CONTROLES OPTIMOS PARA SISTEMAS NO LINEALES POR MICROCOMPUTADORA

IRIS AGUILAR OCTAVIO ALEJANDRO

TESIS

Presenta la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Como requisito para obtener el grado de:

MAESTRO EN INGENIERIA ELECTRICA

CIUDAD UNIVERSITARIA. OCTUBRE 1985

CONTROLES OPTIMOS PARA SISTEMAS NO

LINEALES POR MICROCOMPUTADORA

Créditos asignados a la tesis 12 Doce

APROBADO POR EL JURADO

PRESIDENTE:

CRISTINA VERDE pa F. Kuhlmann

VOCAL:

STANISLAW RACZYNSKI

SECRETARIO:

ROMEO ORTEGA

SUPLENTE:

MARCO ANTONIO

MURRAY-LASSO Marco A. Murray-Lasso

SUPLENTE:

ANDRES BUZO

DE LA PEÑA

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVENOMA DE
MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

Profr. Stanislaw Raczynski
P r e s e n t e .

Comunico a usted que a propuesta del Subjefe del área de ELECTROMECANICA ha sido designado como director de tesis del alumno OCTAVIO ALEJANDRO IRIS AGUILAR para obtener el grado de M en I en ELECTRICA.

Mucho he de agradecerle su comunicación, por escrito, de la aceptación a esta designación y el nombre de la tesis a desarrollar.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 15 de julio de 1985.
AL JEFE DE LA DIVISION

DR. ROLANDO SPRINGALL GALINDO

E.5.1

DR. ROLANDO SPRINGALL GALINDO. 27/VII/1985

JEFE DE LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO (FI - UNAM)

P R E S E N T E .

Informo a usted en respuesta al documento recibido el 15 del presente mes, aceptar la dirección de tesis de OCTAVIO ALEJANDRO IRIS AGUILAR para obtener el grado de M. en I. en ELECTRICA, el título del trabajo es: " Controles óptimos para sistemas no lineales por microcomputadora ".

ATENTAMENTE

DR. STANISLAW RACZYNSKI

PROFESOR TITULAR. DEPFI-UNAM.

EXTIENDO UN AGRADECIMIENTO A TODAS
AQUELLAS PERSONAS QUE DE ALGUNA
MANERA ME BRINDARON EL APOYO PARA
LA REALIZACION DE ESTE TRABAJO.
ESPECIALMENTE A MIS:

PADRES, HERMANOS, MAESTROS,
COMPAÑEROS Y AMIGOS.

Conoced la verdad y la verdad
os hará libres.

Jesucristo

INDICE

PROLOGO

El objetivo del presente trabajo es la implementación de un programa de optimización para sistemas no lineales en una minicomputadora para probar algunos aspectos teóricos de aplicaciones reales en diferentes modelos físicos y económicos, analizar los efectos técnicos de las variables que afectan diferentes partes del proceso de minimización, las cuales se caracterizan por la asignación de valores heurísticos que determinan en forma significativa la rapidez del proceso de solución: como también la exactitud de los resultados. Los algoritmos relativos a estas variaciones se refieren a la búsqueda de mínimos en una dirección dada, el cual supone el valor mínimo en una cierta posición apriori (en este caso el coeficiente de conjugación de los gradientes sucesivos). Otro factor importante para la validez teórica del control es el tamaño de los pasos de control, la sensibilidad tanto de la trayectoria como del control óptimos ante cambios en los parámetros y las restricciones producidas por el estado inicial. La continuidad de la solución es necesaria comunmente en la aplicación de estos resultados a los sistemas reales, por ello se analizan estos coeficientes determinados en forma empírica para obtener comportamientos satisfactorios. Algunas pruebas secundarias son la normalización de vectores por diferentes métodos y los efectos de los pasos de integración.

Con el deseo de ilustrar el proceso de búsqueda de un mínimo en un espacio dinámico y tener a la mano un programa al cual pueda tenerse acceso de una forma personal e inmediata se presenta el siguiente trabajo; además de ser uno de los fines, la aplicación práctica de la teoría de control óptimo, en la didáctica de esta especialidad.

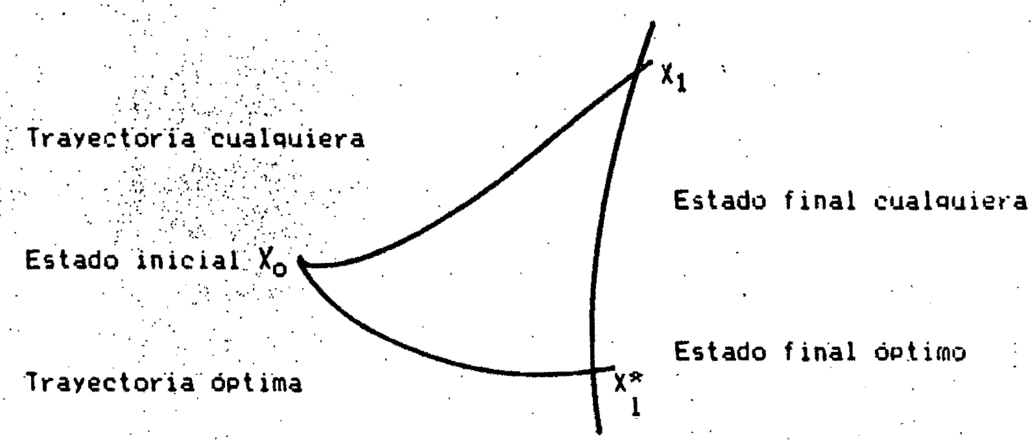
CAPITULO UNO : INTRODUCCION

Antes de hacer la descripción general del problema. expondremos los conceptos fundamentales para la comprensión de la terminología y la contextualización del presente trabajo en la ingeniería y sus aplicaciones.

Para caracterizar un sistema dinámico, es necesario especificar una serie finita de números reales $X = (X_1 , X_2 , \ldots, X_n)$. Los valores X en un instante de tiempo determinado t, constituyen el estado del sistema. Suponga, por ejemplo, al sistema cohete, en forma idealizada como un punto de masa variable, con movimiento en tres dimensiones. El estado estará descrito por siete variables: tres de ellas indicarán su posición, otras tres para las velocidades de cada una de las direcciones y la última para la masa instantánea.

El comportamiento dinámico del sistema, se define como la historia de su estado al transcurrir el tiempo, conocida como trayectoria o espacio de fase del sistema el cual está gobernado por leyes físicas pertinentes, modeladas por ecuaciones diferenciales, para nuestro ejemplo: tres ecuaciones de segundo orden y una de primer orden, planteadas con base en alguna teoría o ley como lo es la ley de Newton de la inercia, balance energético, balance másico, etc. Donde se considera el nivel de exactitud para el modelo en cuestión. Estas ecuaciones pueden expresar las tres componentes de la aceleración y la reducción de la masa como funciones del estado del sistema, del tiempo y del empuje producto de las turbinas. Como se observa lógicamente: la cantidad de combustible modificará el estado del sistema y en consecuencia controlará el comportamiento del cohete.

Es importante conocer el costo o valor de un funcional como indicador de eficacia de alguna trayectoria del sistema, dado en relación a la cantidad de energía o de combustible. Existen trayectorias "mejores y peores" y a aquella que gaste el mínimo de combustible podremos llamarla optima. [1, pag. 1-3]



DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Con el objetivo de determinar la politica óptima, es decir el control óptimo, para un cierto criterio de desempeño, utilizaremos un método matemático común, conocido por el principio del máximum.

El sistema está descrito por las ecuaciones:

$$\frac{dX^i}{dt} = f^i(X^1,\ldots,X^n,U^1,\ldots,U^r) \;,\; i = 1, 2,\ldots,n \;; \quad (1)$$

$U^1 \ldots U^r$ son los parámetros de control buscados para determinar el proceso o trayectoria en un instante de tiempo t dado, en forma óptima. Para el proceso controlado (1) en un intervalo de tiempo $t_o =< t =< t_1$ es suficiente especificar los parámetros de control:

$$U^j = U^j(t), \qquad j = 1,\ldots,r \;; \quad (2)$$

Dado el estado inicial

$$X^i(t_o) = X^i_o \;, \quad i = 1,\ldots,n; \quad (3)$$

la solución al sistema (1) es obtenida ahora en forma única. El problema variacional en conexión con el proceso controlado (1) puede expresarse como la integral del funcional

$$J = \int_{t_o}^{t} f^o(X^1,\ldots,X^n,U^1,\ldots,U^r)\, dt \;; \quad (4)$$

donde $f^o(X^1,\ldots,X^n,U^1,\ldots,U^r)$ es una función dada, considerando algún criterio como objetivo del problema a minimizar o maximizar.

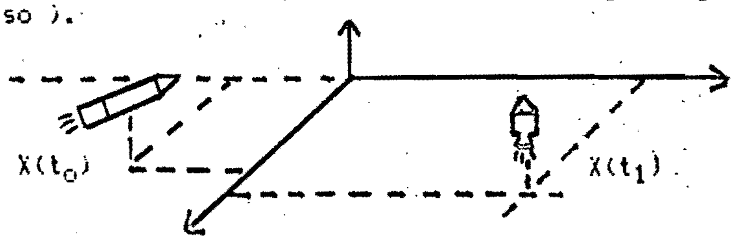
La trayectoria estará definida en forma única para los controles (2) y la integral (4) tomará un valor definido, llevando al sistema a un estado final:

$$X^i(t_1) = X^i_1 \;, \qquad i = 1,\ldots,n; \quad (5)$$

Es decir se busca el control:

$$U^*(t),\; j = 1,\ldots,r; \qquad (\text{ óptimo }) \quad (6)$$

capaz de llevar del estado (3) al estado (5)
en donde el funcional (4) sea mínimo y $t_1 - t_o$ es fijo (tiempo del proceso).



FORMULACION Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Es conveniente para la introducción de las condiciones necesarias de optimalidad agregar una variable ficticia X^0 en el modelo original del problema , cuya ley de variación tiene la forma :

$$\frac{dX^0}{dt} = f^0(X^1,\dots,X^n,U^1,\dots,U^r) ; \tag{7}$$

observe a la ecuación anterior en relación al objetivo del problema :

$$J = \int_{t_0}^{t} f^0(X^1,\dots,X^n,U^1,\dots,U^r) \, dt ; \tag{8}$$

esto es $J = X^0$ (variable ficticia)
de donde se expresa al sistema en un espacio x de dimension n + 1 :

$$\frac{dX^i}{dt} = f^i(X^1,\dots,X^n,U^1,\dots,U^r) , \quad i = \underline{0}, 1, 2,\dots,n ; \tag{9}$$

note la estructura del segundo miembro de la ecuación anterior, en donde aparecen ecuaciones independientes de la nueva variable ficticia X^0 .

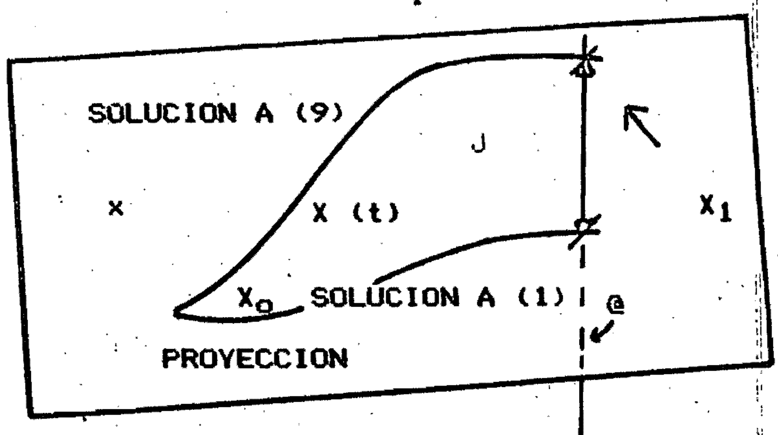
Si también consideramos la ampliación del espacio y las condiciones iniciales tenemos :

$$0, \quad X_0^1 ,\dots, X_0^n$$

La solución del sistema en $t = t_1$ pasa por el punto.

$X = (J, X_1)$ $J = X^0$ $X = [X^1 (t_1), X^2 (t_1),\dots, X^n (t_1)]$

Para el siguiente esquema la linea recta @ pasa por todos los puntos que describen al estado $X = (\&, X_1)$ donde & es arbitrario e indica el valor del objetivo en el tiempo final t_1 ,cuando la coordenada $X^0 = J$, entonces estamos en $t = t_1$.

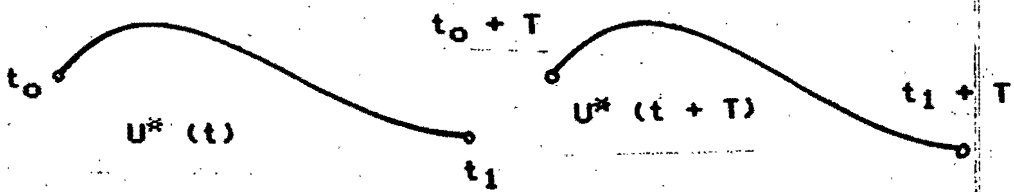


En forma equivalente el problema se enuncia de la manera siguiente :

Dado en el espacio de fase x (espacio de estados) de dimensión n+1 los puntos $X_0 = (0, x_0)$ y la línea recta ê, en la dirección de la coordenada X^0 y atravesando el punto $X_0 = (0, x_0)$, al resolver el sistema (9) con condiciones iniciales $X(t_0) = X_0$, intercepta a la línea

è con un control $U^*(t)$, el cual lleva al sistema a su mínima coordenada en X^0 .

Algunas caracteristicas y propiedades de los controles y trayectorias óptimas son (con base a ser el sistema autónomo en donde el tiempo no es función explícita de las ecuaciones (9)). El control lleva al sistema de X_0 a X_1 , este mismo control desplazado en el tiempo: un intervalo de tiempo T llevará al sistema de igual forma de X_0 a X_1 .



Los controles permisibles se determinan en un espacio cerrado y acotado. Comunmente restringidos a :

$$/U/ =< 1 \ , \quad j = 1, 2, \ldots, r \ ; \qquad (10)$$

resultado de consideraciones prácticas de suministro de combustible máximo , velocidad límite .... etc: En sí limitaciones físicas son normales en el proceso de solución al obtener los controles óptimos aparecen puntos de discontinuidad.sin embargo es necesario lleva a considerarlos continuos por intervalos (por la izquierda).

Las anteriores diferencias enmarcan al cálculo variacional clásico, recurriendo al principio del máximum, (para consultar sobre el estudio de estos aspectos y sus relaciones puede consultarse [2]).

Por lo mencionado anteriormente cada parte óptima de trayectoria continua es en sí misma una trayectoria óptima (similarmente se cumple para los controles óptimos. este enunciado), obsérvese la relación que guarda con el principio de optimalidad [2].

CAPITULO DOS : EL PRINCIPIO DEL MAXIMUM

Para el proceso descrito:

$$X = (X^{o} ,\ldots, X^{n}) \qquad U = (U^{1} ,\ldots, U^{r})$$

$$\frac{dX^{i}}{dt} = f^{i}(X, U) , \quad i = 0, 1, 2,\ldots,n ; \qquad (1)$$

El sistema de variables auxiliares adjunto modelado por medio de las variables P_0 , P_1 ,...., P_n .

$$\frac{dP1}{dt} = \sum_{j=0}^{n} \frac{d}{dX_i} f^{j} (X, U) . P_j \quad , i = 0, 1,\ldots,n ; (2)$$

El Sistema homogéneo (2) para cualquier condición inicial de P = (P_0 ,....,P_n) tiene solución única. definida a través del intervalo de tiempo t_o =< t =< t_1 donde la trayectoria y el control se determinan en forma óptima.

Se define al:
Hamiltoniano H de variables X^{o} ,....,X^{n} ,P_0 ,P_1 ,....,P_n ,U^{1} ,.... U^{r}

$$H (P, X, U) = [P, f (X, U)] = \sum_{j=0}^{n} P_j .f^{j} (X, U) \quad (3)$$

Note la relación con el problema generalizado de los multiplicadores de Lagrange; por ello otros autores utilizan las literales lambda en vez de P ó psi. (También acerca de su relación con el problema general de Mayer y Bolza y la condición de Weierstrass. consulte:
[2 ,pag 57 y 3, pags 239-241]. A partir de (3) podemos expresar el sistema por medio del Hamiltoniano.

$$\frac{dX^{i}}{dt} = \frac{dH}{dP_i}, \qquad i = 0, 1, 2,\ldots,n ; \quad (4)$$

$$\frac{dP^{i}}{dt} = - \frac{dH}{dX_i}, \qquad i = 0, 1, 2,\ldots,n ; \quad (5)$$

Definimos al súpremo del Hamiltoniano para valores fijos de P y X en el espacio u .

$$M (P, X) = \sup_{U \text{ en } u} H (P, X, U) \qquad (6)$$

donde M es el máximum de la función. suponiendo que H si alcanza su valor súpremo.

A continuación por trayectoria óptima entenderemos a X^* .para la cual X^* (t_1) alcanza su valor mínimo (t_1 es el tiempo final). la notación correspondiente para el control óptimo será U^* .

Teorema I. Principio del máximum

1.- Sea $U^*(t)$ $t_o <= t <= t_1$, un control permisible para la trayectoria (4), parte del estado X_o en el instante t_o. Una condición necesaria para el control $U^*(t)$ y la trayectoria $X^*(t)$ sean óptimos es la existencia de una función vectorial no nula $P(t) = [P_o(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)]$, correspondiente a las funciones $U^*(t)$ y $X^*(t)$ (5), tal que dado cualquier t, $t_o =< t =< t_1$, la función $H(P(t), X^*(t), U(t))$ de la variable U tenga un máximum para $U(t) = U^*(t)$.

$$H[P(t), X^*(t), U^*(t)] = M[P(t), X^*(t)] \qquad (7)$$

2.- En el instante final, las relaciones

$$P_o(t_1) =< 0,\ P_1(t_1) = \ldots = P_n(t_1) = 0,\ M[P(t_1), X(t_1)] = 0 \qquad (8)$$

Son satisfechas, además si las cantidades P(t),X(t),U(t) satisfacen (4),(5) y la condición 1 del teorema, las funciones P (t) y $M(P(t), X^*(t))$, de la variable t prueban ser constantes? para ello la verificación de las relaciones (8) pueden ser obtenidas en cualquier instante t, $t_o =< t =< t_1$ y no necesariamente en el instante t_1.
Cumpliendo el principio de optimalidad, consulte [3].

DISCUSION DEL PRINCIPIO DEL MAXIMUM Y DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA

El teorema I descrito anteriormente nos distingue, aquellas trayectorias, comenzando en el punto X_o y terminando en algún punto X_1 final, con un valor $J = X^o$ mínimo y de los correspondientes controles óptimos.

En realidad son n + 1 ecuaciones del sistema, tambien n + 1 ecuaciones del sistema de variables adjuntas asociadas, en total son 2 n + 2 ecuaciones (4),(5) y (6).

Un sistema completo de ecuaciones para determinar las variables donde (6) no es una ecuacion diferencial nos lleva a un sistema de 2 (n + 1) ecuaciones diferenciales .

Es importante mencionar a la variable U la cual puede descomponerse en varias variables, es en última instancia un punto de un espacio vectorial de dimensión r, obligando a la condición (6) a consistir de r relaciones separadas. En el caso de localizarse el máximum en el interior del dominio de control u, y cumpliendo (6): necesitaremos las restricciónes de las ecuaciones siguientes

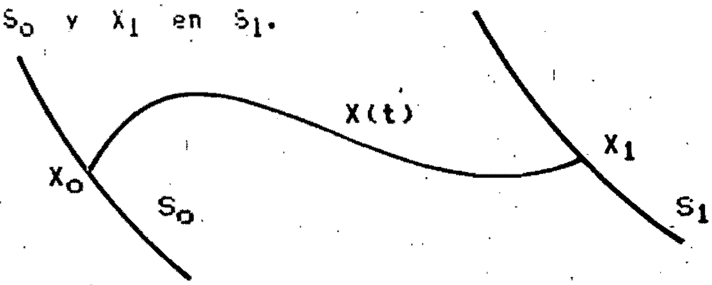
$$\left.\frac{dH[P(t), X(t), U(t)]}{dU}\right|_{U=U^*(t)\ (\text{óptimo})} = 0\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n\ ; \qquad (9)$$

para realizar la minimización utilizaremos el método de gradientes conjugados, aplicado a sistemas no lineales.

CONDICIONES DE TRANSVERSALIDAD

Sean S_o y S_1 intersecciones de hiperplanos (conjuntos inicial y final respectivamente), como lo ilustra la figura en donde las condiciones de transversalidad se refieren a la ubicación de :

X_o en S_o y X_1 en S_1.



En conjunción con el principio del máximum, las condiciones de transversalidad forman un sistema de ecuaciones suficientes para la solución del problema óptimo con estados extremos movibles. X_o en S_o y X_1 en S_1 . incrementando el número de incógnitas en $r_o + r_1$ (r_o y r_1 dimensiones menores de n en el espacio x). Acerca de la obtencion de las condiciones de transversalidad [3 pags 43-56].

Teorema II. Sea U (t), $t_o =< t =< t_1$, un control permisible, lleva el estado del sistema de alguna posición X_o en S_o a la posición X_1 en S_1, mientras X(t) es la correspondiente trayectoria partiendo del punto X_o = (0, x_o). Las condiciones necesarias para U (t), X (t) lleven a resolver el problema óptimo con extremos movibles: es la existencia de una función vectorial continua no nula P(t), satisfaciendo las condiciones del teorema I, y en adición, las condiciones de transversalidad de ambos extremos de la trayectoria X (t).

Cuando el extremo X_o en S_o es movible y X_1 en S_1 es dato, es decir se conocen las condiciones iniciales, y el estado final del sistema es libre. Se desea conocer el control U (t), $t_o =< t =< t_1$, con la trayectoria con inicio en X_o y con un mínimo del funcional J, con tiempo fijo,mientras X_1, puede tener cualquier posición.Llevandonos a condiciones de transversalidad $P_1(t_1) = P_2(t_1) = \ldots, = P_n(t_1) = 0$, consecuentemente $P_o >< 0$, donde podemos asumir $P_o = -1$, por tanto:

$$P\,(t_1) = =(-1, \; 0, \ldots, \; 0) \quad [\,3 \text{ pag } 66\,] . \tag{10}$$

Es interesante resaltar al Hamiltoniano

$$H\,(P, X, U) = (P, f(X, U)] = \sum_{j=0}^{n} P_j . f^j \,(x, u)$$

considerando (10) (para un tiempo $t = t_1$, en particular)

$$H\,(P, X, U) = -f^o\,(X, U) \tag{11}$$

$$M\,(P, X) = \sup_{U \text{ en } u} -f^o\,(X, U)$$

$$M\,(P, X) = \inf_{U \text{ en } u} f^o\,(X, U) \tag{12}$$

En resumen

Aplicando los enunciados anteriores y complementándolos con los teoremas I y II . se plantea el teorema siguiente para las aplicaciones que nos son pertinentes.

Teorema III

Una condición necesaria para los controles permisibles $U^*(t)$ en $t_0 =< t =< t_1$ y la trayectoria correspondiente $X^*(t)$, que es : solución óptima del problema con X_0 fijo (estado inicial conocido) y X_1 movible donde t_0 y t_1 son instantes de tiempo dados: es la existencia de una función vectorial continua no nula $P(t) = (P_0(t), P_1(t) \ldots, P_n(t))$, correspondiente a las funciones $U(t)$ y $X(t)$ tal que :

- Necesidad. Para todo t , $t_0 =< t =< t_1$, la función

$H[P(t), X(t), t, U(t)]$, de la variable U en u. contenga

un máximum en el punto $U(t) = U^*(t)$

$$H[P(t), X^*(t), t, U^*(t)] = M(P(t), X^*(t), t)$$

$$\text{- Suficiencia } P_1(t) = (-1, 0, \ldots, 0) . \qquad (13)$$

Esto es la aplicación del principio del máximum al problema que nos objeta.

El modelado para un sistema discreto es un desarrollo propio en sí , y coincide con el desarrollo de Euler, para la simulación de los sistemas continuos; siendo este el procedimiento más simple de integración en los métodos numéricos, por lo cual tomaremos en cuenta al parámetro h (paso de Euler de integración) propio de los sistemas discretos, como tal en un algoritmo discreto dado, y seleccionaremos h (en caso de discretizar al sistema continuo) para aplicar el trabajo presente en la aproximación de la solución óptima continua con base a un criterio (el cual trataremos más adelante).

Por lo regular el problema continuo no es conveniente para ser procesado por una pequeña computadora, debido a las capacidades de memoria y velocidades actuales, lo cual requeriría de un sistema de mayor tamaño y rapidez. [5 pag 4]

PROCEDIMIENTO DISCRETO.

Antes de introducir algunos conceptos sobre el algoritmo en sí, haremos una descripción, del caso discreto.

Para la trayectoria :

$$X(t) \dashrightarrow \quad X_k = (X_k^o , X_k^1 , \ldots , X_k^n) \quad \text{en} \quad R^{n+1} \qquad (14)$$

donde k es el tiempo discreto en el instante t = k.

El control :

$$U(t) \dashrightarrow \quad U_k = (U_k^1 , U_k^2 , \ldots , U_k^r) \quad \text{en} \quad R^S \qquad (15)$$

Al describir la trayectoria del sistema :

$$X_k^j = X_{k-1}^j + h \cdot f^j (X_{k-1} , U_k) \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, T \quad \text{y} \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n ; \qquad (16)$$

En caso de discretizar algún sistema continuo:

La selección de h se encuentra en función de la dinámica del sistema continuo o en relación a la velocidad de su respuesta, dada con base en los valores característicos del sistema u otras referencias como pueden ser las constantes de tiempo o criterios de suavidad del proceso. Existen múltiples desarrollos para seleccionar el paso de integración, con la limitante en la velocidad de muestreo de la señal analógica y de la estabilidad de este proceso, con el fín de poder reproducir la señal, y de no perder la calidad de la señal, deben evitarse muestreos muy "distantes" y pasos de integración muy pequeños, produciendo pérdida de tiempo en el proceso de cómputo o distorsiones debidas al ruido generado en el uso de números muy pequeños en la máquina.

El objetivo, puede expresarse en forma discreta por :

$$\min J = X_T^o = \sum_{k=1}^{T} f^o (X_{k-1} , U_k), \quad U \text{ en } u, \text{ dado } X_o \qquad (17)$$

Las ecuaciones conjugadas:

$$P_k^j = P_{k-1}^j - h \sum_{i=0}^{n} P_k^i \cdot \frac{d}{dX_j} f^i (X_{k-1} , U_k) \qquad (18)$$

si el hamiltoniano se expresa como :

$$H_k = \sum_{k=1}^{T} P_k^j \cdot f^j (X_{k-1} , U_k), \qquad (19)$$

entonces (18) puede plantearse como ;

$$P_k^j = P_{k-1}^j - h. \frac{dHk}{dX_j} \qquad (20)$$

Las condiciones de transversalidad :

$$P_T^o = -1 \qquad P_T^j = 0 \quad \text{si} \quad j = 1, 2, \ldots, n ; \qquad (21)$$

Utilizando las condiciones de transversalidad y la ecuación (11) concluímos :

$$\frac{dJ}{dU_k} = - \frac{dHk}{dU_k^j} \qquad (22)$$

Se tendrá que determinar $U_k^{j\,*}$ (óptimo) es decir P.T parámetros. Sín necesidad de calcular el objetivo J, para determinar el gradiente .

ALGORITMO PARA LA OBTENCION DE U (CONTROL OPTIMO)

PASO 0. Con i = 0, seleccionamos U en [0, 1]

$U_i = U_1^1, \ldots, U_T^p$ en R^{ST} tal que U_k en u para todo k

PASO 1. Se calcula :

$$\text{grad } J = - \frac{dHk}{dU_k^j} \quad \text{para todo } k, j ,$$

mediante :

a) Obtención de X_1^o , X_2^1 ,...., X_T^n con base a (16).
y se guarda ésta trayectoria .

b) Las condiciones de transversalidad.

$P_T^o = - 1$, $\quad P_T^1 = P_T^2 = \ldots = P_T^n = 0$, $k = T$.

c) Ahora nuevamente grad $J = - \frac{dHk}{dU_k^j} (P_k , f (X_{k-1} , U_k)$

d) Si k = 1 brincar al paso 2. si no :

Cálculo de P_{k-1}^o ,...., P_{k-1}^n con base a (18) o (20),
asignamos $k = k - 1$.

PASO 2. Selecciónese el gradiente conjugado h^i en F =
[h:h en R^{ST} < grad I, h > < 0], [5 pag 46-52]
(donde < , > es el producto punto)

PASO 3. Aproximación de lambda^i por: (Paso de control)

$$J (U_i + \text{lambda}_i\, h_i) = \min_{\text{lambda}=>0} J (U_i + \text{lambda}\ h_i)$$

PASO 4. Substituimos $U_{i+1} = U_i + \text{lambda}_i\, h_i$, incrementamos el paso $i = i + 1$ regresamos al paso 1., termina si $\text{lambda}^i = 0$ en una o mas iteraciones .

Normalmente algún tipo de aproximación puede usarse para el cálculo del coeficiente de conjugación lambda, como el método de la regla de oro o algún método para la obtención del mínimo en una dirección, pero el tiempo de cómputo se incrementaría significativamente es por ello que el mínimo se asigna arbitrariamente (para nuestros ejemplos a 0.3 dentro de un intervalo entre 0,1, como lo ilustra la figura).

Los sistemas lineales, tienen solución al problema comentado en forma determinada; a diferencia de los sistemas no lineales donde es conocida la dificultad al trabajar con ellos, en aplicaciones frecuentes aparecen modelos lineales al omitirse características físicas o al aproximar a un punto de operación* . Sín embargo también, muchas veces aparecen sistemas de mayor complejidad, o de mayor exactitud, los cuales requieren de ecuaciones no lineales para describir su dinámica, para obtener la solución no existe un método analítico exacto a diferencia de los sistemas lineales, por ello nos valemos de métodos númericos y computadoras para destacar mejores índices de desempeño en precios y energías o especificando las políticas de precios, inversión, consumo de combustible, etc.

* De ahí el nombre de cálculo variacional clásico. (Pequeñas variaciones)

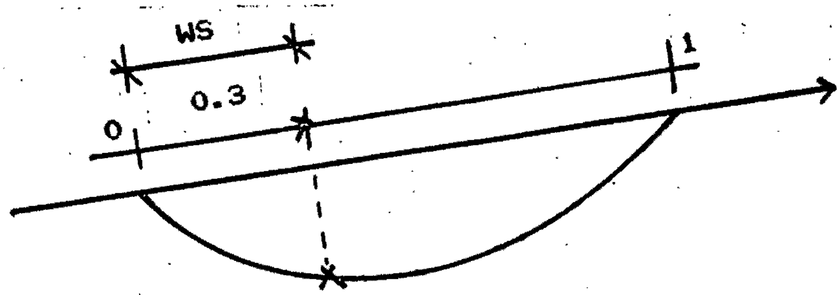
Nota: Para demostrar la suficiencia en la convergencia consultar el teorema siguiente . [5 pag 46 y 48]

Teorema IV. Con base al problema de minimización, descrito por el anterior algoritmo si h_i es siempre seleccionado para una d (delta) fija pequeña :

d < 0 < grad J, h > =< d.//grad J//.//h//

entonces el algoritmo describe una secuencia decreciente convergente con límite en el mínimo de la función $f^o(X, U)$.

Coeficiente de Conjugación

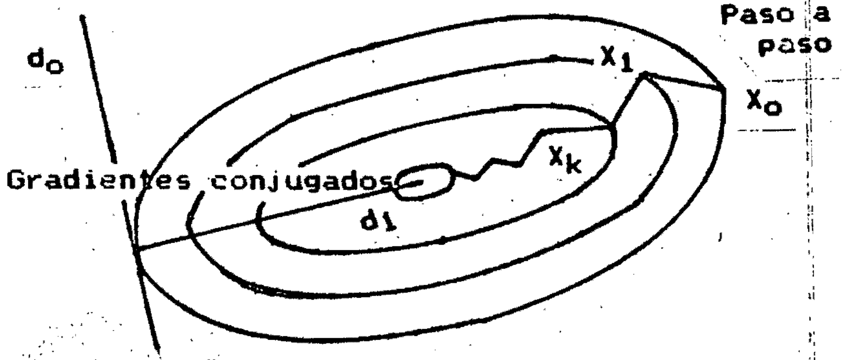


Asignación del mínimo en una dirección de búsqueda

CAPITULO TRES :

MINIMIZACION POR GRADIENTES CONJUGADOS.

El método de direcciones conjugadas puede ser considerado como un algoritmo intermedio entre el método de descenso paso a paso y el método de Newton. Esta motivación se debe al deseo de acelerar la convergencia típicamente lenta asociada con el descenso paso a paso, y evitar los requerimientos de información asociados con la evaluación, almacenamiento e inversión de la matriz Hessiana como lo es para el método de Newton. Consulte [4].



Además, los métodos de direcciones conjugadas en especial el método de gradientes conjugados se han probado, como extremadamente eficientes en el desarrollo de minimización con funciones generales objetivo y es considerado entre los mejores de proposito general disponibles [4 Pag. 168].

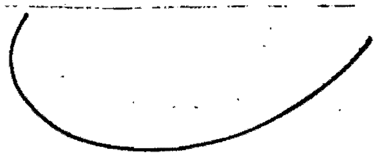
El método de gradientes conjugados consiste en seleccionar las direcciones sucesivas como versiones conjugadas de los gradientes anteriores obtenidos conforme el algoritmo progresa. En el paso k se evalúa el gradiente negativo común y se le suma a la combinación lineal de las direcciones previas para obtener una nueva dirección conjugada, a lo largo de la cual se realiza la minimización deseada.Las ventajas inherentes a la selección de este método; a menos que la solución se alcance en menos de n pasos, el gradiente nuevo es no nulo y linealmente independiente a los previos vectores direccionales. El gradiente g_k es ortogonal al subespacio B_k generado por d_o , d_1 ,..., d_{k-1} (direcciones anteriores) . Si la solución es alcanzada antes de n pasos, el gradiente se anula y el proceso termina siendo innecesario encontrar direcciones adicionales de búsqueda.

Otra de las ventajas es la expresión de la fórmula del algoritmo, la cual es especialmente simple, y se usa para determinar la nueva dirección.

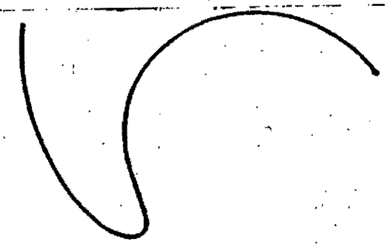
Como las direcciones conjugadas obtenidas son resultado del cálculo de gradientes ortogonales, el proceso de minimización hace avances uniformes significativos hacía la solución en cada iteración, contrastando con la situación de direcciones arbitrarias producto de algún algoritmo de gradientes en donde es, el proceso de minimización más lento y no utiza las propiedades de este método, las cuales analizarémos más adelante.

Es importante tomar en cuenta la expresión matemática de la función objetivo f^o (X, U) en donde se acepte la convexidad y es una suposición relativamente fuerte, sin embargo a pesar de ello, este algoritmo es usualmente aplicado y como se mencionó anteriormente sus resultados son bastante satisfactorios, aunque al utilizar f^o (.), normalmente no convexa, existe la posibilidad de llegar a un error en el proceso de minimización, como lo sería un mínimo local, impidiéndonos las características del problema argumentar acerca de la validez del método en funciones no convexas.

Función convexa



Función no convexa



ALGORITMO

Con el fin de ilustrar sobre la obtención del gradiente conjugado h_i en $F_i(Z_i)$ deseamos la construcción de dos secuencias : R^n , $g_o , g_1 , \ldots , g_n$ y $h_o , h_1 , \ldots , h_n$ tal que:

1) $\langle g_i , g_j \rangle = 0$ para todo $i <> j$

es decir los gradientes deben ser ortogonales entre sí, en la forma tradicional y también :

2) $\langle h_i , H.h_j \rangle = 0$ para todo $i <> j$

donde H es Matriz positivamente definida, resultado inmediato de suponer convexidad extricta de la función objetivo.

Ahora por medio del método de ortogonalización de Gramm-Schmidt, se obtendrá el gradiente conjugado:

Sea g_o en R^n arbitrario. Y $h_o = g_o$

3) $g_1 = g_o - l_o.H.h_o$ $\qquad l_o = \dfrac{\langle g_o , g_o \rangle}{\langle g_o , H.h_o \rangle}$

el cual asegura : $\langle g_o , g_1 \rangle = 0$.

El nuevo gradiente

4) $h_1 = g_1 + c_o.h_o$ $\qquad c_o = - \dfrac{\langle H.h_o , g_1 \rangle}{\langle H.h_o , h_o \rangle}$

resultando: $\langle h_o , H.h_1 \rangle = 0$

Así sucesivamente :

5) $g_2 = a.g_o + g_1 - l_1.H.h_1$: $h_2 = g_2 + c_1.h_1 + b.h_o$

donde l_1 , a son escogidos para hacer

6) $\langle g_o , g_1 \rangle = \langle g_1 , g_2 \rangle = 0$ y c_1 , b tomadas para llegar a:

7) $\langle h_o , H. h_2 \rangle = \langle h_1 , H.h_2 \rangle = 0$

obviamente sea continuo hasta $m <= M$
donde $g_m = h_m = 0$ [5. Pag. 49].
para finalizar presentamos un posible algoritmo para la obtención del gradiente:

OBTENCION DEL GRADIENTE CONJUGADO PROPUESTO POR FLETCHER-REEVES [5, PAG 52]

PASO 0. Seleccionese Z_o en R. Si grad $f^o(Z_o) = 0$ pararse. continúe :

PASO 1. $i = 0$ y $g_o = h_o = \text{grad } f^o (Z_o)$

PASO 2. Calcule $l_i > 0$ tal que :

$$f^o (Z_i + l_i h_i) = \min [f^o (Z_i + l.h_i) : l >= 0]$$

PASO 3. Ahora $Z_{i+1} = Z_i + l_i .h_i$

donde:

$$l_i = \frac{\langle g_i , h_i \rangle}{\langle g_i , g_i \rangle}$$

PASO 4. Nuevamente obténga grad $f^o (Z_{i+1})$

PASO 5. Si grad $f^o (Z_{i+1}) = 0$ pararse

$$g_{i+1} = - \text{grad } f^o (Z_{i+1})$$

$$h_{i+1} = g_{i+1} + c_i h_i \qquad c_i = \frac{\langle g_{i+1} , g_{i+1} \rangle}{\langle g_i , g_i \rangle}$$

Sea $i = i + 1$ y regrese a paso 2.

Es importante hacer la aclaración de la relación del presente algoritmo, con el utilizado en el programa. El coeficiente de conjugación l_i es en este caso resultado de un cálculo, a diferencia del programa elaborado en donde es considerado fijo, aunque l_i es el resultado de obtener el mínimo en una dirección de búsqueda, al fijarse se ahorra tiempo de cómputo en una parte del proceso que resulta ser por esencia del algoritmo no muy significativo, al final del proceso de minimización.

CAPITULO CUATRO : A P L I C A C I O N E S

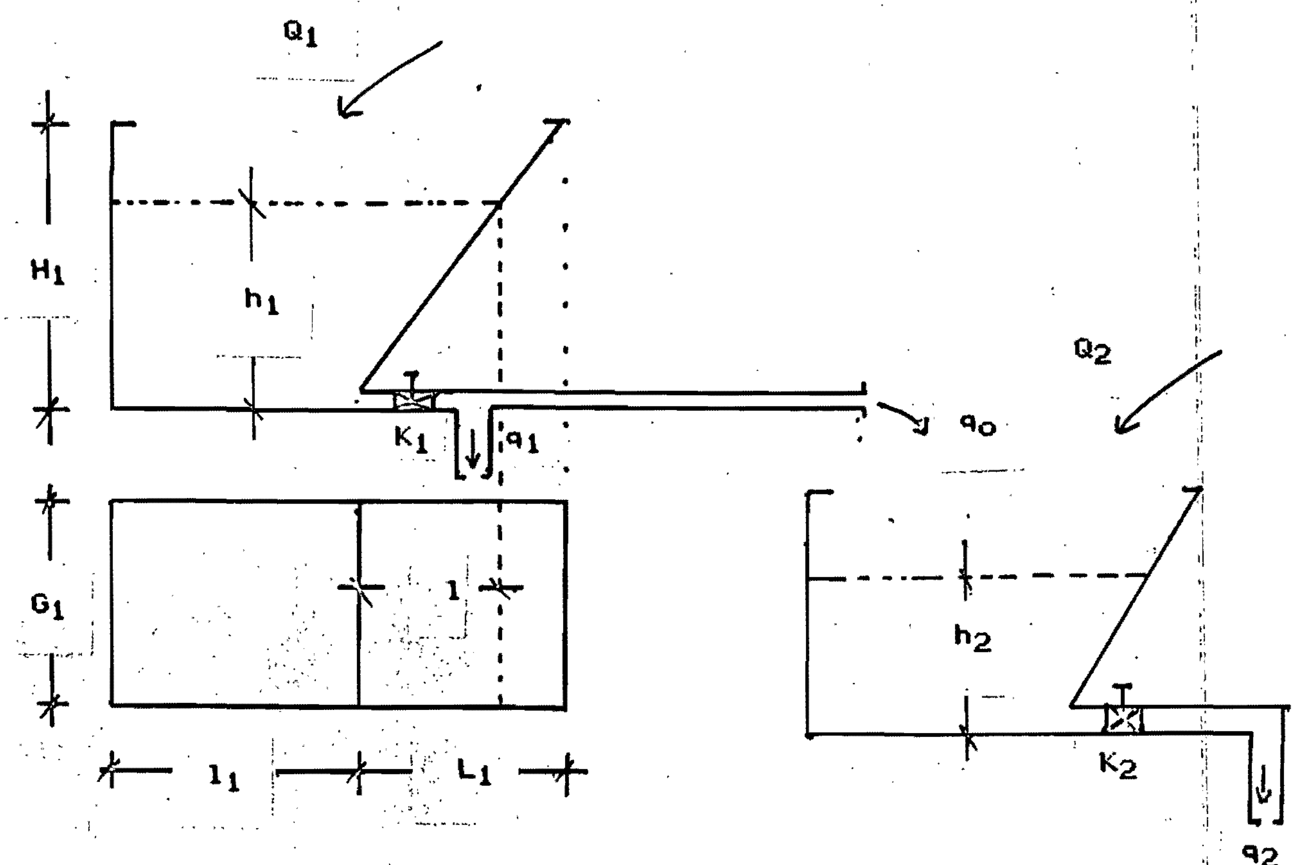
Para facilitar la utilización del programa presentaremos algunos ejemplos desde su modelado, preparación de las subrutinas necesarias y obtención de resultados.

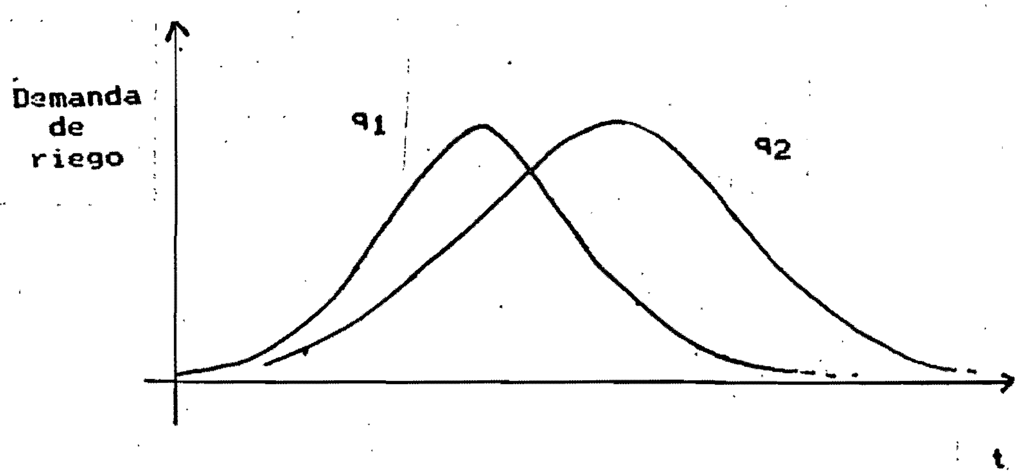
Se ha implementado un algoritmo de control óptimo, en microcomputadora Apple II para varios sistemas, entre ellos un modelo económico de orden 20, otro de riego mediante presas, y algunos problemas de aviones. Para el primer caso se obtienen los niveles de inversión requeridos en una economía descrita por las ecuaciones de Kobb-Douglas, en bienes de capital y de consumo para el seguimiento de un criterio dado, en este caso el objetivo, es el incremento de los bienes de consumo, es decir la obtención de un criterio económico para el crecimiento de la economía . Para el caso del sistema hidráulico, se calculan los niveles de consumo de agua para el cumplimiento del riego necesario durante la temporada de siembra, considerando los costos de la obtención del agua, y la asignación de un costo para el cumplimiento de las restricciones. Para los modelos de los aviones se ha aplicado el algoritmo para resolver un problema un tanto distinto, que es el seguimiento de una trayectoria dada, para la determinación del control de vuelo necesario de un avión, como piloto automático, ya sea para aterrizarlo o para seguir una trayectoria arbitraria.

Ejemplo # 1.

Para iniciar con un modelo simple de segundo orden. Consideramos al siguiente sistema hidráulico como se muestra en la figura. Dos presas reciben gastos Q_1 y Q_2 a los cuales se les asigna un costo; estos gastos simulan la cantidad de agua recibida por las presas por lluvia o afluentes de algún río, se simulan por las variables de control que representa el costo de traer dicho líquido a las presas. Por otro lado los gastos q_1 y q_2 son las cantidades de agua demandadas que simulan las necesidades de riego de alguna temporada de siembra las cuales pueden representarse por curvas de Gauss con una cierta media y varianza. El sistema tiene un modelo no lineal y se obtendrá la cantidad de agua que hay que suministrar a las presas para cumplir con las necesidades de riego óptima. Cantidad de agua óptima se refiere a la cantidad que cumpla las necesidades en forma satisfactoria al costo mínimo.

Para el presente ejemplo modelaremos al sistema con las ecuaciones con la notación normal y posteriormente las escribiremos en el lenguaje propio requerido por las subrutinas en FORTRAN. Pero para los ejemplos posteriores se expresarán directamente en el lenguaje requerido usado en el programa con la notación utilizada en el programa.


Q1
H1
h1
K1
q1
q0
Q2
G1
1
h2
K2
q2
l1
L1


Demanda
de
riego
q1
q2
t

PREPARACION DE LA SUBRUTINA RH

K_1 ,	Constante de la válvula 1
K_2 ,	Constante de la válvula 2
h_1 ,	Altura del nivel de la Presa 1
h_2 ,	Altura del nivel de la Presa 2
Q_1 , Q_2	Gastos de llegada a las presas
V_1 , V_2 .	Volumen de las presas.
q_{k1}, q_{k2}	Flujo que pasa por la válvula 1 y 2.
q_1 , q_2	Flujos de demanda de riego.
q_0	Flujo de escurrimiento de la presa 1 a la 2.
A_1 , A_2	Area de la superficie del líquido.
G_1 , G_2	Grosor de la base de las presas.
L_1 , L_2	Largo de la superficie máxima.
l_1 , l_2 ,	Largo de la base.
l ,	Largo del nivel al aumentar el nivel.
H_1 , H_2 ,	Altura de las presas.
t ,	Unidades de tiempo.

Modelado de la Primera Presa.

La variación del volumen en términos de los flujos:

$$\frac{d\,V_1}{dt} = Q_1 - q_{k1}$$

El volumen :

$$V_1 = A_1\,h_1$$

$$A_1 = G_1\,L_1 + G_1\,l$$

Note que: $l = f\,(h_1)$

por lo cual podemos escribir:

$$\frac{L_1}{H_1} = \frac{l}{h_1}$$

y despejando la variable deseada:

$$l = \frac{L_1}{H_1} h_1$$

Por lo tanto: $A_1 = G_1 \left(l_1 + \frac{L_1}{H_1} h_1 \right)$

De donde : $V_1 = G_1 \left(l_1 h_1 + \frac{L_1}{H_1} h_1^2 \right)$

Observe las ecuaciones anteriores son las mismas para la segunda presa con sus respectivos parámetros.

Ahora para los flujos tenemos :

$$q_{k1} = q_1 + q_0$$

$$q_{k1} = k_1 h_1^{0.5}$$

Las curvas de Gauss con media 5 y 7.5. con varianza 2.5 y 2.0 respectivamente.

$$q_1 = \frac{1}{2.5 (2PI)^{1/2}} e^{-0.5(t - 7.5)^2 / 2.5^2}$$

$$q_2 = \frac{1}{2.0 (2PI)^{1/2}} e^{-0.5(t - 5.0)^2 / 2.0^2}$$

Con estas ecuaciones ya podemos plantear la ecuación de estado del sistema.

$$\frac{d \quad G_1 (l_1 h_1 + L_1/H_1 \; h_1^2)}{dt} = Q_1 - k_1 (h)^{0.5}$$

Hacemos notar algunas restricciones propias del sistema :

$$q_1 =< q_{k1}$$

$$\frac{d h_1}{dt} = \frac{H_1}{H_1 G_1 l_1 + 2 G_1 L_1 h_1} (Q_1 - k_1 (h_1))$$

De igual forma que para la presa anterior;

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{H_2}{H_2 G_2 l_2 + 2 G_2 L_2 h_2} (Q_2 + k_1 (h_1) + q_1 - q_2)$$

La función objetivo debe introducirse como la tercera ecuación de estado del sistema.

Donde C_1 , C_2 representan los costos para el seguimiento de las funciones que hay que satisfacer, C_3 , C_4 son los costos asignados por llevar el liquido a las presas 1 y 2 respectivamente.

$$\frac{dh_3}{dt} = C_1 (q_1 - Q_1)^2 + C_2 (q_2 - Q_2)^2 + C_3 Q_1^2 + C_4 Q_2^2$$

Para no hacer cálculos en forma excesiva durante el programa definimos las siguientes variables:

$H_1 G_1 l_1$ = A1G1E1

$H_2 G_2 l_2$ = A2G2E2

$2 G_1 L_1 h_1$ = DG1L1*X(1)

$2 G_2 L_2 h_2$ = DG2L2*X(2)

Para detallar los aspectos de la siguiente sección consulte el capítulo cinco.

LA SUBRUTINA RH (PARA LA EVALUACION DE LA TRAYECTORIA DEL SISTEMA)

Como puede observarse se igualan las variables de estado de la forma siguiente:

X(1) = h_1

X(2) = h_2

X(3) = Objetivo (variable adjunta al sistema)

El tiempo presente del sistema sera (L - 1) * H (donde L - 1 es el indice de tiempo y H el paso de integración respectivamente).

```
CU1 = PI2 * EXP (-((L-1.0) * H - 5.0)**2 / 8.0)

CU1 = PI25 * EXP (-((L-1.0) * H -7.5)**2 / 12.5)
```

El gasto en la válvula 1.

```
CURH1 = K1 * SQRT (X(1))
```

Las ecuaciones de estado del sistema en FORTRAN:

```
D(1) = H1 * (U(1) - CURH1)/(A1G1E1 + DG1L1 * X(1))
```

```
D(2) = H2 * (U(2) - CURH1 - CU1 - CU2)/(A2G2E2 + DG2L2 * X(2))
```

La funcion objetivo (en donde se indican los costos asignados al sistema

```
D(3) = C1 * (U(1) - CU1)**2 +C2 * (U(2)-CU2)**2 + C3 * U(1)**2 +

        C4 * U(2)**2
```

La subrutina DFIXJ se refiere a las derivadas de las ecuaciones de estado con respecto a las variables de estado.

La subrutina DFUJ se refiere a las derivadas de las ecuaciones de estado con respecto a los controles del sistema.

Las subrutinas lucirán de la forma siguiente:

```
      FUNCTION FLUJO(KTIPO,LTIEM)
      COMMON/P/H1,H2,H1G1E1,H2G2E2,DG2L2,PI2,PI25
     *,CA1,C1,C2,C3,C4,H,DG1L1
      IF(KTIPO.EQ.1)FLUJO=PI2*EXP(-((LTIEM-1.0)*H-5.0)**2/8.0)
      IF(KTIPO.EQ.2)FLUJO=PI25*EXP(-((LTIEM-1.0)*H-7.5)**2/12.5)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE RH(N,IU,X,U,L,D)
      DIMENSION X(N),D(N),U(IU)
      COMMON/P/H1,H2,H1G1E1,H2G2E2,DG2L2,PI2,PI25
     *,CA1,C1,C2,C3,C4,H,DG1L1
C-ECUACIONES DE ESTADO DEL SISTEMA
      CU1=FLUJO(1,L)
      CU2=FLUJO(2,L)
C-RESTRICCIONES DEL PROBLEMA
      CURH1=CA1*SQRT(X(1))
      CUO=CURH1-CU1
      IF(CU1.GT.CURH1) CU1=CURH1
      IF(CU1.GT.CURH1) CUO=0.0
      D(1)=H1*(U(1)-CURH1)/(H1G1E1+DG1L1*X(1))
      D(2)=H2*(U(2)+CUO-CU2)/(H2G2E2+DG2L2*X(2))
      D(3)=C1*(U(1)-CU1)**2+C2*(U(2)-CU2)**2
     *+C3*U(1)**2+C4*U(2)**2
      RETURN
      END
      SUBROUTINE DFIXJ(N,IU,X,U,FIJ,J,L)
      DIMENSION X(N),U(IU),FIJ(N)
      COMMON/P/H1,H2,H1G1E1,H2G2E2,DG2L2,PI2,PI25
     *,CA1,C1,C2,C3,C4,H,DG1L1
C-PARCIALES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO CON RESPECTO A X(J)
      IF(J.NE.1) GOTO 1
      SQR=SQRT(X(1))
      IF(SQR.EQ.0.) GOTO 5
      FIJ(1)=(-H1*U(1)*DG1L1+H1*CA1*((H1G1E1+DG1L1*X(1
     *))*(1.0/(2.0*SQR))+SQR*DG1L1))
     */(H1G1E1+DG1L1*X(1))**2
      FIJ(2)=(-CA1*H2)/(2.0*SQR*(H2G2E2+DG2L2*X(2)))
      FIJ(3)=0.0
      RETURN
    1 IF(J.NE.2)GOTO 2
      CU1=FLUJO(1,L)
      CU2=FLUJO(2,L)
      CURH1=CA1*SQRT(X(1))
      IF(CU1.GT.CURH1) CU1=CURH1
      FIJ(1)=0.0
      FIJ(2)=-(U(2)-CU1-CU2+CURH1)*DG2L2*H2
     */(H2G2E2+DG2L2*X(2))**2
      FIJ(3)=0.0
      RETURN
    2 IF(J.NE.3)GOTO 3
    5 DO 4 I=1,3
    4 FIJ(I)=0.0
    3 RETURN
      END
      SUBROUTINE DFUJ(N,IU,X,U,DFU,J,L)
      DIMENSION X(N),U(IU),DFU(N)
      COMMON/P/H1,H2,H1G1E1,H2G2E2,DG2L2,PI2,PI25
     *,CA1,C1,C2,C3,C4,H,DG1L1
C-PARCIALES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO CON RESPECTO A U(J)
      IF(J.NE.1) GOTO 2
      CU1=FLUJO(1,L)
      DFU(1)=H1/(H1G1E1+DG1L1*X(1))
      DFU(2)=0.0
      DFU(3)=1.0*(2.0*C1*(U(1)-CU1)+2.0*C3*U(1))
      RETURN
    2 IF(J.NE.2) GOTO 3
      CU2=FLUJO(2,L)
      CU2=PI25*EXP(-((L-1.0)*H-7.5)**2/12.5)
      DFU(1)=0.0
      DFU(2)=H2/(H2G2E2+DG2L2*X(2))
      DFU(3)=2.0*C2*(U(2)-CU2)+2.0*C4*U(2)
    3 RETURN
      END
```

INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS.

Al aplicar el algoritmo al sistema hidráulico, obtenemos las figuras anexas en las páginas siguientes. La interpretación de los resultados es: La primera trayectoria óptima es la altura de la presa 1. como se observa en la figura (TRAYECTORIA X(1)), el nivel parte de 1.0 (estado inicial) y disminuye aproximadamente en forma lineal hasta 0.67 después de 15 intervalos de tiempo, esto se debe a que el suministro óptimo (CONTROL OPTIMO U(1)) de agua necesario para seguir la demanda de riego es semejante a la curva requerida mostrada al inicio del ejemplo con los efectos capacitivos propios del sistema que producen un retrazo en la respuesta del sistema, el punto máximo de los controles óptimos presentan el valor medio ligeramente defasado de las medias correspondientes de las curvas de demanda, y el flujo que llega de la presa 1 a la presa 2 incrementará el nivel de la presa 2 de 1.0 hasta 1.32 como aparece en la gráfica TRAYECTORIA X(2), por ello también el CONTROL OPTIMO U(2) tiene la forma de la curva de demanda de la presa 2, a pesar de las características no lineales de la forma de las presas, de las leyes de las válvulas y las formas de las curvas de demanda, el comportamiento del sistema es para la solución óptima curvas suaves que muy bien podrían aproximarse a una forma lineal. Resulta muy interesante la observación de que las exitaciónes del sistema U(1) y U(2) son curvas de Gauss (para la solución óptima) y la respuesta X(1) y X(2), son por el contrario rectas con una pendiente semejante entre si, es claro el efecto de los parámetros del sistema. que para este ejemplo se han tomado las mismas dimensiones y características en ambas presas, por esto los resultados se esperaban de esta forma. El objetivo es el valor de la desviación acumulada en el transcurso de 15 pasos de tiempo y que al inicio del proceso de optimización estos valores erán mucho mayores, hacemos notar que la desviación total integral en el tiempo final es de 0.12, este valor esta condicionado a diferentes factores por ejemplo el peso de los costos asignados para el seguimiento de las curvas y el costo del líquido que se suministra a las presas, más adelante mostrarémos el proceso de minimización.

TRAYECTORIA   X(1)

```
                   I---------------------------------------------------I
  1   .1000E+01    I..................................................*I
  2   .9750E+00    I..............................................*    I
  3   .9503E+00    I..........................................*        I
  4   .9258E+00    I......................................*            I
  5   .9016E+00    I...................................*               I
  6   .8776E+00    I...............................*                   I
  7   .8538E+00    I...........................*                       I
  8   .8303E+00    I........................*                          I
  9   .8069E+00    I....................*                              I
 10   .7836E+00    I.................*                                 I
 11   .7605E+00    I.............*                                     I
 12   .7375E+00    I..........*                                        I
 13   .7148E+00    I......*                                            I
 14   .6924E+00    I...*                                               I
 15   .6702E+00    I*                                                  I
                   I---------------------------------------------------I
```

TRAYECTORIA   X(2)

```
                   I---------------------------------------------------I
  1   .1000E+01    I*                                                  I
  2   .1027E+01    I....*                                              I
  3   .1054E+01    I........*                                          I
  4   .1079E+01    I............*                                      I
  5   .1105E+01    I...............*                                   I
  6   .1129E+01    I...................*                               I
  7   .1153E+01    I.......................*                           I
  8   .1176E+01    I..........................*                        I
  9   .1199E+01    I..............................*                    I
 10   .1222E+01    I.................................*                 I
 11   .1244E+01    I.....................................*             I
 12   .1266E+01    I........................................*          I
 13   .1287E+01    I...........................................*       I
 14   .1309E+01    I..............................................*    I
 15   .1329E+01    I..................................................*I
                   I---------------------------------------------------I
```

E L   O B J E T I V O

```
                        I--------------------------------------------------I
  1     .0000E+00       I*                                                 I
  2     .0000E+00       I*                                                 I
  3     .4000E-03       I*                                                 I
  4     .2600E-02       I.*                                                I
  5     .1040E-01       I....*                                             I
  6     .2770E-01       I..........*                                       I
  7     .5230E-01       I....................*                             I
  8     .7670E-01       I..............................*                   I
  9     .9620E-01       I.....................................*            I
 10     .1106E+00       I...........................................*      I
 11     .1198E+00       I...............................................*  I
 12     .1245E+00       I.................................................*I
 13     .1263E+00       I.................................................*I
 14     .1268E+00       I.................................................*I
 15     .1269E+00       I.................................................*I
                        I--------------------------------------------------I
```

CONTROL OPTIMO   U(1)

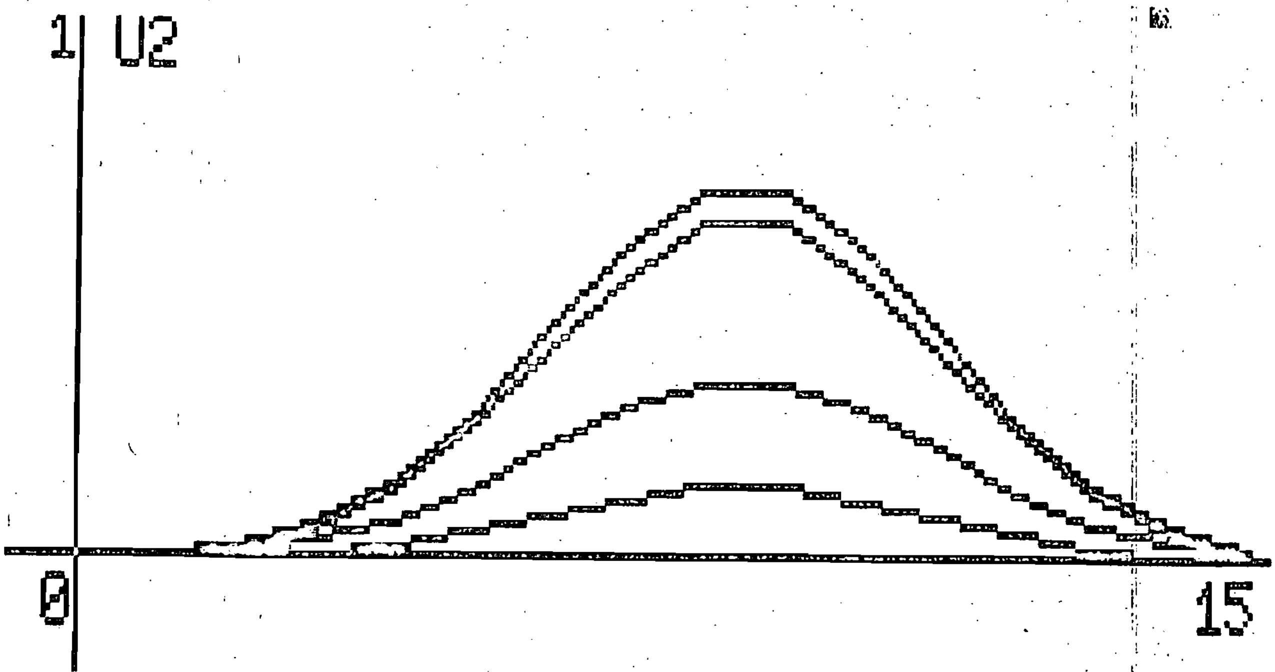
```
                        I--------------------------------------------------I
  1     .4400E-02       I..*                                               I
  2     .1350E-01       I......*                                           I
  3     .3230E-01       I................*                                 I
  4     .6040E-01       I..............................*                   I
  5     .8790E-01       I............................................*     I
  6     .9960E-01       I.................................................*I
  7     .8790E-01       I............................................*     I
  8     .6040E-01       I..............................*                   I
  9     .3230E-01       I................*                                 I
 10     .1350E-01       I......*                                           I
 11     .4400E-02       I..*                                               I
 12     .1100E-02       I*                                                 I
 13     .2000E-03       I*                                                 I
 14     .0000E+00       I*                                                 I
 15     .0000E+00       I*                                                 I
                        I--------------------------------------------------I
```

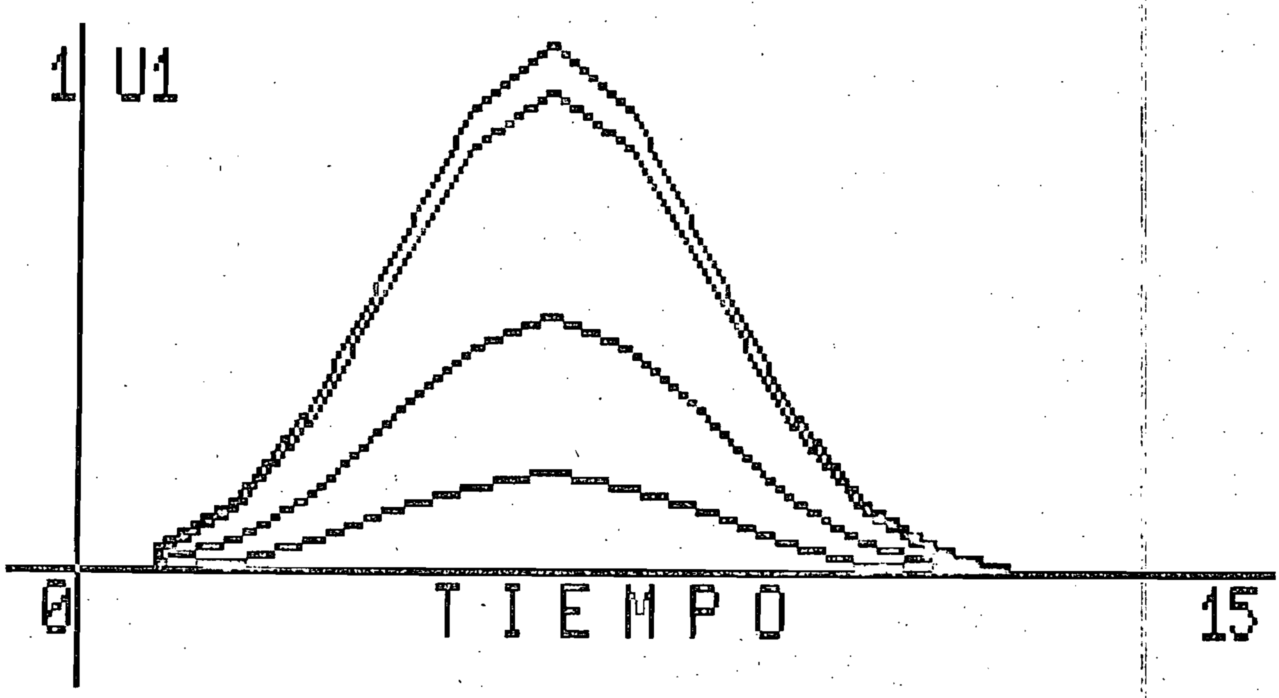
CONTROL OPTIMO U(2)

```
                        I---------------------------------------------------I
  1     .9000E-03      I*                                                  I
  2     .2700E-02      I.*                                                 I
  3     .7100E-02      I....*                                              I
  4     .1580E-01      I.........*                                         I
  5     .2990E-01      I..................*                                I
  6     .4830E-01      I...............................*                   I
  7     .6660E-01      I...........................................*       I
  8     .7810E-01      I..................................................*I
  9     .7810E-01      I..................................................*I
 10     .6660E-01      I...........................................*       I
 11     .4830E-01      I...............................*                   I
 12     .2990E-01      I..................*                                I
 13     .1580E-01      I.........*                                         I
 14     .7100E-02      I....*                                              I
 15     .2700E-02      I.*                                                 I
                        I---------------------------------------------------I
```

EL PROCESO DE MINIMIZACION

En la siguiente página se muestra el proceso por el cual los controles toman valores cada vez más cercanos a los resultados esperados al transcurrir las iteraciones de minimización del algoritmo, el control en este caso lo realizan los flujos de entrada a las presas, los cuales deben de cumplir con el seguimiento de demanda requerido por las zonas de riego, las curvas de la temporada de riego son dos distribuciones normales, y los resultados nos indican como es necesario abastecer con mayor cantidad de agua a las presas en el momento de mayor demanda, es clara la existencia de un defasamiento debido a la capacitancia propia del sistema. El control inicial asignado a este problema es nulo, conforme la minimización avanza el valor de los controles se va incrementando produciendo la minimización requerida del funcional objetivo, como se ilustra el proceso de optimización adquiere rápidamente valores más cercanos a la solución (que son los controles óptimos mostrados en las figuras anteriores de baja resolución), hacemos la aclaración de que las curvas siguientes están escaladas para poder apreciar el algoritmo claramente, es en tan solo 4 iteraciones en que se obtiene el mínimo, es evidente la simplicidad del sistema puesto que es de segundo orden, es para sistemas de mayor orden incrementar el número de iteraciones, o para sistemas dificilmente controlables para los cuales es necesario incrementarlas.


1
U2
0
15


1
U1
0
TIEMPO
15

Ejemplo #2

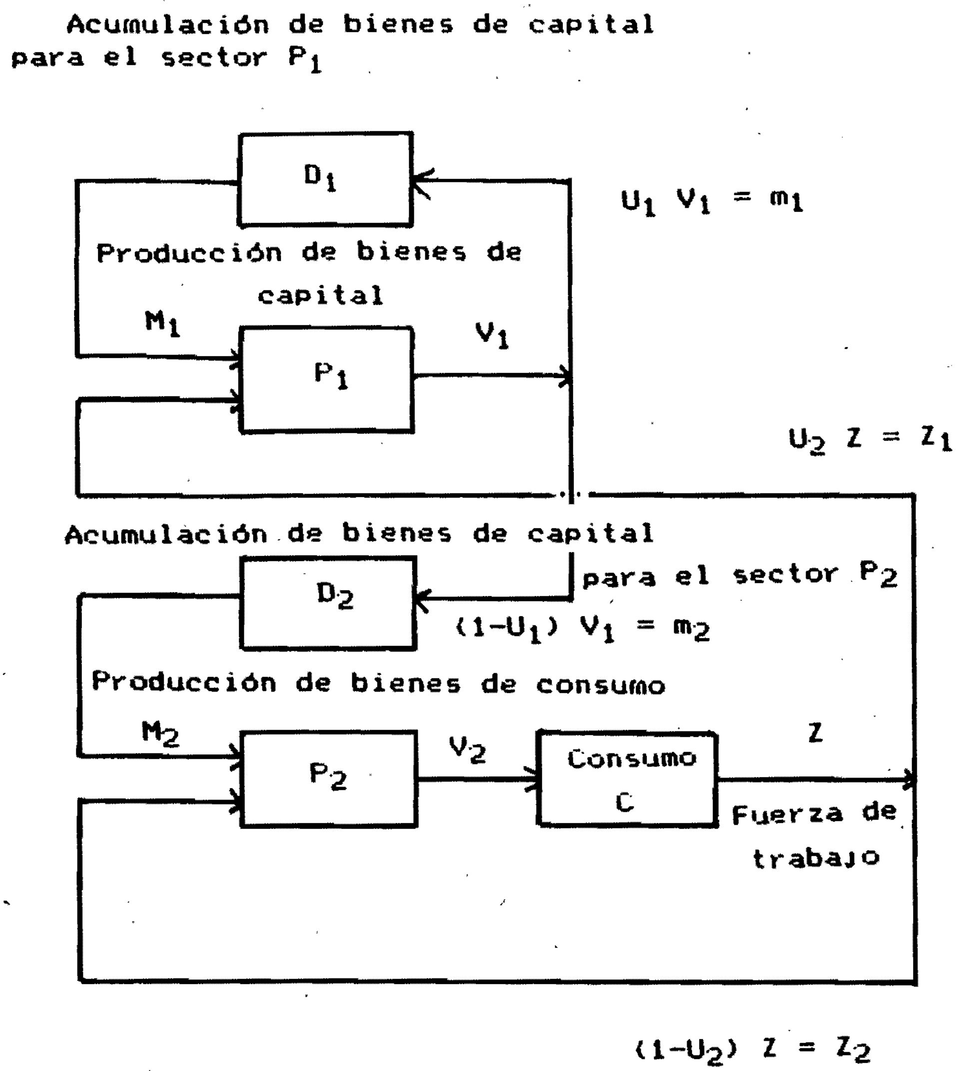
Los aspectos técnicos de control para el siguiente modelo económico son:

Se determina la influencia de la variación de parámetros, no como un resultado de sensibilidad sino con cambios en los parámetros en forma significativa;

$$\dot{X}(t) = f[X(t),U(t),P(t),t]$$

donde P(t) es algún vector de parámetros (note que el tratar a P(t) como un proceso estocástico), se obtiene un sistema de control estocástico. Obtener los resultados de la distribución del vector de estados X(t) tiene relativa dificultad. En algunos casos la representación numérica y el procesamiento de una distribución multidimensional es laboriosa, en particular si el sistema no es lineal, se requieren para calcular la distribución de X(t) para varios instantes de tiempo, la descripción de las características estocásticas de P(t) (suponiendo que U(t) sea dato). Este tipo de información no ésta disponible en la mayoría de los casos prácticos, y normalmente se llevan a cabo por medio de consideraciones que adaptan el modelo a situaciones precisas, la teoría de control juega un papel importante en este problema puesto que trata de dirigir un sistema por una senda definida y es necesario determinar las características con las que pueda precisar o indagar el comportamiento del sistema.

Supongamos que conocemos las restricciones impuestas a los cambios de los parámetros P(t) que pertenece a W(t) donde W es una multifunción. Para conocer la influencia de P en el sistema necesitamos alcanzar un conjunto (f,W), donde la función P se trate como la variable de control y U (que era la variable de control anterior se fije a un valor, el cual puede ser óptimo).


Acumulación de bienes de capital
para el sector P_1
D_1
$U_1 V_1 = m_1$
Producción de bienes de capital
M_1
V_1
P_1
$U_2 Z = Z_1$
Acumulación de bienes de capital
para el sector P_2
D_2
$(1-U_1) V_1 = m_2$
Producción de bienes de consumo
M_2
P_2
V_2
Consumo C
Z
Fuerza de trabajo
$(1-U_2) Z = Z_2$

Consideremos un sistema económico, integrado por dos sectores como el que se indica en la figura donde:

P_1 Representa la producción de bienes de inversión V_1 .

P_2 Es el sector que produce bienes de consumo V_2.

C Representa el consumo.

Z Se utiliza para la fuerza de trabajo.

U_1 , U_2 Son las variables de control que determinan los flujos m_1, m_2

D_1 D_2 Son algunos elementos dinámicos que representan la acumulación y la expiración de las inversiones.

M_i El total de equipo o capital (capacidad instalada) en el sector i se asume que es:

$$M_i(t) = \int m_i (t - s) W_i(s) \, ds \qquad i=1,2$$

W_i (s) es alguna función de peso que representa la eficiencia dinámica de las inversiones

Supongamos que la producción v_i está descrita por la función de Kobb-Douglas.

$$v_i = A_i M_i^{S_i} Z_i^{(1-S_i)}$$

Donde S_i y A_i son algunas constantes conocidas S_i pertenece a (0,1) para i = 1,2.

La versión discreta del modelo :

$$M_{i,k+1} = h \sum_{j=1}^{L} m_{i,k-j+1} W_{i,j}$$

h denota el paso de tiempo, el segundo indice k+1 denota el tiempo e i=1,2. Asumimos que el número L existe si $W_{i,k} = 0$ para todo $k > L$. Ahora supongamos que la fuerza de trabajo esta determinada por el consumo (como es de esperar, puesto que al aumentar la demanda de bienes de consumo se requiere del aumento de la capacidad ociosa y esta permite del incremento de la fuerza de trabajo), por tanto $Z = c\, v_2$, $c > 0$ tomando en cuenta las consideraciones anteriores es fácil llegar a:

$$\{1\} \qquad v_1 = A_1 M_1^{S_1} (u_2 c \, v_2)^{(1-S_1)}$$

$$\{2\} \qquad v_2 = \{ \; A_2 \, M_2^{S_2} \; [\; (\; (1-u_2) \; c \;]^{(1-S_2)} \qquad \}^{1/S_2}$$

Con el fin de calcular $M_{i,k+1}$ necesitamos $m_{i,n}$

para $n = k, k-1, \ldots, k-L+1$. Denotemos

$$m_{1,k-1} = P_{1,k} \; , \; m_{1,k-2} = P_{2,k} \; ,\ldots, \; m_{1,\,k-L+1} = P_{L-1,k}$$

$$m_{2,k-1} = r_{1,k} \; , \; m_{2,k-2} = r_{2,k} \; ,\ldots, \; m_{2,\,k-L+1} = r_{L-1,k}$$

Según la fórmula de integración simple

$$\Delta X_k = (\; X_{k+1} - X_k \;) \; / \; h$$

$$\Delta M_{i,k} = \sum_{j=1}^{L} m_{i,k-j+1} \, W_{1,j} - M_{1,k} \; / \; h$$

$$\Delta M_{i,k} = \sum_{j=2}^{L} P_{j-1,k} - W_{1,j} + v_{1,k} \, u_{1,k} \, W_{1,1} - M_{1,k} \; / \; h$$

Tomando en cuenta que:

$$h \;\; \Delta P_{i,k} = P_{i,k-1} - P_{i,k} \quad \text{para } i=2,\ldots,L-1$$

$$h \;\; \Delta P_{j,k} = P_{1,k+1} - P_{1,k} = u_{1,k} \, v_{1,k} - P_{1,k}$$

Y omitiendo el índice k tenemos:

LAS ECUACIONES DE ESTADO DEL SISTEMA ECONOMICO

$$\Delta M_1 = \sum_{j=2}^{L} P_{j-1} - W_{1,j} + v_1 \; u_1 \; W_{1,1} - M_1 \; / \; h$$

$$\Delta M_2 = \sum_{j=2}^{L} r_{j-1} - W_{2,j} + v_1 (1-u_1) \; W_{2,1} - M_2 \; / \; h$$

$$\Delta P_1 = (\; u_1 \; v_1 - P_1 \;) \; / \; h$$

$$\Delta P_2 = (\; P_1 \quad - P_2 \;) \; / \; h$$

$$\vdots$$

$$\Delta P_{L-1} = (P_{L-2} - P_{L-1}) / h$$

$$\Delta r_1 = [(1 - u_1) v - r_1)] / h$$

$$\Delta r_2 = (r_1 - r_2) / h$$

$$\vdots$$

$$\Delta r_{L-1} = (r_{L-2} - r_{L-1}) / h$$

Todos los parámetros son conocidos, la única variable que hace falta sustituir en estas ecuaciones es v_1 (ecuacion (1)), que está en términos de v_2 (ecuación (2)), pero v_2 está en términos de parámetros del sistema y puede sustituirse en la ecuacion (1) para obtener el valor de v_1 en función de los datos del sistema, las variables de estado del sistema se definen por:

$$X_1 = M_1 \qquad X_2 = M_2 \qquad X_{i+2} = P_i \qquad i = 1, \ldots, 9$$

$$X_{i+11} = r_i \qquad i = 1, \ldots, 9$$

Recuerde que es necesario agregar una variable ficticia X_{21} para poder aplicar el algoritmo descrito, en los capitulos anteriores. La cual representa el valor del objetivo a minimizar.

Los resultados de aplicar este algoritmo son: las inversiones necesarias para el sector P_1 que como lo muestra la figuras a, el valor de la inversión óptima para la economía simulada en un tiempo inicial es alto a diferencia de su valor final en donde una mayor parte de los recursos (1-U(1)) se destinan al sector productor de bienes de consumo. para la figuras b sucede que los recursos obtenidos de la realización de la producción del sector de consumo se destinan en un inicio a dinamizar en forma más significativa al mismo sector ya que (1-U(2)) es el valor de las inversiones de este sector y en la gráficas b se nota, el valor pequeño de las inversiones destinadas a la producción de bienes de capital (apóyese en el esquema económico dibujado al principio de este ejemplo), el crecimiento económico puede notarse en las figuras b. donde en la primera tenemos el monto de las inversiones óptimas, resultado de las políticas de acumulación anteriormente citadas, note como era de esperar como este valor se va incrementando con el transcurso del tiempo al igual que el monto de estas en el sector de bienes de consumo y el total de consumo en el período que es la última gráfica c. El valor del consumo del sistema es el valor del objetivo y que en el procedimiento empleado es el valor de la última variable del sistema X_n es la variable ficticia la cual se agrega al modelo para la aplicación del algoritmo.

Las ecuaciones en lenguaje FORTRAN se muestran en el listado del programa completo.

```
C-CALCULO DE LA INVERSION EN BIENES DE CAPITAL Y DE CONSUMO
C-EN FORMA OPTIMA UTILIZANDO UN MODELO DE KOBB-DOUGLAS
      DIMENSION X(21,15),U(2,15),WP(21),G(2,15),GP(2,15),
     *P(21),XV(21),VV(10,2),W(2,10)
      COMMON /CHAN/KWE,KLP,KC,KU
      COMMON/P/A1,A2,S11,S2,C,W,H,C1,C2
C-DECLARACION DE UNA TABLA DE VALORES DE PESO
      DATA N/21/,IU/2/,WP/20*1.0,0./,VV/0.,0.1,0.3,0.5,0.6,
     *0.8,0.9,0.7,0.5,0.2,0.,0.2,0.4,0.6,0.7,0.8,0.85,0.6,
     *0.2,0.1/,
     *  TM/10./,Q0/.05/
      H=1.00
      WS=0.3
      DO 11 I=1,2
      DO 11 J=1,10
   11 W(I,J)=VV(J,I)
      KWE=1
      KLP=2
      KC=5
      KU=6
      KWY=50
      OPEN(KC,FILE='ECONOM:DATOS1.DATA')
      OPEN(KU,FILE='ECONOM:DATOS2.DATA')
      OPEN(KWE,FILE='CONSOLE:')
      OPEN(KLP,FILE='CONSOLE:')
      WRITE(KLP,2)
    2 FORMAT(/,'NITER(00,30),IMPR(00,02),COND INI(01,03,00)? ')
      READ(KLP,18) IT,KDR,KREZ
   18 FORMAT(3I2)
      WRITE (KLP,6)
    6 FORMAT(/5X,'A1,A2,S11,S2,C,C1,C2',//,'CON EL F
     *ORMATO 7F8.4'    )
C-NUMERO DE PASOS
      KT=15
      READ(KWE,4) A1,A2,S11,S2,C,C1,C2
    4 FORMAT(7F8.4)
      WRITE(KLP,3)KT,IT,KDR,KREZ
      WRITE(KLP,5)A1,A2,S11,S2,C,C1,C2
    3 FORMAT(/,'KT= ',I2,' IT= ',I2,' KDR= ',I2,' KREZ= ',I2)
    5 FORMAT(/,'A1=',F8.4,' A2=',F8.4,' S11=',F8.4,/,'S2=',F8.4
     *,'C=',F8.4,'C1=',F8.4,'C2=',F8.4)
      CALL CORR(A1,A2,S11,S2,C,C1,C2,H,W)
      CALL MXO(N,IU,X,U,G,GP,WP,KT,TM,IT,Q0,P
     *,WS,KREZ,KDR,0.05,0.95)
      CALL PLT(IU,KU,XV,XW,KT,KLP,KWY)
      CALL PLT(N,KC,XV,XW,KT,KLP,KWY)
      STOP
      END
      SUBROUTINE PLT(N,KC,X,XW,KTT,KLP,KWY)
      DIMENSION X(N),XW(KTT)
      IF(N.EQ.2)KEN=0
      IF(N.EQ.21)KEN=2
      DO 2 NRX=1,N
      KEN=KEN+1
      IF(KEN.LE.2)WRITE(KLP,224) KEN
```

```
224 FORMAT( //,4X,21H CONTROL  OPTIMO   U(   ,I1,2H)   )
    IF(KEN.GE.3.AND.KEN.LE.4)WRITE(KLP,225) KEN-2
225 FORMAT (//,16H TRAYECTORIA  X( ,I1,2H)   )
    IF(KEN.GE.5.AND.KEN.LE.22) GOTO 2
    IF(KEN.EQ.23) WRITE(KLP,226)
226 FORMAT(/,27H     E L   O B J E T I V O     )
    REWIND KC
    DO 1 K=1,KTT
    READ(KC,7,END=99)(X(I),I=1,N)
  7 FORMAT(3F13.4)
  1 XW(K)=X(NRX)
    CALL PL1(KTT,1,X1,X2,XW,0,KWY,KLP)
  2 CONTINUE
    RETURN
 99 WRITE(*,'(A)') ' E J E C U T A D O '
    END
    SUBROUTINE PL1(IW,KR,XMA,XMI,X,KRE,KW,KLP)
    DIMENSION X(IW),NZ(100)
    CHARACTER MW,IP,II,MI,MP,NZ
    DATA MW/'*'/,IP/' '/,II/'I'/,MI/'-'/,MP/'.'/
    WRITE(KLP,9)
  9 FORMAT(/)
    IF(KRE.EQ.1)GOTO 1
    XMA=X(1)
    XMI=XMA
    IN=KR+1
    DO 2 K=IN,IW,KR
    XMA=AMAX1(X(K),XMA)
  2 XMI=AMIN1(X(K),XMI)
  1 CONTINUE
    KON=0
    KW1=KW+1
    KW2=KW+2
  8 DO 3 K=2,100
    IF(K.LE.KW1)NZ(K)=MI
    IF(K.GT.KW1)NZ(K)=IP
  3 CONTINUE
    NZ(1)=II
    NZ(KW2)=II
    WRITE(KLP,4)(NZ(M),M=1,KW2)
    IF(KON.EQ.1)RETURN
  4 FORMAT(20X,100A1)
    S=XMA-XMI
    IF(S.EQ.0.) S=1.E-25
    S1=KW-1.E-5
    DO 5 K=1,IW,KR
    DO 6 L=1,KW
    NZ(L+1)=IP
    NN=1.+S1*(X(K)-XMI)/S
    IF(L.LT.NN)NZ(L+1)=MP
    IF(L.EQ.NN)NZ(L+1)=MW
  6 CONTINUE
  5 WRITE(KLP,7)K,X(K),(NZ(M),M=1,KW2)
  7 FORMAT(2X,I3,1X,E12.4,2X,100A1)
    KON=1
```

```
      GOTO 8
      END
      SUBROUTINE CORR(A1,A2,S11,S2,C,C1,C2,H,W)
      DIMENSION X(21),U(2),W(2,10)
      X=0.04
      V2=(A2*X(2)**S2*((1.-U(2))*C)**(1.-S2))**(1./S2)
      V1=A1*X(1)**S11*(U(2)*C*V2)**(1.-S11)
      ADD=0.0
      SUM=0.0
      DO 1 J=2,10
      SUM=W(1,J)+SUM
    1 ADD=W(2,J)+ADD
      Y=(X+1./H)/(V1*0.5*W(1,1)+SUM)
      Z=(X+1./H)/(V1*0.5*W(2,1)+ADD)
      DO 2 J=1,10
      W(1,J)=W(1,J)*Y
    2 W(2,J)=W(2,J)*Z
      END
      SUBROUTINE RH(N,IU,X,U,KT,D)
      DIMENSION X(21),D(N),U(IU),W(2,10)
      COMMON/P/A1,A2,S11,S2,C,W,H,C1,C2
      V2=(A2*X(2)**S2*((1.-U(2))*C)**(1.-S2))**(1./S2)
      V1=A1*X(1)**S11*(U(2)*C*V2)**(1.-S11)
      SUM=0.
      ADD=0.
      DO 1 J=2,10
      SUM=X(J+1)*W(1,J)+SUM
    1 ADD=X(J+10)*W(2,J)+ADD
      D(1)=SUM+V1*U(1)*W(1,1)-X(1)/H
      D(2)=ADD+V1*(1.-U(1))*W(2,1)-X(2)/H
      D(3)=(U(1)*V1-X(3))/H
      DO 2 I=4,11
    2 D(I)=(X(I-1)-X(I))/H
      D(12)=((1.-U(1))*V1-X(12))/H
      DO 3 K=13,20
    3 D(K)=(X(K-1)-X(K))/H
      D(21)= V2+C1*D(1)+C2*D(2)
      D(21)=-D(21)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE DFIXJ(N,IU,X,U,FIJ,J,KT)
      DIMENSION X(N),U(IU),FIJ(N),W(2,10)
      COMMON/P/A1,A2,S11,S2,C,W,H,C1,C2
      IF(J.NE.1) GOTO 1
      DV1X1=A1*S11*X(1)**(S11-1.)*(U(2)*C*(A2*X(2)**S2*((1.
     *-U(2))*C)**(1.-S2))*(1./S2))**(1.-S11)
      FIJ(1)=-1./H+U(1)*W(1,1)*DV1X1
      FIJ(2)=(1.-U(1))*W(2,1)*DV1X1
      FIJ(3)=U(1)*DV1X1/H
      DO 6 I=4,20
    6 FIJ(I)=0.
      FIJ(12)=(1.-U(1))*DV1X1/H
      FIJ(21)=+C1*FIJ(1)+C2*FIJ(2)
      FIJ(21)=-FIJ(21)
      RETURN
    1 IF(J.NE.2)GOTO 2
```

```
      DV1=A1*X(1)**S11*(1.-S11)*(U(2)*C*(A2*X(2)**S2*((1.
     *-U(2))*C)**(1.-S2))**(1./S2))**(-S11)
      X2=U(2)*C*(1./S2)
     **(A2*X(2)**S2*((1.-U(2))*C)**(1.-S2))**(1./S2-1.)
     **((1.-U(2))*C)**(1.-S2)*A2*S2*X(2)**(S2-1.)
      DV1X2=DV1*X2
      DV2X2=1./S2*(A2*X(2)**S2*((1.-U(2))*C)**(1.-S2))**
     *(1./S2-1.)*A2*X(2)**(S2-1.)*((1.-U(2))*C)*(1.-S2)
      FIJ(1)=U(1)*W(1,1)*DV1X2
      FIJ(2)=-1./H+(1.-U(1))*W(2,1)*DV1X2
      FIJ(3)=U(1)*DV1X2/H
      DO 7 K=4,20
    7 FIJ(K)=0.
      FIJ(12)=(1.-U(1))*DV1X2/H
      FIJ(21)=+DV2X2+C1*FIJ(1)+C2*FIJ(2)
      FIJ(21)=-FIJ(21)
      RETURN
    2 IF(J.GT.10)GOTO 3
      DO 8 I=2,20
    8 FIJ(I)=0.
      FIJ(1)=W(1,J-1)
      FIJ(J)=-1./H
      FIJ(J+1)=1./H
      FIJ(21)=+C1*FIJ(1)+C2*FIJ(2)
      FIJ(21)=-FIJ(21)
      RETURN
    3 IF(J.GT.11)GOTO 4
      DO 11 K=1,20
   11 FIJ(K)=0.
      FIJ(1)=W(1,10)
      FIJ(11)=-1./H
      FIJ(21)=+C1*FIJ(1)+C2*FIJ(2)
      FIJ(21)=-FIJ(21)
      RETURN
    4 IF(J.GT.19)GOTO 5
      DO 9 K=1,20
    9 FIJ(K)=0.
      FIJ(2)=W(2,J-10)
      FIJ(J)=-1./H
      FIJ(J+1)=1./H
      FIJ(21)=+C1*FIJ(1)+C2*FIJ(2)
      FIJ(21)=-FIJ(21)
      RETURN
    5 IF(J.GT.20)GOTO 12
      DO 10 K=1,19
   10 FIJ(K)=0.
      FIJ(2)=W(2,J-10)
      FIJ(20)=-1./H
      FIJ(21)=+C1*FIJ(1)+C2*FIJ(2)
      FIJ(21)=-FIJ(21)
      RETURN
   12 IF(J.GT.21)GOTO 14
      DO 13 K=1,21
   13 FIJ(K)=0.0
   14 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE DFUJ(N,IU,X,U,DFU,J)
      DIMENSION X(N),U(IU),DFU(N),W(2,10)
      COMMON /CHAN/ KWE,KLP,KC,KU
      COMMON/P/A1,A2,S11,S2,C,W,H,C1,C2
      IF(J.NE.1) GOTO 2
      V2=(A2*X(2)**S2*((1.-U(2))*C)**(1.-S2))**(1./S2)
      V1=A1*X(1)**S11*(U(2)*C*V2)**(1.-S11)
      DFU(1)=V1*W(1,1)
      DFU(2)=-V1*W(2,1)
      DFU(3)=V1/H
      DO 4 I=4,20
    4 DFU(I)=0.
      DFU(12)=-V1/H
      DFU(21)= V1*W(1,1)*C1+C2*W(2,1)*(-V1)
      DFU(21)=-DFU(21)
      RETURN
    2 IF(J.NE.2) GOTO 8
      DE=(A2*X(2)**S2*((1.-U(2))*C)**(1.-S2))
      DV1=A1*X(1)**S11*(1.-S11)*(U(2)*C*DE**(1./S2))**(-S11)
      U2=(U(2)*C*(1./S2*(A2*X(2)**
     *S2*((1.-U(2))*C)**(1.-S2))**(1./S2-1.)*A2*X(2)**S2*(1.
     *-S2)*((1.-U(2))*C)**(-S2)*(-C))+C*(A2*X(2)**S2*((1.-U(2))*C
     *)**(1.-S2))**(1./S2))
      DV1U2=DV1*U2
      DV2U2=1./S2*(A2*X(2)**S2*((1.-U(2))*C)**(1.-S2))**(1.
     */S2-1.)*A2*X(2)**S2*(1.-S2)*((1.-U(2))*C)**(-S2)*(-C)
      DFU(1)=U(1)*W(1,1)*DV1U2
      DFU(2)=(1.-U(1))*W(2,1)*DV1U2
      DFU(3)=U(1)*DV1U2/H
      DO 5 K=4,20
    5 DFU(K)=0.
      DFU(12)=(1.-U(1))*DV1U2/H
      DFU(21)=+(DV2U2+DV1U2*(C1*W(1,1)*U(1)+C2*W(2,1)*(1.-U(1))))
      DFU(21)=-DFU(21)
    8 RETURN
      END
      SUBROUTINE MXO(N,IU,X,U,G,GP,WP,KT,TM,IT,QO,P
     *,WS,KREZ,KDR,UMIN,UMAX)
C- ---------------------------------------------------------------
C- OPTIMIZACION PARA SISTEMAS DINAMICOS, DISENADO Y CODIFICADO POR
C- O.IRIS Y S.RACZYNSKI OCTUBRE 1984, MEXICO D.F.
C- ---------------------------------------------------------------
C- METODO DE LOS GRADIENTES CONJUGADOS EN EL ESPACIO DE CONTROL
C- LAS ECUACIONES DEL SISTEMA DX(I)/DT=F(X,U), U PERTENECE A (0,1)
C- EL GRADIENTE ES EVALUADO POR EL PRINCIPIO DE MAXIMUM DE
C- PONTRIAGIN. LAS ECUACIONES DEL SISTEMA SON INTRODUCIDAS
C- EN LA SUBRUTINA RH(N,IU,XT,UT,D) LA CUAL EVALUA EL ARREGLO D.
C- LA SUBRUTINA DFIXJ(N,IU,XT,UT,FIJ,J) DEBE PREPARARSE
C- POR EL USUARIO.LA CUAL EVALUA DF(I)/DX(J)  Y LO COLOCA
C- EN FIJ(I)   ,PARA I=1,2,...,N.
C- LA SUBRUTINA DFUJ(N,IU,XT,UT,DFU,J), DEBE PREPARARSE
C- POR EL USUARIO Y EVALUA  DF(I)/DU(J)  Y ES ALMACENADO EN
C-  DFU(I)   , PARA I=1,2,...,IU.
C- RESULTADO:CONTROL Y TRAYECTORIA OPTIMOS GUARDADOS EN LOS ARCHIVOS
```

```
C- KU Y KC RESPECTIVAMENTE
C- PARAMETROS FORMALES:
C-  G    - GRADIENTE
C-  GP   - GRADIENTE EN LA ITERACION PREVIA
C-  H    - PASO DE INTEGRACION
C-  IT   - MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES
C-  IU   - DIMENSION DEL VECTOR DE CONTROL
C-  KDR  - NIVEL DE IMPRESION: SI ES O NO IMPRIME , SI ES 1 IMPRIME
C-       POCO, SI ES 2 IMPRIME BASTANTE. SI ES 3 IMPRIME BASTANTE
C-       CON EL GRADIENTE Y EL CONTROL EN CADA ITERACION
C-  KREZ - TIPO DE CONTROL INICIAL: SI ES O ENTONCES EL CONTROL
C-       ES LEIDO DEL ARCHIVO KU, SI ES 1 SU VALOR ES 0.0, SI ES 2
C-       SU VALOR ES 0.5, SI ES 3 ES PUESTO A  1.0.
C-  KT   - NUMERO DE PASOS DE TIEMPO
C-  N    - DIMENSION DEL VECTOR DE ESTADOS
C-  P    - VECTOR ADJUNTO VARIABLE
C-  QO   - PASO INICIAL EN EL ESPACIO DE CONTROL
C-  TM   - CP TIEMPO LIMITE
C-  X    - EL VECTOR DE ESTADOS
C-  U    - EL VECTOR DE CONTROL
C-  WP   - LAS CONDICIONES INICIALES
C-  WS   - EL COEFICIENTE DE CONJUGACION; PERTENECE A (0,1).
C-
C-  PARAMETROS DE ENTRADA: N,IU,WP,KT,H,TM,IT,QO,WS,KREZ,KDR
C-
C-  LOS NUMEROS DE LOS CANALES DEBEN SER INTRODUCIDOS EN COMMON/CHAN
C-  KWE  - PANTALLA, KLP  - PANTALLA, KC,KU  - DISCO
C-  ARCHIVOS DE ACCESO ALEATORIO
C-
C- SUBRUTINAS AUXILIARES: SM10, SM20G
C-
      DIMENSION X(N,KT),U(IU,KT),GP(IU,KT),G(IU,KT)
     *  , WP(N),P(N)
      COMMON /CHAN/ KWE,KLP,KC,KU
      COMMON/P/A1,A2,S11,S2,C,W(2,10),H,C1,C2
      IF(KDR.GT.0)WRITE(KLP,50)N,IU,KT,H,QO,WS,KREZ,(WP(I),I=1,21)
   50 FORMAT(/5X,33H* * S U B R U T I N A   M X O * *
     *  /5X,2HN=,I3,2X,3HIU=,I3,2X,
     *  3HKT=,I3,2X,2HH=,E10.3,
     *  2X,3HQO=,E10.3/
     *  5X,3HWS=,E10.3,2X,23HTIPO DE CONTROL INICIAL  ,I2/
     *  5X,3HWP=,5X,21(F4.2,1X))
C-SE IGUALAN CONDICIONES INICIALES EN LAS VARIABLES DE ESTADO
      DO 300 L=1,N
  300 X(L,1)=WP(L)
      IDB=0
      KTER=0
C-CONTEO DE ITERACIONES KK
      KK=0
C-SE IGUALA EL PASO INICIAL EN EL ESPACIO DE CONTROL
      Q1=QO
      Q=Q1
C-CONTADOR PARA EL NUMERO DE TRAYECTORIAS INTEGRADAS
      KRT=0
      IKR=0
      SU=0.
```

```
C-NUMERO MUY GRANDE PARA LIMITAR EL OBJETIVO
      XN=1.E35
C-SEGUN EL TIPO DE CONTROL INICIAL ESCOGIDO
      IF(KREZ.EQ.0) GOTO 301
      IF(KREZ.EQ.1) UIN=UMIN
      IF(KREZ.EQ.2) UIN=(UMIN+UMAX)*0.5
      IF(KREZ.EQ.3) UIN=UMAX
      GOTO 302
C-LECTURA DEL CONTROL EN EL ARCKIVO KU
  301 REWIND KU
      DO 303 L=1,KT
  303 READ(KU,7,END=99)(U(I,L),I=1,IU)
    7 FORMAT(2F13.4)
   99 WRITE(*,'(A)') 'REALIZADO'
  302 CONTINUE
C-SE INICIALIZA EL CONTROL Y EL GRADIENTE  SE ANULA
      DO 1 L=1,KT
      DO 1 K=1,IU
      IF(KREZ.NE.0) U(K,L)=UIN
      GP(K,L)=0.
    1 G(K,L)=0.
   10 CONTINUE
      IF(KK.GE.IT)KTER=3
      IF(KTER.GT.0)GOTO 1000
      KK=KK+1
      Q=Q1
      IF(KDR.GT.1)WRITE(KLP,18)KK
   18 FORMAT(/2X,34H I T E R A C I O N   N U M E R O  ,I3,/,/
     *,62H PASO (   IT   NUMERO BUENO ) OBJETIVO       PASOS DE
     * CONTROL      ,/ )
C-
C- CALCULO DE LA TRAYECTORIA
      CALL SM10(XN,XN1,N,IU,U,X,G,KT,0.,UMIN,UMAX)
C-UNA VEZ INTEGRADO AUMENTAMOS EL CONTADOR
      KRT=KRT+1
      IF(KDR.GT.0.AND.KK.EQ.1) WRITE (KLP,103) XN1
  103 FORMAT(/15X,9HOBJETIVO=    ,E12.4/)
C-GUARDA EL VALOR DEL OBJETIVO EN XNN
      IF(KK.EQ.1)XNN=XN1
      QH=0.
C-NUEVO GRADIENTE
      CALL SM20G(N,IU,X,U,P,KT,G,GP,WS,UMIN,UMAX)
      IF(KT.LT.0)KTER=1
      IF(KT.LT.0)KT=-KT
      IF(KTER.GT.0)GOTO 1000
      KZ=0
C-
C-  PASO EN EL ESPACIO DE ESTADOS
    6 CONTINUE
C-SE LIMITA A 25 EL NUMERO DE PASOS
      IF(IKR.GT.25)GOTO 9
C- EL PASO DE CONTROL E INCREMENTO DEL NUMERO DE PASO
      QH=QH+Q
      IKR=IKR+1
C-
C-  FUNCION OBJETIVO XN1
      CALL SM10(XN,XN1,N,IU,U,X,G,KT,QH,UMIN,UMAX)
C-INCREMENTO DEL CONTADOR DE TRAYECTORIAS INTEGRADAS
```

```
      KRT=KRT+1
C-EN CASO DE QUE EL OJETIVO SEA MAYOR QUE EL LIMITE
      IF(XN1.LT.XN)GOTO 100
C-
C- MAL PASO
  101 QH=QH-Q
      K1=-KK
      IF(KDR.GT.1)WRITE(KLP,8)K1,IKR,IDB,XN1,Q1,Q
C-SE DECREMENTA EL TAMANO DEL PASO HEURISTICAMENTE
      Q=Q*.5
      IF(KZ.EQ.1)Q=-Q
C- KZ ES UN INDICADOR DE PASO BUENO O MALO
      KZ=1
      IF(IKR-IDB.GT.3) GOTO 9
      GOTO 6
C-
C-  BUEN PASO
  100 CONTINUE
      XN=XN1
      IDB=IDB+1
      IF(KDR.GT.1)WRITE(KLP,8)KK,IKR,IDB,XN,Q1,Q
C-SE INCREMENTA EL PASO EMPIRICAMENTE
      IF(KZ.NE.1)Q=Q*1.5
    8 FORMAT(5X,3I6,3(1X,E12.4))
      GOTO 6
C-
C-    FIN DE LA ITERACION PRINCIPAL
    9 CONTINUE
      IF(KDR.EQ.1)WRITE(KLP,8)KK,IKR,IDB,XN,Q1,Q
      Q1=Q1*.6
      IDB=0
      IKR=0
      KZ=0
      IF(QH.EQ.0.) GOTO 104
      DO 14 L=1,KT
      DO 14 I=1,IU
C-SE MEJORA EL CONTROL
      RU=U(I,L)+QH*G(I,L)
C- PARA LIMITAR ENTRE 0 Y 1
      RU=AMAX1(RU,UMIN)
      RU=AMIN1(RU,UMAX)
      SU=SU+ABS(RU-U(I,L))
      U(I,L)=RU
   14 CONTINUE
      IF(KDR.LE.2)GOTO 102
 1003 CONTINUE
C-EN LA PANTALLA ESCRIBE EL VALOR DEL CONTROL Y DEL GRADIENTE
      WRITE(KLP,17)
   17 FORMAT(/,5X,50H VALOR DEL CONTROL            VALOR
     * DEL GRADIENTE    )
      DO 3 L=1,KT
    3 WRITE(KLP,16)(U(I,L),I=1,IU),(G(I,L),I=1,IU)
   16 FORMAT(/(1X,2(1X,E11.4),4X,2(1X,E11.4)))
      IF(KDR.EQ.2) RETURN
  102 CONTINUE
      IF(KTER.GT.0)GOTO 1000
  104 CONTINUE
```

```
      GOTO 10
C-
C-   FIN DE LA BUSQUEDA
 1000 CALL SM10(XN,XN1,N,IU,U,X,G,KT,0.,UMIN,UMAX)
      REWIND KU
C-GUARDA EL ESTADO INICIAL EN EL ARCHIVO Y TAMBIEN EL CONTROL
      DO 304 L=1,KT
  304 WRITE(KU,7)(U(I,L),I=1,IU)
      REWIND KC
      DO 305 L=1,KT
  305 WRITE(KC,77)(X(I,L),I=1,N)
   77 FORMAT(3F13.4)
      IF(KDR.EQ.0) GOTO 1004
      WRITE(KLP,1001) KTER
 1001 FORMAT(/5X,19HFIN DE LA BUSQUEDA  ,2X,I2,/)
      XNN=XNN-XN
      XX=XNN/KRT
      WRITE(KLP,1002)KRT,XNN,XX
 1002 FORMAT(/5X,I4,1X,23HTRAJECTORIAS INTEGRADAS//
     *  5X,12HMEJORA DE  :  ,  E11.4//
     *  5X,18HMEJORA/TRAYECTORIA  ,1X,E11.4/)
      IF(KDR.EQ.2) GOTO 1003
 1004 CONTINUE
      RETURN
      END
C-----------------------------------------------------------
      SUBROUTINE SM20G(N,IU,X,U,P,KT,G,GP,WS,UMIN,UMAX)
      COMMON /CHAN/KWE,KLP,KC,KU
      COMMON/P/A1,A2,S11,S2,C,W,H,C1,C2
      DIMENSION X(N,KT),U(IU,KT),GP(IU,KT),XT(21),UT(21)
     *  ,G(IU,KT),FIJ(21),DFU(21),P(21),W(2,10)
C-SE LE DAN SUS VALORES A LAS VARIABLES ADJUNTAS
      DO 1 K=1,N
    1 P(K)=0.
      P(N)=-1.
      S1=0.
C-HACEMOS UN CONTEO REGRESIVO
      DO 4 L=1,KT
      NR=KT-L+1
C-GUARDAMOS EN XT EL VECTOR DE ESTADOS
      DO 10 K=1,N
   10 XT(K)=X(K,NR)
C-GUARDAMOS EL CONTROL EN UT
      DO 11 K=1,IU
   11 UT(K)=U(K,NR)
      SG=0.
C-GUARDA EL GRADIENTE ANTERIOR
      DO 5 J=1,IU
      GP(J,NR)=G(J,NR)
C-PARCIALES DE LAS ECUACIONES DEL ESTADO CON RESPECTO A U(J)
      CALL DFUJ(N,IU,XT,UT,DFU,J)
      S=0.
C-PARCIALES DEL HAMILTONIANO CON RESPECTO AL CONTROL
      DO 6 I=1,N
    6 S=S+DFU(I)*P(I)
C-PRODUCTO DEL VALOR MENCIONADO Y EL GRADIENTE ANTERIOR
```

```
      XG=S*GP(J,NR)
C-PARA DISMINUIR EL GRADIENTE
      IF(XG.LT.0.) S=S*0.05
C-CONTINUA EL PROCESO DE MINIMIZACION SI LOS VALORES
C-SE ENCUENTRAN EN EL RANGO PERMISIBLE EN GOTO 7
      IF(.NOT.((S.GT.(0.).AND.UT(J).LT.(UMAX)).OR.
     *  (S.LT.(0.).AND.UT(J).GT.(UMIN)))) GOTO 7
C-DE LO CONTRARIO NO ES NECESARIO VOLVER A CALCULARLOS
C-CONDICIONES NORMALES PASA POR AQUI
      S1=S1+S**2
      SG=SG+S**2
    7 CONTINUE
    5 G(J,NR)=S
C-SG ES EL PASO DEL GRADIENTE
      IF(SG.NE.0.) SG=SQRT(SG)
      IF(SG.EQ.0.) SG=1.
      DO 2 J=1,N
C-EVALUA PARCIALES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO CON
C-RESPECTO A X PARA LA EVALUACION DEL VECTOR ADJUNTO
      CALL DFIXJ(N,IU,XT,UT,FIJ,J,KT)
      S=0.
C-ESTO ES LAS PARCIALES DEL HAMILTONIANO CON RESPECTO A X
      DO 3 I=1,N
    3 S=S+P(I)*FIJ(I)
C-INTEGRACION DEL VECTOR ADJUNTO CON EL PASO DE INTEGRACION
      S=S*H
    2 P(J)=P(J)+S
    4 CONTINUE
      IF(S1.EQ.0.) KT=-KT
      IF(KT.LT.0) RETURN
      IF(S1.GT.0.) S1=SQRT(S1)
      IF(S1.EQ.0.) S1=1.
      DO 13 J=1,IU
      DO 13 NR=1,KT
      G(J,NR)=G(J,NR)/S1
      G(J,NR)=G(J,NR)+WS*GP(J,NR)
   13 GP(J,NR)=G(J,NR)
      RETURN
      END
C----------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE  SM10(XN,XN1,N,IU,U,X,G,KT,QH,UMIN,UMAX)
      DIMENSION X(N,KT),U(IU,KT),G(IU,KT),D(21),XT(21),UT(21)
     *,W(2,10)
      COMMON /CHAN/KWE,KLP,KC,KU
      COMMON/P/A1,A2,S11,S2,C,W,H,C1,C2
  235 XN1=0.
C-EN CADA PASO DE TIEMPO IGUALA  EL VECTOR DE ESTADO A XT
      DO 2 L=1,KT
      DO 5 NL=1,N
    5 XT(NL)=X(NL,L)
C-SE IGUALA AL CONTROL Y SE LIMITA AL CONTROL ENTRE (0,1).
C-MAS LA VARIACION PRODUCTO DEL GRADIENTE
      DO 6 NL=1,IU
      UU=U(NL,L)+QH*G(NL,L)
   33 FORMAT(E12.4)
```

```
      UU=AMAX1(UU,UMIN)
      UU=AMIN1(UU,UMAX)
    6 UT(NL)=UU
C-EVALUACION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO
      CALL RH(N,IU,XT,UT,KT,D)
      IF(L.EQ.KT) GOTO 7
C-X(K+1) = X(K) + H * DF(K), (FORMULA SIMPLE DE INTEGRACION)
      DO 3 KSF=1,N
    3 X(KSF,L+1)=X(KSF,L)+H*D(KSF)
    7 CONTINUE
C-LA FUNCION QUE SE VA A MINIMIZAR
      XN1=XN1+H*D(N)
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Figuras a

TRAYECTORIA X(1)

```
                      I--------------------------------------------------I
  1    .1000E+01      I*                                                 I
  2    .1040E+01      I.....*                                            I
  3    .1045E+01      I.....*                                            I
  4    .1061E+01      I.......*                                          I
  5    .1090E+01      I...........*                                      I
  6    .1126E+01      I................*                                 I
  7    .1173E+01      I......................*                           I
  8    .1229E+01      I.............................*                    I
  9    .1278E+01      I...................................*              I
 10    .1316E+01      I........................................*         I
 11    .1340E+01      I...........................................*      I
 12    .1352E+01      I.............................................*    I
 13    .1364E+01      I...............................................*  I
 14    .1377E+01      I................................................* I
 15    .1388E+01      I.................................................*I
                      I--------------------------------------------------I
```

TRAYECTORIA X(2)

```
                      I--------------------------------------------------I
  1    .1000E+01      I*                                                 I
  2    .1040E+01      I..........*                                       I
  3    .1038E+01      I.........*                                        I
  4    .1036E+01      I.........*                                        I
  5    .1033E+01      I........*                                         I
  6    .1033E+01      I........*                                         I
  7    .1033E+01      I........*                                         I
  8    .1036E+01      I.........*                                        I
  9    .1044E+01      I...........*                                      I
 10    .1057E+01      I..............*                                   I
 11    .1074E+01      I...................*                              I
 12    .1095E+01      I........................*                         I
 13    .1122E+01      I...............................*                  I
 14    .1155E+01      I........................................*         I
 15    .1193E+01      I.................................................*I
                      I--------------------------------------------------I
```

Figuras b

```
GRAFICACION DEL SISTEMA OPTIMIZADO

     CONTROL   OPTIMO   U(1)


                      I-------------------------------------------------I
   1     .5610E+00    I................................................*I
   2     .5616E+00    I................................................*I
   3     .5599E+00    I...............................................* I
   4     .5585E+00    I..............................................*  I
   5     .5572E+00    I.............................................*   I
   6     .5562E+00    I............................................*    I
   7     .5542E+00    I..........................................*      I
   8     .5514E+00    I........................................*        I
   9     .5441E+00    I..................................*              I
  10     .5336E+00    I...........................*                     I
  11     .5239E+00    I...................*                             I
  12     .5151E+00    I............*                                    I
  13     .5076E+00    I......*                                          I
  14     .5026E+00    I..*                                              I
  15     .5000E+00    I*                                                I
                      I-------------------------------------------------I

     CONTROL   OPTIMO   U(2)


                      I-------------------------------------------------I
   1     .5407E+00    I*                                                I
   2     .5448E+00    I....*                                            I
   3     .5476E+00    I.......*                                         I
   4     .5505E+00    I..........*                                      I
   5     .5537E+00    I..............*                                  I
   6     .5570E+00    I.................*                               I
   7     .5604E+00    I.....................*                           I
   8     .5640E+00    I.........................*                       I
   9     .5681E+00    I.............................*                   I
  10     .5721E+00    I.................................*               I
  11     .5757E+00    I.....................................*           I
  12     .5790E+00    I.........................................*       I
  13     .5821E+00    I............................................*    I
  14     .5847E+00    I..............................................*  I
  15     .5869E+00    I................................................*I
                      I-------------------------------------------------I
```

Figura c

El OBJETIVO

```
                     I-------------------------------------------------I
 1     .0000E+00     I................................................*I
 2    -.6064E+01     I............................................*    I
 3    -.8701E+01     I..........................................*      I
 4    -.1245E+02     I.......................................*         I
 5    -.1742E+02     I....................................*            I
 6    -.2311E+02     I................................*                I
 7    -.2994E+02     I...........................*                     I
 8    -.3759E+02     I.....................*                           I
 9    -.4449E+02     I.................*                               I
10    -.5038E+02     I.............*                                   I
11    -.5484E+02     I.........*                                       I
12    -.5822E+02     I.......*                                         I
13    -.6156E+02     I....*                                            I
14    -.6496E+02     I..*                                              I
15    -.6827E+02     I*                                                I
                     I-------------------------------------------------I
```

Ejemplo #3

Se desea obtener el control de un avión para poder aterrizarlo o para poder seguir una trayectoria específica, hacemos notar que la aplicación del algoritmo de control es un tanto diferente a lo que hasta ahora habíamos mencionado. El fin de este ejemplo es mostrar una de las alternativas del uso de este algoritmo para diferentes sistemas. En este caso no trataremos de minimizar ní costos ní energías sino más bien cumplir con una restricción, la cual en este sistema es el seguimiento de una trayectoria de aterrizaje para determinar el valor del control para llevar al avión a la pista de aterrizaje o para seguir una trayectoria de vuelo.

Definición de variables.

A	Angulo de ataque
Q	Angulo de inclinación (dirección aparente del avión)
G	Angulo de la trayectoria de vuelo (dirección real del avión)
h	Altura de la nave
$\dot{h}$	Variación de la altura (velocidad vertical de la nave)

Las variables de estado del sistema son:

$$X_1 = \dot{Q} \qquad X_2 = Q \qquad X_3 = \dot{h} \qquad X_4 = h$$

La matriz del sistema y el vector del control:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

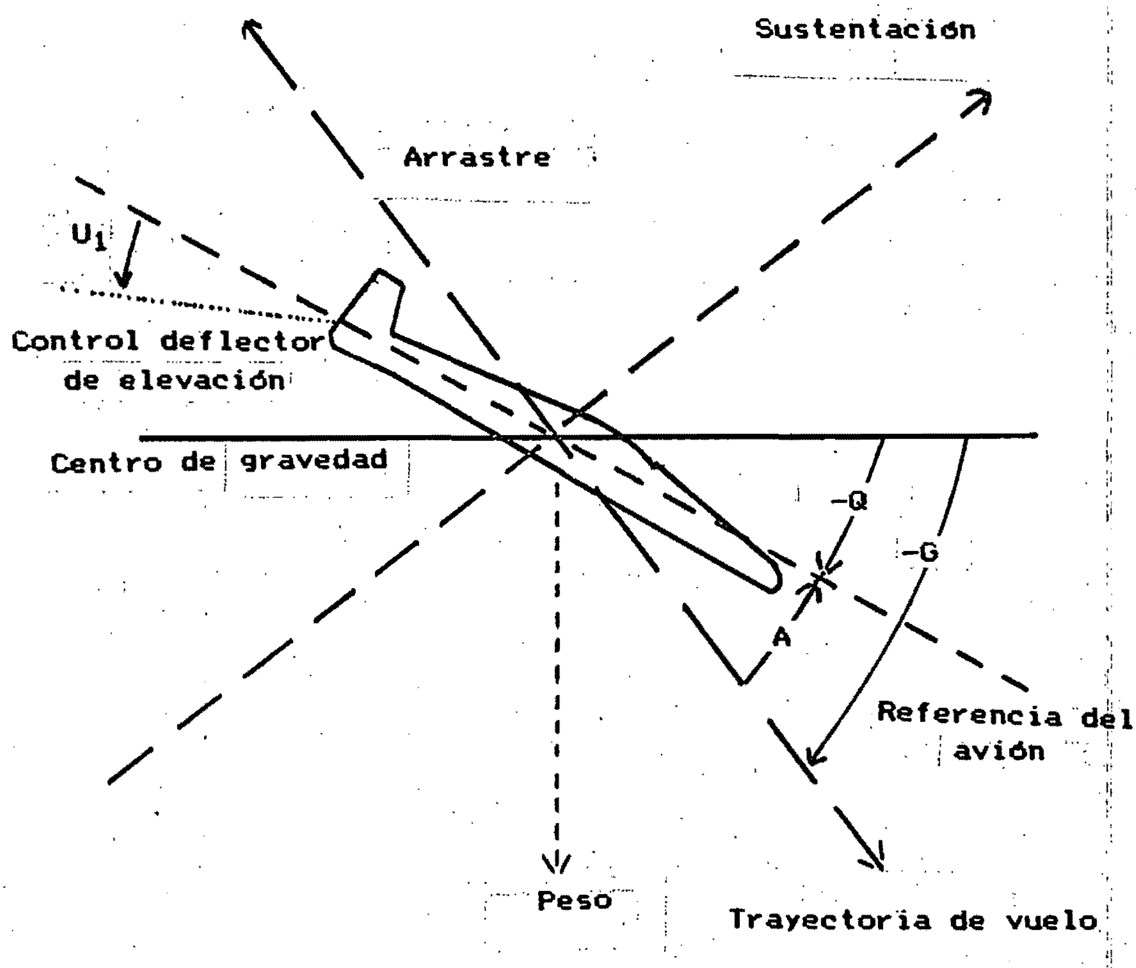
Los coeficientes anteriores para un caso real pueden ser evaluados de la siguiente manera: (el desarrollo del modelo puede ser consultado en [7].

$$b_{11} = 1/T_s - 2\,E\,W_s \quad ; \quad b_{32} = V/T_s$$

$$b_{12} = 2\,E\,W_s/T_s - W_s^2 - 1/T_s^2 \quad ; \quad b_{33} = -\,1/T_s$$

$$b_{13} = 1/(VT_s^2) - 2\,E\,W_s\,/(VT_s) + W_s^2/V \;;\quad C_{11} = W_s^2 K_s T_s$$

$E = 0.5$ (Relación de amortiguamiento)
$V = 256$ ft/seg (Constante de velocidad)
$K_s = -0.95$ seg^{-1} (Constante ángular)
$T_s = 2.5$ seg (Constante de tiempo)
$W_s = 1$ rad/seg (Velocidad angular)


Sustentación
Arrastre
U_1
Control deflector
de elevación
Centro de gravedad
-Q
-G
A
Referencia del
avión
Peso
Trayectoria de vuelo

Los resultados obtenidos son:

Primero; para el seguimiento de aterrizaje, el avión inicialmente con una trayectoria de vuelo de descenso relativamente uniforme y considerando al control inicial nulo (valor de la aleta de dirección, dato para el cálculo de la trayectoria, la direccion de vuelo que tiene el avión puesto que no existe nada (un control) que modifique su trayectoria, lo llevará a estrellarse rápidamente como se muestra en la curva 1 de la figura 1. puede observarse como al ir actuando el control. la dirección del avión se va corrigiendo poco a poco, y note como la curva 2 de la misma figura. es el resultado de la acción de las aletas de control, en donde el avión no solo no tiende a aterrizar sino se elevará en forma significativa. sin embargo en la parte inicial se disminuye la trayectoria, posteriormente el algoritmo va modificando el efecto del control para cumplir con el seguimiento requerido, en este caso es una exponencial decreciente. esto puede visualizarse en la misma figura en las curvas 3 y 4, además se anexa una trayectoria de seguimiento de elevación y de descenso (en este caso una función senoidal), vea como ha respondido el sistema en la figura 2. con tan solo 9 iteraciones (el control mostrado en la figura es U(1). es decir el ángulo de inclinación de las aletas del avión son 2(U(1)-0.5), para que el control pueda actuar en ambas direcciones). También se muestran el valor de todas las trayectorias al avanzar el proceso. en donde se grafican en el grupo de figuras 3, que son el comportamiento de las variables del avión, en los primeros pasos del algoritmo (grupos de curvas 1), notando que el avance es bastante significativo a diferencia de los avances efectuados posteriormente, los cuales sólo se ilustran para el ángulo del avión, la variación de tal ángulo y la altura del avión (grupos de curvas 2) y este se ilustra en las figura 4 y 5 en forma amplificada. donde los avances son más lentos, en la tercera curva aparece el objetivo el cual como se observa se va haciendo más suave y de menor magnitud (la magnitud no se puede visualizar porque cada curva es normalizada a la escala de graficación) esta característica del método de minimización de gradientes conjugados fué descrita en el capítulo 3, acercándose en un inicio a la solución y posteriormente va haciendo correcciones en forma menos significativa.

Algunos resultados importantes en este modelo que corroboran los aspectos teóricos de control son:
Los efectos de las condiciones iniciales del sistema afectan en forma significativa no solo el proceso de minimización haciéndolo más lento. sino en general modificando los resultados definitivos del algoritmo, es obvio que si se intenta aterrizar algún avión con condiciones iniciales de vuelo de ascenso, la dificultad de aterrizar es para un intervalo de tiempo fijo más tardado o con resultados no tan satisfactorios que si se tienen condiciones iniciales de descenso.

Otro aspecto importante para la teoría de control es la obtención de la solución de un problema de control óptimo de extremos fijos con un algoritmo diseñado para la solución de problemas con extremo derecho movible debido al seguimiento asignado de una trayectoria definida.

Figura 1

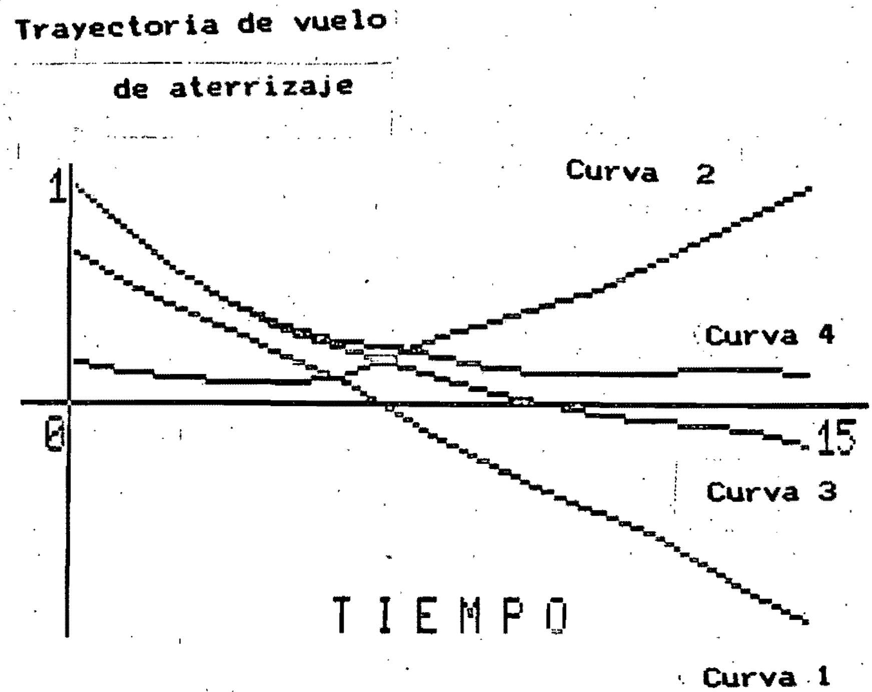
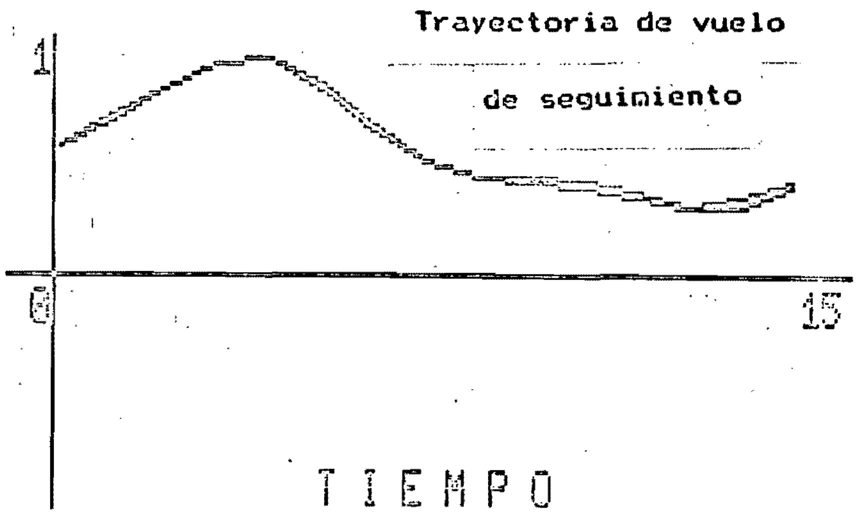

Trayectoria de vuelo
de aterrizaje
1
Curva 2
Curva 4
0
15
Curva 3
TIEMPO
Curva 1

Figura 2


Trayectoria de vuelo
de seguimiento
1
0
15
TIEMPO

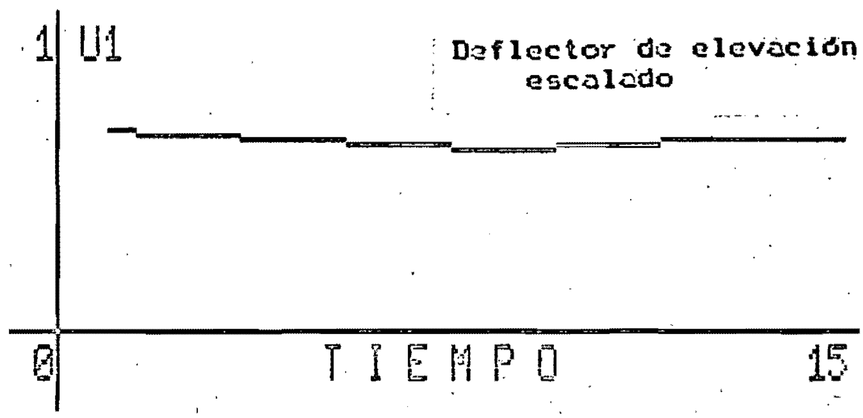
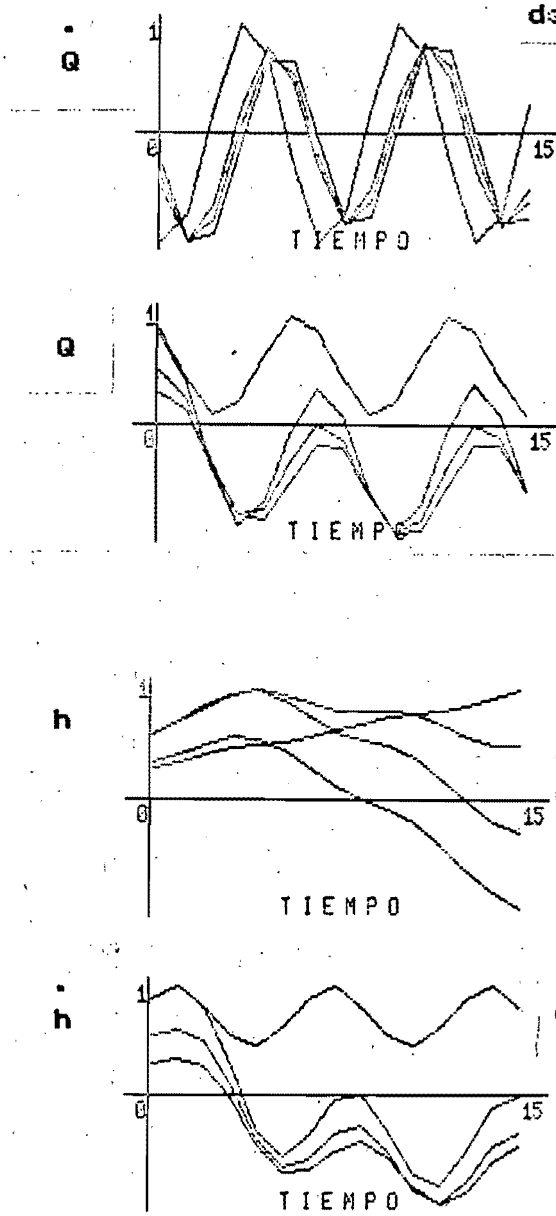

1
U1
Deflector de elevación
escalado
0
TIEMPO
15

Figura 3



Variación del ángulo de aterrizaje

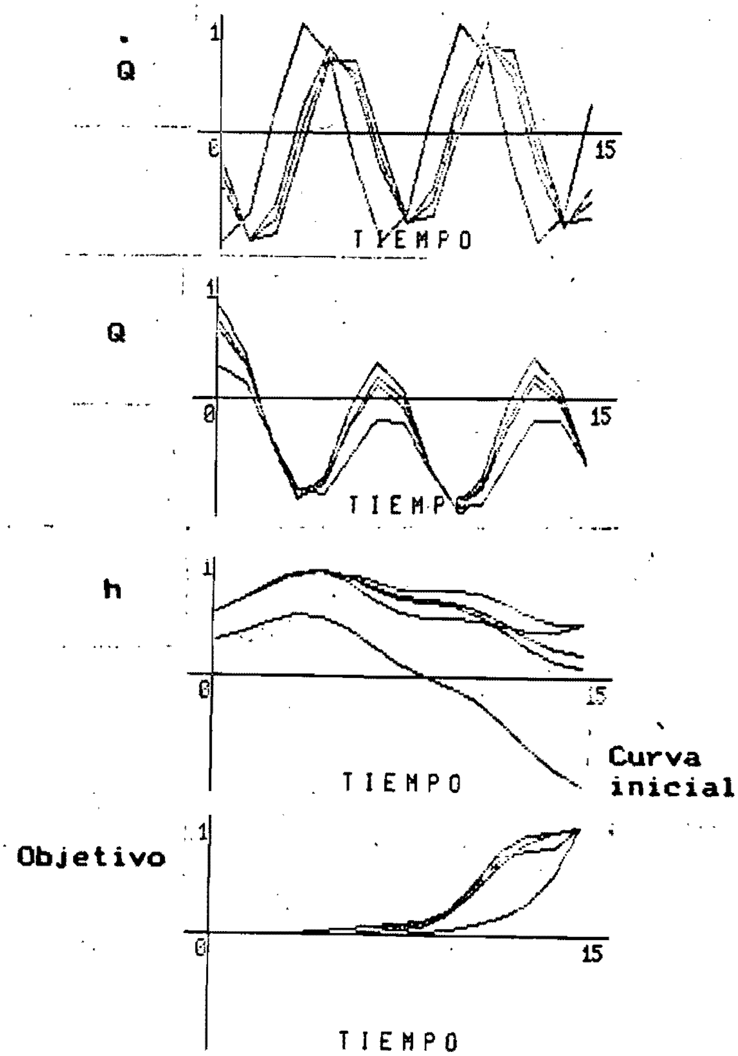
Angulo

Trayectoria de Aterrizaje

Velocidad vertical

GRUPOS DE CURVAS 1

Primeras iteraciones del algoritmo



GRUPOS DE CURVAS 2

Proceso del algoritmo en
iteraciones posteriores
comparadas con la curva inicial

Figura 4

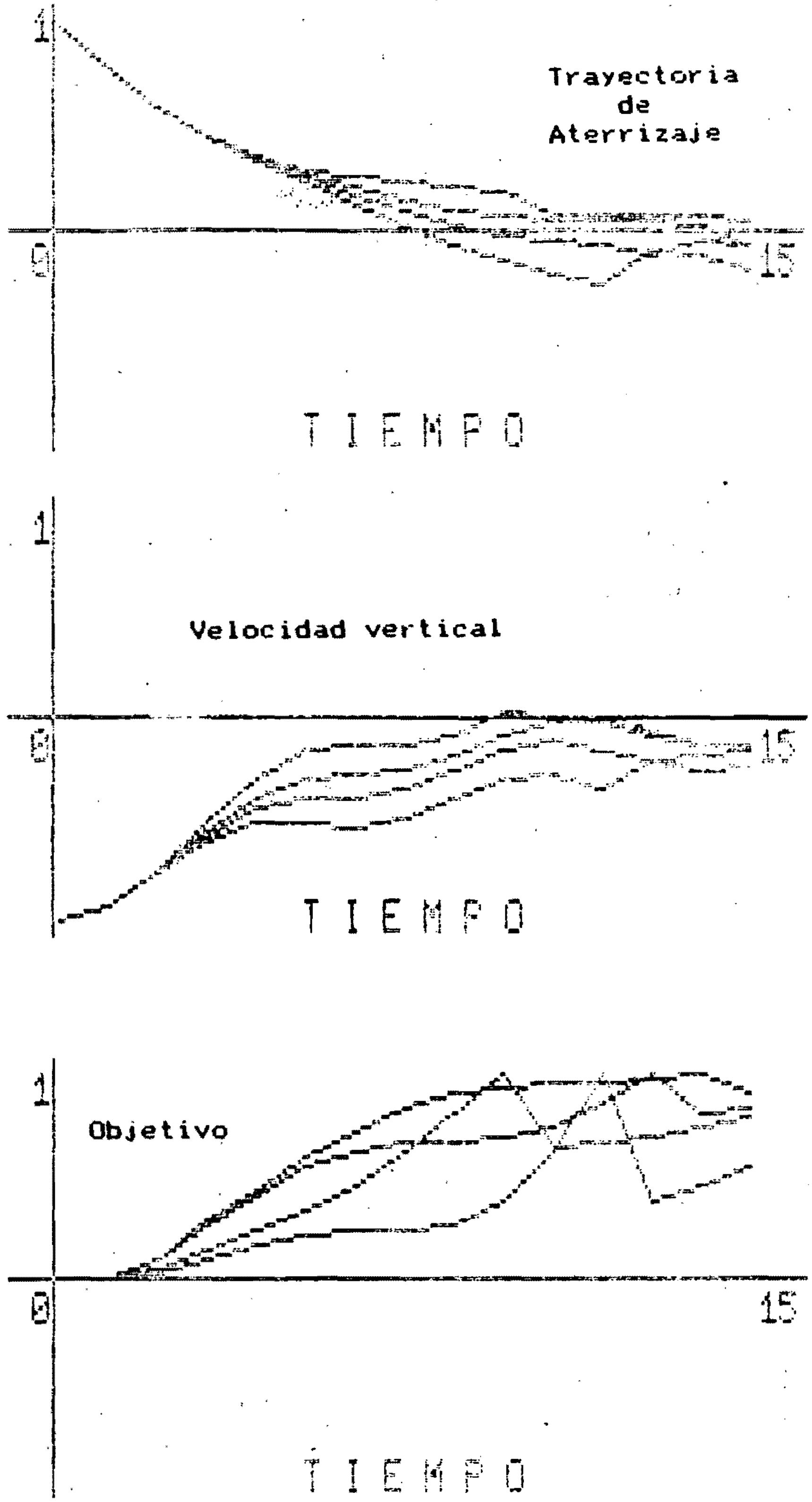
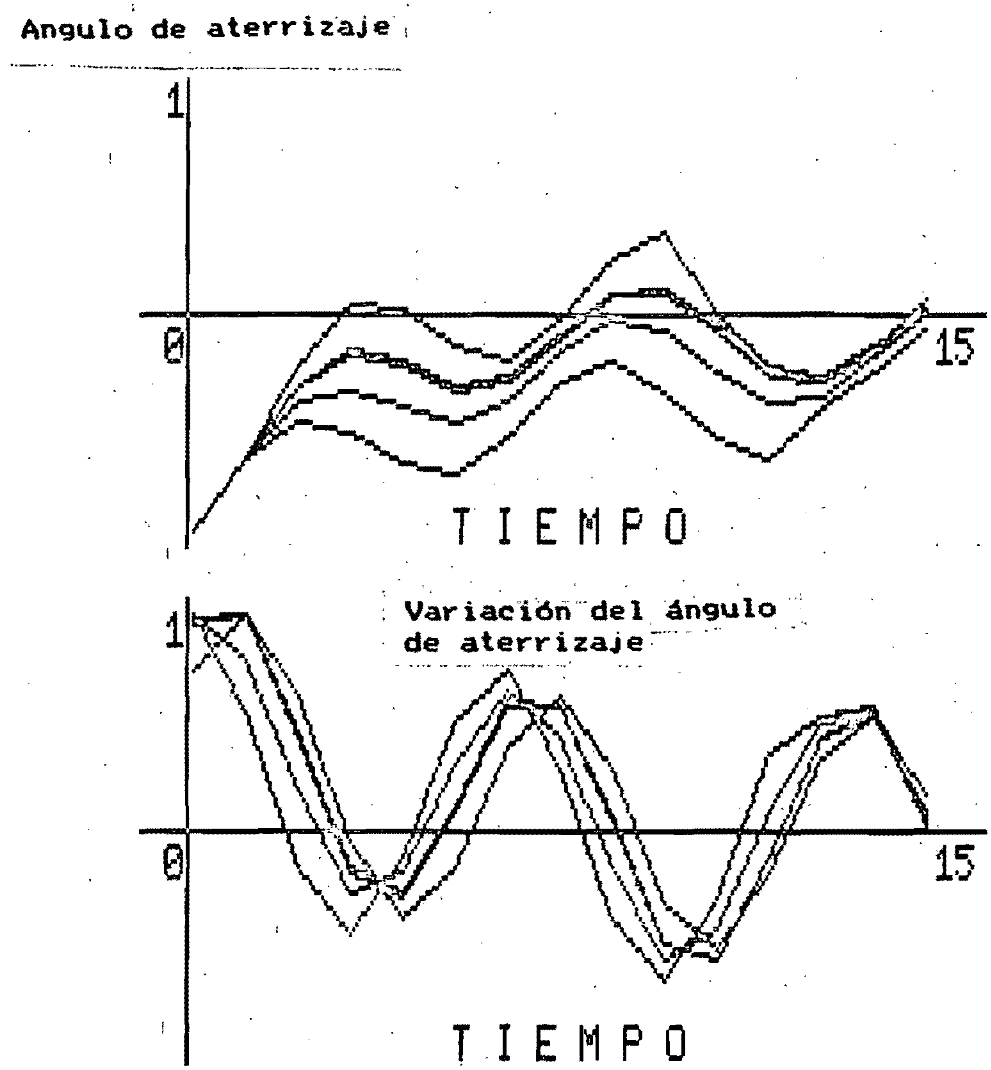

1
Trayectoria
de
Aterrizaje
0
15
TIEMPO
1
Velocidad vertical
0
15
TIEMPO
1
Objetivo
0
15
TIEMPO

Figura 5


Angulo de aterrizaje
1
0
15
TIEMPO
1
Variación del ángulo de aterrizaje
0
15
TIEMPO

CAPITULO CINCO : MANUAL DEL USUARIO

Algunas restricciones propias del sistema operativo usado (FORTRAN 77 versión II.1, 16 de mayo de 1980 Apple) se irán indicando. Consulte la referencia 6.

DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA FUNCIONAL DEL PROGRAMA

El programa principal recibe la información necesaria para la ejecución del algoritmo y la trasfiere a las subrutinas donde se utiliza por medio de la instrucción COMMON. esta información consta normalmente de parámetros del sistema modelado, es recomendable hacer las modificaciones a partir de alguno de los programas en cuestión elaborados. El programa principal llama a las subrutinas MXO y PLT , la primera es aquella que efectúa el algoritmo de control descrito en los capítulos anteriores, la segunda es una subrutina de graficación de baja resolución que despliega en la pantalla el valor de la trayectoria óptima de las variables de estado y el control óptimo resultado de la minimización, en caso de desear los resultados impresos en papel, modificar la declaración del canal KLP y en lugar de CONSOLE:, llamarlo PRINTER:, o si no se desea compilar nuevamente el programa puede utilizarse la rutina de graficación la cual despliega los resultados en papel o en la pantallla.

El procedimiento MXO utiliza en su ejecución las subrutinas RH. DFIXJ y DFUJ, cuya descripción es:

En RH se definen las ecuaciones de estado.

En DFIXJ se especifican las derivadas parciales de las ecuaciones de estado con respecto a cada una de las variables de estado.

En DFUJ se calculan las derivadas parciales de las variables de estado con respecto a cada uno de las variables de control del sistema.

Por ejemplo suponga al sistema X siguiente :

$$\dot{X}_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_1 U_1$$

$$\dot{X}_2 = X_1^2 + b_2 U_2$$

y se desea minimizar el objetivo:

$$J = C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2$$

Esta última función deberá expresarse como una ecuación más de estado con lo que obviamente se aumentará el orden del sistema en uno. y por lo cual para preparar a la subrutina correspondientes a las derivadas parciales de las ecuaciones de estado con respecto a las variables de estado sera necesario también derivar con respecto a una variable ficticia que se anexa. (desde luego las derivadas parciales de las ecuaciones de estado con respecto a esta variable seran nulas, para alguna aclaración consulte el capítulo uno). Esta ecuación quedaría:

$$\dot{X}_3 = C_1\, U_1^2 + C_2\, U_2^2$$

Aclaraciones con respecto a la notación utilizada:

para denotar $\dot{X}_1$ -------------- D(1)
para denotar X_1 -------------- X(1)
para denotar U_1 -------------- U(1)

Para denotar las derivadas parciales de las ecuaciones de estado con respecto a las variables de estado, se utiliza FIJ(1), es decir para la primera derivada parcial con respecto a la primera variable de estado.

Para denotar las derivadas parciales de las ecuaciones de estado con respecto a las variables de control, se utiliza DFU(1), es decir la derivada parcial de la primera ecuación de estado con respecto a la primera variable de control.

Para el ejemplo anterior tendriamos:
para la primera variable de estado.

FIJ(1)=a_{11} FIJ(2)=2.0*X(1) FIJ(3)=0.0

Para la segunda variable de estado.

FIJ(1)=a_{12} FIJ(2)=0.0 FIJ(3)=0.0

Para la tercera variable de estado (en este caso la variable ficticia).

FIJ(1)=0.0 FIJ(2)=0.0 FIJ(3)=0.0

Para la primera variable de control

DFU(1)=b_1 DFU(2)=0.0 DFU(3)=2.0*C_1*U(1)

Para la segunda variable de control

DFU(1)=0.0 DFU(2)=b_2 DFU(3)=2.0*C_2*U(2)

Otras caracteristicas del programa

Algunas constantes susceptibles de modificarse son: KT, es el número de pasos de integración, el cual puede incrementarse o disminuirse. considerando que es necesario cambiar estos valores con el EDITOR del sistema, debido a restricciones propias, otra variable es H, la cual es el paso de integración, para los ejemplos se utilizo 1.0.

El nivel de impresión se indica al iniciar el programa con la constante KDR, si es 0 solo imprime los resultados, si es 1 imprime el solo un valor de optimización de cada iteración, si es 2 imprime todo el proceso iterativo, si es 3 imprime el control y el gradiente al terminar cada iteración.

Al comenzar el algoritmo se requiere del valor inicial de las variables de control, para poder conocer el comportamiento del sistema al evaluar su trayectoria y así poder conocer el valor de la función objetivo que hay que minimizar. El valor de la constante entera KREZ lo determina. si KREZ es 0 lo lee del archivo KU (que debe estar creado), si es 1, el valor del control inicial para todo tiempo es UMIN (en este caso es 0.0), si kREZ=2 es el control el promedio de UMIN y UMAX, si es 2 es UMAX. Los valores de UMIN y UMAX se pasan en el momento de llamar a la subrutina MXO, los cuales son los límites del espacio de control (0,1), el arcihvo KU y KC son los archivos en donde se almacenan los resultados del algoritmo que son la trayectoria óptima y el control óptimo, que minimizan el objetivo (estos archivos pueden crearse con el FILER del sistema operativo con los nombres asignados en el programa que son KC=DATOS1.DATA y KU=DATOS2.DATA en el caso de modificar los valores de los archivos KC, KU es necesario con el "FILER", cambiarles de nombre a: DATOS1.TEXT y DATOS2.TEXT, para posteriormente con el EDITOR modificarlos al arbitrio, lo que será útil en el caso de leerse del programa, solamente recuerde antes de volver a ejecutar el programa renombrarlos, de lo contrario, aparecerá un error del archivo no encontrado), el tamaño de los archivos se especifica con paréntesis cuadrados, para KC de 26 y para KU de 4, claro que depende del orden del sistema, los valores anteriores son de un sistema de orden 21.

El programa cuenta con una graficación auxiliar para observar el proceso de minimización del control y de la trayectoria, utiliza la subrutina ARCH ubicada en la unidad de disco en donde está el programa principal normalmente, la unidad #5:, para nuestro caso por ejemplo la unidad AVIONES:(note que no está en el listado del programa), y también utiliza el archivo ARREG.DATA y TRAY.DATA, el archivo ARREG.DATA se crea desde el programa y es cerrado al terminar el algoritmo por el procedimiento ARCH, es importante tener en el disco de trabajo espacio suficiente para este manejo de archivos, el archivo TRAY.DATA si necesita estar creado en disco (el motivo de que los archivos esten creados en disco es con el fin de que de no terminarse de ejecutar el programa no queden "abiertos") al iniciarse el programa especifica al usuario si desea almacenar el proceso iterativo, para lo cual es necesario introducir la constante de impresión KDR=1, estos aspectos se le muestran al operador como opciones.El proceso de optimización puede observarse por un programa auxiliar de alta resolución el cual utiliza estos archivos, el programa se denominó GRALTA, en uno de los sistemas (en el caso de AVIONES:VUELO) se muestra con el programa GRALTA, este proceso de optimización, la ejecución del programa tiene sus propias instrucciones, para guiar al usuario, en el sistema de las PRESAS:FLUJOS, se muestra el proceso de acción de los controles, y como éstos se van modificando mejorando el objetivo del sistema.

El coeficiente de conjugación WS determina el valor en donde se asigna durante el proceso de minimización, el menor valor en una dirección de búsqueda, pueden utilizarse métodos como el de la regla de oro, o cualquier otro método, pero esto significará tiempo en el proceso de cálculo y los resultados definitivos no se diferenciarán significativamente por ésta asignación como pudimos observar en la aplicación de estos algoritmos, el valor de WS debe estar comprendido entre 0 y 1 y no se le pide al operador (ésta asignado el valor de 0.3 en el programa principal).

También en el caso de utilizar funciones evaluadas en el tiempo y que se llaman en diferentes subrutinas se recomienda, tener cuidado en que los parámetros que necesite pasen, ya sea en un COMMON o que en el momento de llamar a la función hayan sido especificados.

Una vez realizados los cambios principales se recomienda colocar algunas ediciones extras de variables intermedias para una posible búsqueda de errores y asegurar que los cálculos se estén efectuando, cerciorándose de esta forma que los parámetros se estén pasando bien.

Al compilar el programa modificado, aparecerá en la pantalla Listing file ?, se recomienda usar CONSOLE:, para que aparezca el listado de la compilación en la pantalla, esto ayudará a detectar rápidamente los errores que aparezcan durante la compilación.

Una vez compilado necesita ligarlo, en la pantalla aparecerá Lib file ?, usted deberá poner SYSTEM.LIBRARY, en el caso de que su programa halla utilizado la subrutina ARCH, QUE DESDE LA COMPILACION DEL PROGRAMA PRINCIPAL DEBIO APARECER EN EL DISCO COMO ARCH.CODE(de compilar esta subrutina con anterioridad), de lo contrario indicará que no encuentra el archivo, después de dar RETURN a la instrucción SYSTEM.LIBRARY, volverá aparecer Lib file ?, Usted deberá escribir AVIONES:ARCH,suponiendo que el archivo compilado ARCH.CODE se encuentra en la unidad AVIONES: (DRIVE 2, UNIDAD NUMERO CINCO normalmente). El sistema volverá a preguntar Lib file?, ahora "tecleé" un RETURN, al igual a Map file? que aparecerá después, y posteriormente le pedirá el archivo de salida.

El programa estará listo para ejecutarse.

Si le hace usted alguna modificación a la subrutina para dibujar alta resolución GRALTA, trate de no utilizar vectores debido a la escasa disponibilidad de memoria del sistema, el programa de alta resolución, es un programa muy lento debido al problema de memoria, por lo cual se requirió hacer algunas adaptaciones para poderlo utilizar en nuestros objetivos, al terminar de ligar necesita correr el programa FORTMOD del sistema APPLE, el cual tiene almomento de ejecutarse las instrucciones necesarias ,para indicarle al sistema operativo que utilizará funciones intrínsecas (en este caso TURTLEGRAPHICS y APPLESTUFF), al correr FORTMOD asegurese de dar el nombre completo de su archivo ligado,por ejemplo: PRESAS:CONTROL.CODE(en caso de que se le olvide ejecutar el programa FORTMOD desplegará el sistema el error OVERFLOW y nunca podra usted ejecutar su programa hasta correr FORTMOD

PRESAS:-------- Es el nombre de la unidad en disco.
CONTROL.CODE--- el nombre del programa

CONSIDERACIONES IMPORTANTES PARA LAS MODIFICACIONES

a) En caso de modificar el orden del sistema, no sólo es necesario modificar el valor de N en DATA, sino también algunas dimensiones de las variables de orden N, debido a restricciones propias del lenguaje. por lo que se recomienda, con el EDITOR del sistema, buscar estos coeficiente y modificarlos, por ejemplo si el orden es N = 3 y se desea modificar a N = 5, busque en el programa con el EDITOR , el 3 y modifíquelo a su nuevo valor de 5, esas modificaciones sólo son necesarias en la dimensión de las variables en el programa principal, en las subrutinas y en los formatos de impresión (Tenga cuidado de no modificar valores propios del algoritmo).

b) En caso de modificar el número de controles deseados siga las instrucciones del inciso a). Pero para IU que es el valor del orden del vector de variables de control.

c) Tenga cuidado en: ponerle punto decimal a los números que utilice en sus modelos (de lo contrario a la hora de ejecutar su programa se detendrá con un mensaje FLOATING POINT ERROR), también en iniciar sus variables o constantes utilizadas con los valores requeridos o nulos si es el caso (de lo contrario aparecerá el error OVERFLOW o FLOATING POINT ERROR a la hora de ejecución), en el caso de que el error sea por descuido de no haber iniciado las variables, bastará con mandar un "control RESET" y reejecutar el programa, en la situación de superarse en los cálculos el valor máximo de la máquina que es del orden $1X10^{39}$, también aparecerá el mismo error, este error suele ocurrir en el cálculo del objetivo, es decir en las funciones a minimizar, por lo que se recomienda multiplicar por algún coeficiente pequeño la función.

d) Cuando pase parámetros del programa principal a las subrutinas por medio de COMMON tenga cuidado en escribirlo en cada subrutina que necesite las variables, así como también considerar todas las constantes.

e) Las variables que pasen por el COMMON asegúrese de dimensionar si es el caso, de lo contrario enviará el compilador un mensaje de error difícil de localizar (el tamaño de las variables del COMMON deben ser iguales siempre).

f) Tenga cuidado con las unidades métricas que utilice debido a que el programa está diseñado para que el control actúe entre 0 y 1 por lo cual si el modelo requiere de un control que actúe en ambas direcciones sustitúyase el control U(i) por 2.0(U(i)-0.5); i = 1, r

g) Asegúrese que los archivos necesarios para la ejecución del programa estén creados en el disco.

h) Asegúrese de contar con espacio en el disco del sistema operativo donde se encuentra el compilador (alrededor de 40 bloques).

i) Si el valor del control está comprendido en un intervalo normalizado entre (0,1), es suficiente con especificar estos valores al llamar a la subrutina MXO, éstos valores "pasan" por la ventana de las subrutina con las constantes UMIN y UMAX.

j) Cuando utilice una consante o variable, nombrela con 6 literales.

B I B L I O G R A F I A

1 An introduction to Optimal Control.

Leitmann George Mc Graw-Hill 1966

2 Teorías del Control Optimo.

Sánchez Parra Marino

Tesis de Maestría. DEPFI-UNAM 1983

3 The mathematical Theory of Optimal Process.

Pontryangin L.S. MacMillan 1964

4 Introduction To Linear and Nonlinear Programming.

Luenberger David G. Adisson Wiley 1973

5 Computacional Methods in Optimization.

A Unified Approach

Polak E. Academic Press. 1971

6 Apple FORTRAN

Languaje Reference Manual 1980

7 Tesis P. H. D.

García R. M.

Cornell University. New York.