n de acuerdo a la forma del perfil (circular, parab3lico, el3ptico, etc.) En la figura 2, se ilustra tal geometrfa.

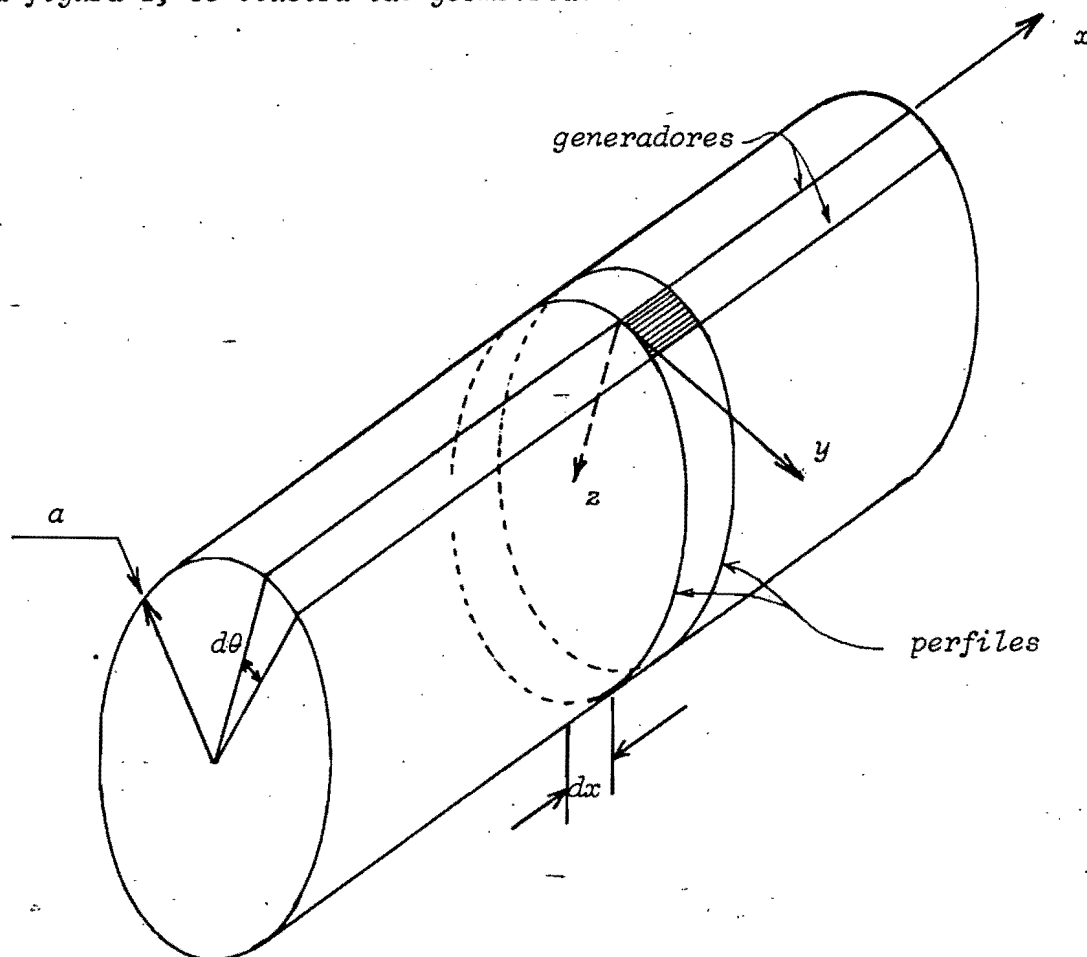


Figura No.2: Geometrfa del cascar3n cilndrico circular

Suponiendo que sobre el cascar3n actua una carga no uniforme, entonces se puede hacer un diagrama de cuerpo libre de la superficie media del elemento achurado que aparece en la figura 2 mostrando los "esfuerzos resultantes" que actúan sobre 3l tales como: fuerzas de membrana, normales y cortantes ( $N_x$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{x\theta}$ ,  $N_{\theta x}$ ), momentos flectores ( $M_x$ ,  $M_\theta$ ), momentos de torsi3n ( $M_{x\theta}$ ,  $M_{\theta x}$ ), --

fuerza cortante transversal ( $Q_x$ ,  $Q_\theta$ ), fuerzas de superficie ( $X, Y, Z$ ) como se ilustra en la figura 3.

#### 5.- ESFUERZOS EN UN ELEMENTO CASCARON.

Para obtener las expresiones que definen los esfuerzos en un cascarón, podemos cortar un elemento del cascarón mediante dos pares de planos adyacentes que sean perpendiculares a la superficie media del cascarón, situando el origen de coordenadas como se indica en la figura 4.

Debido a la curvatura del cascarón, la longitud de las caras (Fig.5) de un elemento localizado a una distancia  $Z$  por debajo de la superficie media valen :

$$(ds_x)_1 = (r_x - z) \frac{ds_x}{r_x} = \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) ds_x = (1 - zk_x) ds_x$$

$$(ds_y)_1 = (r_y - z) \frac{ds_y}{r_y} = \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) ds_y = (1 - zk_y) ds_y$$

$$\text{con } k_x = \frac{1}{r_x} \equiv \text{curvatura en } x$$

$$k_y = \frac{1}{r_y} \equiv \text{curvatura en } y$$

La fuerza que se transmite a lo largo de la longitud  $(ds_x)_1$  normal al plano ACDB es :

$$\sigma_y (ds_x)_1 dz = \sigma_y (1 - zk_x) ds_x dz$$

Y la fuerza normal total es entonces :

$$N_y ds_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y (1 - zk_x) ds_x dz$$

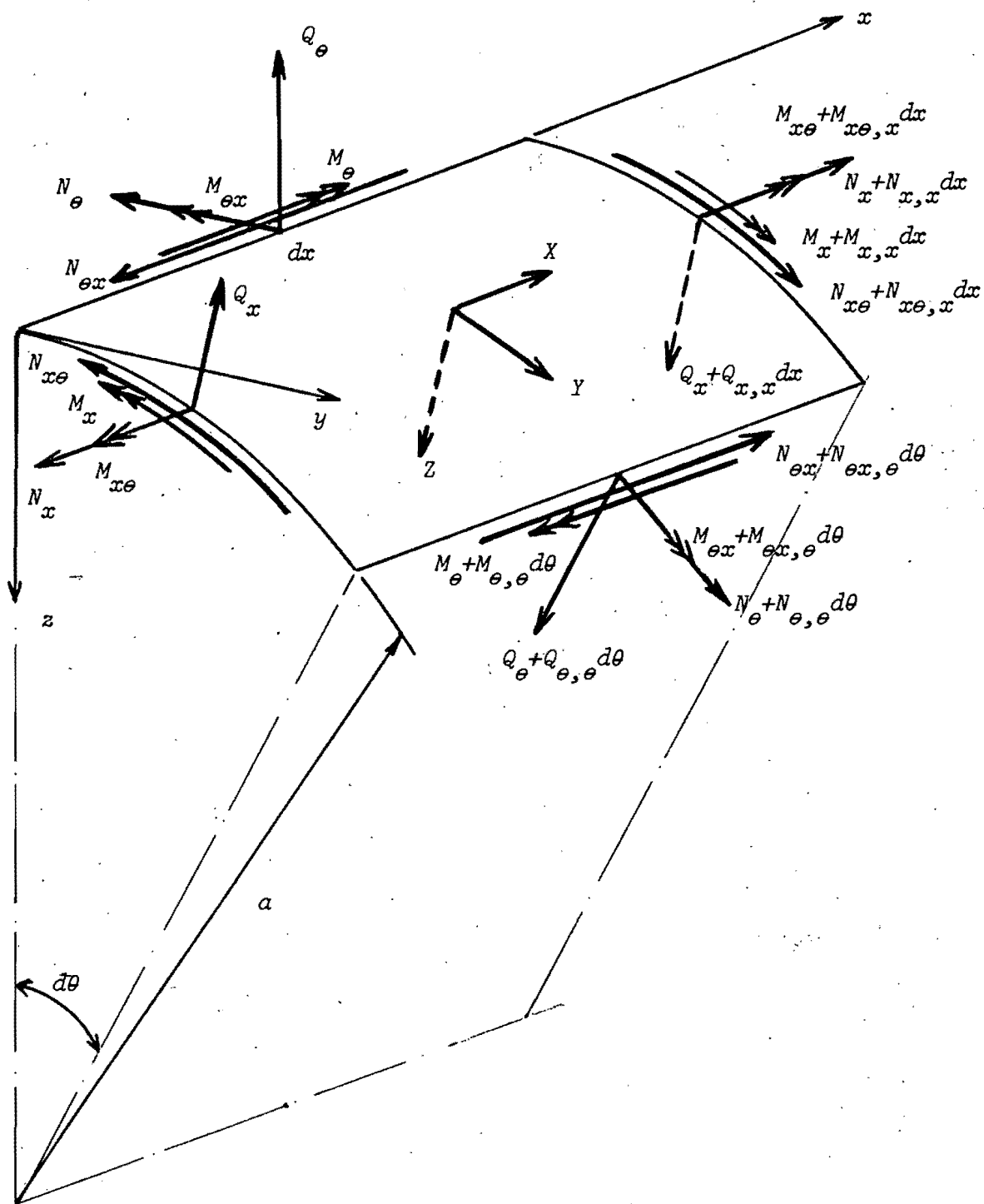


Figura No. 3 : Esfuerzos resultantes en un elemento cascarón

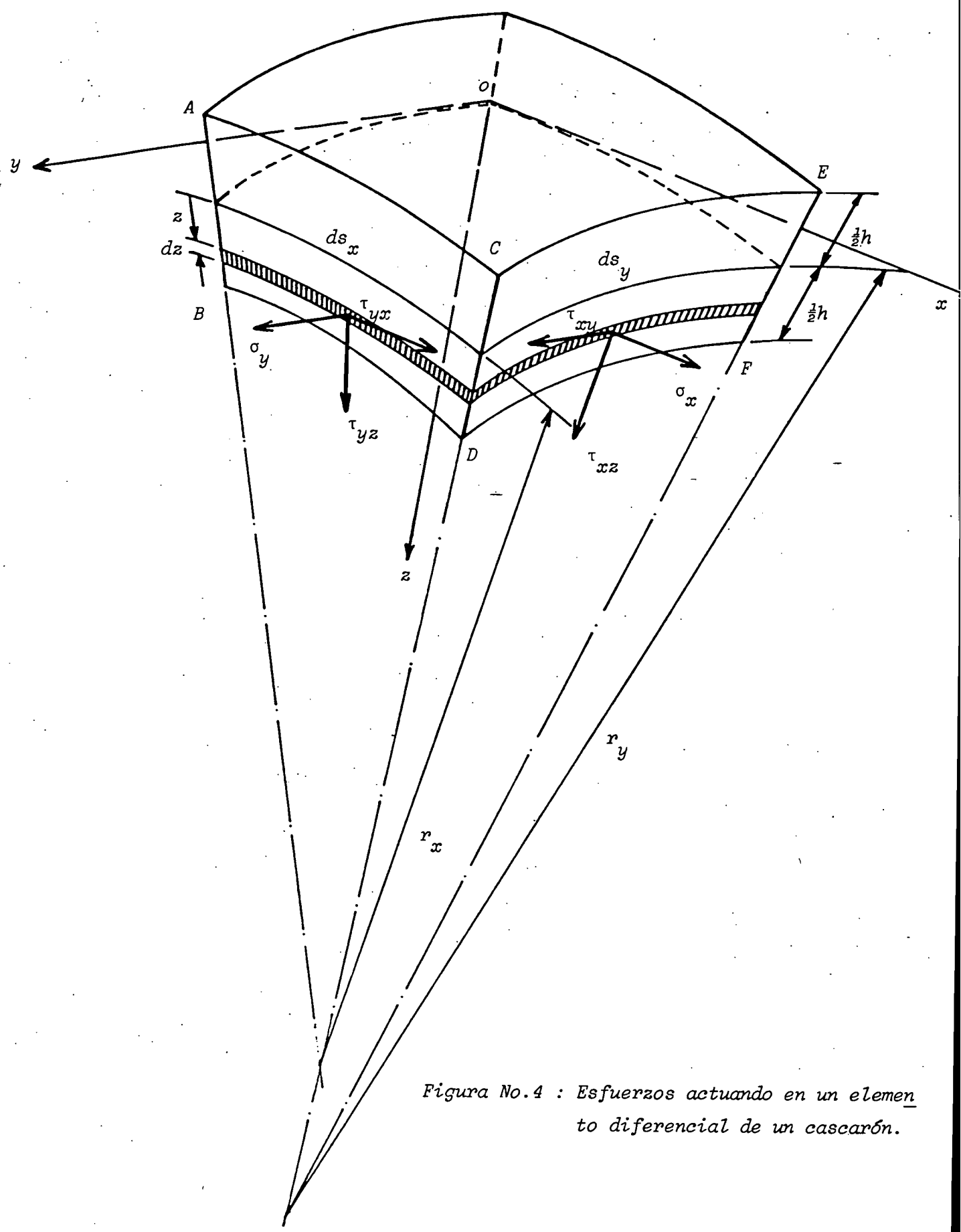
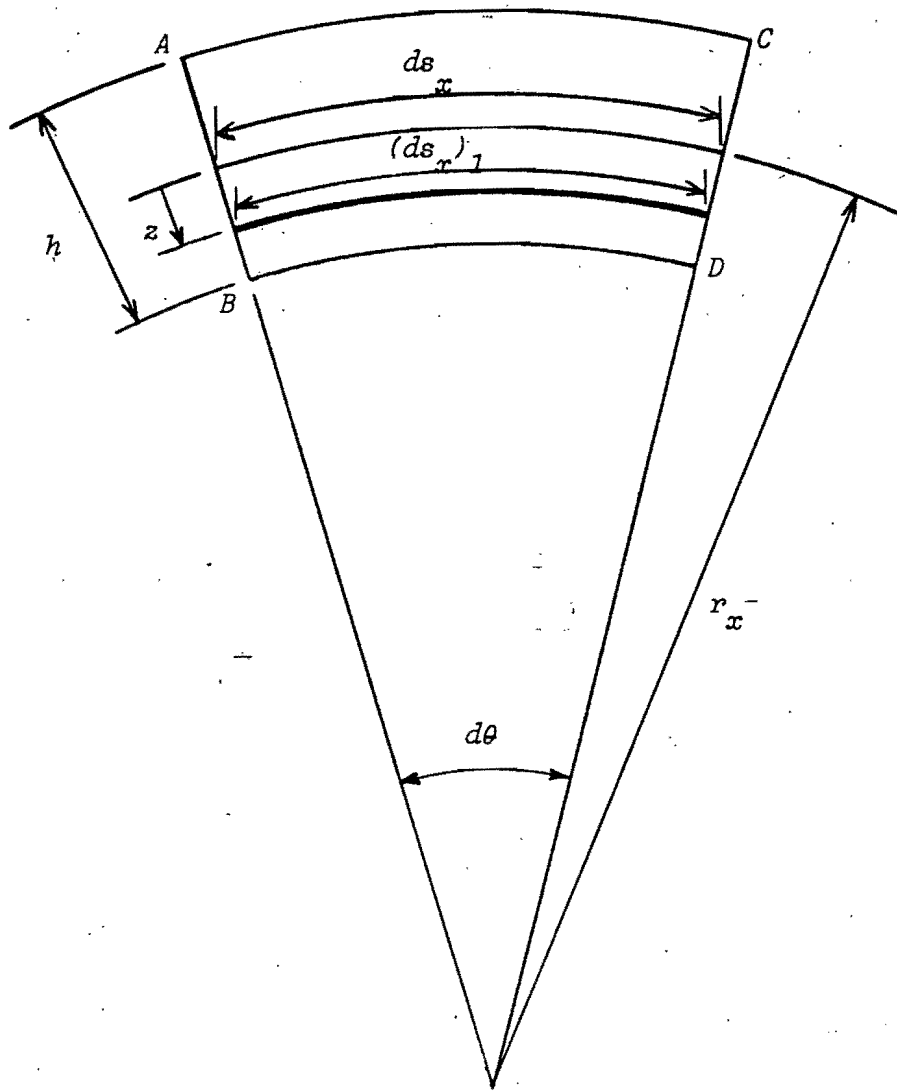


Figura No.4 : Esfuerzos actuando en un elemento diferencial de un cascarón.



$$(ds_x)_1 = (r_x - z)d\theta \quad \text{pero} \quad d\theta = \frac{ds_x}{r_x}$$

Entonces :

$$(ds_x)_1 = (r_x - z) \frac{ds_x}{r_x} = \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) ds_x = (1 - z k_x) ds_x$$

$$\text{con : } k_x = \frac{1}{r_x}$$

Figura No. 5 : Efecto de la curvatura del cascarón

$$\delta \text{ bien : } N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y (1 - zk_x) dz \quad \dots \dots \dots 1$$

Repetiendo este procedimiento para los restantes esfuerzos resultantes obtenemos finalmente :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x (1 - zk_y) \\ \sigma_y (1 - zk_x) \\ \tau_{xy} (1 - zk_y) \\ \tau_{yx} (1 - zk_x) \\ \tau_{xz} (1 - zk_y) \\ \tau_{yz} (1 - zk_x) \end{bmatrix} dz \quad \dots \dots \dots 2$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x (1 - zk_y) \\ \sigma_y (1 - zk_x) \\ \tau_{xy} (1 - zk_y) \\ \tau_{yx} (1 - zk_x) \end{bmatrix} z dz \quad \dots \dots \dots 3$$

Puede observarse de las expresiones 2 y 3 que aún cuando  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  ello no implica que  $N_{xy} = N_{yx}$  ó  $M_{xy} = M_{yx}$ , dado que en general  $r_x \neq r_y$ .

Sin embargo cuando se trata de un cascarón delgado para el que  $h \ll r_x$  ó  $r_y$ , entonces los términos :



$$zk_x = \frac{z}{r_x}$$

$$zk_y = \frac{z}{r_y}$$

pueden ser despreciados en comparaci3n con la unidad y entonces ello querr3a - decir que :  $N_{xy} = N_{yx}$  y  $M_{xy} = M_{yx}$  .

Ahora para el caso de un cascar3n cil3ndrico como el que nos ocupa, - podemos reemplazar en las expresiones 2 y 3  $r_x = \infty$  ;  $r_y = a$  ;  $y = \theta$  obteniendo :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ N_{\theta x} \\ Q_x \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix} dz \dots \dots \dots 4$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \\ M_{\theta x} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta x} \end{bmatrix} z dz \dots \dots \dots 5$$

6.- DEFORMACIONES EN UN ELEMENTO CASCARON.

Con referencia a la figura 4, al ocurrir la flexión en el elemento-cascarón, las caras laterales ACDB y CEFD giran alrededor de su intersección con la superficie media (véase la figura 6).

Si además de la rotación, las caras laterales del elemento se desplazan paralelamente a sí mismas, la superficie media sufre una elongación en las direcciones x e y que denotaremos por  $\epsilon_1 ds$  y  $\epsilon_2 ds$  respectivamente.

Sean  $r'_x$  y  $r'_y$  los radios de curvatura después de la flexión, entonces las deformaciones unitarias de una superficie del elemento situada a una distancia z abajo de la superficie media del cascarón son :

$$\epsilon_x = \frac{l_2 - l_1}{l_1} = \frac{(1 + \epsilon_1)(1 - \frac{z}{r'_x}) ds - (1 - \frac{z}{r_x}) ds}{(1 - \frac{z}{r_x}) ds}$$

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_1}{\left[1 - \frac{z}{r_x}\right]} - \frac{z}{\left[1 - \frac{z}{r_x}\right]} \left[ \frac{1}{(1 - \epsilon_1)r'_x} - \frac{1}{r_x} \right]$$

De igual forma:

$$\epsilon_y = \frac{\epsilon_2}{\left[1 - \frac{z}{r_y}\right]} - \frac{z}{\left[1 - \frac{z}{r_y}\right]} \left[ \frac{1}{(1 - \epsilon_2)r'_y} - \frac{1}{r_y} \right]$$

y como  $h \ll r_x$  ó  $r_y$  entonces  $\frac{z}{r_x}$  y  $\frac{z}{r_y}$  son despreciables con respecto a la unidad, lo mismo que el efecto de las deformaciones unitarias  $\epsilon_1$  ,  $\epsilon_2$  sobre la curvatura, entonces :

$$\epsilon_x = \epsilon_1 - z \left( \frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) = \epsilon_1 - z \chi_x$$

..... 6

$$\epsilon_y = \epsilon_2 - z \left( \frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right) = \epsilon_2 - z \chi_y$$

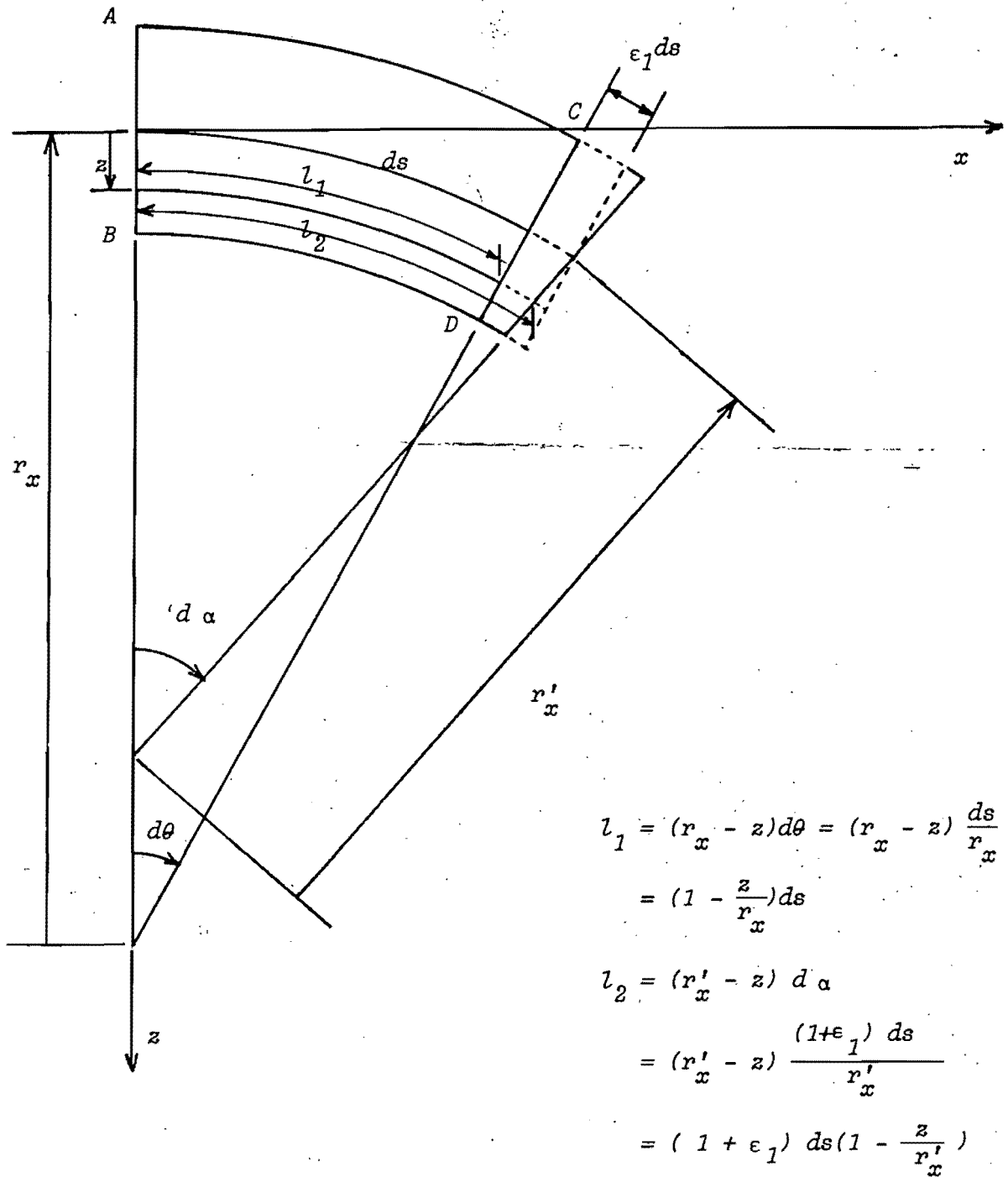


Figura No. 6 : Deformaciones en un elemento cascarón.

donde:  $\chi_x = \left( \frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) \equiv$  cambio de curvatura en la dirección X

$\chi_y = \left( \frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right) \equiv$  cambio de curvatura en la dirección Y.

Por el efecto del esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  actuando en las caras laterales del elemento, éste tendrá una deformación cortante que vale :

$$\gamma_{xy} = \gamma - 2z \chi_{xy} \dots \dots \dots 7$$

Donde  $\gamma$  es la deformación cortante en una superficie del elemento situada por debajo de la superficie media del cascarón a una distancia  $z$ , producida cuando las caras laterales ACDB y CEFD se desplazan paralelas a sí mismas.

y:  $\chi_{xy} = \left( \frac{1}{r'_{xy}} - \frac{1}{r_{xy}} \right) \equiv$  cambio de torsión

Si introducimos las expresiones 6 y 7 en la ley de Hooke y tomando en cuenta la suposición hecha anteriormente de que  $\sigma_z \equiv 0$  se tiene :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \epsilon_1 + \nu\epsilon_2 - z(\chi_x + \nu\chi_y) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \epsilon_2 + \nu\epsilon_1 - z(\chi_y + \nu\chi_x) \right] \dots \dots 8$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma - 2z \chi_{xy})$$

Introduciendo las ecuaciones 8 en las expresiones 4 y 5 e integrando obtenemos con  $y=\theta$  :

$$N_x = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\epsilon_2 + \nu\epsilon_1)$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = \frac{\gamma h E}{2(1 + \nu)}$$

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (X_x - \nu X_\theta) = -D(X_x - \nu X_\theta) \dots 9$$

$$M_\theta = -D(X_\theta - \nu X_x)$$

$$M_{x\theta} = -M_{\theta x} = D(1 - \nu) X_{x\theta}$$

donde :  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \equiv$  rigidez a la flexión

### III.- TEORIAS PARA EL ANALISIS DE CASCARONES.

Existen dos teorías que comúnmente se usan para el análisis de cascarones; la teoría de la membrana y la teoría flexionante ó teoría general.

#### 1.- TEORIA DE LA MEMBRANA:

Esta teoría puede ser aplicada a cascarones de cualquier forma, la suposición fundamental de la misma es que el cascarón no es capaz de soportar momentos flexionantes ni torsionantes, es decir todas las cargas son resistidas extensionalmente.

Es obvio que esta teoría entonces no puede usarse cuando se tienen discontinuidades en las cargas laterales aplicadas. Para el caso de cascarones cilíndricos, los esfuerzos resultantes que aparecen en la figura 3 se reducen a los que se ilustran en la figura 7.

Del equilibrio en las direcciones X, Y, Z se obtiene:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$(N_x + N_{x,x} dx) a d\theta + (N_{\theta x} + N_{\theta x,e} d\theta) dx - N_x a d\theta - N_{\theta x} dx + X(a d\theta) dx = 0$$

$$\therefore a N_{x,x} + N_{\theta x,e} + a X = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$(N_{\theta} + N_{\theta,e} d\theta) dx \cos \frac{d\theta}{2} + (N_{x\theta} + N_{x\theta,x} dx) a d\theta \cos \frac{d\theta}{2} - N_{\theta} dx - N_{x\theta} a d\theta \cos \frac{d\theta}{2} + Y a d\theta dx - Z a d\theta dx \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$\therefore N_{\theta,e} + a N_{x\theta,x} + a Y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$(N_{\theta} + N_{\theta,e} d\theta) dx \sin \frac{d\theta}{2} + (Z a d\theta dx) \cos \frac{d\theta}{2} + (N_{x\theta} + N_{x\theta,x} dx) a d\theta \sin \frac{d\theta}{2} - N_{x\theta} a d\theta \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$\therefore N_{\theta} + a Z = 0$$

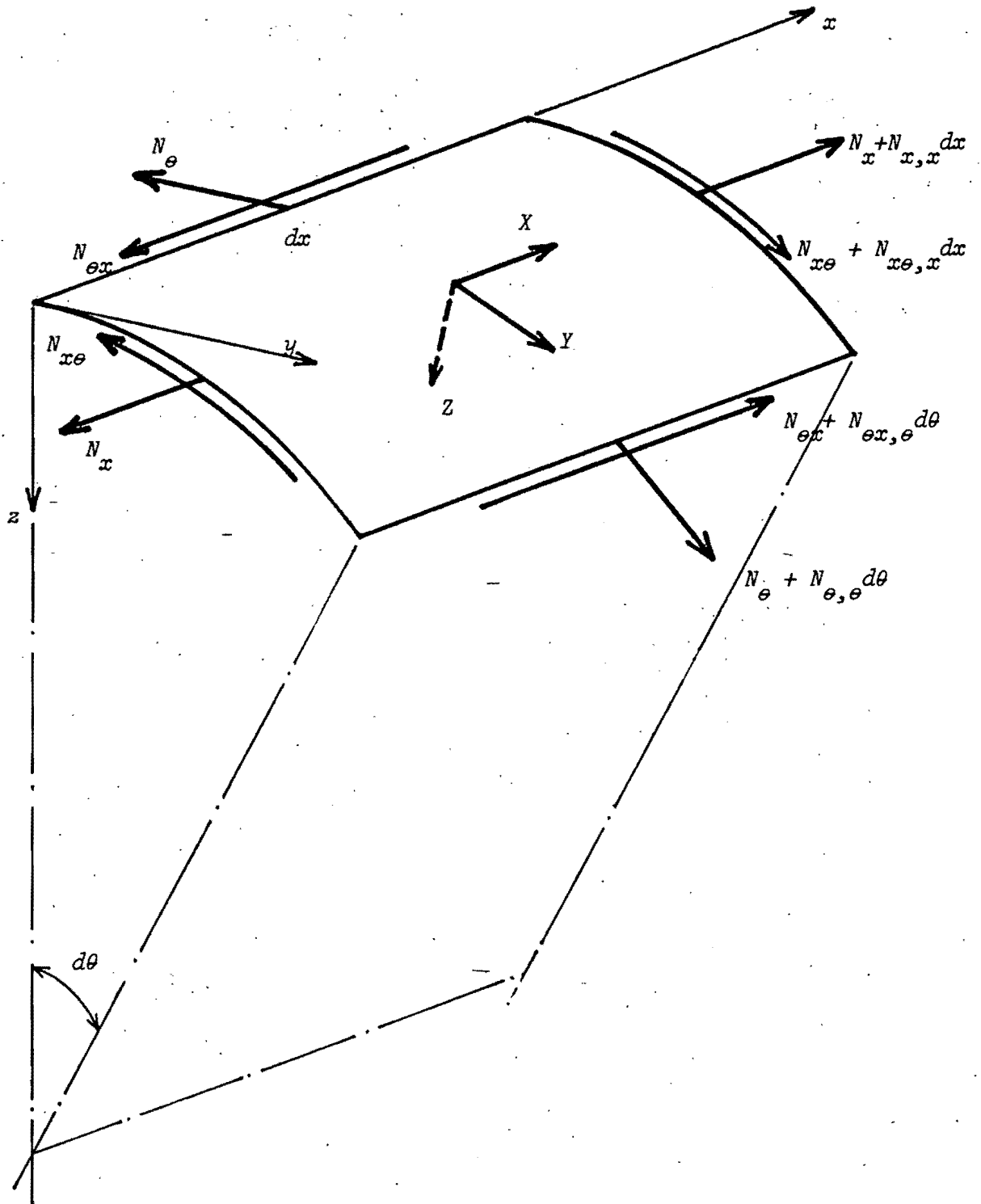


Figura No.7: Esfuerzos resultantes en un cascarón cilíndrico circular.  
(Teoría de la membrana)

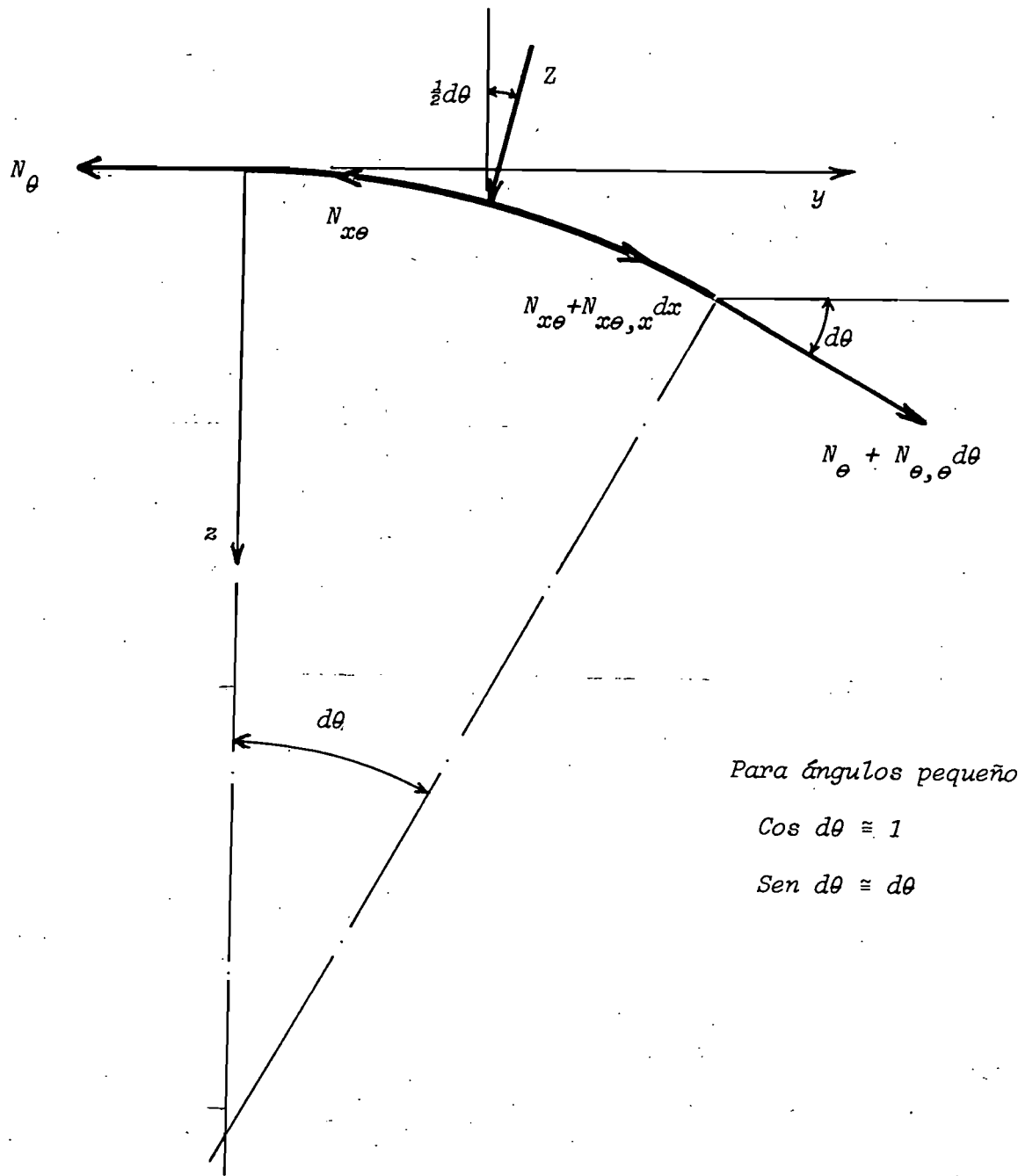


Figura No.8 : Vista en el plano yz del cascarón cilíndrico



$$\begin{aligned}
 \text{Resumiendo :} \quad N_{\theta} + aZ &= 0 & \dots \dots \dots 10 \\
 N_{\theta,\theta} + aN_{x\theta,x} + aY &= 0 & \dots \dots \dots 11 \\
 aN_{x,x} + N_{\theta x,\theta} + aX &= 0 & \dots \dots \dots 12
 \end{aligned}$$

De la ecuación 10 puede verse que  $N_{\theta}$  depende sólo de la intensidad de la fuerza normal  $Z$  y no está influenciado de las condiciones de frontera, lo cual no es de gran importancia si se tiene un cascarón cilíndrico cuyos perfiles sean curvas cerradas, en cambio cuando tenemos un cascarón tipo "media caña" en donde no es posible prescribir valores arbitrarios para  $N_{\theta}$  en los lados rectos, el problema toma un sesgo diferente.

Integrando las ecuaciones 11 y 12, se obtiene :

$$N_{x\theta} = - \int ( Y + \frac{1}{a} N_{\theta,\theta} ) dx + f_1(\theta) \dots \dots \dots 13$$

$$N_x = - \int ( X + \frac{1}{a} N_{x\theta,\theta} ) dx + f_2(\theta) \dots \dots \dots 14$$

Donde  $f_1(\theta)$  y  $f_2(\theta)$  son funciones por determinar con las condiciones en la frontera.

## 2.- TEORIA DE LA FLEXION O TEORIA GENERAL.

En esta teoría se incluyen además de los esfuerzos resultantes de la teoría de membrana, los efectos causados por momentos flexionantes y torsionantes, permitiendo de esta manera tomar en cuenta discontinuidades de las distribuciones de esfuerzos que se presentan en una región limitada en la vecindad de la carga ó bien en una discontinuidad estructural.

El objetivo de esta teoría es el de dar la herramienta para el análisis de esfuerzos y deformaciones debidos a las fuerzas actuando en los bordes ó bien cargas concentradas, lo cual no puede ser logrado con la teoría de la membrana.

Para obtener las ecuaciones diferenciales de los desplazamientos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , que definen las deformaciones de un cascarón cilíndrico, aislamos la superficie media del elemento achurado de la figura 2 en su estado deformado bajo la acción de una carga uniforme  $q$  dirigida a lo largo del eje  $z$ , es decir no tiene componentes a lo largo de  $x$  ni de  $y$ ; esto se ilustra en las figuras 9 y 10.

Debido a la deformación, los lados paralelos  $OA$  y  $CB$  giran uno con respecto al otro, ángulos que valen :

$$\text{A lo largo del eje X} \quad \frac{1}{a} (v_x + w_{x\theta}) dx$$

$$\text{A lo largo del eje Y} \quad - w_{xx} dx$$

$$\text{A lo largo del eje Z} \quad v_{xx} dx$$

Lo mismo ocurre con los lados paralelos  $OC$  y  $AB$  :

$$\text{A lo largo del eje X} \quad \frac{1}{a} (v + w_\theta)$$

$$\text{A lo largo del eje Y} \quad - (v_x + w_{x\theta}) d\theta$$

$$\text{A lo largo del eje Z} \quad (v_{x\theta} - w_x) d\theta$$

Con lo cual se pueden proyectar todas las fuerzas a lo largo de los ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , obteniendo

$$\Sigma F_x = 0$$

$$aN_{x,x} + N_{\theta x, \theta} - aQ_x w_{xx} - aN_{x\theta} v_{xx} - Q_\theta (v_x + w_{x\theta}) - N_\theta (v_{x\theta} - w_x) = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_{\theta, \theta} + aN_{x\theta, x} + aN_x v_{xx} - Q_x (v_x + w_{x\theta}) + N_{\theta x} (v_{x\theta} - w_x) - Q_\theta (1 + \frac{1}{a} v_\theta + \frac{1}{a} w_{\theta\theta}) = 0 \quad \dots 15$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$aQ_{x,x} + Q_{\theta\theta} + N_{x\theta} (v_x + w_{x\theta}) + aN_x w_{xx} + N_\theta (1 + \frac{1}{a} v_\theta + \frac{1}{a} w_{\theta\theta}) + N_{\theta x} (v_x + w_{x\theta}) + qa = 0$$

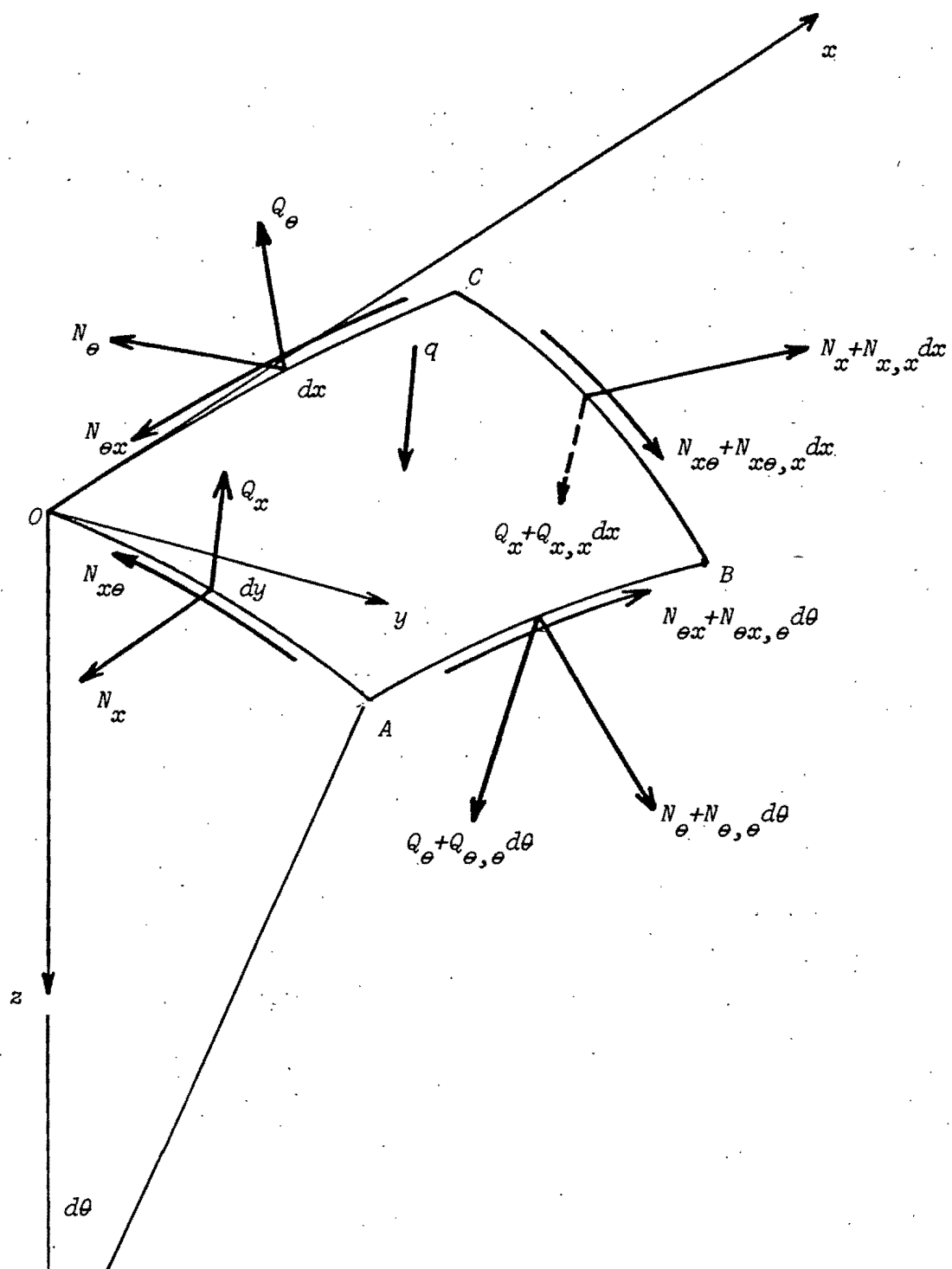


Figura No.9: Esfuerzos resultantes actuando en la superficie media deformada del cascarón cilíndrico.

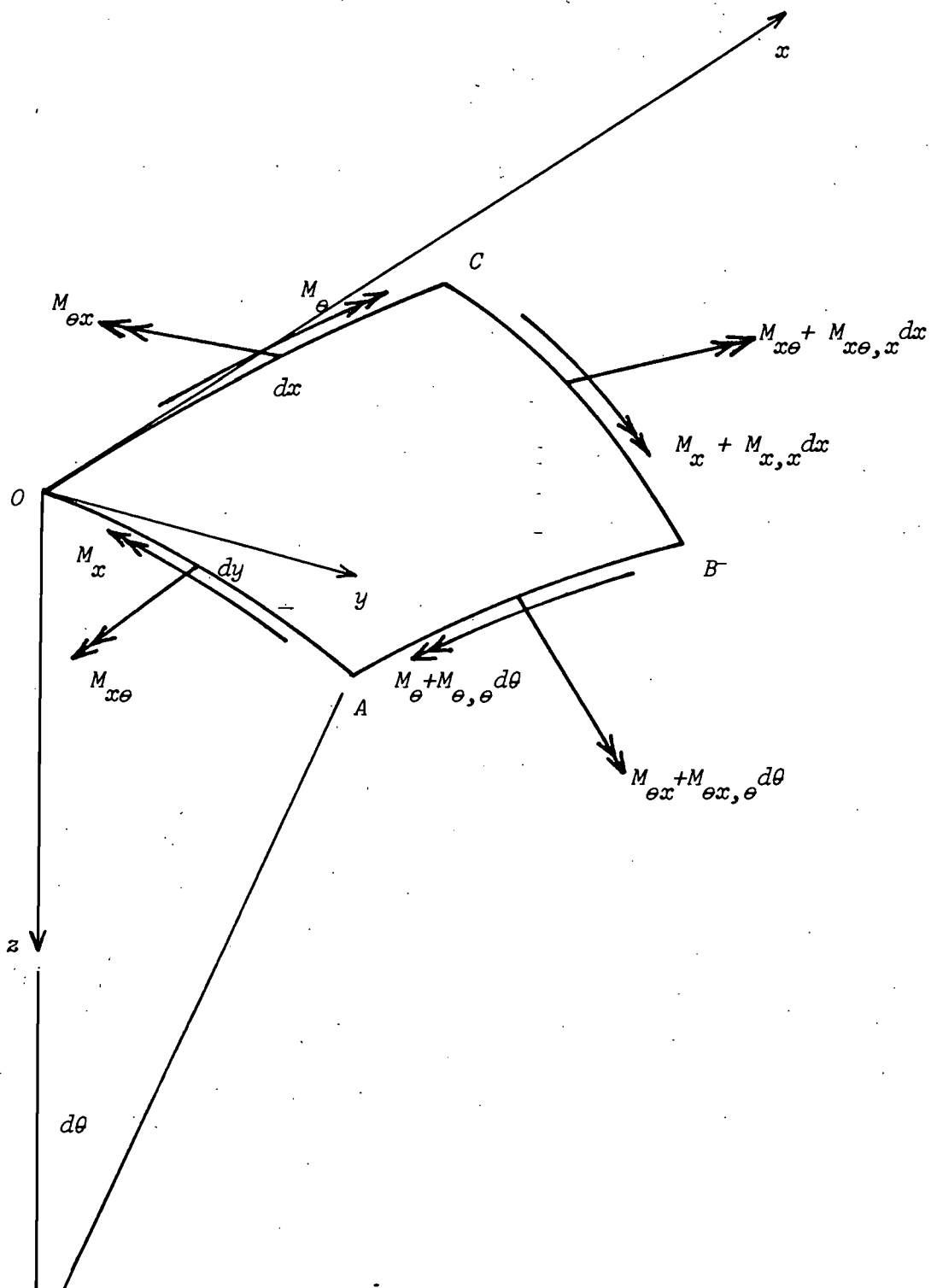


Figura No.10: Momentos de flexión y torsión actuando en la superficie media deformada del cascarón cilíndrico.

Así mismo del equilibrio de momentos a lo largo de los ejes: X, Y, Z, -  
obtenemos :

$$\Sigma M_x = 0$$

$$aM_{x\theta,x} - M_{\theta,\theta} - aM_x v_{xx} - M_{\theta x} (v_{x\theta} - w_x) + aQ_{\theta} = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

... 16

$$M_{\theta x,\theta} + aM_{x,x} + aM_{x\theta} v_{xx} - M_{\theta} (v_{x\theta} - w_x) - aQ_x = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

$$M_x (v_x + w_{x\theta}) + aM_{x\theta} w_{xx} + M_{\theta x} (1 + \frac{1}{a} v_{\theta} + \frac{1}{a} w_{\theta\theta}) - M_{\theta} (v_x + w_{x\theta}) + a(N_{x\theta} - N_{\theta x}) = 0$$

De estas ecuaciones :

$$Q_x = \frac{1}{a} M_{\theta x,\theta} + M_{x,x} + M_{x\theta} v_{xx} - \frac{1}{a} M_{\theta} (v_{x\theta} - w_x)$$

..... 17

$$Q_{\theta} = -M_{x\theta,x} + \frac{1}{a} M_{\theta\theta} + M_x v_{xx} + \frac{1}{a} M_{\theta x} (v_{x\theta} - w_x)$$

Al sustituir 17 en 15 en las ecuaciones de  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$ , -  
se obtienen junto con la de  $\Sigma M_z = 0$  tres ecuaciones de equilibrio en función  
de:  $N_x$ ,  $N_{\theta}$ ,  $N_{x\theta}$ ,  $M_x$ ,  $M_{\theta}$ ,  $M_{x\theta}$ , las cuales junto con las ecuaciones 9 sirven -  
para expresar estas cantidades en términos de las tres componentes de defor-  
mación  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\gamma$  y de los cambios de curvatura  $\chi_x$ ,  $\chi_{\theta}$  y  $\chi_{x\theta}$  las cuales  
en términos de los desplazamientos quedan expresadas como :

$$\epsilon_1 = u_x ; \quad \epsilon_2 = \frac{1}{a} (v_{\theta} - w) ; \quad \gamma = \frac{1}{a} u_{\theta} + v_x$$

..... 18

$$\chi_x = w_{xx} ; \quad \chi_{\theta} = \frac{1}{2} (v_{\theta} + w_{\theta\theta}) ; \quad \chi_{x\theta} = \frac{1}{a} (v_x + w_{x\theta})$$

IV.- PANDEO DE CASCARONES.

Como temas previos para llegar al tema de pandeo en cascarones cilindricos bajo la acción combinada de carga axial y presión lateral uniformes, veremos por separado primero el pandeo de un cascarón cilindrico bajo la acción de una carga axial uniforme y luego el pandeo en un cascarón cilindrico bajo la acción de una presión lateral uniforme.

1.- PANDEO DE UN CASCARON CILINDRICO BAJO LA ACCION DE UNA CARGA AXIAL -- UNIFORME.

Cuando un cascarón cilindrico es comprimido de manera uniforme en una dirección axial, éste se puede pandear de forma simétrica con respecto al eje del cilindro, como se ilustra en la figura 11.

Mediante el uso de las ecuaciones 15 y 16 (método de equilibrio) podemos establecer las ecuaciones diferenciales que corresponden a este caso. Si suponemos que todas las fuerzas resultantes, excepto  $N_x$  son muy pequeñas, entonces se pueden despreciar los productos de las mismas por las derivadas de los desplazamientos  $u, v, w$ , las cuales también se supondrán pequeños; así que las ecuaciones 15 se simplifican de esta forma :

$$aN_{x,x} + N_{\theta x, \theta} = 0$$

$$N_{\theta, \theta} + aN_{x\theta, x} + aN_x v_{xx} - Q_{\theta} = 0 \quad \dots \dots \dots 19$$

$$aQ_{x,x} + Q_{\theta, \theta} + aN_x w_{xx} + N_{\theta} = 0$$

Y a partir de las ecuaciones 16 se tiene :

$$aQ_x = aM_{x,x} + M_{\theta x, \theta}$$

$$aQ_{\theta} = M_{\theta, \theta} - aM_{x\theta}$$

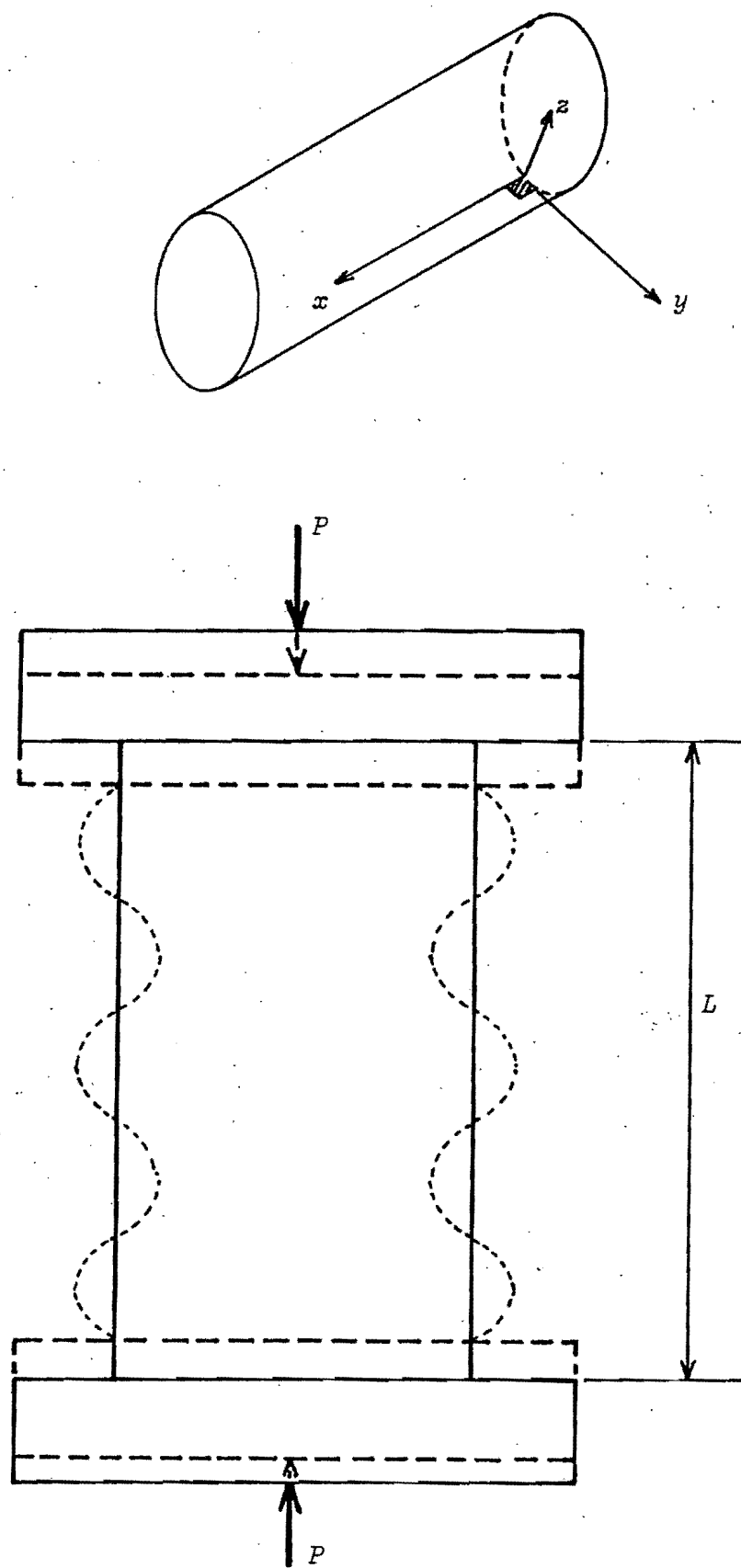


Figura No.11: Pandeo de un cascarón cilíndrico bajo la acción de una carga axial uniforme.

Sustituyendo éstas en 19, obtenemos que :

$$a N_{x,x} + N_{\theta x, \theta} = 0$$

$$N_{\theta, \theta} + a N_{x\theta, x} + a N_x v_{xx} + M_{x\theta, x} - \frac{1}{a} M_{\theta, \theta} = 0 \quad \dots \dots 20$$

$$a N_x w_{xx} + N_{\theta} + a M_{x, xx} + M_{\theta x, x\theta} + \frac{1}{a} M_{\theta, \theta\theta} - M_{x\theta, x\theta} = 0$$

Estas ecuaciones a su vez pueden expresarse en función de los desplazamientos  $u, v, w$  con el auxilio de las ecuaciones: 9 y 18 que establecen que :

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu} \frac{1}{2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) \quad ; \quad M_x = -D (\chi_x - \nu \chi_{\theta})$$

$$N_{\theta} = \frac{Eh}{1-\nu} \frac{1}{2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) \quad ; \quad M_{\theta} = -D (\chi_{\theta} + \nu \chi_x)$$

$$N_{x\theta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma \quad ; \quad M_{x\theta} = D(1-\nu) \chi_{x\theta}$$

$$\epsilon_1 = u_x \quad ; \quad \epsilon_2 = \frac{1}{a} (v_{\theta} - w) \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{a} u_{\theta} + v_x$$

$$\chi_x = w_{xx} \quad ; \quad \chi_{\theta} = \frac{1}{a} (v_{\theta} + w_{\theta\theta}) \quad ; \quad \chi_{x\theta} = \frac{1}{a} (v_x + w_{x\theta})$$

Tomando como positivos los esfuerzos de compresión y definiendo -- los parámetros adimensionales :

$$\alpha = \frac{h^2}{12a^2} \quad ; \quad \phi = \frac{N_x (1 - \nu^2)}{Eh} \quad \dots \dots 21$$

obtenemos :

$$u_{xx} + \frac{1}{2a} (1 + \nu) v_{x\theta} - \frac{\nu}{a} w_x + \frac{1}{2a} (1 - \nu) u_{\theta\theta} = 0$$

$$\frac{1}{2} (1 + \nu) u_{x\theta} + \frac{1}{2} a (1 - \nu) v_{xx} + \frac{1}{a} v_{\theta\theta} - \frac{1}{a} w_{\theta} + \alpha \left[ \frac{1}{a} v_{\theta\theta} + \frac{1}{a} w_{\theta\theta\theta} + a w_{x\theta} + a (1 - \nu) v_{xx} \right] - a \phi v_{xx} = 0$$

$$-a \phi w_{xx} + \nu u_x + \frac{1}{a} v_{\theta} - \frac{w}{a} - \alpha \left[ \frac{1}{a} v_{\theta\theta\theta} + (2 - \nu) a v_{x\theta} + a^3 w_{xxxx} + \frac{1}{a} w_{\theta\theta\theta\theta} + 2 a w_{x\theta\theta} \right] = 0 \quad \dots 22$$



La solución de estas ecuaciones puede obtenerse suponiendo un campo de desplazamientos de la forma :

$$u = A \operatorname{Sen} n\theta \operatorname{Cos} \frac{m \pi x}{L}$$

$$v = B \operatorname{Cos} n\theta \operatorname{Sen} \frac{m \pi x}{L} \dots \dots \dots 23$$

$$w = C \operatorname{Sen} n\theta \operatorname{Sen} \frac{m \pi x}{L}$$

Con el cual se supondrá que durante el pandeo, los generadores del-cascarón se subdividen en "m" medias ondas y la circunferencia en "2n" medias ondas; si además se considera que los bordes del cascarón están simplemente -apoyados, entonces :

Para  $x = 0, L$   $w = 0$  ;  $w_{xx} = 0$

Sustituyendo las expresiones 23 en las ecuaciones 22 se obtiene el-siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots 24$$

donde :  $a_{11} = \lambda^2 + \frac{1}{2} (1 - \lambda) n^2$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} n (1 + \nu) \lambda$$

$$a_{13} = a_{31} = \nu \lambda$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} (1 - \nu) \lambda^2 + n^2 + \alpha (1 - \nu) \lambda^2 + \alpha n^2 - \phi \lambda^2$$

$$a_{23} = n + \alpha n(n^2 + \lambda^2)$$

$$a_{32} = n \{ 1 + \alpha [n^2 + (2 - \nu) \lambda^2] \}$$

$$a_{33} = 1 - \phi \lambda^2 + \alpha (\lambda^2 + n^2)^2$$

$$\lambda = m \pi \frac{a}{L}$$

Una solución no trivial de este sistema se obtiene igualando a cero el determinante de la matriz del sistema, y si además se desprecian las cantidades de alto orden que contengan factores de  $\alpha^2$  y  $\phi^2$  por ser de pequeña magnitud, se obtiene una expresión de la forma :

$$\phi = \frac{N_x(1 - \nu^2)}{Eh} = \frac{R}{S} \dots \dots \dots 25$$

donde :  $R = (1 - \nu^2) \lambda^4 + \alpha [(n^2 + \lambda^2)^4 - (2 + \nu)(3 - \nu) \lambda^4 n^2 + 2 \lambda^4 (1 - \nu^2) - \lambda^2 n^4 (7 + \nu) + \lambda^2 n^2 (3 + \nu) + n^4 - 2n^6] \dots \dots \dots 26$

$$S = \lambda^2 \{ (n^2 + \lambda^2)^2 + \frac{2}{1-\nu} [\lambda^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)n^2] [1 + \alpha (n^2 + \lambda^2)^2] - \frac{2\nu^2 \lambda^2}{1-\nu} + \frac{2\alpha}{1-\nu} [\lambda^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)n^2] [n^2 + (1-\nu)\lambda^2] \} \dots 27$$

Con esta ecuación podemos determinar mediante algunas simplificaciones la forma en que pandearán: un cascarón cilíndrico delgado, uno corto y uno largo.

1.- CASCARON CILINDRICO DELGADO.

Resultados experimentales muestran que para este tipo de cascarones, si  $\lambda^2$  es un número grande el cascarón se pandeará en ondas longitudinales - - cortas, entonces la expresión 25 se puede simplificar tomando sólo los términos de "mayor peso" tanto en el numerador como en el denominador de la misma,-

es decir con :  $R = (1 - v^2) \lambda^4 + \alpha (n^2 + \lambda^2)^4$

$$S = \lambda^2 (n^2 + \lambda^2)^2$$

toma la siguiente forma :

$$\phi = \frac{N_x (1 - v^2)}{Eh} = \alpha \frac{(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1 - v^2) \lambda^2}{(n^2 + \lambda^2)^2} \dots \dots \dots 28$$

a) Si  $n = 0$  se obtiene lo que se conoce como pandeo simétrico del cascarón, en el cual dicho cascarón se pandea en forma de muchas ondas a lo largo del eje del cilindro y la expresión 28 queda como :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{N_x (1 - v^2)}{Eh} = \alpha \lambda^2 + \frac{1 - v^2}{\lambda^2} \dots \dots \dots 29 \\ &= \frac{h^2}{12} \left( \frac{m \pi}{L} \right)^2 + \frac{1 - v^2}{\left( \frac{m \pi}{L} \right)^2 a^2} \end{aligned}$$

o bien si :  $f = \frac{m \pi}{L}$  entonces :

$$\phi = \frac{h^2}{12} f^2 + \frac{1 - v^2}{a^2 f^2} \dots \dots \dots 30$$

La cual tiene un mínimo en :

$$f = \frac{m \pi}{L} = \sqrt[4]{\frac{12(1 - v^2)}{a^2 h^2}} \dots \dots \dots 31$$

Sustituyendo este valor en 30, se obtiene :

$$\phi = \frac{N_x (1 - v^2)}{Eh} = \frac{h^2}{12} \sqrt{\frac{12(1 - v^2)}{a^2 h^2}} + \frac{1 - v^2}{a^2 \sqrt{\frac{12(1 - v^2)}{a^2 h^2}}}$$

De donde :

$$(N_x)_{cr} = \frac{Eh^2}{a \sqrt{3(1 - v^2)}}$$

Y así 
$$\sigma_{cr} = \frac{(N_x)_{cr}}{h} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \dots 32$$

Siendo la longitud de las medias ondas de :

$$\frac{L}{m} = \pi \sqrt[4]{\frac{a^2 h^2}{12(1-\nu^2)}}$$

y si  $\nu = 0.3$  entonces :  $\frac{L}{m} \cong 1.728 \sqrt{ah}$

b) Si  $n \neq 0$  se tiene la forma de pandeo denominada "pandeo no simétrico" de un cascarón cilíndrico.

En esta forma de pandeo, podemos expresar la ecuación 28 de la forma :

$$\phi = \alpha g + \frac{1-\nu^2}{g} \dots 33$$

donde : 
$$g = \frac{(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2}$$

Minimizando esta expresión se obtiene :

$$\frac{d\phi}{dg} = 0 \quad \alpha - \frac{1-\nu^2}{g^2} = 0$$

$$\therefore g = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{\alpha}} = \frac{2a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)} \dots 34$$

Este valor sustituido en la expresión 33 permite obtener  $(N_x)_{cr}$  y  $\sigma_{cr}$  así :

$$(N_x)_{cr} = \frac{Eh^2}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \dots 35$$

$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

Notándose que  $\sigma_{cr}$  no depende de la longitud del cascarón y es de la misma magnitud que en el caso de "pandeo simétrico"; para cualquier otro valor de  $\lambda^2 < \frac{2a}{h} \sqrt{3(1 - \nu^2)}$  se determina con la ecuación 34 el correspondiente valor de  $n^2$ .

El valor de  $\sigma_{cr}$  dado por la expresión 35 muchas veces no concuerda con los resultados experimentales, puesto que su determinación está basada en el hecho que los desplazamientos son pequeños, por lo que se puede recurrir a la determinación de factores de carácter empírico que relacionen los resultados experimentales con los valores teóricos.

Por ejemplo para este caso de pandeo de cascarones se ha propuesto incluir un factor adimensional de la forma :

$$k = 1 - 0.901 (1 - e^{-\psi}) \dots \dots \dots 36$$

donde :  $\psi = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{a}{h}}$  el cual se muestra en la gráfica de la figura-12. Entonces la ecuación para  $\sigma_{cr}$  quedará expresada como :

$$\sigma_{cr} = k \frac{E h}{a \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \dots \dots \dots 37$$

La cual concuerda satisfactoriamente con los resultados experimentales en cascarones cilíndricos para los cuales  $\frac{L}{a} < 5$ .

2.- CASCARON CILINDRICO CORTO

Si el cascarón cilíndrico fuese tan corto que :

$$\left( \frac{\pi a}{L} \right)^2 > \frac{2a}{h} \sqrt{3(1 - \nu^2)}$$

o bien que :

$$L < \sqrt{\frac{\pi^2 a h}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}}} \dots \dots \dots 38$$

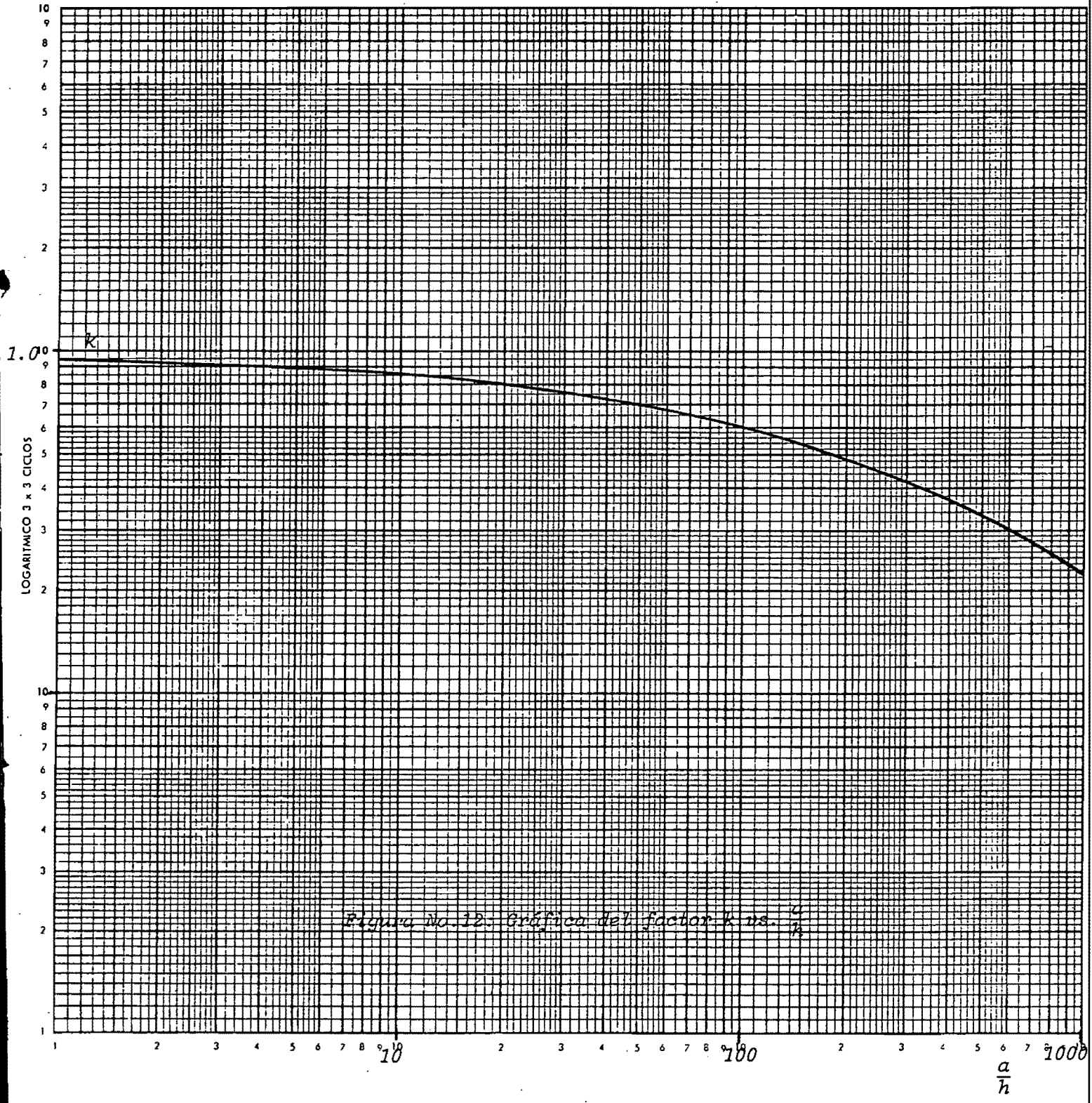


Figura No. 12. Gráfica del factor  $k$  vs.  $\frac{a}{h}$

Entonces se formará únicamente una media onda en la dirección axial ( $m = 1$ ) y el valor mínimo de la ecuación 28 se obtiene de nuevo haciendo  $n = 0$  con lo que el cascarón se pandeará de forma simétrica con respecto al eje.

Al hacer cada vez más pequeña la longitud del cascarón, el término  $\frac{(1 - \nu^2) \lambda^2}{(n^2 + \lambda^2)^2}$  de la expresión 28 se hace cada vez más pequeño al compararlo con el otro, así que si se desprecia obtenemos con  $n = 0$ :

$$\phi = \alpha \lambda^2 \dots \dots \dots 39$$

Entonces :

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 D}{L^2} \dots \dots \dots 40$$

y

$$\sigma_{cr} = \frac{(N_x)_{cr}}{h} = \frac{\pi^2 E h^2}{12(1 - \nu^2) L^2}$$

Ahora si  $L$  es ligeramente mayor que :

$$\sqrt{\frac{\pi^2 a h}{12(1 - \nu^2)}}$$

se sigue teniendo una media onda en la dirección axial ( $m = 1$ ) pero  $n \neq 0$  y por lo tanto aparecerán lóbulos a lo largo de la circunferencia

### 3.- CASCARON CILINDRICO LARGO.

En este caso es válido suponer que el cascarón se pandeará en ondas longitudinales amplias, por lo que  $\lambda$  puede tomar valores pequeños, luego -- entonces podemos despreciar en las expresiones 26 y 27 aquellos términos que contengan productos de  $\alpha$  con  $\lambda$  elevada a potencias mayores de dos, quedando entonces la expresión 25 de la siguiente forma :

$$\phi = \frac{(1 - \nu^2) \lambda^4 + \alpha \left\{ (n^4 - n^2)^2 + \lambda^2 [4n^6 - (7 + \nu)n^4 + (3 + \nu)n^2] \right\}}{\lambda^2 n^2 (1 + n^2)} \dots 41$$

Si tomamos  $n = 1$  se obtiene de esta ecuación que :

$$\phi = \frac{1 - \nu^2}{2} \lambda^2$$

Entonces :  $(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 E a^2 h}{2L^2}$  . . . . . 42

$$\sigma_{cr} = \frac{(N_x)_{cr}}{h} = \frac{\pi^2 E a^2}{2L^2}$$

La ecuación 42 no es otra que la fórmula de Euler para el pandeo en una columna, ello quiere decir que el cascarón cilíndrico largo mantiene su sección transversal circular y se padea como una columna con  $n = 1$ .

Si  $n$  fuese mayor de 1, entonces la ecuación 41 puede ser simplificada si se eliminan los términos pequeños, obteniendo entonces :

$$\phi = \frac{(1 - \nu^2) \lambda^2}{n^2 (n^2 + 1)} + \frac{\alpha n^2 (n^2 - 1)^2}{\lambda^2 (n^2 + 1)} \dots \dots \dots 43$$

Haciendo :  $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$  obtenemos el valor de  $\lambda^2$  que minimiza la ecuación-43, esto es :

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{\alpha n^2 (n^2 - 1)}}{\sqrt{1 - \nu^2}} = \frac{hn^2 (n^2 - 1)}{2a \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \dots \dots \dots 44$$

el cual sustituido en 43 nos dá :

$$(N_x)_{cr} = \frac{Eh^2}{a \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \dots \dots \dots 45$$

$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{a \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$



Este esfuerzo es claramente menor que el que se presenta en el caso de pandeo simétrico y alcanza su valor más pequeño cuando  $n = 2$ , es decir :

$$\sigma_{cr} = \frac{3}{5} \frac{Eh}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \dots\dots\dots 46$$

Si ahora regresamos a la ecuación 25, es posible graficar una relación entre  $\phi$  y  $\lambda$  para un valor dado de  $\alpha$  y de esta manera poder visualizar globalmente los casos presentados de pandeo en cascarones cilíndricos sujetos a carga axial.

La gráfica [ 1 ] de la figura 13 está construida para los siguientes valores :  $\alpha = 10^{-5}$  ;  $\nu = 0.1667$

Por la izquierda de la gráfica, las curvas se aproximan asintóticamente a una línea que representa la condición de pandeo de una franja elemental, esto es :

$$\frac{\sigma_{cr}(1-\nu^2)}{E} = \frac{\pi^2 h^2}{12L^2} = \alpha \frac{\pi^2 a^2}{L^2} \dots\dots\dots 47$$

Por la derecha, las curvas están limitadas por la curva que representa el pandeo de un cascarón largo cual si fuera columna, es decir para  $n=1$

$$\frac{\sigma_{cr}(1-\nu^2)}{E} = \frac{1-\nu^2}{2} \frac{\pi^2 a^2}{L^2} \dots\dots\dots 48$$

La línea punteada horizontal representa el pandeo simétrico del cascarón y :

$$\frac{\sigma_{cr}(1-\nu^2)}{E} = 2\sqrt{\alpha(1-\nu^2)} = 6.236 \times 10^{-3} \dots\dots\dots 49$$

La línea gruesa representa entonces el comportamiento al pandeo-

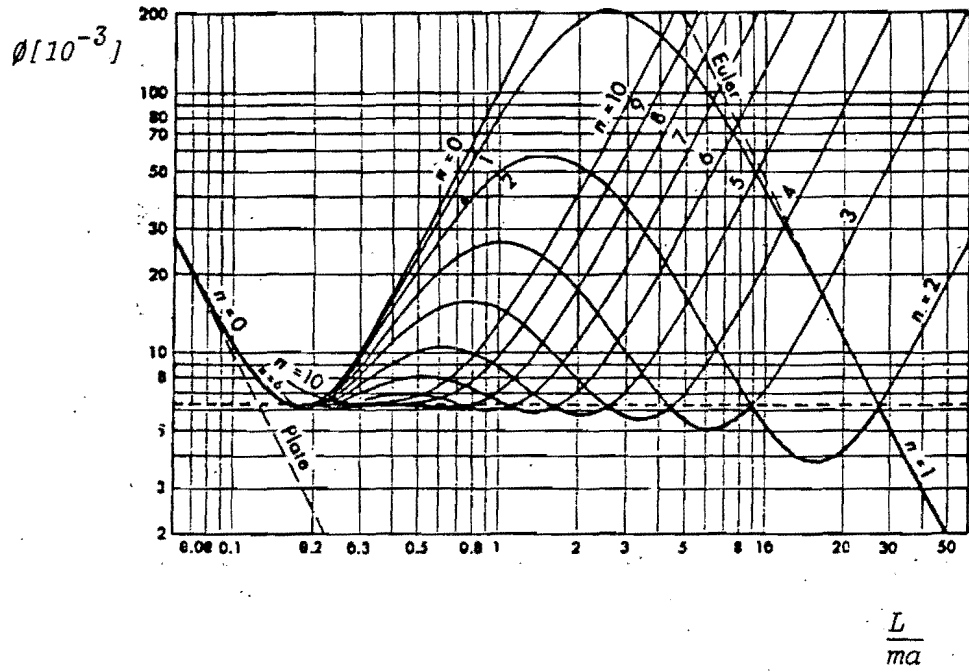


Figura No.13: Diagrama de pandeo para compresión axial  
(construido para  $\alpha = 10^{-5}$  ;  $\nu = 0.1667$ )

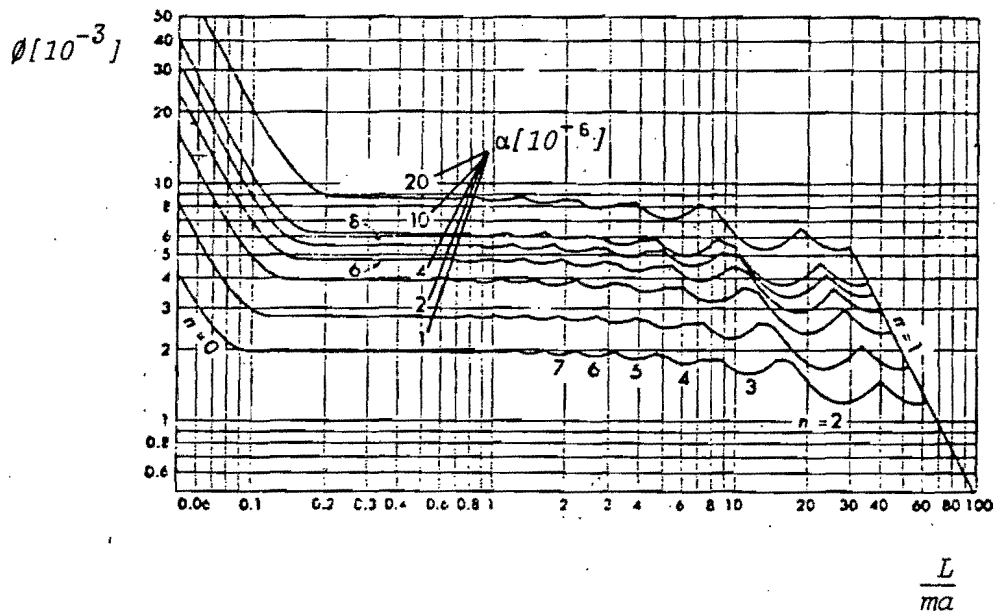


Figura No.14: Diagrama final de pandeo de un cascarón cilíndrico circular sometido a compresión axial  
(construido para  $\alpha = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 20 [10^{-6}]$ ;  $\nu = 0.1667$ )

del cascarón cilíndrico bajo carga axial para los valores elegidos de  $\alpha$  y  $\nu$ .

Finalmente puede graficarse un diagrama que contenga varias curvas como la anterior para otros valores de  $\alpha$  obteniéndose lo que se conoce como diagrama final de pandeo de un cascarón cilíndrico bajo carga axial con bordes simplemente apoyados, como el que se ilustra en la figura 14.

B.- PANDEO DE UN CASCARON CILINDRICO BAJO LA ACCION DE UNA PRESION LATERAL - EXTERNA UNIFORME.

Al igual que en el caso anterior, se usará el método de equilibrio para el análisis de pandeo de este caso, suponiendo que el cascarón cilíndrico está sometido a una presión lateral uniforme (véase figura 15); entonces pueden ser despreciables todas las fuerzas resultantes excepto  $N_\theta$ , así mismo pueden ser despreciables los términos que contengan los productos de estas fuerzas con las derivadas de los desplazamientos  $u, v, w$ , los cuales supondremos pequeños, de esta forma las expresiones 15 se simplifican quedando de esta forma :

$$aN_{x,x} + N_{\theta x,\theta} - N_\theta (v_{x\theta} - w_x) = 0$$

$$N_{\theta,\theta} + aN_{x\theta,x} - Q_\theta = 0$$

$$aQ_{x,x} + Q_{\theta,\theta} + N_\theta \left(1 + \frac{1}{a} v_\theta + \frac{1}{a} w_{\theta\theta}\right) + qa = 0$$

En las expresiones 16, podemos también suponer que los momentos  $M_x, M_\theta, M_{x\theta}$  son pequeños, por lo que pueden despreciarse los términos que contengan productos de estos por la derivada de los desplazamientos  $u, v, w$ , entonces obtenemos :

$$aQ_x = M_{\theta x,\theta} + aM_{x,x}$$

$$aQ_\theta = M_{\theta\theta} - aM_{x\theta,x}$$

Sustituyendo estas expresiones en las anteriores, obtenemos finalmente las ecuaciones diferenciales de equilibrio del cascarón :

$$aN_{x,x} + N_{\theta x,\theta} - N_\theta (v_{x\theta} - w_x) = 0$$

$$N_{\theta,\theta} + aN_{x\theta,x} - \frac{1}{a} M_{\theta,\theta} + M_{x\theta,x} = 0 \quad \dots \quad 50$$

$$M_{\theta x,x\theta} + aM_{x,xx} + \frac{1}{a} M_{\theta,\theta\theta} - M_{x\theta,x\theta} + N_\theta \left(1 + \frac{1}{a} v_\theta + \frac{1}{a} w_{\theta\theta}\right) + qa = 0$$

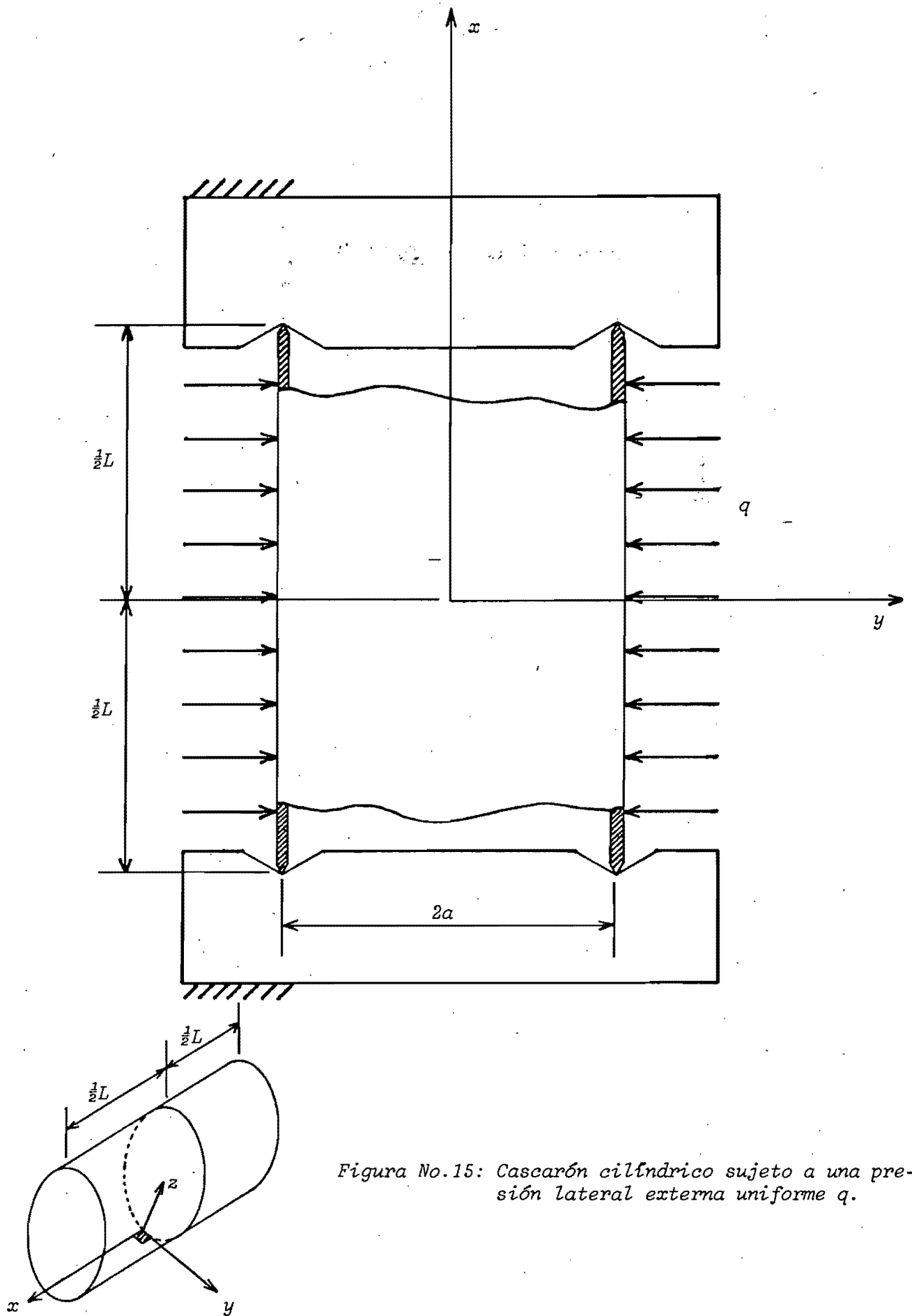


Figura No.15: Cascarón cilíndrico sujeto a una presión lateral externa uniforme  $q$ .

En el estudio del pandeo de este cascarón se considerará que sufre pequeñas deformaciones a partir de una forma de equilibrio en la que el cascarón bajo la presión lateral uniforme permanece circular y por ende sometido sólo a compresión uniforme en la dirección circunferencial, ello quiere decir que :

$$v = 0 \quad ; \quad w = \frac{a^2 q}{E h}$$

$$N_x = 0 \quad ; \quad N_y = -qa \quad ; \quad M_x = M_\theta = M_{x\theta} = M_{\theta x} = 0$$

En estas circunstancias, el valor de  $N_\theta$  en las ecuaciones 50 difiere muy poco del valor  $-qa$  y entonces se puede escribir que :

$N_\theta = -qa + N'_\theta$  donde  $N'_\theta$  es la pequeña variación que tiene la fuerza resultante  $-qa$  debida a los pequeños desplazamientos  $\bar{u}$ ,  $v$ ,  $w$  a partir de la forma de equilibrio ya mencionada.

Es necesario también considerar el alargamiento que experimenta la superficie media del cascarón durante el pandeo, porque éste afecta a los términos  $N_\theta$  y  $q$ , los cuales deben sustituirse entonces por:  $N_\theta(1 + \epsilon_1)$  y  $q(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)$  recordando que  $\epsilon_1 = u_x$  y  $\epsilon_2 = \frac{1}{a}(v_\theta - w)$  obtenemos:

$$aN_{x,x} + N_{\theta x,\theta} + qa(v_{x\theta} - w_x) = 0$$

$$N'_{\theta,\theta} + aN_{x\theta,x} - \frac{1}{a}M_{\theta,\theta} + M_{x\theta,x} = 0 \quad \dots 51$$

$$M_{\theta x,x\theta} + aM_{x,xx} + \frac{1}{a}M_{\theta,\theta\theta} - M_{x\theta,x\theta} + N'_\theta - q(w + w_{\theta\theta}) = 0$$

Con las expresiones 9 y 18 estas ecuaciones pueden a su vez expresarse en función de los desplazamientos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Si ahora :

$$\phi = \frac{qa(1 - \nu^2)}{Eh} \quad ; \quad \alpha = \frac{h^2}{12a^2}$$

Obtenemos :

$$a^2 u_{xxx} + \frac{1+\nu}{2} a v_{x\theta} - \nu a w_x + a\phi(v_{x\theta} - w_x) + \frac{1-\nu}{2} u_{\theta\theta} = 0$$

$$\frac{1+\nu}{2} a u_{x\theta} + \frac{1-\nu}{2} a^2 v_{xx} + v_{\theta\theta} - w_{\theta} + \alpha [v_{\theta\theta} + w_{\theta\theta\theta} + a^2 w_{xx\theta} + a^2(1-\nu)v_{xx}] = 0$$

$$a \nu u_x + v_{\theta} - w - \alpha [v_{\theta\theta\theta} + (2-\nu)a^2 v_{xx\theta} + a^4 w_{xxxx} + w_{\theta\theta\theta\theta} + 2a^2 w_{xx\theta\theta}] = \phi(w + w_{\theta\theta}) \quad \dots \dots \dots 52$$

La resolución de estas ecuaciones que satisfagan las condiciones de frontera en los apoyos, nos dará el valor crítico de la presión lateral.

Si los bordes del cascarón están simplemente apoyados, entonces debe satisfacerse que :

$$\text{en } x = 0, L, \quad w = 0 \quad ; \quad w_{xx} = 0$$

Usando los ejes de referencia mostrados en la figura 15, se propone el siguiente campo de desplazamiento, el cual satisface las condiciones de frontera para bordes simplemente apoyados, para describir el pandeo del cascarón.

$$u = A \text{ Sen } n\theta \text{ Sen } \frac{m \pi x}{L}$$

$$v = B \text{ Cos } n\theta \text{ Cos } \frac{m \pi x}{L} \quad \dots \dots \dots 53$$

$$w = C \text{ Sen } n\theta \text{ Cos } \frac{m \pi x}{L}$$

Así, durante el pandeo, los generadores del cascarón se supone se deflectan en una media onda senoidal y la circunferencia en 2n medias ondas.

Sustituyendo las expresiones 53 en las expresiones 52, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde :

$$b_{11} = -\lambda^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2$$

$$b_{12} = \frac{1+\nu}{2} n \lambda + n \lambda \phi$$

$$b_{13} = (\nu + \phi)\lambda$$

$$b_{21} = \frac{1+\nu}{2} n \lambda$$

$$b_{22} = -\left[ \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2(1 + \alpha) + \alpha(1 - \nu) \lambda^2 \right]$$

$$b_{23} = -n[1 + \alpha(n^2 + \lambda^2)]$$

$$b_{31} = \nu\lambda$$

$$b_{32} = -n[1 + \alpha n^2 + (2 - \nu)\alpha \lambda^2]$$

$$b_{33} = -[1 + \alpha(\lambda^2 + n^2)^2 + \phi(1 - n^2)]$$

$$\lambda = \frac{\pi a}{L} \quad ; \quad \phi = \frac{qa(1 - \nu^2)}{Eh} \quad ; \quad \alpha = \frac{h^2}{12a^2}$$

La solución no trivial de este sistema dará una ecuación con la que se puede determinar la presión lateral de pandeo crítica, al igualar a cero el determinante del sistema se obtiene una ecuación de la forma :

$$\phi(D + E\alpha + F\phi) = G + H\alpha + K\alpha^2 \quad \dots \dots \dots 54$$

donde :

$$D = (1 - n^2)(n^2 + \lambda^2)^2 - \nu \lambda^4$$

$$E = (1 - n^2)\left(n^2 + \frac{2\lambda^2}{1-\nu}\right)[n^2 + (1-\nu)\lambda^2] + \frac{1+3\nu}{1-\nu} n^4 \lambda^2 +$$

$$+ \frac{2+3\nu - \nu^2}{1-\nu} n^2 \lambda^4 - \frac{2\nu n^2 \lambda^2}{1-\nu} - 2\nu \lambda^4 - \frac{1+\nu}{1-\nu} n^2 \lambda^2 (\lambda^2 + n^2)^2$$

$$F = -\frac{1+\nu}{1-\nu} (1 - n^2)n^2 \lambda^2$$



$$G = - (1 - \nu^2) \lambda^4$$

$$H = - (n^2 + \lambda^2)^4 + 2n^2(n^2 + \frac{3-\nu}{2} \lambda^2) [n^2 + (2 + \nu) \lambda^2] -$$

$$- [n^2 + (1 - \nu) \lambda^2] [n^2 + 2(1 + \nu) \lambda^2]$$

$$K = - \lambda^4 (n^2 + \lambda^2) [n^2(1 - \nu) + 2 \lambda^2]$$

Esta ecuación puede ser simplificada eliminando los términos que tengan poco efecto en la magnitud de la presión lateral crítica, obteniendo la siguiente expresión :

$$\emptyset = P + Q \alpha \quad \dots \dots \dots \quad 55$$

donde :

$$P = \frac{1 - \nu^2}{R(n^2 - 1)}$$

$$Q = n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \nu}{R}$$

$$R = 1 + \left( \frac{nL}{\pi a} \right)^2$$

Cuando el cascarón es muy largo, entonces  $\frac{l}{a}$  es un número grande, de esta forma pueden despreciarse los términos que en el denominador de la expresión 55 contengan el cuadrado de  $\frac{l}{a}$ , obteniendo :

$$q_{cr} = \frac{Eh^3 (n^2 - 1)}{12a^3 (1 - \nu^2)} \quad \dots \dots \dots \quad 56$$

resultado que concuerda para  $n=2$ , con el que se obtiene [4] para el pandeo de un aro circular bajo presión externa.

Para el caso de cilindros cortos, la ecuación 55 se puede representar convenientemente mediante una gráfica que relacione  $\emptyset$  con  $\alpha$  para un valor determinado de  $n$ . Esto se ilustra en la figura 16.

Como se vé, el número de ondas circunferenciales en que el cascarón se pandea crece a medida que  $L$  y  $h$  decrecen.

$$\phi = qa(1 - \nu^2) / Eh [10^{-4}]$$

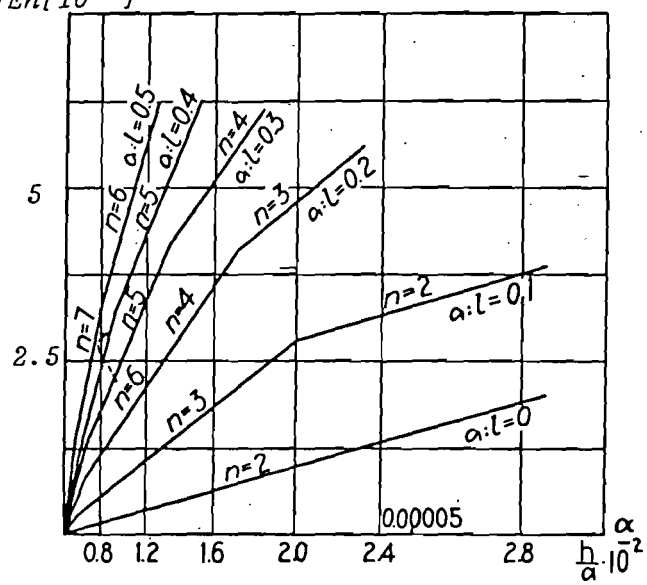


Figura No.16: Diagrama de pandeo de cascarones cilindricos circulares cortos sometidos a presión lateral externa uniforme

Otra forma de representar la ecuación 55, consiste en tomar como ejes coordenados las cantidades :  $\log(\frac{L}{a})$  como abscisas y  $\log(\phi_{cr})$  en las ordenadas, así para cada valor de  $\alpha$  se obtiene una curva formada por una porción de curva que corresponde a un valor particular de  $n$ , ésto se ilustra en la figura 17 con  $\nu = 0.1667$  y diversos valores de  $\alpha$ .

Se puede observar que : para cascarones cortos la carga crítica crece rápidamente conforme  $\frac{L}{a}$  decrece y para cascarones largos ( $\frac{L}{a} > 50$ ) - la carga crítica ya no depende de la longitud y su valor está dado por la ecuación 56 para  $n=2$ , es decir :

$$q_{cr} = \frac{Eh^3}{4a^3(1 - \nu^2)}$$

o bien : 
$$\frac{q_{cr} a(1 - \nu^2)}{Eh} = \frac{1}{4} \left(\frac{h}{a}\right)^2 = 3 \alpha \dots \dots \dots 57$$

Existe otra forma práctica de presentar los valores de presión lateral crítica en cascarones, especialmente si están hechos de acero, esta forma se ilustra en la figura 18.

El conjunto de líneas rectas horizontales de la izquierda, corresponden a valores de presión lateral crítica para un esfuerzo de cedencia en compresión del material de  $1830 \text{ kg/cm}^2$  calculados por la relación :

$$\sigma_{cr} = \frac{q_{cr} a}{h} = \sigma_{ced.}$$

y si :  $f = \frac{h}{2a}$  entonces  $q_{cr} = 2f \sigma_{ced} = 3660f$

Las curvas de la derecha son calculadas mediante la ecuación 55 - con  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0.3$  y cada una para un valor de  $\alpha$ .

La gráfica es útil para poder determinar el espesor necesario de la pared del cascarón cilíndrico si se conoce la relación  $\frac{L}{2a}$  y se usa un apropiado factor de seguridad  $\delta$  también para determinar el valor crítico de la carga.

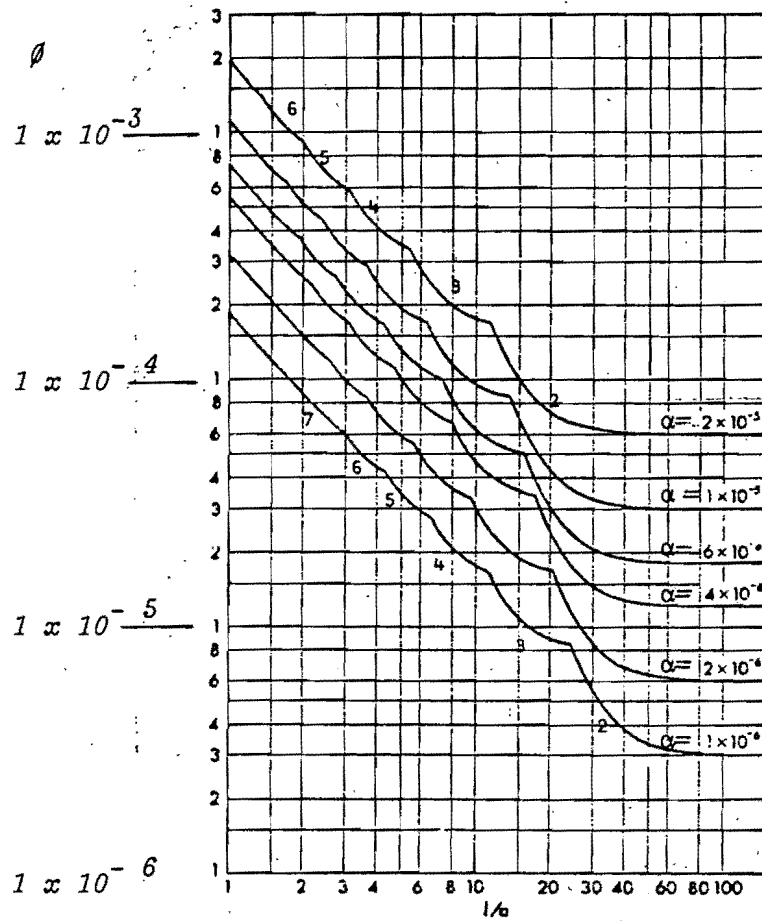


Figura No.17: Diagrama final de pandeo de un cascarón cilíndrico circular sometido a presión lateral uniforme.  
(construido para  $\alpha = 1, 2, 4, 6, 10, 20 [10^{-6}]$ ;  $\nu = 0.1667$ )

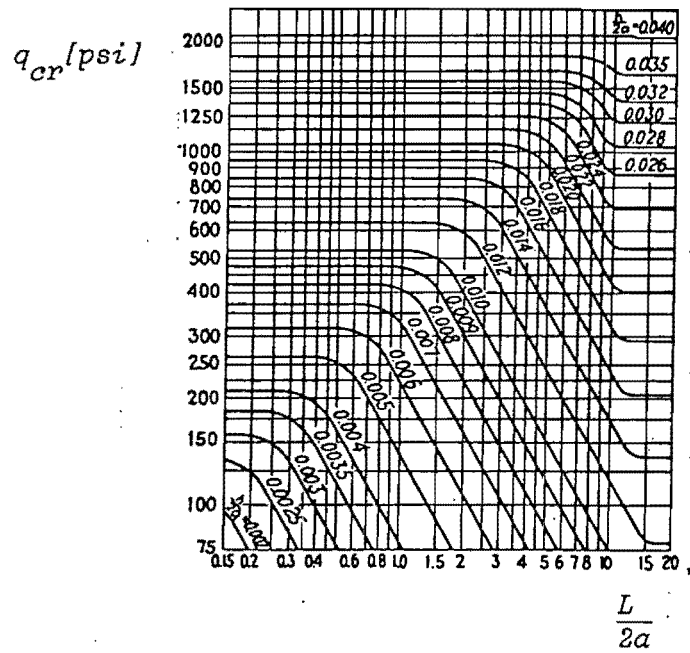


Figura No.18: Gráfica de pandeo de cascarones cilíndricos circulares de acero ( $\nu = 0.3$ ) sometidos a una presión lateral externa uniforme.

C.- PANDEO DE UN CASCARON CILINDRICO BAJO LA ACCION COMBINADA DE CARGA AXIAL Y PRESION LATERAL UNIFORMES.

El análisis de este caso de pandeo en cascarones cilíndricos, es -- importante ya que existen muchos problemas reales en los que tiene aplicación por ejemplo: en el diseño de :

- columnas para plataformas marinas
- el fuselaje y alas de un avión
- el casco de un submarino
- el cuerpo de un cristizador
- el casco de un proyectil ó cohete
- un silo para almacenaje de granos
- etc.

En todos estos casos existe la acción simultánea de cargas de -- compresión axial y presión lateral externa; bajo tales cargas, el cascarón puede mantener su forma cilíndrica, pero para ciertos valores críticos de -- las mismas, esta forma de equilibrio puede llegar a ser inestable y entonces ocurre el pandeo.

Este problema fué estudiado y resuelto por R. Von Mises en 1929; -- discutido más tarde en 1932 por K. Von Sanden y F. Tölke, así mismo por W. -- Flügge en 1932.

El problema es atacado por el método de equilibrio, para lo cual -- es necesario acoplar las ecuaciones diferenciales de equilibrio vistas en -- los dos casos anteriores, suponiendo de nueva cuenta que los desplazamientos  $u, v, w$  son pequeños, entonces si se definen las siguientes funciones de -- esfuerzo :

$$\phi_1 = \frac{q_a (1 - \nu^2)}{Eh} \quad \text{y} \quad \phi_2 = - \frac{N_x (1 - \nu^2)}{Eh}$$

en donde  $\phi_1$  corresponde al efecto de la presión lateral uniforme y  $\phi_2$  al -- de la compresión axial uniforme. Al aplicarlas a las expresiones 52 y 22 -- respectivamente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferencia -- les de equilibrio :

$$\begin{aligned}
 & a^2 u_{xx} + \frac{1+\nu}{2} a v_{x\theta} - \nu a w_x + a \phi_1 (v_{x\theta} - w_x) + \frac{1-\nu}{2} u_{\theta\theta} = 0 \\
 & \frac{1+\nu}{2} a u_{x\theta} + \frac{1-\nu}{2} a^2 v_{xx} + v_{\theta\theta} - w_{\theta\theta} + a [v_{\theta\theta} + w_{\theta\theta\theta} + a^2 w_{xx\theta} + a^2 (1-\nu) v_{xx}] - a^2 \phi_2 v_{xx} = 0 \quad \dots 58 \\
 & \nu a u_x + v_{\theta\theta} - w_{\theta\theta} - a [v_{\theta\theta\theta} + (2-\nu) a^2 v_{xx\theta} + a^4 w_{xxxx} + w_{\theta\theta\theta\theta} + 2a^2 w_{xx\theta\theta}] = \\
 & \qquad \qquad \qquad = \phi_1 (w + w_{\theta\theta}) + \phi_2 a^2 w_{xx}
 \end{aligned}$$

Si se supone que los bordes del cascarón son simplemente apoyados y se usa el sistema de ejes coordenados de la figura 19, entonces puede proponerse como solución del sistema de ecuaciones 58 el mismo campo de desplazamientos que en el caso 2, ésto es :

$$\begin{aligned}
 u &= A \text{ Sen } n\theta \text{ Cos } \frac{m\pi x}{L} \\
 v &= B \text{ Cos } n\theta \text{ Sen } \frac{m\pi x}{L} \\
 w &= C \text{ Sen } n\theta \text{ Cos } \frac{m\pi x}{L}
 \end{aligned}$$

Al sustituir estas expresiones en 58 se obtiene un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en A, B, C. Una solución no trivial del sistema se obtiene igualando a cero el determinante de la matriz de coeficientes, con lo cual y después de eliminar aquellos términos, cuyo efecto sobre la presión lateral y/o la carga axial de compresión críticas sea despreciable, se obtiene una ecuación de la forma :

$$C_1 + C_2 \alpha = C_3 \phi_1 + C_4 \phi_2 \quad \dots \dots \dots 59$$

donde :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (1 - \nu^2) \lambda^4 \\
 C_2 &= (\lambda^2 + n^2)^4 - 2[\nu \lambda^6 + 3 \lambda^4 n^2 + (4-\nu) \lambda^2 n^4 + n^6] + \\
 &\quad + 2(2 - \nu) \lambda^2 n^2 + n^4 \\
 C_3 &= n^2 [ (\lambda^2 + n^2)^2 - (3\lambda^2 + n^2) ]
 \end{aligned}$$

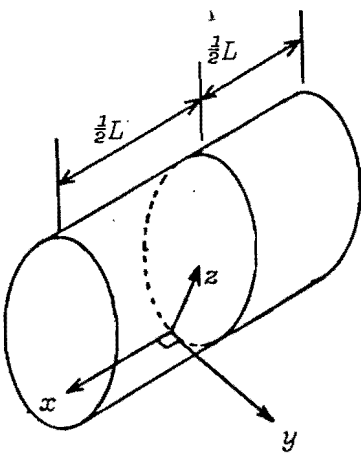
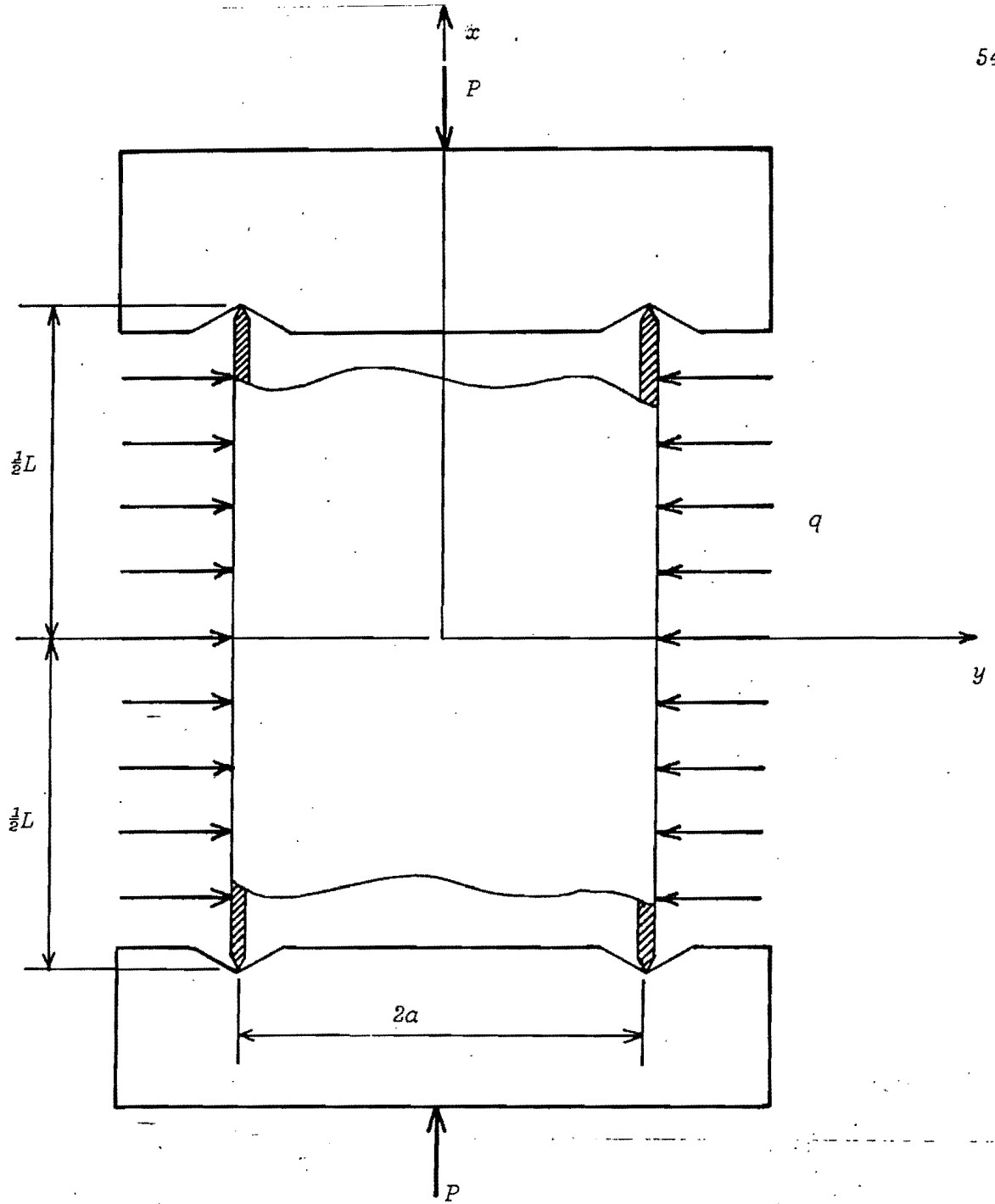


Figura No.19: Cascaron cilíndrico circular sometido a la acción combinada de carga axial- y presión lateral uniformes.



$$C_4 = \lambda^2 [(\lambda^2 + n^2)^2 + n^2]$$

$$\alpha = \frac{\hbar^2}{12a^2} \quad ; \quad \lambda = \frac{m \pi a}{L}$$

Esta ecuación representa una relación lineal entre  $\phi_1$  y  $\phi_2$  la cual puede graficarse para distintos valores de  $\alpha$  y especificando valores para  $m$  y  $2n$ . En la figura 20 aparece esta gráfica para  $\alpha = 10^{-5}$  y  $v=0.1666$  en la que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  están en el eje de las abscisas y las ordenadas respectivamente; si se toma  $m=1$  y se hace que  $n=2,3,4,\dots$  se obtiene para un valor de  $\alpha$  -- una línea poligonal.

La intersección de las poligonales con el eje horizontal dará un conjunto de valores críticos de  $\phi_1$  esto es cuando la presión lateral actúa sola, observándose que  $\phi_1$  y  $n$  crecen a medida que  $\lambda$  lo hace, lo que concuerda con el caso 1.

La intersección de las poligonales con el eje vertical, dará otro conjunto de puntos que representan los valores críticos de  $\phi_2$ , esto es cuando la carga axial está sola.

Para cualquier valor dado de la relación  $\frac{\phi_1}{\phi_2}$  se dibuja en el diagrama de la figura 20 una recta a partir del origen con pendiente  $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ , la cual intersectará a las poligonales, dando otro conjunto de puntos de la forma  $(\phi_1, \phi_2)$  los cuáles representan los valores críticos de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .

A manera de ejemplo se tiene un caso bastante común en el que se tiene un cascarón cilíndrico cerrado en sus extremos y sometido a una presión hidrostática, según figura 21, entonces :

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \phi_1$$

Al sustituir esta expresión en la 59, eliminando los términos --

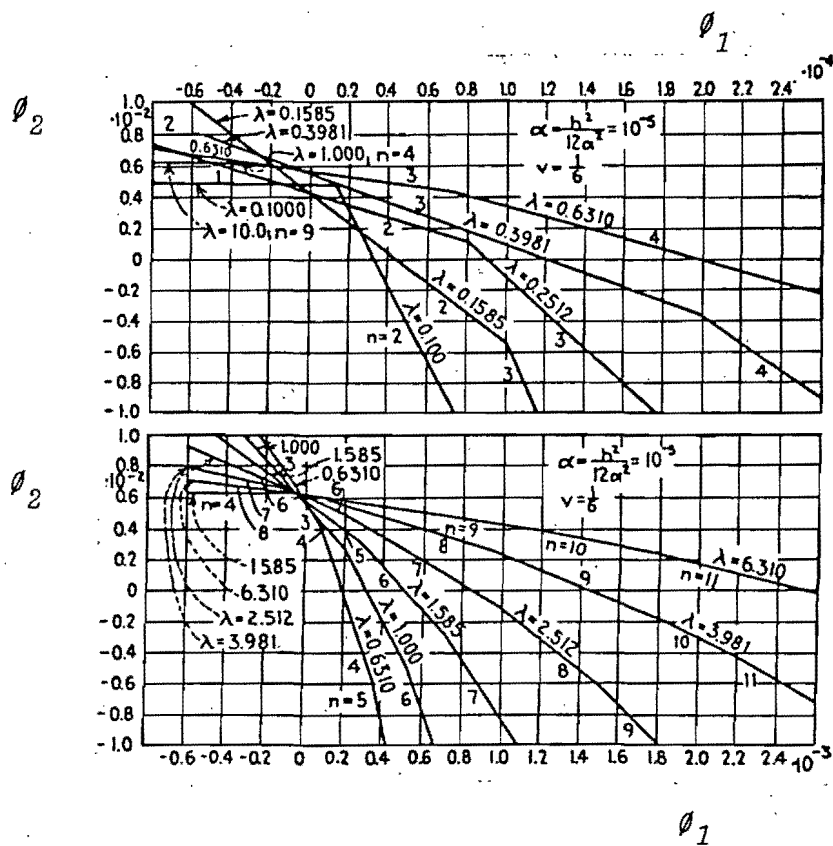


Figura No.20: Diagrama de interacción adimensional para un cascarón cilíndrico circular sometido a carga axial y presión lateral externa uniformes.  
(  $\alpha=0.00001$  ;  $\nu=0.1667$  )

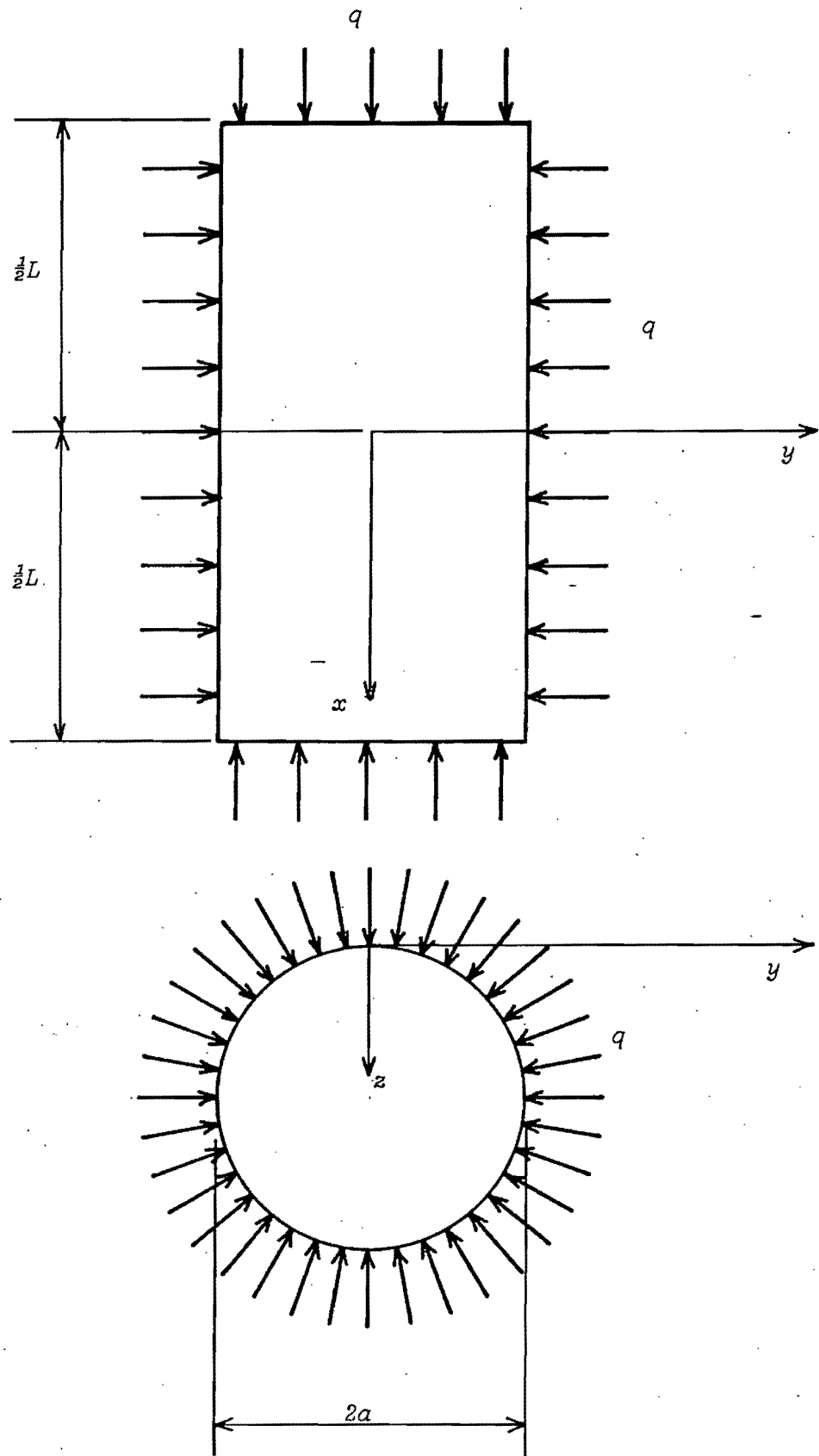


Figura No.21: Cascarón cilíndrico circular sometido a presión hidrostática.

despreciables y suponer que el cascarón es delgado, se obtiene la siguiente ecuación :

$$q_{cr} = \frac{Eh}{a} \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi a}{L} \right)^2} \left[ \frac{1}{\left[ 1 + n^2 \left( \frac{L}{\pi a} \right)^2 \right]} + \frac{h^2}{12a^2(1-\nu^2)} \left[ n^2 + \left( \frac{\pi a}{L} \right)^2 \right]^2 \right] \dots .60$$

Los valores de  $n$  que minimizan esta expresión se determinan de la gráfica de la figura 22, la cual tiene como abscisas a  $\left[ \frac{L}{2a} \right]$  y como ordenadas a  $\left[ \frac{h}{2a} \right]$ , pudiéndose observar que a medida que el cascarón se hace más corto y más delgado el número de lóbulos que aparecen en la circunferencia crece.

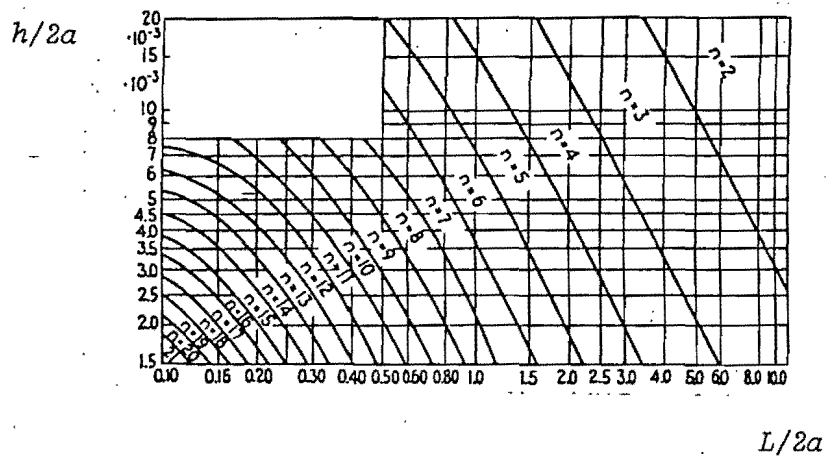
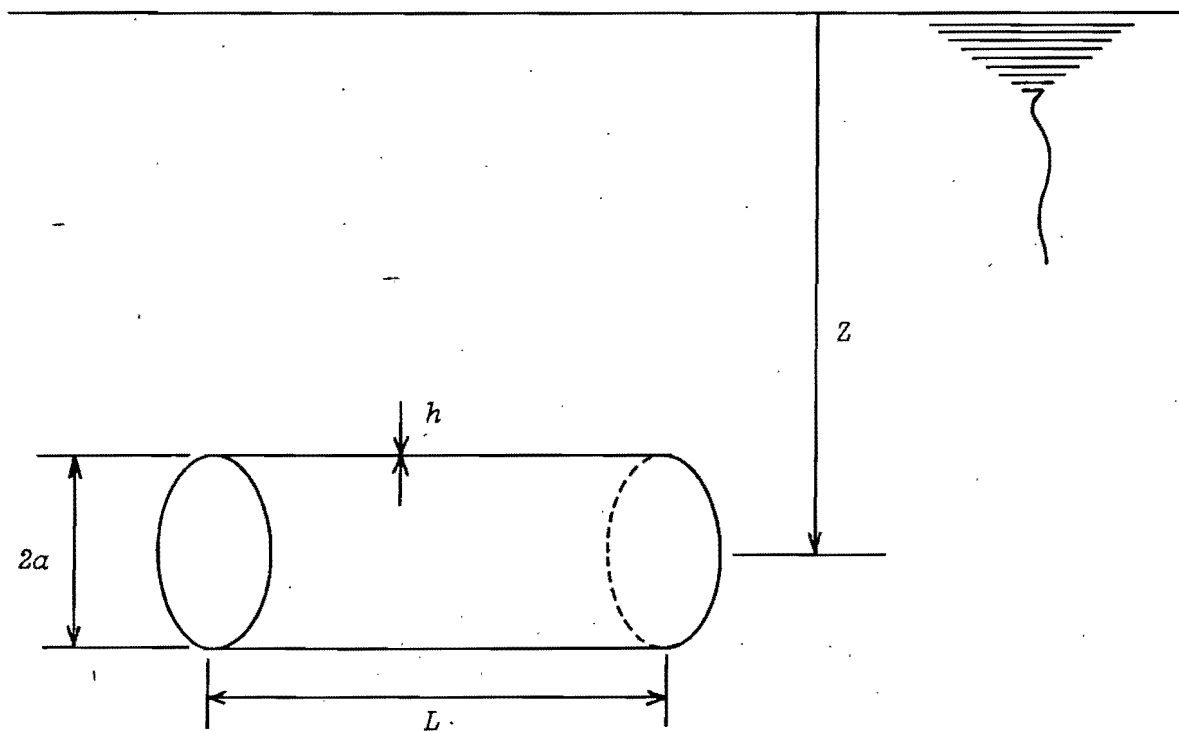


Figura No.22 : Gráfica de pandeo hidrostático de un cascarón cilíndrico ( $\phi_2 = \frac{1}{2}\phi_1$ )

PROBLEMA DE APLICACION :

Se tiene un recipiente cilíndrico que será sumergido en el mar para fines de investigación oceanográfica, con la geometría y material indicados en la figura.



$$h = 0.01 \text{ m}$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$a = 1.00 \text{ m}$$

$$\nu = 0.3$$

$$L = 5.00 \text{ m}$$

Se requiere determinar a que profundidad en el mar fallaría -- por pandeo combinado. Considere el peso volumétrico del mar como ---  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

SOLUCION :

Para la geometría y materiales dados, se resuelve la ecuación - 60 para diversos valores de  $n$ , obteniendo los valores dados en la siguiente tabla :

$n$	$q_{cr} \left[ \frac{Kg}{cm^2} \right]$
2	41.257
3	5.877
4	3.943
5	5.123
6	7.105

En la gráfica de la figura 23, se ilustra cómo varía la presión crítica  $q_{cr}$  en función de  $n$ ; observando que el valor más pequeño de  $q_{cr} = 3.943 \text{ kg/cm}^2$  ocurre cuando  $n=4$ .

Entonces :  $q_{cr} = \gamma Z_{cr}$

$$Z_{cr} = \frac{q_{cr}}{\gamma} = \frac{3.943 \times 10^4}{1000} = \underline{\underline{39.43 \text{ m}}}$$

En la figura No. 24 se ilustra la forma en que ocurre el pandeo del cascarón cilíndrico, a lo largo de su circunferencia.

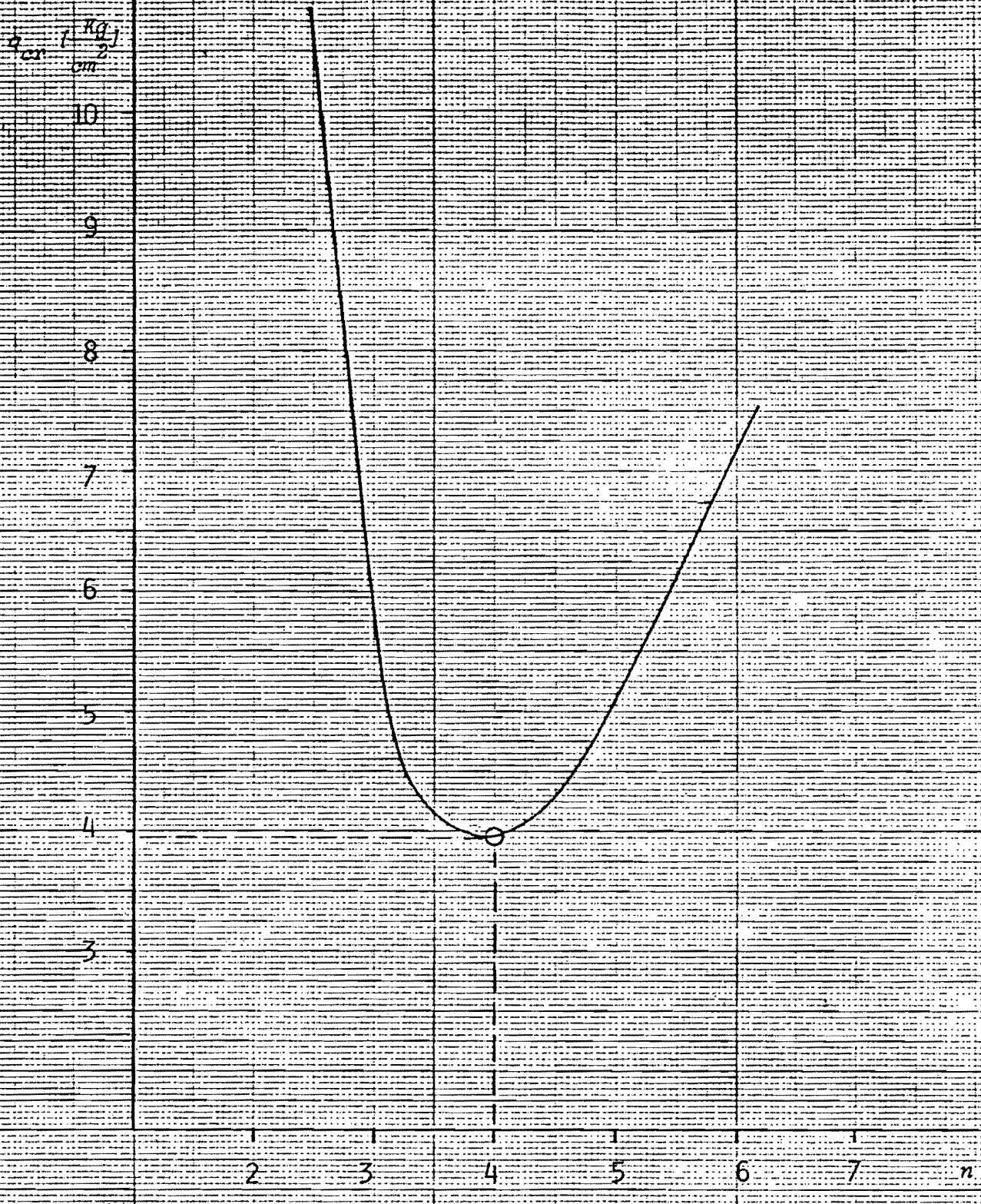
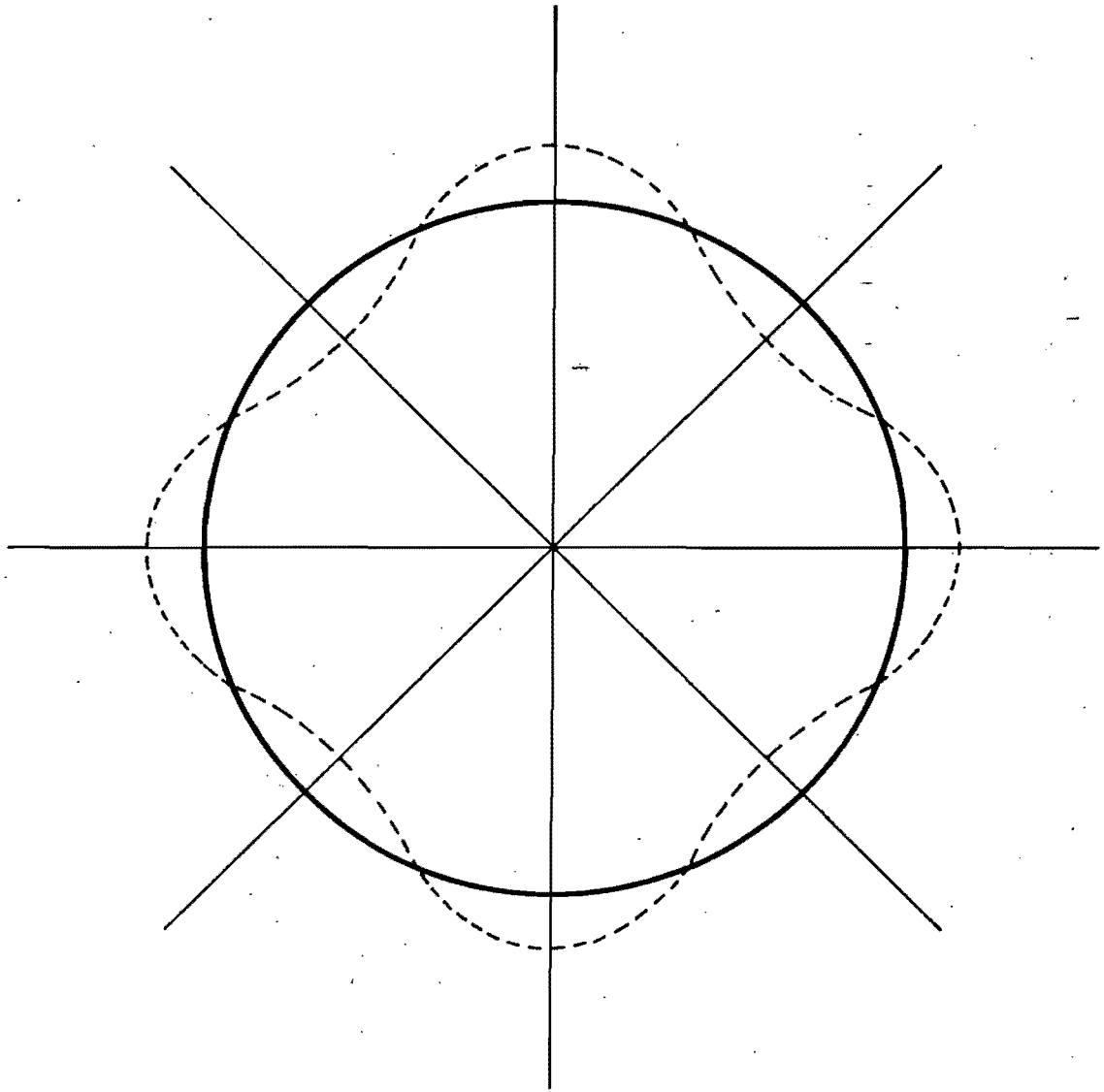


Figura No. 23.- Gráfica de la presión crítica vs. No. de lóbulos del problema de aplicación.





*Figura No. 24.- Forma de pandeo circunferencial*

## V.- TEMAS PARA INVESTIGACIONES FUTURAS.

Hoy día en la teoría moderna del pandeo se tratan muchas cuestiones prácticas, además de la determinación de la carga crítica, de entre ellas -- se pueden mencionar los siguientes apartados sobre los que se puede recorrer un vasto camino.

- 1.- La determinación del grado de estabilidad del cascarón antes de alcanzar su valor crítico.
- 2.- El efecto que causan las imperfecciones geométricas, las cuáles pueden ir desde un rasguño hasta un agujero .
- 3.- Los efectos de comportamiento inelástico y otras anomalías relacionadas con el tiempo de los materiales con que se fabrican los cascarones.
- 4.- La respuesta no lineal del cascarón cuando se le somete a la acción de cargas impulsivas.
- 5.- Efectos de temperatura, en el que el cascarón puede llegar a estar sometido a variaciones importantes de temperatura, las cuáles si son conocidas, es posible añadirlas a las ecuaciones gobernantes.
- 6.- Efectos del tiempo
- 7.- Esfuerzos residuales, lo cual comprende dos puntos;
  - a) La parte experimental dada la incertidumbre en cuanto a la magnitud y distribución de ellos.
  - b) La parte analítica que consistiría en determinar la forma de cómo -- pueden ser incluidos en el criterio de estabilidad.

## VI.- CONCLUSIONES

*Sin lugar a dudas, el tema tratado tiene mucha importancia, ya que un buen número de problemas pueden ser resueltos con la teoría brevemente presentada aquí.*

*Sin embargo, aún hay mucho que puede hacerse, tanto en el terreno analítico como en el experimental, baste por ejemplo mencionar que tan sólo en la generación de diagramas de interacción en el que se consideren distintos tipos de materiales, otras condiciones de apoyo en los bordes del cascarón, el efecto de imperfecciones, etc. requeriría del esfuerzo de mucha gente, en el aspecto analítico, para añadir estos efectos en las ecuaciones gobernantes del cascarón, resolver el sistema de ecuaciones que resulte, así mismo hacer los programas y obtener finalmente los diagramas con el auxilio de la computadora.*

*En el aspecto experimental, el trabajo sería árduo, desde la preparación de las muestras, simulación de las condiciones de borde y carga, medición de las deformaciones y análisis de los resultados para validar lo que la teoría diga.*

## VII.- R E F E R E N C I A S .

- 1.- FLÜGGE, W., *Stresses in Shells*, Springer Verlag  
Berlin, 1960.
- 2.- LANGHAAR, H.L. *Energy Methods in Applied Mechanics*,  
John Wiley, New York, 1962
- 3.- LOVE, A.E.H. *The Matematical Theory of Elasticity*
- 4.- TIMOSHENKO, S. AND J.M. GERE, *Theory of Elastic Stability*  
2nd edition, Mc Graw-Hill, New York 1961
- 5.- TIMOSHENKO, S. AND WOINOWSKY-KRIEGER, *Teoría de Placas y Láminas*,  
Urmo, 1a. edición en Español, España 1975.
- 6.- UGURAL, A.C. *Stresses in Plates and Shells*,  
Mc Graw-Hill 1981
- 7.- VINSON, J.R. *The Behavior of Plates and Shells*,  
John Wiley, New York 1974.