ANALISIS INSPECCIONAL Y SU APLICACION A LA HIDRAULICA

GERMAN JAVIER HERNANDEZ BECERRA

Trabajo

PRESENTADO A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Como requisito para obtener el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA (HIDRAULICA)

Ciudad Universitaria, a 15 de julio de 1985.

APROBADO POR EL JURADO

Presidente	DR. ENZO LEVI LATTES
Vocal	DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE
Secretario	M. en I. GILBERTO SOTELO AVILA
Suplente	M. en I. FELIPE ARREGUIN CORTES
Suplente	M. en I. MOISES BEREZOWSKY VERDUZCO

I N D I C E

INTRODUCCION

El análisis dimensional ha sido muy útil en muchos campos de la ingeniería y de la física, el cual, fue propuesto en 1914 por E. Buckingham y expuesto en 1922 por P. W. Bridgman en su libro "Análisis Dimensional", haciendo mas fácil el acceso a este método.

En 1935, A. E. Ruark propone el análisis inspeccional como complemento del - análisis dimensional, el cual consiste en la transformación de la ecuación - del problema, que puede ser diferencial o no, en una ecuación, en la cual -- las variables y los parámetros de la misma se presentan en forma adimensionada. Analogamente se procede con las condiciones iniciales y de fontrera. -- Luego por simple inspección (de allí el nombre que Ruark le da al método) se establecen las relaciones que guardan entre sí las variables y parámetros -- ahora adimensionados.

Sin embargo, si bien el análisis inspeccional reduce los parámetros de los - que depende una expresión, su aplicación no asegura que el número al que se llega sea el mínimo posible.

En el presente trabajo se expondrá también un método que en muchos casos permite lograr una reducción del número de parámetros de los cuales depende una ecuación. Este metodo se denomina "Reducción de parámetros".

I ANTECEDENTES

1. Teorema de Buckingham y de constantes dimensionales.

El teorema fundamental en que se basa el análisis dimensional es llamado teorema Π o de Vaschy - Buckingham, pero antes de enunciar dicho teorema será conveniente establecer ciertas definiciones.

Dimensiones de referencia. son aquellas a través de las cuales otras -- cantidades físicas son expresadas. En problemas de ingeniería es usual - tomar la Masa, Longitud y Tiempo como fundamentales y son denotadas como M, L, T, en ecuaciones dimensionales. La selección de estas unidades de referencia es arbitraria, podrían haberse escogido otras, tales como temperatura, carga eléctrica, etc. Las cantidades expresadas en términos de las de referencia son llamadas "Derivadas", por ejm. : la velocidad, densidad, presión, etc. Estas cantidades derivadas pueden ser de dos tipos, variables dependientes o independientes. La variable dependiente es la - que nos interesa determinar; en hidráulica es común que sea la velocidad o la presión o alguna variable derivada de estas dos, como gasto, empuje, etc. La variable independiente es la que junto con otras interviene en un problema y en función de las cuales interesa la variable dependiente. En hidráulica generalmente son variables que describen la geometría del flujo, como el diámetro de un tubo, densidad y viscosidad del fluido, etc. A las variables que permanecen constantes en un problema se les denomina parámetros.

El teorema de Buckingham establece que en un problema físico en que se tengan n cantidades o variables que incluyan m dimensiones, las variables se pueden agrupar en n-m parámetros adimensionales independientes. En efecto sean A_1, A_2, A_3,......,A_n las cantidades consideradas, como presión, viscosidad, velocidad, etc. Las que se pueden expresar mediante la relación funcional

$$F(A_1, A_2, A_3,..............A_n) = 0 \qquad (1)$$

También se asume que todas las cantidades son esenciales para resolver el problema por lo que la ecuación (1) es dimensionalmente homogénea o sea que su forma no depende de las cantidades que se eligen.

Si Π_1, Π_2, Π_3,......... Π_n representan parámetros adimensionales que agrupan a las cantidades A_1, A_2, A_3,.....A_n incluyendo m dimensiones, el teorema de Buckingham establece la existencia de una ecuación de la forma:

$$f\,(\Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ldots\ldots\ldots\ \Pi_{n-m}) \equiv 0 \qquad (2)$$

Por lo que se tendran n-m productos adimensionales. El procedimiento para aplicar el teorema de Buckingham es el siguiente:

1. Se escriben las n magnitudes físicas A, que intervienen en un problema en particular, anotando sus dimensiones y el número m de dimensiones de referencia. Existirán n-m números Π.

2. Seleccionar m de estas magnitudes, sin que haya ninguna sin dimensiones, ni dos que tengan las mismas dimensiones. Todas las dimensiones fundamentales deben incluirse colectivamente en las magnitudes seleccionadas. Generalmente a estos números se les denomina variables *repetidas*. En el caso de un fluido las variables *repetidas* mas importantes son: Una dimensión geométrica importante, una propiedad del fluido y una característica del flujo.

3. El primer grupo Π puede expresarse como el producto de las magnitudes escogidas, elevada cada una a un exponente desconocido, y una de las otras magnitudes elevada a una potencia conocida (normalmente se toma igual a uno).

4. Mantener las magnitudes escogidas en el paso 2 como variables *repetidas* y escoger una de las variables restantes para establecer el número Π. Se repite el procedimiento para obtener los sucesivos números Π.

5. En cada uno de los grupos Π determinar los exponentes desconocidos mediante el análisis dimensional.

Relaciones útiles:

a. Si una magnitud es adimensional constituye un grupo Π sin necesidad de aplicar el procedimiento anterior.

b. Si dos magnitudes físicas cualesquiera tienen las mismas dimensiones - su cociente será un número adimensional Π. Por ejemplo, L/L es adimensional y, por lo tanto, un número Π.

c. Cualquier número Π puede ser sustituído por una potencia del mismo, incluida Π^{-1}. Por ejemplo, Π_3 puede remplazarse por Π_3^2 , o Π_2 por $1/\Pi_2$.

d. Cualquier número Π puede sustituirse como el producto de una constante numérica por el número Π. Por ejemplo, Π_1 puede remplazarse por $3\Pi_1$.

e. Culquier número Π puede expresarse como función de otros números Π . Por ejemplo, si hay dos números Π, $\Pi_1 = \phi(\Pi_2)$.

Ejemplo

Suponiendo que la fuerza de arrastre ejercida sobre un cuerpo sumergido en una corriente fluida es función de la densidad, la viscosidad , la velocidad del fluido y de una longitud característica.

$$F\ (F,\ \rho,\ \mu,\ L,\ V) = 0 \tag{3}$$

Las magnitudes físicas y sus dimensiones en el sistema F, L, T

	F	ρ	μ	L	V
F	1	1	1	0	0
L	0	-4	-2	1	1
T	0	2	1	0	-1

La cantidad de números Π que existirá será:

$$5 - 3 = 2$$

Se escoge la longitud L, la velocidad V, y la densidad ρ, como variables *repetidas*.

Por lo tanto los números Π serán:

$$\Pi_1 = L^{x_1} \cdot V^{y_1} \cdot \rho^{z_1} \cdot F$$

$$\Pi_2 = L^{x_2} \cdot V^{y_2} \cdot \rho^{z_2} \cdot \mu$$

Expresando dimensionalmente a Π_1 y Π_2 se tiene:

$$\Pi_1 = L^{x_1} \cdot (\frac{L}{T})^{y_1} \cdot (\frac{FT^2}{L^4})^{z_1} \cdot F \qquad (4)$$

$$\Pi_2 = L^{x_2} \cdot (\frac{L}{T})^{y_2} \cdot (\frac{FT^2}{L^4})^{z_2} \cdot (\frac{FT}{L^2}) \qquad (5)$$

Igualando los exponentes de F, L, T, repéctivamente a cero se tiene:

$$Z_1 + 1 = 0$$
$$X_1 + Y_1 - 4Z_1 = 0$$
$$- Y_1 + 2Z_1 = 0$$

$$Z_2 + 1 = 0$$
$$X_2 + Y_2 - 4Z_2 - 2 = 0$$
$$- Y_2 + 2Z_2 + 1 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones :

$$X_1 = -2 \qquad X_2 = -1$$
$$Y_1 = -2 \qquad Y_2 = -1$$
$$Z_1 = -1 \qquad Z_2 = -1$$

Por lo que :

$$\Pi_1 = \frac{F}{L^2 V^2 \rho}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{L V \rho}$$

$$f (\Pi_1 , \Pi_2) = 0$$

$$\Pi_1 = f (1/\Pi_2)$$

$$F = 2 f(R) \rho L^2 \frac{V^2}{2}$$

$$F = K \rho L^2 \frac{V^2}{2}$$

Donde:

$$K = C_d$$

Obteniendose una ecuación conocida.

II ANALISIS INSPECCIONAL

En 1935, A. E. Ruark[2] define el análisis inspeccional, que consiste en -- transformar las ecuaciones diferenciales o no, que representan el comportamiento de un fenómeno, tal que todas las variables y los parámetros de la misma se presenten en forma adimensionada.

Cuando escribimos las condiciones diferenciales y condiciones iniciales o de frontera del fenómeno que queremos describir, caracterizado por geometría simple o condiciones cinemáticas, entonces, las variables pueden ser siempre remplazadas por variables adimensionales. Cuando esto ha sido hecho, puede obtenerse una solución formal de las ecuaciones.

Usando análisis inspeccional estamos siempre en posición de emplear argumentos físicos. Automáticamente nos muestra donde carecemos de información. Podemos por ejemplo ver claramente si tenemos las condiciones iniciales y de frontera necesarias para definir el comportamiento del fenómeno.

El análisis inspeccional consiste realmente en tomar los primeros pasos para solucionar el problema y los puntos esenciales son: (1) Que en el proceso de solucionar las ecuaciones que representan nuestro problema podemos automática y sistemáticamente obtener toda la información que nos da el análisis dimensional,(2) Que amenudo es obtenida información adicional.

G. Birkhoff, muestra una de las aplicaciones del método en el estudio de las leyes de similitud en los diversos tipos de modelos que tradicionalmente se usan en las aplicaciones de la mecánica de fluídos, para formular las condiciones de sumilitud entre modelo y prototipo.

Otra de las aplicaciones, es la de permitir obtener una representación de una ecuación diferencial más simple y de esta manera solucionarla matemática o numéricamente de una forma más sencilla, y también poder relacionar las variables adimensionales graficamente.

La obtención de las ecuaciones adimensionales depende de la habilidad que se tenga para manipular las expresiones en juego, sin embargo el número se parámetros al que se llega no siempre es el mínimo. Para minimizar este número de parámetros R. Gaarga[5] expuso el método conocido como "*Método de reducción de parámetros*", que se expone a continuación.

III METODO DE REDUCCION DE PARAMETROS

Como se expuso en antecedentes el teorema Π afirma que si se tiene una ecuación de la forma

$$F\ (\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots\ldots\ldots\ldots,A_n\ ) = 0 \qquad (6)$$

Con n cantidades de m dimensiones, la ecuación (6) puede expresarse de la siguiente manera:

$$f\ (\ \Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ldots\ldots\ldots,\Pi_{n-m}\ ) \qquad (7)$$

Donde la ecuación (6) puede considerarse como la ecuación inicial en el estudio de un fenómeno físico ó como la solución de una ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales. Recordando sin embargo que las transformaciones de las m magnitudes fundamentales que se admiten en el análisis dimensional forma un grupo y que las ecuaciones físicas completas son invariantes bajo el men ionado grupo, cabe tener presente el principio reiteradamente usado por Birkhoff, de que "si un conjunto de ecuaciones matemáticas es invariante bajo un grupo, las consecuencias de dichas ecuaciones, son también invariantes bajo el mismo grupo". Se concluye entonces que la formulación que se realiza del teorema de Buckingham se extiende también, en virtud del mencionado principio, a ecuaciones diferenciales ordinarias y a sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

El método de reducción de parámetros exige que la elección de las m dimensiones fundamentales se realice de modo que los números Π_i resultantes puedan ser agrupados en dos conjuntos, los números Π en los cuales interviene una variable y uno o mas parámetros y los números Π en los que solamente intervienen parámetros. Los números Π así obtenidos serán Π_1, Π_2, Π_3,........,Π_{n-m} tal como lo afirma el teorema de Buckingham. Se les ordenará de modo que las variables aparezcan en los primeros (Π_1, Π_2, etc.) y los parámetros en los ultimos (Π_r, Π_{r-1}, etc.), siendo r = n-m.

Luego se procede a obtener la ecuación (7), que relaciona los números Π encontrados.

A continuación se hace el siguiente cambio de variables:

$$\Pi_1 = X_1 \Pi_r^{\alpha_1}$$

$$\Pi_2 = X_2 \Pi_r^{\alpha_2}$$

$$\Pi_3 = X_3 \, \Pi_r^{\alpha_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (8)$$

$$\Pi_{r-1} = X_{r-1} \, \Pi_r^{\alpha_{r-1}}$$

Sustituyendo $\Pi_1 \cdots\cdots \Pi_{r-1}$ en (7) por los valores establecidos en (8). El resultado es una expresión de la siguiente forma:

$$\phi (X_1, X_2, \ldots X_{r-1}, \Pi_r, \alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_{r-1}) = 0 \qquad (9)$$

El siguiente paso consiste en determinar los valores de α_j de manera que se anulen todos los exponentes de π_r. Si ello es posible la expresión (9) se transforma en :

$$\psi (X_1 \, X_2 \ldots\ldots\ldots X_{r-1}) = 0 \qquad (10)$$

En la que se elimina el parámetro Π_r que depende de las variables X_1, X_2, ... y de los parámetros X_{r-1} , X_{r-2} ,.........

Este procedimiento se repite hasta que el resultado que se obtenga para los α_j no sea compatible.

IV EJEMPLOS

A continuación, el método de análisis inspeccional es ilustrado con algunos ejemplos:

1. Criterios de semejanza a partir de la ecuación de Navier-Stokes para flujos incompresibles.

Partiendo de la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\delta \bar{V}}{\delta t} + (\bar{V} \cdot \nabla)\bar{V} = g - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \bar{V} + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \bar{V}) \qquad (1)$$

Como se parte de que es un flujo incompresible, el último término de la ecuación desaparece.

Tomando la ecuación en coordenadas cartesianas en la dirección x quedará:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} + w \frac{\delta u}{\delta z} = - g \frac{\delta h}{\delta x} - \frac{1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta x} + \nu \nabla^2 u \qquad (2)$$

En la cual :

u, v, w	Componentes de la velocidad en la dirección x, y, z
t	tiempo
P	presión
ρ	densidad
ν	viscosidad cinemática

$$\nabla^2 u = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}$$

Si se utilizan variables de referencia

t_o	tiempo
P_o	presión
V_o	velocidad
L_o	longitud

Y considerando ρ, ν, g como parámetros ya que permanecen constantes, se podrán definir las siguientes variables adimensionales:

$$x' = \frac{x}{L_o} \qquad w' = \frac{w}{w_o}$$

$$y' = \frac{y}{L_o} \qquad p' = \frac{p}{p_o}$$

$$z' = \frac{z}{L_o} \qquad h' = \frac{h}{L_o}$$

$$u' = \frac{u}{u_o} \qquad t' = \frac{t}{t_o}$$

$$v' = \frac{v}{v_o}$$

Derivando las anteriores variables adimensionales con respecto a x, y, z, u, v, w, , h, t se tiene:

$$\frac{\delta x'}{\delta x} = \frac{\delta y'}{\delta y} = \frac{\delta z'}{\delta z} = \frac{\delta h'}{\delta h} = \frac{1}{L_o}$$

$$\frac{\delta u'}{\delta u} = \frac{\delta v'}{\delta v} = \frac{\delta w'}{\delta w} = \frac{1}{V_o}$$

$$\frac{\delta p'}{\delta p} = \frac{1}{p_o}$$

$$\frac{\delta t'}{\delta t} = \frac{1}{t_o}$$

Remplazando las anteriores ecuaciones en (2) se tendrá que cada término de la ecuación será igual a :

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{V_o}{t_o} \cdot \frac{\delta u'}{\delta t'}$$

$$u\,\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{V_o^2}{L_o} \cdot u' \cdot \frac{\delta u'}{\delta x'}$$

$$v\,\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{V_o^2}{L_o} \cdot v' \cdot \frac{\delta u'}{\delta y'}$$

$$w\,\frac{\delta u}{\delta z} = \frac{V_o^2}{L_o} \cdot w' \cdot \frac{\delta u'}{\delta z'}$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{p_o}{L_o} \cdot \frac{\delta p'}{\delta x}$$

$$g \frac{\delta h}{\delta x} = g \frac{\delta h'}{\delta x'}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{v_o}{L_o} \frac{\delta u'}{\delta x'} \right) \quad \frac{\delta}{L_o \delta x'} \left(\frac{v_o}{L_o} \frac{\delta u'}{\delta x'} \right) = \frac{v_o}{L_o^2} \frac{\delta^2 u'}{\delta x'^2}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \frac{v_o}{L_o} \quad \frac{\delta^2 u'}{\delta y'^2}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = \frac{v_o}{L_o} \quad \frac{\delta^2 u'}{\delta z'^2}$$

Por lo que la ecuación (2) queda como :

$$\frac{v_o^2}{L_o} \left[\frac{L_o}{v_o t_o} \frac{\delta u'}{\delta t'} + u' \frac{\delta u'}{\delta x'} + v' \frac{\delta u'}{\delta y'} + w' \frac{\delta u'}{\delta z'} \right] =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \frac{p_o}{L_o} \frac{\delta p'}{\delta x'} - g \frac{\delta h'}{\delta x'} + \nu \frac{v_o}{L_o^2} \left(\frac{\delta^2 u'}{\delta x'^2} + \frac{\delta^2 u'}{\delta y'^2} + \frac{\delta^2 u'}{\delta z'^2} \right)$$

Dividiendo la ecuación anterior por v_o / L_o queda como :

$$\frac{L_o}{v_o t_o} \cdot \frac{\delta u'}{\delta t'} + u' \frac{\delta u'}{\delta x'} + v' \frac{\delta u'}{\delta y'} + w' \frac{\delta u'}{\delta z'} =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \frac{p_o}{v_o^2} \frac{\delta p'}{\delta x'} - \frac{L_o}{v_o^2} g \frac{\delta h'}{\delta x'} + \nu . \frac{1}{v_o L_o} \nabla^2 u' \qquad (3)$$

Pero,

$$\mathbf{R} = \frac{v.L}{\nu} = \frac{\text{Fuerza de inercia}}{\text{Fuerza viscosa}}$$

$$\mathbb{F} = \frac{v}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{Fuerza de inercia}}{\text{Fuerza gravitacional}}$$

$$\mathbb{E} = \frac{\rho \, v^2}{p_o} = \frac{\text{Fuerza de inercia}}{\text{Fuerza de presión}}$$

Y llamando $H = \frac{L_o}{v_o t_o}$, entonces la ecuación (3) queda como :

$$H \; \frac{\delta u'}{\delta t'} + u' \; \frac{\delta u'}{\delta x'} + v' \; \frac{\delta u'}{\delta y'} + w' \; \frac{\delta u'}{\delta z'} =$$

$$= - \frac{1}{\mathbb{E}} \frac{\delta p'}{\delta x'} - \frac{1}{\mathbb{F}^2} \frac{\delta h'}{\delta x'} + \frac{1}{\mathbb{R}} \nabla^2 u' \tag{4}$$

Por lo que :

$$\frac{1}{\mathbb{E}} = f \, (\, \mathbb{F} \; , \; \mathbb{R} \; , \; H \; , \; \text{geometría})$$

Ya que generalmente E es la variable dependiente.

Como casos especiales de la ecuación (4) se tiene :

A. Para flujo permanete

$$\frac{1}{\mathbb{E}} = f \, (\, \mathbb{F} \; , \; \mathbb{R} \; , \; \text{geometría} \,)$$

Ya que $\frac{\delta u'}{\delta t'} = 0$, por lo que H desaparece

B. Para flujo permanente con frontera rigida

$$\frac{1}{\mathbb{E}} = f\ (\ \mathbb{R}\ ,\ \text{geometría}\ )$$

Ya que las fuerzas viscosas son importantes con respecto a las inerciales. Pero para Reynolds altos las fuerzas inerciales son más importantes que las viscosas por lo que,

$$\frac{1}{\mathbb{E}} = f\ (\ \text{geometría})$$

C. Para flujo permanente turbulento con superficie libre

$$\frac{1}{\mathbb{E}} = f\ (\ \mathbb{F}\ ,\ \text{geometría})$$

2. La propagación de una sustancia en un fluido, obedece a la ley de Fick - que esta dada por:

$$\frac{\delta c}{\delta t} = D \frac{\delta^2 c}{\delta x^2} \tag{1}$$

Donde :

c	Concentración de la sustancia
t	tiempo
x	distancia
D	coeficiente de difusión

Si definimos a c_o, t_o, x_o, y D_o como variables de referencia, se pueden construír las variables adimensionales como sigue:

$$c' = \frac{c}{c_o} \tag{2}$$

$$t' = \frac{t}{t_o} \tag{3}$$

$$D' = \frac{D}{D_o} \tag{4}$$

$$x' = \frac{x}{x_o} \tag{5}$$

Derivando las ecuaciones (2), (3) y (5), con respecto a c, t y x , se tiene:

$$\frac{\delta c'}{\delta c} = \frac{1}{c_o}$$

$$\frac{\delta t'}{\delta t} = \frac{1}{t_o}$$

$$\frac{\delta x'}{\delta x} = \frac{1}{x_o}$$

Despejando δc, δt, δx

$$\delta c = c_o \cdot \delta c'$$

$$\delta t = t_o \cdot \delta t'$$

$$\delta x = x_o \cdot \delta x'$$

Remplazando en (1) se tiene :

$$\frac{c_o}{t_o} \quad \frac{\delta c'}{\delta t'} = D_o \; D' \; \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{c_o \; \delta c'}{x_o \; \delta x'} \right)$$

$$= \frac{D_o \; c_o}{x_o} \; D' \; \frac{\delta}{x_o \; \delta x'} \left(\frac{\delta c'}{\delta x'} \right)$$

$$= \frac{D_o \; c_o}{x_o^2} \; D' \; \frac{\delta^2 c'}{\delta x'^2}$$

Dividiendo la ecuación por c_o / t_o se tiene :

$$\frac{\delta c'}{\delta t'} = \frac{D_o t_o}{x_o^2} \; D' \; \frac{\delta^2 c'}{\delta x'^2}$$

Si se acepta que la misma ecuación se aplica al modelo como al prototipo entonces se debe mantener igual

$$\frac{D_o \; t_o}{x_o^2}$$

Por lo que

$$\frac{c}{c_o} = f \left(\frac{D_o \; t_o}{x_o^2} , \frac{x}{x_o} , \frac{t}{t_o} , \frac{D}{D_o} \right)$$

3. Considérese la ecuación para velocidad de propagación, C, de ondas superficiales de pequeña amplitud en un líquido de profundidad uniforme

$$C^2 = \left(\frac{\sigma}{\rho}\,\frac{2\pi}{\lambda} + \frac{g\,\lambda}{2\pi}\right) \tanh\left(\frac{2\pi\,h}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

donde :

σ = tensión superficial

λ = longitud de onda

ρ = densidad

h = profundidad del líquido no perturbado

Utilizando el método de reducción de parámetros

1. Se procede a formar números adimensionales

$$\Pi_1 = \frac{C^2}{g\,\lambda}$$

$$\Pi_2 = \frac{\sigma}{\rho\, g\, \lambda^2}$$

$$\Pi_3 = \frac{h}{\lambda}$$

$\Pi_4 = 2\Pi$

2. Reemplazando en la ecuación (1)

$$\Pi_1 = (\Pi_2 \Pi_4 + 1/\Pi_4) \tanh (\Pi_4 \Pi_3) \tag{2}$$

3. Haciendo los siguientes cambios de variables

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= X_1 \Pi_4^{\alpha_1} \\ \Pi_2 &= X_2 \Pi_4^{\alpha_2} \\ \Pi_3 &= X_3 \Pi_4^{\alpha_3} \end{aligned} \tag{3}$$

4. Reemplazando las ecuaciones (3) en (2)

$$X_1 = (X_2 \Pi_4^{1+\alpha_2-\alpha_1} + \Pi_4^{-\alpha_1-1}) \tanh (X_3 \Pi_4^{1-\alpha_3}) \tag{4}$$

5. Se determina los valores de los exponentes de Π_4, de tal manera que se anule Π_4, por lo que

$$1 + \alpha_2 - \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 + 1 = 0$$

$$1 + \alpha_3 = 0$$

de donde

$$\alpha_1 = -1$$

$$\alpha_2 = -2$$

$$\alpha_3 = -1$$

por lo que la ecuación (4) quedará :

$$X_1 = (X_2 + 1) \tanh X_3$$

$$X_1 = \Pi_1 \, \Pi_4^{-\alpha_1}$$

$$X_1 = \frac{C^2}{g\lambda} \, 2\Pi$$

$$X_1 = F \, 2\Pi$$

$$X_2 = \Pi_2 \, \Pi_{\alpha_2}^{-\alpha_2}$$

$$X_2 = \Pi_2 \, \Pi_4$$

$$= \frac{\sigma}{\rho g \lambda^2} \, 4\Pi^2$$

$$= \frac{1}{W} \, 4\Pi^2$$ ya que $g\lambda$ es una velocidad al cuadrado

$$X_3 = \Pi_3 \, \Pi_4^{-\alpha_3}$$

$$= \Pi_3 \, \Pi_4$$

$$X_3 = h/\lambda \cdot 2\Pi$$

Por lo que la ecuación se podrá escribir también de la siguiente forma :

$$F \cdot 2\Pi = \left(\frac{1}{W} + 1 \right) \tanh \left(h/\lambda \cdot 2\Pi \right)$$

o sea

$$F = f\,(1/W,\ h/\lambda)$$

De lo anterior se concluye que para condiciones de similitud habrá que mantener W y h/λ en prototipo y modelo para tener el mismo número de - Froude.

4. R.M. Advani[3] analiza el problema de determinar la profundidad crítica en canales de sección trapecial; para ello partió de la expresión siguiente:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{B_c} \qquad (1)$$

donde :

Q = caudal

g = gravedad

A_c = área mojada para un tirante crítico.

B_c = ancho de la superficie libre para un tirante crítico.

Para un canal trapezoidal :

$A_c = (b + md)\, d$

$B_c = (b + 2md)$

en las que :

d tirante crítico

b ancho del canal

m talud

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{(b + md)^3\, d^3}{(b + 2md)}$$

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{(1 + md/b)^3 b^2 d^3}{(1 + 2\,m\,d/b)}$$

haciendo $X = d/b$ y $N = Q^2/gb^5$ se obtiene :

$$N = \frac{(1 + xm)^3}{(1 + 2mx)}\, x^3 \qquad (2)$$

Por lo tanto la nueva variable X depende de dos parámetros N y M.

A continuación se verá que Advani logró reducir estos dos parámetros a uno solo haciendo

$$\beta = x\,m$$

$$N_1 = N\,m^3$$

se tiene :

$$N = \frac{(1 + \beta)^3}{(1 + 2\beta)} \cdot \frac{\beta^3}{m^3}$$

$$N_1 = \frac{(1 + \beta)^3}{((1 + 2\beta)} \cdot \beta^3 \qquad (3)$$

donde :

$$N_1 = \frac{Q^2\,m^3}{g\,b^5}$$

$$\beta = \frac{d\,m}{b}$$

La anterior ecuación muestra que la variable β depende solo de un parámetro N, lo cual permite presentar graficamente en dos dimensiones la función $\beta = \beta\,(N_1)$, lo cual no es posible con la ecuación (2).

También se puede hacer este análisis por medio del método de reducción de parámetros como sigue :

Partiendo de la ecuación general que se obtuvo anteriormente

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{(b + md)^3 d^3}{(b + 2md)} \qquad (4)$$

en la cual la variable es d y los parámetros b,m,Q,g.

Los pasos que se siguen para este análisis son :

1. Se procede a formar números adimensionales.

$$\Pi_1 = d/b$$

$$\Pi_2 = m$$

$$\Pi_3 = Q^2/\ gb^5$$

Luego se procederá a hallar la ecuación entre los números Π_n hallados, que se consigue sustituyendo los Π_n en la ecuación (4).

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{(b + m d)^3 d^3}{(b + 2 md)}$$

$$\bar{\Pi}_3 = \frac{(1 + \Pi_2 \cdot \Pi_1)^3 \, \Pi_1^3}{(1 + 2\Pi_1 \cdot \Pi_2)}$$

$$\Pi_3 \, (1 + 2 \, \Pi_1 \, \Pi_2) = (1 + \Pi_2 \, \Pi_1)^3 \, \Pi_1^3 \qquad (5)$$

Luego se procederá a hacer el siguiente cambio de variables .

$$\Pi_1 = X_1 \, \Pi_r^{\alpha_1}$$

$$\Pi_2 = X_2 \, \Pi_r^{\alpha_2}$$

$$\Pi_3 = X_3 \, \Pi_r^{\alpha_3}$$

$$\vdots$$

$$\Pi_{r-1} = X_{r-1} \, \Pi_r^{\alpha_{r-1}}$$

Donde las X_1, X son variables adimensionales que son usadas para realizar el cambio de variable, por lo que, en este caso :

$$\Pi_1 = X_1 \, \Pi_3^{\alpha_1}$$

$$\Pi_2 = X_2 \, \Pi_3^{\alpha_2}$$

Reemplazando en (5) se tiene :

$$\Pi_3 \, (1 + 2 \, X_1 \, X_2 \, \Pi_3^{\alpha_1 + \alpha_2}) = (1 + X_1 \, X_2 \, \Pi_3^{\alpha_1 + \alpha_2})^3 \, X_1^3 \, \Pi_3^{3\alpha_1}$$

Se trata de α_1 y α_2 de tal manera que se anule Π_3 por lo que :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$3\,\alpha_1 - 1 = 0$$

$$\alpha_1 = 1/3$$

$$\alpha_2 = -\,1/3$$

En consecuencia se obtiene :

$$(1 + 2\, X_1 X_2) = (1 + X_1 X_2)^3 \; X_1^3 \qquad (8)$$

en la cual la variable X_1 solo depende de X_2

Despejando X_1 y X_2 de (6) y (7) se tiene

$$X_1 = \Pi_1 \, \Pi_3^{-\alpha_1}$$

$$= \Pi_1 \, \Pi_3^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{d}{b} \left[\frac{Q^2}{g\, b^5} \right]^{-\frac{1}{3}}$$

$$X_2 = \Pi_2 \, \Pi_3^{-\alpha_2}$$

$$= \Pi_2 \, \Pi_3^{\frac{1}{3}}$$

$$= m \left[\frac{Q^2}{g\, b^5} \right]^{\frac{1}{3}}$$

sustituyendo en (8) X_1 y X_2

$$\left(1 + 2 \frac{d}{b} m \right) = \left(1 + 2 \frac{d}{b} m \right)^3 \left(\frac{d}{b} \right)^3 \frac{Q^2}{g\, b^5}$$

que es la ecuación obtenida por Advani.

tratando de reducir aún más la ecuación, partiendo de (8) se tiene:

$$X_1 = X'_1 X_2^{\alpha'_1}$$

reemplazando en (8) :

$$(1 + 2 X'_1 X_2^{\alpha'_1+1}) = (1 + X'_1 X_2^{\alpha'_1+1}) X'^3_1 X_2^{3\alpha'_1}$$

por lo que

$$\alpha'_1 + 1 = 0$$
$$3 \alpha'_1 = 0$$

que es incompatible y en consecuencia la ecuación (8) no se puede reducir más, no llegando a la ecuación (3) obtenida anteriormente para este ejemplo.

5. R. Guarga y M. Lara[5] estudiaron la determinación del tirante en función de la abscisa medida según el eje del canal, para un gasto creciente y una = sección trapecial.

Partiendo de la ecuación dinámica para flujo espacialmente variado con - caudal creciente :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S - S_f - 2\,Q\,q_* / g\,A^2}{1 - Q^2 / g\,A^2\,D}$$

donde:

dy/dx = variación del tirante con respecto a x

S = pendiente de fondo

S_f = pendiente de fric.

despreciando el efecto de fricción debida a las paredes del canal se tiene :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S - 2\,Q\,q_* / g\,A^2}{1 - Q^2 / g\,A^2\,D}$$

siendo

$$Q = q_* x$$

donde:

Q = gasto inicial

q_* = gasto por unidad de longitud que se incopora al canal

A = área mojada

D = profundidad hidráulica

g = gravedad

$$A = y\,(y + k\,y)$$

$$D = A / B = y\,(b + k\,y) / (b + 2\,k\,y)$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S - 2\,q_*^2\,x / g\,y^2(b + k\,y)^2}{1 - q_*^2 x^2\,(b + 2\,k\,y\,) / g\,y^3\,(b + k\,y)^3} \qquad (3)$$

en el plano x,y para $S \neq 0$ se presenta un punto singular definido por las coordenadas (x_o,y_o) donde se anulan simultáneamente numerador y denominador.

Por lo que

Anulación del numerador

$$Sgy^2\,(b + k\,y\,)^2 = 2\,q_*^2\,x \qquad (4)$$

Anulación del denominador

$$g\,y^3\,(b + k\,y\,)^3 = q_*^2\,x^2\,(b + 2\,k\,y\,) \qquad (5)$$

haciendo cambio de variable :

$$n = k\,y / b$$

$$M = 4\,q_*^2\,k / g\,s^2\,b^3$$

resulta que el sistema de ecuaciones (4) y (5) se convierte en :

$$n(1+n)(1+2n) = M \tag{6}$$

$$x = 2bn(1+n)/sk(1+2n) \tag{7}$$

la ecuación (6) tiene una sola raíz positiva n_o, por lo que

$$y_o = n_o b / k \tag{8}$$

$$x_o = 2 y_o (1 + n_o) / S (1 + 2 n_o) \tag{9}$$

realizando el cambio de variables en la ecuación (3) y proponiendo el siguiente cambio :

$$x = X x_o$$

$$y = Y y_o$$

donde X, Y son variables adimensionales, por lo que en las nuevas variables adimensionales, el punto singular será (1,1);se obtiene :

$$\frac{d(Y y_o)}{d(X x_o)} = \frac{1 - \dfrac{2 q_*^2 X x_o}{g Y^2 y_o^2 b^2 (1+n_o Y)^2 S}}{1 - \dfrac{q_*^2 X^2 x_o^2 b (1 + 2 n_o Y)}{g Y^3 y_o^3 b^3 (1 + n_o Y)^3}} \tag{10}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{x_o}{y_o} S \frac{1 - \dfrac{2 q_*^2}{g b^2 (1+n_o Y)^2} \dfrac{x_o}{y_o^2} \dfrac{X}{Y^2} \dfrac{1}{S}}{1 - \dfrac{q_*^2}{g b^2} \dfrac{(1+2 n_o Y)}{(1+n_o Y)^3} \dfrac{x_o^2}{y_o^3} \dfrac{X^2}{Y^3}} \tag{11}$$

dividiendo la ecuación (9) entre la ecuación (8) se tiene :

$$\frac{x_o}{y_o} = \frac{2\,y_o}{S}\;\frac{(1 + n_o)}{(1 + 2n_o)}\;\frac{k}{n\,b} \qquad (12)$$

$$\frac{x_o}{y_o} = \frac{2}{S}\;\frac{1 + n_o}{1 + 2\,n_o} \qquad (13)$$

reemplazando (12) y (6) en (11) :

$$\frac{dY}{dX} = 2\,(1 + n_o)\,\frac{1 - \dfrac{(1+ n_o)}{(1+ 2n_o)}\,\dfrac{1}{n_o}\;\dfrac{4\,q_*^2\,k}{g\,b^3\,S^2}\;\dfrac{1}{(1 + nY)^2}\;\dfrac{X}{Y^2}}{1 - \dfrac{1}{n_o}\,\dfrac{(1 + 2\,n_oY)}{(1 + n_o\,Y)^3}\;\dfrac{(1+n_o)^2}{(1 + 2\,n_o)^2}\;\dfrac{4\,q_*^2\,K}{gb^3s^2}\;\dfrac{X^2}{Y^3}}$$

$$\frac{dY}{dX} = 2\,\frac{(1 + n_o)}{(1+ 2n_o)}\;\frac{1 - \dfrac{(1 + n_o)^2}{(1 + n_oY)^2}\;\dfrac{X}{Y^2}}{1 - \dfrac{(1 + 2\,n_oY)}{(1 + 2\,n_o)}\;\dfrac{(1 + n_o)^3}{(1 + n_oY)^3}\;\dfrac{X^2}{Y^3}} \qquad (14)$$

para canal rectangular $k = 0$, por lo que de la ecuación (8) $n_o = 0$, remplazando en la ecuación (14) se tiene :

$$\frac{dY}{dX} = 2\,\frac{1 - X/Y^2}{1 - X^2/Y^3} \tag{15}$$

para canal triangular b = 0 por lo que $n_o \to \infty$ y de la ecuación (14) se tiene :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1 - X/Y^4}{1 - X/Y^3} \tag{16}$$

el Número de Froude en función de X,Y será :

$$\mathbb{F}^2 = \frac{V}{gD} = \frac{q_*^2\ X^2\ B}{g\ A^3} = \frac{q_*^2\ X^2\ (b + 2ky)}{g\ (b + ky)^3}$$

$$\mathbb{F}^2 = \frac{q_*^2\ X_o^2\ (1 + 2\ n_o\ Y)}{g\ y_o^3\ b^2\ (1 + n_o Y)^3}\ \frac{X^2}{Y^3}$$

$$\mathbb{F}^2 = \frac{(1 + n_o)^3}{((1 + n_o Y)^3}\ \frac{1 + 2\ n_o\ Y}{1 + 2\ n_o}\ \frac{X^2}{Y^3}$$

La ecuación (14) permite construír un diagrama universal donde se presentan las curvas integrales, en la cual se puede saber el tipo de flujo en el canal (ver apéndice fig. 1)

Haciendo el análisis por el método de reducción de parámetros a este problema;

partiendo de la ecuación (3)

$$\frac{d\,Y}{d\,X} = \frac{S - 2\,q^2_* X \;/\; g\,Y^2\,(\,b + k\,Y)^2}{1 - q_*^2\,X^2\,(\,b + 2\,kY)\;/\;g\,Y^3\,(\,b + k\,Y\,)^3}$$

en la cual las variables son X y Y y los parámetros q_*, b, k,g, S.

Los pasos que se siguen para este método son :

1. Formar números adimensionales

$$\Pi_1 = x\,/\,b$$
$$\Pi_2 = y\,/\,b$$
$$\Pi_3 = S$$
$$\Pi_4 = K$$
$$\Pi_5 = q_*^2/\,g\,b^3$$

2. Sustituyendo los Π_n en la ecuación (3) se tiene :

$$\frac{d\,\Pi_2}{d\,\Pi_1} = \Pi_3\,\frac{1 - \dfrac{2\,\Pi_5\,\Pi_1}{\Pi_2^2\,\Pi_3\,(\,1 + \Pi_4\,\Pi_2\,)^2}}{1 - \dfrac{\Pi_5\,\Pi_1^2\,(\,1 + 2\,\Pi_4\,\Pi_2\,)^2}{\Pi_2^3\,(\,1 + \Pi_4\,\Pi_2\,)^3}} \tag{17}$$

3. Se hacen los siguientes cambios de variable :

$$\Pi_1 = X_1 \, \Pi_5^{\alpha_1}$$

$$\Pi_2 = X_2 \, \Pi_5^{\alpha_2}$$

$$\Pi_3 = X_3 \, \Pi_5^{\alpha_3}$$

$$\Pi_4 = X_4 \, \Pi_5^{\alpha_4}$$

4. Reemplazando los anteriores cambios de variable en la ecuaciónn(17):

$$\frac{dX_2}{dX_1} = X_3 \, \Pi_5^{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3} \; \frac{1 - \dfrac{2 X_1 \Pi_5^{\alpha_1 + 1}}{X_2^2 X_3 \Pi_5^{2\alpha_2 + \alpha_3} \left(1 + X_4 X_2 \Pi_5^{\alpha_4 + \alpha_2} \right)^2}}{1 - \dfrac{X_1^2 \Pi_5^{2\alpha_1 + 1} \left(1 + 2 X_4 X_2 \Pi_5^{\alpha_4 + \alpha_2} \right)^2}{X_2^3 \Pi_5^{3\alpha_2} \left(1 + X_4 X_2 \Pi_5^{\alpha_4 + \alpha_2} \right)^3}}$$

5. Como se trata de determinar los α_i para anular los exponentes de Π_5, entonces :

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + 1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_4 + \alpha_2 = 0$$

$$2\alpha_1 + 1 - 3\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = -2$$

$$\alpha_2 = -1$$

$$\alpha_3 = 1$$

$$\alpha_4 = 1$$

por lo que :

$$\frac{d\,X_2}{d\,X_1} = X_3 \; \frac{1 - \dfrac{2\,X_1}{X_2^2 \;\; X_3 \;\; (1 + X_4\,X_2)^2}}{1 - \dfrac{X_1^2 \;\; (1 + 2\,X_4 \;\; X_2)^2}{X_2^3 \;\; (1 + X_4 \;\; X_2)^3}} \qquad (18)$$

donde :

$$X_1 = \Pi_1 \; \Pi_5^{-\alpha_1}$$
$$= \Pi_1 \; \Pi_5^{2}$$
$$= \frac{X}{b}\,[q_*^2/gb^3]^2$$

$$X_2 = \Pi_2 \; \Pi_5^{-\alpha_2}$$
$$= \Pi_2 \; \Pi_5$$
$$= Y/b \; . \; q_*^2 \; / \; gb^3$$

$$X_3 \doteq \Pi_3 \; \Pi_5^{-\alpha_3}$$
$$\doteq \Pi_3 \; \Pi_5^{-1}$$
$$= S.\; gb^3 \; / \; q_*^2$$

$$X_4 = \Pi_4 \; \Pi_5^{-\alpha_4}$$
$$= \Pi_4 \; \Pi_5^{-1}$$
$$= K \; gb^3 \; / \; q_*^2$$

reduciendo más y haciendo nuevos cambios de variables y reemplazandolos en la ecuación (18) :

$$X_1 = Y_1 \; X_4^{\beta_1}$$
$$X_2 = Y_2 \; X_4^{\beta_2}$$
$$X_3 = Y_3 \; X_4^{\beta_3}$$

$$\frac{dY_2}{dY_1} = Y_3 \; X_4^{\beta_1 + \beta_3 - \beta_2} \cdot \frac{1 - \dfrac{2 \; Y_1 \; X_4^{\beta_1}}{Y_2^2 \; Y_3 \; X_4^{2\beta_2 + \beta_3} \; (1 + Y_2 \; X_4^{\beta_2 + 1})^2}}{1 - \dfrac{Y_1^2 \; X_4^{\beta_1} \; (1 + 2 \; Y_2 \; X_4^{\beta_2 + 1})^2}{Y_2^3 \; X_4^{3\beta_2} \; (1 + Y_2 \; X_4^{\beta_2 + 1})}}$$

para anular los exponentes de X entonces :

$$\beta_1 + \beta_3 - \beta_2 = 0$$
$$\beta_1 - 2 \; \beta_2 - \beta_3 = 0$$
$$\beta_2 + 1 = 0$$
$$\beta_1 - 3 \; \beta_2 = 0$$

que es incompatible. En consecuencia no es posible reducir más la ecua=

ción, por lo que el resultado es la ecuación (18), en la que X_3 , X_4 son dos números adimensionales construídos a partir de S, g, b, q_*, k.

Para un canal rectangular k = o por lo que $X_4 = 0$; entonces de la ecua= ción (18) :

$$\frac{d\,X_2}{d\,X_1} = X_3 \frac{1 - \dfrac{2\,X_1}{X_2^2 \quad X_3}}{1 - \dfrac{X_1^2}{X_2^3}} \tag{19}$$

La ecuación (18) no permite abordar el caso para un canal triangular.

Las ecuaciones adimensionales encontradas para un canal trapezoidal por este método, son diferentes ya que las variables adimensionales también lo son. Igualmente es una ecuación de dos variables en función de dos parámetros la cual no es tan reducida como la ecuación (14), que es una ecuación de dos variables en función de un parámetro.

6. Adimensionalización de la ecuación de continuidad en su forma diferencial para flujo transitorio en tuberías.

La ecuación de continuidad es:

$$V \frac{\delta H}{\delta x} + \frac{\delta H}{\delta t} + \frac{a^2}{g} \frac{\delta V}{\delta x} - V \operatorname{sen} \alpha = 0 \qquad (1)$$

donde

H	Gradiente hidráulico de energía
a	Velocidad de la onda de presión, celeridad
g	Gravedad
V	Velocidad
α	Angulo que forma el conducto con la horizontal

Utilizando las siguientes variables de referencia:

V_o

L_o

t_o

Q_o

Considerando a, g y α como parámetros se pueden definir las siguientes variables adimensionales:

$$
\begin{aligned}
V' &= V/V_o \\
H' &= H/L_o \\
x' &= x/L_o \\
Q' &= Q/Q_o \\
t' &= t/t_o
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Remplazando las ecuaciones (2) en (1), tenemos :

$$V_oV' \frac{\delta H'}{\delta x'} + \frac{L_o}{t_o}\frac{\delta H'}{\delta t'} + \frac{a'^2 a_o^2}{g} \cdot \frac{V_o}{L_o}\frac{\delta V'}{\delta x'} + V_oV' \text{ sen } \alpha = 0 \qquad (3)$$

Dividiendo la ecuación (3) entre V_o V' :

$$\frac{\delta H'}{\delta x'} + \frac{L_o}{V_o t_o}\frac{1}{V'}\frac{\delta H'}{\delta t'} + \frac{a'^2 a_o^2}{g}\frac{1}{L_o V'}\frac{\delta V'}{\delta x'} + \text{sen } \alpha = 0$$

llamando $\mathbb{H} = \frac{L_o}{V_o t_o}$

$$\frac{\delta H'}{\delta x'} + \mathbb{H} \frac{1}{V'} \frac{\delta H'}{\delta t'} + \mathbb{F}^{2} \frac{a'^{2}}{V'} \frac{\delta V'}{\delta x'} + \text{sen}\ \alpha = 0$$

por lo que :

$$\frac{H}{H_o} = f\ (\ \mathbb{H},\ \mathbb{F}\ ,\ \text{geometría}\ )$$

7. Adimensionalización de la ecuación de movimiento en su forma diferencial para flujo transitorio en tuberias.

La ecuación de movimiento es :

$$g \frac{\delta H}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta t} + V \frac{\delta V}{\delta x} + \frac{f \; V|V|}{2 \; D} = 0 \tag{1}$$

utilizando las siguientes variables de referencia :

V_o

L_o

t_o

D_o

y considerando a, g y f como prámetros, se pueden definir las siguientes variables adimensionales:

$$
\begin{aligned}
V' &= V/V_o \\
H' &= H/L_o \\
x' &= x/L_o \\
t' &= t/t_o \\
D' &= D/L_o
\end{aligned} \tag{2}
$$

Remplazando las ecuaciones (2) en (1), tenemos :

$$g \frac{\delta H'}{\delta x'} + \frac{V_o}{t_o} \frac{\delta V'}{\delta t'} + \frac{V_o^2 V'}{L_o} \frac{\delta V'}{\delta x'} + \frac{f\ V_o^2}{L_o\ D'} V' |V'| = 0 \tag{3}$$

dividiendo la ecuación (3) por g, tenemos :

$$\frac{\delta H'}{\delta x'} + \frac{V_o}{t_o g} \frac{\delta V'}{\delta t'} + \frac{V_o^2 V'}{L_o g} \frac{\delta V'}{\delta x'} + \frac{f\ V_o^2}{L_o g} \frac{V'}{D'} |V'| = 0 \tag{4}$$

llamàndo $K = \dfrac{V_o}{t_o g}$

$$\frac{\delta H'}{\delta x'} + K \frac{\delta V'}{\delta t'} + \mathbb{F}^2 V' \frac{\delta V'}{\delta x'} + \mathbb{F}^2 f \frac{V'}{D'} |V'| = 0 \tag{5}$$

por lo que :

$$\frac{H}{H_o} = f(\ K,\ \mathbb{F}\ ,\ \text{geometría}\ )$$

8. Vibración de un hilo tensado.

La ecaución diferencial para este problema es :

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = V^2 \quad \frac{\delta^2 y}{\delta X^2} \tag{1}$$

donde V es la velocidad de la onda en el hilo.

Suponiendo las siguientes condiciones de frontera :

$$y = A \operatorname{sen} \frac{\Pi x}{L} \qquad \text{para} \qquad t = 0 \tag{2}$$

A Amplitud de vibración

L Longitud del hilo tensado

ya que la ecuación (2) es lineal "y" debe ser proporcional a "A" , por lo que un número adimensional será y/A . La ecuación (2) también nos da otro número adimensional x/L y entonces obtenemos lo siguiente :

$$\frac{\delta^2(y/A)}{\delta(Vt/L)^2} = \frac{\delta^2(y/A)}{\delta(x/L)^2} \tag{4}$$

por lo que

$$y/A = f(x/L, Vt/L)$$

9. Otra aplicación del análisis inspeccional es el cálculo del conjugado mayor a partir del conjugado menor para un canal rectangular.

Partiendo de la ecuación de conservación de la cantidad de mivimiento

$$M_1 = M_2$$

$$Z_{G_1} A_1 + \frac{Q^2}{gA_1} = Z_{G_2} A_2 + \frac{Q^2}{gA_2}$$

$$\frac{b\ y_1^2}{2} \quad \frac{Q^2}{g\ b\ y_1} = \frac{b\ y_2^2}{2} \quad \frac{Q^2}{g\ b\ y_2}$$

simplificando :

$$y_2 + y_1 - \frac{2\ Q^2}{g\ b^2 y_1 y_2} = 0$$

multiplicando por y_2/y_1^2

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - \frac{2\,Q^2}{g\,b^2 y_1^3} = 0$$

en donde :

$$\frac{2\,Q^2}{g\,b^2 y_1^3} = \frac{2\,V_1^2}{g\,y_1} = 2\,\mathbb{F}_1^2$$

por lo que la ecuación resulta :

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2\,\mathbb{F}^2 = 0$$

que se puede dibujar facilmente.

Se trató de adimensionalizar la ecuación por el método de reducción de parámetros, pero no se consiguió ya que los resultados que se obtenian para los α_j eran incompatibles, por lo que no se pudo reducir - más la ecuación original.

10. Adimensionalización de la ecuación de Neill para el cálculo de la velocidad de inicio de arrastre en un canal no revestido.

La ecuación que propuso Neill

$$V_c = \sqrt{2} \; (y/D)^{\frac{1}{6}} \; (g \, \Delta D)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

y		Tirante
D		Diametro característico de la partícula
g		Gravedad
Δ	=	$\dfrac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}$

Utilizando el método de reducción de parámetros

1. Números adimensionales

$$\Pi_1 = V_c \,/\, (g \, D)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Pi_2 = y/D$$

$$\Pi_3 = \Delta$$

2. Remplazando las ecuaciones (2) en (1)

$$\Pi_1 = \sqrt{2} \quad \Pi_2^{\frac{1}{6}} \; \Pi_3^{\frac{1}{2}}$$

3. Haciendo los siguientes cambios de variable

$$\Pi_1 = X_1 \; \Pi_3^{\frac{1}{2}}$$

$$\Pi_2 = X_2 \; \Pi_3^{\frac{1}{2}}$$

y remplazandolos en la ecuación (3)

$$X_1 \; \Pi_3^{\alpha_1} = \sqrt{2} \quad X_2^{\frac{1}{6}} \; \Pi_3^{\alpha_2/6 + \frac{1}{2}}$$

Eliminando los exponentes de Π_3

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2/6 + \tfrac{1}{2} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = -3$$

Por lo que

$$X_1 = \sqrt{2} \quad X_2^{\frac{1}{6}} \tag{4}$$

Donde

$$X_1 = \Pi_1 \, \Pi_3^{\alpha_1}$$

$$X_1 = \Pi_1$$

$$X_1 = \frac{V_c}{(g\,D)^{\frac{1}{2}}} = F$$

$$X_2 = \Pi_2 \, \Pi_3^{-\alpha_2}$$

$$X_2 = \Pi_2 \, \Pi_3^{3}$$

$$X_2 = y/D \, (\Delta)^3$$

La ecuación (4) depende de 2 variables adimensionales, en la cual X_2 depende del número de Froude.

11. Adimensionalización de la ecuación para la velocidad de una onda de presión.

La ecuación de la celeridad , a, para una onda de presión :

$$a = \sqrt{\frac{K/e}{1 + \frac{K}{E}\,\frac{D}{e}\,C_1}} \tag{1}$$

D	Diametro del conducto
e	espesor del conducto
C_1	coeficiente que depende del apoyo de la tuberia
E	módulo de elasticidad del material
K	módulo de elasticidad volumétrico del fluido
ρ	densidad

utilizando el método de reducción de parámetros :

1. Números adimensionales

$$\Pi_1 = \frac{a^2}{K/e}$$

$$\Pi_2 = \frac{K}{E}\,\frac{D}{e} \qquad (2)$$

$$\Pi_3 = C_1$$

2. remplazando (2) en (1)

$$\Pi_1 = \frac{1}{1 + \Pi_2\ \Pi_3} \qquad (3)$$

3. haciendo los siguientes cambios de variable

$$\Pi_1 = X_1\ \Pi_3^{\alpha_1}$$

$$\Pi_2 = X_2\ \Pi_3^{\alpha_2}$$

remplazando en (3)

$$\Pi_3^{\alpha_1} = \frac{1}{1 + X_2\ \Pi_3^{\alpha_2 + 1}}$$

eliminando los exponentes de

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 + 1 = 0$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = -1$$

$$X_1 = \frac{1}{1 + X_2} \qquad (4)$$

donde :

$$X_1 = \Pi_1 \ \Pi_3^{-\alpha_1}$$

$$X_1 = \Pi_1$$

$$X_1 = \frac{a^2}{K/e}$$

$$X_2 = \Pi_2 \ \Pi_3^{-\alpha_2}$$

$$X_2 = \Pi_2 \ \Pi_3$$

$$X_2 = \frac{K}{E} \frac{D}{e} \ C_1$$

por lo tanto la ecuación (4) solo depende de dos variables adimensionales $X_1 = f (X_2)$

12. Parámetros adimensionales involucrados en la transferencia de calor por convección libre, suponiendo fluido incompresible.

La ecuación de movimiento

$$\rho\{\delta V/\delta t + (V . \Delta) V \} = - \rho \beta g(T - T_o) + \mu \nabla^2 V \qquad (1)$$

β	Coeficiente de expansión volumétrica
T	Temperatura

En estos problemas generalmente no hay velocidad de referencia, por lo que las variables adimensionales se construyen como sigue

$$V' = \frac{V L}{\mu} \rho$$

$$t' = \frac{t\ \mu}{\rho\ L}$$

$$T' = \frac{(T - T_o)}{(T_1 - T_o)}$$

Donde $T_1 - T_o$ es una diferencia característica de temperatura del sistema

Remplazando ecuaciones (2) en (1) se tiene

$$\rho \left\{ \frac{\delta\left(\frac{\mu}{L\rho}\ V'\right)}{\delta\left(\frac{\rho L}{\mu}\ t'\right)} + \frac{\mu^2}{L^2\rho^2}\ g\ (V'.\nabla)\ V' \right\} =$$

$$= - \rho\ \beta\ g\ (T - T_o)\ T' + \frac{\mu^3}{L^3\rho^2}\ \nabla^2 V'$$

$$\frac{\mu^2}{L^3\rho}\ \frac{\delta V'}{\delta t'} \quad \frac{\mu^2}{L^3\ \rho}\ g(V'\cdot\nabla)\ V' = - \rho\ \beta\ g\ (T_1 - T_o)\ T' + \frac{\mu^3}{L^3\rho^2}\ \nabla^2\ V'$$

$$\frac{\delta V'}{\delta t'} + (V' \cdot \nabla) V' = - \frac{L^3 \rho^2}{\mu^2} g (T - T_o) T' + \nu \nabla^2 V'$$

Donde

$$Gr = \frac{g L^3 \rho^2}{\mu^2} (T_1 - T_o)$$

en la cual a Gr se le conoce como el número de Grashof.

Por lo que en convección libre solo interviene el número de Grashof.

13. Adimensionalización de la ecuación diferencial de cantidad de movimiento para flujo transitorio en canales

$$\frac{\delta V}{\delta t} + V \frac{\delta V}{\delta x} + g \frac{\delta y}{\delta x} = g\,(S_o - S_f) \qquad (1)$$

Utilizando las siguientes variables de referencia

V_o

t_o

L_o

$K = S_o - S_f$

Definiendo las variables adimensionales

$$
\begin{aligned}
V' &= V / V_o \\
t' &= t / t_o \\
X' &= x / L_o \\
y' &= y / L_o
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Remplazando las ecuaciones (2) en (1)

$$\frac{V_o}{t_o}\frac{\delta V'}{\delta t'} + \frac{V_o^2\, V'}{L_o}\frac{\delta V'}{\delta x'} + g\,\frac{\delta y'}{\delta x'} - g\,k = 0$$

Dividiendo entre V_o^2 / L_o

$$\frac{L_o}{V_o t_o}\frac{\partial V'}{\partial t'} + V'\frac{\partial V'}{\partial x'} + \frac{gL_o}{V_o^2}\frac{\partial y'}{\partial x'} - \frac{gL_o}{V_o^2} K = 0$$

llamando $H = L_o / V_o t_o$

$$H\frac{\partial V'}{\partial t'} + V'\frac{\partial V'}{\partial x'} + \frac{1}{\mathbb{F}^2}\frac{\partial y'}{\partial x'} - \frac{1}{\mathbb{F}^2} K = 0$$

por lo tanto :

$$\frac{V}{V_o} = f\left(\mathbf{F} ,\ \mathbb{H} ,\ \text{Geometría} \right)$$

14. Adimensionalización de la ecuación diferencial de continuidad para flujo transitorio en canales.

$$\frac{A}{T}\frac{\delta V}{\delta x} + V\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{\delta y}{\delta t} = 0 \qquad (1)$$

Utilizando variables de referencia

A_o

L_o

V_o

t_o

Definiendo las siguientes variables adimensionales

$$
\begin{aligned}
D' &= D/L_o \\
T' &= T/T_o \\
X' &= X/L_o \\
V' &= V/V_o \\
y' &= y/L_o \\
t' &= t/t_o
\end{aligned} \qquad (2)
$$

Remplazando las ecuaciones (2) en (1)

$$L_oD' \frac{V_o}{L_o} \frac{\delta V'}{\delta x'} + V_o V' \frac{\delta y'}{\delta x'} + \frac{L_o}{t_o} \frac{\delta y'}{\delta t'} = 0$$

Dividiendo la ecuación entre $D' V_o$

$$\frac{\delta V'}{\delta x'} + \frac{V'}{D'} \frac{\delta y'}{\delta x'} + \frac{L_o}{V_o t_o} \frac{1}{D'} \frac{\delta y'}{\delta t'} = 0$$

llamando $H = \dfrac{L_o}{V_o t_o}$

$$\frac{\delta V'}{\delta x'} + \frac{V'}{D'}\,\frac{\delta y'}{\delta x'} + \frac{H}{D'}\,\frac{\delta y'}{\delta t'} = 0$$

$$\frac{V}{V_o} = f(\ H,\ \text{Geometría})$$

V CONCLUSIONES

El análisis dimensional tiene sus limitaciones y dificultades, así como sus ventajas; como el que es rápido y para problemas simples una ayuda para la comprensión física del fenómeno, y casi siempre ofrece la información útil.

El análisis inspeccional es capaz de ofrecer toda la información que obtenemos con análisis dimensional y aún más. Las ventajas que ofrece el análisis inspeccional son las siguientes:

1. Es una versión correcta de una ley natural
2. Es una función de un número reducido de variables, lo que implica que la función se puede determinar más facilmente que la función dimensionada.
3. Su valor numérico no depende del sistema de unidades
4. Las variables adimensionales de la función son también un criterio de similaridad de un fenómeno.
5. En casi todos los problemas la constante adimensionada es de dos

clases:

1. Aquellas que se encuentran en las ecuaciones diferenciales

2. Las que estan en las condiciones iniciales o de frontera

Por lo tanto usando análisis inspeccional, podemos ver a que clase pertenece una constante física.

VI BIBLIOGRAFIA

1. G. Birkhoff, " Hydrodinamics", Princeton University Press,1960

2. A. E. Ruark, " Inspectional Analysis: A Method which supplements dimensional analysis", Journal Elisha Mitchell SCISOC 51, 1935, pp. 127-133

3. Rafael Guarga, " Reducción de parámetros: Un método que compleneta el análisis inspeccional", IX Congreso Latinoamericano de Hidráulica, México.

4. Streeter y Wylie, " Mecánica de los Fluidos", McGraw Hill, 1969

5. Rafael Guarga, " Canales con gasto creciente", series del Instituto de Ingeniería de la UNAM, n° 463, 1983

6. J. Daily y O. Harleman, " Dinámica de los Fluídos", Trillas,1972

7. G. Birkhoff, " Ordinary Differential Equations", Wiley and sons,1978

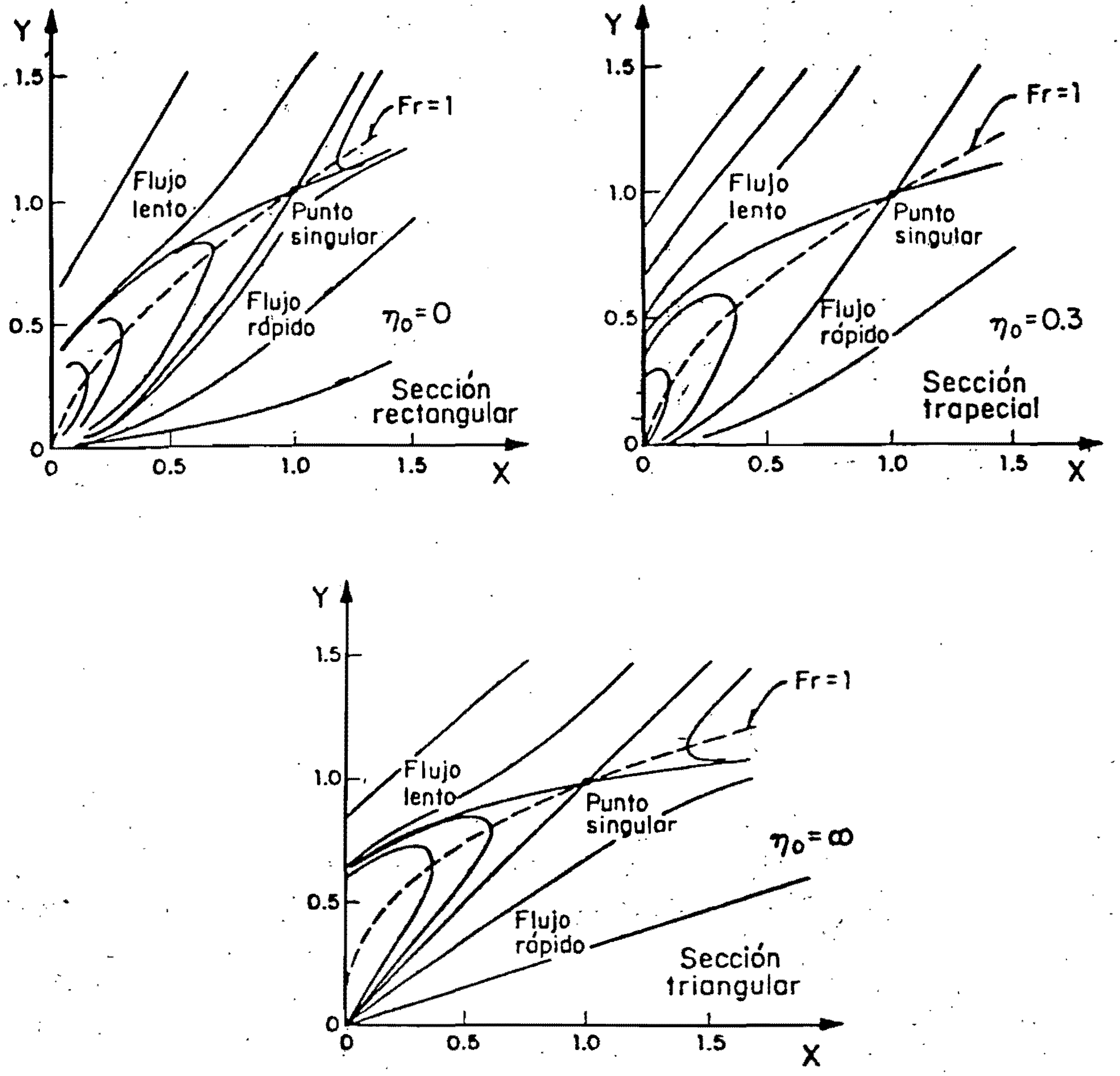
8. Ronald V. Hilles, " Mecánica de los fluídos e Hidráulica", McGraw Hill, 1973

ANEXO I

Magnitudes más comunes en función de la fuerza F, la longitud L, y del tiempo t; y en función de la masa M, la longitud L, y del tiempo t.

Magnitud	F-L-t	M-L-t
Area	L^2	L^2
Volumen	L^3	L^3
Velocidad	Lt^{-1}	Lt^{-1}
Aceleración	Lt^{-2}	Lt^{-2}
Velocidad angular	t^{-1}	t^{-1}
Fuerza	F	MLt^{-2}
Masa	$F t^2 L^{-1}$	M
Peso específico	FL^{-3}	$ML^{-2} t^{-2}$
Densidad	$Ft^2 L^{-4}$	ML^{-3}
Presión	FL^{-2}	$ML^{-1}t^{2}$
Viscosidad Absoluta	FtL^{-2}	$ML^{-1} t^{-1}$
Viscosidad Cinemática	L^2t^{-1}	$L^2 t^{-1}$
Módulo de elasticidad	FL^{-2}	$ML^{-1} t^{2}$
Potencia	FLt^{-1}	$ML^2 t^{-3}$
Par	FL	$ML^2 t^{-2}$
Caudal	$L^3 t^{-1}$	$L^3 t^{-1}$

Tensión superficial	$F\ L^{-1}$	$M\ t^{-2}$
Peso	F	$M\ L\ t^{-2}$
Caudal en peso	$F\ t^{-1}$	$M\ L\ t^{-3}$
Esfuerzo cortante	$F\ L^{-2}$	$M\ L^{-1}\ t^{-2}$



Grafica 1. Diagrama X, Y, para diferentes valores de η_o (ref 5)