

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERIA**

**ANALISIS DE CIMENTACIONES SUPERFICIALES PARA MAQUINARIA**

**TRABAJO**

**PRESENTADO A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO DE LA**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**DE LA**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRO EN INGENIERIA  
MECANICA DE SUELOS**

**MARTIN RAMIREZ REYNAGA**

**CIUDAD UNIVERSITARIA  
ENERO 1989**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPFI



DEPFI

T. UNAM

1 9 8 9

RAM

Ej. 2

# INDICE

1.-Introducción.	pag. 2
2.-Criterios de diseño.	3
2.a).-Requisitos de seguridad y de servicio.	
3.-Metodología de diseño.	5
3.a).-Definición y evaluación de las acciones de de la maquinaria.	
3.b).-Definición y evaluación de la resistencia del suelo de cimentación.	
3.c).-Dimensionamiento.	
3.d).-Análisis de la respuesta dinámica del sistema suelo-cimentación-maquinaria.	
4.-Aplicaciones.	30
5.-Conclusiones.	36
Referencias.	38
Simbología.	42
Figuras.	44
Tablas.	75
Anexo A.-Ayudas de diseño.	78
Anexo B.-Solución de ecuaciones de equilibrio dinámico.	83
Anexo C.-Notación vectorial.	94

## **I.-INTRODUCCION**

Para la ingeniería práctica es cada vez más importante disponer de métodos de análisis cuya aplicación sea rápida, sencilla y segura, tal que permitan que la solución a los problemas de ingeniería sea lo suficientemente aproximada y compatible con la realidad. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de uno de los métodos simples para evaluar la respuesta dinámica de cimentaciones de maquinaria aprovechando los resultados obtenidos en investigaciones recientes relacionadas con el tema.

El método se justifica porque toma en cuenta de manera racional la interacción entre suelo y cimentación de maquinaria, para lo cual se fundamenta en modelos simples de la dinámica estructural, de la teoría de propagación de ondas y de la mecánica de suelos así como en la definición, uso y manejo de conceptos útiles para la solución de las ecuaciones de movimiento. Estos rasgos hacen que el planteamiento sea fácil de aplicar a una gran cantidad de problemas que se presentan en la práctica de la ingeniería de cimentaciones de maquinaria.

El objetivo de éste trabajo consiste en proponer un método que permita resolver problemas de cimentación de maquinaria y hacer notar la sencillez del mismo, así como destacar la importancia que tiene el planteamiento de hipótesis simplificadoras basadas en la experiencia práctica, en el conocimiento teórico del ingeniero y en los conceptos fundamentales que justifican el método.

Finalmente se incluyen tres anexos, uno que se refiere a ayudas de diseño, en el que se mencionan algunos criterios principales con los que se diseñan las cimentaciones de maquinaria, en otro anexo se presenta la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico de los modelos utilizados y el último se presenta la notación matemática que se utiliza para la solución de los mismos.

## 2.-CRITERIOS DE DISEÑO

Es necesario definir criterios de diseño de tal manera que estos estén conformes con la condición de que cualquier estructura cumpla su función en la forma más adecuada.

Para el diseño de cimentaciones de maquinaria son dos los criterios más importantes con los cuales se revisa el comportamiento de la misma; uno de ellos considera que la amplitud de las deformaciones inducidas por la vibración no excedan los límites de servicio de la maquinaria; el otro considera el hecho de evitar que el sistema máquina-cimentación-suelo entre en resonancia con la frecuencia normal de operación de la máquina.

### 2.a).-ESTABLECIMIENTO DE LOS REQUISITOS DE SEGURIDAD Y DE SERVICIO.

En general, los criterios de diseño se definen mediante estados límite; los cuales estipulan comportamientos inaceptables de la cimentación. Muchos códigos y reglamentos consideran como requisitos de seguridad y de servicio de las cimentaciones de maquinaria a los siguientes :

2.a.1) La cimentación debe ser capaz de transmitir las cargas impuestas sin causar falla por corte o punzonamiento en el suelo de cimentación.

2.a.2) Los asentamientos inmediatos y diferidos deberán estar dentro de los límites permisibles.

2.a.3) La frecuencia natural de vibración del sistema máquina-cimentación-suelo deberá estar alejada de la frecuencia de operación de la máquina.

2.a.4) Las amplitudes de deformación del suelo de cimentación bajo condiciones de servicio deberán estar bajo límites permisibles.

Es importante notar que la magnitud de las deformaciones del suelo de cimentación, incluidas en los criterios de diseño de cimentación de maquinaria, es mucho más pequeña que aquellas consideradas en el diseño para cargas estáticas; esto se debe a que se toman factores reguladores del diseño tales como efectos de las vibraciones en las personas, efectos en estructuras adyacentes, evitar daños a tuberías y otros accesorios conectados con la maquinaria, así como evitar daños a equipos muy sensibles y costosos y a consideraciones de costos iniciales, de mantenimiento y de reemplazo de la maquinaria.

Tomando en cuenta los factores antes mencionados, se han elaborado una serie de tablas y gráficas (refs.3,6,20 y 44), las cuales representan los estados límite de servicio con los que deberá compararse el comportamiento calculado de la cimentación de la maquinaria. En el anexo A.-"Ayudas de diseño" se presentan algunas de las tablas y

gráficas más utilizadas.

Una vez definidos los criterios que establecen los requisitos de seguridad y de servicio; deberá unificarse un procedimiento que permita llevar una metodología de diseño, la cual puede integrarse generalmente de lo siguiente :

- a).- Definición y evaluación de las acciones de la maquinaria.
- b).- Definición y evaluación de las características del suelo de cimentación.
- c).- Dimensionamiento.
- d).- Análisis de la respuesta del sistema maquinaria-cimentación-suelo.

A continuación, en el capítulo 3, se describe cada uno de estos incisos.

### **3.-METODOLOGIA DE DISEÑO**

#### **3.a).-DEFINICION Y EVALUACION DE LAS SOLICITACIONES DEBIDO A MAQUINARIA.**

##### **3.a.1.-ORIGEN DE LAS SOLICITACIONES.**

Las cargas inducidas por el funcionamiento de maquinaria son de naturaleza dinámica, es decir que el tiempo transcurrido entre la aplicación de estas es lo suficientemente pequeño para que las fuerzas de inercia lleguen a tener importancia respecto a las estáticas. El origen de ellas puede ser cualquiera de los siguientes :

i).- El propio funcionamiento de la máquina.

ii).-El desbalanceo debido a la no coincidencia del centro de masas con el eje de rotación de una máquina, por el desgaste de piezas y por defectos de fabricación o mala instalación de la máquina.

iii).-Movimientos de equipo complementario. ---

Los mecanismos anteriores producen fuerzas y momentos muy importantes los cuales serán las cargas a las que estará sometido el suelo a través de la cimentación, y dependiendo de la calidad, tipo y tiempo de funcionamiento de una maquinaria, las fuerzas "conocidas" pueden ser mucho mayores que las desconocidas o viceversa. Mayores detalles para el análisis de los mecanismos de funcionamiento de la maquinaria y la evaluación de las cargas que se producen se presentan en la referencias 21 y 30.

Pueden conocerse y calcularse las cargas que se producen por el funcionamiento propio de la máquina o ser obtenidas como dato dado por el fabricante de la máquina; por otra parte, las cargas debido al desbalanceo, desgaste u operación de la máquina a velocidades diferentes de la de diseño pueden ser desconocidas y difíciles de cuantificar, por ello los fabricantes muestran aversión a suministrar valores de tales cargas. Para contrarrestar esto, algunos manuales de diseño recomiendan que siempre se tomen en cuenta cargas debido a desbalanceo, aún y cuando éstas no existan recién instalada la máquina. (ref. 3).

##### **3.a.2.-CARACTERIZACION DE FUERZAS.**

Para su estudio las fuerzas se han caracterizado de acuerdo a su variación respecto al tiempo en armónicas e impulsivas; y para su análisis conviene representarlas en forma de armónica simple o como una suma de armónicas simples mediante un análisis de contenido de frecuencias, lo cual facilita mucho los cálculos posteriores de la respuesta de la máquina. Para mayor información sobre esta caracterización pueden consultarse las referencias 21, 30 y 36.



### 3.b).--DEFINICION Y EVALUACION DE LAS CARACTERISTICAS DEL SUELO DE CIMENTACION.

En general la respuesta del suelo puede ser elástica, plástica y viscosa; esto es, el comportamiento elástico se caracteriza por la capacidad que tiene de almacenar energía mecánica potencial sin la pérdida de ella, lo cual hace que pueda recuperarse. Se manifiesta en forma de deformación recuperada durante los lazos de histéresis de varios ciclos de carga y descarga (fig. 3.b.1), al mantenerse estos paralelos entre sí en cada ciclo sin que el esfuerzo aplicado esté cerca del de falla. Esto demuestra que la respuesta elástica, y por consiguiente el módulo correspondiente, son independientes del nivel de esfuerzos alcanzado antes de la descarga excepto a niveles de esfuerzo cercanos al de la falla (ref. 55).

El comportamiento plástico implica llevar al suelo a un estado de esfuerzos lo suficientemente grandes tal que los granos del suelo sufran desplazamientos relativos entre sí con tendencia a lograr posiciones más estables; entonces, el suelo mostrará deformaciones permanentes después de cada ciclo de carga-descarga, a este fenómeno se le dice que es permanente plástico. Una gran parte de este comportamiento toma lugar instantáneamente y al mismo tiempo que la deformación elástica, y debido a la fricción entre partículas, este comportamiento tiene la capacidad de disipar energía mecánica sin almacenarla ni recuperarla (amortiguamiento histerético).

Por otra parte, existe la respuesta viscosa, y se asocia a la que tiene un líquido perfectamente newtoniano cuya respuesta es función de la velocidad de deformación y directamente proporcional al esfuerzo aplicado, con la capacidad de disipar energía mecánica cinética sin almacenarla ni recuperarla. (amortiguamiento viscoso)

En general, la respuesta del suelo se presenta como una combinación de respuestas elástica, plástica y viscosa; sin embargo, dependiendo de las condiciones de carga, de los niveles de esfuerzo o de deformación alcanzados y de los factores que influyen en el comportamiento de los suelos, la participación de cada una de las respuestas puede tener mayor o menor importancia. Por ejemplo, en la teoría incremental de la plasticidad, el estado de deformación depende no únicamente del estado final de esfuerzos sino que también de la trayectoria de esfuerzos llevada para alcanzar dicho estado final de esfuerzos, además de ser independiente de las escalas de tiempo implicado en las cargas y las descargas.

Por otra parte, en la teoría de la viscoelasticidad el comportamiento del suelo tiene una dependencia específica y continúa en el tiempo, ya que el material no sólo responde a cada estado de esfuerzos, sino que también tendrá una dependencia y superposición del estado de esfuerzos aplicado anteriormente (ref. 9).

Se han desarrollado una gran cantidad de relaciones esfuerzo - deformación - tiempo a través de las observaciones y resultados obtenidos de ensayos de campo y laboratorio, las cuales se han aproximado mediante expresiones analíticas sencillas que permiten mediante el simple manejo matemático de las variables que forman el modelo, obtener y visualizar las tendencias del comportamiento

simulados; situación tal, que bajo las limitaciones de obtener resultados precisos, resulta ser muy práctico.

En la mayoría de los casos resulta interesante para la solución de problemas de cimentación de maquinaria el comportamiento viscoelástico del suelo; ya que es el que a través de los elementos elásticos transmite las ondas de esfuerzo y a través de los elementos viscoplásticos disipa la energía cinética del movimiento, lo que hace que las fuerzas y los desplazamientos resultantes estén fuera de fase entre sí (ver figura 3.b.2).

Debido a la filosofía del diseño de las cimentaciones de maquinaria; es decir, que deben transmitir un nivel de esfuerzos tal que las deformaciones sean lo suficientemente pequeñas, es necesario un modelo que permita predecir o estimar la respuesta del suelo a cargas dinámicas impuestas y cuyas relaciones esfuerzo-deformación puedan definirse con las constantes que representan la respuesta elástica del suelo y las propiedades de amortiguamiento viscoso e histerético del mismo.

Estudios experimentales indican que la rigidez a la deformación del suelo y la cantidad de amortiguamiento histerético son función no solo de las constantes elásticas—sino—que también del número de ciclos de aplicación de las cargas y del nivel de deformación alcanzado. En nuestro caso, y si respetamos la filosofía del diseño de cimentaciones de maquinaria, es suficiente evaluar los parámetros del suelo para pequeños niveles de deformación. En la figura 3.b.3 vemos que para dichos niveles de deformación los parámetros  $G$  y  $\zeta$  se mantienen prácticamente constantes e independientes de la frecuencia con que actúa la carga (respuesta elástica lineal del suelo).

Por lo anterior es necesario <sup>máximo (50 o 60%)</sup> determinar los parámetros del suelo siguientes: el módulo de rigidez al corte  $G$ , la velocidad de propagación de ondas de esfuerzo cortante  $V_s$ , la relación de Poisson  $\nu$ , la densidad del suelo  $\rho$ , incluyendo el agua puesto que esta se mueve junto con el suelo, y el amortiguamiento histerético del suelo  $\zeta$ . Nótese que  $G = \rho V_s^2$  y  $\gamma = \rho g$  con lo que puede evaluarse  $G$ , si se conocen  $V_s$  y  $\rho$ ; o si se conocen  $E$  y  $\nu$ , también puede conocerse  $G$ .

Todos los parámetros antes mencionados se obtienen de técnicas experimentales de campo y laboratorio cuyos detalles de ejecución e interpretación se presentan en las referencias 1, 14, 23 y 38.

### 3.c).-DIMENSIONAMIENTO.

Tanto el análisis como el dimensionamiento constituyen un proceso iterativo de prueba y error que converge cuando las características de la cimentación satisfacen todos los requisitos de seguridad y de servicio establecidos para el buen funcionamiento de la máquina.

Por lo anterior, el diseño de la cimentación se empieza con la proposición de una dimensión preliminar de la cimentación, la cual se propone generalmente con base en un gran número de guías y recomendaciones que han resultado de la experiencia práctica y empírica del diseño de cimentaciones de maquinarias; por consiguiente el dimensionamiento preliminar no constituye necesariamente el diseño final de la cimentación.

Las recomendaciones de prediseño siguientes dan por resultado una buena y aceptable aproximación de la configuración final de la cimentación (ref. 3) :

i).-Siempre que sea posible deberá desplantarse la cimentación arriba del nivel freático. *porqué?*

ii).-Evitar desplantar sobre rellenos, ni en suelos sensitivos a las vibraciones.

iii).-Con relación al bloque de cimentación se recomienda :

- 1.- Que el bloque de cimentación tenga una masa de dos a tres veces la masa de máquinas centrífugas o si la máquina es rotatoria que la masa del bloque sea de tres a cinco veces la masa de la máquina.
- 2.- Que el nivel superior del bloque esté al menos 30 cm sobre el nivel de piso terminado.
- 3.- Que el espesor del bloque no tenga menos de 60 cm, menos que  $\frac{1}{6}$  de la dimensión más corta o  $\frac{1}{10}$  que la dimensión más larga.
- 4.- La dimensión de la cimentación debe ser ancha para incrementar el amortiguamiento en los modos de cabeceo. El ancho debe ser al menos de 1 a 1.5 veces la distancia entre el nivel de desplante y el centro de masas de la maquinaria.
- 5.- Una vez que el ancho y el espesor de la cimentación han sido seleccionados, la longitud puede determinarse de acuerdo con el punto 1, además de dar el área suficiente para colocar la máquina y tener espacio para dar mantenimiento, 30 cm de sobredimensionamiento en planta es suficiente.
- 6.- La longitud y el ancho de la cimentación deberán ajustarse tal que el centro de gravedad de la máquina más equipo coincida con el centro de gravedad del área de cimentación.

Ojo: no necesariamente el aumento de la masa es una buena opción puesto que esto disminuye o puede hacerlo, el mortiguamiento

Esto incrementa el mortiguamiento y disminuye la amplitud del desplazamiento.

7.- Para máquinas reciprocantes grandes podrá ser necesario incrementar la profundidad de empotramiento dentro del suelo tal que, del 50 al 80 % de la profundidad empotrada esté en contacto efectivo con las paredes.

8.- El análisis deberá predecir la resonancia con las frecuencias actuantes y así aumentar la masa de la cimentación para alejar la respuesta de la resonancia de máquinas reciprocantes o disminuir la masa para máquinas centrífugas.

w).-El cabeceo es una de las causas principales que causan daño a la maquinaria, por lo cual se recomiendan los arreglos siguientes para minimizar sus efectos (ref.18) :

- 1.- Empotrar la cimentación y garantizar el efecto de empotramiento (fig.3.c.1.a).
- 2.- Hacer que  $L > H$  como se muestra en la figura 3.c.1.b, ya que si  $L > 4H$  el cabeceo tiende a anularse.
- 3.- Hacer que  $H_1 < H_2$  como se muestra en la figura 3.c.1.c.
- 4.- Evitar excentricidades con el fin de anular el acoplamiento entre los modos vertical y cabeceo. En la figura 3.c.1.d se presenta esta idea y se sugiere hacer  $e < 0.05 L$ , siendo  $e$  la excentricidad y  $L$  el largo de la cimentación.

### 3.d).-ANALISIS DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA MAQUINA-CIMENTACION-SUELO.

Es común resolver los problemas de geotecnia con la ayuda de modelos físicos y matemáticos lo más simple como sea posible ya que en muchos casos los refinamientos en los análisis no se justifican.

Tal actitud ha resultado de la necesidad de hacer más práctico el trabajo del ingeniero civil, a la exigencia de economía indiscriminada y a la dificultad de cumplir con los requisitos de las teorías usadas para resolver tales problemas. Esto significa que la teoría utilizada ha de ser consistente con la mayor parte del conocimiento aceptado, ha de tener capacidad explicativa y predictiva, ha de tener profundidad para explicar lo observable en función de lo no experimentado, es decir, explicar la realidad por el pensamiento, ha de tener capacidad unificadora o posibilidad de expansión para abarcar problemas diversos y así comprender una gama más amplia de situaciones prácticas, ha de tener capacidad indagatoria para guiar nuevas investigaciones y sugerir nuevas ideas, experimentos y problemas en el propio campo o campos afines .

En esta sección se presenta el método de análisis basado en modelos simples utilizados para evaluar la respuesta de cimentaciones sujetas a vibraciones . Dicha sección se ha propuesto como resultado de una recopilación de soluciones analíticas y numéricas del problema en cuestión, utilizando modelos simples de la dinámica estructural, de la teoría de propagación de ondas y de la mecánica de suelos.

#### 3.d.1.-PLANTEAMIENTO Y SOLUCION DEL PROBLEMA.

El problema de la cimentación de una máquina se puede plantear como sigue.

Dado el sistema mostrado en la figura 3.d.1 sometido a la acción de la fuerza dinámica  $P(t)$ , y dada la masa del sistema máquina-cimentación ( $M$ ), la geometría de la cimentación y las propiedades del suelo, estimar la respuesta  $u(t)$  del sistema. A menos que se diga otra cosa los términos fuerza y desplazamiento se utilizan aquí en sentido generalizado e incluyen fuerzas y momentos, y traslaciones y rotaciones, respectivamente.

La solución de este problema se rige por tres principios básicos de la mecánica aplicada y una hipótesis fundamental. A saber, el principio del equilibrio dinámico, el cual relaciona las fuerzas externas  $P(t)$  con las internas  $R(t)$  (ver figura 3.d.2); el principio de continuidad que relaciona los desplazamientos con las deformaciones ; el principio de las relaciones esfuerzo-deformación, las que están dadas por la naturaleza de las propiedades del suelo de cimentación y su respuesta a las sollicitaciones dinámicas ; por último, la hipótesis fundamental en la que se basa todo el método de análisis así como la filosofía del diseño de cimentaciones de maquinaria, es que las ecuaciones que gobiernan el movimiento son lineales. Físicamente esto último ocurre cuando la perturbación ondulatoria es relativamente pequeña y las relaciones esfuerzo-deformación son lineales.

Se parte también de la hipótesis de que todo lo que se necesita para

constituir la forma más general de ondas periódicas es un conjunto de ondas armónicas simples; es decir, que un movimiento periódico cualquiera de una partícula se puede representar como una combinación de movimientos armónicos simples. Esto es el principio de superposición.

El principio de superposición parece tan obvio que vale la pena señalar que no siempre es aplicable, y falla cuando la perturbación es relativamente grande tanto como las relaciones esfuerzo-deformación no sean lineales o cuando las ecuaciones que gobiernan el movimiento no son lineales.

Para analizar el problema mostrado en la figura 3.d.1, puede separarse conceptualmente en dos diagramas, esto se muestra en la figura 3.d.2.

#### PRINCIPIO DEL EQUILIBRIO.

Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre de la figura 3.d.2 para establecer el equilibrio dinámico durante el movimiento del sistema, se obtiene:

$$R(t) + M\ddot{u}(t) = P(t) \quad \text{ec. 3.d.1}$$

Esta ecuación representa, para todo tiempo, el equilibrio entre las fuerzas externas aplicadas al sistema cimentación-maquinaria y la inercia del mismo.

Por otra parte, en el otro esquema de la figura 3.d.2 se muestra que el suelo está sometido a esfuerzos dinámicos de contacto representados por la resultante  $R(t)$ , los cuales se propagan en forma de ondas de esfuerzos a través del depósito de suelo. Puede establecerse una relación entre esfuerzos de contacto y los desplazamientos resultantes (ref. 24):

$$R(t) = X \cdot u(t) \quad \text{ec. 3.d.2}$$

donde:

$R(t)$  = Fuerzas de contacto.

$X$  = Función de impedancia que relaciona las fuerzas con los desplazamientos.

$u(t)$  = Desplazamientos resultantes.

de tal manera que al sustituir la ec. 3.d.2 en la ec. 3.d.1 resulta que:

$$X \cdot u(t) + M \cdot \ddot{u}(t) = P(t) \quad \text{ec.3.d.3}$$

Es evidente que la solución del problema expresado mediante la ecuación anterior se resuelve al encontrar la función  $X$ , sustituirla y resolver la ecuación diferencial 3.d.3.

Por definición  $X$  expresa la relación entre fuerza dinámica de contacto y desplazamiento, es decir:

$$X = \frac{R(t)}{u(t)} \quad \text{ec. 3.d.4}$$

donde :

$$X = X_1 + i X_2$$

es una ecuación que expresa a la función de impedancia  $X$  como una función de variable compleja, siendo :

$X_1$  = impedancia asociada a las características de rigidez y de inercia del suelo.

$X_2$  = impedancia asociada a las características de amortiguamiento geométrico de la cimentación.

#### PRINCIPIO DE LAS RELACIONES ESFUERZO DEFORMACION.

Para encontrar la función  $X$  es necesario encontrar la ecuación del desplazamiento  $u(t)$  resultante de la aplicación de las fuerzas  $R(t)$ . Esto implica resolver el problema de propagación de ondas de esfuerzo transmitido al suelo a través de la superficie de contacto entre suelo y cimentación y consiste en resolver la ecuación (ref. 18) :

$$\frac{\partial(\sigma_z)}{\partial z} + \rho \ddot{u}_z = 0 \quad \text{ec. 3.d.5}$$

siendo :

$$\sigma_z = M \epsilon_z = M \left( - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad \text{ec. 3.d.6}$$

donde la ecuación 3.d.5 representa el equilibrio dinámico dentro del medio donde se propaga la onda de esfuerzo  $\sigma_z$  y la ecuación 3.d.6 representa la relación esfuerzo-deformación.

$\sigma_z$  = Esfuerzo vertical aplicado.

$\ddot{u}_z$  = aceleración de partículas del suelo en dirección  $z$ .

$M$  = Módulo de deformación del suelo convenientemente elegido.

$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$  = deformación axial unitaria en la dirección  $z$ .

$\rho$  = densidad del suelo.

$z$  = dirección en la que se propaga el esfuerzo  $\sigma_z$ .

combinando las ecuaciones 3.d.5 y 3.d.6 obtenemos la ecuación de onda siguiente :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \ddot{u}_x \quad \text{ec. 3.d.7}$$

donde :  $v = \sqrt{\frac{M}{\rho}}$  = Velocidad de propagación de la onda.

La ecuación 3.d.7 se conoce como la ecuación unidimensional de propagación del esfuerzo  $\sigma_z$ , cuya solución es de la forma :

$$u(z,t) = f(z - Vt) + F(z + Vt) \quad \text{ec. 3.d.8}$$

donde :

$u(z,t)$  = desplazamiento en la dirección  $z$ .

$z$  = dirección en la que se propaga la onda de esfuerzos.

$t$  = tiempo.

$f(z - Vt)$  = función arbitraria diferenciable respecto al argumento, corresponde a un esfuerzo que viaja con velocidad  $V$  en la dirección positiva del eje  $z$ .

$F(z + Vt)$  = función análoga a  $f(z - Vt)$  pero en dirección contraria.

Si  $u(a,t)$  representa el desplazamiento del punto  $z = a$ , siendo  $a$  constante, y que es producido por la acción de la maquinaria, entonces  $f(a - Vt)$  es la parte que se trasmite a la región  $z > a$  y  $F(a + Vt)$  es la parte que lo abandona, es decir, las ondas que se reflejan.

Para la solución de problemas de cimentación de maquinaria (ref. 18) se utiliza la función :

$$u(z,t) = u_0 e^{i(\Omega t + kz)}$$

donde :  $k = \frac{\Omega}{v}$

$\Omega$  = frecuencia angular de la onda.

$u$  = amplitud máxima del desplazamiento.

$v$  = Velocidad de propagación de la onda.

la cual es una ecuación de la forma 3.d.8, es una solución de la ecuación de onda unidimensional 3.d.7 y se denomina comúnmente ecuación de ondas armónicas. Puede verse que para un punto fijo dado, esto es, que para  $z = a$  (constante) la función  $u(z,t)$  queda únicamente en función del tiempo :

$$u(t) = u_0 e^{i(\Omega t + ka)}$$

ec. 3.d.9



conociéndose así la posición del punto  $z = a$  en el tiempo "t" cualquiera.

La formulación de las condiciones de frontera permite simular la disipación de energía por propagación de ondas a través del paso libre de las ondas en un punto de interés  $z = a$ ; este es un problema de valores en la frontera, como lo son la interfase suelo-cimentación, la interfase entre estratos o los límites del semiespacio (fig. 3.d.3). Dicho problema se resuelve mediante diferentes técnicas numéricas existentes que permiten simular diferentes características estratigráficas del depósito de suelo, condiciones diferentes de empotramiento de la cimentación (fig. 3.d.4), así como diferentes formas y rigidez de la misma.

Una vez resuelta la ecuación de movimiento 3.d.7, obtenido  $u(t)$  para la acción  $R(t)$  de la ecuación 3.d.4 se puede obtener la relación:

$$X = \frac{R(t)}{u(t)}$$

con la que, sustituyendo en la ecuación 3.d.1, puede resolverse la ecuación de equilibrio dinámico del sistema, esto es:

$$X u(t) + M \ddot{u}(t) = P(t)$$

La solución se obtiene en el anexo B, de la cual se obtiene lo siguiente:

$$\frac{P_0}{u_0} = \sqrt{(X_1 - M\Omega^2)^2 + X_2^2} \quad \text{ec. 3.d.10}$$

donde:

$P(t) = P_0 e^{i\Omega t}$  = Fuerza armónica actuante.

$P_0$  = Amplitud máxima de la fuerza actuante.

$u_0$  = Amplitud máxima del desplazamiento.

$M$  = Masa del sistema maquinaria-cimentación.

$\Omega$  = Frecuencia angular de la excitación  $P(t)$ .

$X_1$  = Función de impedancia asociada a la de rigidez y a la inercia del suelo de cimentación.

$X_2$  = Función de impedancia asociada a las características de amortiguamiento geométrico de la cimentación.

Nótese que  $\Omega$  es también la frecuencia angular de propagación de las ondas, esto implica que el sistema maquinaria-cimentación vibra con la misma frecuencia que la de la acción y con la misma frecuencia con las que se propagan las ondas de esfuerzo dentro del suelo.

En algunos problemas también se desea conocer el ángulo de

desfasamiento,  $\phi$ , entre fuerza y desplazamiento, por lo que en el anexo B también se obtiene la expresión para obtener  $\phi$ , siendo esta :

$$\phi = \text{Arc tan} \left( \frac{\mathcal{X}_2}{\mathcal{X}_1 - M\Omega^2} \right) \quad \text{ec.3.d.11}$$

siendo  $\phi$  el ángulo de desfase entre carga y desplazamiento.

Otra manera de representar y resolver el problema es mediante el uso de la notación vectorial compleja de donde puede obtenerse la solución (anexo B) en forma de notación matricial, esta es :

$$\begin{bmatrix} (\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) & -\mathcal{X}_2 \\ \mathcal{X}_2 & (\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ecs. 3.d.12}$$

de donde al resolver el sistema de ecuaciones 3.d.12, se obtiene :

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{ec. 3.d.13}$$

$$\phi = \text{Arc tan} \left( \frac{u_2}{u_1} \right) \quad \text{ec. 3.d.14}$$

donde :

$u_1$  = vector de desplazamientos asociado a la rigidez

$u_2$  = vector de desplazamientos asociado al amortiguamiento

Por otra parte, es común hacer una analogía con un sistema elemental equivalente de un grado de libertad como el que se muestra en la figura 3.d.5.a. Resolviendo tal problema (anexo B) obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente :

$$\begin{bmatrix} (\bar{K} - M\Omega^2) & -C\Omega \\ \Omega & (\bar{K} - M\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ecs. 3.d.15}$$

de cuya solución también se obtiene :

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{ec. 3.d.13}$$

$$\phi = \text{Arc tan} \left( \frac{u_2}{u_1} \right) \quad \text{ec. 3.d.14}$$

y por semejanza entre los sistemas de ecuaciones 3.d.12 y 3.d.15 se tiene que :

$$\bar{K} = \mathcal{K}_1 \quad \text{ec.3.d.16}$$

$$\bar{\Omega} = \mathcal{K}_2 \quad \text{ec.3.d.17}$$

siendo :

$\bar{K}$  = rigidez del resorte dinámico equivalente. Incluye el efecto de la rigidez estática y la inercia del suelo de cimentación.

$C$  = amortiguador equivalente.

y por analogía con el sistema elemental equivalente de un grado de libertad de la figura 3.d.5.a :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\mathcal{K}_1}{M}} = \sqrt{\frac{\bar{K}}{M}} \quad \text{ec.3.d.18}$$

$$\beta = \frac{C}{C_c} = \frac{\frac{\mathcal{K}_2}{\bar{\Omega}}}{2\sqrt{\mathcal{K}_1 M}} \quad \text{ec.3.d.19}$$

donde :

$\omega_n$  = frecuencia angular natural de vibración no amortiguada.

$\beta$  = relación de amortiguamientos del sistema elemental de un grado de libertad equivalente.

$C$  = amortiguador equivalente del sistema.

$C_c$  = amortiguamiento crítico para el cual el sistema no vibra.

Por simplicidad y para ilustrar los conceptos fundamentales que se utilizan para el análisis se usó el modo vertical de vibración mostrado en la figura 3.d.1; sin embargo, el planteamiento anterior puede usarse y generalizarse para todos los modos de vibrar restantes mostrados en la figura 3.d.7, en los cuales la solución de las ecuaciones de movimiento es análoga a las formas de las ecuaciones 3.d.3, 3.d.5 y 3.d.6, con el tipo de cargas, inercias, esfuerzos, deformaciones y módulos correspondientes.

Aunque en muchos casos prácticos pueden ignorarse las impedancias acopladas de traslación y rotación debido a que su influencia es relativamente nula en cimentaciones superficiales (refs.13 y 53); en otros casos puede ser importante y debe tomarse en cuenta, por ello es de particular interés analizar el modo acoplado de traslación-rotación mostrado en la figura 3.d.8. En las referencias 39 y 51 se presentan análisis detallados al respecto.

### 3.d.2.-FACTORES QUE INFLUYEN EN LA RESPUESTA Y EVALUACION DE FUNCIONES DE IMPEDANCIA.

Cuando se trata la interacción de una cimentación rígida con el suelo el problema se puede plantear, en primera aproximación, como el de un cuerpo rígido apoyado en la frontera de un semiespacio viscoelástico y sometido a la acción de una carga armónica, y para simplificar el análisis se definen seis grados de libertad de la cimentación: tres desplazamientos a lo largo de tres ejes ortogonales y tres rotaciones alrededor de ellos (figura 3.d.7.).

El movimiento resultante ha sido estudiado por muchos investigadores y los resultados obtenidos presentados en numerosas publicaciones, así los estudios se han clasificado en grupos de acuerdo a las hipótesis de trabajo de cada uno de ellos (ref. 48).

El primer grupo obtiene la respuesta al tomar en cuenta que la distribución de presiones entre suelo y cimentación proviene de consideraciones estáticas, sin incluir efectos dinámicos.

Otro grupo, calcula la respuesta mediante planteamientos analíticos y numéricos que resuelven el problema de valores en la frontera mixtos al reducir las ecuaciones que gobiernan el movimiento a ecuaciones no homogéneas.

Otro grupo, considera métodos aproximados de análisis de cimentaciones rígidas de cualquier forma, los cuales en muchos casos requieren de un amplio y buen juicio del ingeniero que los aplica para obtener una buena solución.

Puede decirse que existen estudios suficientes para resolver el problema planteado razonablemente; siempre y cuando este sea de carácter lineal, sin embargo hoy día existe dedicación al desarrollo de nuevas técnicas numéricas que resuelvan lo que pueden resolver los métodos simplificados como son: el carácter no lineal de las ecuaciones de movimiento y la obtención de respuestas en el dominio del tiempo.

En este inciso se presenta el planteamiento de los métodos aproximados de análisis en forma de información ordenada, tal como, gráficas con parámetros adimensionales, tablas o simples formulaciones que permitan la obtención de las funciones de impedancia para cimentaciones superficiales apoyadas en un semiespacio homogéneo elástico lineal, con las cuales pueden resolverse un gran número de problemas prácticos. También se incluye la manera de tomar en cuenta algunos factores que influyen en la respuesta dinámica de las cimentaciones de maquinaria, se toman en cuenta factores tales como: la forma de la cimentación, la influencia del amortiguamiento interno del suelo en las características rigidez del suelo y en las características de amortiguamiento geométrico de la cimentación, el empotramiento de las cimentaciones y la estratigrafía del depósito de cimentación.

Para todos los modos de vibrar se necesita determinar el resorte dinámico equivalente  $K$  y el amortiguador equivalente  $C$ , los cuales dependen de la frecuencia angular de la excitación,  $\Omega$ .

Existen seis pares de valores dinámicos resorte-amortiguador : uno para el modo vertical [ $\bar{K}_z, C_z$ ]; dos para los modos traslacionales [ $\bar{K}_x, C_x$  y  $\bar{K}_y, C_y$ ]; dos para los modos rotacionales [ $\bar{K}_{rx}, C_{rx}$  y  $\bar{K}_{ry}, C_{ry}$ ] y uno para el modo torsional [ $\bar{K}_t$  y  $C_t$ ]. La manera de evaluar cada uno de los valores  $\bar{K}$  y  $C$  se describe a continuación y para referencia de términos utilícese las soluciones de la ecuación de equilibrio dinámico presentadas en el anexo B.

En todos los casos la rigidez o resorte dinámico equivalente se obtiene de :

$$\bar{K}_i = K_i A_i \quad \text{ec.3.d.22}$$

donde :

$\bar{K}_i$  = rigidez dinámica equivalente.

$K_i$  = rigidez estática.

$A_i$  = se define como el coeficiente de variación de la rigidez dinámica (ver anexo B).

$i$  = modo de vibrar analizado.

Todos los modos se suponen desacoplados, esto es suficiente para el caso de cimentaciones superficiales, no así en el caso de cimentaciones empotradas, donde tendrá que hacerse un análisis más riguroso de los modos acoplados.

### 3.d.2.1.-RIGIDEZ ESTÁTICA.

Existen soluciones aproximadas para evaluar la rigidez estática para cada modo de vibrar, las cuales están presentadas en forma de gráficas con parámetros adimensionales o en forma de expresiones algebraicas simples (refs. 15,16,17 y 18), en ellas puede notarse que la rigidez estática depende de un factor de forma,  $S_i$ , definido para la cimentación además de los parámetros del suelo; rigidez al corte ( $G$ ) y de la relación de Poisson ( $\nu$ ).

Así, pueden usarse las expresiones siguientes (ref.16) con la notación de la figura 3.d.9.a de referencia :

Para el modo vertical :

$$K_z = S_z \frac{2LG}{1-\nu}$$

$$S_z = 0.8 \text{ para } \frac{A}{4L^2} < 0.02$$

$$S_z = 0.73 + 1.54 \left[ \frac{A}{4L^2} \right]^{0.75} \text{ para } \frac{A}{4L^2} > 0.02$$

Para el modo horizontal transversal :

$$K_y = S_y \frac{2LG}{2-\nu}$$

$$S_y = 2.24 \quad \text{para } \frac{A}{4L^2} < 0.16$$

$$S_y = 4.5 \left[ \frac{A}{4L^2} \right]^{0.28} \quad \text{para } \frac{A}{4L^2} > 0.16$$

Para el modo horizontal longitudinal :

$$K_x = S_x \frac{2LG}{2-\nu} \quad \text{ó} \quad K_x = K_y - \frac{0.21 LG}{0.75 - \nu} \left( 1 - \frac{B}{L} \right)$$

Para el modo de cabeceo transversal :

$$K_{rx} = S_{rx} \frac{G}{1-\nu} (I_x)^{0.75}$$

$$S_{rx} = \frac{2.54}{\left[ \frac{B}{L} \right]^{0.25}} \quad \text{para } \frac{B}{L} < 0.4$$

$$S_{rx} = 3.2 \quad \text{para } \frac{B}{L} > 0.4$$

Para el modo de cabeceo longitudinal :

$$K_{ry} = S_{ry} \frac{G}{1-\nu} (I_y)^{0.75}$$

$$S_{ry} = 3.2$$

Para el modo de torsión :

$$K_t = S_t GJ^{0.75}$$

$$S_t = 3.8 + 10.7 \left( 1 - \frac{B}{L} \right)^{10}$$

donde :

$K_i$  = rigidez estática para el modo  $i$ .

$S_i$  = factor de forma para el modo de vibrar  $i$ .

$i$  = indica el modo de vibrar.

$L$  = semilargo de la cimentación.

B = semiancho de la cimentación.  
 A = área como se define en la figura 3.d.7.  
 x,y,z = ejes ortogonales de referencia.  
 r = indica rotación.  
 t = indica torsión alrededor del eje z.  
 I<sub>x</sub> = momento de inercia del área A respecto al eje x.  
 I<sub>y</sub> = momento de inercia del área A respecto al eje y.  
 J = momento polar de inercia del área A respecto al eje z.  
 G = módulo de rigidez al corte del suelo de cimentación.  
 ν = relación de Poisson del suelo de cimentación.

Las expresiones relativas a los factores de forma para los modos traslacionales también se presentan en forma de gráficas en las figuras 3.d.11.

### 3.d.2.2.-COEFICIENTE DE VARIACION DE RIGIDEZ DINAMICA.

El coeficiente de variación de la rigidez dinámica  $\lambda$  se evalúa en función de la frecuencia a través del parámetro adimensional (ref.16):

$$\lambda_0 = \frac{\Omega B}{V_0} \quad \text{ec.3.d.23}$$

siendo :

$\lambda_0$  = parámetro adimensional función de la frecuencia  $\Omega$ .  
 $\Omega$  = frecuencia angular de la excitación.  
 B = semiancho de la cimentación.

Pueden usarse las figuras 3.d.12,3.d.13 y 3.d.14 para evaluar los  $\lambda$  para cada modo de vibrar, en las que puede observarse que  $\lambda$  depende de la relación  $\frac{L}{B}$  y del grado de saturación del suelo ( $\nu \approx 0.33$  suelos parcialmente saturados y  $\nu \approx 0.50$  suelos saturados).

### 3.d.2.3.-AMORTIGUADORES EQUIVALENTES.

Por otra parte, para evaluar los amortiguadores,  $C_i$ , se supone y se calcula un amortiguador ideal que representa la disipación de la energía por radiación de las ondas de esfuerzo (amortiguamiento geométrico) sin importar la forma de la cimentación (ref.16). Así, dependiendo del tipo de onda,  $C_i$  puede evaluarse como :

$$C_i = \rho V_i A \quad \text{ec.3.d.24}$$

donde :  $i$  indica el modo de vibrar,  $\rho$  es la densidad del suelo,  $V_i$  la velocidad del tipo de onda que se propaga que depende del modo de vibrar y A el área donde actúa el esfuerzo y como se define en la figura 3.d.9.a; se sugiere que (ref.25), dependiendo del modo de vibrar :

$$\begin{aligned}
 C_z &= \rho V_L y A \\
 C_y &= \rho V_S A \\
 C_x &= \rho V_S A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{rx} &= \rho V_{ly} I_x \\ C_{ry} &= \rho V_{ly} I_y \\ C_i &= \rho V_s J \end{aligned}$$

donde :

$\rho$  = densidad del suelo.

$V_s$  = Velocidad de onda cortante.

$V_{ly}$  = Velocidad de onda compresional según la interpretación de Lysmer =  $\frac{3.4}{\pi(1-\nu)} V_s$ .

A = Área de la cimentación definida en la figura 3.d.9.a.

$I_x$  = Momento de inercia del área A con respecto al eje x-x.

$I_y$  = Momento de inercia del área A con respecto al eje y-y.

J = Momento polar de inercia del área A.

$\nu$  = Módulo de Poisson.

x,y,z = ejes ortogonales de referencia.

Si el fenómeno de traslación en los modos correspondientes fuera puramente unidimensional entonces la relación  $\frac{C_i}{\rho V_i A}$  es igual a 1 para cualquier forma de la cimentación y para cualquier frecuencia; sin embargo, el fenómeno puede ser bidimensional o tridimensional. Por lo anterior se sugiere que para evaluar la influencia de la forma y de la frecuencia pueda usarse la relación (refs. 16 y 25) :

$$\xi = \frac{\bar{C}_i}{\rho V_i A}$$

ec.3.d.26

donde:

$\bar{C}_i$  = Amortiguador equivalente influenciado por la forma de la cimentación.

$\xi$  = coeficiente de variación del amortiguador equivalente debido a la forma de la cimentación.

Así, en las figuras 3.d.15 y 3.d.16 puede verse la variación del coeficiente  $\xi$  en función de la forma de la cimentación y la frecuencia para cada modo de vibrar.

#### 3.d.2.4.-INFLUENCIA DEL AMORTIGUAMIENTO INTERNO DEL SUELO.

Puesto que además de la disipación de energía por radiación de las ondas de esfuerzo existe la disipación por el amortiguamiento interno del suelo; es necesario incorporar la influencia de este en los parámetros de rigidez dinámica y de amortiguamiento geométrico de la cimentación, para ello se utiliza el principio de correspondencia de la viscoelasticidad con el cual, basta sustituir las constantes complejas viscoelásticas por las constantes elásticas considerando como si el suelo fuera puramente elástico (refs.35 y 52).

Por lo anterior, es suficiente con efectuar la operación siguiente para tomar en cuenta la participación del amortiguamiento histerético del suelo (refs.18 y 43) :



$$\mathcal{X}(\xi) = \mathcal{X}(1 + i2\xi)$$

ec.3.d.27.

donde :

$\mathcal{X}(\xi)$  = impedancia compleja como función de la frecuencia  $\Omega$  y del amortiguamiento histerótico  $\xi$  del suelo.

$\xi$  = amortiguamiento histerótico del suelo.

$\mathcal{X}$  = impedancia compleja como función únicamente de la frecuencia  $\Omega$ .

$(1 + i2\xi)$  = coeficiente complejo de un material viscoelástico.

efectuando las operaciones de la ecuación 3.d.27.

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\xi) &= [\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2] [1 + i2\xi] \\ &= [\mathcal{X}_1 - 2\xi\mathcal{X}_2] + i[\mathcal{X}_2 + 2\xi\mathcal{X}_1]\end{aligned}$$

igualando reales con reales y complejos con complejos

$$\mathcal{X}_1(\xi) = \mathcal{X}_1 - 2\xi\mathcal{X}_2$$

$$\mathcal{X}_2(\xi) = \mathcal{X}_2 + 2\xi\mathcal{X}_1$$

puesto que  $\mathcal{X}_2 = \Omega C$  (ver ecuación 3.d.17) entonces :

$$\mathcal{X}_1(\xi) = \mathcal{X}_1 - 2\xi\Omega C \quad \text{ec.3.d.28}$$

$$\Omega C(\xi) = \Omega C + 2\xi\mathcal{X}_1 \quad \text{ec.3.d.29}$$

que dividiendo la ecuación 3.d.29 entre la frecuencia  $\Omega$ , queda

$$C(\xi) = C + \frac{2\xi\mathcal{X}_1}{\Omega} \quad \text{ec.3.d.30}$$

y de la ecuación 3.d.16,  $\mathcal{X}_1 = \bar{K}$ , entonces las ecuaciones 3.d.28 y 3.d.30

quedan :

$$\bar{K}(\xi) = \bar{K} - 2\xi C \quad \text{ec.3.d.31}$$

$$\bar{C}(\xi) = C + \frac{2\xi\bar{K}}{\Omega} \quad \text{ec.3.d.32}$$

donde :

$\mathcal{X}_1(\xi)$  = impedancia asociada a las características de rigidez y de inercia del suelo, la cual es función de la frecuencia  $\Omega$  y del amortiguamiento histerótico  $\xi$  del suelo. Es igual  $\bar{K}(\xi)$ .

$\mathcal{X}_2(\xi)$  = impedancia asociada a las características de radiación de las ondas de esfuerzo como función de la frecuencia  $\Omega$  y del amortiguamiento histerótico  $\xi$  del suelo. Es igual a  $\Omega C(\Omega, \xi)$ .

$\bar{K}(\xi) =$  rigidez del resorte dinámico equivalente como función de  $\Omega$  y  $\xi$ .

$\bar{C}(\xi) =$  amortiguador dinámico equivalente como función de  $\Omega$ , de la forma de la cimentación y con el amortiguamiento histerético integrado.

Con lo anterior se ha incorporado la influencia del amortiguamiento interno del suelo, el cual hace que disminuya la rigidez dinámica equivalente  $K_i$  y aumente el valor del amortiguador equivalente  $C_i$ .

### 3.d.2.5.-CIMENTACIONES EMPOTRADAS.

Para tomar en cuenta la influencia del empotramiento de la cimentación, se han propuesto algunos factores de influencia que incorporan el efecto del empotramiento al modificar, mediante dichos factores, la rigidez estática,  $K_i$ , y el coeficiente de variación de la rigidez dinámica,  $\lambda_i$ , calculados, en primera aproximación, como si la cimentación fuera superficial.

Por lo que la rigidez estática puede modificarse como sigue :

$$K_{empotrada} = K_{superficial} (I_t) (I_w)$$

donde :

$I_t =$  factor de empotramiento debido al efecto de zanja.

$I_w =$  factor de empotramiento debido al efecto de contacto entre paredes de zanja y cimentación.

$K_{empotrada} =$  rigidez estática empotrada.

$K_{superficial} =$  rigidez estática superficial.

Nótese que  $K_{superficial}$  es la misma  $K_i$  definida en la ecuación 3.d.22

Por otra parte la rigidez dinámica puede modificarse como :

$$\bar{K}_{empotrada} = \bar{K}_{empotrada} (\lambda_{empotrado})$$

donde (ref. 27) :

$$\frac{\lambda_{empotrado}}{\lambda_{superficial}} = 1 - 0.09 \left[ \frac{D}{B} \right]^{3/4} (\lambda_0)^2 \quad \text{para } \nu < 0.40$$

$$\frac{\lambda_{zanja}}{\lambda_{superficial}} = 1 + 0.09 \left[ \frac{D}{B} \right]^{3/4} (\lambda_0)^2 \quad \text{para } \nu < 0.40$$

siendo :

$\bar{K}_{empotrada} =$  rigidez estática empotrada.

$\bar{K}_{empotrado} =$  rigidez dinámica equivalente empotrada.

$\lambda_{empotrado} =$  coeficiente de variación de la rigidez dinámica empotrada.

Ázanja = coeficiente de variación de la rigidez dinámica modificado por el efecto zanja.

Nótese que  $\bar{K}_{empotrado}$  tiene el mismo sentido que  $\bar{K}_i$  definida la ecuación 3.d.22 y que el  $\bar{K}_{empotrado}$  tiene el mismo sentido y efecto que el  $\bar{K}_i$ , es decir, además de inducir el efecto del empotramiento, modifica la rigidez estática en función de la frecuencia  $\Omega$ .

Dos efectos son los que influyen al empotrar la cimentación, uno es el efecto de zanja y consiste en que el plano horizontal externo al área de la base de la cimentación ( $A_b$ ) se mueve restringido por un estado de esfuerzos normal y de corte actuando en el plano de apoyo de la cimentación, situación tal, que no sucede en las cimentaciones superficiales, en las que dicho plano está libre de esfuerzos (ver figura 3.d.9). El resultado de este efecto es que aumenta la rigidez estática de la cimentación.

El otro efecto es el contacto de los lados verticales de la cimentación con las paredes de la zanja y el efecto principal es que, si está garantizado el buen contacto, este ayuda a soportar las cargas transmitidas con lo que se modifican las características de inercia del sistema.

Tomar en cuenta los efectos combinados anteriores, ha sido y son tema de estudio de algunos investigadores y en el presente no se cuenta con una manera clara y completa de considerar el efecto del empotramiento para todos los modos de vibrar de la cimentación. Sin embargo, se han propuesto algunas expresiones algebraicas simples para estimar la influencia del empotramiento, tales expresiones se utilizan en forma de factores y son las siguientes (refs. 26, 27 y 28) :

Para modo de traslación vertical :

$$I_t = 1 + \frac{1}{21} \frac{D}{B} \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{A_b}{4L^2} \right)$$

$$I_w = 1 + 0.09 \left( \frac{D}{B} \right)^{2/3}$$

donde :

$I_t$  = factor de empotramiento debido al efecto de zanja.

$I_w$  = factor de empotramiento debido al efecto de contacto entre paredes de zanja y cimentación.

D = profundidad de desplante de la cimentación.

B = semiancho de la cimentación ver figura 3.d.9.

L = semilargo de la cimentación ver figura 3.d.9.

$A_b$  = Área de contacto de la base de la cimentación.

Para modo de traslación horizontal :

$$I_t = 1 + 0.15 \sqrt{\frac{D}{B}}$$

$$I_w = 1 + 0.52 \left[ \frac{h}{B} \frac{A_w}{L^2} \right]$$

donde :

$A_w$  = Suma de áreas de contacto de las paredes verticales de la cimentación con las paredes de la zanja.

$h$  = distancia como se define en la figura 3.d.9.c.

Como puede notarse, no se presentan expresiones algebraicas ni para los coeficientes de variación de rigidez dinámica, ni para factores de influencia de los otros modos de vibrar, con lo que la información queda incompleta, sin embargo para evaluar los coeficientes de variación de la rigidez dinámica pueden consultarse un conjunto de gráficas propuestas en la referencia 27.

Por otra parte, si se hacen hipótesis lo suficientemente razonables, puede estimarse de una manera más fácil la influencia del empotramiento en el amortiguamiento; así, si se suponen que las radiaciones de las ondas de corte y de las ondas de compresión son independientes entre sí y entre cada modo de vibrar, entonces :

$$C_{empotrado} = C_{superficial} + C_{paredes} \quad \text{ec.3.d.33}$$

donde:

$C_{empotrado}$  = Amortiguador equivalente modificado por el efecto de empotramiento.

$C_{superficial}$  =  $C_i$ , Amortiguador equivalente debido al contacto en la base de la cimentación como se define en la ecuación 3.d.26.

$C_{paredes}$  = Amortiguador equivalente debido al contacto en las paredes.

En la ecuación 3.d.33, la participación de cada término depende del modo de vibrar y de la certeza del contacto "efectivo" entre las paredes de la cimentación y las paredes de la zanja; en caso de duda, es conservador no considerar la participación del contacto entre paredes.

Mientras que  $C_{superficial}$  tiene el mismo sentido planteado en la ecuación 3.d.26 y representa a las ondas que se originan y emiten a través de la base de la cimentación;  $C_{paredes}$  representa a las ondas que se generan y se emiten a través del contacto en las paredes verticales. Dependiendo de si la pared es paralela o perpendicular a la dirección de la carga, es el tipo de onda que se genera y para el caso de paredes inclinadas; se generan de manera simultánea, ondas de

corte y compresionales.

Por lo anterior y dependiendo del sentido de las cargas :

$$C_{\text{paredes}} = C_p + C_n \quad \text{ec.3.d.34}$$

donde :

$$C_p = \rho V_s A_p \quad \text{ec.3.d.35}$$

$$C_n = \rho V_L A_n \quad \text{ec.3.d.36}$$

siendo :

$C_p$  = Amortiguador equivalente asociado al contacto de paredes paralelas al sentido de la carga.

$C_n$  = Amortiguador equivalente asociado al contacto de paredes normales al sentido de la carga.

$A_p$  = suma de áreas de contacto de paredes paralelas al sentido de la carga.

$A_n$  = área de contacto de las paredes que sirven de apoyo y son normales a la dirección de la carga.

Así, para modo de vibración vertical :

$$C_{z,\text{empotrado}} = \rho [ V_L A_b + V_s (A_p) ]$$

y para traslaciones horizontales :

$$C_{h,\text{empotrado}} = \rho [ V_s A_b + V_s A_p + V_L A_n ]$$

$C_{h,\text{empotrado}}$  = Amortiguador equivalente para modos de traslación modificado por el efecto del empotramiento.

Por intuición; para los modos rotacionales, puede inducirse la influencia del empotramiento al reemplazar en las ecuaciones 3.d.35 y 3.d.36 las áreas por los momentos de inercia de estas, tomando como referencia el mismo criterio que se usó para los amortiguadores superficiales de los modos de rotación definidos en las ecuaciones 3.d.25, es decir como si las paredes fueran la base de la cimentación.

En el caso de áreas de contacto inclinadas, puede usarse la proyección de estas sobre el plano vertical correspondiente.

### 3.d.2.6.-SUELOS ESTRATIFICADOS.

Hasta ahora se ha reemplazado al suelo por un resorte y un amortiguador, los cuales simulan su comportamiento ante cargas dinámicas. Esta simple idealización representa a un semiespacio homogéneo viscoelástico lineal y su valor principal es que ayuda a explicar características importantes de la respuesta de cimentaciones sujetas a cargas dinámicas.

En realidad los depósitos naturales de suelo no son tan uniformes; por lo que la idealización como semiespacio viscoelástico lineal ya no es

conveniente y la respuesta para otro tipo de perfiles que no se parecen al semiespacio es diferente. Es típico encontrar depósitos de suelo estratificados, suelos depositados sobre roca o depósitos de suelo cuyas propiedades varían con la profundidad.

Tomar en cuenta las características de los depósitos naturales mencionadas anteriormente ha sido motivo de muchas investigaciones, un resumen de los resultados obtenidos de muchas de ellas se presenta con más detalle en la referencia 24, de la cual entre otras consideraciones las más importantes son :

#### ESTRATO SOBRE ROCA.

Para cimentación rígida apoyada en un estrato homogéneo depositado en roca, el factor más importante es la relación  $\frac{H_1}{B}$  como se define en la figura 3.d.4.b., el cual modifica la rigidez estática de la cimentación y hace que las funciones de impedancia presenten picos y valles asociados en función directa con las frecuencias naturales de vibrar del estrato, lo que en otras palabras, las fluctuaciones observadas (picos y valles) son la manifestación de fenómenos de resonancia. Esto se debe a que las ondas que emanan de la cimentación en vibración se reflejan en la roca y se regresan a la superficie, como resultado, la amplitud del movimiento de la cimentación puede incrementarse significativamente para una frecuencia específica de vibración, lo cual corresponde aproximadamente a las frecuencias naturales de vibrar del depósito.

Teóricamente y para un suelo puramente elástico ( $\zeta = 0$ ); otro efecto importante es que, a bajas frecuencias (menores que la correspondiente al modo fundamental de vibrar del estrato de suelo) el coeficiente de radiación  $\xi$  es nulo, esto se debe a que no se transmiten ondas a la roca y a que a tales frecuencias no pueden crearse ondas superficiales, única manera en que podría disiparse energía, por lo que la energía queda atrapada en el estrato y el amortiguamiento geométrico de las ondas es nulo.

Sin embargo el suelo tiene amortiguamiento histerético; por lo que en la circunstancias antes mencionadas, el amortiguamiento interno del suelo se vuelve la única manera de disipación de energía, convirtiéndose así en un parámetro importante a frecuencias menores que las del modo fundamental del estrato.

Por lo anterior, es importante poder evaluar la frecuencia fundamental de vibrar del estrato o de un depósito de suelo estratificado sobre roca. En la referencia 19 se presenta un resumen de métodos que permiten evaluar de manera sencilla la frecuencia fundamental de vibrar de un depósito de suelo sobre roca, estratificado o no.

#### ESTRATO SOBRE SEMIESPACIO.

Tanto el semiespacio como el depósito de suelo sobre roca son dos idealizaciones radicales de los depósitos de suelo, y para encontrar soluciones intermedias, se ha estudiado un modelo más general que representa una cimentación rígida apoyada en un estrato sobre semiespacio; el cual está basado en dos parámetros que lo definen, a

saber, la relación  $H/B$  y la relación entre módulos  $G_1/G_2$  (ver figura 3.d.4.a).

Los resultados obtenidos del estudio de este modelo muestran que conforme aumenta el contraste entre  $G_1$  y  $G_2$ , los efectos son radicales para un estrato sobre roca ( $G_1/G_2 = 0$ ) y, obviamente, no se manifiestan en el caso de un semiespacio ( $G_1/G_2 = 1$ ); tales efectos son el aumento de la rigidez dinámica y una disminución de la capacidad de amortiguamiento. Esto se debe, para el caso de disminución de la rigidez dinámica, a que aún a pequeños valores de  $G_1/G_2$ , es decir tan luego como no se considera base rígida, los desplazamientos tienden a ser muy grandes comparados con los de un semiespacio. Así, a muy bajas frecuencias las rigideces son más pequeñas comparadas con el caso del estrato sobre roca.

Para el caso del amortiguamiento y a cualquier frecuencia, este se incrementa debido a la transmisión parcial de las ondas de cuerpo hacia el semiespacio que sirve de apoyo al estrato y a la generación de ondas superficiales.

Por consecuencia, los comportamientos antes descritos son una transición entre los modelos estrato sobre roca y semiespacio y así la magnitud de los efectos, disminución de la rigidez dinámica y aumento del amortiguamiento, son importantes a frecuencias menores o iguales que la frecuencia fundamental del sistema. Así conforme  $G_1/G_2$  varía de 0 (estrato sobre roca) a 1 (semiespacio) los picos de las curvas de las funciones de impedancia son más pronunciados y alargados y los valores correspondientes a las frecuencias de resonancia disminuyen. En la figura 3.d.17 se muestran estas tendencias.

Por otra parte, un paso importante en el análisis es la elección de un módulo de rigidez cortante que represente al depósito de suelo.

Como se comentó, se ha utilizado como artificio de solución del problema de vibración de maquinaria la sustitución de la interfase suelo-cimentación por un resorte y un amortiguador, los cuales sustituyen y simulan el comportamiento del suelo ante carga dinámica, y puesto que los parámetros de rigidez dinámica y amortiguamiento son función de los valores  $\theta$  y  $\nu$  del suelo, se necesita elegirlos de manera conveniente para que representen el comportamiento del depósito de suelo.

En la mayoría de los suelos  $\nu$  varía en un intervalo estrecho de valores, de 0.35 a 0.4 en arenas, y cerca de 0.5 en arcillas saturadas (ref.20), por lo que puede elegirse un valor entre este rango de acuerdo con las condiciones del depósito de suelo o al tipo de suelo predominante sin que existan diferencias significativas en los resultados al tomar un valor u otro. En cambio  $\theta$  depende fundamentalmente del nivel de esfuerzos y de la compactación del suelo, entre otros factores secundarios respecto a los antes mencionados.

Como primera aproximación, puede idealizarse al depósito de suelo como un semiespacio, obtener la distribución de esfuerzos como se muestra en la figura 3.d.10.a y calcular  $G$  para el estado de esfuerzos que se tiene a la profundidad crítica " $d_c$ " con las expresiones siguientes :

Para arenas y gravas con granos redondeados y deformaciones angulares menores que  $10^{-4}$  (refs. 14 y 44).

$$G = \frac{2630 (2.17 - e)^2}{1 + e} \sqrt{\bar{\sigma}_o}$$

Para arenas y gravas con granos angulosos y deformaciones angulares menores que  $10^{-4}$  (refs. 14 y 44).

$$G = \frac{1230 (2.97 - e)^2}{1 + e} \sqrt{\bar{\sigma}_o}$$

en las que :

$G$  = módulo de rigidez cortante en lb/pulg.<sup>2</sup>

$e$  = relación de vacíos.

$\bar{\sigma}_o = \frac{\sigma_v + 2\sigma_h}{3}$  = esfuerzo octaédrico normal efectivo.

$\sigma_v$  = esfuerzo vertical efectivo.

$\sigma_h$  = esfuerzo horizontal efectivo.

En el caso de arcillas la relación entre  $G$  y la resistencia no drenada  $S_u$  es aproximadamente constante a bajos niveles de deformación y para niveles de deformación cortante entre  $10^{-5}$  y  $10^{-6}$  puede emplearse (ref. 20) :

$$G = 1600 S_u$$

No existe un criterio definido para calcular el módulo de rigidez al corte equivalente, ni la relación de Poisson equivalente, para un depósito de suelo cuyas propiedades varían con la profundidad; no obstante lo anterior, en la referencia 29 se ha usado un método que consiste en transformar un depósito de suelo estratificado, por ejemplo, a un semiespacio equivalente a través de un factor de influencia que toma en cuenta la estratificación y la suposición de que la distribución de esfuerzos en el medio estratificado y en el semiespacio es la misma (ver figura 3.d.10.b.).

Una alternativa con fines de diseño y para evaluar el comportamiento de la máquina consiste en obtener la respuesta en función de varios valores de  $G$  de tal manera de obtener un espectro como se muestra en la figura 3.d.10.c y comparar con las  $G$  medidas en el perfil del terreno de cimentación.



## 4.-APLICACIONES

Es práctica común seleccionar e idealizar modelos de estructuras a base de resortes, amortiguadores y masas concentradas que representan aproximadamente el comportamiento de la estructura modelada. La aproximación del modelo depende del analista y las diferencias que existen entre un modelo u otro no significan una discordancia en el comportamiento pero sí en la precisión y eficiencia alcanzada con el método de solución.

Por lo anterior, es recomendable que el analista o diseñador conozca de manera adecuada las herramientas analíticas existentes y así pueda usarlas. En la referencia 3 se presenta un resumen de consideraciones prácticas para la elección de modelos, algunos de los cuales se muestran en las figuras 3.d.5 y 3.d.6 y se utilizan para la solución de los problemas siguientes :

### PROBLEMA 1.

Se necesita diseñar la cimentación de un compresor cuyas características proporcionadas por el fabricante se muestran en la figura 4.1, y algunas de las cuales se presentan a continuación :

Se trata de un compresor reciprocante vertical de cuatro cilindros que pesa 12764.0 Kg y tiene el siguiente equipo complementario, un enfriador de gas de 1975.0 Kg, amortiguadores de 3182.5 Kg, y un motor de 8172.0 Kg, el cual tiene un rotor que pesa 2724 Kg. Con lo anterior el peso total de la máquina es de 26093.5 Kg y su masa equivalente de 2660 um (unidades técnicas de masa).

La frecuencia de operación primaria ( $f_{op}$ ) es de 585 rpm o ( $\omega_p$ ) de 61.3 rad/s y la frecuencia de operación secundaria ( $f_{op}$ ) es de 1170 rpm o ( $\omega_s$ ) de 122.52 rad/s, las cuales producen las fuerzas y momentos mostrados en la figura 4.1.b. Las fuerzas debidas al funcionamiento del motor se consideran nulas.

El suelo de cimentación es una arena limosa medianamente compacta con grava, con peso volumétrico  $\gamma = 1876$  Kg/m<sup>3</sup>, módulo de rigidez al corte  $G = 9.6E6$  Kg/m<sup>2</sup>, velocidad de onda cortante  $V_s = 227$  m/s, relación de Poisson  $\nu = 0.35$ , amortiguamiento histerético  $\xi = 0.05$  y capacidad de carga admisible  $q_a = 12$  T/m<sup>2</sup>.

Las dimensiones de la cimentación propuesta se eligieron de acuerdo al inciso 3.c y resultaron como se muestra en la figura 4.1.a. Algunas dimensiones se enlistan a continuación:

$$\begin{aligned} L &= 4.20 \text{ m} \\ B &= 2.40 \text{ m} \\ A &= 40.32 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

El problema se resuelve para las acciones no armónicas periódicas resultantes de la superposición de las acciones primarias y secundarias (ver curvas  $V_{zp}, M_{zp}$  y  $V_{zs}, M_{zs}$  en la figura 4.1.b). Se resuelve también, el caso simple de considerar las acciones armónicas simples

como una función cuya máxima amplitud es la suma de las amplitudes de las acciones primaria y secundaria actuando con la frecuencia de la acción primaria (curvas  $V_2$  y  $M_x$  de la figura 4.1.b).

Los resultados obtenidos en términos de amplitudes se muestran en la figura 4.2 y en términos de desplazamientos en la figuras 4.3, 4.4 y 4.11, todas en el dominio de la frecuencia.

Los parámetros  $\bar{K}(\xi)$  y  $\bar{C}(\xi)$  de cada modo se obtienen de acuerdo con el inciso 3.d y su variación con respecto a las frecuencias se muestran en las figuras 4.5 a 4.10. Como ejemplo ilustrativo se muestran dos tablas de cálculo de los parámetros  $\bar{K}(\xi)$ ,  $\bar{C}(\xi)$ ,  $K-M\Omega^2$ , y  $\Omega C(\xi)$ , términos que se utilizan en el análisis planteado por las ecuaciones del inciso 3.d. (ver tablas 4.1 y 4.2 respectivamente).

En la figuras 4.4.a y 4.11 se muestran las diferencias encontradas entre considerar la acción como envolvente o como una suma de armónicas simples.

En la tabla 4.3 se muestra un resumen de resultados comparativos que muestran las diferencias encontradas entre resultados obtenidos en este trabajo y los obtenidos por el análisis que se presenta en la referencia 3. Los resultados corresponden a la frecuencia de operación primaria, es decir para un parámetro  $\alpha_0 = 0.65$ .

## PROBLEMA 2.

Se plantea diseñar la cimentación para un generador que funciona a base de turbinas de gas. La condición del suelo de cimentación es mala pues se trata de una arcilla limosa blanda sensitiva a las vibraciones por lo que surge la necesidad de limitar la propagación de estas, así como las amplitudes de deformación; para ello, se ha propuesto un bloque adicional de inercia como aislador de vibraciones soportado por resortes, con el arreglo mostrado en la figura 4.12, donde puede verse que el paso entre altas y bajas frecuencias a las que funcionan el generador y la turbina respectivamente, está dado por una caja de engranes.

Para la solución del problema se toman los datos dados en la referencia 3, los cuales están relacionados con el funcionamiento del sistema de máquinas, las propiedades mecánicas del suelo así como las propiedades geométricas y de inercia del sistema cimentación - bloque de inercia - máquinas resultantes del arreglo, los cuales se enlistan a continuación.

### A).-DATOS GENERALES DEL SISTEMA DE MAQUINAS.

#### A.1) GENERADOR.

Peso ( $W_m$ ) = 12780 Kg

Peso rotor ( $W_r$ ) = 4295 Kg

Frecuencia de operación ( $f_1$ ) = 1800 rpm  $\leftrightarrow$   $\omega_s = 188.5$  rad/s

Excentricidad de masa desbalanceada ( $e_1$ )  $\approx$  0.00254 cm  
Fuerza centrífuga ( $F_{o1}$ ) = ( $W_r/g$ )  $e \omega^2$  = 395.5 Kg

#### A.2) TURBINA.

Peso ( $W$ ) = 7402.5 Kg  
Peso rotor ( $W_r$ ) = 257.5 Kg  
Frecuencia de operación ( $f_a$ ) = 8990 rpm  $\Leftrightarrow \omega_a = 941.43$  rad/s  
Excentricidad de masa desbalanceada ( $e_2$ )  $\approx$  0.0145 cm  
Fuerza centrífuga ( $F_{o2}$ ) = 336.8 Kg

#### A.3) CAJA DE ENGRANES

Peso ( $W_c$ ) = 5922.5 Kg  
Se considera que las fuerzas generadas por la caja de engranes son nulas.

A.4) Las fuerzas desbalanceadas generadas por las máquinas se suponen aplicadas en el centro de masas del sistema de máquinas y perpendicular al eje de la flecha que las une. Ver figura 4.12.a.

La fuerza combinada de las máquinas es, según referencia 3 :

$$F(t) = 395.5 \text{ Sen } (188.5 t) + 336.8 \text{ Sen } (941.4 t)$$

o una equivalente que se obtiene al considerar una función senoidal cuya amplitud es la suma de las amplitudes de las armónicas simples y su frecuencia es la frecuencia de operación primaria, en este caso la del generador, por lo que :

$$F(t) = 732 \text{ Sen } (188.5 t)$$

ver la fig.4.13.b.

#### B).-PARAMETROS DEL SUELO.

Arcilla limosa blanda  
 $\gamma = 1763.6 \text{ Kg/m}^3$   
 $G = 2.463E6 \text{ Kg/m}^2 \quad \Leftrightarrow V_s = 117 \text{ m/s}$   
 $\nu = 0.35$   
 $\xi = 0.05$   
 $q_a = 4.9 \text{ T/m}^2$

El nivel freático fluctúa y llega hasta 0.91 cm bajo la superficie del terreno en cierta época del año.

#### C).-PARAMETROS DE LA CIMENTACION.

Se ha seleccionado la cimentación de acuerdo a las recomendaciones del inciso 3.c y debido a que el nivel freático está relativamente a poca profundidad se ha recomendado que la cimentación sea superficial para evitar excavar bajo agua en caso de cimentación empotrada.

Las dimensiones resultantes así como las propiedades geométricas y de inercia del sistema, se muestran en la figuras 4.12 y 4.13.a.

enlistándose algunas de las más útiles a continuación :

$$L = 4.26 \text{ m.}$$

$$B = 2.13 \text{ m.}$$

$$A = 36.3 \text{ m}^2$$

#### D).-ANALISIS DINAMICO.

Se seleccionan 20 resortes con rigidez vertical de 157291.34 Kg/m cada uno para disminuir la transmisión vertical de vibraciones, la rigidez total vertical equivalente será  $K_v = 3.14E6 \text{ Kg/m}$ . El criterio de selección de los resortes se ha hecho para tener un factor de transmisibilidad de los resortes de  $T_r = 0.02$  considerando al bloque inercial como un sistema elemental de un grado de libertad independiente.  $T_r$  se define como la relación entre fuerza transmitida a fuerza aplicada.

La restricción al movimiento lateral está dada mediante postes verticales, dos a cada lado; la rigidez lateral es  $K_x = 28.83E6 \text{ Kg/m}$ .

La rigidez a la rotación de los resortes es función del arreglo de los mismos y de la rigidez vertical de cada uno de ellos, en este caso, el arreglo consiste de dos hileras de 10 resortes cada una separada 1.52 m a ambos lados del eje que pasa a través del punto o, ver figura 4.13.a, y su rigidez a la rotación equivalente respecto al eje y-y está dado por el momento ocasionado por las fuerzas en los resortes por unidad de rotación, ésto es:

$$K_{ry} = \frac{\text{Momento}}{\text{Rotación}} = \frac{\sum K_i d_i \psi d_i}{\psi} = \sum K_i d_i^2$$

siendo :

$K_{ry}$  = rigidez a la rotación respecto al eje y-y.

$K_i$  = rigidez vertical del resorte i.

$d_i$  = distancia perpendicular del resorte i al eje y-y.

$\psi$  = rotación.

en este caso :

$K_{ry} = 2 K_v e^2$  siendo  $K_v$  la rigidez vertical por cada hilera de resortes ( $10 \times 157291.34 = 1.57E6 \text{ Kg/m}$ ) y  $e$  es la distancia perpendicular del eje de la hilera al eje y-y,  $e = 1.52 \text{ m}$ , por lo que  $d_i = e = 1.52 \text{ m}$ .

Por lo tanto  $K_{ry} = 7.25E6 \text{ K-m}$

Con la información disponible presentada en el inciso 3.d.2 no se pueden evaluar los resortes y amortiguadores equivalentes del suelo para las altas frecuencias con que operan las máquinas, sin embargo como pudo observarse, conforme aumenta la frecuencia obtenemos que para muy altas frecuencias el coeficiente de amortiguamiento  $C$  tiende a  $\rho V_i A$  donde  $V_i$  se elige de acuerdo al modo de vibración.

Por otra parte, tampoco existe información suficiente para evaluar el resorte dinámico equivalente  $\bar{K}$ , para altas frecuencias con que opera la máquina, aun así,  $\bar{K}$  puede estimarse de las ecuaciones B.26 y B.27 obtenidas en el anexo B., es decir :

$$\bar{K} = K (1 - r)^2$$

siendo :  $\bar{K}$  = rigidez dinámica equivalente.  
 $K$  = rigidez estática  
 $r$  = relación de frecuencias =  $(\Omega/\omega_n)^2$   
 $\Omega$  = frecuencia de la acción  
 $\omega_n$  = frecuencia natural no amortiguada del sistema

Así en este caso, el amortiguamiento se vuelve independiente de las altas frecuencias y la rigidez del resorte dependiente de la relación de frecuencias.

Considerando lo anterior se evaluaron los amortiguadores y resortes equivalentes del suelo para cada frecuencia resultando lo siguiente :

Para la frecuencia de operación  $f_1 = 1800$  rpm  $\Leftrightarrow \Omega_1 = 188.5$  rad/s

Modo vertical :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{s1}(\xi) &= -3.08E8 \text{ Kg/m} \\ \bar{C}_{s1}(\xi) &= 1.11E6 \text{ Kg s/m} \\ V_i &= V_{Ly} = 194.8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Modo traslacional :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{s1}(\xi) &= -3.0E8 \text{ Kg/m} \\ \bar{C}_{s1}(\xi) &= 0.60E6 \text{ Kg s/m} \\ V_i &= V_s = 117 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Modo rotacional :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{r1}(\xi) &= -9.5E8 \text{ Kg m} \\ \bar{C}_{r1}(\xi) &= 1.53E6 \text{ Kg s m} \\ V_i &= V_{Ly} = 194.8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Para la frecuencia de operación  $f_2 = 8990$  rpm  $\Leftrightarrow \Omega_2 = 941.43$  rad/s

Modo vertical :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{s2}(\xi) &= -8.65E9 \text{ Kg/m} \\ \bar{C}_{s2}(\xi) &= 0.35E6 \text{ Kg s/m} \\ V_i &= V_{Ly} = 194.8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Modo traslacional :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{s2}(\xi) &= -86.09E8 \text{ Kg/m} \\ \bar{C}_{s2}(\xi) &= -0.14E6 \text{ Kg s/m} \\ V_i &= V_s = 117 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Modo rotacional :

$$\bar{K}_{ryz}(\xi) = 242.4E8 \text{ Kg m}$$

$$\bar{C}_{ryz}(\xi) = -0.64E6 \text{ Kg s m}$$

$$V_i = V_{Ly} = 194.8 \text{ m/s}$$

donde cada  $\bar{K}_{ij}(\xi)$  y cada  $\bar{C}_{ij}(\xi)$  está evaluado en función de la frecuencia  $\Omega$ , la forma de la cimentación y el amortiguamiento histerético  $\xi$ , siendo  $i$  el modo de vibrar y  $j$  el grado de libertad. Así, usando el modelo de la figura 3.d.6 y la solución correspondiente planteada en el anexo B.2, se evalúa la respuesta únicamente para el modo de traslación vertical. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.4, donde se indican las diferencias obtenidas de los análisis siguientes :

- a).-Considerando una acción envolvente con la frecuencia del generador y una amplitud máxima igual a la suma de las amplitudes que ocasionan el generador y la turbina.
- b).-Considerando la suma de armónicas simples correspondientes a la del generador y la de la turbina.

## **5. CONCLUSIONES**

Se presentan tres formas de solución de la ecuación de equilibrio dinámico del problema de vibración de maquinaria.

Una consiste en una expresión algebraica de la cual puede calcularse, de manera rápida, la respuesta de una cimentación idealizada como un sistema elemental de un grado de libertad.

Otra, es útil para la solución de problemas con más de un grado de libertad, por ejemplo, el caso de acoplamiento traslación-rotación o el problema 2 aquí resuelto. Esta solución hace que las expresiones algebraicas; generalmente más complejas, se resuelvan mediante sistemas de ecuaciones que se obtienen a través de un planteamiento matricial.

La última; que es una analogía con sistemas elementales de uno o varios grados de libertad, pretende inducir un entendimiento físico del problema y se relaciona con las otras formas de solución a través de las equivalencias presentadas en el anexo B, de las cuales, una vez definidos los resortes y amortiguadores que representan al suelo, se incorporan en las ecuaciones de movimiento del sistema y entonces se calcula la respuesta usando procedimientos comunes de la dinámica estructural.

Los planteamientos anteriores permiten que la solución pueda obtenerse de manera discreta en función de parámetros adimensionales dependientes de la frecuencia y de diferentes propiedades del suelo de cimentación, por lo cual y considerando que muchos problemas son "repetitivos", dichos parámetros pueden caracterizarse y agruparse de tal manera que puede asignárseles un comportamiento y banco de datos específico, con lo que es posible hacer programas de computadora que resuelvan más rápidamente los problemas. Por otra parte, permiten estudios paramétricos y la verificación de resultados obtenidos con métodos más complicados, sin la necesidad del uso de computadoras o con el mínimo uso de ellas.

El proceso de análisis es iterativo, por lo cual, en los primeros pasos del análisis, conviene obtener la respuesta en función de diferentes frecuencias aparte de la de operación, ya que esto permite enterarse de los factores que influyen en la respuesta y así hacer medidas correctivas, sea durante el proceso de análisis, de diseño o como consecuencia de un mal funcionamiento de una máquina.

En proyectos importantes es necesaria la participación interdisciplinaria entre un especialista en dinámica estructural, un especialista mecánico y un especialista en geotecnia, ya que este último tiene la tarea de resolver los problemas relacionados con la interacción suelo-cimentación y con el uso de métodos de análisis más racionales.

En resumen, el método aquí presentado es simple, útil y práctico para resolver problemas de cimentaciones superficiales de maquinaria e impracticable cuando se trata de problemas de impacto.

Se tiene la desventaja de que el método requiere del uso de funciones de impedancia las cuales deben obtenerse con investigaciones previas al cálculo de la respuesta de la cimentación. Aunado a lo anterior, falta definir un criterio para elegir el módulo de rigidez al corte equivalente que represente al tipo de depósito de suelo y que simule al semiespacio utilizado para la solución del problema de vibración de maquinaria. Esto es importante ya que, un paso crítico en el análisis es la elección de dicho módulo de rigidez al corte equivalente.

Por otra parte, es importante señalar que mientras no exista una teoría no lineal que pueda emplearse consistentemente con los resultados experimentales, habrá diferencias entre lo predicho y lo medido.



## REFERENCIAS

- 1.- American Society for Testing and Materials (1977) "Dynamic geotechnical testing" SPT 654, Denver Colorado 28 Junio, 1977.
- 2.- Aranda Hernández R. (1987) "Modelación eficiente de dominios finitos en propagación de ondas sísmicas" Revista de Ingeniería vol. LVII No. 3 Septiembre 1987. F.I. UNAM.
- 3.- Arya, O'Neill y Pincus (1979) "Design of structures and foundations for vibration machines". Gulf Publishing Co. Book Division.
- 4.- Bentley y Cooke "Linear algebra with differential equations" Edit. Holt, Rinehart, Winston Inc.
- 5.- Beredugo y Novak (1972) "Coupled horizontal and rocking vibrations of embedded footings". Canadian Geotechnical Journal Vol. 9, 1972, pags. 477-497.
- 6.- Broch (1972) "Mechanical vibration and shock measurements" The application of the Brüel & Kjaer measuring systems.
- 7.- Bunge M. (1972) "Teoría y realidad" Editorial Ariel S.A. Barcelona, 1972.
- 8.- Calcote L.R. (1967) "Introduction to continuum mechanics" Van Nostrand Co. Inc. 1968.
- 9.- Christensen R.M. (1971) "Theory of viscoelasticity: An introduction" Academic Press Inc.
- 10.- Churchill y Brown (1986) "Variable compleja y aplicaciones" Traducción a la cuarta edición en inglés, Mc.Graw Hill.
- 11.- Clough y Penzien (1985) "Dynamics of structures" Mc Graw Hill Book Co.
- 12.- Comisión Federal de Electricidad (1979) "Manual de diseño de obras civiles, Estructuras C.II. Métodos de diseño". México D. F.
- 13.- Crouse, Liang y Martin (1985) "Experimental foundation impedance functions" Journal of Geotechnical Engineering Vol. 111 No. 6 Junio, 1985.
- 14.- Díaz Rodríguez J.A. (1978) "Determinación experimental de las propiedades dinámicas de los suelos" IV Curso Internacional de Ingeniería Sísmica, DEFFI-UNAM, Agosto 1978.
- 15.- Dobry y Gazetas (1985) "Dynamic stiffness and damping of foundations by simple methods" "Vibration problems in

geotechnical engineering. GED-ASCE Convention , Detroit Michigan, Octubre 1985.

- 16.- (1986) "Dynamic response of arbitrarily shaped foundations" JGE-ASCE Vol. 112 No.2 Feb. 1986.
- 17.- (1986) "Dynamic response of arbitrarily shaped foundations : Experimental verification" JGE-ASCE Vol.112 No.2 Feb. 1986.
- 18.- (1988) "Dinamica de suelos y diseño de cimentaciones de maquinaria" Curso impartido en la Sociedad Mexicana de Mecanica de Suelos SMMS, Agosto 1988.
- 19.-Dobry, Oweis y Urzua (1976) "Simplified procedures for estimating the fundamental period of a soil profile" Bulletin of the Seismological Society of America Vol. 66 No.4 pags. 1293-1321, Agosto 1976.
- 20.-Flores Barrones J. R. (1977) "Parámetros de diseño en cimentaciones de maquinaria" Publicación No. 389 Instituto de Ingeniería UNAM.
- 21.- (1983) "Solicitaciones dinámicas debido a maquinaria" Revista de Ingeniería Vol. LIII No. 2 1983, FI-UNAM.
- 22.-Fotopoulou M. y Dobry R. (1988) "Manual of program vert (Dynamical response of symmetric foundation)", Julio 1988.
- 23.-Fialho Rodrigues L. (1978) "Techniques for in situ measurements of shear wave velocity" Memoria No. 494 Ministerio de Habitação e obras publicas , Laboratorio Nacional de Engenharia Civil Lisboa Portugal, 1978.
- 24.-Gazetas G. (1983) "Analysis of machine foundation Vibrations : State of the art" Journal of Soil Mechanics and Earthquake Engineering Vol. 2 No. 1 1983 pags. 2-42.
- 25.-Gazetas G. y Dobry R. (1984) "Simple radiation damping model for piles and footings" Journal of Engineering Mechanics Vol. 110 No. 6 ASCE, Junio 1984 .
- 26.-Gazetas, Dobry, y Tassoulas (1987) "Vertical response of arbitrarily shaped embedded foundations" JGE-ASCE Vol. 111 No.6, Junio 1985.
- 27.-Gazetas y Tassoulas (1987) "Horizontal stiffness of arbitrarily shaped embedded foundations" JGE-ASCE Vol. 113 No.5, Mayo 1987.
- 28.- (1987) "Horizontal damping of arbitrarily shaped embedded foundations" JGE-ASCE Vol.113 No.5, Mayo 1987.

29.-Katsuhiko Ishida (1985) "Dynamic characteristics of soil foundation interaction system detected from forced vibration and earthquake observation" Earthquake Engineering and Structural Dynamics Vol.13, 1985.

30.-Harker (1982) "Generalized methods of vibration analysis" Wiley and Sons.

31.-Haliday D. y Resnick R. (1974) "Física parte I y II" Cia. Edit. Continental S.A. México, 1974.

32.-Kolsky (1952) "Pressure waves in solids" Dover Publications Inc. 1963.

33.-Lambe T. W (1973) "Predictions in soil engineering" Geotechnique Vol.23 No.2, Thirteenth Rankine Lecture.

34.-Lalanne, Berthier y Hagopian (1983) "Mechanical vibrations for engineers" John Wiley and Sons.

35.-Lysmer J. (1980) "Foundation vibration with soil damping" Proc. 2<sup>nd</sup> ASCE Conf. on Civil Engineering and Nuclear Power, Knoxville Vol.II paper 10-4 pags. 1-18.

36.-Mc Neill (1969) "Machine foundation the state of the art report" Soil Dynamics Specialty Conference, VII Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, México D.F. 1969.

37.-Mc Caffery J.R. (1975) "Solutions of impact problems for structural dynamics analysis" Structural Design of Nuclear Plant Facilities Vol.II ASCE New Orleans Louisiana, 9-10 Diciembre 1975.

38.-Marcuson III F.W. y Joseph R. Curri Jr. (1981) "Field and laboratory of soil moduli" Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Octubre 1981.

39.-Novak M. y Sachs K. (1973) "Torsional and Coupled vibrations of embedded footings" Earthquake Engineering and Structural Dynamics Vol. 2, 1973.2, 1973.

40.-Novak Milos (1974) "Dynamic stiffness and damping of piles" Canadian Geotechnical Journal II, 574, 1974.4, 1974.

41.-Novak Milos (1985) "Experiments with shallow and deep foundations" Vibration Problems in Geotechnical Engineering BED-ASCE Convention, Detroit Michigan, Octubre 1985.

42.-Randall y Tech (1977) "Frequency analysis" Application of Brüel & Kjaer equipment.

43.-Ramírez Reynaga M. (1988) "Notas del curso Dinámica de suelos y diseño de cimentaciones de maquinaria" Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, Agosto de 1988.

- 44.-Richart Jr, Hall Jr y Wood (1969) "Vibrations of soils and foundations" Prentice Hall Inc. Englewood Cliff New Jersey.
- 45.-Richart Jr. F. E. (1975) "Some effects of dynamic soil properties on soil-structure interaction" Tenth Terzaghi Lecture JGED-ASCE Vol.101 No.GT12, Diciembre 1975.
- 46.-Roesset J. M (1980) "Stiffness and damping coefficients of foundations" Dynamic response of pile foundation, ASCE, 1980 (O'Neill and Dobry eds.)
- 47.-Roesset J. M. (1986) "Efectos del suelo en la respuesta sísmica de estructuras" XII Curso Int. de Ing. Sísmica, Diseño sísmico de estructuras especiales, Agosto 1986 FI-UNAM.
- 48.-Rodriguez Cuevas N. (1987) "Interacción suelo estructura" XIII Curso Internacional de Ingeniería Sísmica, Diseño sísmico de estructuras especiales, Div. Educación Continua FI-UNAM, Agosto 1987.
- 49.-Stokoe II, K.H. y Richart Jr. I.E (1974) "Dynamic response of embedded machine foundations" JGED-ASCE Vol. 100 GT.4, Abril 1974.
- 50.-Tse, Morse y Hinkle (1978) "Mechanical vibrations theory and applications" Second edition Allyn and Bacon Inc.
- 51.-Veletsos y You (1971) "Lateral and rocking vibration of footings" Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol.97 SM.9, Septiembre 1971.
- 52.-Veletsos y Verbic (1973) "Vibration of viscoelastic foundation" Earthquake Engineering and Structural Dynamics Vol.2, 1973.
- 53.-Veletsos y Verbic (1974) "Basic response functions for elastic foundations" JGE-ASCE Vol. 100 No.EM2, Abril 1974.
- 54.-Wiss F.J. (1981) "Construction vibrations : state of the art" JGED-ASCE Vol. 107 No.GT2, Febrero. 1981.
- 55.-Zeevaert W. L. (1972) "Foundation engineering for difficult subsoil conditions" Van Nostrand reinhold Co. New York.

## SIMBOLOGIA

- $A_b$  = Area de contacto de la base de la cimentación.  
 $B$  = Semiancho de la cimentación.  
 $a_0$  = Parámetro adimensional función de la frecuencia  $\Omega$   
 $C$  = Amortiguamiento del sistema.  
 $C_c$  = Amortiguamiento crítico para el cual el sistema no vibra.  
 $\bar{C}(\xi)$  = Amortiguador dinámico equivalente como función de  $\Omega$ , de la forma de la cimentación y con el amortiguamiento histerético integrado.  
 $\xi$  = Coeficiente de variación del amortiguamiento.  
 $D$  = Profundidad de desplante de la cimentación.  
 $e$  = Relación de vacíos.  
 $G$  = Módulo de rigidez cortante.  
 $I_x$  = Momento de inercia geométrico con respecto al eje x-x.  
 $I_y$  = Momento de inercia geométrico con respecto al eje y-y.  
 $I_t$  = Factor de empotramiento debido al efecto de zanja.  
 $I_w$  = Factor de empotramiento debido al efecto del contacto entre paredes de la cimentación y la zanja.  
 $J$  = Momento polar de inercia .  
 $i, j$  = Subíndices.  
 $\mathcal{X}$  = Función de impedancia que relaciona las fuerzas con los desplazamientos.  
 $\mathcal{X}_1$  = Impedancia asociada a las características de rigidez y de inercia del suelo.  
 $\mathcal{X}_2$  = Impedancia asociada a las características de amortiguamiento geométrico de la cimentación.  $\mathcal{X}$  = Impedancia compleja como función únicamente de la frecuencia  $\Omega$ .  
 $\mathcal{X}(\xi)$  = Impedancia compleja como función de la frecuencia  $\Omega$  y del amortiguamiento histerético  $\xi$  del suelo.  
 $\mathcal{X}_1(\xi)$  = Impedancia asociada a las características de rigidez y de inercia del suelo, la cual es función de la frecuencia  $\Omega$  y del amortiguamiento histerético  $\xi$  del suelo.  
 $\mathcal{X}_2(\xi)$  = Impedancia asociada a las características de amortiguamiento geométrico de la cimentación, como función de la frecuencia  $\Omega$  y del amortiguamiento histerético  $\xi$  del suelo. Es igual a  $\Omega \mathcal{X}(\Omega, \xi)$ .  
 $\bar{K}_i$  = Rigidez dinámica equivalente.  
 $K_i$  = Rigidez estática.  
 $A_i$  = Coeficiente de variación de la rigidez dinámica con la frecuencia.  
 $\bar{K}(\xi)$  = Rigidez dinámica equivalente como función de  $\Omega$  y  $\xi$ . Es igual a  $\mathcal{X}_1(\xi)$ .  
 $\bar{K}_{empotrada}$  = Rigidez estática empotrada.  
 $\bar{K}_{empotrada}$  = Rigidez dinámica equivalente empotrada.  
 $\bar{K}_{superficial}$  = Rigidez estática superficial.  
 $\bar{A}_{empotrada}$  = Coeficiente de variación de la rigidez dinámica empotrada.  
 $A_{zanja}$  = Coeficiente de variación de la rigidez dinámica modificado por el efecto zanja.  
 $L$  = Semilargo de la cimentación.  
 $M$  = Masa del sistema maquinaria-cimentación.  
 $\mathcal{M}$  = Módulo del suelo (convenientemente elegido) que relaciona esfuerzos con deformaciones.  
 $P(t)$  = Fuerza armónica función del tiempo.

$P_0$  = Amplitud máxima de la fuerza actuante.

$R(t) \equiv \bar{Q}$  Fuerzas de contacto.

$r = \frac{\omega}{\omega_n}$  es la relación de frecuencia de la acción a frecuencia natural de vibración no amortiguada.

$t$  = Tiempo.

$u$  = Desplazamiento.

$u_0$  = Amplitud máxima del desplazamiento.

$u(z,t)$  = Desplazamiento armónico en la dirección  $z$  como función de  $z$  y del tiempo.

$\ddot{u}_z$  = Aceleración de partículas del suelo en dirección  $z$ .

$u_s$  = Vector de desplazamiento asociado a la rigidez.

$u_z$  = Vector de desplazamiento asociado al amortiguamiento.

$V_s$  = Velocidad de onda cortante.

$V_{ly}$  = Velocidad de onda compresional según la interpretación de Lysmer

$$= \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} V_s$$

$x,y,z$  = Sistema ortogonal de coordenadas.

$\beta$  = Relación de amortiguamientos del sistema elemental de un grado de libertad equivalente.

$\epsilon_x = \frac{\partial u_z}{\partial z}$  = Deformación axial unitaria en la dirección  $x$ .

$\phi$  = Angulo de desfaseamiento entre carga y respuesta.

$\gamma$  = Peso volumétrico del suelo.

$i$  = Número asociado al espacio complejo.

$\mu$  = Micras.

$\nu$  = Módulo de Poisson.

$\pi = 3.1416$

$\rho$  = Densidad del suelo

$\sigma$  = Esfuerzo normal.

$\bar{\sigma}_o = \frac{\bar{\sigma}_v + 2\bar{\sigma}_h}{3}$  = Esfuerzo octaédrico normal efectivo.

$\bar{\sigma}_v$  = Esfuerzo vertical efectivo.

$\bar{\sigma}_h$  = Esfuerzo horizontal efectivo.

$\tau$  = Esfuerzo cortante.

$\Omega$  = Frecuencia angular de la onda o frecuencia angular de la excitación  $P(t)$ .

$\omega_n$  = Frecuencia angular natural de vibración no amortiguada

$\xi$  = Amortiguamiento histerético del suelo.

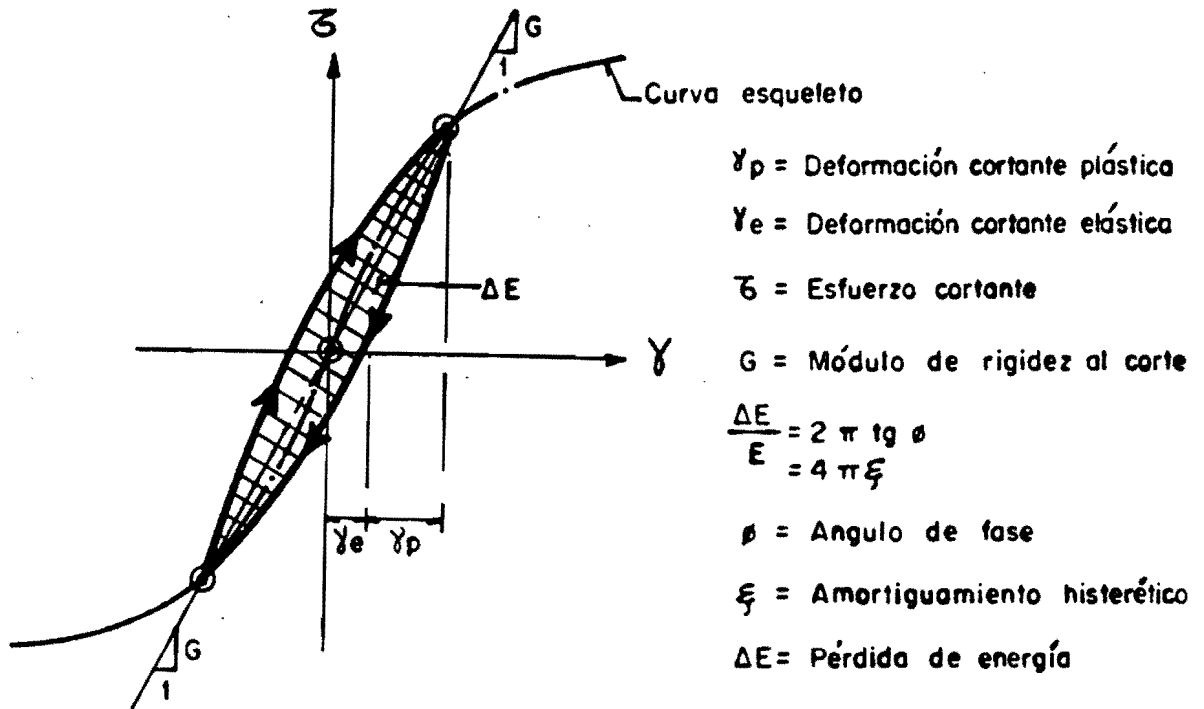


Fig. 2. b. 1- RESPUESTA DEL SUELO ANTE CARGAS CICLICAS

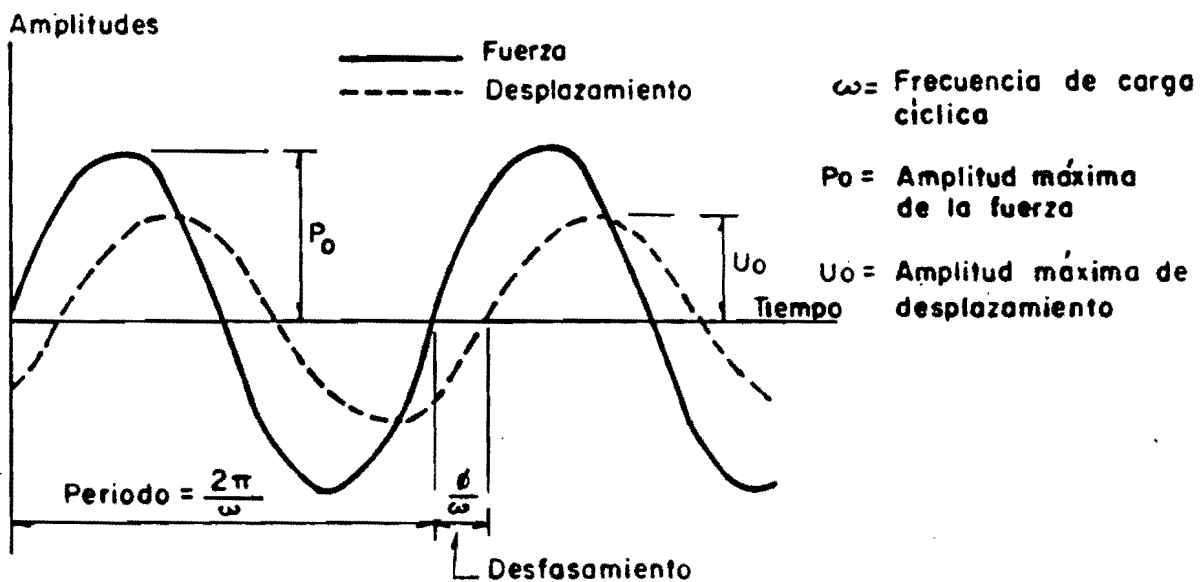
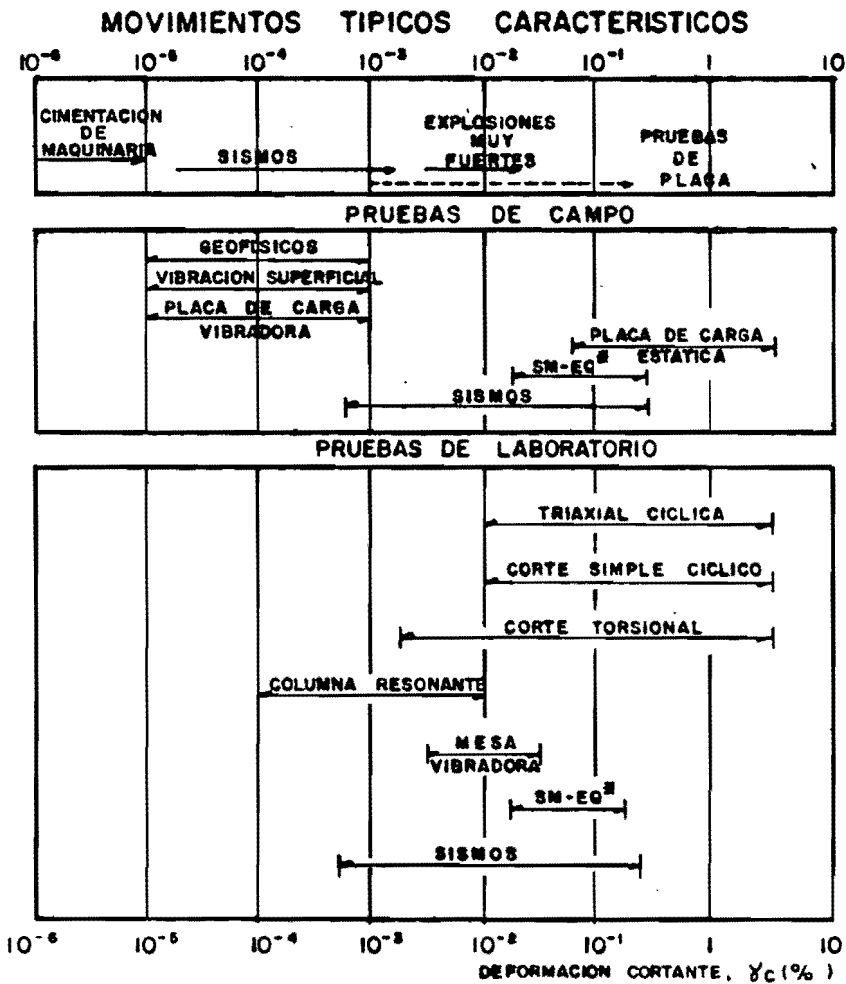
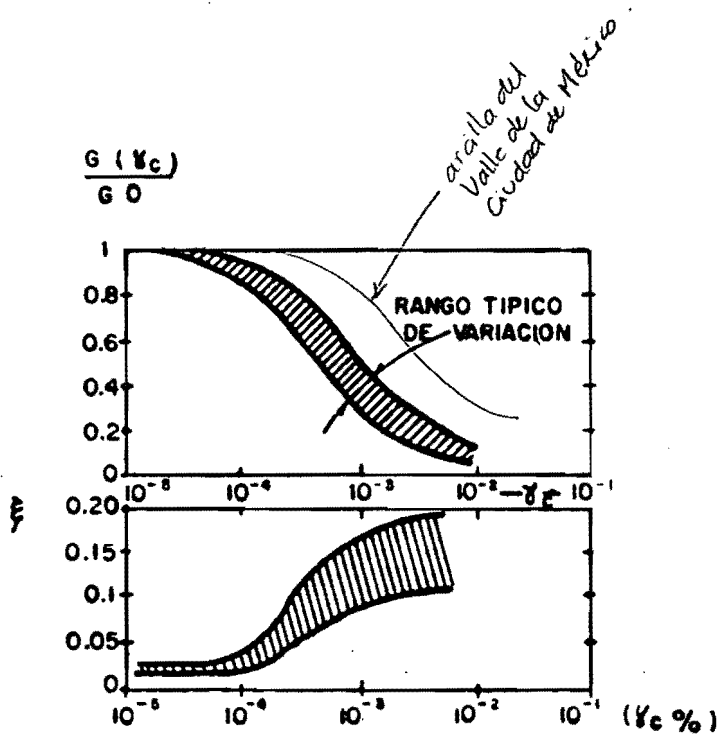


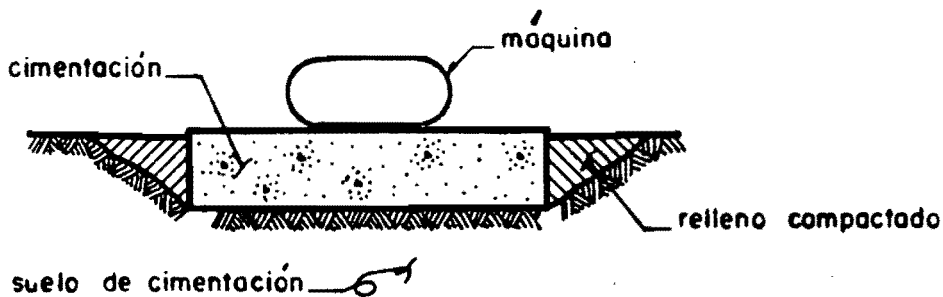
Fig. 2. b. 2 - DESFASAMIENTO ENTRE FUERZA Y DESPLAZAMIENTO DEBIDO AL COMPORTAMIENTO VISCO-ELASTICO



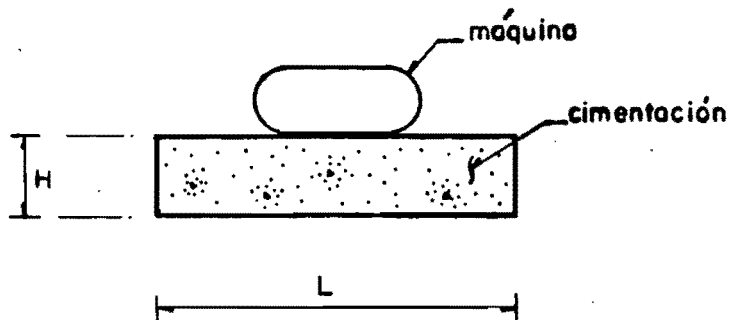
\* SM-EQ = DEFORMACION INDUCIDA POR MOVIMIENTOS FUERTES

Fig. 2.b.3 - VARIACION DE LOS PARAMETROS G Y β EN FUNCION DEL NIVEL DE DEFORMACION

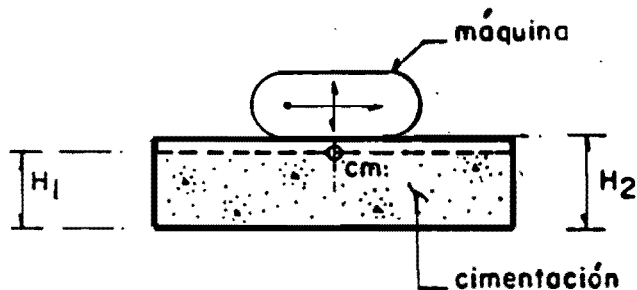




a).- Garantizar el buen contacto entre paredes

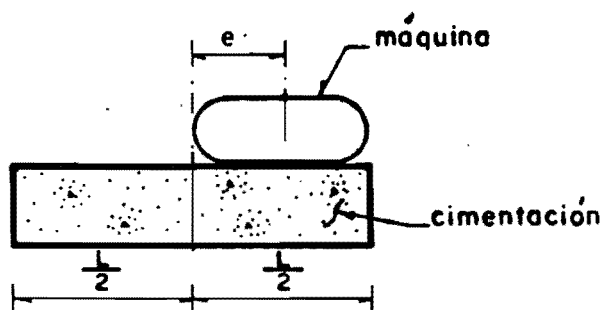


b).-  $L > H$



cm. Centro de masas del sistema

c).-  $H_1 < H_2$



d).- evitar excentricidades

Fig. 2.c.1 - CARACTERISTICAS DE INSTALACION RECOMENDADAS PARA DISMINUIR LOS EFECTOS DEL CABECEO

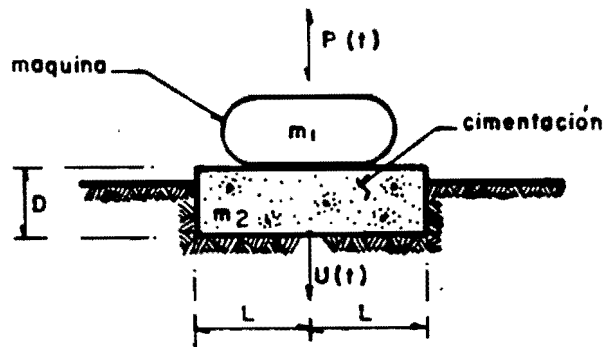
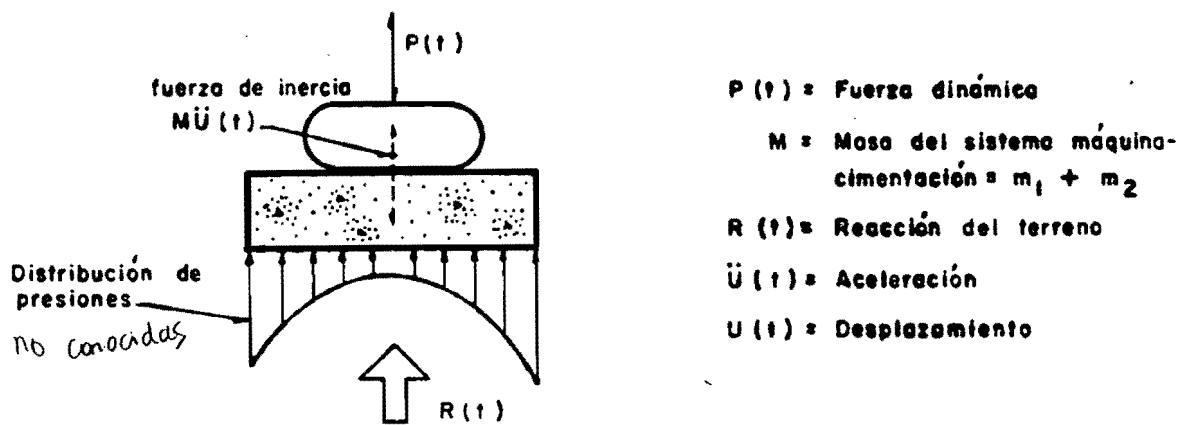
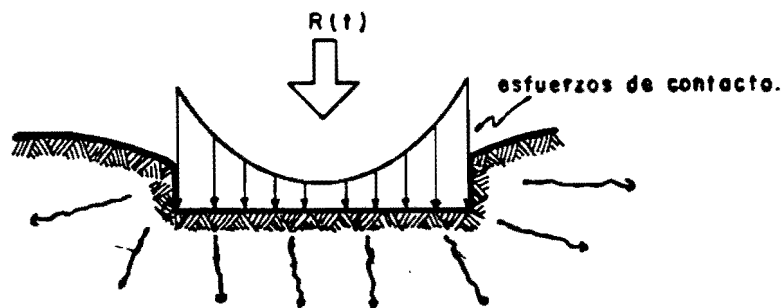


Fig. 3.d.1 - ESQUEMA DE UNA MAQUINA Y SU CIMENTACION



a) - Diagrama de cuerpo libre; equilibrio de fuerzas externas.



b) - Propagación de los esfuerzos de contacto en el suelo de cimentación.

Fig. 3.d.2 - SEPARACION DEL PROBLEMA EN DOS DIAGRAMAS

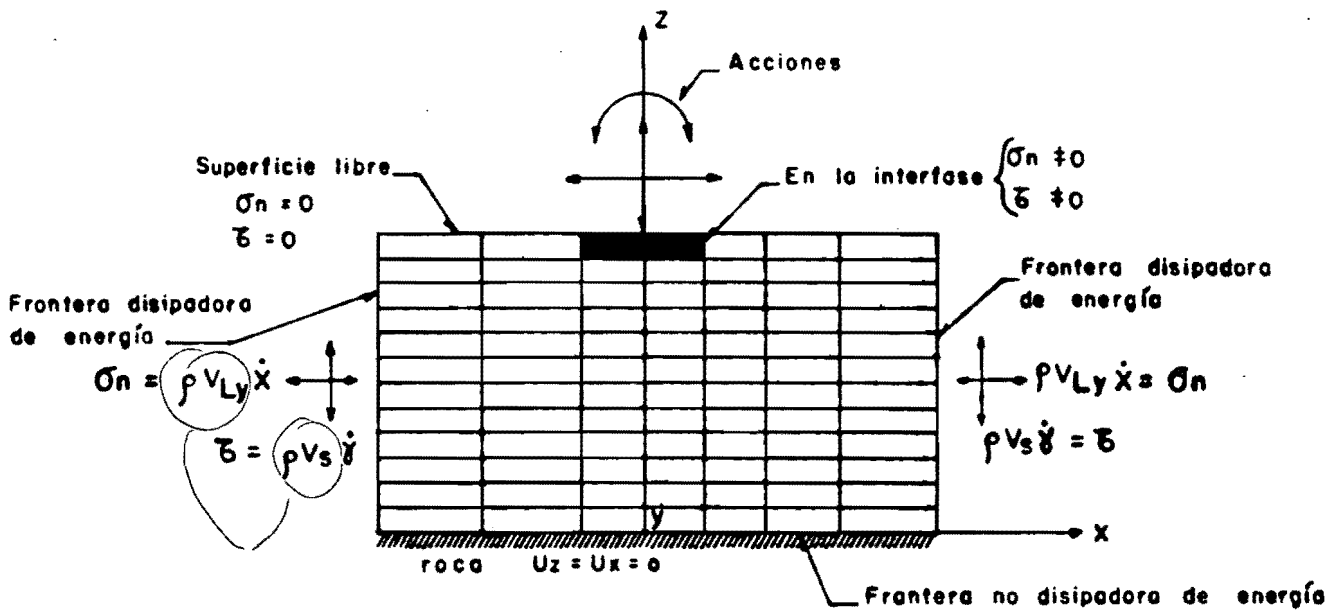
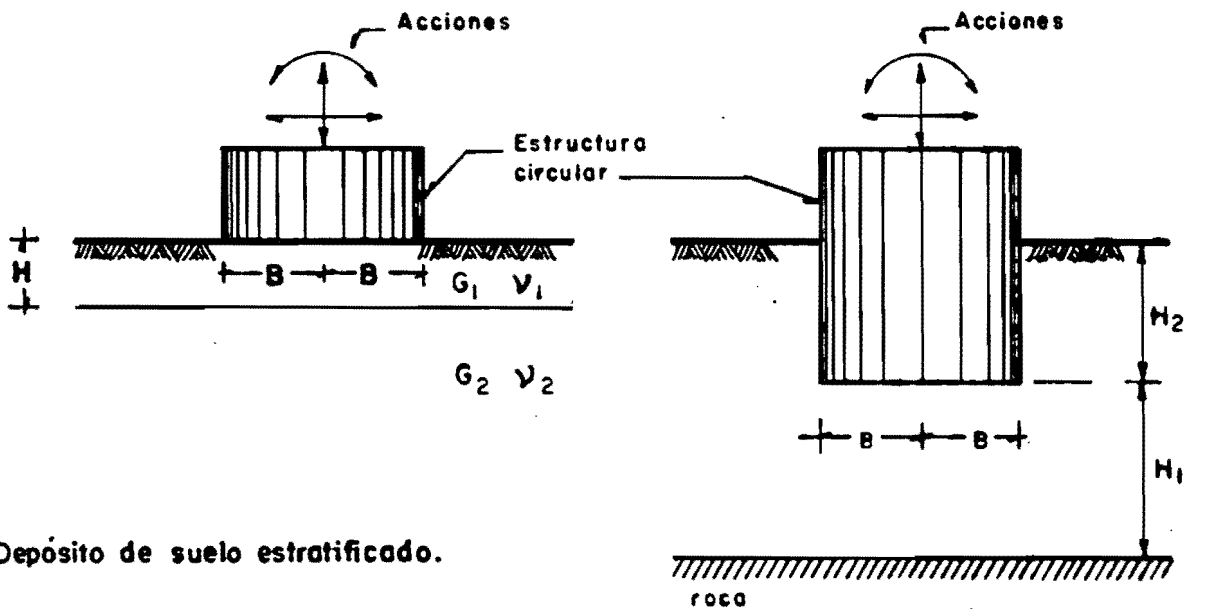


Fig. 3.d.3. FORMULACIONES DE CONDICIONES DE FRONTERA



a)- Depósito de suelo estratificado.

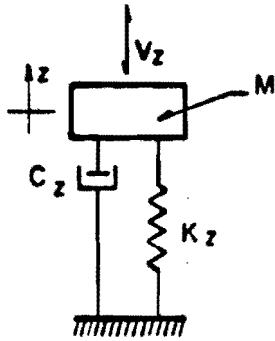
$G_i$  = módulo de rigidez al corte

$v_i$  = relación de Poisson

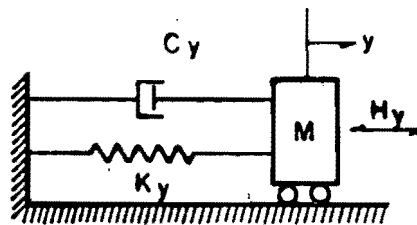
$i$  = estrato

b)- Depósito de suelo sobre roca.

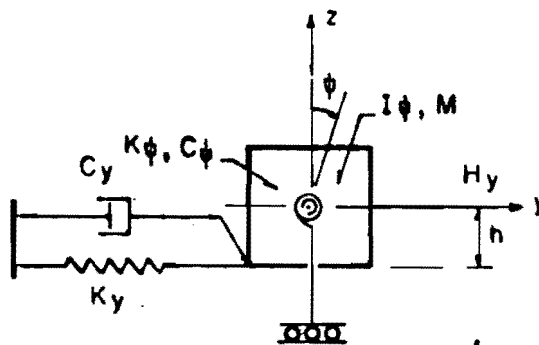
Fig. 3.d.4. ESQUEMA DE PROBLEMAS RESUELTOS



a).- Traslación vertical

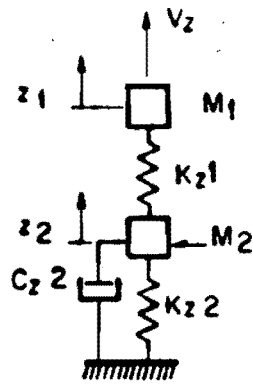


b).- Traslación horizontal



c).- Acoplamiento traslación - rotación

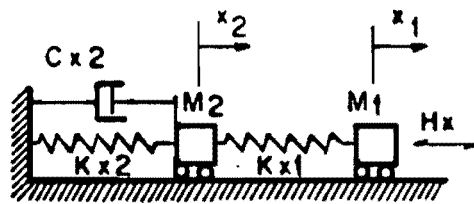
Fig. 3.d.5. MODELOS DE SISTEMAS ELEMENTALES DE UN GRADO DE LIBERTAD



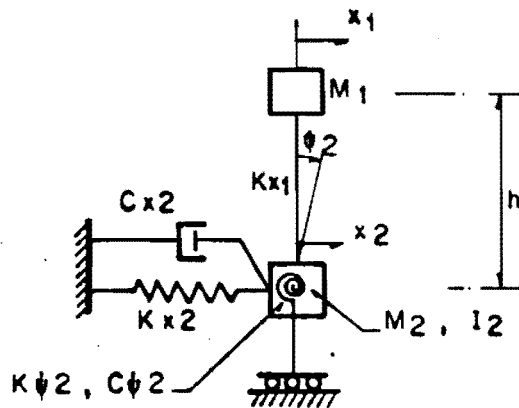
$M_1$  = Masa equivalente al sistema máquina - bloque de inercia

$M_2$  = masa de la cimentación

a).- Traslación vertical

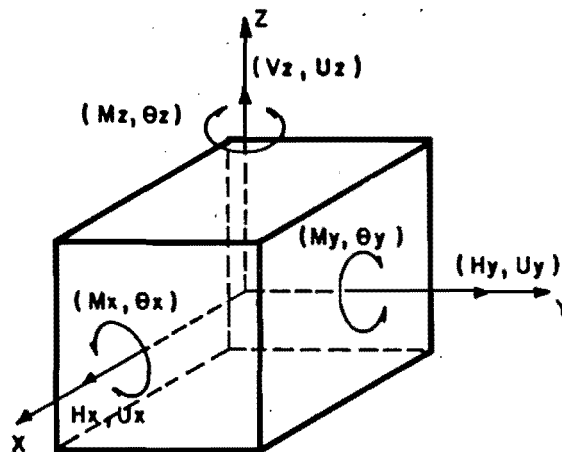


b).- Traslación horizontal



c).- Acoplamiento traslación - rotación

Fig. 3.d.6 - SISTEMA ELEMENTAL DE DOS GRADOS DE LIBERTAD



#### MODOS TRASLACIONALES

$V_z$  = Fuerza vertical

$U_z$  = Desplazamiento vertical

$H_x$  = Fuerza longitudinal

$U_x$  = Desplazamiento longitudinal

$H_y$  = Fuerza transversal

$U_y$  = Desplazamiento transversal

#### MODOS ROTACIONALES

$M_z$  = Momento torsionante

$\theta_z$  = Rotación alrededor del eje z

$M_x$  = Momento transversal

$\theta_x$  = Rotación transversal

$M_y$  = Momento longitudinal

$\theta_y$  = Rotación longitudinal

Fig. 3.d.7. MODOS DE VIBRAR DE UNA CIMENTACION

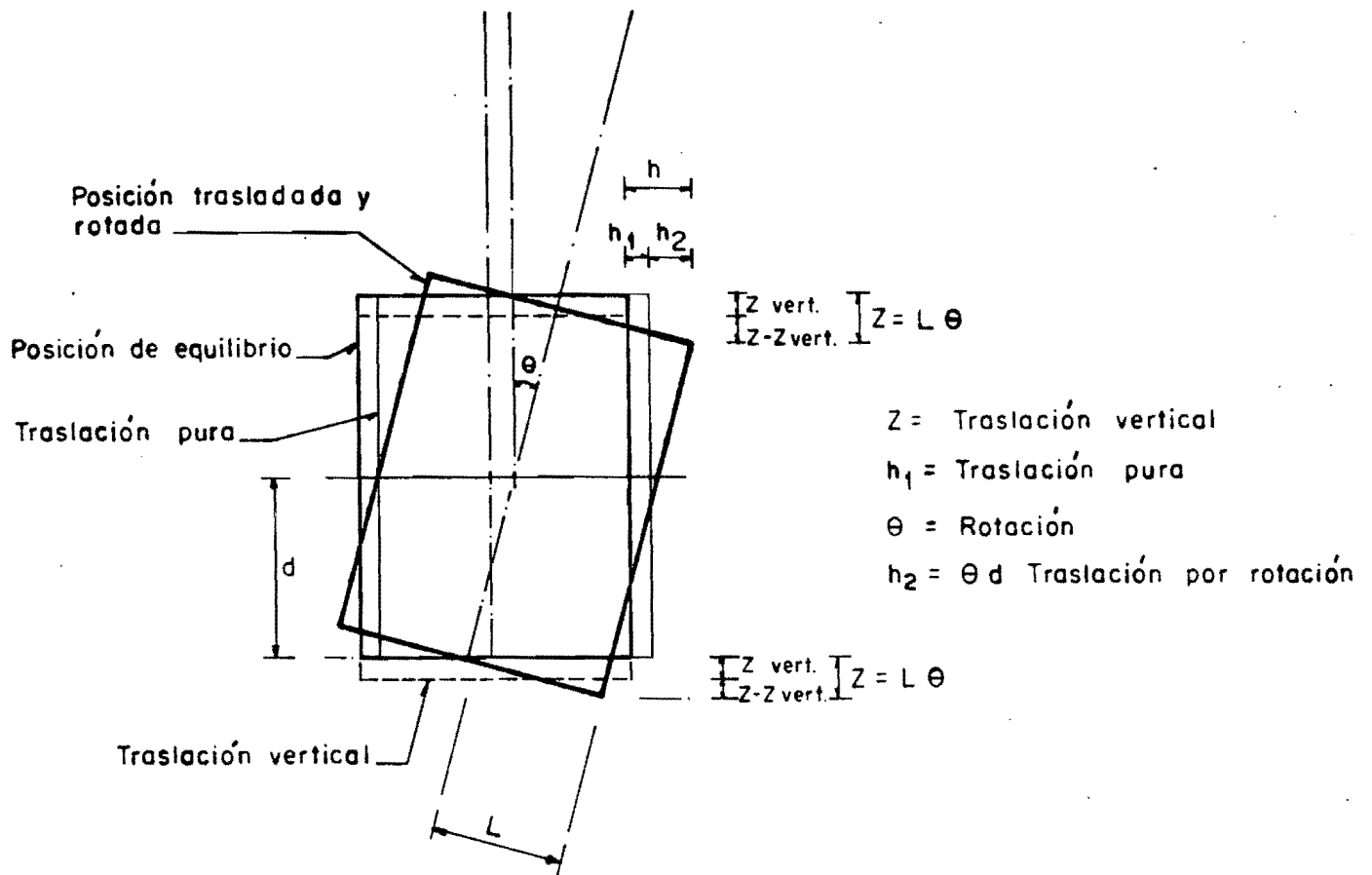
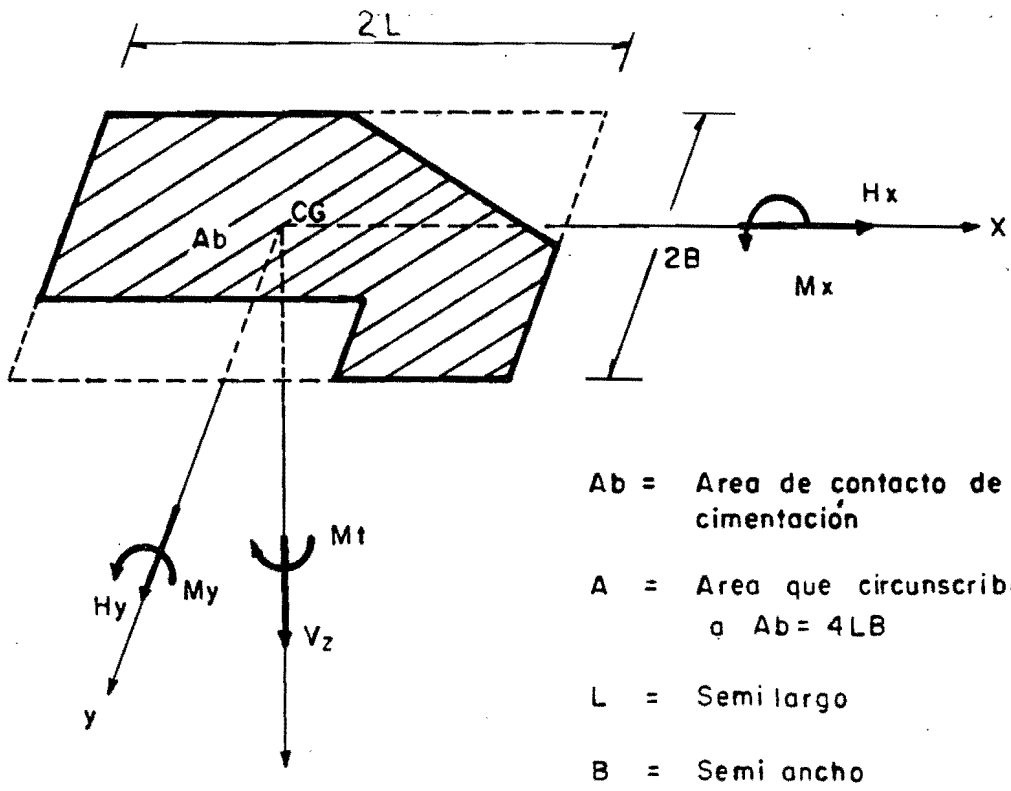
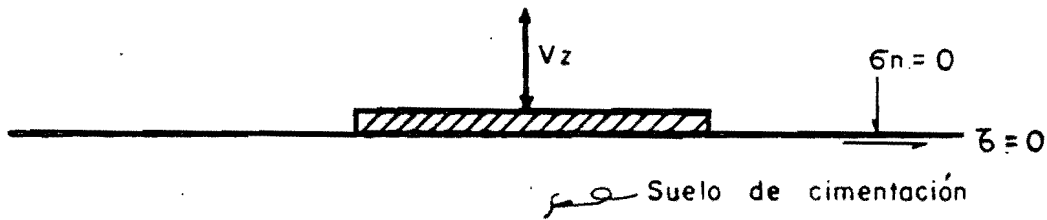


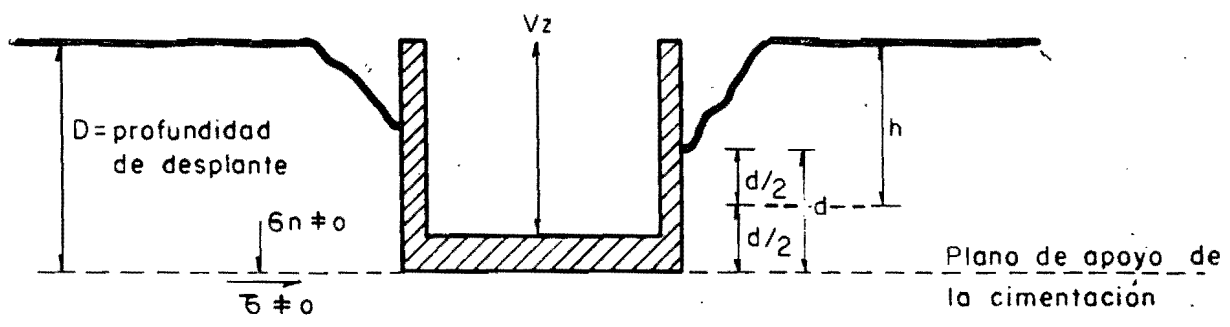
Fig. 3.d.8 - ACOPLAMIENTO ENTRE TRASLACION Y ROTACION



a).- Planta del area de contacto de una cimentación de forma irregular



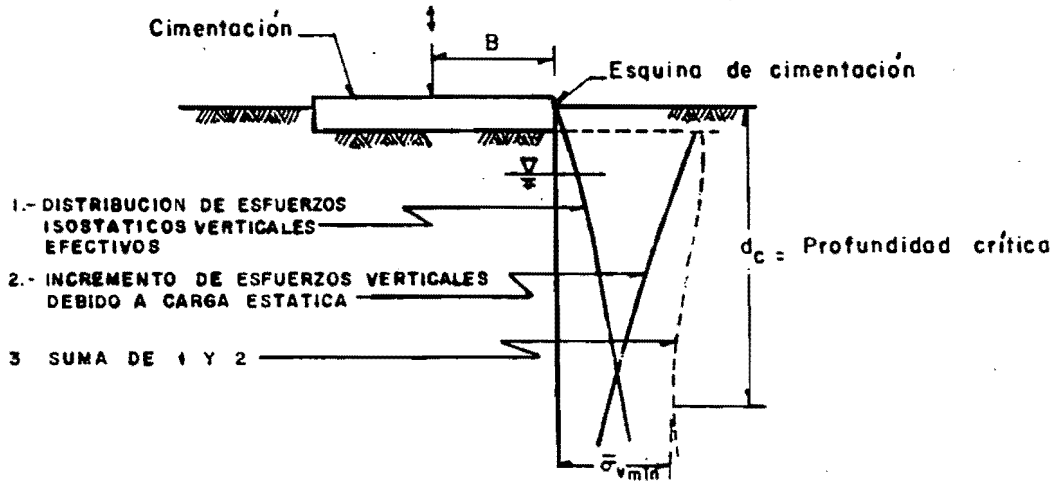
b).- Cimentación superficial



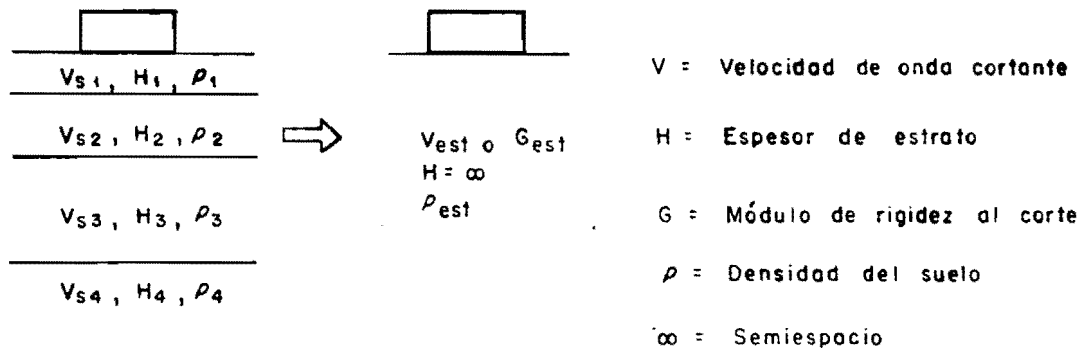
c).- Cimentación empotrada

Fig. 3.d.9. DEFINICION DE GEOMETRIA DE CIMENTACION

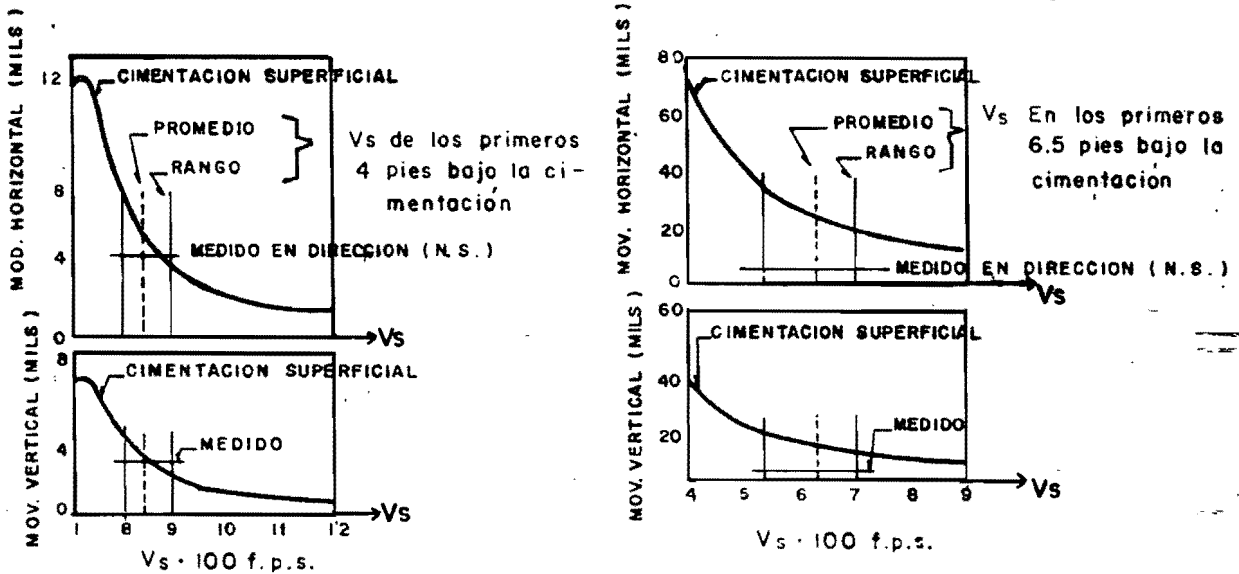




a).- Distribución de esfuerzos verticales y profundidad crítica



b).- Sustitución por un semiespacio

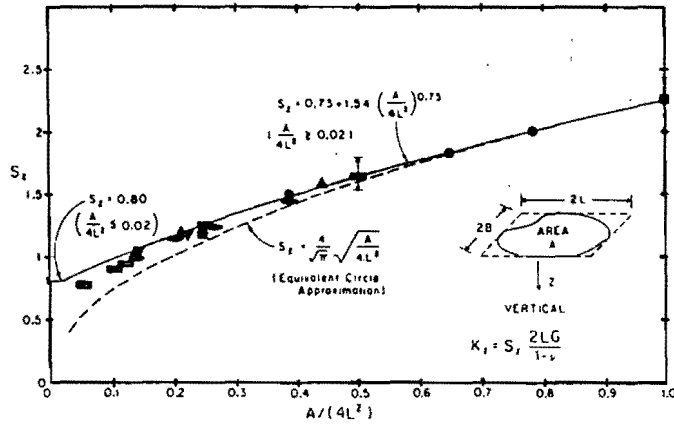


cimentación de compresor de aire

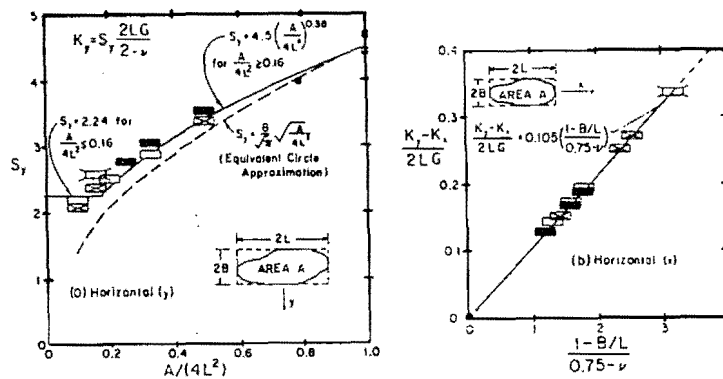
cimentación de bomba de vacío

c).- Comparación entre respuestas medidas y calculadas (Ref. 49)

Fig. 3.d.10. METODOS PARA CONSIDERAR LA G EQUIVALENTE



a).- Factor de forma para rigidez estática vertical



b).- Factores de forma para rigidez estática horizontal

Fig 3.d.II.- FACTORES DE FORMA PARA MODOS TRASLACIONALES (REF. 15)

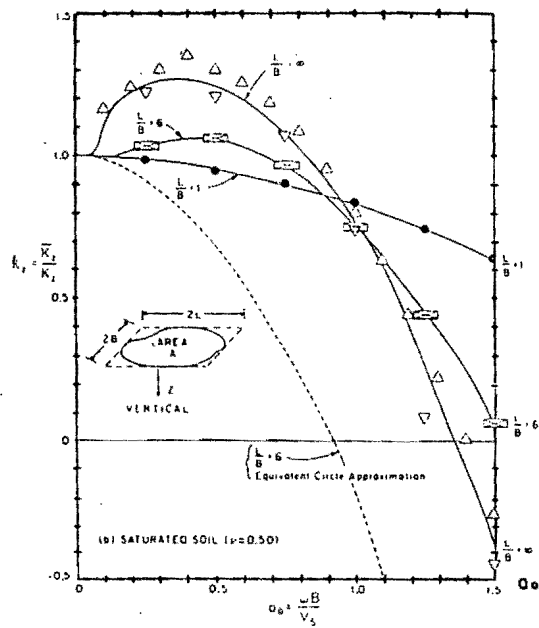
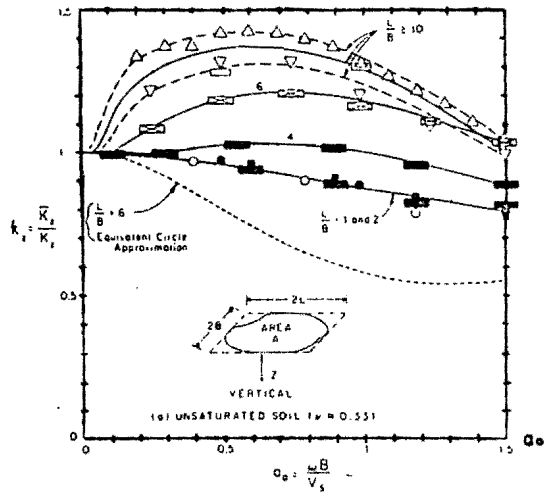


Fig 3.d.12.- COEFICIENTE DE VARIACION DE RIGIDEZ DINAMICA ; MODO TRASLACION VERTICAL.

(REF. 15 )

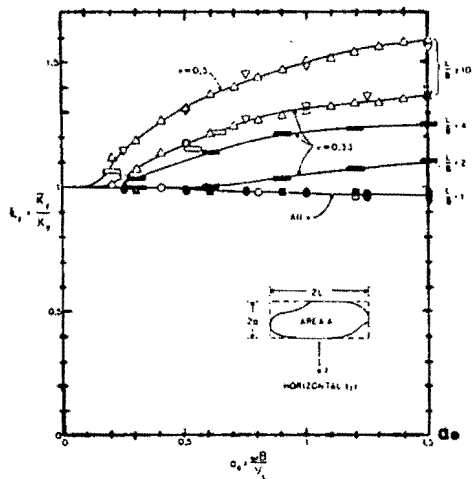
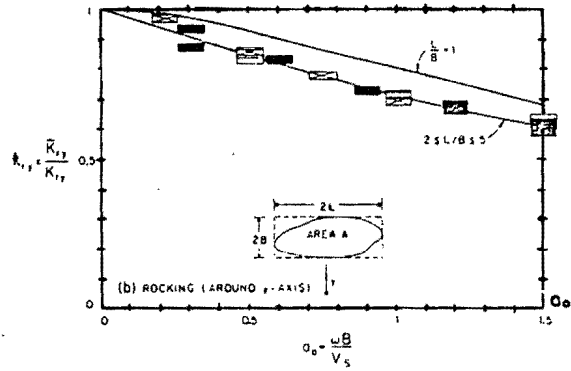
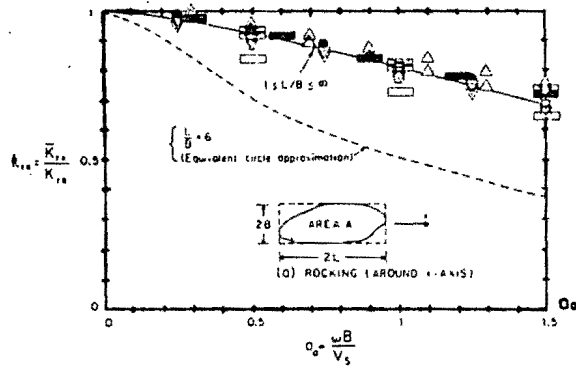
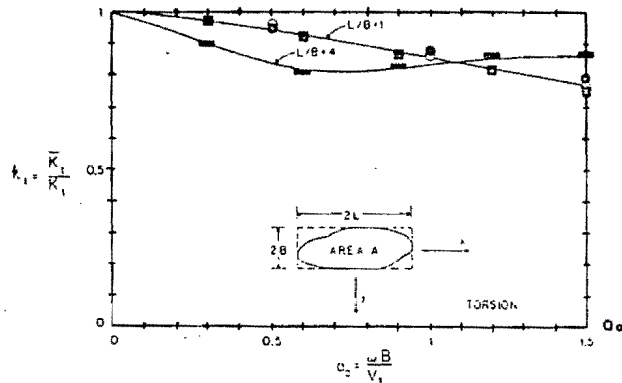


Fig. 3.d.13.- COEFICIENTE DE VARIACION DE RIGIDEZ DINAMICA  
 MODO TRASLACION HORIZONTAL TRANSVERSAL  
 ( REF. 15 )

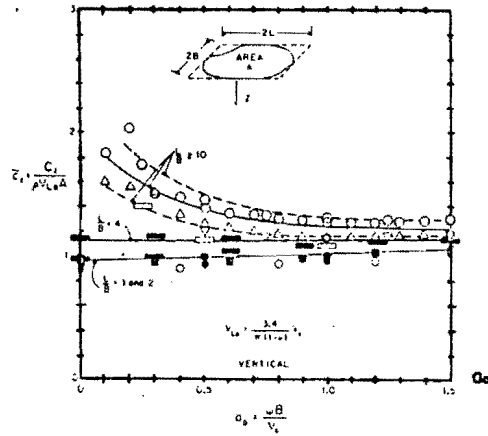


a).- Cabeceo

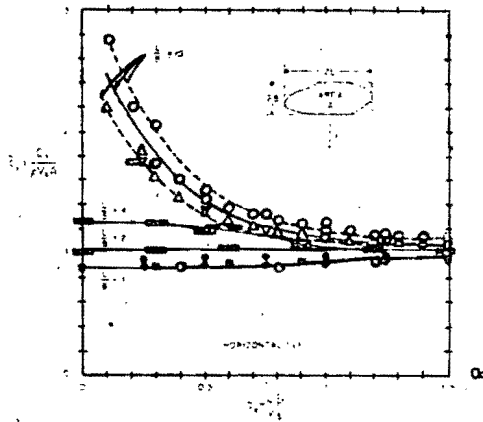


b).- Torsión

Fig 3.d.14.- COEFICIENTE DE VARIACION DE LA RIGIDEZ DINAMICA PARA MODOS ROTACIONALES ( REF. 15 )

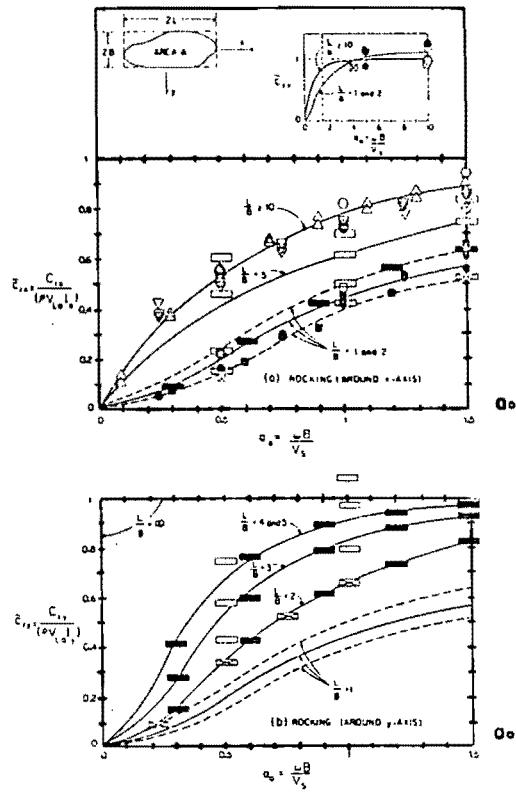


a).- Modo traslación vertical

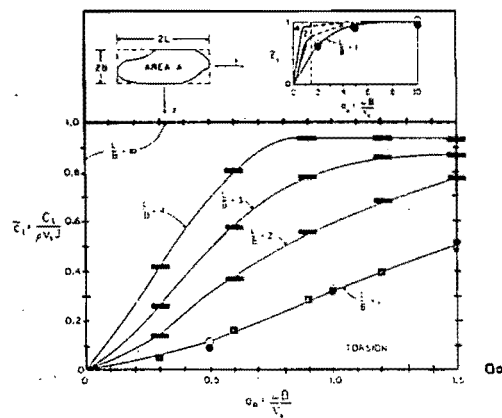


b).- Modo traslación horizontal

Fig. 3. d.15.- COEFICIENTE DE VARIACION DEL AMORTIGUAMIENTO PARA MODOS TRASLACIONALES ( REF. 15 )



a).- Modo cabeceo



b).- Modo torsión

Fig. 3.d.16.- COEFICIENTE DE VARIACION DEL AMORTIGUAMIENTO PARA MODOS ROTACIONALES ( REF. 15 )

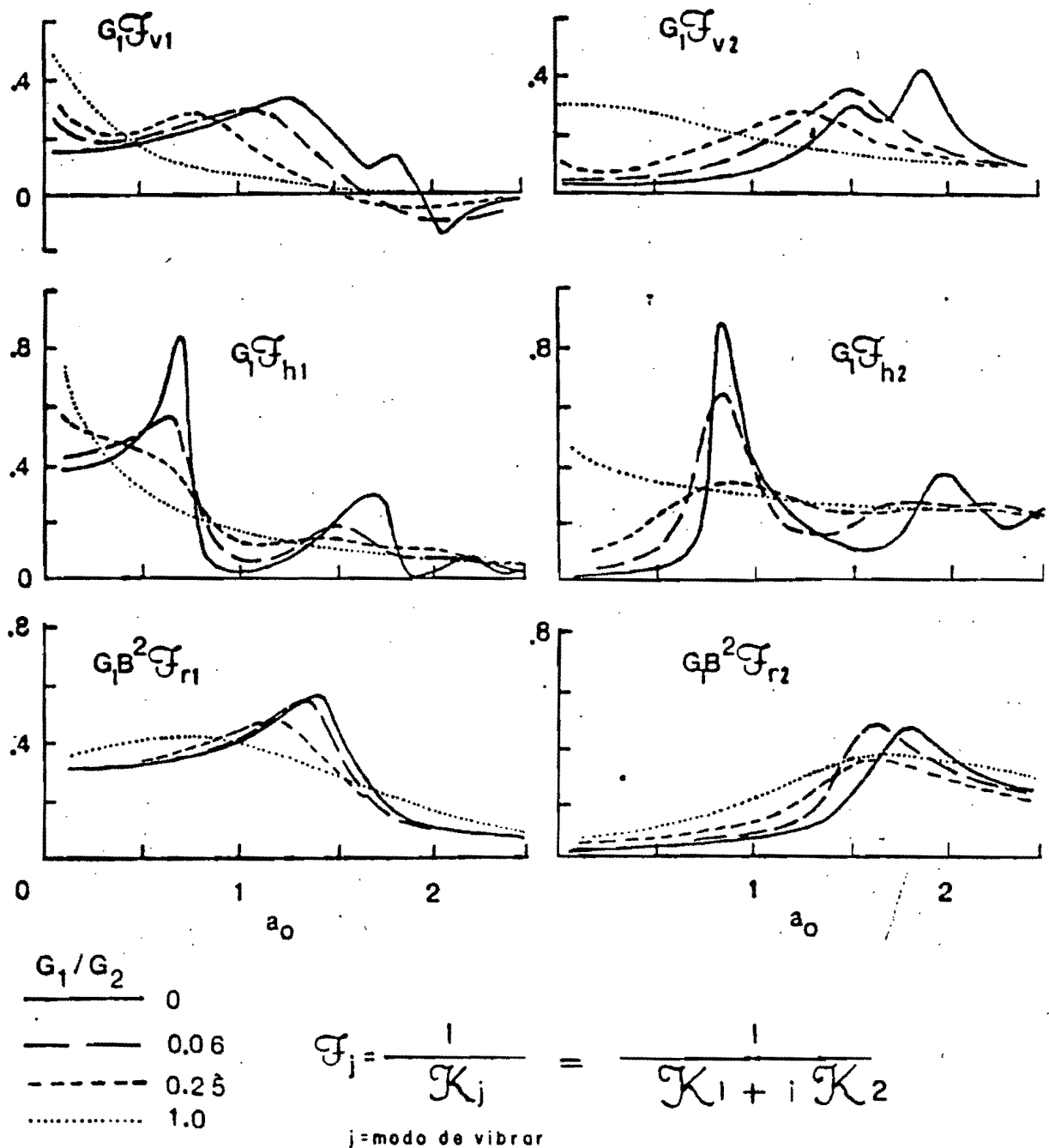


Fig. 3.d.17 EFECTO DE LA RELACION  $G_1/G_2$  EN LAS FUNCIONES DE IMPEDANCIA DE UNA ZAPATA CORRIDA APOYADA SOBRE ESTRATO SOBRE SEMIESPACIO ( $H/B = 2$ ,  $\nu = 0.40$ ,  $\xi = 0.05$ ) REF. 24.



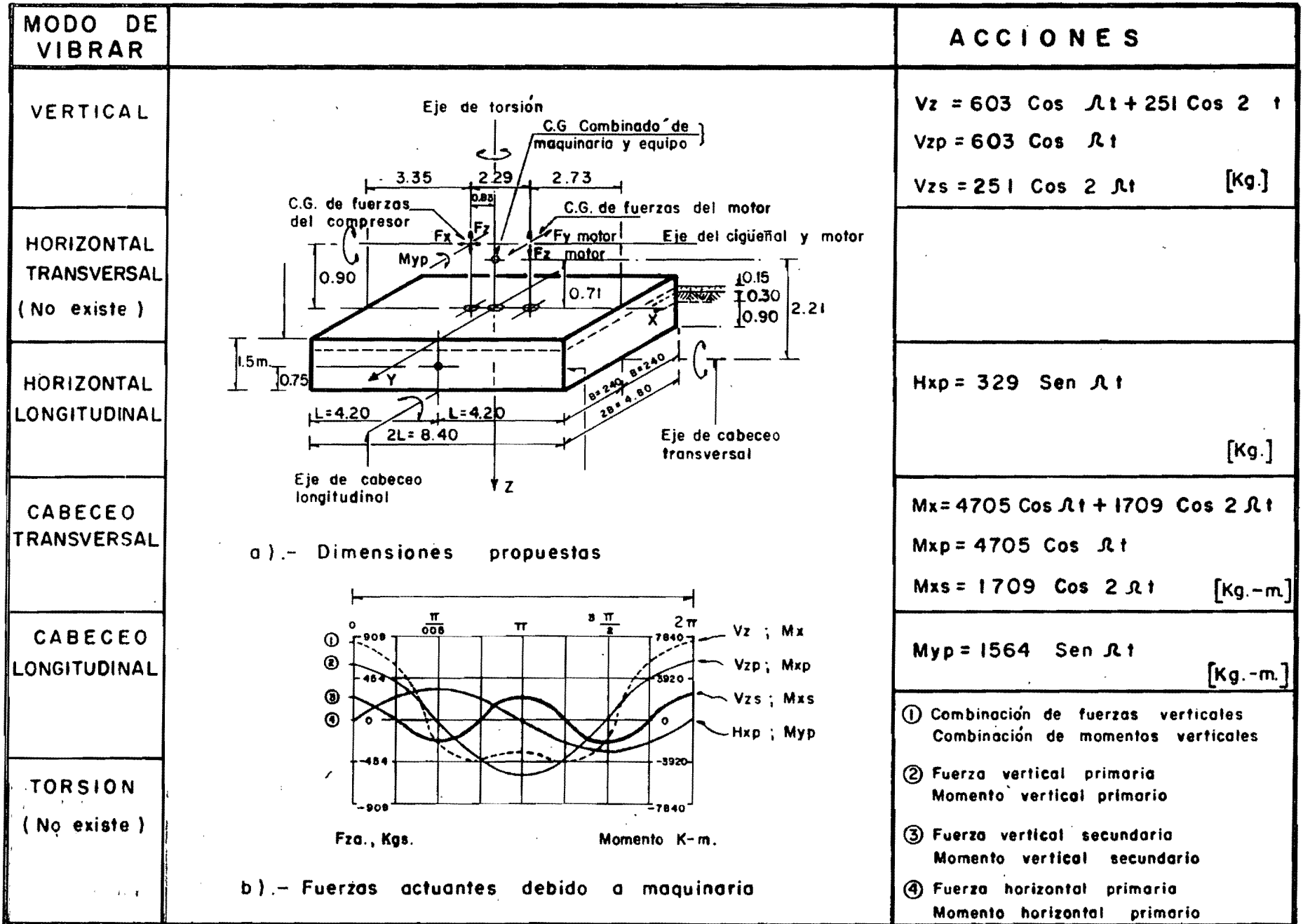


Fig. 4.1 ESQUEMA Y DATOS PARA EL PROBLEMA 1

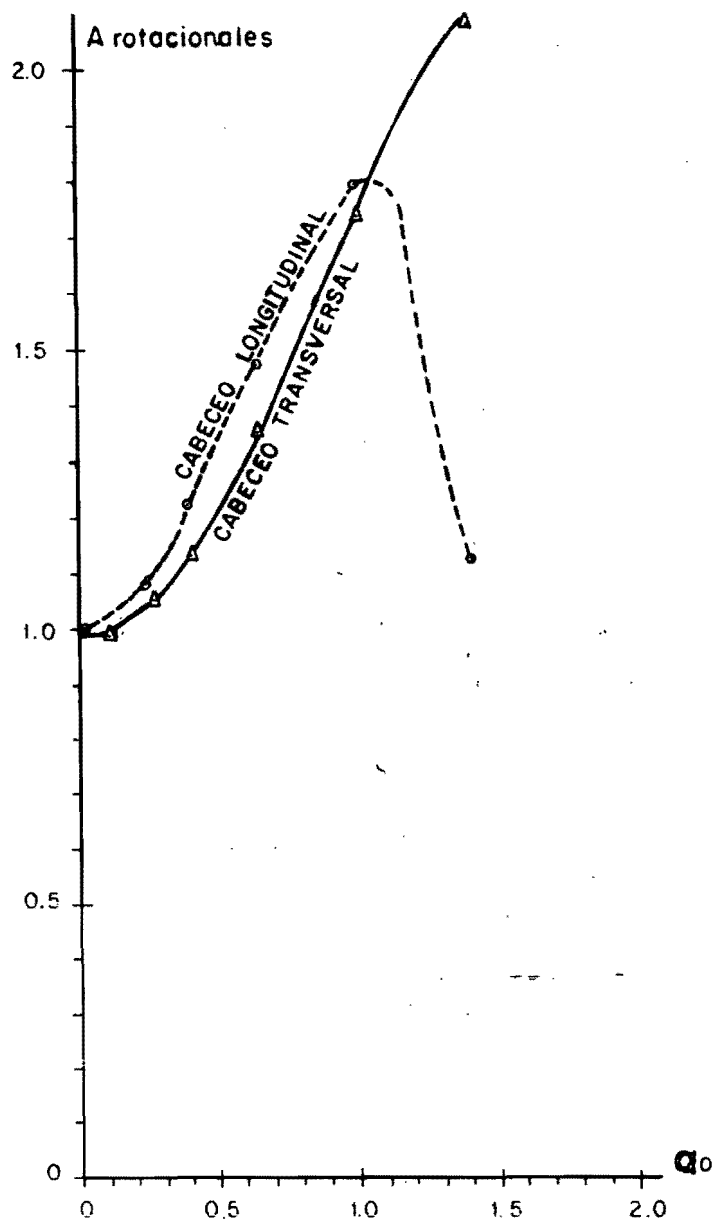
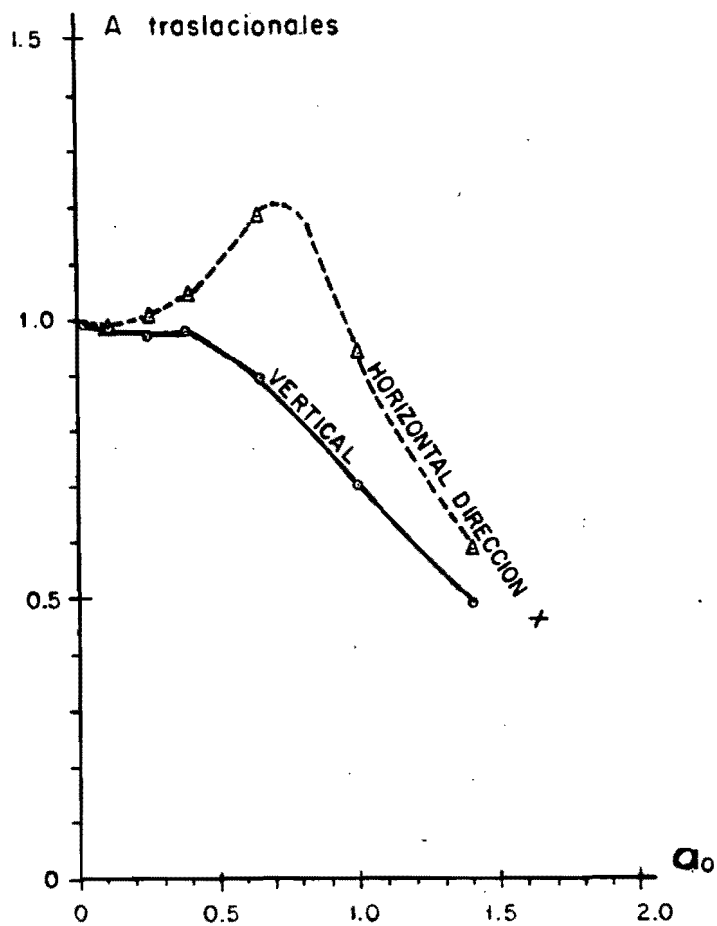


Fig. 4.2 RESPUESTA DE LA CIMENTACION DEL PROBLEMA 1 EN TERMINOS DEL FACTOR DE AMPLIFICACION (A)

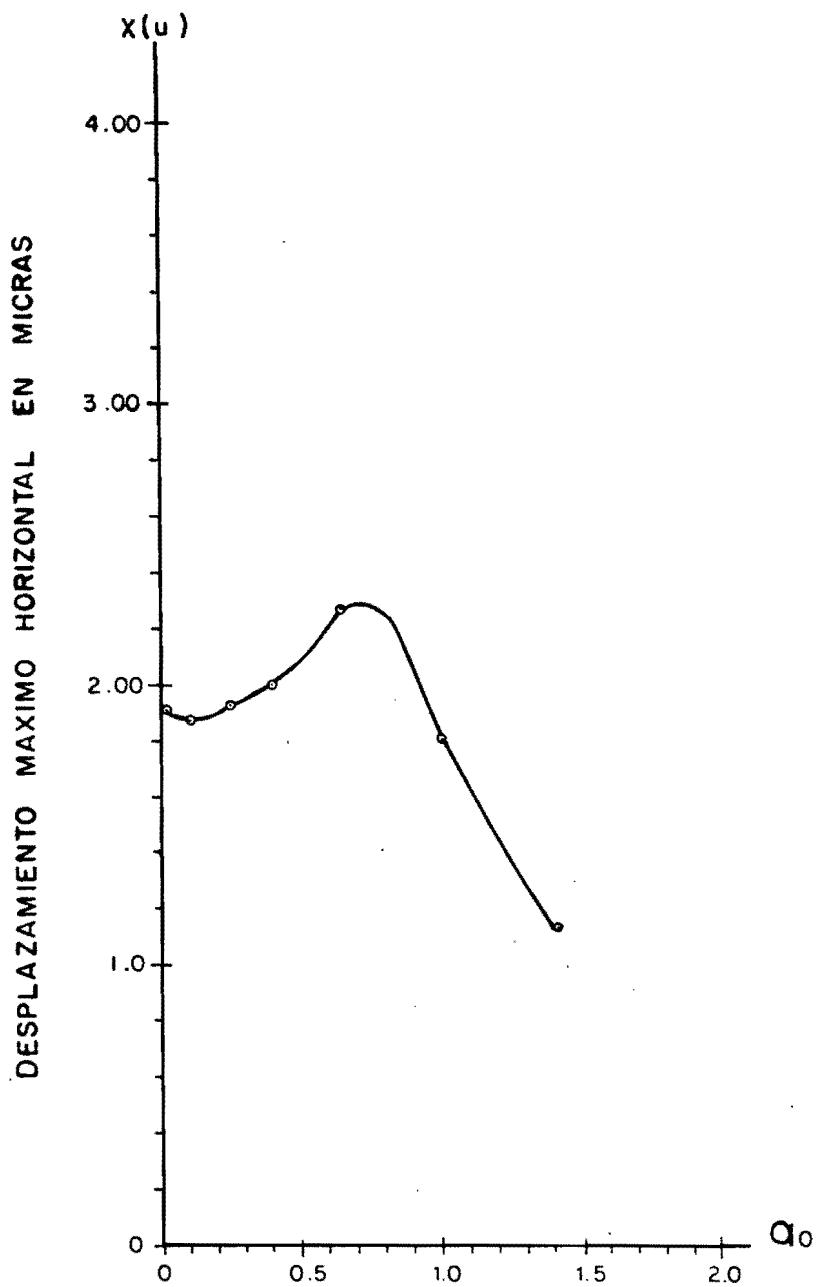
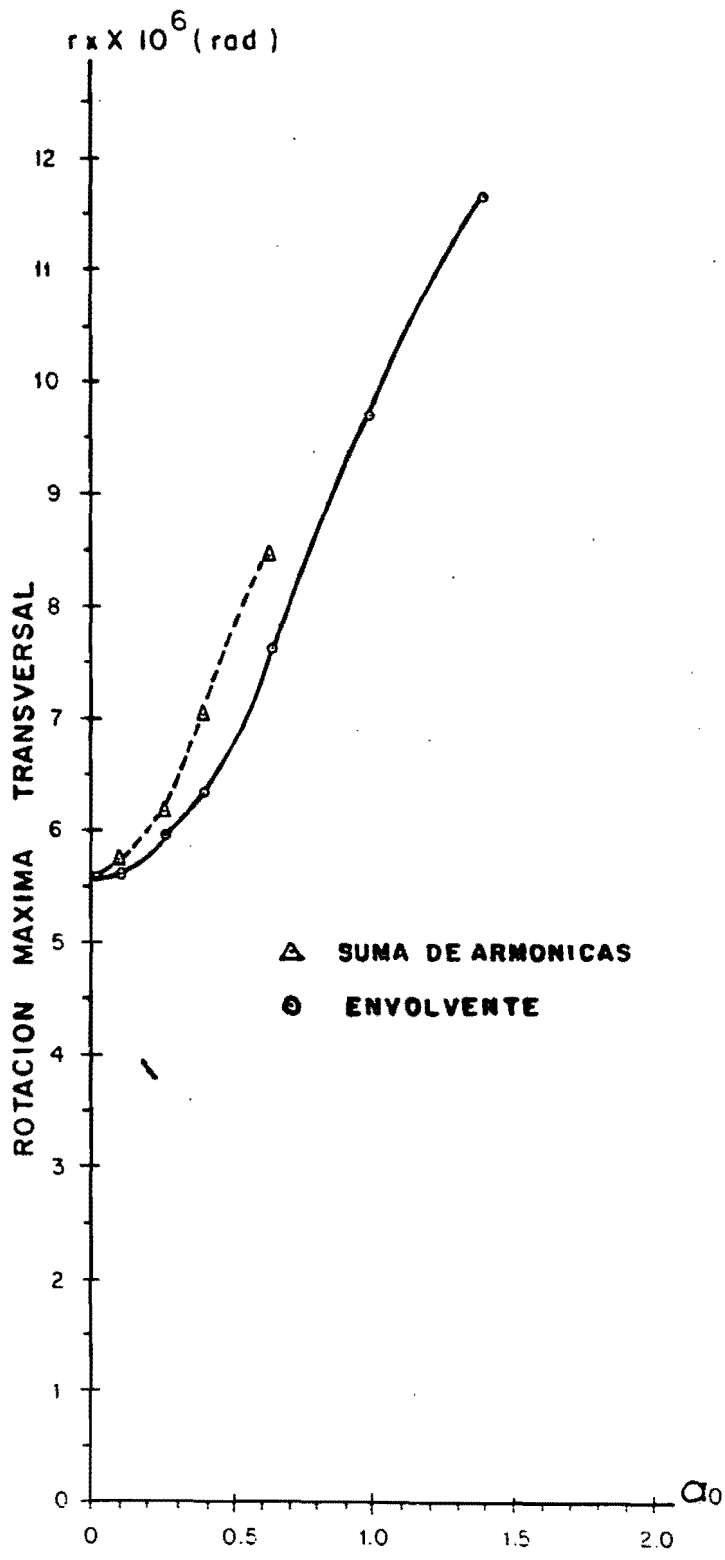
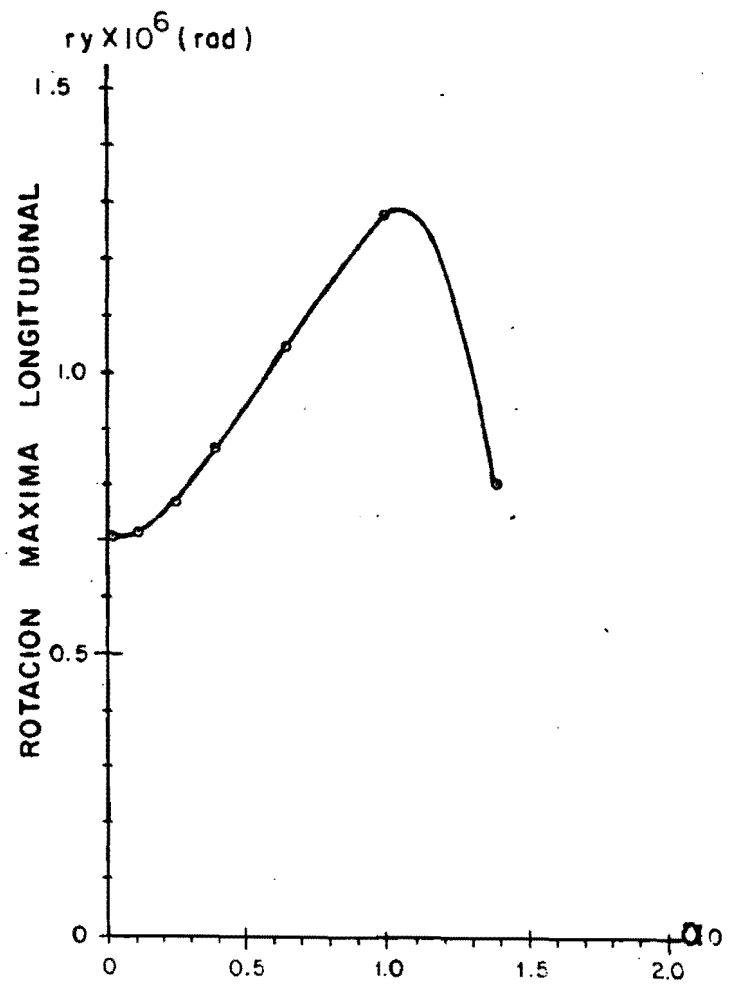


Fig. 4.3 - DESPLAZAMIENTOS MAXIMOS HORIZONTALES DIRECCION X



a).- Rotacion alrededor del eje X



b).- Rotacion alrededor del eje Y

Fig. 4.4 DESPLAZAMIENTOS MAXIMOS DE ROTACION

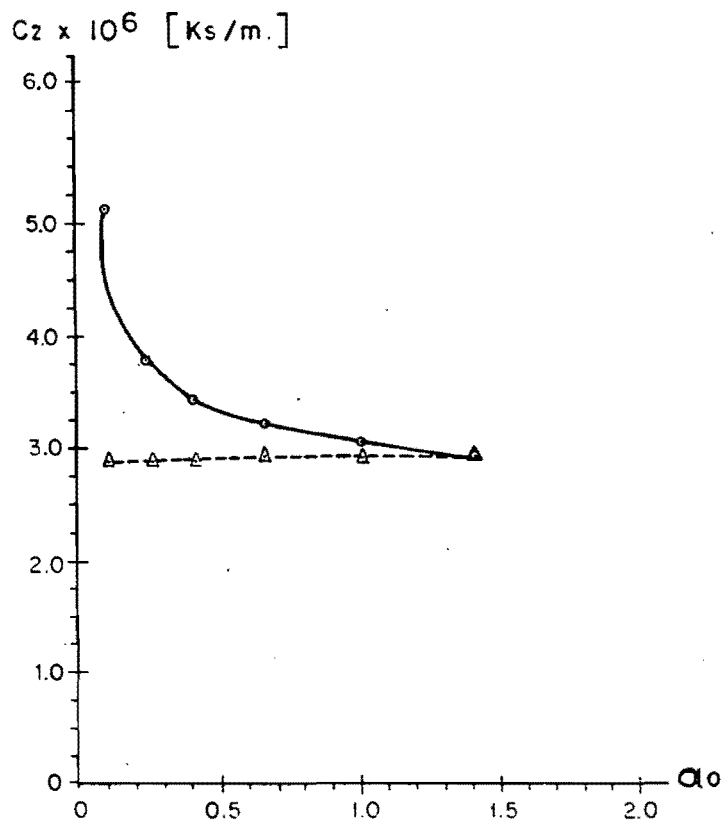
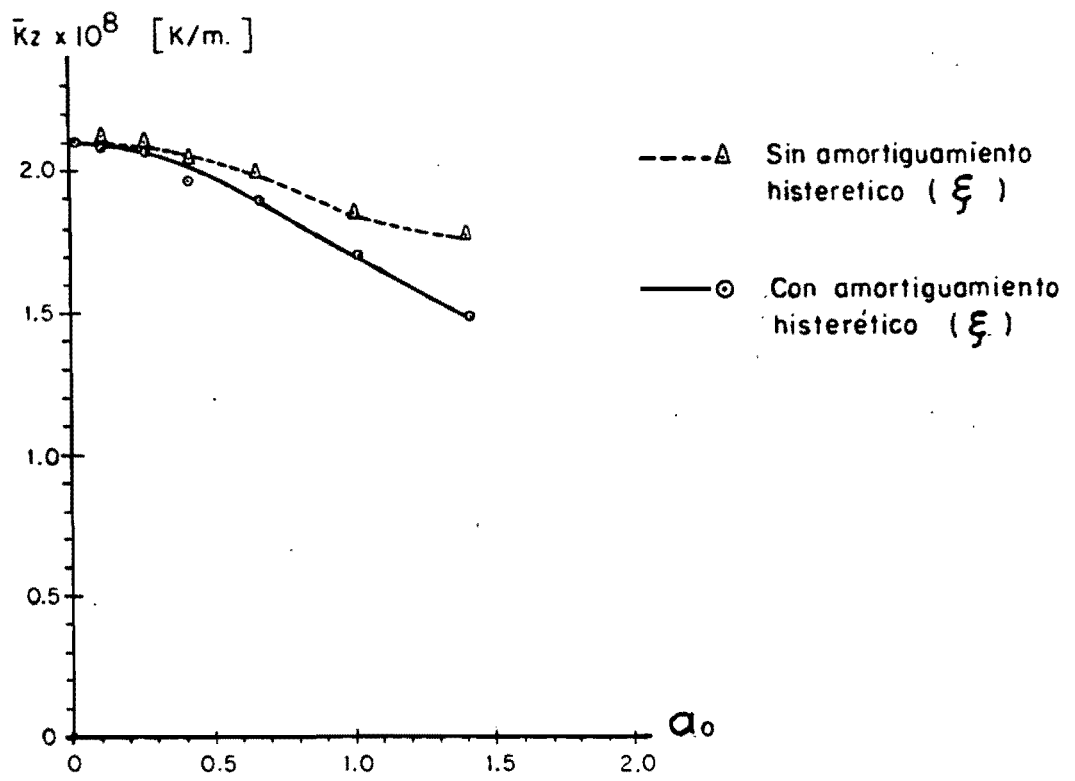


Fig. 4.5 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS VERTICALES

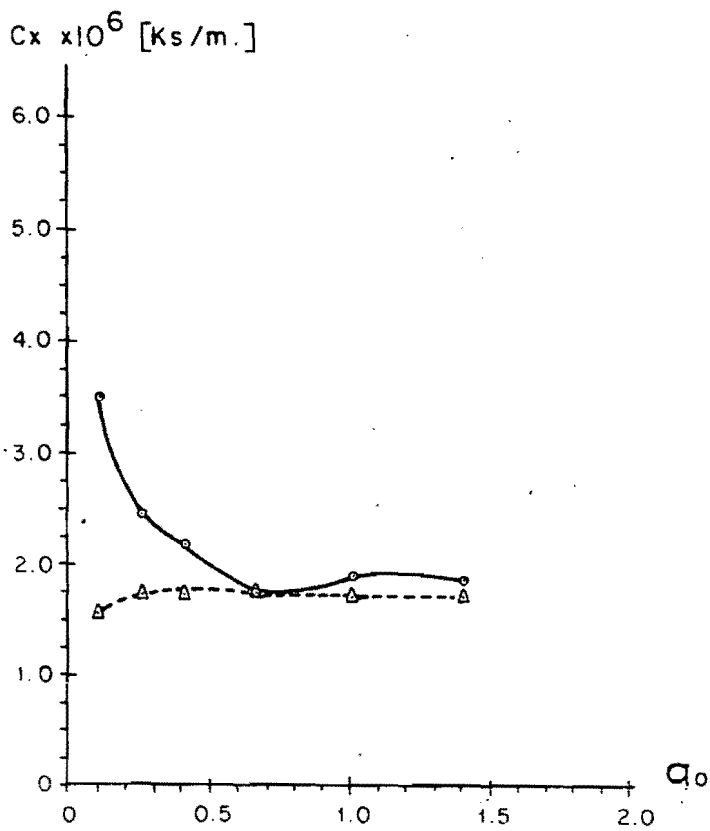
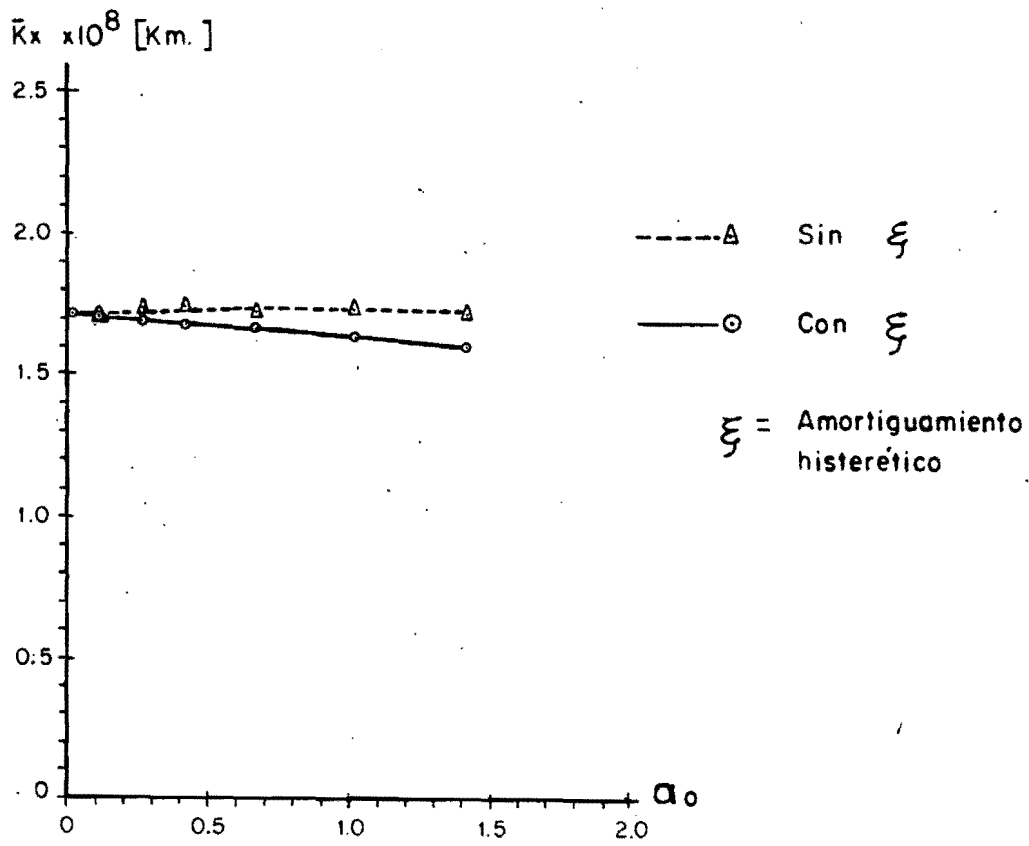


Fig. 4.6 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS HORIZONTALES DIRECCION X

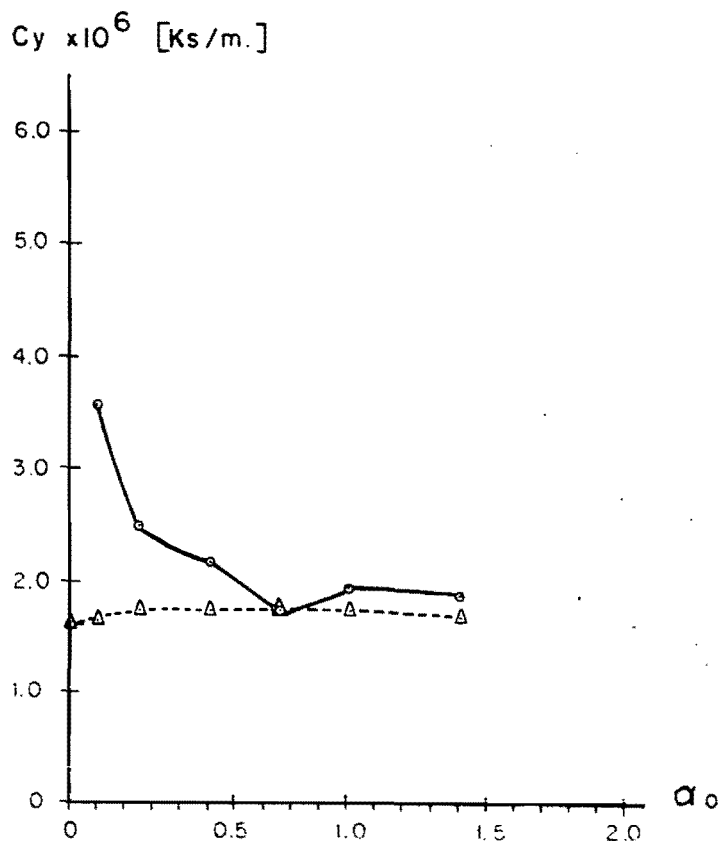
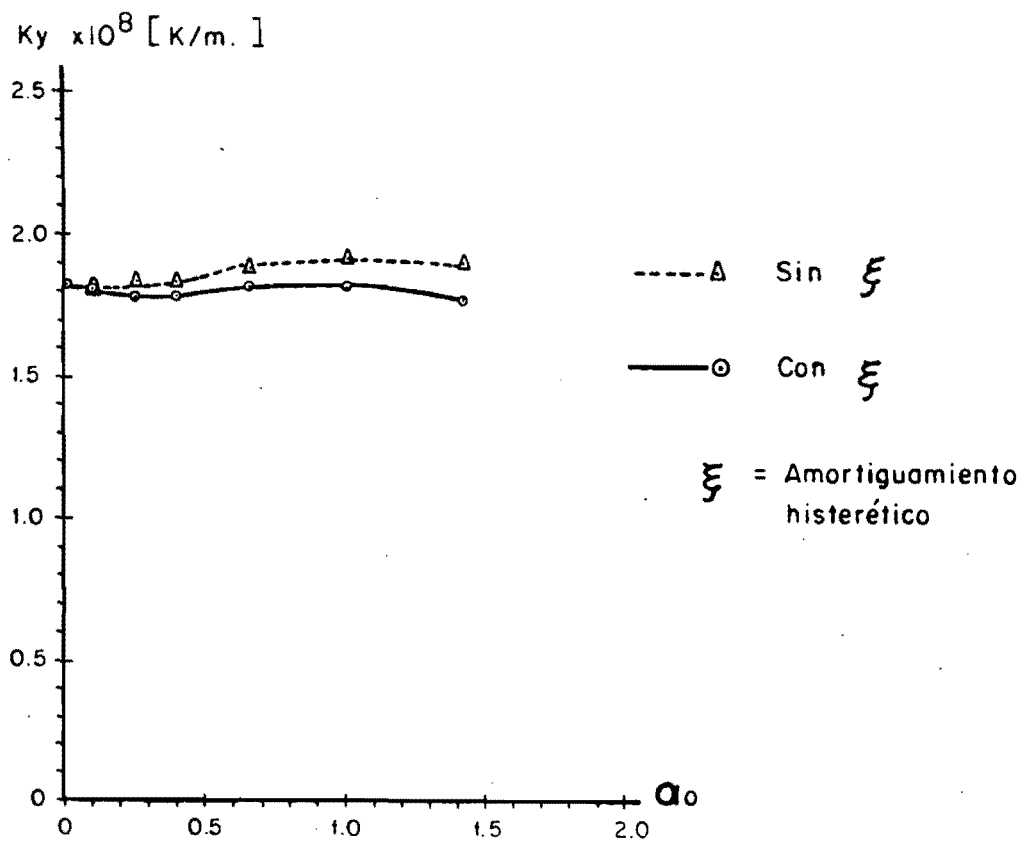
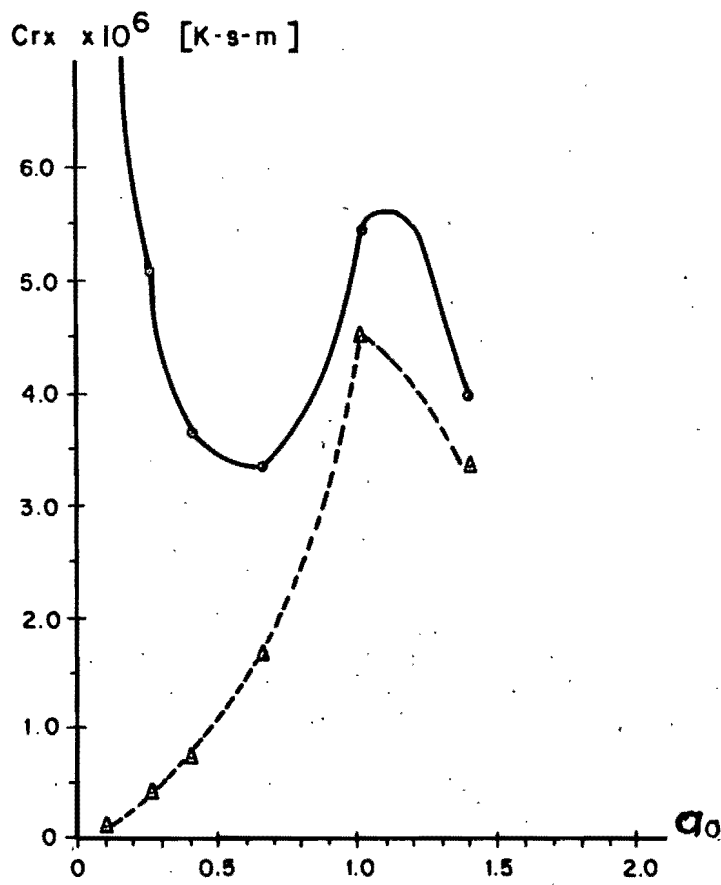
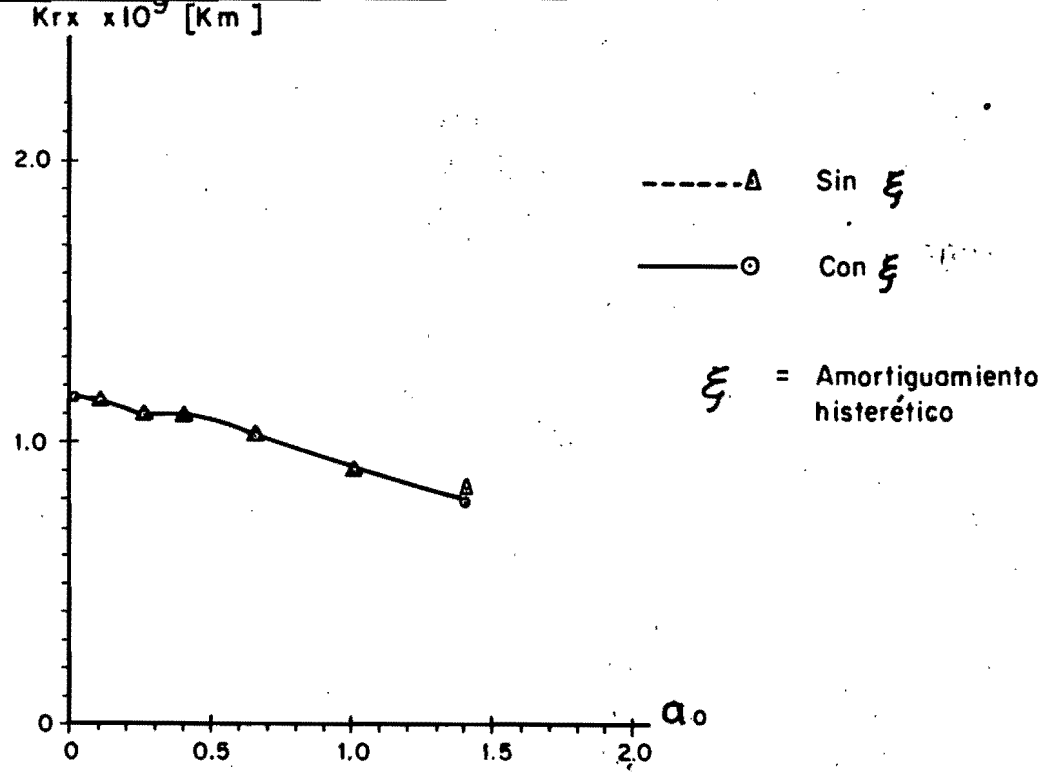


Fig. 4.7 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS HORIZONTALES DIRECCION Y



**Fig. 4.8 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS ROTACIONALES ALREDEDOR DEL EJE Y**



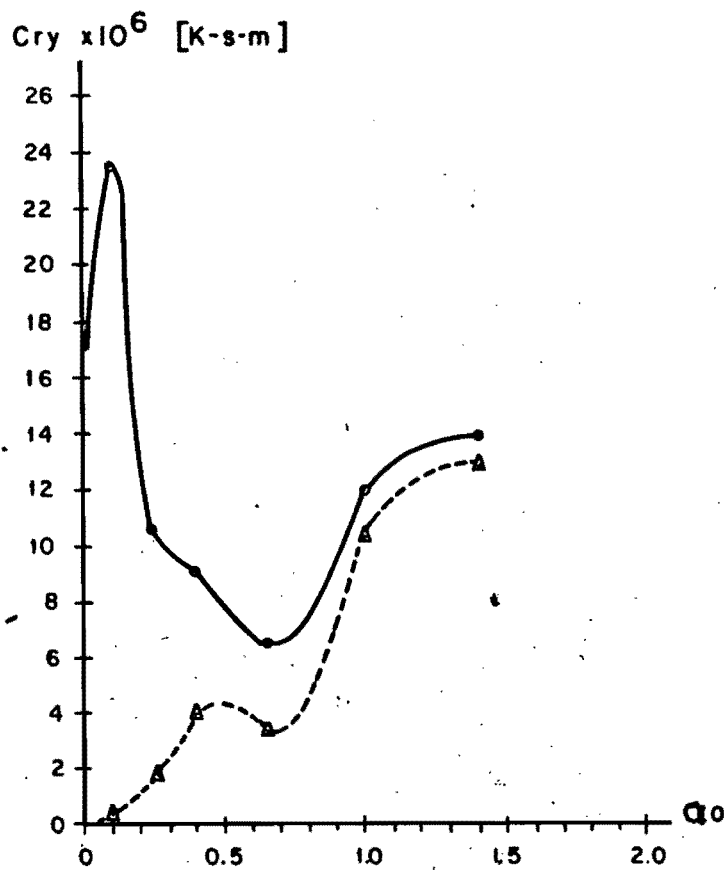
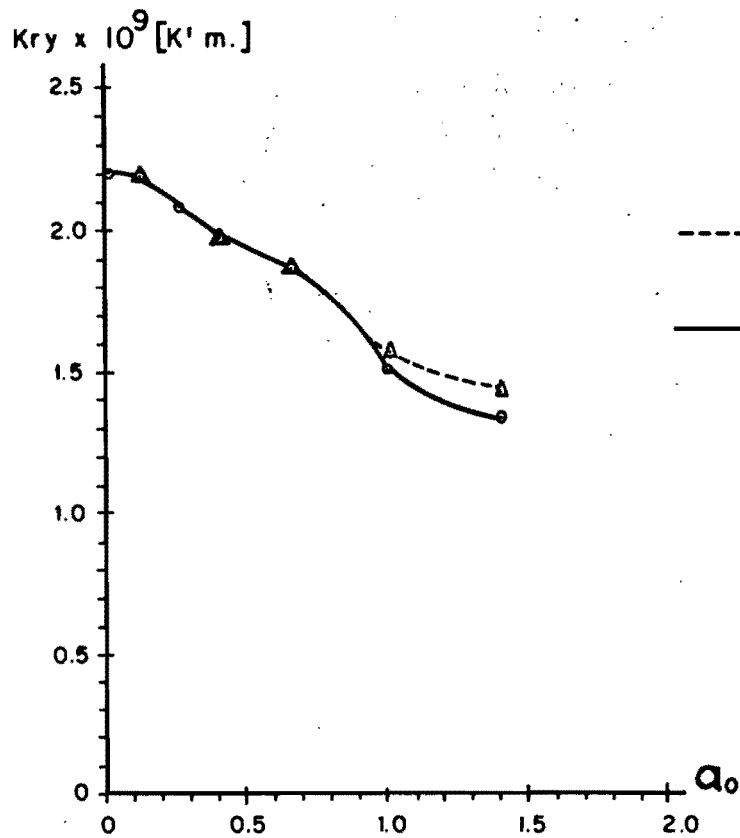


Fig. 4.9 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS ROTACIONALES ALREDEDOR DEL EJE Y

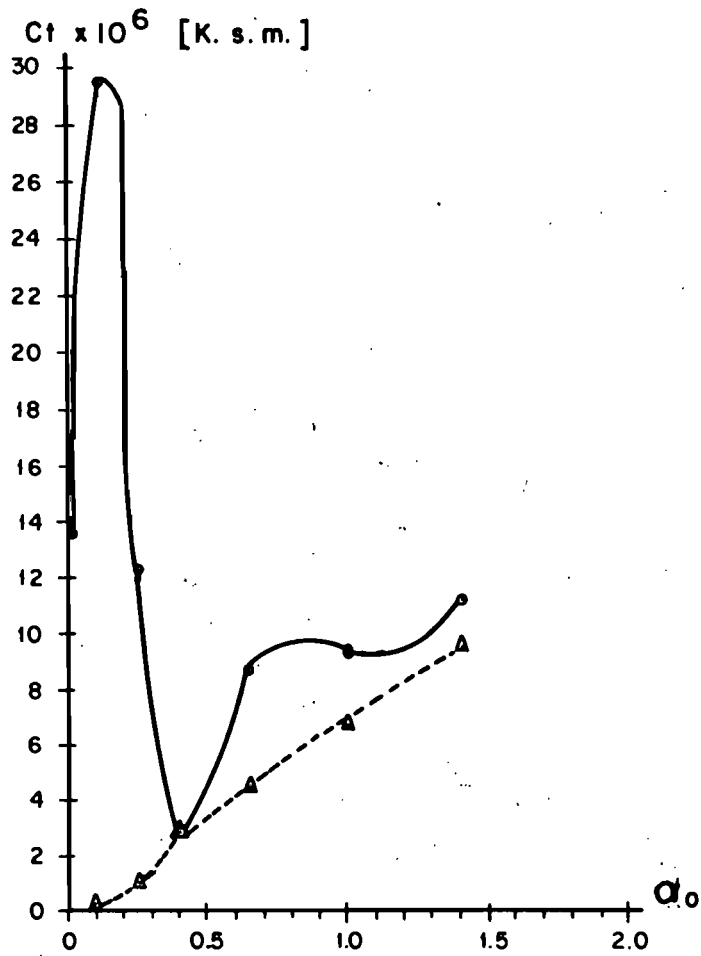
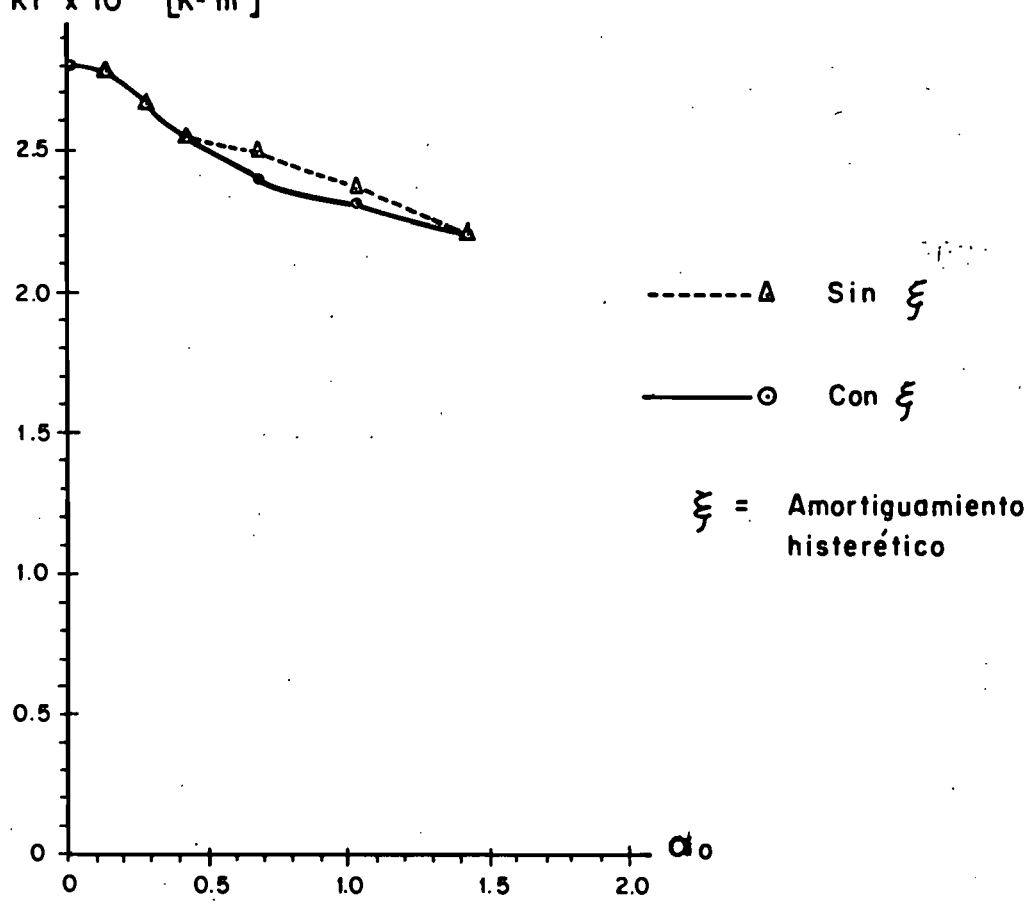


Fig. 4.10 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS DE TORSION

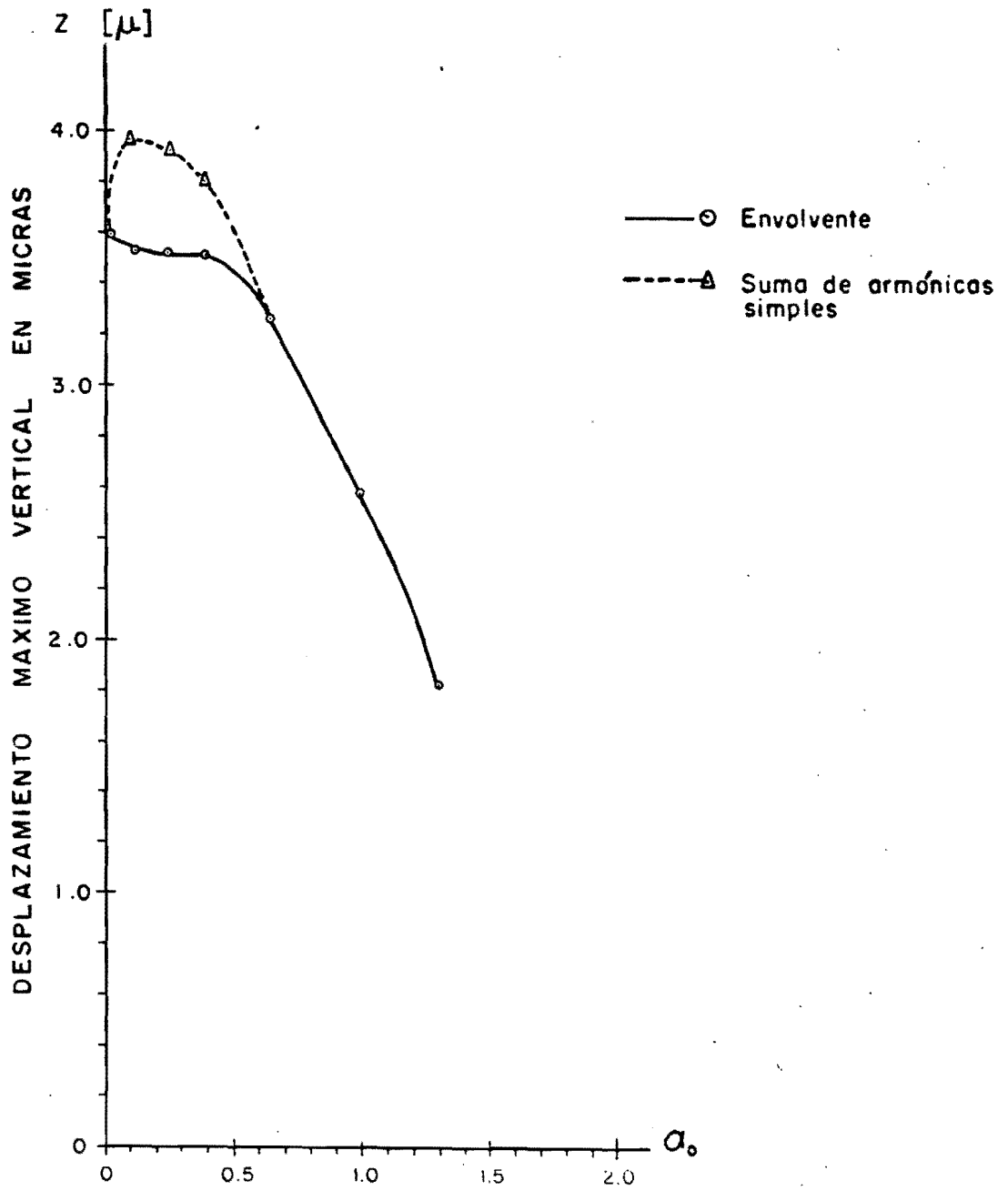
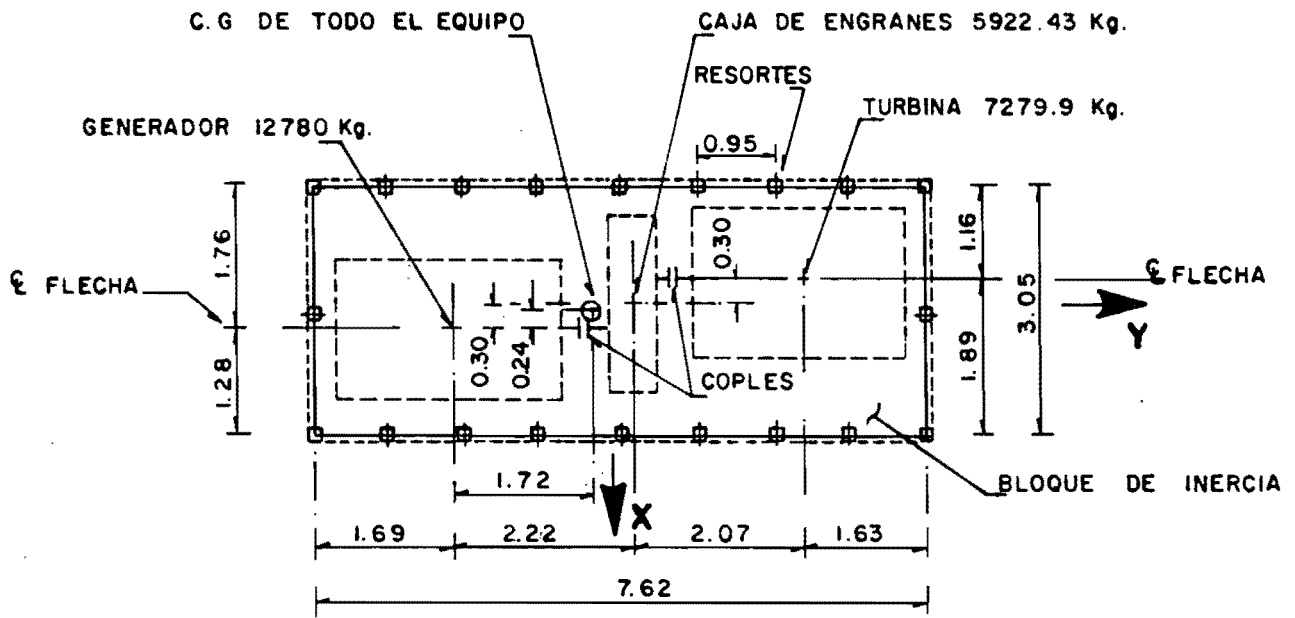
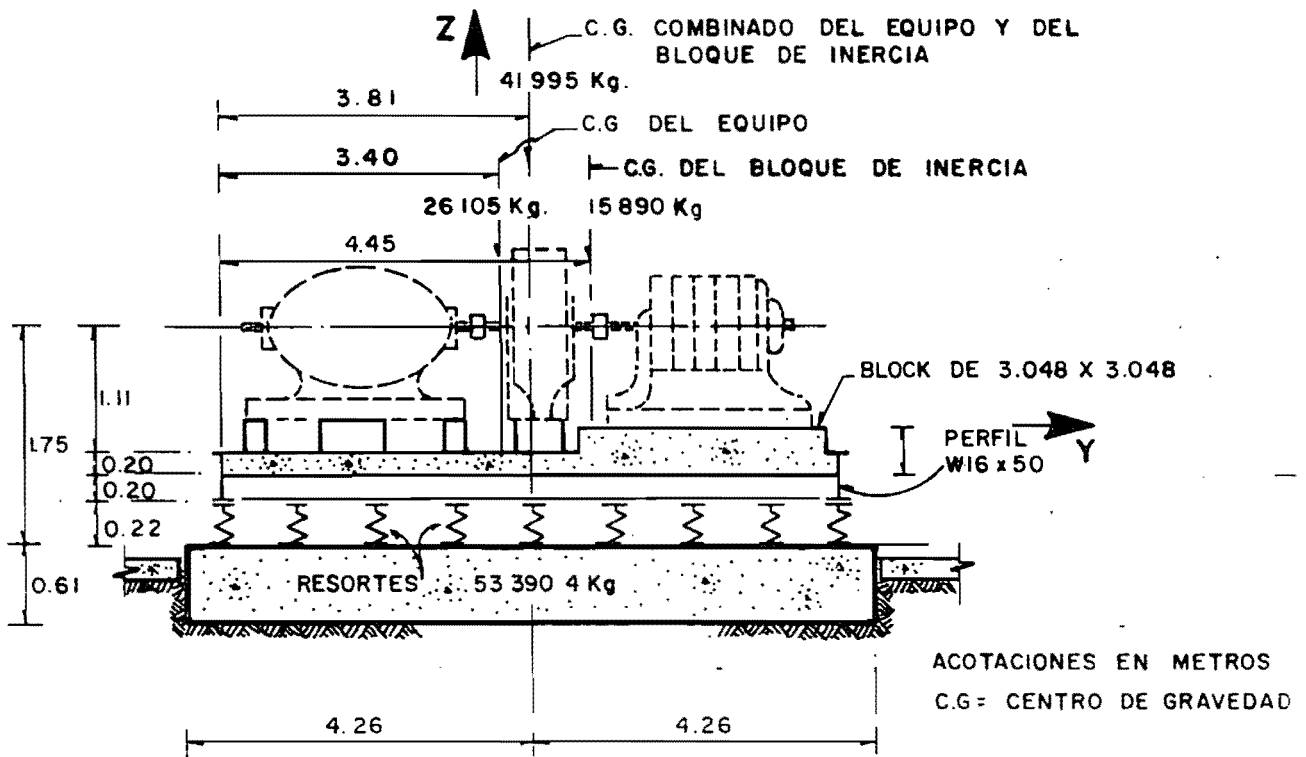


Fig. 4.11 DIFERENCIAS ENCONTRADAS POR EL ANALISIS MODO TRASLACION VERTICAL

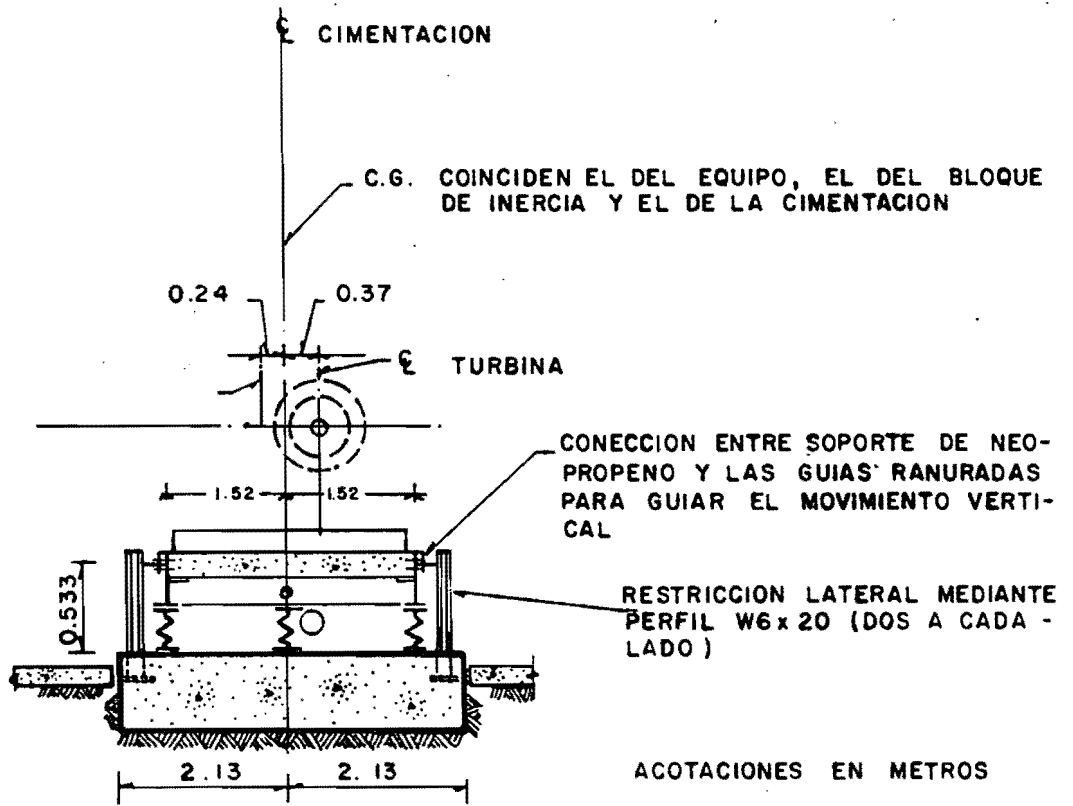


a).- Distribución en planta del equipo

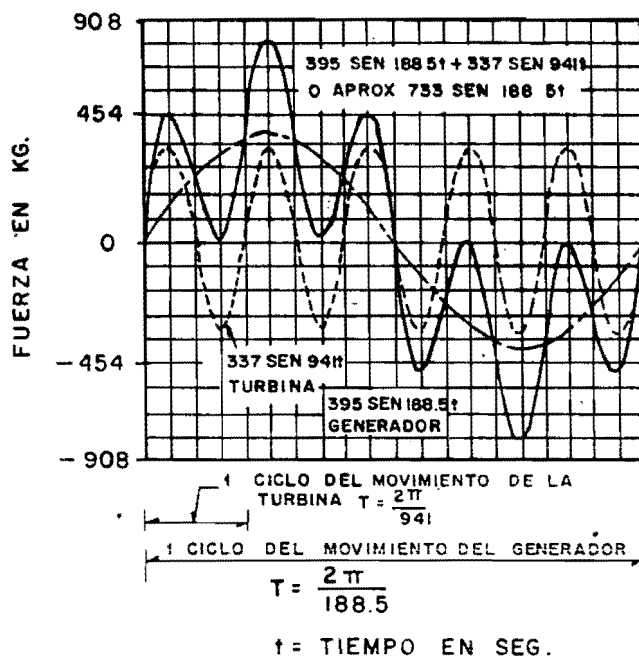


b).- Esquema de la cimentación de las cargas debido al equipo

Fig. 4.12 ESQUEMAS Y DATOS PARA EL PROBLEMA - 2



a).- Detalle de restricción lateral



b).- Fuerzas centrífugas desbalanceadas

Fig. 4.13 ESQUEMAS Y DATOS PARA EL PROBLEMA 2 (CONTINUACION)

TABLA 4.1

$\alpha_0 = 0648$

Frecuencia de operación

$R = 61.3$

MODO DE VIBRAR	PARAMETROS REQUERIDOS	FORMULAS USADAS PARA LOS CALCULOS	CALCULO DE RIGIDECES $\bar{K}(\xi) = \bar{K} - \Omega \bar{C}$	CALCULO DE AMORTIGUADORES $\bar{C}(\xi) = \bar{C} + \frac{2\xi \bar{K}}{\Omega}$	
VERTICAL	DATOS: $\gamma = 1876 \text{ k/m}^3$ $B = 2.4 \text{ m}$ $L = 4.2 \text{ m}$ $f = 9.75 \text{ Hz}$ $\xi = 0.05$ $\Omega = 2\pi f$ $\Omega = 61.3 \text{ rad/2}$	$S_1 = 0.73 + 1.54 \left(\frac{A}{4L}\right)^{0.75}$ $K_z$ POR INTERPOLACION EN LA FIGURA 3.d.12 $K_z = S_1 \frac{2LG}{1-\nu}$ $C_1 = \frac{3.4}{\nu(1-\nu)} \rho V_1 A$	$S_z = 0.73 + 1.54 (0.57)^{0.75} = 1.74$ $K_z = 1.74 (2 \times 4.2 \times 9.85 \text{ E}6) / (1-0.35) = 2.1 \text{ E}8 \text{ K/m}$ $k_z = 0.95 \Rightarrow \bar{K}_z = 0.95 \times 2.1 \text{ E}8 = 1.99 \text{ E}8 \text{ K/m}$ $R_z(\xi) = 1.99 \text{ E}8 - (61.3)(2.9 \text{ E}6)(0.05) = 1.9 \text{ E}8 \text{ K/m}$	$V_{ly} = (3.4) 227 / (3.1416)(1-0.35) = 378 \text{ m/s}$ $\hat{C}_z = 1$ $\bar{C}_z = (1)(378)(191.23)(40.22) = 2.9 \text{ E}6 \frac{\text{Ks}}{\text{m}}$ $\bar{C}_z(\xi) = 2.9 \text{ E}6 + \left(\frac{2(1.99 \text{ E}8)}{61.3}\right) 0.05 = 3.2 \text{ E}6 \frac{\text{Ks}}{\text{m}}$	
HORIZONTAL TRANSVERSAL	CALCULADOS	$S_1 = 4.5 \left(\frac{A}{4L}\right)^{0.38}$ $k_y$ POR INTERPOLACION EN LA FIGURA 3.d.13 $K_y = S_1 \frac{2LG}{2-\nu}$ $C_1 = \rho V_1 A$	$S_y = 4.5 (0.57)^{0.38} = 3.63$ $K_y = 3.63 (2 \times 4.2 \times 9.85 \text{ E}6) / (2-0.35) = 1.82 \text{ E}8 \text{ K/m}$ $k_y = 1.03 \Rightarrow \bar{K}_y = (1.03)(1.82 \text{ E}8) = 1.87 \text{ E}8 \text{ K/m}$ $\bar{K}_y(\xi) = 1.87 \text{ E}8 - 61.3(1.74 \text{ E}6)(0.05) = 1.81 \text{ E}8 \text{ K/m}$	$\hat{C}_y = 1$ $\bar{C}_y = (1)(191)(227)(40.22) = 1.74 \text{ E}6 \frac{\text{Ks}}{\text{m}}$ $\bar{C}_y(\xi) = 1.74 \text{ E}6 + \frac{2(1.87 \text{ E}8)}{61.3} 0.05 = 1.74 \text{ E}6 \frac{\text{Ks}}{\text{m}}$	
HORIZONTAL LONGITUDINAL	$A = 4LB$ $I_x = \frac{4}{3} LB^3$ $I_y = \frac{4}{3} L^3 B$	$A = 40.22 \text{ m}$ $I_x = 77.4 \text{ m}^4$ $I_y = 237 \text{ m}^4$	$K_x = K_1 - \frac{0.21LG}{0.75-\nu} \left(1 - \frac{B}{L}\right)$ $k_x = 1$ $C_1 = \rho V_1 A$ $C_1 = 2$	$K_x = 1.82 \text{ E}8 - \frac{0.21(42)(9.85 \text{ E}6)}{(0.75-0.35)} (1-0.57) = 1.72 \text{ E}8 \text{ K/m}$ $\bar{K}_x = K_x \Rightarrow \bar{K}_x = 1.72 \text{ E}8 \text{ K/m}$ $\bar{K}_x(\xi) = 1.72 \text{ E}8 - 61.3(1.74 \text{ E}6) 0.05 = 1.66 \text{ E}8 \text{ K/m}$	$C_x = (1)(191)(227)(40.22) = 1.74 \text{ E}6 \frac{\text{Ks}}{\text{m}}$ $\hat{C}_y = \hat{C}_x = 1$ $\bar{C}_x(\xi) = 1.74 \text{ E}6 + \frac{2(1.72 \text{ E}8)}{61.3} 0.05 = 1.74 \text{ E}6 \frac{\text{Ks}}{\text{m}}$
CABECEO TRANSVERSAL	$J = \frac{4}{3} LB(L^2 + B^2)$ $\frac{A}{4L^2} = \frac{B}{L} = 0.57$ $\frac{A}{B} = 1.75$	$J = 314.5 \text{ m}^4$ $J = 314.5 \text{ m}^4$	$S_1 = 3.2 \text{ for } \frac{B}{L} > 0.4$ $k_{rx}$ POR INTERPOLACION EN LA FIGURA 3.d.14 G $K_{rx} = S_1 \frac{G}{1-\nu} (I_x)^{0.2}$ $C_1 = \frac{3.4}{\nu(1-\nu)} \rho V_1 I_x$	$S_{rx} = 3.2$ $K_{rx} = 3.2 \left(\frac{9.8 \text{ E}6}{1-0.35}\right) (77.4)^{0.2} = 1.27 \text{ E}9 \text{ K-m}$ $k_{rx} = 0.9 \Rightarrow \bar{K}_{rx} = (0.9)(1.03 \text{ E}9) = 1.03 \text{ E}9 \text{ K-m}$ $\bar{K}_{rx}(\xi) = 1.03 \text{ E}9 - 61.3(1.67 \text{ E}6) 0.05 = 1.02 \text{ E}9 \text{ K-m}$	$C_{rx} = (378)(191.23) 77.4 = 5.6 \text{ E}6 \text{ Ksm}$ $\hat{C}_{rx} = 0.3 \Rightarrow \bar{C}_{rx} = 1.67 \text{ E}6 \text{ Ksm}$ $\bar{C}_{rx}(\xi) = 1.67 \text{ E}6 + \frac{2(1.03 \text{ E}9)}{61.3} 0.05 = 3.35 \text{ E}6 \text{ Ksm}$
CABECEO LONGITUDINAL	$P = \frac{8}{9}$ $V_s = \left(\frac{G}{P}\right)^{1/2}$	$P = 191.23 \frac{\text{UTN}}{\text{m}^3}$ $V_s = 227 \text{ m/2}$	$S_1 = 3.2$ $k_{ry}$ POR INTERPOLACION EN LA FIGURA 3.d.14 G $K_{ry} = S_1 \frac{G}{1-\nu} (I_y)^{0.2}$ $C_1 = \frac{3.4}{\nu(1-\nu)} \rho V_1 I_y$	$S_{ry} = 3.2$ $K_{ry} = 3.2 \left(\frac{9.8}{1-0.35}\right) (237)^{0.2} = 2.2 \text{ E}9 \text{ K-m}$ $k_{ry} = 0.85 \Rightarrow \bar{K}_{ry} = (0.85)(2.2 \text{ E}9) = 1.88 \text{ E}9 \text{ K-m}$ $\bar{K}_{ry}(\xi) = 1.88 \text{ E}9 - 61.3(3.42 \text{ E}6) 0.05 = 1.87 \text{ E}9 \text{ K-m}$	$C_{ry} = (378)(191.23)(237) = 17.13 \text{ E}6 \text{ K-m}$ $\hat{C}_{ry} = 0.2 \Rightarrow \bar{C}_{ry} = \hat{C}_{ry} = 3.42 \text{ E}6 \text{ Ksm}$ $\bar{C}_{ry}(\xi) = 3.42 \text{ E}6 + \frac{2(1.88 \text{ E}9)}{61.3} 0.05 = 6.5 \text{ E}6 \text{ Ksm}$
TORSION	$\alpha_0 = \frac{\Omega B}{V_s}$	$\alpha_0 = 0.648$	$K_t = 5.6(1)^{0.2}$ $S_1 = 3.8 + 10.7 \left(1 - \frac{B}{L}\right)^{0.75}$ $k_t$ POR INTERPOLACION EN LA FIGURA 3.d.14.D $C_1 = \rho V_1 I$	$S_t = 3.8 + 10.7 (1-0.57)^{0.75} = 3.8$ $K_t = 3.8 (9.8 \text{ E}6) (314.5)^{0.2} = 2.78 \text{ E}9 \text{ K-m}$ $k_t = 0.9 \Rightarrow \bar{K}_t = 0.9 (2.78 \text{ E}9) = 2.5 \text{ E}9 \text{ K-m}$ $\bar{K}_t(\xi) = 2.5 \text{ E}9 - 61.3 (4.6 \text{ E}6) 0.05 = 2.4 \text{ E}9$	$C_t = (191)(227)(314) = 13.6 \text{ E}6 \text{ Ksm}$ $\hat{C}_t = 0.34 \Rightarrow \bar{C}_t = \hat{C}_t = 4.6 \text{ E}6 \text{ Ksm}$ $\bar{C}_t(\xi) = 4.6 \text{ E}6 + \frac{2(2.6 \text{ E}9)}{61.3} 0.05 = 8.7 \text{ E}6 \text{ Ksm}$
EXPRESIONES PARA INCORPORAR EL AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO			$\bar{K}(\xi) = \bar{K} - 2\xi \bar{C}$	$\bar{C}(\xi) = \bar{C} + \frac{2\xi \bar{K}}{\Omega}$	

$a_0 = 0.648$

$\Omega = 61.3 \text{ rad/s}$

$M = 17693 \text{ UTM}$

$I_{xx} = 53129.7 \text{ K-s}^2\text{m}$ ,  $I_{yy} = 112600.5 \text{ K-s}^2\text{m}$ .

MODO DE VIBRAR	$(\Omega) = \sqrt{K_1 - M\Omega^2}^2 + K_2^2$	$K_i(\Omega) = \bar{K}_i(\xi) =$	$K_2(\Omega) = \bar{c}_i(\xi)\Omega$
VERTICAL	$K_z(\Omega) = 2.31\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_z(\Omega) = 1.9\text{E}8 \text{ K/m}$ $K - M\Omega^2 = 1.23\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_{2z}(\Omega) = 3.2\text{E}6(61.3) = 1.96\text{E}8 \text{ K/m}$
HORIZONTAL TRANSVERSAL	$K_y(\Omega) = 1.56\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_{ly}(\Omega) = 1.81\text{E}8 \text{ K/m}$ $K - M\Omega^2 = 1.145\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_{2y}(\Omega) = 1.74\text{E}6(61.3) = 1.06\text{E}8 \text{ K/m}$
HORIZONTAL LONGITUDINAL	$K_x(\Omega) = 1.45\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_{lx}(\Omega) = 1.66\text{E}8 \text{ K/m}$ $- M\Omega^2 = 0.99\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_{2x}(\Omega) = 1.74\text{E}6(61.3) = 1.06\text{E}8 \text{ K/m}$
CABECEO TRANSVERSAL	$K_{rx}(\Omega) = 0.84\text{E}9 \text{ K/m}$	$K_{lrx}(\Omega) = 1.02\text{E}9 \text{ K/m}$ $K - I_x\Omega^2 = 0.82\text{E}9 \text{ K/m}$	$K_{2rx}(\Omega) = 3.35\text{E}6(61.3) = 0.205\text{E}9 \text{ K/m}$
CABECEO LONGITUDINAL	$K_{ry}(\Omega) = 1.49\text{E}9 \text{ K/m}$	$K_{lry}(\Omega) = 1.87\text{E}9 \text{ K-m}$ $K - I_y\Omega^2 = 1.44\text{E}9 \text{ K-m}$	$K_{2ry}(\Omega) = 6.5\text{E}6(61.3) = 0.4\text{E}9 \text{ K-m}$
TORSION	$K_t(\Omega) =$	$K_{lt}(\Omega) = 2.4\text{E}9 \text{ K-m}$ $K - J\Omega^2 =$	$K_{2t}(\Omega) = 8.7\text{E}6(61.3) = 0.53\text{E}9 \text{ K-m}$

**TABLA 4.3.**—Resumen de resultados para el problema 1, corresponden a la frecuencia de operación primaria de la máquina,  $\omega = 0.65$ .

modo de vibrar	acción envolvente	suma de armónicas simples	referencia 8
vertical	3.26 $\mu$	3.26 $\mu$	2.6 $\mu$
horizontal xx	2.27 $\mu$	-----	1.48 $\mu$
cabeceo xx	7.63E-6 rad	8.49E-6 rad.	5.04E-6 rad.
cabeceo yy	1.05E-6 rad	-----	0.84E-6 rad.

**TABLA 4.4.**—Resumen de resultados para el problema 2

desplazamiento vertical	acción envolvente	suma de armónicas simples	referencia 8
máquina+bloque de inercia.	4.91 $\mu$	2.73 $\mu$	2.73 $\mu$
cimentación	0.01 $\mu$	0.03 $\mu$	se considera nula.

$\mu$  = micras



## **ANEXO A .-CRITERIOS DE DISEÑO, DE SEGURIDAD Y DE SERVICIO DE LA MAQUINARIA**

Entre otros criterios de diseño los más comunes son ; la revisión por capacidad de carga del suelo de cimentación así como las deformaciones estáticas inducidas por las cargas estáticas, comparación con estados límite de comportamiento dinámico en función de amplitudes máximas, velocidades y aceleraciones máximas, factor de amplificación máximo, posibilidad de resonancia y factor de transmisibilidad máxima, revisión de todos los modos posibles de vibración incluyendo los acoplados, consideraciones de falla por fatiga de la máquina, estructura o conexiones y a consideraciones de efectos biológicos y psicológicos en la gente, sensibilidad de equipos, daños a estructuras y la posibilidad de resonancia de componentes estructurales individuales.

En las figuras A.1, A.2, y A.3 se muestran algunos de estos criterios y como guía en la tabla A.1 se resumen los mismos sin que todos sean aplicables a un problema particular.

Existen consideraciones especiales relativas a los criterios de diseño que es conveniente mencionar y son las siguientes :

### **A.1.-DISEÑO CONTRA DESBALANCEO.**

Aún y cuando el desbalanceo trate de corregirse siempre existirá un desbalanceo residual que es producto de lo poco económico y poco práctico llegar al balanceo ideal. En vista de lo anterior la ISO (International Standards Organisation) ha propuesto ciertas recomendaciones en forma de tablas de "calidad de balanceo de cuerpos rígidos que rotan ", estas recomendaciones se refieren al desbalanceo residual permisible para la máxima frecuencia de rotación de un rotor y asocia varios tipos de rotores representativos con rangos de calidad recomendados.

Las curvas de la figura A.2 muestran el desbalanceo residual aceptable propuesto como función de la frecuencia de rotación de rotor.

### **A.2.-RESPUESTA DEL HOMBRE A LAS VIBRACIONES.**

Tres criterios basados en el comportamiento biológico y psicológico del hombre a las vibraciones son los que rigen los requisitos de seguridad y de servicio de las máquinas vibratorias; uno es el límite superior, y consiste en un criterio aceptable contra el riesgo de perturbar la salud, otro corresponde al buen comportamiento del hombre y generalmente se toma como el doble del límite correspondiente al de fatiga y disminución de la eficiencia, otro criterio es la reducción del confort. En la figura A.3 se muestran algunos de estos criterios para el caso de la respuesta del hombre a los impactos.

## TABLA A-1<sup>1</sup>

- I.-Consideraciones funcionales de instalación.
  - A.-Modos de falla y objetivos de diseño.
  - B.-Causas de falla.
  - C.-Medio ambiente en que se desarrolla la operación total.
  - D.-Costos iniciales en relación con A.
  - E.-Costos de mantenimiento.
  - F.-Costos de reemplazo.
  
- II.-Consideraciones de diseño para instalación.
  - A.-Capacidad de carga estática admisible.
  - B.-Asentamiento estático.
  - C.-Capacidad de carga estática más dinámica.
  - D.-Asentamiento estático más dinámico.
  - E.-Condiciones límites :
    - 1.-Amplitud de vibración a frecuencia de operación.
    - 2.-Velocidad.
    - 3.-Aceleración.
  - F.-Modos posibles de vibración y efectos de acoplamiento.
  - G.-Fallas por fatiga en :
    - 1.-Componentes de la máquina.
    - 2.-Conexiones.
    - 3.-Estructuras de soporte.
  - H.-Demandas del medio ambiente :
    - 1.-Efectos biológicos y psicológicos en personas.
    - 2.-Efectos en equipos sensitivos cercanos.
    - 3.-Resonancia de componentes estructurales
  
- III.-Consideraciones de diseño para instalación de equipo sensitivo.
  - A.-Amplitudes límite de aceleración, velocidad y desplazamiento.
  - B.-Vibración ambiental.
  - C.-Cambios posibles de vibración ambiental :
    - 1.-Por construcción.
    - 2.-Por nuevo equipo.
  - D.-Aislamiento de cimentaciones.
  - E.-Aislamiento local de máquinas individuales

\*Obtenida de la referencia 44



DEPFI

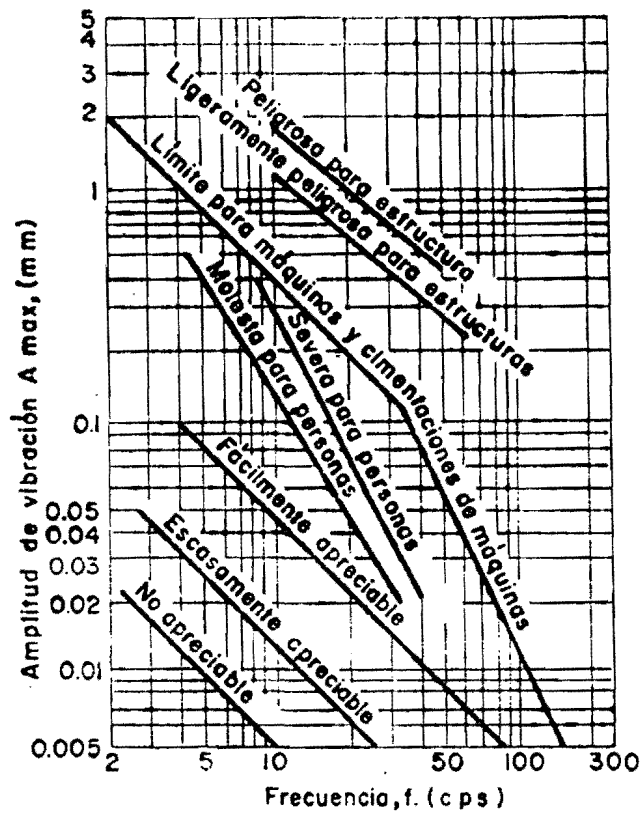
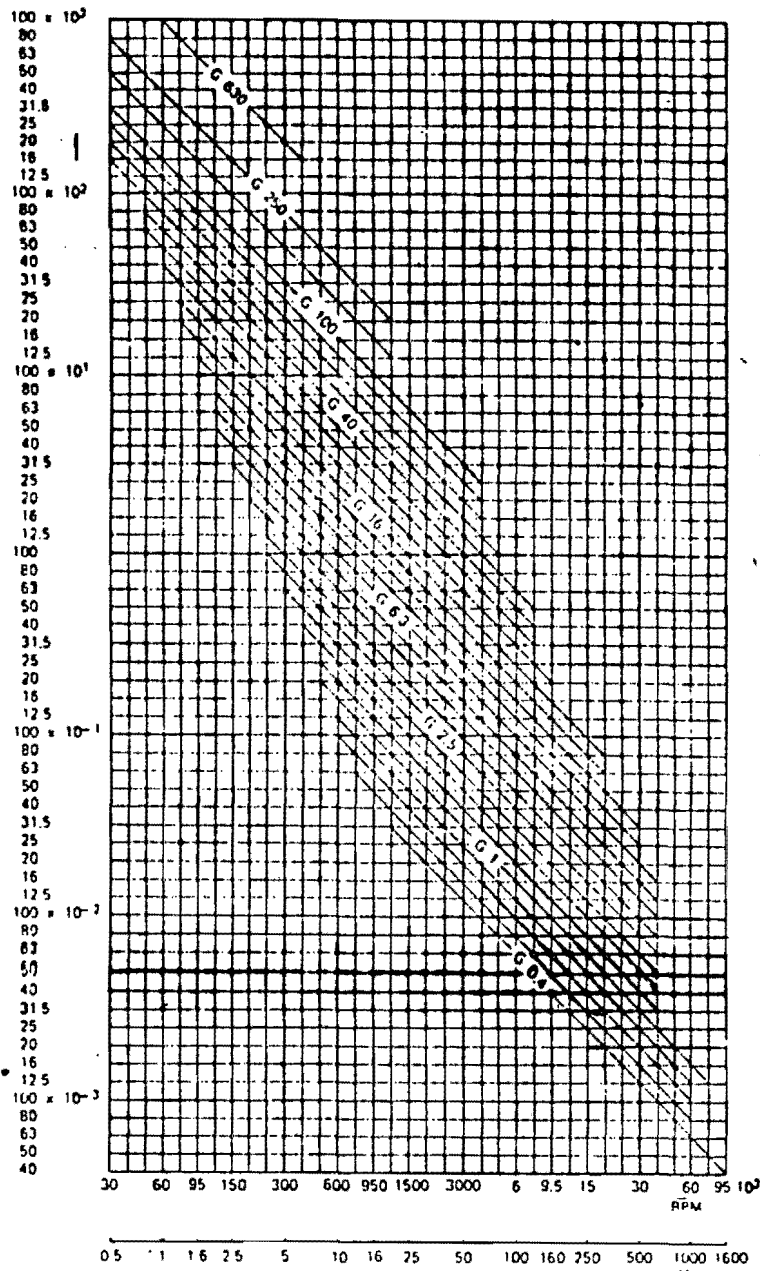


Fig. A.1 ESTADOS LIMITE Y DE SERVICIO DE LAS CIMENTACIONES DE MAQUINARIA (REF 20)

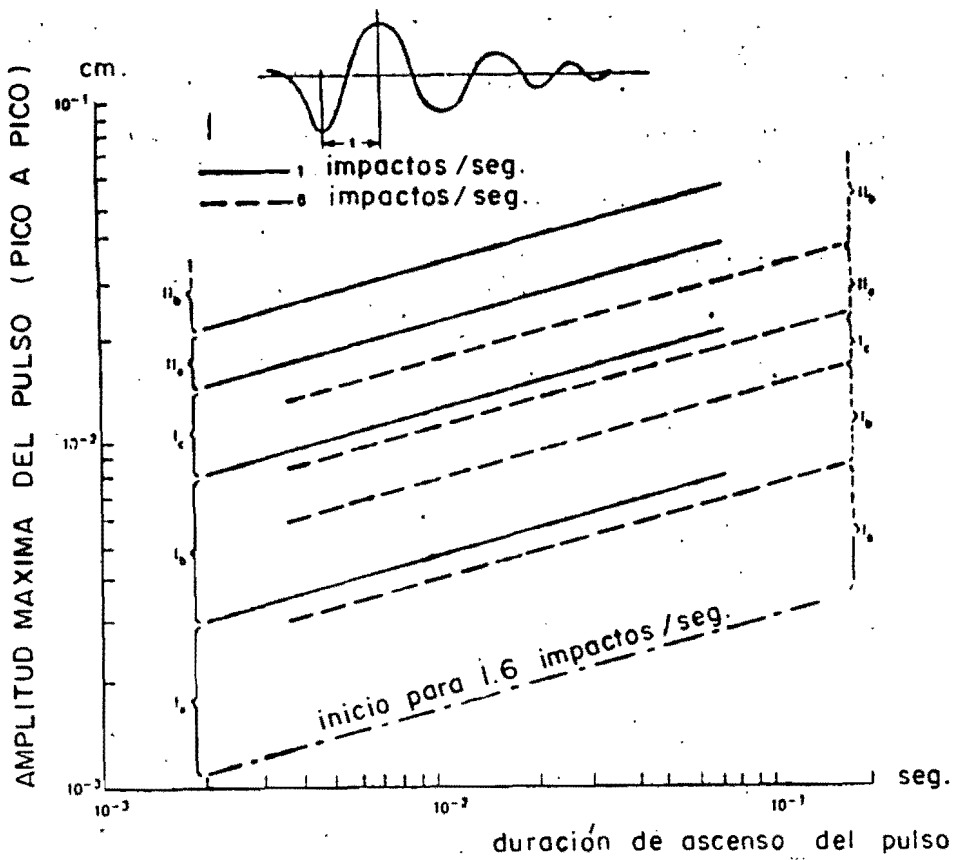
DESBALANCE RESIDUAL ACEPTABLE POR UNIDAD DE MASA DEL ROTOR  $\frac{g \cdot mm}{Kg}$   
 O DESPLAZAMIENTO DEL CENTRO DE GRAVEDAD EN  $\mu m$ .



G - GRADO DE BALANCEO

*frecuencia de operación?*

Fig. A.2 DESBALANCE MAXIMO RESIDUAL CORRESPONDIENTE A VARIOS GRADOS DE BALANCEO (REF 6)



Ia = Empieza a percibirse

Ib = De facil percepción

Ic = De fuerte percepción, molesto

IIa = Muy desagradable, daño potencial para exposiciones prolongadas

IIb = Extremadamente desagradable, definitivamente peligroso

El proceso de decaimiento del pulso puede ser de poca importancia práctica.

Fig. A.3 TOLERANCIA DEL HUMANO A IMPACTOS VERTICALES REPETITIVOS ( REF. 6 )

## ANEXO B.- SOLUCION DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO.

### D.1. SOLUCION DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO :

$$R(t) \oplus M \ddot{u}(t) = P(t) \quad \text{ec. B.1}$$

Nota : El símbolo  $\oplus$  indica suma vectorial y para referencia úsese la notación de la figura B.1.

#### RESPUESTA MAXIMA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

$$P(t) = P_0 e^{i\Omega t} \quad \text{ec.D.2}$$

$$R(t) = \mathcal{X} u(t) \quad \text{ec.B.3}$$

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + i\mathcal{X}_2 \quad \text{ec.B.4}$$

$$u(t) = U_0 e^{i(\Omega t + \phi)} \quad \text{ec.B.5}$$

$$\dot{u}(t) = i \Omega U_0 e^{i(\Omega t + \phi)} = i \Omega u(t) \quad \text{ec.B.6}$$

$$\ddot{u}(t) = i^2 \Omega^2 U_0 e^{i(\Omega t + \phi)} = -\Omega^2 u(t) \quad \text{ec.B.7}$$

sustituyendo en la ecuación B.1

$$\mathcal{X} u(t) + M (-\Omega^2 u(t)) = P_0 e^{i\Omega t}$$

$$\mathcal{X} U_0 e^{i\Omega t} e^{i\phi} - M \Omega^2 U_0 e^{i\Omega t} e^{i\phi} = P_0 e^{i\Omega t}$$

eliminando términos

$$\mathcal{X} U_0 e^{i\phi} - M \Omega^2 U_0 e^{i\phi} = P_0$$

factorizando

$$U_0 e^{i\phi} (\mathcal{X} - M \Omega^2) = P_0$$

ejecutando operaciones y sustituyendo  $\mathcal{X}$  por  $(\mathcal{X}_1 + i\mathcal{X}_2)$

$$\frac{P_0}{U_0} = (\cos \phi + i \sin \phi) \{ (\mathcal{X}_1 - M \Omega^2) + i \mathcal{X}_2 \}$$

$$\frac{P_0}{U_0} = [(\mathcal{X}_1 - M \Omega^2) \cos \phi - \mathcal{X}_2 \sin \phi] + i [\mathcal{X}_2 \cos \phi + (\mathcal{X}_1 - M \Omega^2) \sin \phi]$$

igualando reales con reales y complejos con complejos obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente :

$$(\mathcal{K}_1 - M\Omega^2) \text{Cos}\phi - \mathcal{K}_2 \text{Sen}\phi = \frac{P_0}{U_0} \quad \text{ec. B.8}$$

$$\mathcal{K}_2 \text{Cos}\phi + (\mathcal{K}_1 - M\Omega^2) \text{Sen}\phi = 0 \quad \text{ec. B.9}$$

de donde;

$$\mathcal{K}_2 + (\mathcal{K}_1 - M\Omega^2) \text{Tg}\phi = 0$$

es decir

$$\text{Tg}\phi = - \frac{\mathcal{K}_2}{\mathcal{K}_1 - M\Omega^2} = \frac{\mathcal{K}_2}{M\Omega^2 - \mathcal{K}_1} \quad \text{ec. B.10}$$

y por el teorema de Pitágoras

$$\text{Sen}\phi = \frac{\mathcal{K}_2}{\sqrt{\mathcal{K}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{K}_1)^2}} \quad \text{ec. B.11}$$

$$\text{Cos}\phi = \frac{M\Omega^2 - \mathcal{K}_1}{\sqrt{\mathcal{K}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{K}_1)^2}} \quad \text{ec. B.12}$$

por otra parte de la ecuación B.8

$$(\mathcal{K}_1 - M\Omega^2) - \mathcal{K}_2 \text{Tg}\phi = \frac{P_0}{U_0} \frac{1}{\text{Cos}\phi}$$

sustituyendo B.10 y B.12, entonces

$$(\mathcal{K}_1 - M\Omega^2) - \mathcal{K}_2 \left[ \frac{\mathcal{K}_2}{M\Omega^2 - \mathcal{K}_1} \right] = \frac{P_0}{U_0} \frac{\sqrt{\mathcal{K}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{K}_1)^2}}{M\Omega^2 - \mathcal{K}_1}$$

$$(\mathcal{K}_1 - M\Omega^2)(M\Omega^2 - \mathcal{K}_1) - \mathcal{K}_2^2 = \frac{P_0}{U_0} \sqrt{\mathcal{K}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{K}_1)^2}$$

$$2\mathcal{K}_1 M\Omega^2 - (M\Omega^2)^2 - \mathcal{K}_1^2 + \mathcal{K}_1 M\Omega^2 - \mathcal{K}_2^2 = \frac{P_0}{U_0} \sqrt{\mathcal{K}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{K}_1)^2}$$

cambiando de signo

$$\mathcal{K}_1^2 - 2\mathcal{K}_1 M\Omega^2 + (M\Omega^2)^2 + \mathcal{K}_2^2 = -\frac{P_0}{U_0} \sqrt{\mathcal{K}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{K}_1)^2}$$

factorizando

$$\begin{aligned} [(\mathcal{K}_1 - M\Omega^2)^2 + \mathcal{K}_2^2]^2 &= \frac{P_0^2}{U_0^2} [\mathcal{K}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{K}_1)^2] \\ &= \frac{P_0^2}{U_0^2} [\mathcal{K}_2^2 + (M\Omega^2)^2 - 2M\Omega^2\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_1^2] \\ &= \frac{P_0^2}{U_0^2} [(\mathcal{K}_1 - M\Omega^2)^2 + \mathcal{K}_2^2] \end{aligned}$$

dividiendo entre el término entre paréntesis

$$(\mathcal{K}_1 - M\Omega^2) + \mathcal{K}_2^2 = \left(\frac{P_0}{U_0}\right)^2$$

sacando raíz cuadrada en ambos miembros tenemos :

$$\frac{P_0}{U_0} = \sqrt{(\mathcal{K}_1 - M\Omega^2)^2 + \mathcal{K}_2^2} \quad \text{que es la ecuación 3.d.10}$$

si  $\frac{P_0}{\mathcal{K}_1} = U_{est}$ ; siendo  $U_{est}$  el desplazamiento estático, entonces :



$$\frac{U_{est.}}{U_0} = \frac{\sqrt{(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2)^2 + \mathcal{X}_2^2}}{\mathcal{X}_1}$$

y así definir el factor de

amplificación dinámica como :

$$A = \frac{U_0}{U_{est.}} = \frac{\mathcal{X}_1}{\sqrt{(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2)^2 + \mathcal{X}_2^2}}$$

ec. B.13

### SOLUCION USANDO NOTACION VECTORIAL COMPLEJA

Si

$$R(t) \oplus M \ddot{u}(t) = P(t)$$

y puesto que;  $u(t) = U_0 e^{i(\Omega t + \phi)}$  puede expresarse como :

$$u(t) = (u_1 + iu_2) e^{i\Omega t}$$

ec. B.14

entonces

$$\dot{u}(t) = i\Omega (u_1 + iu_2) e^{i\Omega t}$$

ec. B.15

$$\ddot{u}(t) = -\Omega^2 (u_1 + iu_2) e^{i\Omega t}$$

ec. B.16

sustituyendo las ecuaciones B.2, B.3, B.7, B.14, B.15 y B.16 en la ecuación B.1, tenemos que :

$$(\mathcal{X}_1 + i\mathcal{X}_2) (u_1 + iu_2) e^{i\Omega t} - M\Omega^2 (u_1 + iu_2) e^{i\Omega t} = P_0 e^{i\Omega t}$$

eliminando términos y efectuando operaciones

$$(\mathcal{X}_1 u_1 - \mathcal{X}_2 u_2) + (i\mathcal{X}_1 u_2 + i\mathcal{X}_2 u_1) - M\Omega^2 u_1 - M\Omega^2 u_2 = P_0$$

$$\{(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) u_1 - \mathcal{X}_2 u_2\} + i \{(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) u_2 + \mathcal{X}_2 u_1\} = P_0$$

igualando reales con reales y complejos con complejos

$$(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) u_1 - \mathcal{X}_2 u_2 = P_0$$

$$(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) u_2 + \mathcal{X}_2 u_1 = 0$$

lo cual en forma matricial queda :

$$\begin{bmatrix} (K_1 - M\Omega^2) & -K_2 \\ K_2 & (K_1 - M\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ec.B.17}$$

matriz que es la ec.3.d.12

### ANALOGIA CON UN SISTEMA ELEMENTAL DE UN GRADO DE LIBERTAD.

La ecuación de equilibrio dinámico de un sistema elemental de un grado de libertad es :

$$M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) = P(t) \quad \text{ec.B.18}$$

sustituyendo las ecuaciones B.2, B.3, B.4, B.14, B.15 y B.16 en la B.18 tenemos que :

$$-M\Omega^2 (u_1 + u_2)e^{i\Omega t} + C(i\Omega)(u_1 + u_2)e^{i\Omega t} + K (u_1 + u_2)e^{i\Omega t} = P_0 e^{i\Omega t}$$

eliminando términos y efectuando operaciones

$$(u_1 + u_2)\{(K - M\Omega^2) + iC\Omega\} = P_0 \quad \text{ec.B.19}$$

$$\{u_1(K - M\Omega^2) - u_2C\Omega\} + i\{u_1C\Omega + u_2(K - M\Omega^2)\} = P_0$$

igualando reales con reales y complejos con complejos

$$u_1(K - M\Omega^2) - u_2C\Omega = P_0$$

$$u_1C\Omega + u_2(K - M\Omega^2) = 0$$

lo cual en forma matricial queda :

$$\begin{bmatrix} (K-M\Omega^2) & -C\Omega \\ C\Omega & K-M\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ec.B.20}$$

por semejanza con la ec.B.17

$$K = K_1 \quad \text{ec.B.21}$$

$$C\Omega = K_2 \quad \text{ec.B.22}$$

De lo cual puede concluirse que si se usa la solución del sistema "

elemental de un grado de libertad; en la ecuación B.21,  $K$  tiene asociada la rigidez y la inercia del suelo de cimentación, por lo tanto  $K$  no es una constante, como es común suponer en la solución del sistema elemental de un grado de libertad. De lo anterior, por conveniencia y para diferenciar entre una resorte constante y una rigidez variable se define lo siguiente:

$\bar{K}$  = rigidez o resorte dinámico equivalente, es una variable.  
 $K$  = rigidez o resorte estático, es una constante.

Por lo anterior, si se usa la solución del sistema elemental de un grado de libertad para representar el problema de interacción suelo estructura planteado en la ecuación B.1; la  $K$  del sistema de ecuaciones B.20 debe interpretarse como una  $\bar{K}$ , con lo que dicho sistema queda :

$$\begin{bmatrix} (\bar{K} - M\Omega^2) & -C\Omega \\ C\Omega & (\bar{K} - M\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ec. B.23}$$

La relación entre  $K$  y  $\bar{K}$  puede encontrarse como sigue:

Puede demostrarse que al dividir la ecuación B.19 entre  $u_1+iu_2$  resulta

$$\frac{P_0}{u_1+iu_2} = \frac{P(t)}{u(t)} \quad \text{ec. B.24}$$

siendo :

$$P(t) = P_0 e^{i(\Omega t)}$$

$$u(t) = (u_1 + iu_2)e^{i\Omega t} = u_0 e^{i(\Omega t + \phi)} \quad (\text{ver anexo C})$$

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\phi = \text{Arc. tan} \left( \frac{u_2}{u_1} \right)$$

de lo anterior, la ecuación B.19 puede arreglarse como se indica :

$$\frac{P(t)}{u(t)} = (K - M\Omega^2) + i C\Omega \quad \text{ec. B.25}$$

expresión que es semejante a la B.3, es decir:

$$\frac{P(t)}{u(t)} = (K - M\Omega^2) + i C\Omega$$

es semejante a:

$$\frac{R(t)}{u(t)} = \mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2$$

Nótese que  $P(t)$  es diferente de  $R(t)$ .

Otra vez, si se utiliza la solución del sistema elemental de un grado de libertad; debe mantenerse la misma impedancia, esto significa que:

$\frac{P(t)}{u(t)}$  sea igual a  $\frac{R(t)}{u(t)}$ ; lo cual es cierto, si y sólo si, se cumple lo siguiente :

$$\mathcal{X}_1 = K - M\Omega^2$$

$$\mathcal{X}_2 = C\Omega$$

pero  $\mathcal{X}_1 = \bar{K}$  por lo tanto :

$$\bar{K} = K - M\Omega^2 \quad \text{ec. B.26}$$

que es lo que se quería encontrar.

Por otra parte, si analizamos el término  $K - M\Omega^2$  de la ecuación B.26 vemos que:

$$\begin{aligned} (K - M\Omega^2) &= K \left( 1 - \frac{M\Omega^2}{K} \right) \\ &= K \left( 1 - \frac{\Omega^2}{K/M} \right) \\ &= K \left( 1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} \right) \\ &= K (1 - r^2) \\ &= K\lambda \quad \text{siendo } \lambda = (1 - r^2) \end{aligned} \quad \text{ec. B.27}$$

con lo que la ecuación B.26 queda:

$$\bar{K} = K\lambda \quad \text{ec. B.28}$$

donde :

$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$  es la relación de frecuencia de la acción a frecuencia natural de vibración no amortiguada.

$\lambda$  = coeficiente de variación de la rigidez dinámica con la frecuencia.

Por otra parte el amortiguamiento  $C$  se mantiene independiente de las características de inercia del sistema y si analizamos el término  $C\Omega$  vemos que :

$$C\Omega = 2\zeta r K \quad \text{puesto que :}$$

$$\beta = \frac{C}{C_c}$$

$$C_c = 2\sqrt{KM}$$

donde:

$\beta$  = relación de amortiguamientos como se define en el sistema elemental de un grado de libertad.

$C_c$  = amortiguamiento crítico para que el sistema elemental de un grado de libertad no vibre.

**B.2.-SOLUCION DEL MODO VERTICAL DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.**

Ecuaciones de equilibrio, ver figura 3.d.6.a.

$$M_1 \ddot{z}_1 + K_1 u_1 + C_1 \dot{u}_1 = P(t) \quad \text{ec. B.29}$$

$$M_2 \ddot{z}_2 + K_2 z_2 + C_2 \dot{z}_2 - K_1 u_1 - C_1 \dot{u}_1 = 0 \quad \text{ec. B.30}$$

$$u_1 = z_1 - z_2 \quad \text{ec. B.31}$$

sustituyendo B.31 en B.30 y B.29

$$M_1 \ddot{z}_1 + K_1 (z_1 - z_2) + C_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = P(t)$$

$$M_2 \ddot{z}_2 + K_2 z_2 + C_2 \dot{z}_2 - K_1 (z_1 - z_2) - C_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0$$

efectuando operaciones quedan

$$M_1 \ddot{z}_1 + K_1 (z_1 - z_2) + C_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = P(t) \quad \text{ec. B.32}$$

$$M_2 \ddot{z}_2 + (K_2 + K_1) z_2 + (C_2 + C_1) \dot{z}_2 - K_1 z_1 - C_1 \dot{z}_1 = 0 \quad \text{ec. B.33}$$

si :

$$P(t) = P_0 e^{i\Omega t}$$

$$z_1 = z_{10} e^{i(\Omega t + \phi_1)} = (z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t}$$

$$z_2 = z_{20} e^{i(\Omega t + \phi_2)} = (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t}$$

entonces :

$$\dot{z}_1 = i\Omega z_{10} e^{i(\Omega t + \phi_1)} = i\Omega z_1$$

$$\ddot{z}_1 = -\Omega^2 z_{10} e^{i(\Omega t + \phi_1)} = -\Omega^2 z_1$$

$$\dot{z}_2 = i\Omega z_{20} e^{i(\Omega t + \phi_2)} = i\Omega z_2$$

$$\ddot{z}_2 = -\Omega^2 z_{20} e^{i(\Omega t + \phi_2)} = -\Omega^2 z_2$$

sustituyendo en B.32 y B.33:

$$-M_1 \Omega^2 (z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t} + K_1 \left[ (z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t} - (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t} \right] + \dots$$

$$\dots + C_1 (i\Omega) \left[ (z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t} - (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t} \right] = P_0 e^{i\Omega t} \quad \text{ec. B.34}$$

$$-\Omega^2 M_2 (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t} + (K_2 + K_1) (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t} + (C_2 + C_1) i\Omega (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t} -$$

$$\dots - K_1 (z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t} - C_1 (i\Omega) (z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t} = 0 \quad \text{ec. B.35}$$

eliminando términos, efectuando operaciones y agrupando reales con reales y complejos con complejos las ecuaciones B.34 y B.35 quedan :

$$K_1(z_{11} + iz_{12}) - M_1\Omega^2 z_{11} - \Omega C_1(z_{12} - z_{22}) + i \left[ K_1(z_{12} - z_{22}) - M_1\Omega^2 z_{12} + \Omega C_1(z_{11} - z_{21}) \right]$$

= P<sub>0</sub>

$$(K_2 + K_1)z_{21} - \Omega^2 M_2 z_{21} - \Omega(C_2 + C_1)z_{22} - K_1 z_{11} + C_1 \Omega z_{12} + \dots + i \left[ (K_2 + K_1)z_{22} - \Omega^2 M_2 z_{22} + \Omega(C_2 + C_1)z_{21} - C_1 \Omega z_{11} - K_1 z_{12} \right] = 0$$

igualando reales con reales y complejos con complejos las ecuaciones anteriores quedan :

$$K_1(z_{11} + iz_{12}) - M_1\Omega^2 z_{11} - \Omega C_1(z_{12} - z_{22}) = P_0$$

$$K_1(z_{12} - z_{22}) - M_1\Omega^2 z_{12} + \Omega C_1(z_{11} - z_{21}) = 0$$

$$(K_2 + K_1)z_{21} - \Omega^2 M_2 z_{21} - \Omega(C_2 + C_1)z_{22} - K_1 z_{11} + C_1 \Omega z_{12} = 0$$

$$(K_2 + K_1)z_{22} - \Omega^2 M_2 z_{22} + \Omega(C_2 + C_1)z_{21} - C_1 \Omega z_{11} - K_1 z_{12} = 0$$

lo que en forma matricial queda :

$$\begin{bmatrix} (K_1 - M_1\Omega^2) & -\Omega C_1 & -K_1 & \Omega C_1 \\ \Omega C_1 & (K_1 - M_1\Omega^2) & -\Omega C_1 & -K_1 \\ -K_1 & \Omega C_1 & (K_1 + K_2 - M_2\Omega^2) & -\Omega(C_1 + C_2) \\ -\Omega C_1 & -K_1 & \Omega(C_1 + C_2) & (K_1 + K_2 - M_2\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lo que para el modelo del problema 2 mostrado en la figura 3.d.6.a. deberá interpretarse como se indica :

$$\begin{bmatrix} (K_1 - M_1\Omega^2) & 0 & -K_1 & 0 \\ 0 & (K_1 - M_1\Omega^2) & 0 & -K_1 \\ -K_1 & 0 & (K_1 + K_2 - M_2\Omega^2) & -\Omega C_2 \\ 0 & -K_1 & \Omega C_2 & (K_1 + K_2 - M_2\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con los valores siguientes :

- C<sub>1</sub> = 0
- C<sub>2</sub> = C<sub>2</sub> = 1.11E6 Kg s/m
- K<sub>1</sub> = K<sub>resortes</sub> = 3.146E6 Kg/m
- K<sub>2</sub> = K<sub>2</sub> = -3.0EB Kg/m
- M<sub>1</sub> = 4283.33 utm.
- M<sub>2</sub> = 5442.40 utm.
- P<sub>0</sub> = 732 kg para la envolvente.

Po = 396 para la frecuencia 188.51 rad/seg  
Po = 337 para la frecuencia 941.41 rad/seg



## ANEXO C. NOTACION VECTORIAL.

Es conveniente utilizar la notación vectorial compleja para representar fuerzas y desplazamientos. Dicha notación permite representar el desfase entre fuerza y desplazamiento a través de las componentes, real y compleja, de un vector representado en el plano complejo. En este caso, la parte real de un número complejo estará asociada a las características de rigidez e inercia del sistema, mientras que la parte imaginaria, refleja las características de amortiguamiento del sistema. Para referencia se usará la figura C.1.

Por otra parte, es útil demostrar que

$$u(t) = (u_1 + iu_2)e^{i\Omega t} = u_0 e^{i(\Omega t + \phi)} \quad \text{ec.C.1}$$

Así, si

$$u(t) = (u_1 + iu_2)e^{i\Omega t} \quad \text{ec.C.2}$$

entonces esta ecuación es igual a

$$= (u_1 + iu_2) [\cos(\Omega t) + i \operatorname{Sen}(\Omega t)]$$

de la que; efectuando operaciones, tenemos

$$= [u_1 \cos(\Omega t) - u_2 \operatorname{Sen}(\Omega t)] + i [u_1 \operatorname{Sen}(\Omega t) + u_2 \cos(\Omega t)]$$

$$= u_1 \left[ \cos(\Omega t) - \frac{u_2}{u_1} \operatorname{Sen}(\Omega t) \right] + i u_1 \left[ \operatorname{Sen}(\Omega t) + \frac{u_2}{u_1} \cos(\Omega t) \right]$$

por el teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{Tan} \phi = \frac{u_2}{u_1} \quad \text{y} \quad \operatorname{Cos} \phi = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

entonces la ecuación C.2 queda

$$= u_1 \left[ \cos(\Omega t) - \operatorname{Tan} \phi \operatorname{Sen}(\Omega t) + i (\operatorname{Sen}(\Omega t) + \operatorname{Tan} \phi \cos(\Omega t)) \right]$$

$$= u_1 \left[ \cos(\Omega t) - \frac{\operatorname{Sen} \phi}{\operatorname{Cos} \phi} \operatorname{Sen}(\Omega t) + i (\operatorname{Sen}(\Omega t) + \frac{\operatorname{Sen} \phi}{\operatorname{Cos} \phi} \cos(\Omega t)) \right]$$

$$= \frac{u_1}{\operatorname{Cos} \phi} \left[ \operatorname{Cos} \phi \cos(\Omega t) - \operatorname{Sen} \phi \operatorname{Sen}(\Omega t) + i (\operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sen}(\Omega t) + \operatorname{Sen} \phi \cos(\Omega t)) \right]$$

$$\dots \text{Sen } \phi \text{ Cos } (\Omega t) \Big]$$

y por las identidades trigonométricas :

$$\text{Cos } (\alpha \pm \beta) = \text{Cos } \alpha \text{ Cos } \beta \mp \text{Sen } \alpha \text{ Sen } \beta$$

$$\text{Sen } (\alpha \pm \beta) = \text{Sen } \alpha \text{ Cos } \beta \pm \text{Cos } \alpha \text{ Sen } \beta$$

se encuentra que

$$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \left[ \text{Cos } (\phi + \Omega t) + i \text{Sen } (\phi + \Omega t) \right]$$

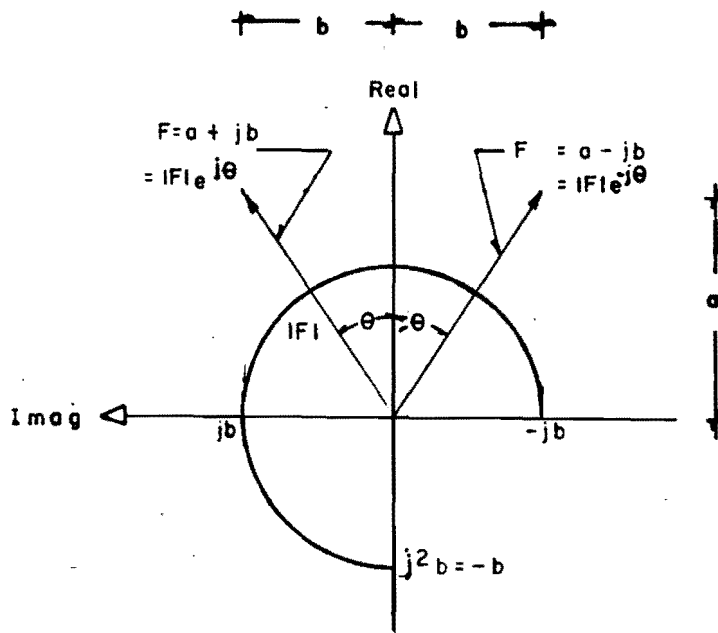
y se concluye que

$$u(t) = (u_1 + i u_2) e^{i \Omega t} = u_0 e^{i(\Omega t + \phi)} \quad \text{lo que se quería demostrar.}$$

siendo :

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\phi = \text{Arc. Tan } \frac{u_2}{u_1}$$



a).- Notación vectorial compleja.

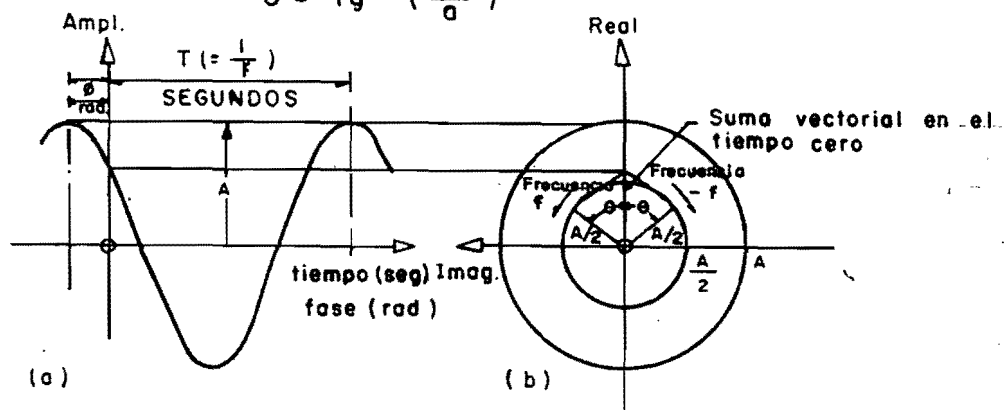
$$F = a + bj = (F) e^{j\theta}$$

$$a = |F| \cos \theta$$

$$b = |F| \sin \theta$$

$$(F) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$$



b).- Representación de la suma de dos vectores que giran en contra; uno respecto al otro.

Fig. C.1 NOTACION DE REFERENCIA