

500020

TRABAJO PREVIO AL EXAMEN DE MAESTRIA
EN INGENIERIA (ESTRUCTURAS)

JAIMÉ GONZÁLEZ ABAD

JURADO:

M. en C. Enrique del Valle C.

Dr. Gonzalo Alducin G.

Dr. Gustavo Ayala M.

Dr. Dionisio Bernal N.

Dr. Enrique Bazán Z.

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO UNAM

NOVIEMBRE 1991



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPA

T. UNAM

1981

GON

TRABAJO PREVIO AL EXAMEN DE MAESTRIA EN INGENIERIA (ESTRUCTURAS)

JAIME GONZALEZ ABAD

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MEXICO UNAM

NOVIEMBRE 1981

TEMA : Estudio comparativo de las opciones que se tienen al plantear modelos para el análisis de estructuras con barras de sección variable.

DESARROLLO

INTRODUCCION

El tema que en este trabajo se pretende desarrollar es difícil de plantearlo en forma general de manera de obtener conclusiones en base a estudios de tipo paramétrico; aún para los casos más simples el número de variables involucradas y las complejas relaciones existentes entre ellas dificultan un estudio de este tipo. Por esta razón en este trabajo se plantearán casos particulares en los cuales se investigarán las diversas posibilidades de modelar estructuras de sección variable. Estos casos particulares se han escogido de forma tal que sean representativos de partes de estructuras comunes. Las conclusiones a obtenerse no serán de tipo general, sin embargo darán criterios válidos para casos semejantes. En algunos ejemplos se han hecho variar las relaciones geométricas de los elementos considerados

para hacer notar las diferencias en los resultados obtenidos en función de estos parámetros.

Básicamente el método a utilizarse será el planteamiento de las idealizaciones posibles de análisis y su respectiva solución, en los casos donde se observen diferencias significativas se resolverá el problema utilizando el método de elementos finitos. En base a estos resultados se efectuará un análisis comparativo de los mismos a fin de conocer la representabilidad y/o limitaciones de las idealizaciones planteadas.

PROBLEMA BASICO PARA EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE SECCION VARIABLE .-

Considérese el nudo de una estructura cuyas barras que concurren a él tienen acartelamientos en sus extremos (ver Fig. 1).

Al plantear las idealizaciones para el análisis pueden conjeturarse varias alternativas, unas simples y otras más complejas que involucren la aparición de nudos extras o lo que es lo mismo, mayores grados de libertad para el análisis con el consiguiente aumento en el número de ecuaciones necesarias para su solución. Así mismo aparecen dificultades para asignar los valores del momento de inercia I y el área A de las barras consideradas.

Así en la Fig. 1-b se muestra la hipótesis usualmente admitida, en ella se tiene solamente un nudo y por otro lado los valores de las rigideces y momentos de empotramiento necesarios para su solución se encuentran tabulados en varios manuales.

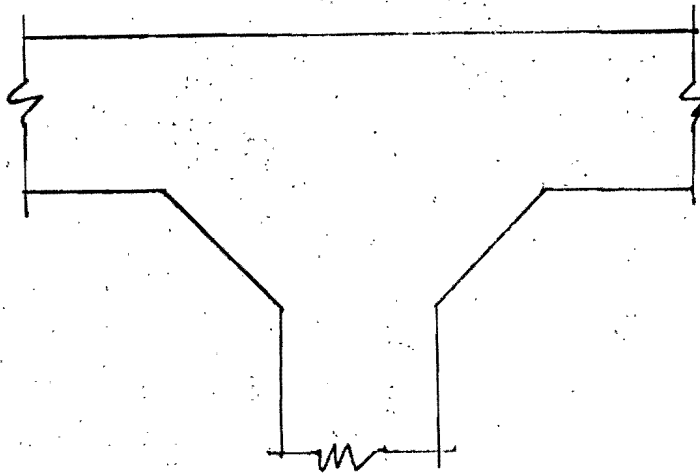
En la Fig. 1-c se presenta otra alternativa, aquí se tienen ya cuatro nudos y su solución será más laboriosa.

En estas dos posibilidades se presenta la incongruencia de que normalmente se toman los valores de I respecto a un eje centroidal (normal al plano de la figura) que no corta al eje que se está considerando para el análisis.

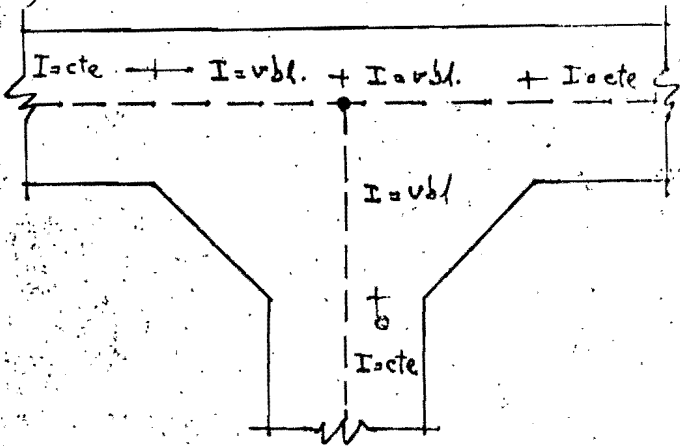
En las Fig. 1-d y 1-e se plantean dos alternativas considerando ejes inclinados en los acartelamientos. Aquí surge una duda: ¿será suficiente tomar el valor de I de las secciones verticales o tomar los valores correspondientes a secciones perpendiculares a los ejes inclinados?

Entonces, como conclusión, puede establecerse que el problema básico en estos casos es la elección de los ejes de las barras y sus correspondientes valores de I y A . Mientras mejor se pretenda representar la estructura, las complicaciones aumentan considerablemente, sin embargo no se sabe hasta que punto influyen en los resultados finales estas refinaciones en el análisis.

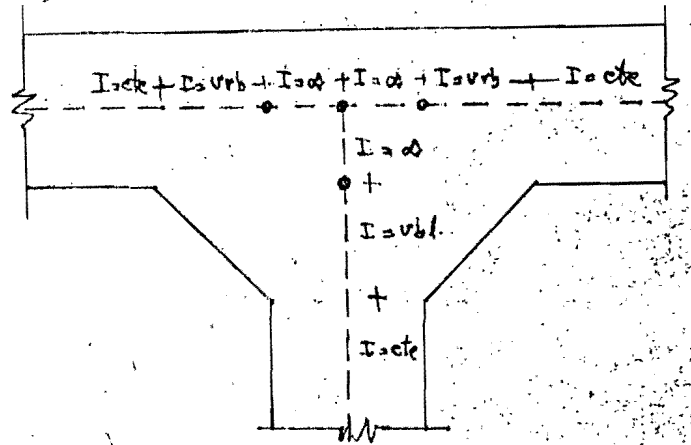
a)



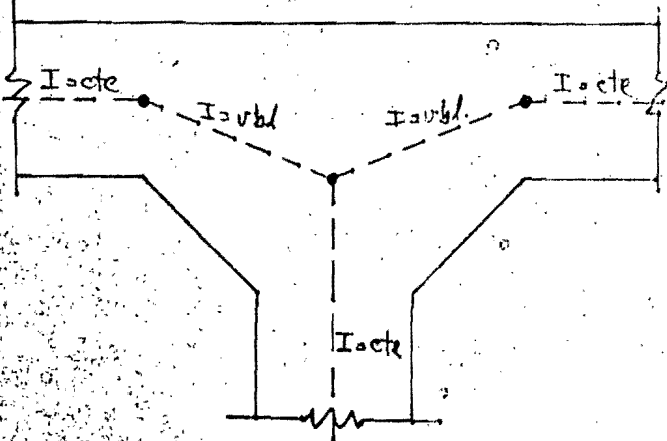
b)



c)



d)



e)

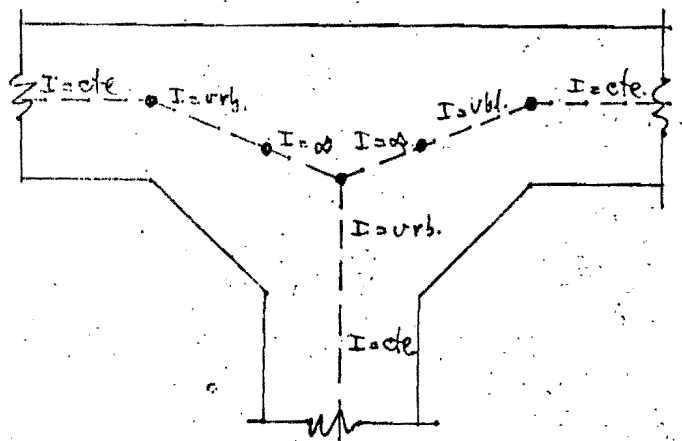


FIG. 1

CASO 1

Con este ejemplo se pretende estudiar el caso de un marco con una de sus columnas acartelada en su extremo inferior como se muestra en la Fig. 2.

En la Fig. 3 se señalan dos idealizaciones para el análisis de este marco, la primera considerando el eje recto a lo largo de toda la columna y la segunda considerando el eje inclinado en la parte correspondiente a la cartela. Para su solución se tomaron en cuenta deformaciones por flexión, cortante y fuerza axial. Los resultados constan en la Fig. 4.

Análisis de los resultados

Los elementos mecánicos obtenidos en las dos hipótesis son prácticamente iguales, a excepción del momento en el extremo C de la cartela que aumenta el 100 % en la segunda hipótesis con relación a la primera. Esta variación brusca se explica en el hecho de que en la primera idealización no se está considerando la excentricidad de la reacción vertical sobre la cartela. Nótese que si se trasladan las reacciones de la hipótesis 1 al centroide de la cartela se obtienen esencialmente las mismas reacciones que en la hipótesis 2:

$$0.4925 \times 0.5 + 0.2361 = 0.4824 \text{ t-m} \approx 0.467 \text{ t-m}$$

Entonces para fines de diseño del marco puede aceptarse la primera idealización siempre que se recuerde que deben trasladarse las reacciones al centroide de la sección. Esta conclusión es importante ya que es un detalle que comúnmente no se tiene en cuenta.

Con relación a las deformaciones los resultados son:

	eje recto			eje inclinado		
	dx	dy	φ	dx	dy	φ
Nudo C	19.11/E	-4.03/E	-55.03/E	14.16/E	-7.38/E	-55.43/E
Nudo D	16.00/E	-6.09/E	49.89/E	11.12/E	-6.07/E	51.66/E

Se observan variaciones del orden del 35 % en los desplazamientos horizontales y del 80 % en el vertical del punto C, por lo que surgen dudas acerca de la confiabilidad de los resultados obtenidos; con el análisis por el método de elementos finitos se podrá establecer un criterio de comparación en este sentido de los desplazamientos.

CASO 1 CON CARGA HORIZONTAL

En las Figs. 5 y 6 se muestran las idealizaciones y resultados obtenidos en el marco en estudio ante carga horizontal. Con relación a los elementos mecánicos se pueden hacer las mismas conclusiones que ante carga vertical.

Las deformaciones son;

	eje recto			eje inclinado		
	dx	dy	φ	dx	dy	φ
Nudo C	-239./E	21.99/E	34.97/E	-247./E	-10.6/E	36.9/E
Nudo D	-233./E	2.91/E	47.66/E	-241./E	2.9/E	50.9/E

Los desplazamientos verticales del nudo C difieren en cinco veces de uno a otro caso. Esto se debe a que al considerar el eje inclinado en el nudo B se produce una tendencia a desplazarse hacia abajo y hacia la izquierda.

CASO 1 SIN CONSIDERAR LA CARTELA

Con el fin de conocer la influencia de la cartela en el

extremo inferior de la columna, se resolvió el marco ignorando la presencia de aquella. Los resultados se ven en la Fig. 7. Se observa una pequeña disminución en los elementos mecánicos a excepción del nudo A que disminuye bruscamente con relación a la hipótesis de ejes inclinados y considerando la cartela.

Las deformaciones que se obtuvieron fueron:

	dx	dy	φ
Nudo C	1.39/E	-6.0/E	-55.05/E
Nudo D	-1.39/E	-6.0/E	55.05/E

Si se comparan los desplazamientos horizontales de los nudos C y D con los obtenidos cuando se consideró la cartela, se tiene que el efecto de la cartela es producir mayores desplazamientos horizontales cambiando inclusive de signo en el punto D, esto se debe a la pérdida de la simetría en la estructura. Este efecto aparece como contradictorio ya que resulta que al aumentar la sección en un extremo de la columna se tienen mayores desplazamientos horizontales.

ANALISIS DEL CASO 1 POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

Se realizó el análisis del marco en estudio mediante el método de elementos finitos; se usó el programa SAP IV empleando elementos planos con dos grados de libertad por nudo. La malla utilizada se muestra en la Fig. 8. Los resultados que da el programa son los esfuerzos en el centro de los elementos y en la mitad de los lados de estos.

Análisis de los resultados

En la Fig. 9 se han graficado los esfuerzos en la base de la columna acartelada. En esta se puede ver que existe

una variación no lineal de los esfuerzos, sin embargo puede notarse que de los esfuerzos obtenidos por la fórmula de la escuadría en base a los elementos mecánicos de las dos hipótesis, la distribución que más se acerca es aquella en la que se tomó el eje inclinado.

En la Fig. 10 se muestran los esfuerzos y los elementos mecánicos deducidos de ellos para otras secciones. Los resultados prácticamente coinciden con los obtenidos con los métodos convencionales en las dos idealizaciones:

Con relación a los desplazamientos se tiene:

$$E=2. \times 10^6 \text{ t/m}^2$$

	EJE RECTO		EJE INCLINADO		MEF	
	D. Hzt.	D. Vvt.	D. Hzt	D. Vrt	D. Hzt	D. Vvt.
NUDO C (NODO 27)	$9.55 \cdot 10^{-4}$	$-2.015 \cdot 10^{-4}$	$7.08 \cdot 10^{-6}$	$-3.69 \cdot 10^{-6}$	$7.409 \cdot 10^{-6}$	$-2.7907 \cdot 10^{-6}$
NUDO D (NODO 83)	$8.0 \cdot 10^{-4}$	$-3.045 \cdot 10^{-4}$	$5.56 \cdot 10^{-6}$	$-3.035 \cdot 10^{-6}$	$6.446 \cdot 10^{-6}$	$-2.56 \cdot 10^{-6}$

Se ve que la idealización consistente en tomar el eje inclinado da resultados muy semejantes a los obtenidos con el MEF, cabe señalar que el MEF da resultados más "exactos" precisamente en los desplazamientos.

CONCLUSIONES

Se ha visto que puede aceptarse la hipótesis de tomar el eje recto con relación a la obtención de los elementos mecánicos, siempre que se recuerde trasladar estos al centroide de la base de la cartela. Si lo que interesa son las deformaciones, circunstancia no muy común, debe emplearse la idealización con el eje inclinado. Es claro que esto es válido para casos como el analizado.

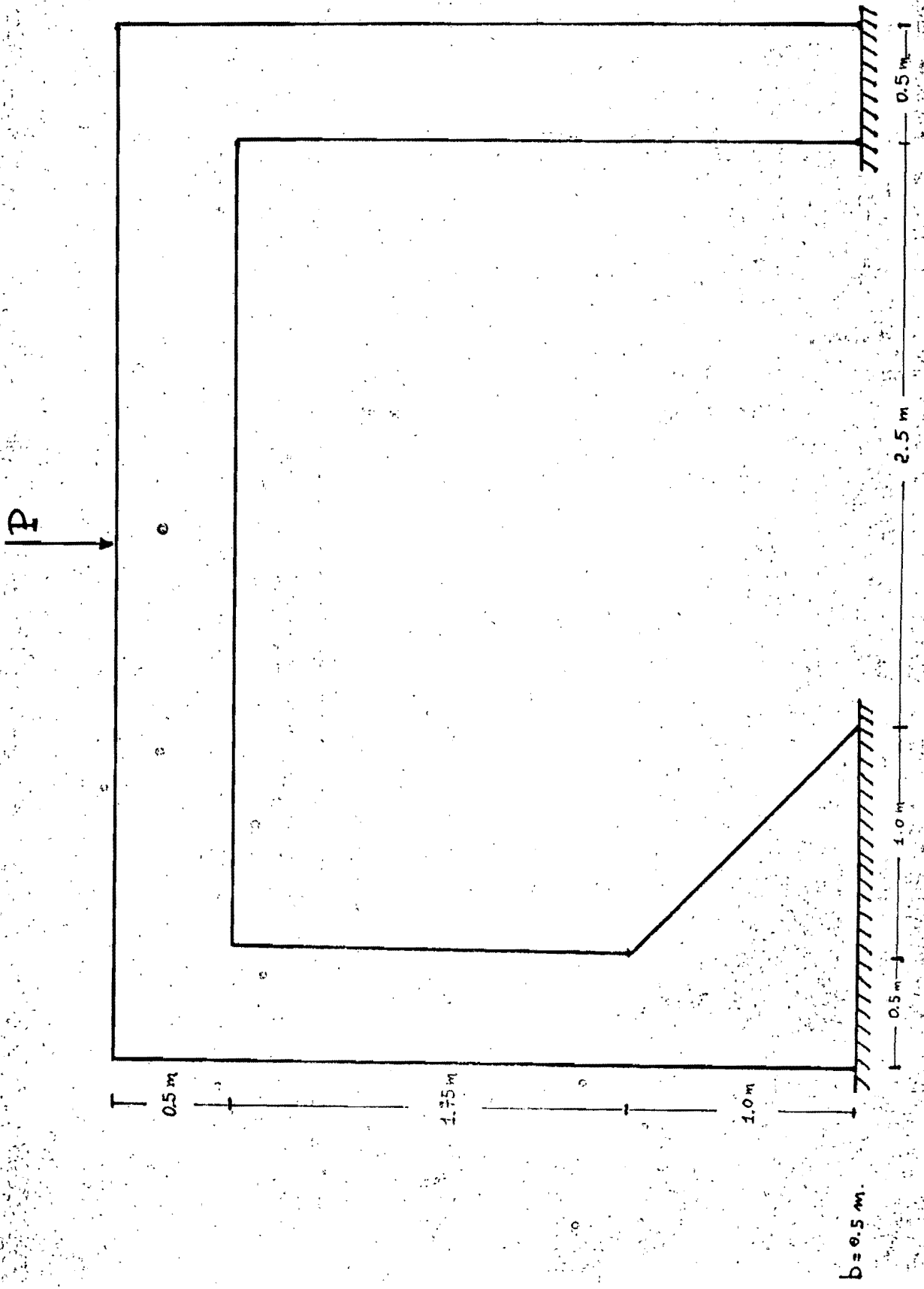


FIG. 2

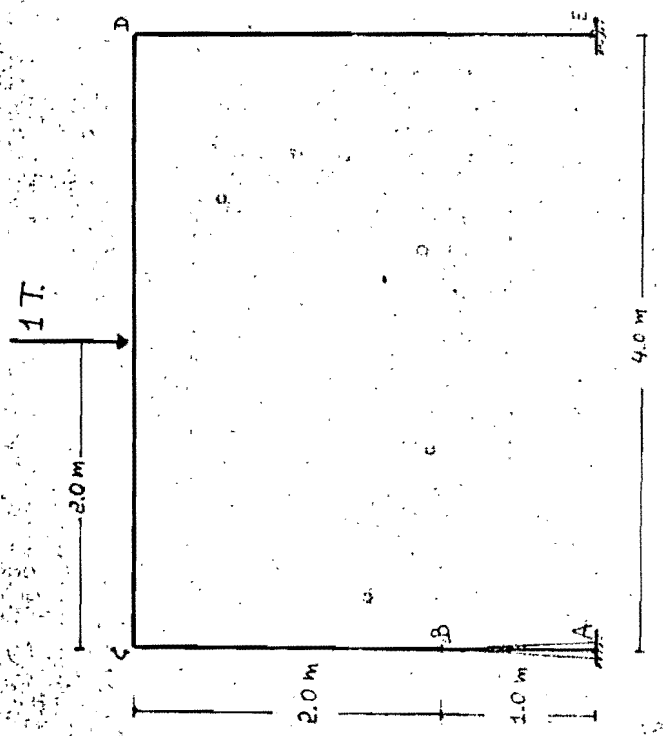
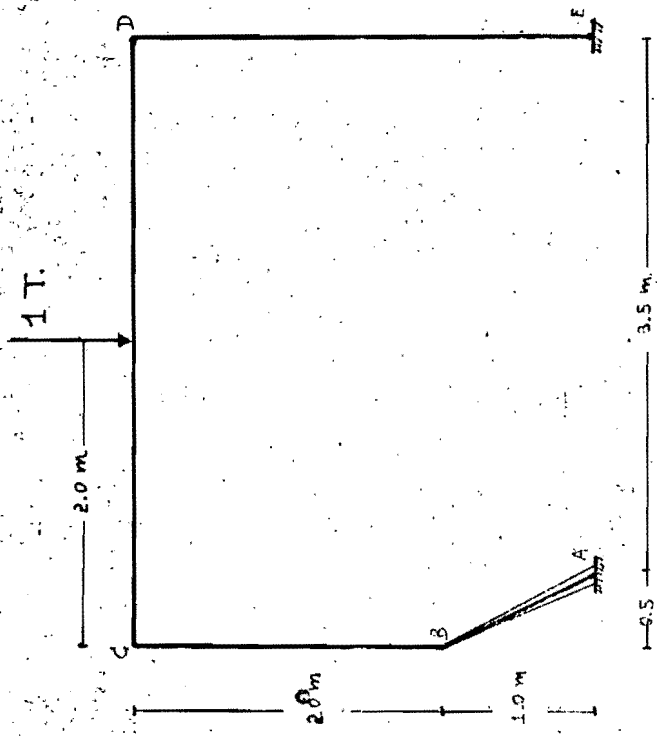


FIG. 3

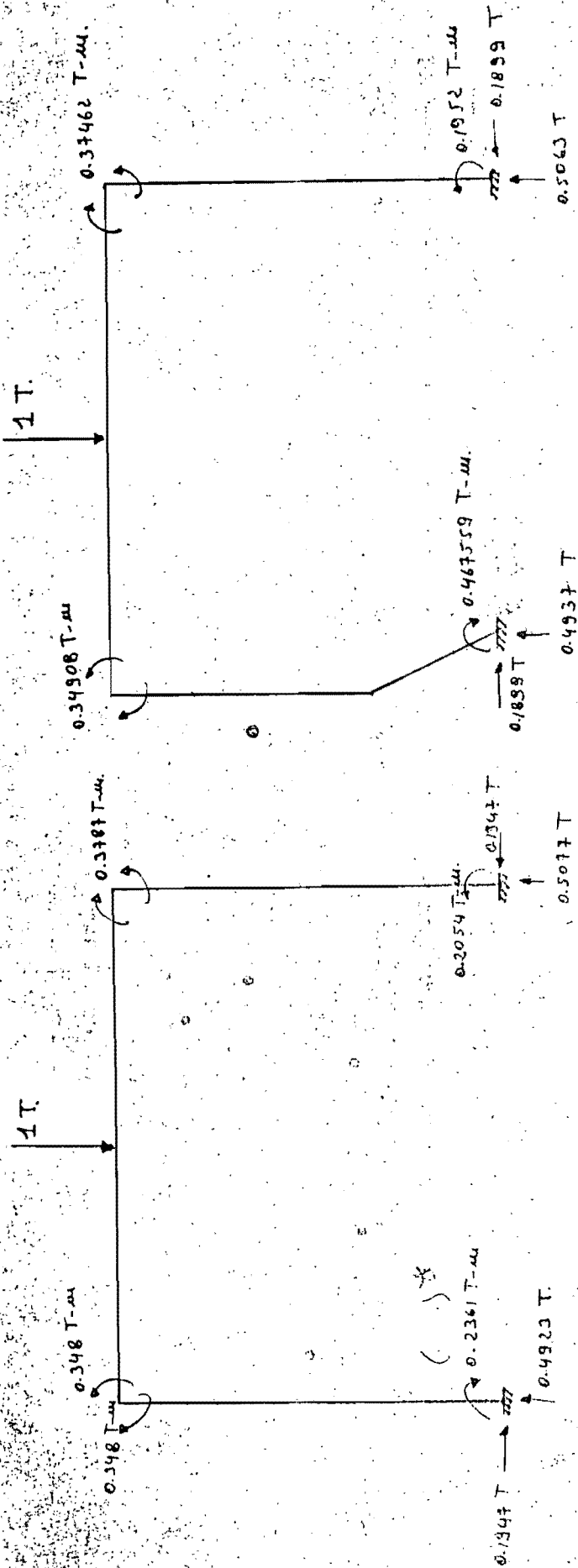


FIG. 4

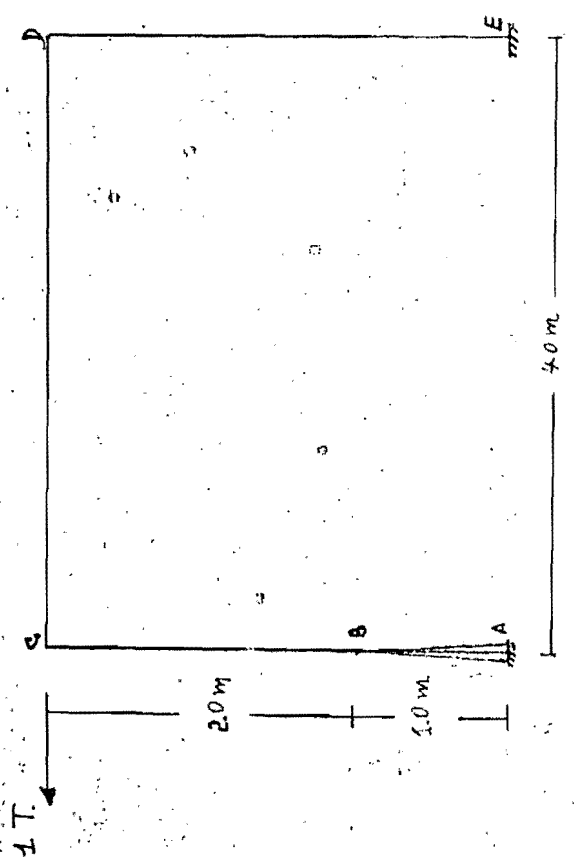
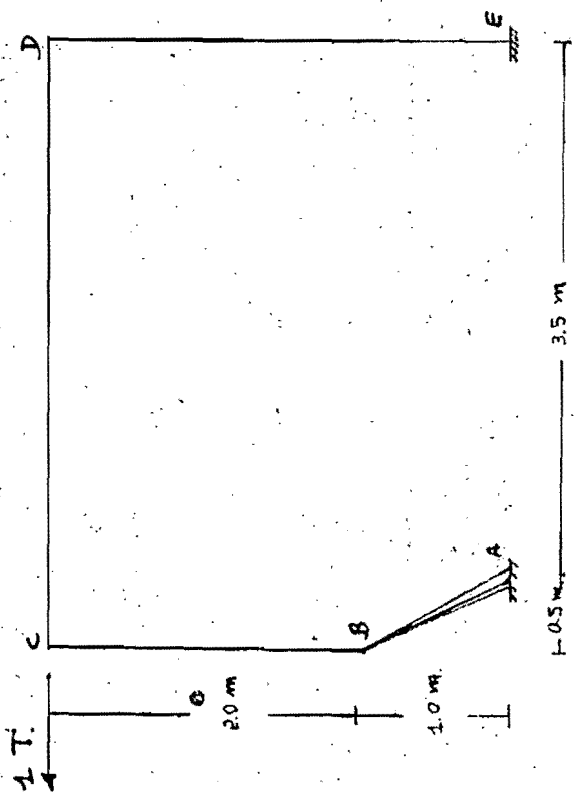


FIG. 5

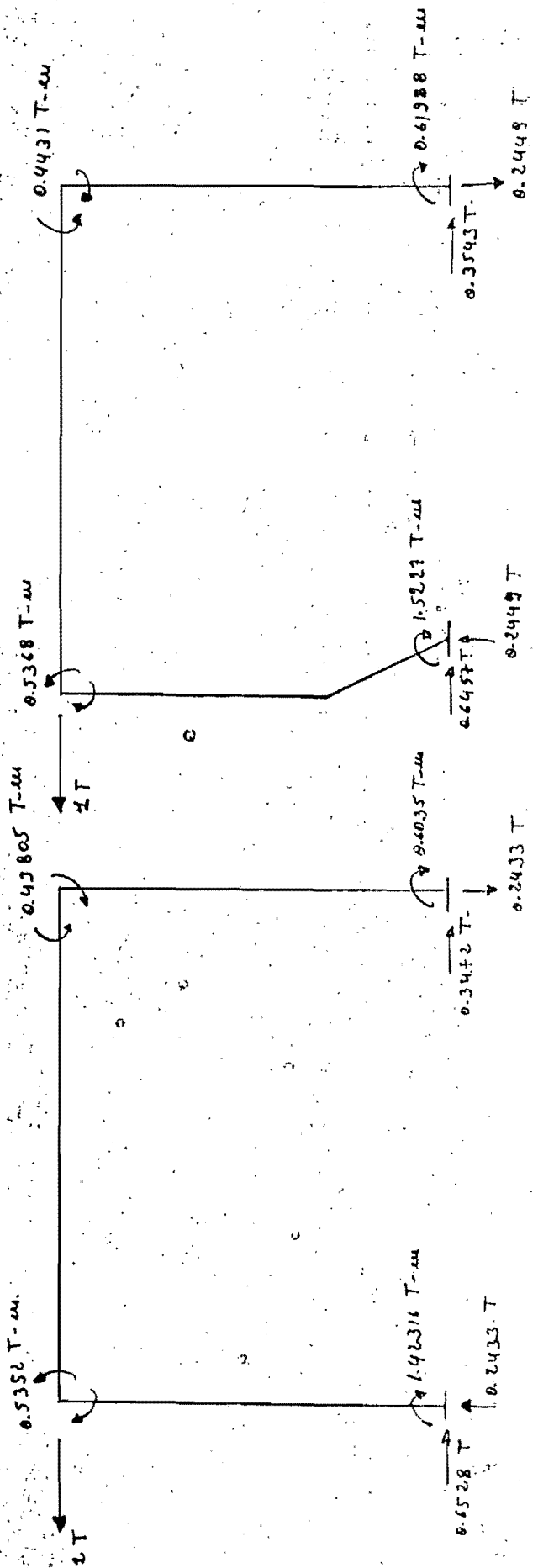


FIG. 6

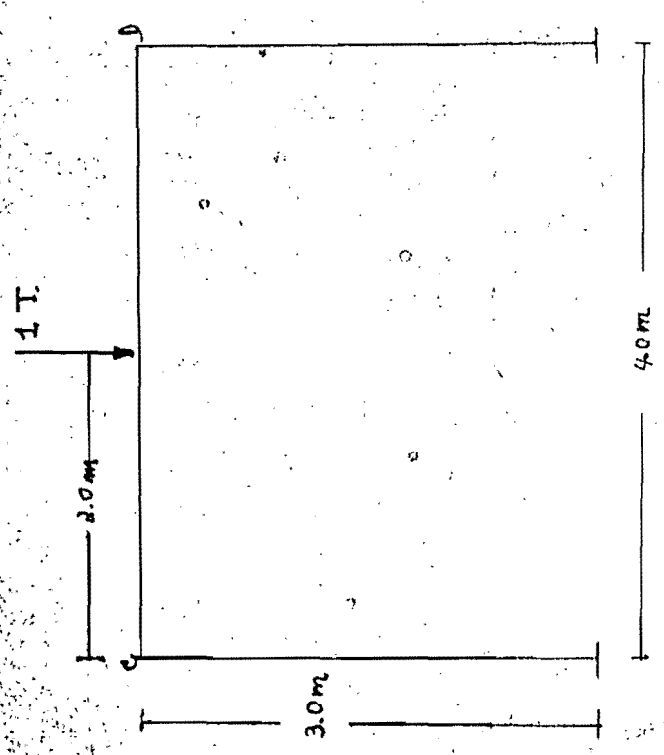
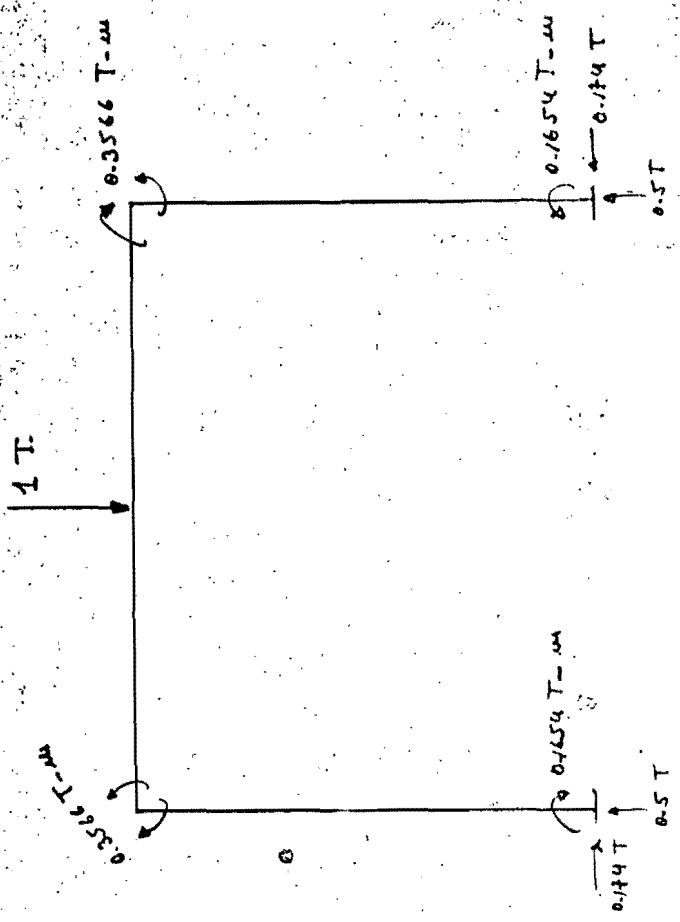


FIG. 7

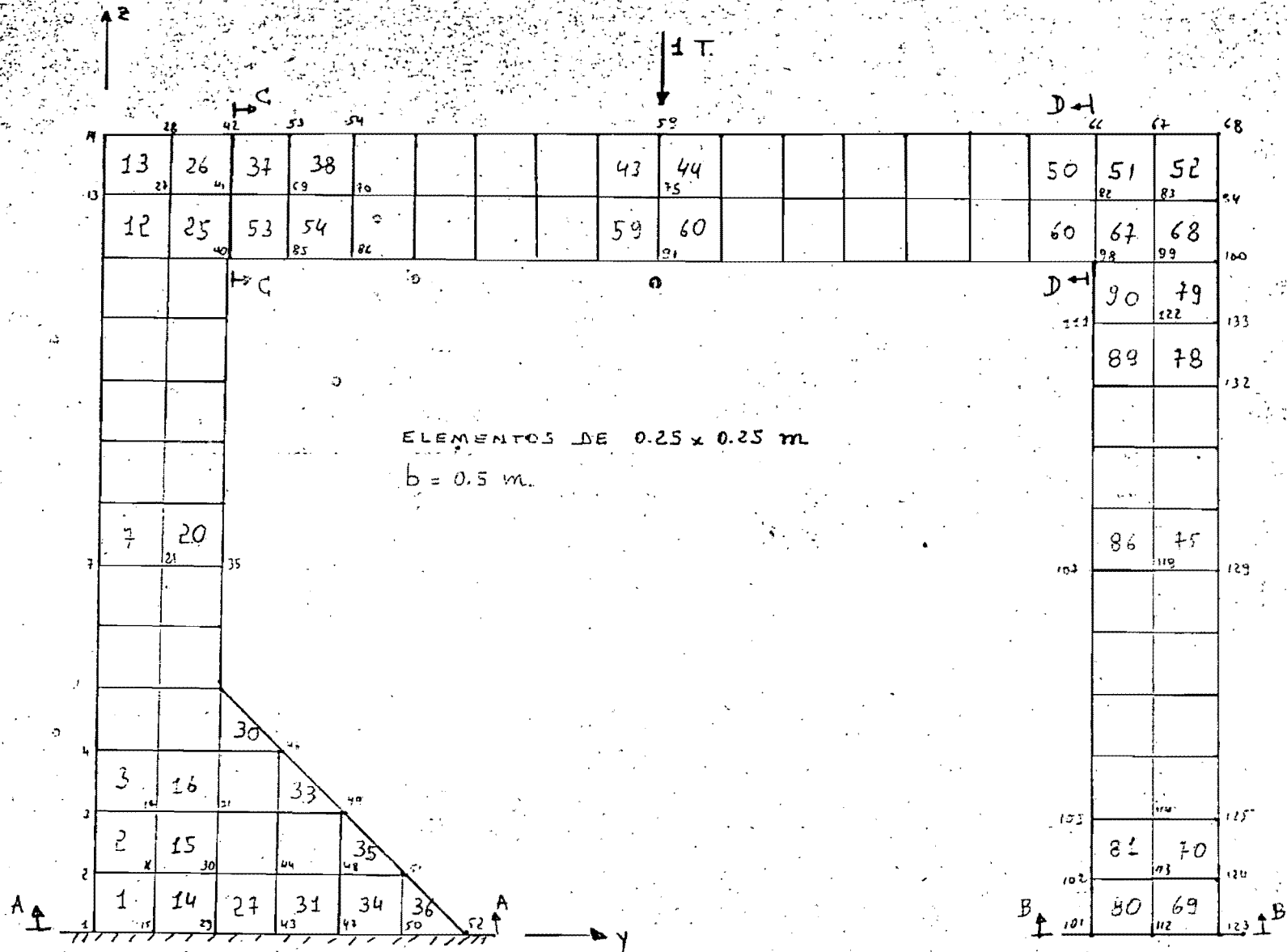


FIG. 8

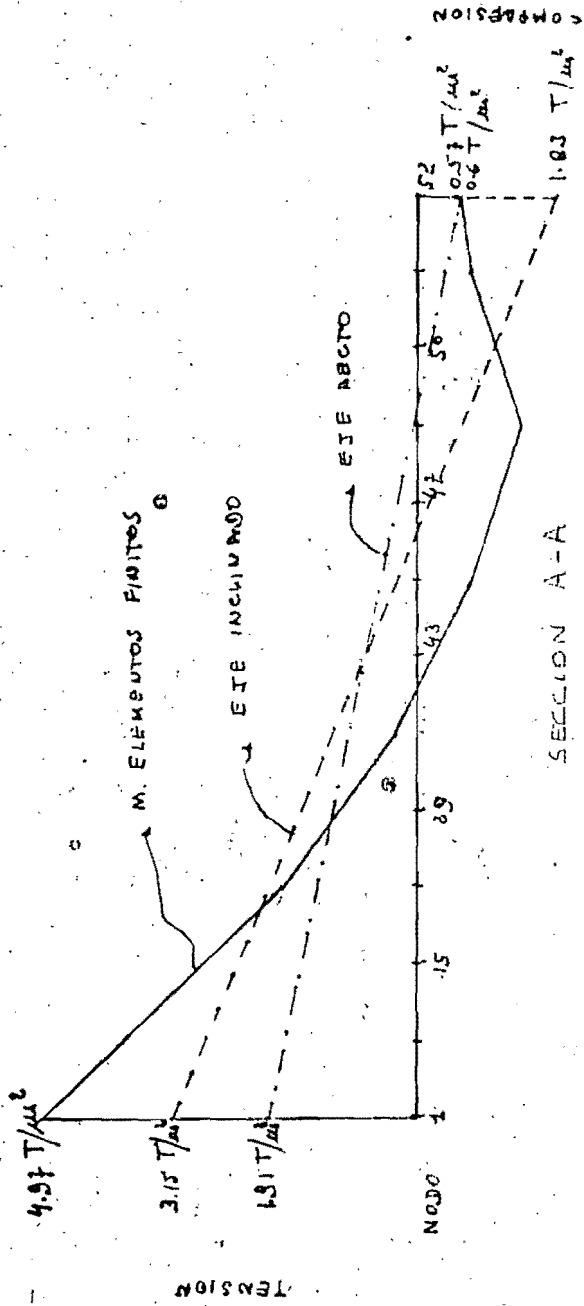
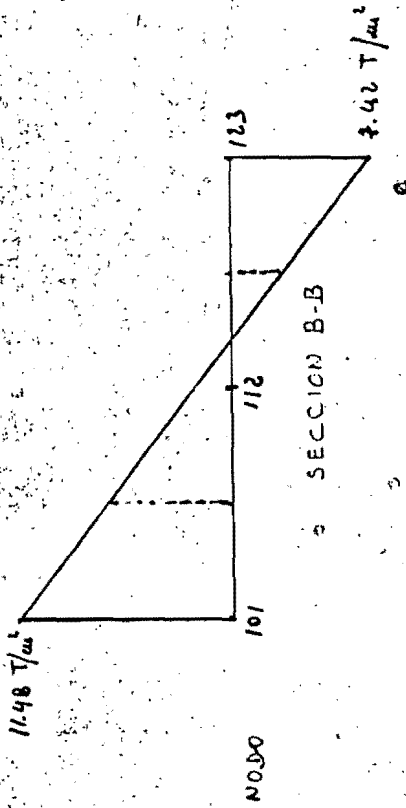
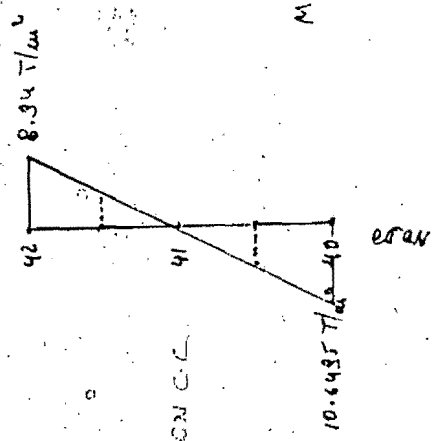


FIG. 9

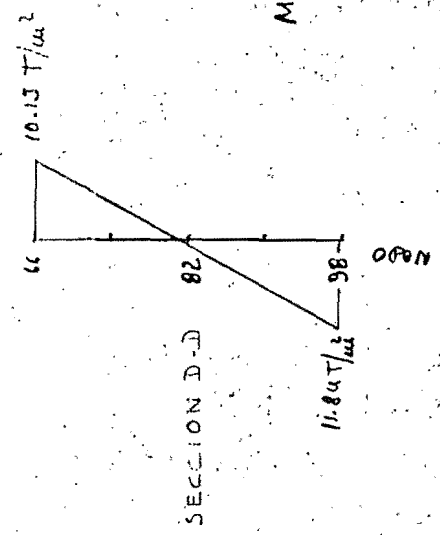


$F_{AXIAL} = 0.5076 T \quad (0.5063 T)^*$
 $M = 0.1966 T \cdot m. \quad (0.1952 T \cdot m)^*$



$F_{AXIAL} = 0.2031 T \quad (0.1989 T)^*$
 $M = 0.2041$

$M_{EN EL NUDO 2} = 0.2041 + 0.25 \cdot 0.4924 = 0.2232 T \cdot m. \quad (0.349 T \cdot m)^*$



$F_{AXIAL} = 0.2031 T \quad (0.1989 T)^*$
 $M = 0.2289$

$M_{EN EL NUDO 8} = 0.2289 + 0.25 \cdot 0.5076 = 0.3558 T \cdot m. \quad (0.3746 T \cdot m)^*$

NOTA: () * VALORES
 OBTENIDOS AL TOMAR
 EL EJE INCLINADO

FIG. 10

CASO 2

Con este caso se desea estudiar las idealizaciones posibles para el análisis de una estructura con traveses de sección variable (cartelas parabólicas) con miras a establecer criterios en casos en donde se presenta una estructura con efectos de arco. En la Fig. 11 se muestra la estructura a analizarse, se trató de representar aproximadamente un tramo interior de una arquería continua. Se considerará la simetría para su solución.

En la Fig. 12 se esquematiza la idealización correspondiente a tomar los ejes rectos y en la Fig. 13 los resultados obtenidos. Para su solución se utilizó el programa STRESS.

En la Fig. 14 se señala la hipótesis de tomar los ejes inclinados en la trabe. En la Fig. 15 están los resultados correspondientes a esta idealización y considerando los valores del momento de inercia de las secciones perpendiculares a estos ejes; en la Fig. 16 se muestran los resultados para la misma idealización pero tomando los valores del momento de inercia de las secciones verticales.

Análisis de los resultados

Se observa una variación considerable en los momentos sobre el nudo 3 (alrededor del 25 %) y en las reacciones horizontales sobre los apoyos guiados de los extremos. Al considerar los ejes rectos aumentan los momentos y disminuyen las reacciones horizontales, tomando los ejes inclinados sucede lo contrario. Evidentemente los resultados más realistas son los correspondientes a tomar los ejes

inclinados, ya que en el otro caso se está subestimando las reacciones horizontales lo que conduce a un aumento en los momentos del nudo 3.

Haciendo variar los valores de I de las secciones perpendiculares a los ejes a los de las secciones verticales, para este caso, no se tienen prácticamente diferencias.

ANÁLISIS DEL CASO 2 POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Se utilizó la malla con 160 nodos y 130 elementos que se muestran en la Fig. 17. Al igual que en el caso 1 se usó el programa SAP IV para elementos planos.

Análisis de los resultados

En la Fig. 18 se han graficado los esfuerzos obtenidos con el MEF en la sección AA y los esfuerzos obtenidos a partir de los momentos y fuerzas axiales de las dos hipótesis. Se observa claramente que los esfuerzos correspondientes a la idealización de tomar los ejes inclinados se aproximan mejor a los obtenidos con el MEF.

En la Fig. 19 se han graficado los esfuerzos en las secciones BB y CC (Fig. 17) y deducido a partir de ellos los elementos mecánicos correspondientes, estos resultan muy semejantes a los obtenidos con la idealización de tomar los ejes inclinados.

Con relación a los desplazamientos tenemos:

	EJES RECTOS		EJES INCLINADOS		MEF	
	D. vert.	D. H ₂ t	D. vert.	D. H ₂ t	D. vert.	D. H ₂ t.
NUDO 6 (NODO 124)	$-0.7 \cdot 10^{-3}$		$-0.7 \cdot 10^{-3}$		$-0.94 \cdot 10^{-3}$	
NUDO 8 (NODO 107)	$-1 \cdot 10^{-4}$		$-1 \cdot 10^{-4}$		$0.31 \cdot 10^{-4}$	
NUDO 3 (NODO 76)			$-0.2 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 10^{-4}$	$-0.16 \cdot 10^{-3}$	$-0.89 \cdot 10^{-4}$
NUDO 3 (NODO 112)	0	$-0.2 \cdot 10^{-3}$			$-0.16 \cdot 10^{-3}$	$0.14 \cdot 10^{-4}$

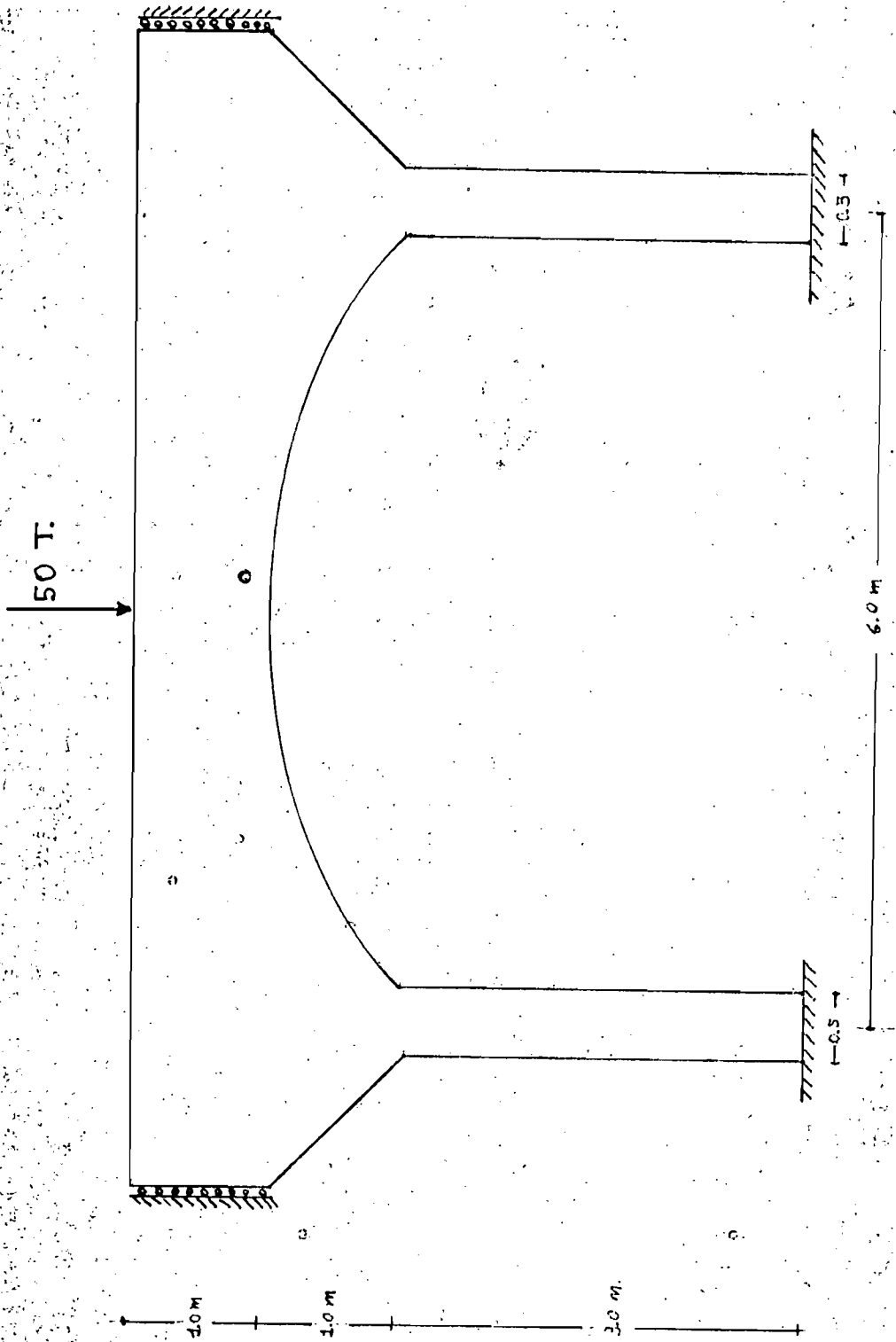
No se tienen variaciones significativas en ninguno de los casos.

CONCLUSIONES

Para el caso particular analizado se desprende que es imperativo el usar idealizaciones que consideren los ejes inclinados. No se tienen diferencias al asignar valores del momento de inercia de las secciones perpendiculares al eje o de las secciones verticales. En los desplazamientos no se tienen variaciones significativas.



DEPA



$$b = 0.5 \text{ m.}$$

FIG. 11

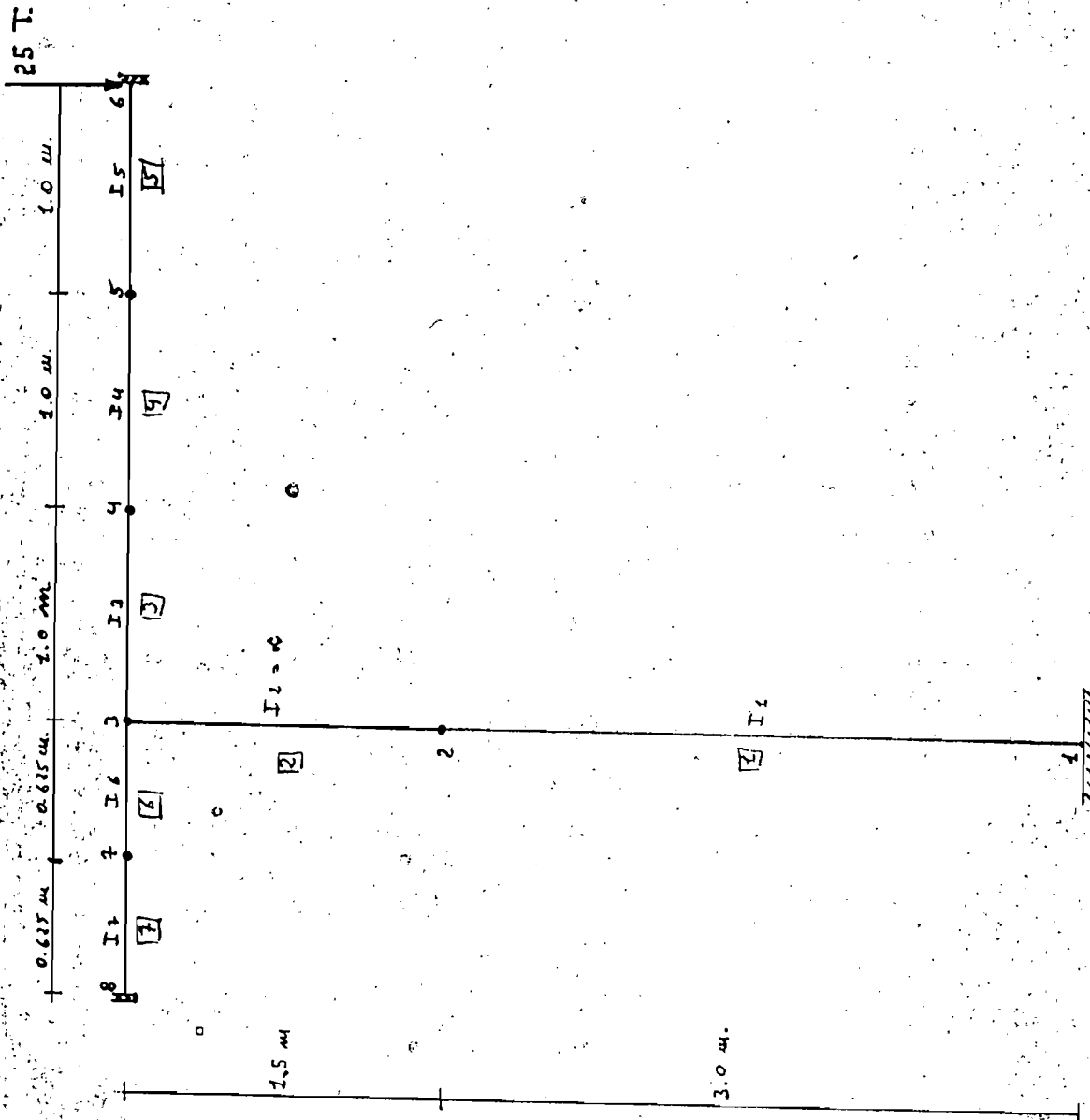


FIG. 12

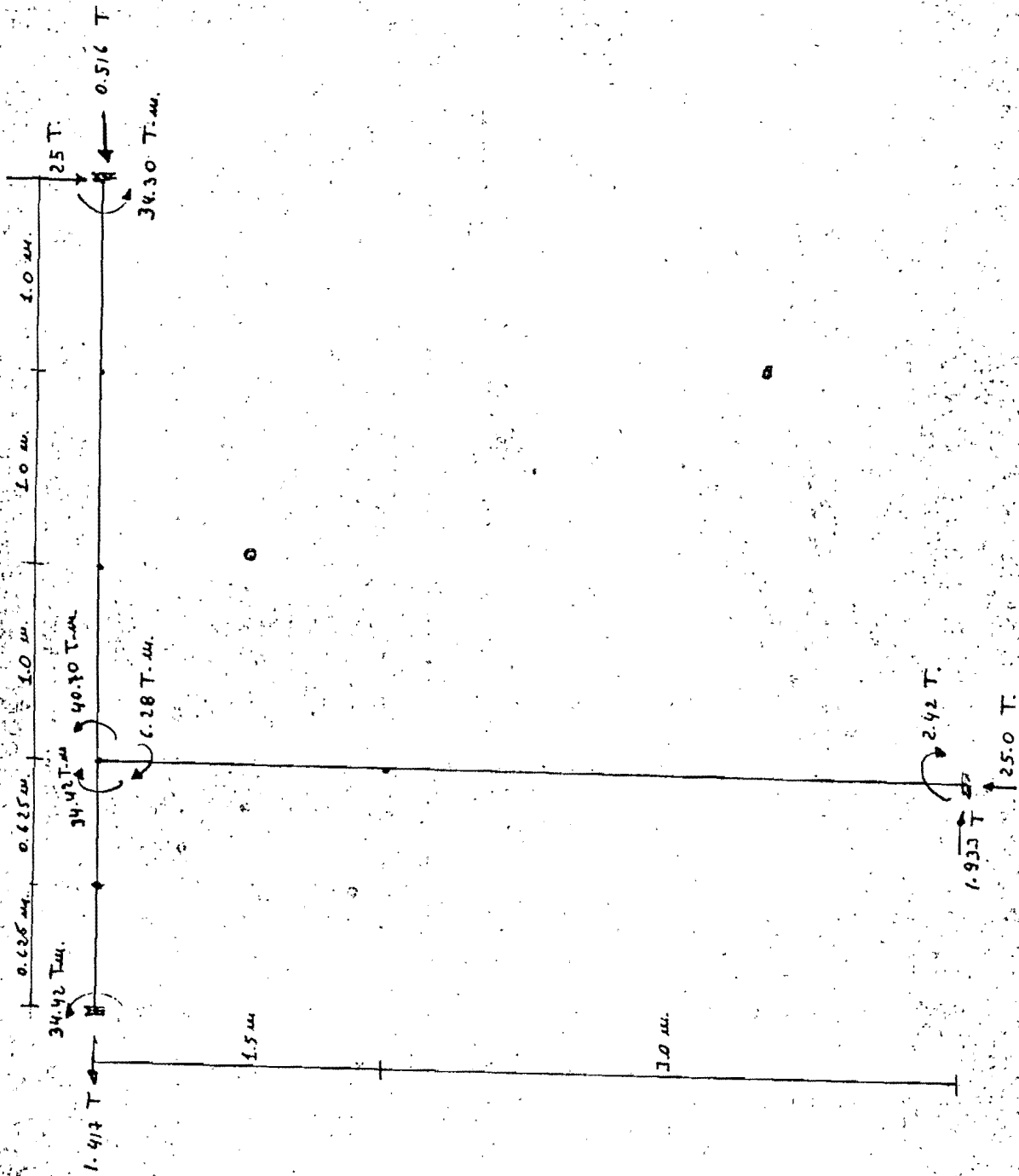


FIG. 13

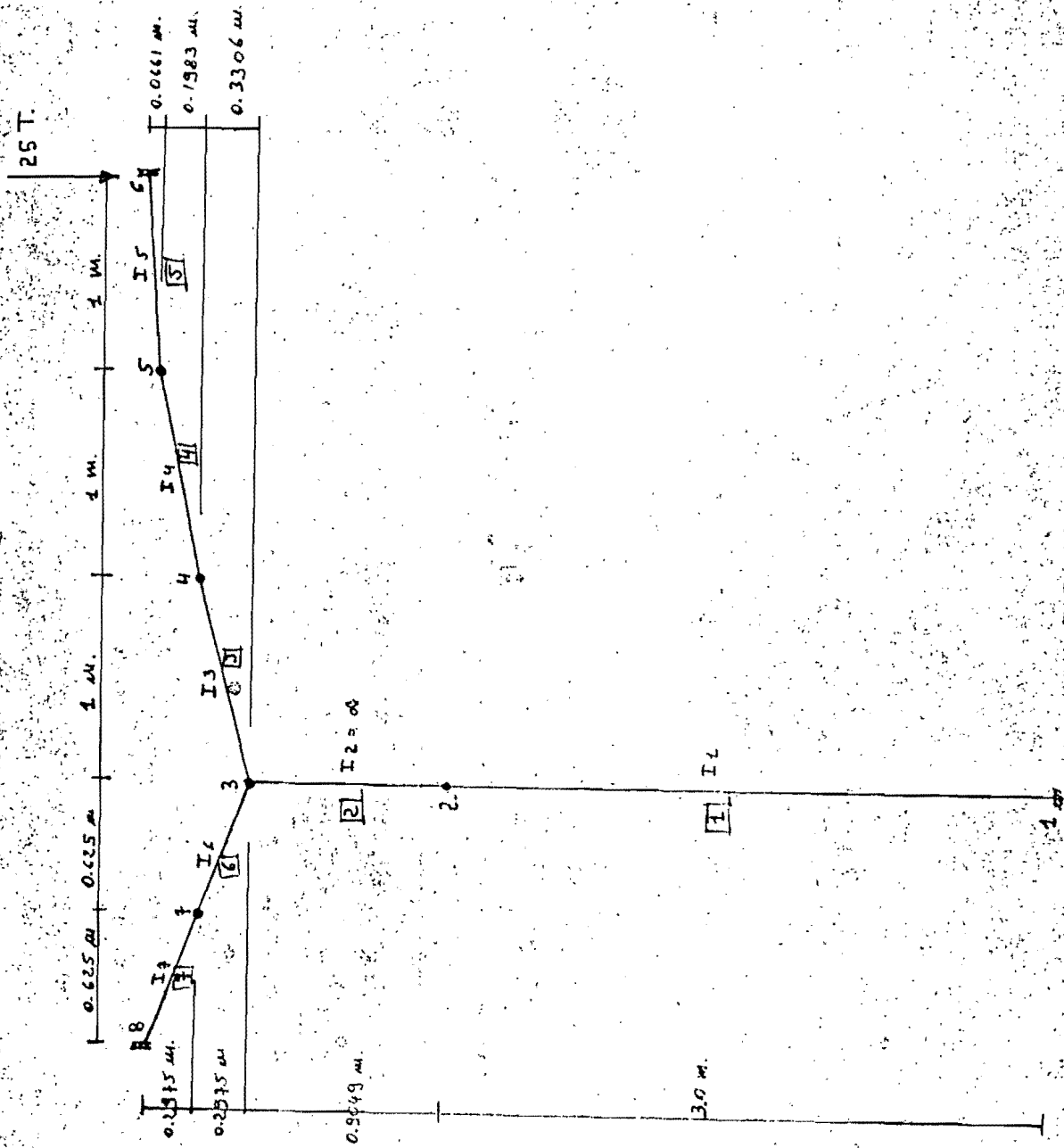
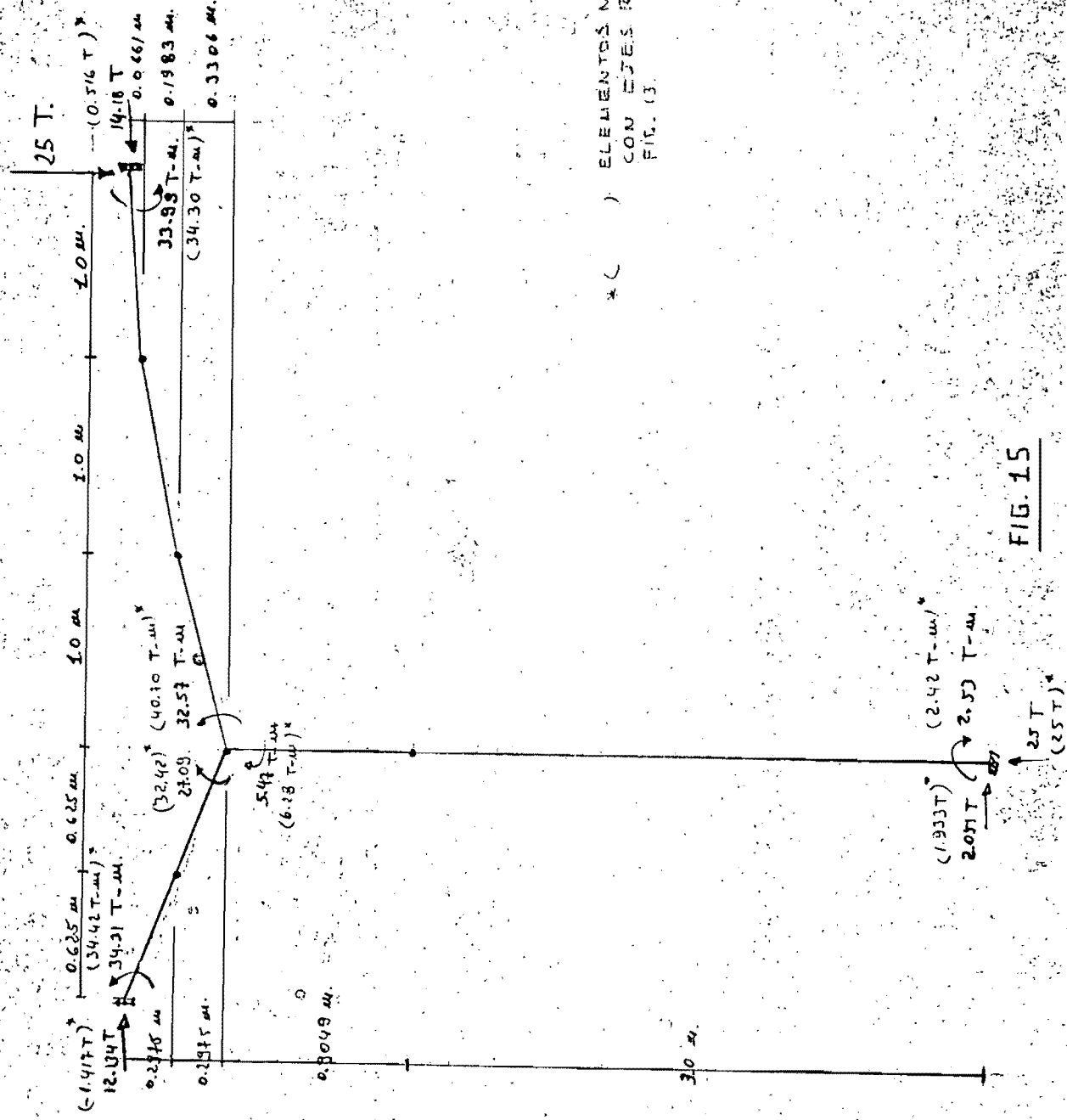


FIG. 14



* () ELEMENTOS MECANICOS
 CON EJES RECTOS
 FIG. 13

FIG. 15

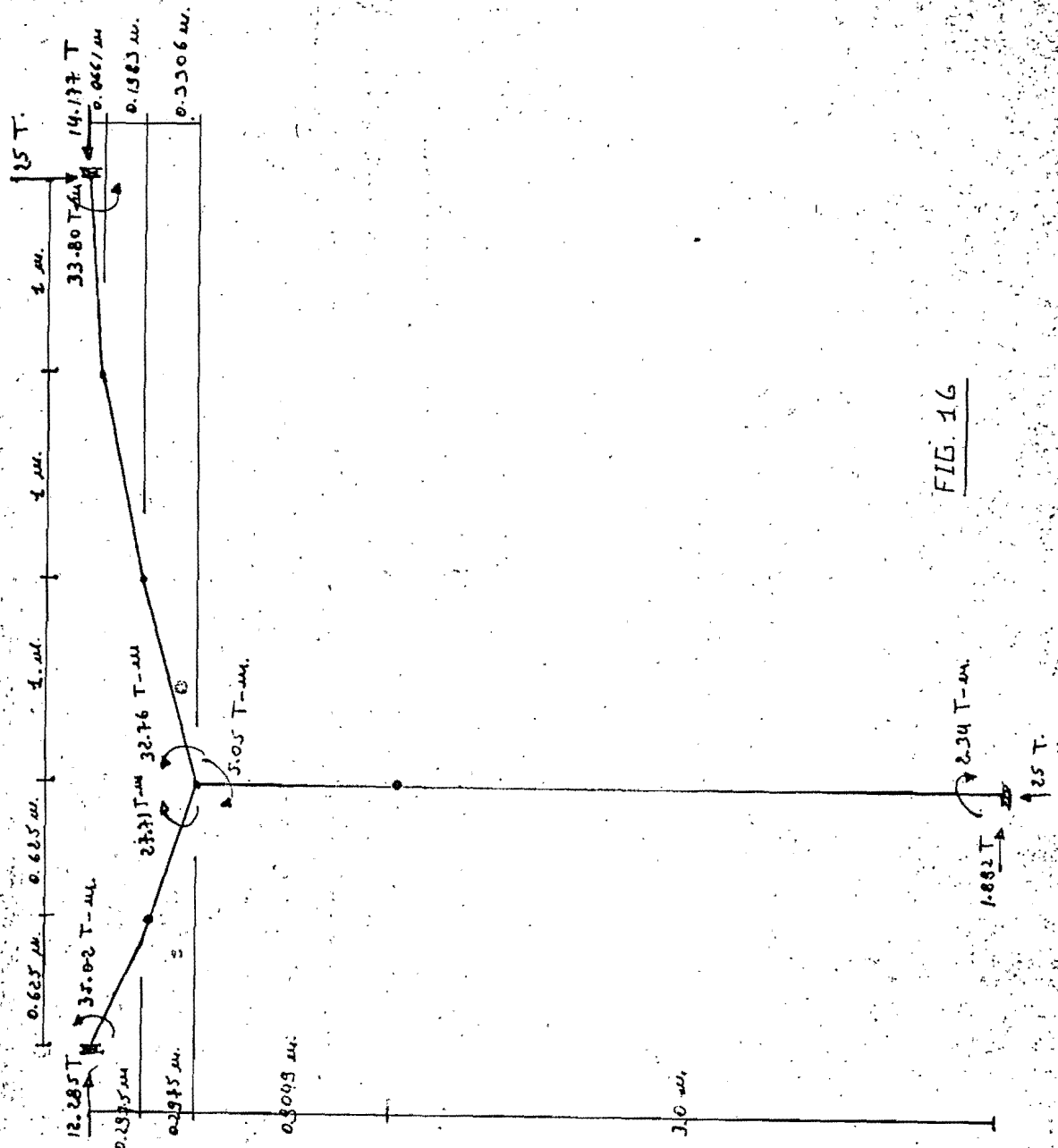


FIG. 16

IF WORK + INSTRUCTIONS

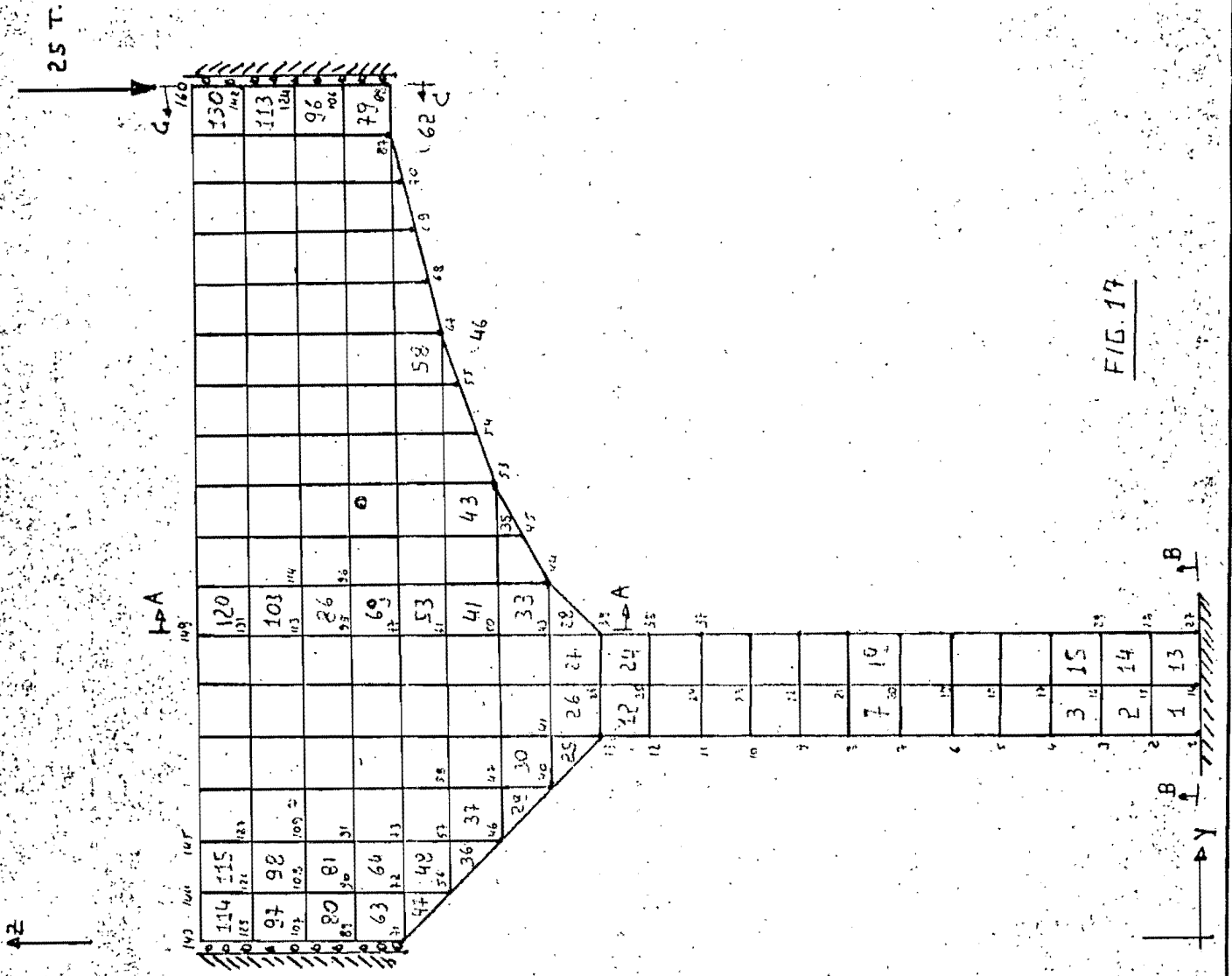


FIG. 17

ELEMENTOS DE 0.25 x 0.25 m.
 b = 0.5 m.

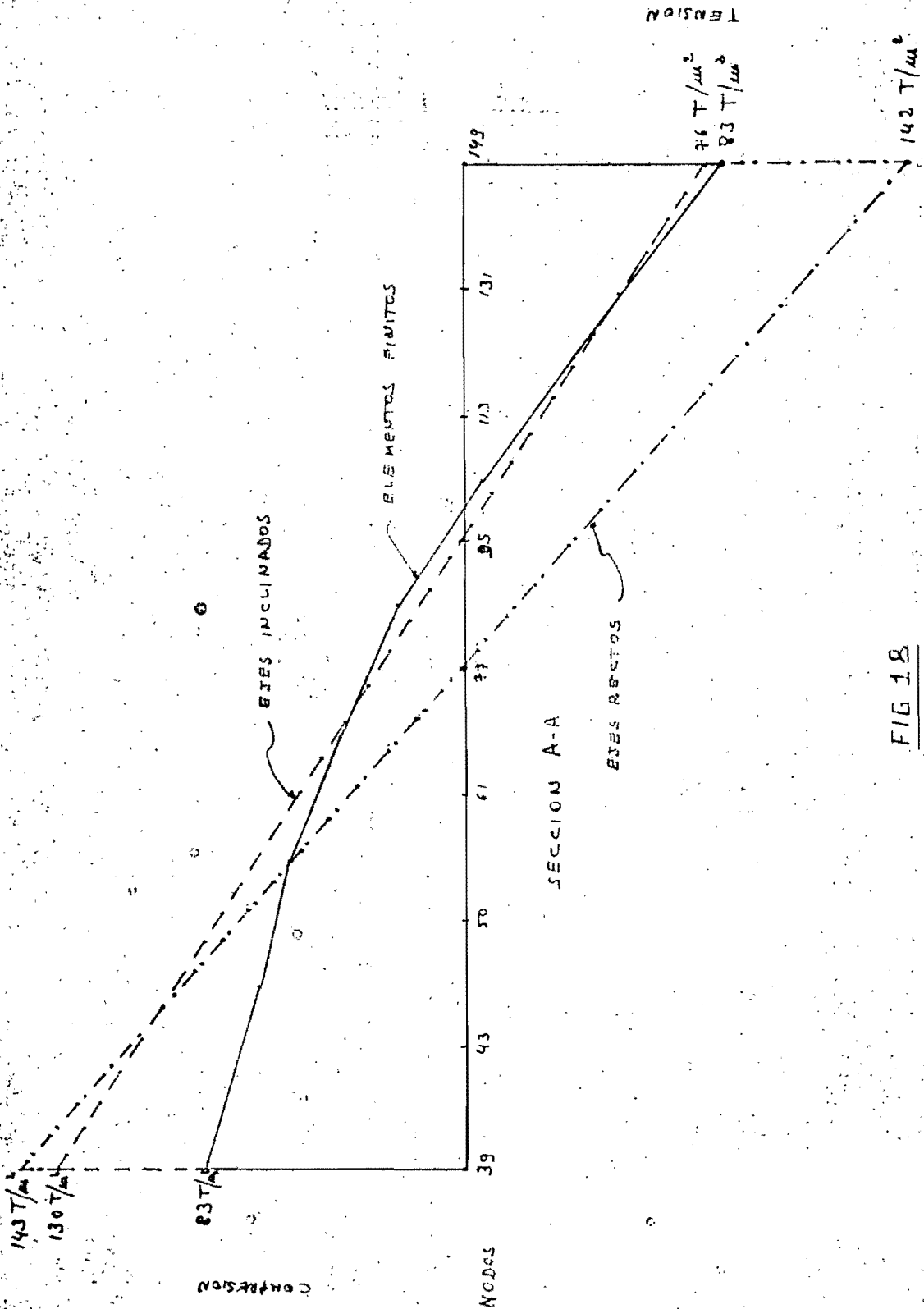
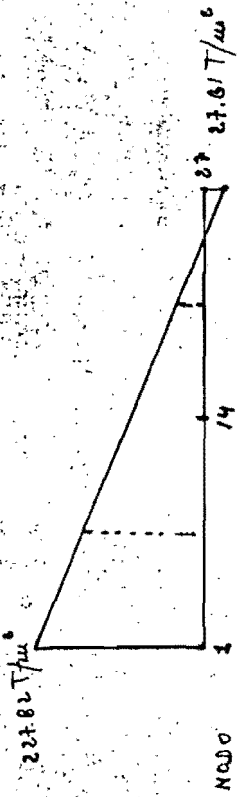
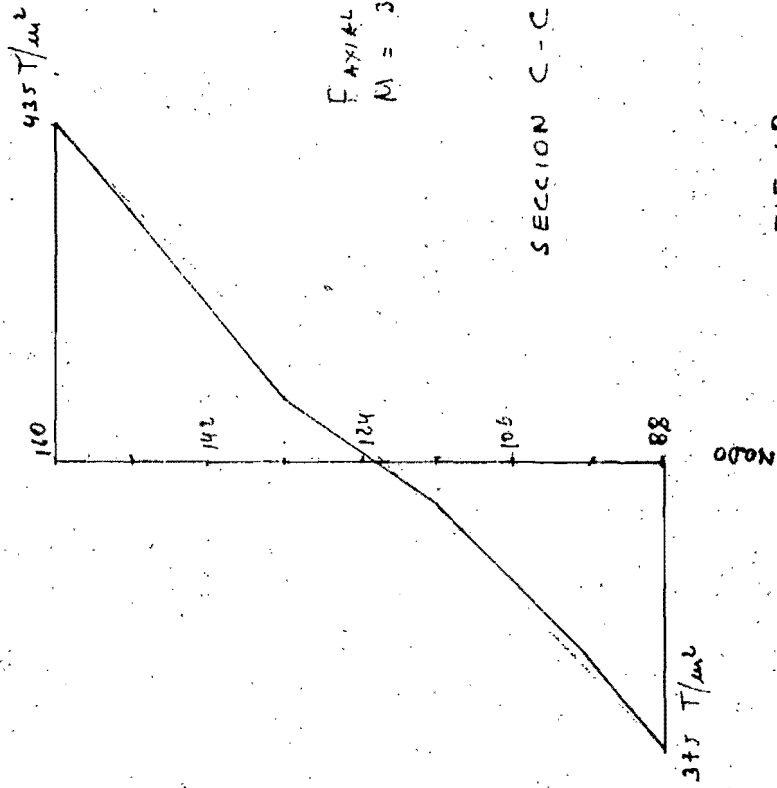


FIG 18



$F_{AXIAL} = 25.0 \text{ T} \quad (25 \cdot T)^*$
 $M = 2.663 \text{ T-M} \quad (2.53 \text{ T-M})^*$

SECCION B-B



$F_{AXIAL} = 15.0 \text{ T} \quad (14.18 \text{ T})^*$
 $M = 33.75 \text{ T-M} \quad (33.58 \text{ T})^*$

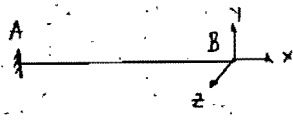
SECCION C-C

NOTE: () * VALORES
 OBTENIDOS TOMANDO
 LOS EJES INCLINADOS

FIG 19

CASO 3

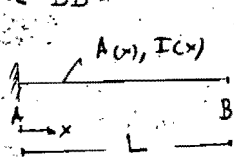
Con este ejemplo se trata de estudiar el comportamiento de una barra de sección variable en función de sus parámetros de rigidez. La barra a considerarse se muestra en la Fig. 20. Con este objeto se obtendrán las matrices de rigidez considerando el eje recto a lo largo de toda la barra y por otro lado considerando el eje inclinado en la parte de la cartela; la matriz de rigidez $[k_{BB}]$ es de la forma:


$$[k_{BB}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

y tiene el siguiente significado físico: la primera columna representa la fuerza en X, fuerza en Y y momento en Z requeridos para producir un desplazamiento unitario en X y desplazamiento y giro nulos en Y y Z respectivamente; la segunda columna las fuerzas y momento para tener un desplazamiento unitario en Y y desplazamiento y giro nulos en X y Z en su orden y la tercera columna las fuerzas y momento para tener un giro unitario alrededor de Z y nulos los desplazamientos en X y Y. Las fuerzas, momentos y deformaciones se refieren al punto B. La variación que se obtenga en los valores de la matriz $[k_{BB}]$ dará un criterio para valuar la influencia de las idealizaciones planteadas. Nótese que esta matriz $[k_{BB}]$ en caso de que esta barra forme parte de una estructura completa entra directamente en la formación de la matriz de rigideces de la estructura.

Para obtener $[k_{BB}]$ en la hipótesis de eje recto se siguió el camino usual, es decir se obtuvo primero la matriz

$[f_{BB}]$ con las siguientes expresiones:



$$[f_{BB}] = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

$$f_{11} = \int_0^L \frac{dx}{E A(x)}$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{(L-x)^2 dx}{E I(x)}$$

$$f_{23} = f_{32} = \int_0^L \frac{(L-x) dx}{E I(x)}$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{dx}{E I(x)}$$

y luego invirtiendo $[f_{BB}]$ se obtiene $[k_{BB}]$

$$[k_{BB}] = [f_{BB}]^{-1}$$

Cuando se consideró el eje inclinado se utilizó el concepto de barras en serie, mediante este principio se puede obtener $[f_{BB}]$ de una serie de barras con el siguiente procedimiento:

- 1) se obtiene $[f'_{BB}]$ de cada una de las barras en coordenadas locales
- 2) se transforman $[f'_{BB}]$ a coordenadas globales

$$[f_{BB}] = [T]^T [f'_{BB}] [T]$$

$$\text{SIENDO } [T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

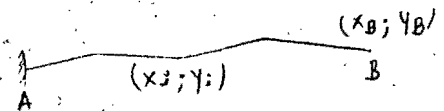


- 3) se obtiene $[f_{BB}]^*$ de la serie de barras con la expresión:

$$[f_{BB}]^* = \sum_{i=1}^{n_B} [H_{B_i}]^T [f_{BB}]_i [H_{B_i}]$$

siendo

$$[H_{B_i}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(y_B - y_i) & (x_B - x_i) & 1 \end{bmatrix}$$



y n_B el número de barras.

Luego invirtiendo $[f_{BB}]$ se obtiene $[k_{BB}]$ de la serie de barras.

Nótese que cuando se considera los ejes rectos, la matriz $[k_{BB}]$ no es llena puesto que $k_{12}=k_{21}=k_{13}=k_{31}=0$, mientras que al considerar serie de barras en general se va a tener una matriz llena, por este motivo para tener otro patrón de comparación se efectuó también una condensación de la matriz $[k_{BB}]$ obtenida tanto cuando se considera el eje recto como cuando se considera el eje inclinado. La matriz $[k_{BB}]$ por definición es aquella que multiplicada por las deformaciones en B da las fuerzas aplicadas en B, o sea:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

si se efectúa una partición de las matrices:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & | & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & | & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & | & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

de donde:

$$(1) \quad [k_{11}] \{dx\} + [k_{12} \quad k_{13}] \begin{Bmatrix} dy \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \{F_x\}$$

$$(2) \quad \begin{Bmatrix} k_{21} \\ k_{31} \end{Bmatrix} \{dx\} + \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dy \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

si

$$\begin{Bmatrix} F_y \\ M_z \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{o.e.} \quad (2):$$

$$(3) \quad \begin{Bmatrix} dy \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} k_{21} \\ k_{31} \end{Bmatrix} \{dx\}$$

reemplazando (3) en (1):

$$\left([k_{11}] - [k_{12} \quad k_{13}] \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} k_{21} \\ k_{31} \end{Bmatrix} \right) \{dx\} = \{F_x\}$$

si $\{dx\} = 1$

$$\{F_x\} = [k_{11}] - [k_{12} \quad k_{13}] \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} k_{21} \\ k_{31} \end{Bmatrix}$$

que representa la fuerza en X necesaria para producir un desplazamiento unitario en X cuando la fuerza en Y y el momento alrededor de Z son nulos y d_y y ψ_z son distintos de cero, todo en relación al punto B.

Haciendo consideraciones similares se obtienen:

$$\{F_y\} = [k_{22}] - [k_{21} \quad k_{23}] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{13} \\ k_{31} & k_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{32} \end{Bmatrix}$$

$$\{M_z\} = [k_{33}] - [k_{31} \quad k_{32}] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{Bmatrix}$$

Utilizando estos procedimientos se obtuvieron $[k_{BB}]$ y F_x , F_y y M_z correspondientes a la condensación de $[k_{BB}]$ para las hipótesis de eje recto y eje inclinado, tomando L igual a 10 m., h igual a 1.0 m. y un ancho unitario de la barra (Fig. 20). • Se consideraron los siguientes casos:

- 1) Manteniendo constante $\beta = 2$, se hizo variar α de cero a uno.
- 2) Manteniendo constante $\alpha = 0.4$, se hizo variar β de uno a tres.

Se presentan en las Fig. 21 a 29 las gráficas de los valores obtenidos para los distintos casos analizados.

CONCLUSIONES

- 1) - Cuando se considera el eje recto $[k_{BB}]$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{31} & k_{33} \end{bmatrix}$$

- Cuando se considera el eje inclinado $[k_{BB}]$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

Es decir se necesitan fuerzas y momentos adicionales para producir deformaciones unitarias sobre un eje manteniendo el resto nulas.

2) Con relación a los valores de los elementos de $[k_{BB}]$:

- Cuando se mantiene constante β y se hace variar α , las diferencias son significativas a partir de aproximadamente $\alpha = 0.5$
- Cuando se mantiene constante α y se hace variar β , las variaciones son menos acentuadas que el caso anterior, la variación se nota más a partir de $\beta = 2$
- Para el caso analizado de $L = 10$ m. y $h = 1$ m., los valores de k_{12}, k_{13}, k_{22} y k_{23} difieren más para un valor de $\alpha = 0.5$ y $\beta = 2$

3) Con relación a F_x, F_y y M_z obtenidos por condensación de $[k_{BB}]$

- Los valores de F_x disminuyen ~~apreciablemente~~ para el caso de ejes inclinados
- Los valores de F_y disminuyen en muy poco para el caso de ejes inclinados
- Los valores de M_z disminuyen en muy poco para el caso de ejes inclinados.

4) En el caso de que una barra de estas características forme parte de una estructura más compleja, la influencia de las variaciones encontradas dependerá del peso relativo en cuanto a rigideces que tenga esta en relación a la rigidez total de la estructura.

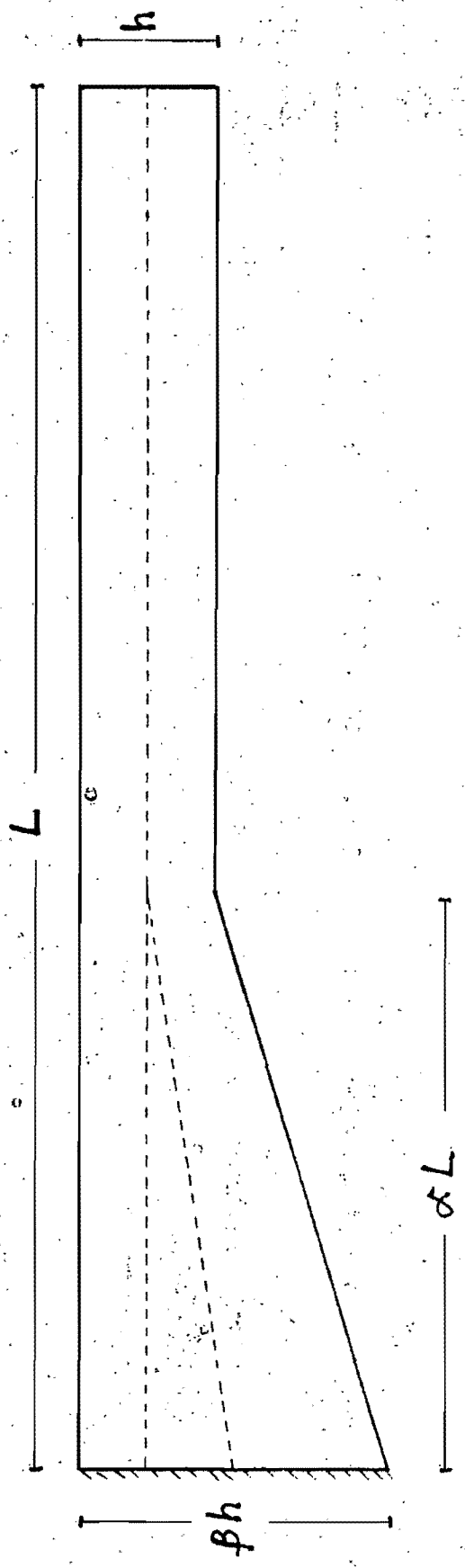
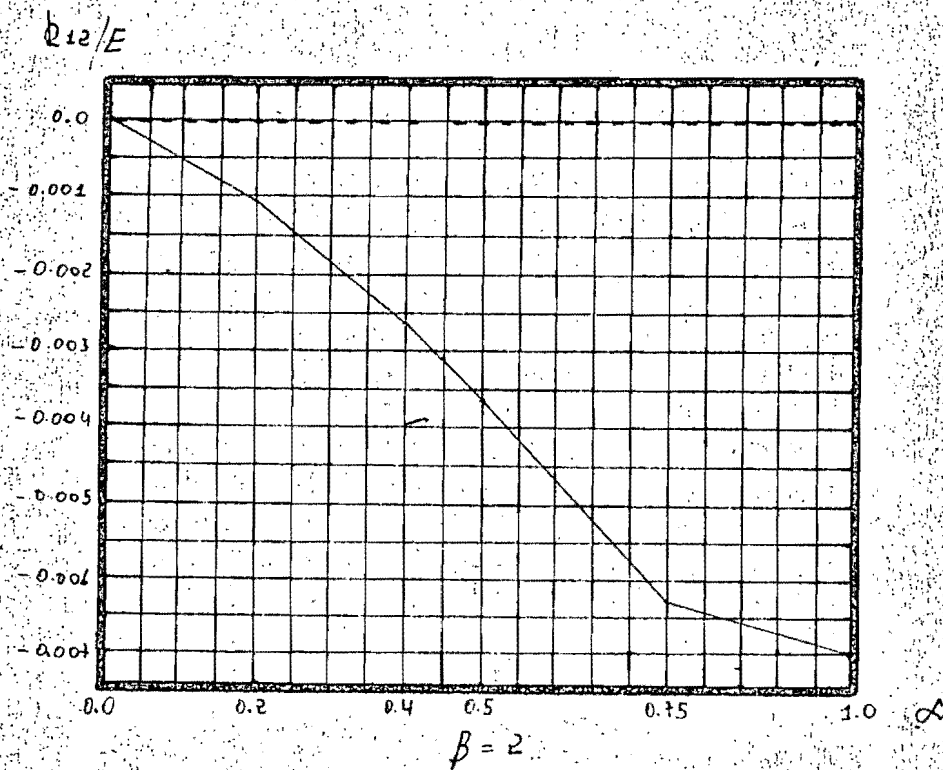
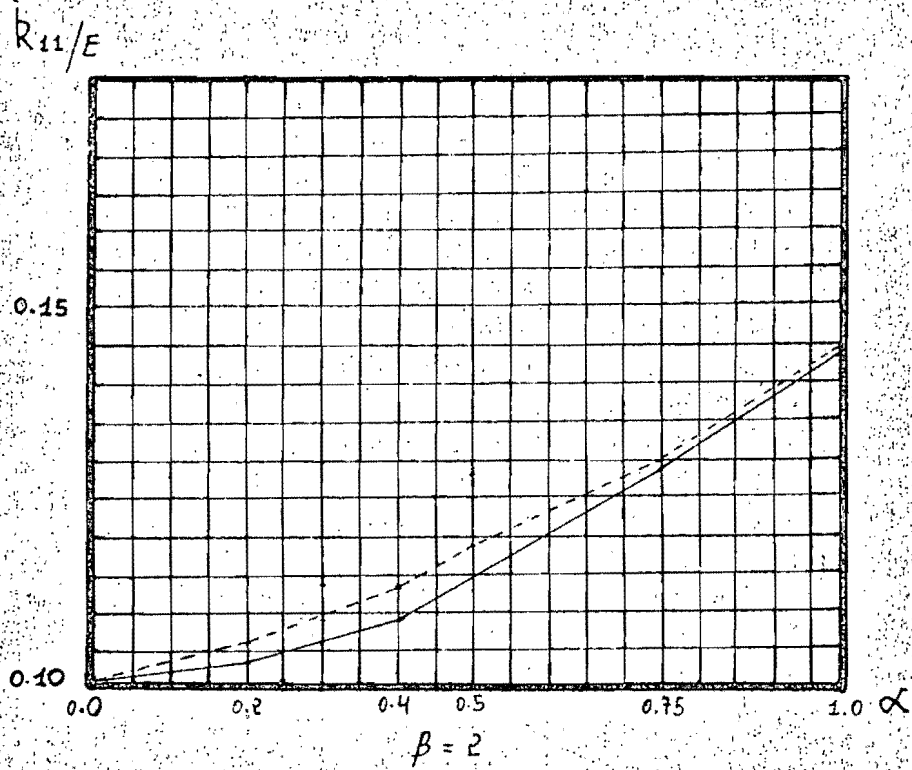
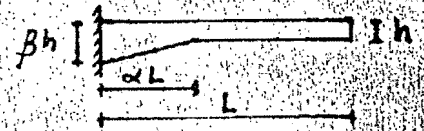
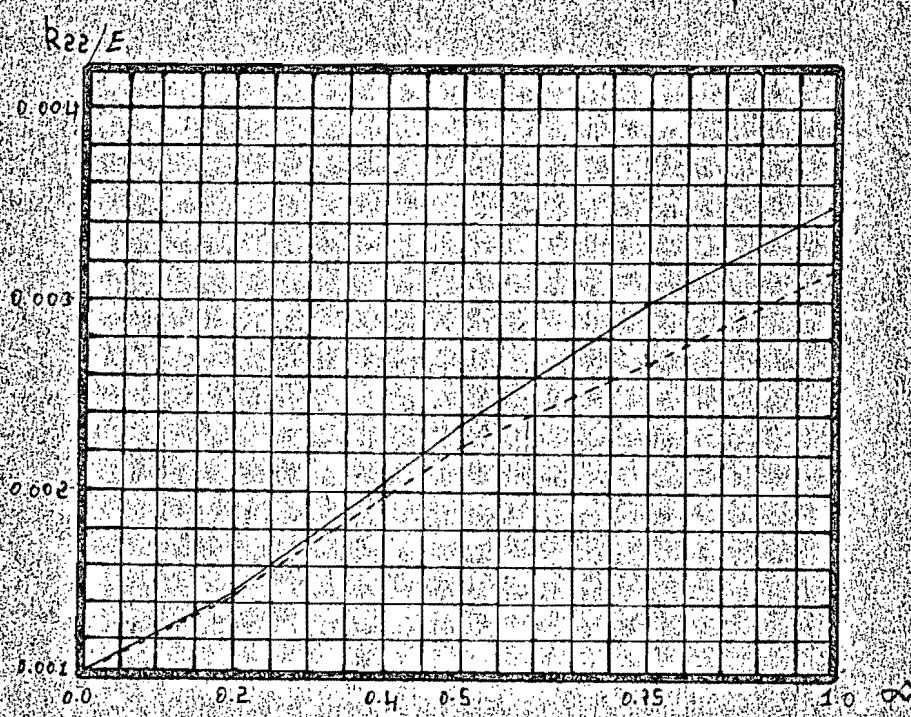
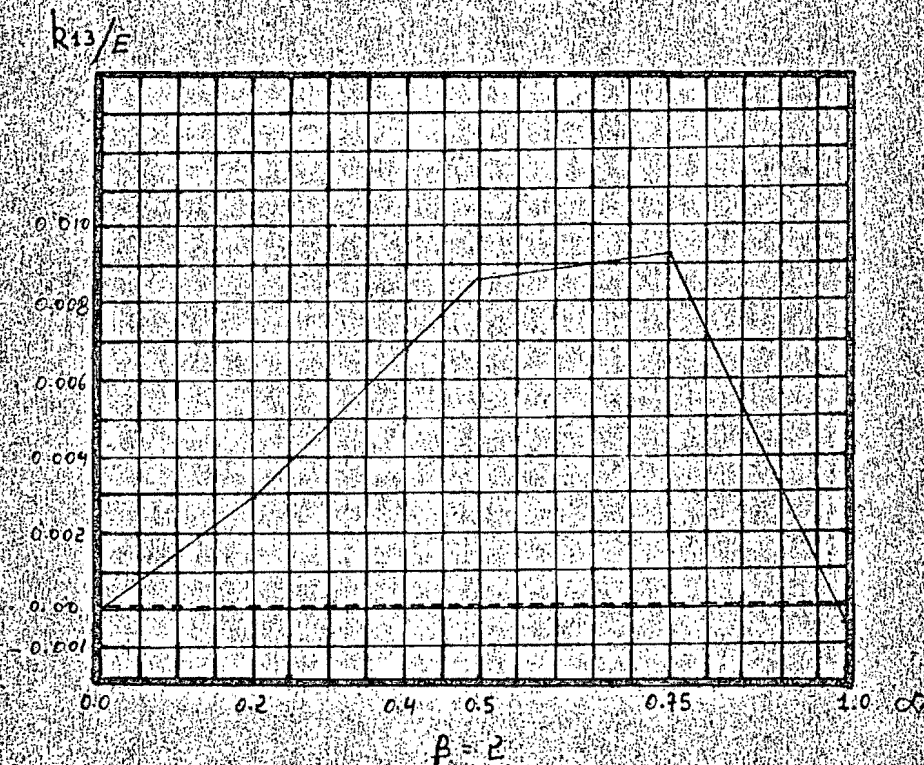
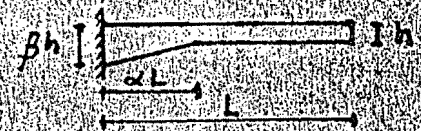


FIG. 20



— Ejes Inclinados
 - - - Ejes Rectos

FIG. 21

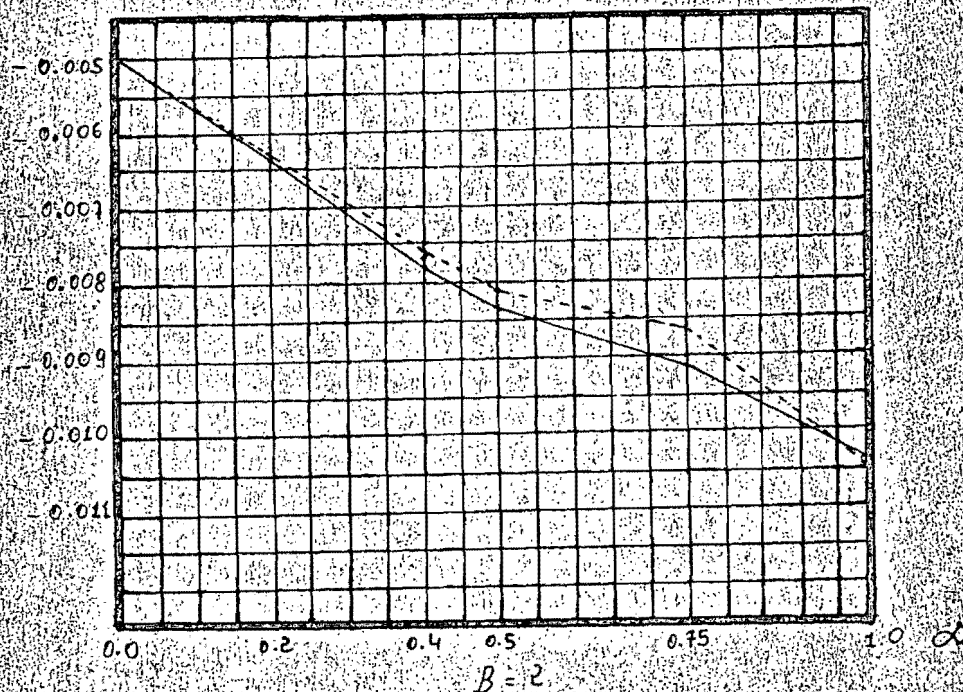


———— Ejes Inclinados
 - - - - Ejes Rectos

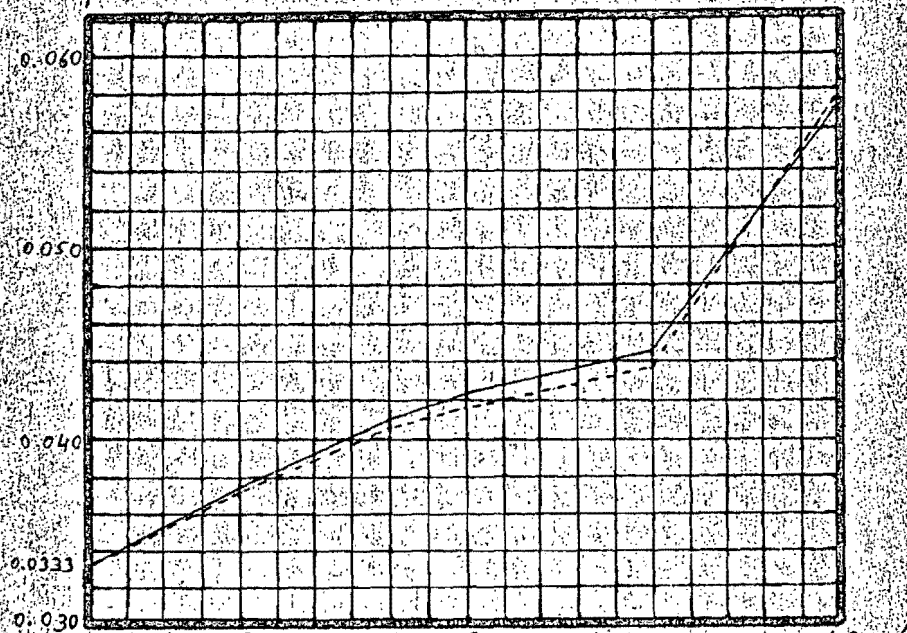
FIG. 22



k_{23}/E

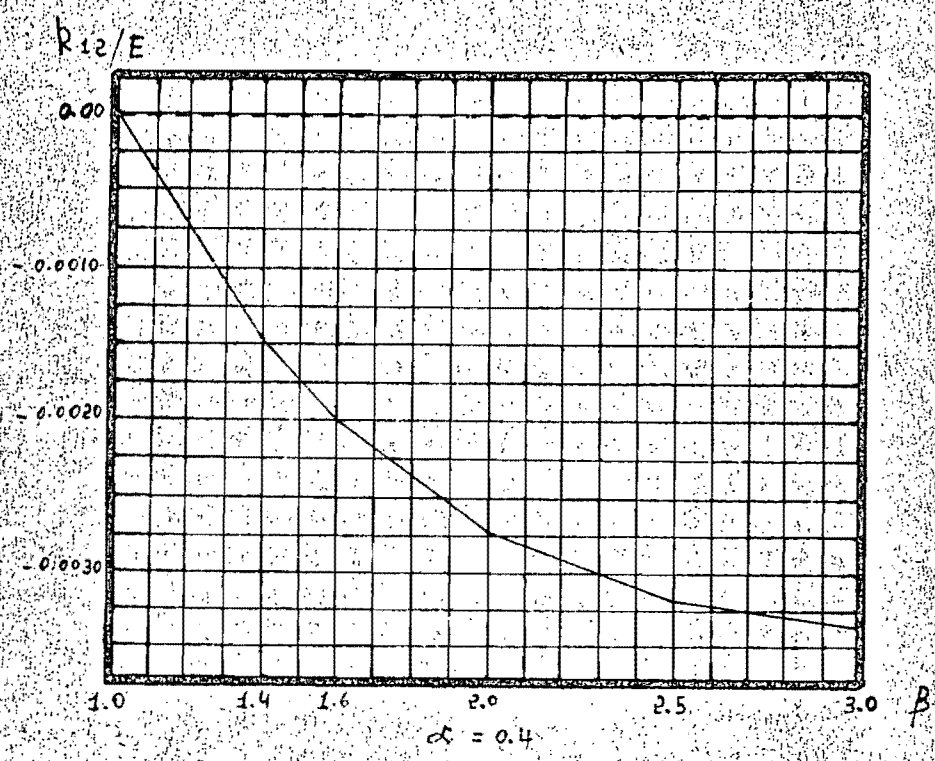
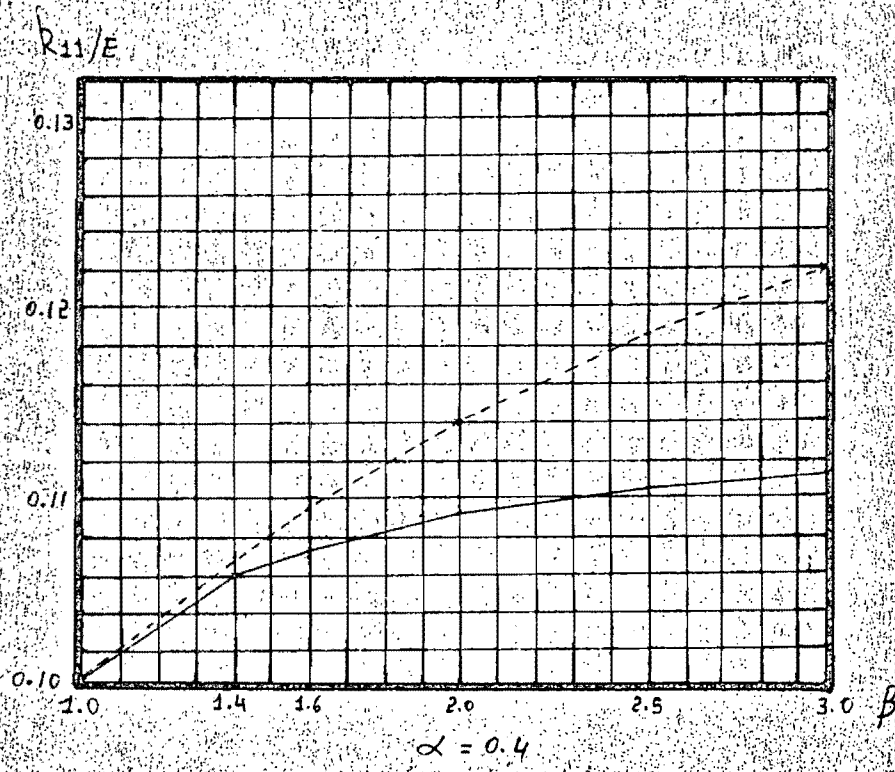
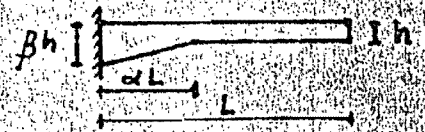


k_{33}/E



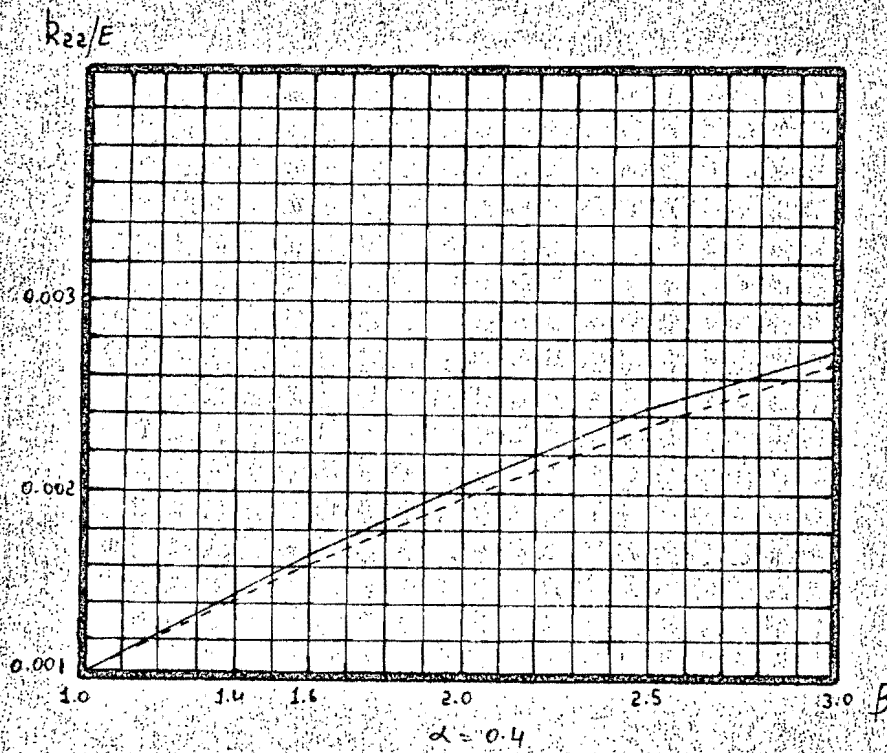
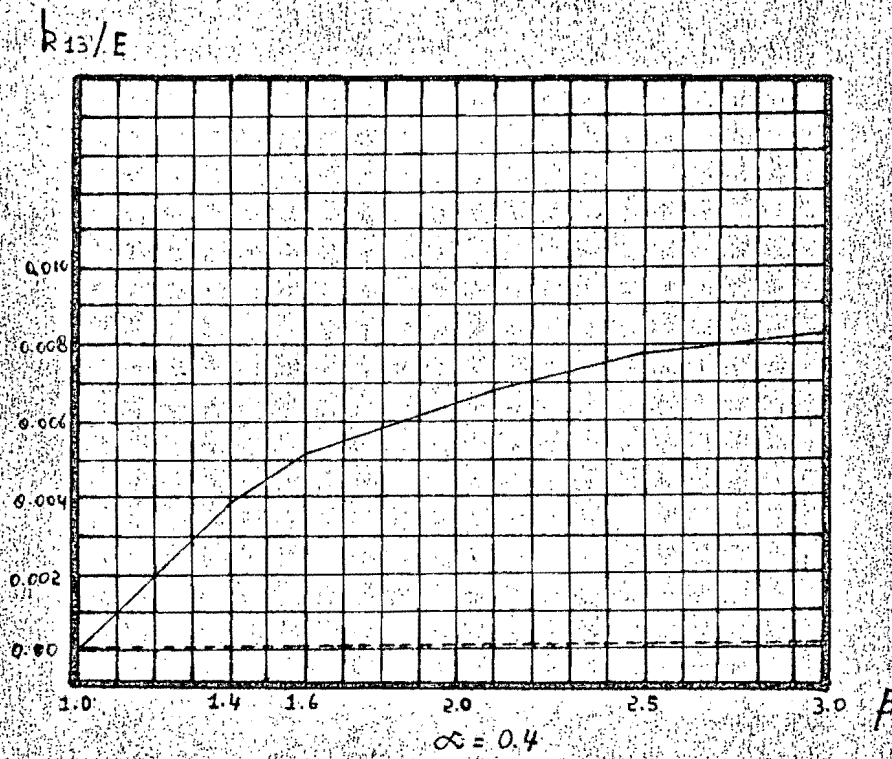
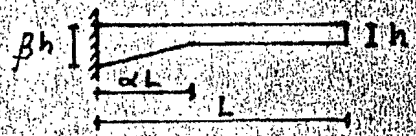
—— Ejes Inclinados
 - - - Ejes Rectos

FIG. 23



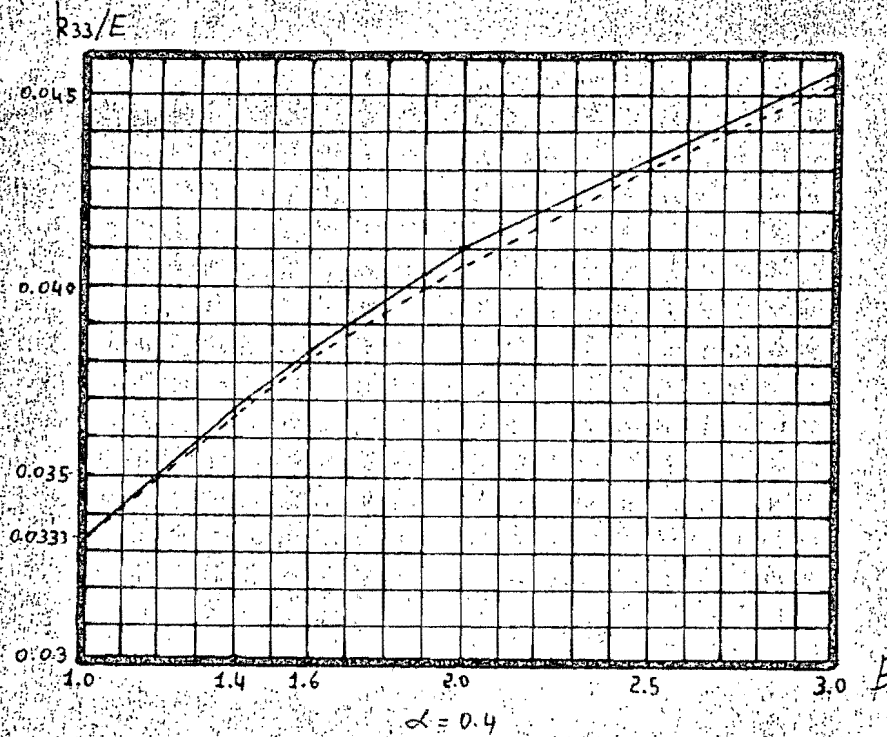
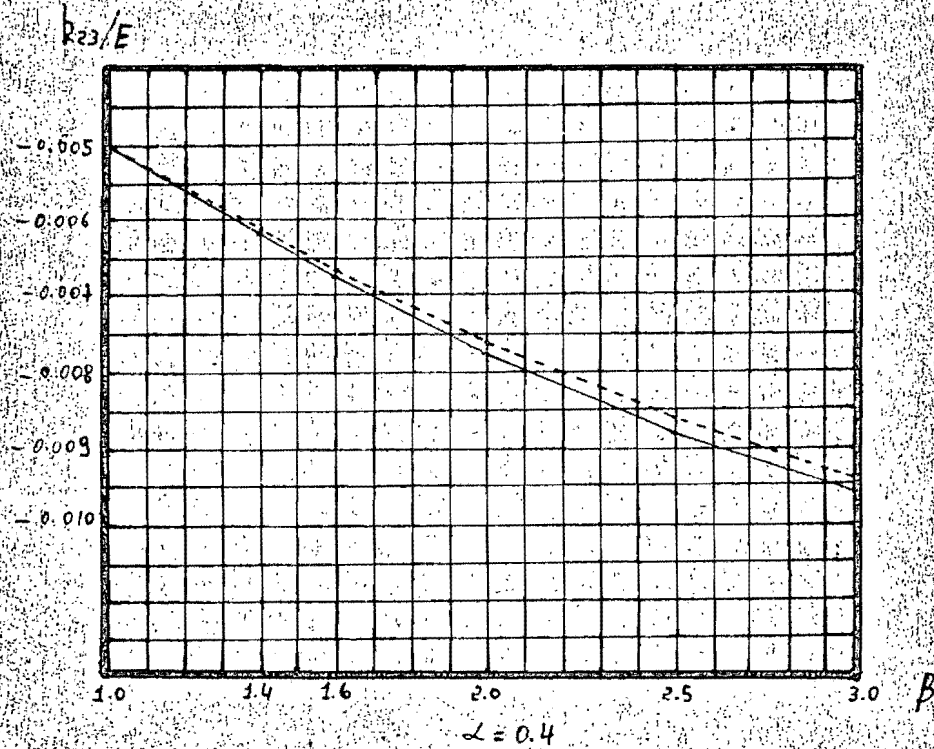
——— EJES INCLINADOS
 - - - EJES RECTOS

FIG. 24



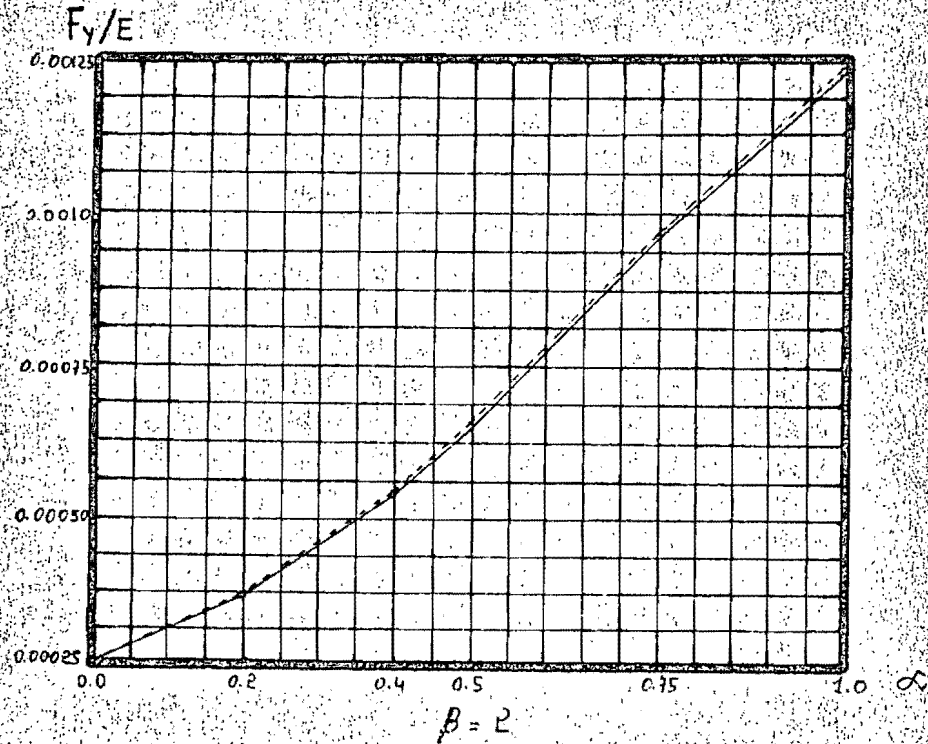
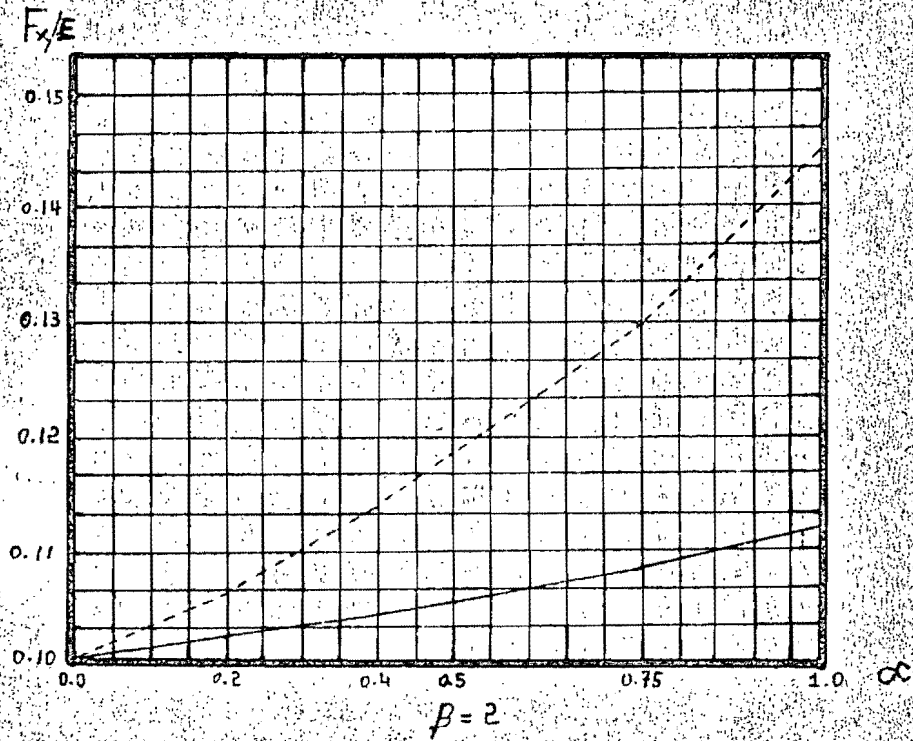
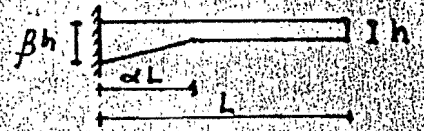
—— EJES INCLINADOS
 - - - EJES RECTOS

FIG. 25



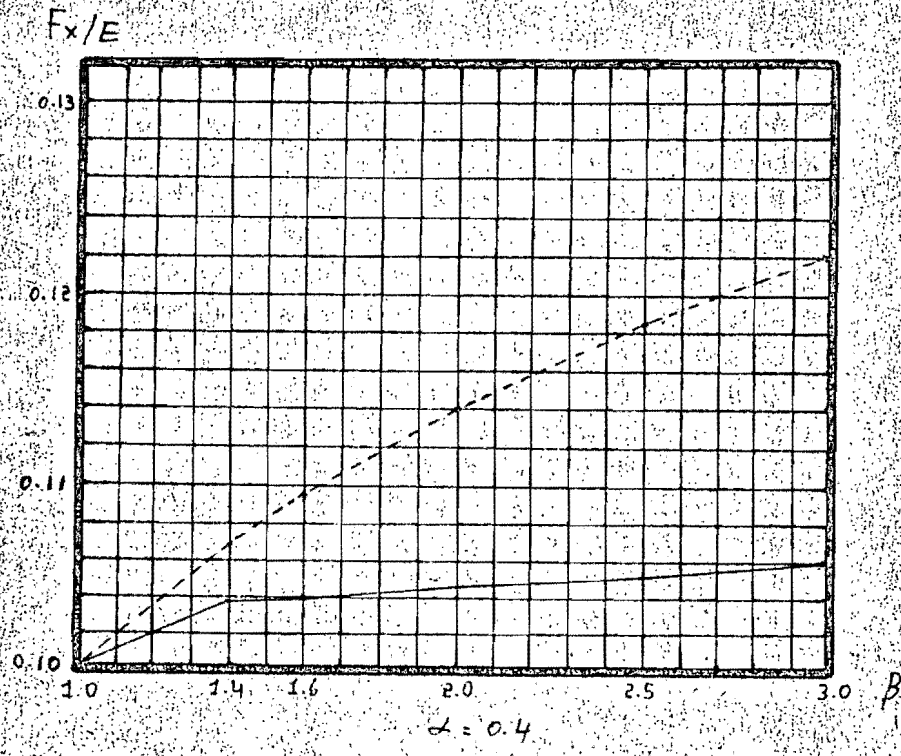
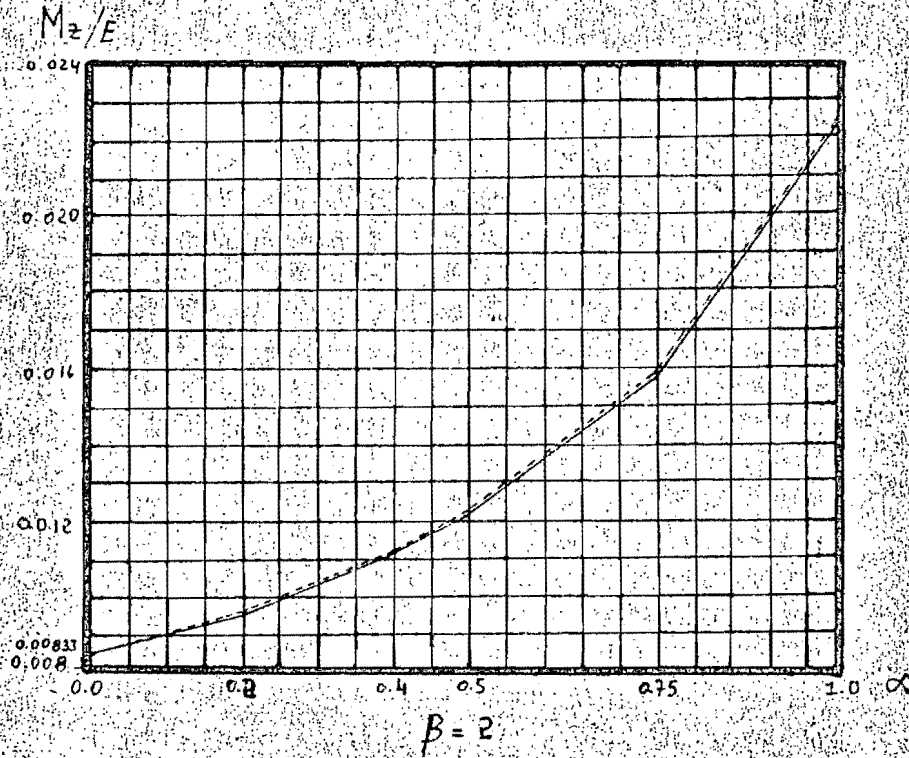
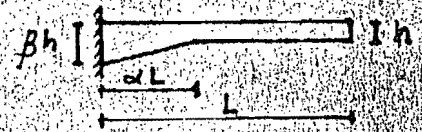
———— Ejes Inclinados
 - - - - Ejes Rectos

FIG. 26



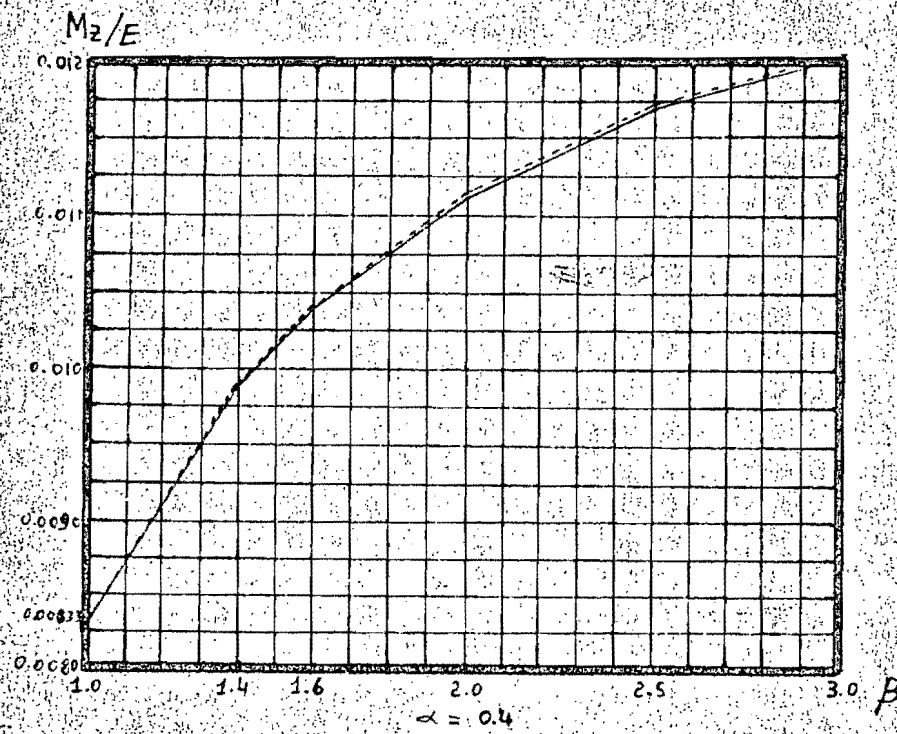
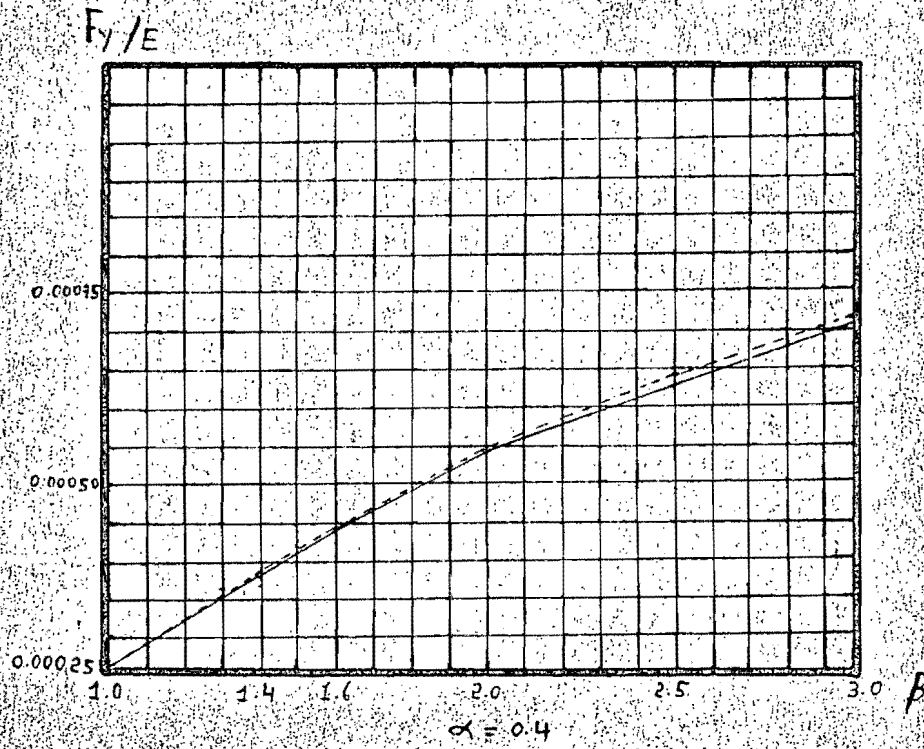
—— Ejes Inclinados
 - - - Ejes Rectos

FIG. 27



— Ejes Inclinaados
 - - - Ejes Rectos

FIG. 28



— EJES INCLINADOS
 - - - EJES RECTOS

FIG. 29

CASO 4

En este caso se presentan varios análisis de vigas empotradas en sus extremos. Se trata de estudiar la variación en los momentos de empotramiento al considerar los ejes rectos en todo el elemento y por otro lado al considerar los ejes inclinados en las partes acarteladas de los extremos. En todos los ejemplos se tomaron en cuenta deformaciones por flexión, cortante y fuerza axial. El ancho de las vigas analizadas es de 1 m., se mantuvo constante las partes acarteladas y se hizo variar la longitud del segmento con momento de inercia constante. La carga considerada es uniformemente distribuida e igual a 1 t/m. Los resultados se muestran en la Fig. 30 y en la Fig. 31.

Análisis de los resultados

En la tabla que sigue se presentan las variaciones obtenidas:

L/L	momentos de empotramiento (t-m)		
	ejes inclinados	ejes rectos	% de aumento
0.6	8.988	9.906	10.2
0.33	3.285	3.644	10.9
0	1.487	1.629	9.5

Es decir que se tiene una variación para los casos analizados de alrededor del 10 % en los momentos de empotramiento, siendo mayores para el caso de tomar los ejes rectos.

Con relación a las reacciones horizontales considerando los ejes inclinados se obtienen resultados realistas. Los desplazamientos verticales de los puntos donde se produce

el cambio de sección son ligeramente menores al considerar los ejes inclinados.

Cuando la carga no sea uniformemente distribuida, por ejemplo cargas concentradas en el tramo central, la variación en los momentos de empotramiento será más significativa debido a que la viga tenderá a actuar como reticulado.

1 T/m

0.5 m
0.5 m

$b = 1.0 \text{ m}$

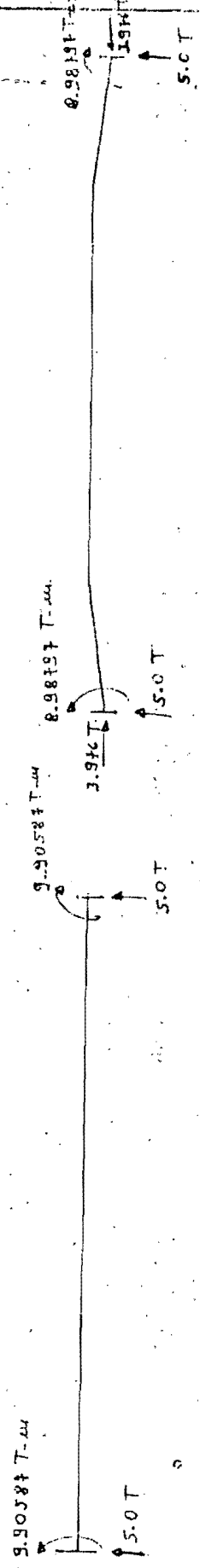
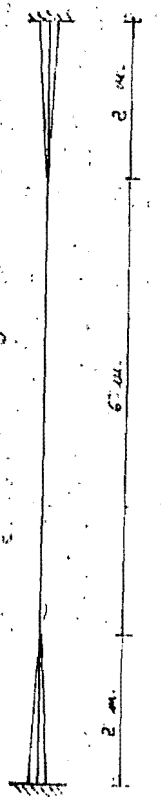
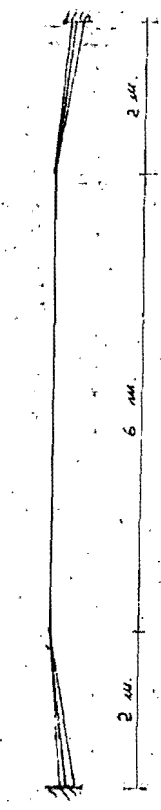
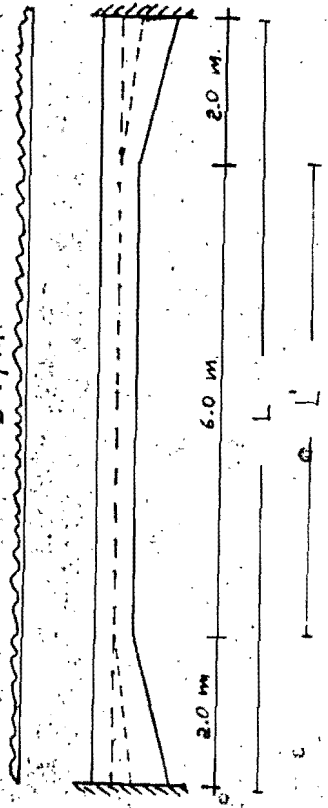
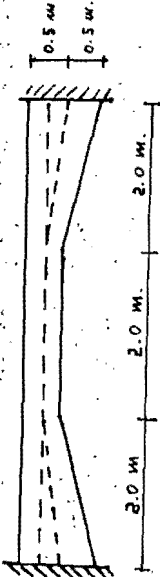
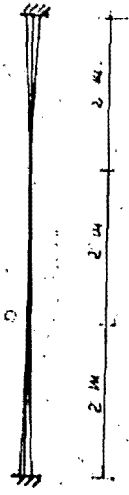


FIG 30

1 T/m



b = 1 m



3.6433 T-m

3.0 T

3.4439 T-m

3.0 T

3.2896 T-m

1.88 T

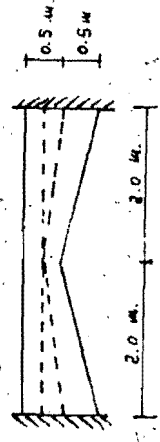
3.0 T

3.2896 T-m

1.88 T

3.0 T

2 T/m



b = 1 m

2.6285 T-m

2.0 T

2.6285 T-m

2.0 T

1.4864 T-m

0.904 T

2.0 T

1.4864 T-m

0.904 T

2.0 T

CONCLUSIONES FINALES

De los casos particulares presentados en este trabajo se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- 1) Cuando se tengan elementos de sección variable trabajando esencialmente a fuerza axial (como la columna del caso 1) se puede aceptar la idealización de modelar la estructura con ejes rectos siempre que se recuerde que los elementos mecánicos obtenidos así deben ser transferidos al centroide de la sección para fines de diseño del elemento. Cuando se tenga interés en las deformaciones debe modelarse la estructura considerando los ejes inclinados.
- 2) Cuando de la estructuración pueda verse que existe la posibilidad de que se presente una acción de arco por alguna restricción a los desplazamientos (como en el caso 2) es importante modelar la estructura considerando los ejes inclinados, de esta forma se obtendrán momentos flexionantes menores a los que se obtendrían tomando los ejes rectos, lo que conduciría a un ahorro del refuerzo en caso de que se trate de elementos de concreto.
- 3) En general se obtienen resultados mucho más "exactos" con relación a las deformaciones cuando se toman ejes inclinados en las partes correspondientes a la sección variable.
- 4) Del caso 3 que se ha analizado puede observarse que se presentan diferencias significativas en el valor de los elementos de la matriz de rigideces $[k_{BB}]$ de una barra de sección variable según se considere el eje recto a lo largo

de toda la barra o se tome un eje inclinado en la parte de la cartela de altura variable. De la importancia que tenga una barra de estas características en una estructura completa deberá deducirse la opción de modelaje y además tomando en cuenta los criterios de los párrafos 1), 2) y 3).

5) Se obtienen valores de momentos de empotramiento menores considerando ejes inclinados en las partes de sección variable.