


T-117
F
DES

0307


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL DE INGENIEROS

PERFORADO

30/5

ESTRUCTURAS
RETICULARES
EN EL ESPACIO

TESIS PROFESIONAL

que presenta el pasante LUIS FRIDMAN LUTZKAYA
para obtener el Título de INGENIERO CIVIL.

1947.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CLAS T-113-F
No. AD. G(2) 18136
FECHA
PROC.

T. UNAM
1-9-47
FRI

A MIS PADRES



UNIVERSIDAD NACIONAL
DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE INGENIEROS
Dirección
Núm. 731-743
Exp. Núm. 731/214.2/-1028

Al Pasante de la Carrera de Ingeniero CIVIL
de esta Escuela,
señor Luis FRIDMAN LUTZKAYA.
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud de fecha 25 de abril -
próximo pasado, me es grato proponerle a continuación el te-
ma que deberá desarrollar usted como tesis para su examen -
profesional:

"ESTRUCTURAS RETICULARES EN EL ESPACIO;

El desarrollo del tema debe comprender los puntos
siguientes:

- 1o.) Ideas generales sobre el problema hiperestá-
tico en el espacio. Elementos elásticos para
resolverlo. Fórmulas.
- 2o.) Aplicación al cálculo de dos marcos rígidamen-
te unidos y bajo diferentes condiciones de --
cargas horizontales (efectos sísmicos) Deter-
minación de momentos flexionantes y torsionan-
tes. Fuerzas normales y tangenciales. Diagramas
de deformación."


Ruego a usted que tome nota del contenido de la -
Circular que me permito enviarle adjunta al presente, con -
el fin de que cumpla con el requisito a que ella alude, in-
dispensable para sustentar su examen profesional.

Atentamente.

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

México, D.F., a 6 de mayo de 1947

EL DIRECTOR


Ing. Alberto J. Flores.

Circular anexa
A.F.TB.mr

PRIMERA PARTE

*Ideas generales sobre el problema Hiper-
estático en el espacio. Elementos elásticos
para resolverlo. Fórmulas.*

INTRODUCCION .-

Este problema de estructuras hiperestáticas en tres dimensiones es pocas veces atacado en la práctica, en que en la mayoría de los casos, las estructuras se cortan por planos verticales analizando los marcos con deformaciones dentro de su plano, y luego, independientemente se hacen cortes normales a los anteriores y se analizan estos marcos, olvidando su relación con los demás planos verticales normales a él; lo que en algunos casos es indebido, ya que en cada nudo de la estructura se reúnen por lo general, elementos que, pertenecientes a dos planos distintos establecen una alteración en el reparto de rigideces y en el modo de oponerse a las deformaciones.

Citaremos un caso en el que a primer golpe de vista se ve la inexactitud en la resolución al querer tratar una estructura estudiando independientemente los marcos. Así por ejemplo, un edificio en el que tengamos una fachada muy pesada y que el marco siguiente, paralelo a esta fachada no tenga muro alguno, sino únicamente la carga de las losas. Al estudiar el efecto de temblor, sabemos que se suponen fuerzas horizontales aplicadas en cada nivel, fuerzas que están en función de las cargas vertica-

les, que para el caso que estamos citando son muy diferentes para los dos marcos; lo que nos provocaría en dichos marcos paralelos deformaciones muy diferentes; pero como estos marcos están ligados entre sí, las deformaciones de cada uno, modificarán necesariamente las del otro, y los resultados pueden llegar a diferir mucho de la realidad si los analizáramos independientemente.

Al atacar el problema de estructuras en el espacio, el número de incógnitas relacionadas entre sí aumenta considerablemente, y el querer resolverlo yendo directamente al resultado final, nos llevaría a un sistema de ecuaciones simultáneas muy numerosas y de difícil solución; por lo que conviene más buscar por medio de artificios, la simplificación del problema; aunque tengamos que llegar al resultado final con una serie de aproximaciones sucesivas.

RIGIDEZ Y FACTOR DE TRANSPORTE .-

Por lo general, una barra en una estructura está sujeta a momentos en tres planos: dos flexionantes y uno torsionante; por lo que necesitamos conocer los valores de la rigidez y del factor de transporte angular y torsional.

El valor de la rigidez angular para una barra empotrada de sección constante es $4EI/L$, valor muy conocido por su frecuente uso, así como el factor de transporte que es $\frac{1}{2}$.

En el libro "Theory of Elasticity" de S. Timoshenko podemos encontrar la obtención de la fórmula que nos relaciona el momento torsionante en una barra en función del ángulo de torsión, que para una pieza de sección constante vale

$$M_t = \frac{G J_t}{L} \theta$$

El momento necesario para provocar la torsión unitaria es precisamente la rigidez torsional de la barra. Haciendo $\theta = 1$

$$r_t = \frac{G J_t}{L}$$

r_t = rigidez torsional

L = longitud de la barra

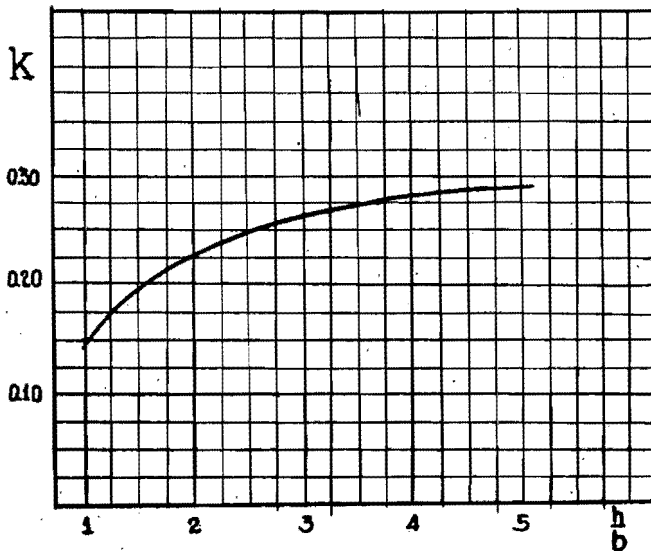
J_t = momento de inercia para torsión.

$$J_t = \left(\frac{1 - 0.63 \frac{b}{h}}{3} \right) b^3 h$$

llamando k al valor encerrado dentro del paréntesis nos queda

$$J_t = kb^3h$$

Para simplificar la obtención del valor de k podemos hacer uso del nomograma que a continuación tenemos, en el que entramos con la relación de $\frac{h}{b}$ (lado mayor sobre lado menor de la sección). Este nomograma fue copiado del libro de Dean Peabody Jr. " Design of Reinforced Concrete ", Pag. 175.



G = módulo de elasticidad transversal o torsional, -
que puesto en función de E (módulo de elasticidad --
normal) vale

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

En donde ν (coeficiente de Poisson), es un valor experimental, que para el concreto vale $1/6$ (ver página 415 del libro de Peabody ya antes citado)

$$G = \frac{E}{2(1 - \nu)} = \frac{E}{\frac{14}{6}} = \frac{3}{7} E$$

Así es de que la rigidez torsional para el concreto puesta ya en función de E y de k vale

$$r_t = \frac{kb^3h}{L} \frac{3}{7} E$$

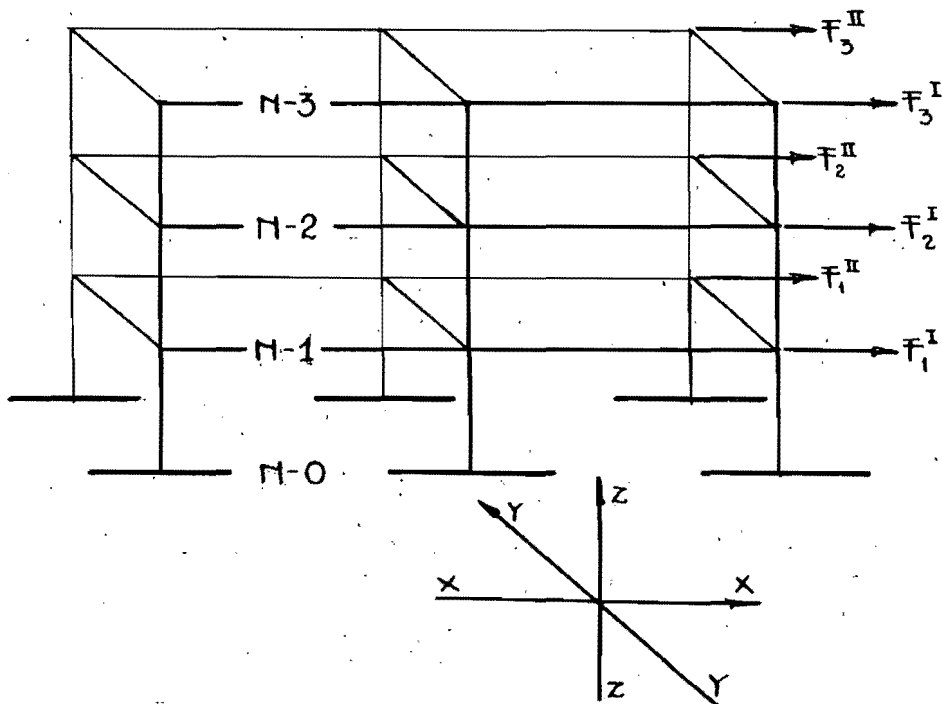
El factor de transporte para un momento torsional es -1 , puesto que el momento inducido debe equilibrar directamente al actuante.

NUDO EN EL ESPACIO .-

Para equilibrar un nudo en el espacio seguimos los mismos pasos que si se tratara en el plano: sumamos los momentos de todas las barras que llegan a él, tanto los de flexión como los de torsión. El momento desequilibrado lo repartimos entre estas barras proporcionalmente a sus rigideces, quedando en esta forma el nudo equilibrado. Transportamos los momentos que nos equilibraron el nudo aplicando el factor de transporte que corresponda en cada caso según sea que transportemos momentos de torsión o de flexión.

Al aplicarle estos momentos inducidos al nudo, por lo general, este quedará nuevamente desequilibrado, y tendremos que volver a repetir el ciclo. Esto lo haremos tantas veces hasta que el momento desequilibrado sea tan pequeño que se pueda despreciar.

Para mayor claridad en la exposición de ideas, en el desarrollo del método, en la aplicación de fórmulas y de todos los elementos de que disponemos para la resolución de estructuras en el espacio, vamos a referirnos en lo sucesivo a un caso concreto, el de la estructura que tenemos dibujada a continuación



Para facilitar las explicaciones llamemos:

Al marco dibujado con línea más gruesa, el que tenemos más cerca de nosotros paralelo al plano XZ, marco I.

Al otro marco paralelo a XZ, marco II.

Al marco de la izquierda paralelo a YZ, marco III.

Al central, marco IV.

Al de la derecha, marco V.

Al plano paralelo a XY, de donde arrancan las columnas, le llamaremos nivel 0 (N-0), y a cada piso siguiente, N-1, N-2, y N-3.

Suponemos aplicadas fuerzas en la dirección del eje XX, que les llamaremos:

En el marco I, nivel 1	-----	F_1^I
" " " " " 2	-----	F_2^I
" " " " " 3	-----	F_3^I
" " " II " 1	-----	F_1^{II}
" " " " " 2	-----	F_2^{II}
" " " " " 3	-----	F_3^{II}

Vamos a indicar los pasos a seguir para la resolución de esta estructura.

Empezamos por resolver el marco I, que es geoméricamente igual al II, para fuerzas horizontales unitarias, encontrando los valores de las deformaciones y momentos de barra sobre nudo para fuerzas unitarias aplicadas por separado a cada nivel. Va--

mós a resolver el marco por el método exacto.

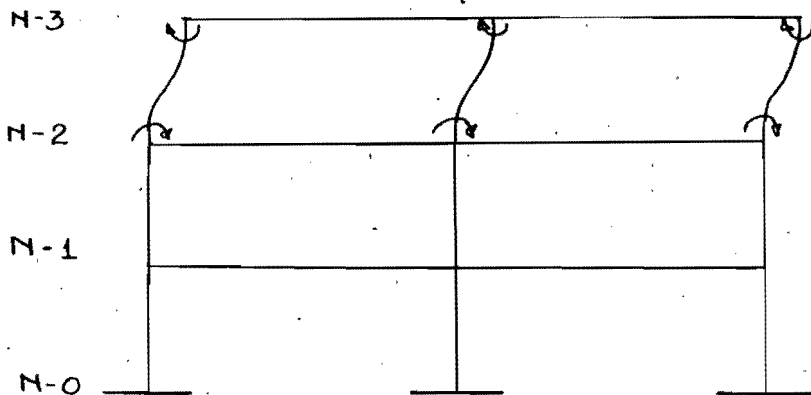
Hacemos la suposición de que en el arranque de las columnas estas se encuentran perfectamente empotradas, suposición que no se aleja mucho de las condiciones reales de apoyo, ya que las contratrabes de la cimentación (nivel 0) tienen escuadrías muy grandes con relación a las columnas; y la relación de las rigideces de la columna y la contratrase es casi despreciable.

Resolvemos el marco bajo la forma de etapas; desde luego, cada nudo va a tener cierto movimiento, y los movimientos de los diversos nudos de un mismo nivel son iguales, pero variarán generalmente en los diversos niveles.

Llamaremos a los desplazamientos en los niveles 1, 2 y 3, D_1 , D_2 y D_3 respectivamente. Estos tres desplazamientos los vamos a estudiar independientemente.

Supondremos primero que nada más existe el desplazamiento D_3 . Luego que existe D_2 , y que los demás nó. Finalmente suponemos que existe nada más D_1 . Luego acumulamos los efectos de los tres desplazamientos.

Si por ejemplo existiera nada más D_3 , la deformación del marco sería



Todos los nudos del N-3 se desplazan la misma cantidad D_3 . En la primera etapa supondremos que los nudos tienen movimientos lineales, pero no angulares. Nos aparecerán momentos en los extremos de las columnas deformadas. Ahora vamos a suponer que soltamos los nudos; los momentos originados en los extremos de las columnas por el desplazamiento, se encuentran desequilibrados, los repartimos proporcionalmente a las rigideces angulares y transportamos los momentos a los extremos opuestos de las barras. Seguimos haciendo distribuciones y transportes de momentos, hasta que tengamos a todos los nudos en equilibrio desde el punto de vista de movimientos angulares. Calculamos después las fuerzas tangenciales que aparecen en el marco y sumamos todas las fuerzas en cada nivel.

Tanto los momentos como las fuerzas tangen

ciales hay que multiplicarlos por un coeficiente para que correspondan al desplazamiento lineal real. - Llamémosle a a este coeficiente. Las fuerzas reales serían entonces:

$$aH_3(2-3)$$

$$aH_3(1-2)$$

$$aH_3(0-1)$$

Ahora tenemos que pasar a una segunda etapa semejante a la anterior, pero suponemos que nada más existe D_2 . Obtenemos las fuerzas horizontales - en cada nivel, que multiplicadas por un coeficiente b , nos dan las fuerzas reales:

$$bH_2(2-3)$$

$$bH_2(1-2)$$

$$bH_2(0-1)$$

Suponiendo que nada más existe D_1 , obtenemos de la misma manera las expresiones:

$$cH_1(2-3)$$

$$cH_1(1-2)$$

$$cH_1(0-1)$$

Ahora vamos a sumar los tres efectos, así es de que las fuerzas reales en cada nivel valdrán:

Para el N-3 -- $aH_3(2-3) \neq bH_2(2-3) \neq cH_1(2-3)$

" " N-2 -- $aH_3(1-2) \neq bH_2(1-2) \neq cH_1(1-2)$

" " N-1 -- $aH_3(0-1) \neq bH_2(0-1) \neq cH_1(0-1)$

Estas fuerzas son las totales en cada ni--

vel, por lo que tienen que ser iguales a las fuerzas exteriores que obran sobre el marco, y cumplir con la condición de que $\Sigma F_y = 0$.

Si cortamos el marco entre los niveles 2' y 3, la suma de las fuerzas cortantes en las columnas tiene que ser igual a la fuerza exterior arriba del corte, fuerza que llamaremos A:

$$aH_3(2-3) \neq bH_2(2-3) \neq cH_1(2-3) = A$$

La fuerza exterior arriba del corte entre los niveles 1 y 2 la llamaremos B:

$$aH_3(1-2) \neq bH_2(1-2) \neq cH_1(1-2) = B$$

Y por último, la fuerza total exterior arriba de un corte entre los niveles 0 y 1 la llamaremos C, entonces:

$$aH_3(0-1) \neq bH_2(0-1) \neq cH_1(0-1) = C$$

Estas ecuaciones, llamadas ecuaciones de piso, son resolubles, ya que tenemos 3 ecuaciones -- con 3 incógnitas: a, b y c, que al despejarlas nos quedarán en función de A, B y C.

Para obtener los efectos de una sola carga unitaria (1 Ton.) aplicada al marco en el N-3 hacemos

$$A = B = C = 1000 \text{ Kgs.}$$

Para una sola carga unitaria en N-2

$$A = 0$$

$$B = C = 1000 \text{ Kgs.}$$

Y para esta carga en el N-1

$$A = B = 0$$

$$C = 1000 \text{ Kgs.}$$

En cada etapa habíamos obtenido ciertos momentos en cada nudo, los cuales habrá que multiplicar por a, b y c, y sumarlos para obtener los momentos finales.

Nos interesa también conocer las deformaciones debidas a las cargas unitarias aplicadas por separado en cada nivel. Conociendo ya los momentos finales podemos aplicar el 2º teorema de Mohr, que dice: " La desviación tangencial de un punto de la elástica, con respecto a la tangente a otro punto de la elástica, es igual al momento del área del diagrama de momentos flexionantes, con respecto a la horizontal que pasa por el punto en el cual se mide la desviación tangencial, dividido entre EI ". Como hemos supuesto un empotramiento perfecto de las columnas en el N-0, la tangente a la elástica de las columnas en este nivel, no cambiará de dirección, y -- por lo tanto, la desviación tangencial de cualquier punto de la columna con respecto al N-0 será directamente el desplazamiento sufrido por ese punto.

Los desplazamientos producidos por la carga de 1000 Kgs. aplicada en el N-3 los llamaremos:

Deformación en el N-3 ----- K_{3-3}

" " " N-2 ----- K_{2-3}

Deformación en el N-1 ----- K_{1-3}

Carga unitaria en el N-2

Deformación en el N-3 ----- K_{3-2}

" " " N-2 ----- K_{2-2}

" " " N-1 ----- K_{1-2}

Carga unitaria en el N-1

Deformación en el N-3 ----- K_{3-1}

" " " N-2 ----- K_{2-1}

" " " N-1 ----- K_{1-1}

Con esto ya tenemos resueltos los marcos I y II en un plano, para cargas unitarias.

Como cada marco tiene aplicadas fuerzas diferentes, sus deformaciones también serán diferentes; pero como están ligados entre sí por las barras paralelas al eje YY, los desplazamientos de uno modificarán los del otro y viceversa.

Vamos a suponer que estas barras van a deformarse linealmente, sin permitirles hacerlo angularmente; es decir, vamos a suponer que se encuentran empotradas en sus dos extremos; ahora bien, una barra en estas condiciones se deforma proporcionalmente a la fuerza aplicada, según la siguiente expresión

$$F = \frac{12EI}{L^3} D$$

A continuación vamos a establecer ecuaciones que nos ligen los desplazamientos de los marcos

I y II.

Podemos imaginar que las fuerzas aplicadas en un marco las descomponemos en dos partes: una aplicada directamente al marco para deformarlo, y la otra que se encarga de deformar las piezas que ligan los marcos. Esto es para el marco que tiene aplicadas las fuerzas mayores; supondremos que este es el marco II.

En cambio el marco I, aparte de las fuerzas que tiene exteriormente aplicadas, tendrá un incremento positivo en sus deformaciones lineales, debido a las fuerzas tangenciales que aparecen en las barras que ligan los marcos.

El desplazamiento de un nudo del marco II debe ser el mismo si lo vemos como un punto del marco o como un punto de la barra paralela al eje YY conectada con el marco I, puesto que nuestra estructura es continua y suponemos que no se rompe, que todas las barras son capaces de resistir los esfuerzos a que están sometidas.

Podemos escribir las siguientes ecuaciones:

Igualando los desplazamientos en el N-3

$$(F_3^{II} - \frac{12EI}{L^3}D_3)K_{3-3} \neq (F_2^{II} - \frac{12EI}{L^3}D_2)K_{3-2} \neq$$

$$(F_1^{II} - \frac{12EI}{L^3}D_1)K_{3-1} = (F_3^I - \frac{12EI}{L^3}D_3)K_{3-3} \neq$$

$$(F_2^I \neq \frac{12EI}{L^3} D_2) K_{3-2} \neq (F_1^I \neq \frac{12EI}{L^3} D_1) K_{3-1} \neq D_3$$

Igualándolos en el N-2

$$(F_3^{II} - \frac{12EI}{L^3} D_3) K_{2-3} \neq (F_2^{II} - \frac{12EI}{L^3} D_2) K_{2-2} \neq$$

$$(F_1^{II} - \frac{12EI}{L^3} D_1) K_{2-1} = (F_3^I \neq \frac{12EI}{L^3} D_3) K_{2-3} \neq$$

$$(F_2^I \neq \frac{12EI}{L^3} D_2) K_{2-2} \neq (F_1^I \neq \frac{12EI}{L^3} D_1) K_{2-1} \neq D_2$$

Y por último, en el N-1

$$(F_3^{II} - \frac{12EI}{L^3} D_3) K_{1-3} \neq (F_2^{II} - \frac{12EI}{L^3} D_2) K_{1-2} \neq$$

$$(F_1^{II} - \frac{12EI}{L^3} D_1) K_{1-1} = (F_3^I \neq \frac{12EI}{L^3} D_3) K_{1-3} \neq$$

$$(F_2^I \neq \frac{12EI}{L^3} D_2) K_{1-2} \neq (F_1^I \neq \frac{12EI}{L^3} D_1) K_{1-1} \neq D_1$$

En donde D_1 , D_2 y D_3 son respectivamente las deformaciones de las barras normales a los marcos, en los niveles 1, 2 y 3. Las barras de un mismo nivel tienen deformaciones iguales.

Como en cada nivel tenemos 3 barras, en la expresión $\frac{12EI}{L^3}$, I es igual a la suma del momento de inercia de las 3 piezas.

De las 3 ecuaciones que acabamos de establecer, podemos despejar los valores de D_1 , D_2 y D_3 , que son los únicos desconocidos.

El producto de $\frac{12EI}{L^3} D$ nos representa la --

fuerza absorbida por las barras de un nivel para deformarse.

$F \pm \frac{12EI}{L^3} D$ la fuerza exterior aplicada en un nivel del marco para poderlo resolver como aislado en un plano.

Con esto hemos dado fin a una etapa; pero los resultados obtenidos hasta aquí, no son los finales, tenemos que hacer una corrección por el siguiente efecto: las barras paralelas al eje YY las hemos supuesto perfectamente empotradas, lo cual es falso; por lo tanto, nuestra 2a. etapa consistirá en soltar los nudos vistos en planta, para que giren libremente. Como esto lo tenemos que hacer en varias plantas ligadas entre sí, al equilibrar los nudos, hay que tomar en cuenta la rigidez torsional de las columnas, recordando que el factor de transporte para torsiones y flexiones es diferente.

El momento inicial, el de las barras normales a los marcos, lo obtenemos en función del desplazamiento, que ya conocemos, con la relación:

$$M = \frac{6EI}{L^2} D$$

y partiendo de estos valores, repartimos y trasladamos hasta dejar equilibrados todos los nudos.

Al terminar esta 2a. etapa las fuerzas corrientes que habíamos supuesto en las barras paralelas

al eje YY se habrán modificado, y la diferencia en cada nivel habrá que corregirla permitiendo nuevos movimientos en los marcos I y II. Para hacer esto volvemos a utilizar las ecuaciones establecidas en las hojas 14 y 15, con la sola diferencia de un cambio de signo; ya que antes las fuerzas aplicadas a los 2 marcos tenían el mismo sentido, en cambio, al hacer esta corrección, las fuerzas horizontales que hay que suponer aplicadas tendrán sentidos diferentes: positivo para el marco II y negativo para el I, puesto que al permitir girar los nudos disminuirá la fuerza tangencial en planta de las barras que ligan los marcos; es decir, las barras paralelas a YY transmiten del marco II al marco I fuerzas menores que las supuestas. Estas fuerzas de corrección son en valor absoluto iguales para el mismo nivel en los 2 marcos, por lo que podemos simplificar las ecuaciones a que hemos hecho referencia, que nos quedarán expresadas así:

$$2(F_3' - \frac{12EI}{L^3} D_3') K_{3-3} \neq 2(F_2' - \frac{12EI}{L^3} D_2') K_{3-2} \neq$$

$$2(F_1' - \frac{12EI}{L^3} D_1') K_{3-1} = D_3'$$

$$2(F_3' - \frac{12EI}{L^3} D_3') K_{2-3} \neq 2(F_2' - \frac{12EI}{L^3} D_2') K_{2-2} \neq$$

$$2(F_1' - \frac{12EI}{L^3} D_1') K_{2-1} = D_2'$$

$$2(F_3' - \frac{12EI}{L^3} D_3')K_{1-3} \neq 2(F_2' - \frac{12EI}{L^3} D_2')K_{1-2} \neq$$

$$2(F_1' - \frac{12EI}{L^3} D_1')K_{1-1} = D_1'$$

Resolviendo estas ecuaciones volvemos a encontrar nuevas fuerzas en los marcos y nuevas deformaciones de las barras que ligan los marcos; por lo que volvemos a soltar los nudos de la estructura vistos en planta, hasta equilibrar los momentos.

Habrá que permitir nuevamente movimientos en los marcos I y II, y volver a soltar los nudos. - Estos ciclos tendremos que repetirlos hasta que las correcciones puedan ser despreciadas.

Movimientos de los marcos paralelos al plano YZ.-

Viendo los marcos formados en planta y haciendo cortes en las barras paralelas al eje XX, notamos que las fuerzas tangenciales en estas barras no están equilibradas, por lo que hay que permitir ciertos movimientos a los marcos paralelos al plano YZ. Para esto vamos a analizar los marcos (III, IV y V) en un plano, aplicándoles cargas unitarias en cada nivel por separado.

Necesitamos repetir el mismo proceso seguido en la resolución de los marcos I y II: encontrar los momentos en todos los nudos y los desplazamientos en cada nivel.

Aplicamos las ecuaciones de deformación -- con las fuerzas que hemos encontrado en cada nivel, -- y luego viendo los nudos en planta les permitimos girar libremente.

Como vemos, el proceso a seguir es semejante al que usamos para resolver los marcos que se encuentran en el plano normal al que estamos viendo -- ahora. Pero estos movimientos nos afectarán también los de los marcos I y II, ya que modificarán las -- fuerzas tangenciales de las barras paralelas a YY.

Efectos producidos por la rigidez torsional de las trabes.--

Por lo general todos los nudos de los marcos I y II girarán una cierta cantidad, y un nudo de un marco que está ligado por una barra con el nudo -- respectivo del otro marco girará una cantidad diferente al de este otro nudo. Hasta ahora hemos supuesto que la barra que liga estos nudos no opone resistencia alguna a la diferencia de estos giros, lo cual es erróneo, y vamos a corregirlo.

Necesitamos encontrar cuanto ha girado cada nudo, o la diferencia de los giros de 2 nudos respectivos en los 2 marcos paralelos.

Para esto podemos aplicar el 1er. teorema de Mohr, que dice: " La desviación angular entre dos puntos es igual al area del diagrama de momentos entre estos puntos, dividido entre EI ".

Recordamos que las tangentes a las elásticas de las columnas en el N-0 son verticales, por lo que la desviación angular de un punto cualquiera de una columna, con respecto al N-0 de la misma columna nos representa directamente el valor del ángulo girado por ese punto. En esta forma encontramos los giros en todos los nudos, y también la diferencia en los extremos de las barras que ligan los marcos.

El valor del momento torsionante en función del ángulo de torsión está expresado por la fórmula:

$$M_t = \frac{GJ_t}{L} \theta$$

Encontrados estos momentos necesitamos equilibrar todos los nudos de la estructura distribuyendo y trasportando momentos en los marcos I y II de conjunto.

Al permitir estos nuevos giros en los nudos volverán a aparecer fuerzas horizontales, que a menos que sean valores despreciables por lo pequeño de su magnitud, tendremos que corregir nuevamente los marcos, permitiendo desplazamientos en su plano.

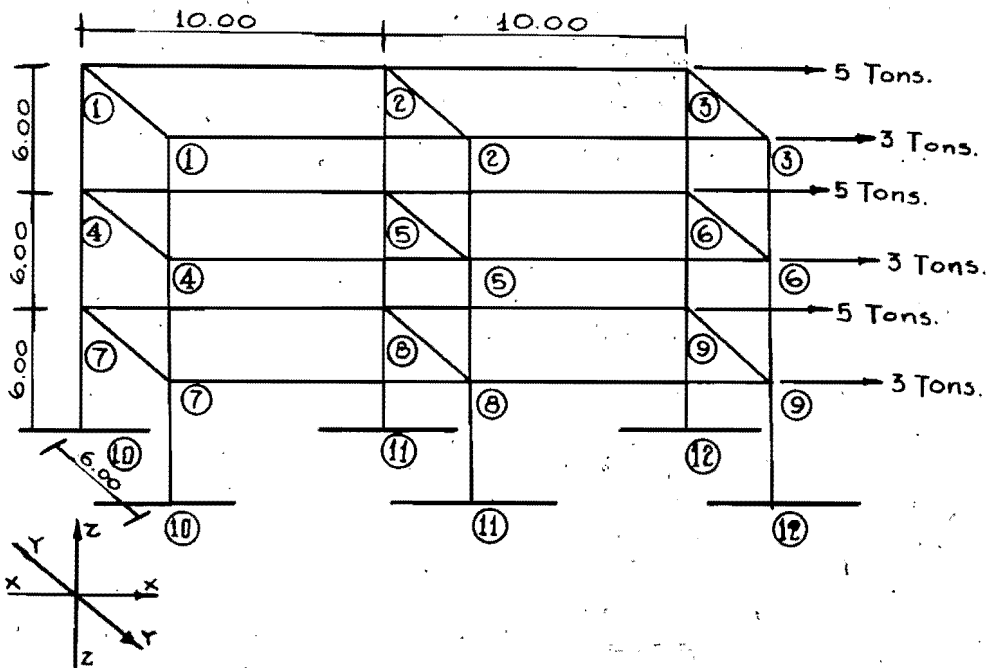
Lo mismo que hemos dicho respecto a los marcos I y II en esta última etapa, lo repetimos para los marcos III, IV y V; en donde también la diferencia de giros en los nudos, debido a la rigidez torsional de las barras que los ligan, modificarán

el valor de estos ángulos, aumentando el menor y disminuyendo el mayor. Al mismo tiempo nos provocarán desplazamientos en las direcciones de los ejes XX y YY.

En esta forma, siguiendo todos los pasos - que hemos indicado, nos iremos acercando gradualmente al equilibrio completo de la estructura en el espacio.

SEGUNDA PARTE

APLICACION AL CALCULO DE DOS MARCOS RIGIDAMENTE UNIDOS Y BAJO DIFERENTES CONDICIONES DE CARGAS HORIZONTALES (EFECTOS SISMICOS). DETERMINACION DE MOMENTOS FLEXIONANTES Y TORSIONANTES. FUERZAS NORMALES Y TANGENCIALES. DIAGRAMA DE DEFORMACION.



Escuadrías:

Barras paralelas al eje XX	40 x 90 cms.
" " " " YY	30 x 60 "
Columnas entre niveles 0 y 1	65 x 65 "
" " " 1 y 2	55 x 55 "
" " " 2 y 3	45 x 45 "

Módulo de elasticidad: $E = 210\,000 \text{ Kg./cm.}^2$

Definimos los marcos de la misma manera como lo hicimos en la hoja 7: el I y el II son los paralelos al plano XZ, y los marcos III, IV y V al YZ.

El marco I tiene aplicadas fuerzas horizontales de 3 toneladas en cada nivel, y el marco II fuerzas de 5 toneladas en cada nivel.

RESOLUCION DE LOS MARCOS PARALELOS AL PLANO XZ CON -
CARGAS UNITARIAS APLICADAS POR SEPARADO A CADA NIVEL

Rigidez angular de las piezas.-

Trabes paralelas a XX

$$I_y = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{40 \times 90^3}{12} = 2\,430\,000 \text{ cm}^4$$

$$r_y = \frac{4EI}{L} = \frac{4E \times 2\,430\,000}{1000} = 9720 \text{ E Kg.cm.}$$

Columnas de 45 x 45 cms.

$$I = \frac{45^4}{12} = 342\,000 \text{ cm}^4$$

$$r = \frac{4 \times 342\,000}{600} \text{ E} = 2280 \text{ E Kg.cm.}$$

Columnas de 55 x 55 cms.

$$I = \frac{55^4}{12} = 763\,000 \text{ cm}^4$$

$$r = \frac{4 \times 763\,000}{600} \text{ E} = 4420 \text{ E Kg.cm.}$$

Columnas de 65 x 65 cms.

$$I = \frac{65^4}{12} = 1\,486\,000 \text{ cm}^4$$

$$r = \frac{4 \times 1\,486\,000}{600} \text{ E} = 9920 \text{ E Kg.cm.}$$

Rigideces relativas.-

Nudos 1 y 3

$$\text{Suma de } r = 9720 + 2280 = 12\,000$$

$$\text{barras 1-2 y 3-2: } \frac{9720}{12000} = 0.810$$

$$\text{" 1-4 y 3-6: } \frac{2280}{12000} = 0.190$$

Nudo 2

$$\text{Suma de } r = 9720 + 9720 + 2280 = 21\,720$$

$$\text{barra 2-1: } \frac{9720}{21720} = 0.447$$

$$\text{" 2-3: } \frac{9720}{21720} = 0.447$$

$$\text{" 2-5: } \frac{2280}{21720} = 0.106$$

Nudos 4 y 6

Suma de r = $9720 + 2280 + 4420 = 16420$
 barras 4-5 y 6-5: $9720/16420 = 0.592$
 " 4-1 y 6-3: $2280/16420 = 0.139$
 " 4-7 y 6-9: $4420/16420 = 0.269$

Nudo 5

Suma de r = $16420 + 9720 = 26140$
 barra 5-4: $9720/26140 = 0.372$
 " 5-6: $9720/26140 = 0.372$
 " 5-2: $2280/26140 = 0.087$
 " 5-8: $4420/26140 = 0.169$

Nudos 7 y 9

Suma de r = $9720 + 4420 + 9920 = 24060$
 barras 7-8 y 9-8: $9720/24060 = 0.404$
 " 7-10 y 9-12: $9920/24060 = 0.412$
 " 7-4 y 9-6: $4420/24060 = 0.184$

Nudo 8

Suma de r = $24060 + 9720 = 33780$
 barra 8-7: $9720/33780 = 0.288$
 " 8-9: $9720/33780 = 0.288$
 " 8-11: $9920/33780 = 0.293$
 " 8-5: $4420/33780 = 0.131$

Vamos ahora a suponer que el N-3 va a sufrir un desalojamiento que nos origina en los extremos de las columnas (entre niveles 2 y 3) momentos de 1000 Kg.m., y a distribuir estos momentos. Esta distribución está en la hoja 25, donde logramos el equilibrio de los nudos.

En la hoja 26 hacemos la misma operación para un desalojamiento en el N-2 con momentos iniciales en las columnas de 1000 Kg.m.

Y por último, en la hoja 27 para un desalojamiento en el N-1 que nos origina momentos iniciales también de 1000 Kg.m. en los extremos de las columnas que están entre los niveles 0 y 1.

	①				②		N-3
Barra	1-4	1-2		2-1	2-5	2-3	
r/zr	0.190	0.810		0.447	0.106	0.447	
M ₁	1000	0		0	1000	0	
e	-190	-810		-447	-106	-447	
t	-69	-223		-405	-43	-405	
e	56	236		381	91	381	
t	19	190		118	28	118	
e	-40	-169		-118	-28	-118	
t	-11	-59		-84	-9	-84	
e	13	57		79	19	79	
t	4	39		28	4	28	
e	-8	-35		-27	-6	-27	
t	-2	-13		-17	-2	-17	
e	3	12		16	4	16	
Suma	775	-775		-476	952	-476	
	④				⑤		N-2
Barra	4-1	4-7	4-5	5-4	5-2	5-8	5-6
r/zr	0.139	0.269	0.592	0.372	0.087	0.169	0.372
M ₁	1000	0	0	0	1000	0	0
e	-139	-269	-592	-372	-87	-169	-372
t	-95	0	-186	-296	-53	0	-296
e	39	76	166	240	56	109	240
t	28	12	120	83	45	5	83
e	-22	-43	-95	-80	-19	-37	-80
t	-20	-4	-40	-42	-14	-7	-42
e	9	17	38	39	9	18	39
t	6	3	19	19	9	2	19
e	-4	-7	-17	-18	-4	-9	-18
t	-4	1	9	8	-3	1	8
e	2	4	8	7	2	4	7
Suma	800	-212	-588	-428	941	-85	-428
	⑦				⑧		N-1
Barra	7-10	7-4	7-8	8-7	8-11	8-5	8-9
r/zr	0.412	0.184	0.404	0.288	0.293	0.131	0.288
M ₁	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0
t	0	-134	0	0	0	-84	0
e	55	25	54	24	25	11	24
t	0	38	12	27	0	54	27
e	-21	-9	-20	-31	-32	-14	-31
t	0	21	15	10	0	18	10
e	15	7	14	11	11	9	11
t	0	8	5	7	0	9	7
e	-5	-2	-6	-7	-6	-3	-7
t	0	3	3	3	0	4	3
e	3	1	2	3	3	1	3
Suma	47	-90	43	21	1	43	21
	⑩				⑪		N-0
Barra	10-7			11-8			
r/zr	0			0			
M ₁	0			0			
e	0			0			
t	0			0			
e	27			12			
t	0			0			
e	-10			-16			
t	0			0			
e	7			5			
t	0			0			
e	-2			-3			
Suma	22			2			

		①		②			N-3
Barra	r/xr	1-4	1-2	2-1	2-5	2-3	
M _i		0.190	0.810	0.447	0.106	0.447	
e		0	0	0	0	0	
t		89	0	0	43	0	
e		13	58	19	5	19	
t		19	9	28	29	28	
e		5	23	38	9	38	
t		10	19	11	8	11	
e		5	24	13	4	13	
t		3	6	12	4	12	
e		2	7	12	4	12	
t		1	6	3	1	3	
e		1	6	3	1	3	
Suma		46	46	11	22	11	

		④		⑤		N-2		
Barra	r/xr	4-1	4-7	4-5	5-4	5-2	5-8	5-6
M _i		0.139	0.269	0.592	0.372	0.087	0.169	0.372
e		0	1000	0	0	0	1000	0
t		139	269	592	372	87	169	372
e		0	92	186	296	0	65	296
t		39	75	164	244	58	111	244
e		6	25	122	82	2	32	82
t		21	41	91	74	17	33	74
e		2	10	37	45	4	11	45
t		7	13	29	39	9	18	39
e		2	4	19	14	2	3	14
t		3	7	15	12	3	6	12
e		1	1	6	7	2	1	7
t		1	2	5	6	2	3	6
Suma		111	699	588	421	40	882	421

		⑧		⑨		N-1		
Barra	r/xr	7-10	7-4	7-8	8-7	8-11	8-5	8-9
M _i		0.412	0.184	0.404	0.288	0.293	0.131	0.288
e		0	1000	0	0	0	1000	0
t		412	184	404	288	293	131	288
e		0	134	144	208	0	84	202
t		115	51	112	141	142	64	141
e		0	37	70	56	0	55	56
t		44	20	43	48	49	22	48
e		0	20	24	21	0	16	21
t		18	8	18	17	17	7	17
e		0	6	8	9	0	9	9
t		6	3	5	8	8	3	8
e		0	3	4	2	0	3	2
t		3	1	3	2	2	1	2
Suma		326	739	413	344	189	877	344

		⑩	⑪	N-0
Barra	r/xr	10-7	11-7	
M _i		0	0	
e		0	0	
t		206	146	
e		0	0	
t		57	71	
e		0	0	
t		22	24	
e		0	0	
t		9	8	
e		0	0	
t		3	4	
e		0	0	
Suma		165	95	

	①		②			N-3
Barra	1-4	1-2	2-1	2-5	2-3	
r/r	0.190	0.810	0.447	0.106	0.447	
M ₁	0	0	0	0	0	
e	0	0	0	0	0	
t	0	0	0	0	0	
t	0	0	0	0	0	
e	6	0	0	3	0	
t	1	5	1	1	1	
e	1	0	2	3	2	
t	0	1	3	1	3	
e	1	2	0	0	0	
t	0	0	1	0	0	
e	0	0	1	0	1	
Suma	5	6	0	0	0	

	④			⑤			N-2
Barra	4-1	4-7	4-5	5-4	5-2	5-8	5-6
r/r	0.139	0.269	0.592	0.372	0.087	0.169	0.372
M ₁	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0
t	0	92	0	0	0	65	0
t	13	25	54	24	8	11	24
e	0	13	13	27	0	26	27
t	3	7	15	30	7	13	30
e	0	6	15	7	0	4	7
t	3	6	12	7	1	3	7
e	0	1	3	6	0	2	6
t	1	1	2	5	1	3	5
e	0	1	2	1	0	0	1
t	0	1	2	1	0	0	1
Suma	12	61	49	22	1	43	22

	⑦			⑧				N-1
Barra	7-10	7-4	7-8	8-7	8-11	8-5	8-9	
r/r	0.412	0.184	0.404	0.288	0.293	0.131	0.288	
M ₁	1000	0	0	0	1000	0	0	
e	412	184	404	288	293	131	288	
t	0	0	144	202	0	0	202	
t	60	26	58	116	119	53	116	
e	0	12	58	29	0	5	29	
t	29	13	28	18	19	8	18	
e	0	3	9	14	0	6	14	
t	5	2	5	10	10	4	10	
e	0	3	5	2	0	1	2	
t	3	2	3	1	2	1	1	
e	0	0	0	1	0	1	1	
t	0	0	0	1	1	0	1	
Suma	621	159	462	366	816	84	366	

	⑩	⑪	N-0
Barra	10-7	11-8	
r/r	0	0	
M ₁	1000	1000	
e	0	0	
t	208	146	
t	0	0	
e	30	59	
t	0	0	
e	14	9	
t	0	0	
e	2	5	
t	0	0	
e	1	1	
t	0	0	
Suma	811	908	

Fuerzas cortantes en las columnas.-

Vamos a encontrar directamente la suma de las fuerzas cortantes de las 3 columnas en cada piso.

Para el desplazamiento inicial en el N-3

$$H_3(2-3) = (775 \neq 800)2/6 \neq (952 \neq 941)/6 = 840.5 \text{ Kgs.}$$

$$H_3(1-2) = -(212 \neq 90)2/6 - (85 \neq 43)/6 = -122.0 \text{ "}$$

$$H_3(0-1) = (47 \neq 22)2/6 \neq (1 - 2)/6 = 22.8 \text{ "}$$

Para el desplazamiento inicial en el N-2

$$H_2(2-3) = -(46 \neq 111)2/6 - (22 \neq 40)/6 = -62.6 \text{ "}$$

$$H_2(1-2) = (699 \neq 739)2/6 \neq (882 \neq 877)/6 = 772.5 \text{ "}$$

$$H_2(0-1) = -(326 \neq 165)2/6 - (189 \neq 95)/6 = -211.0 \text{ "}$$

Para el desplazamiento inicial en el N-1

$$H_1(2-3) = (5 \neq 12)2/6 - 1/6 = 5.5 \text{ "}$$

$$H_1(1-2) = -(61 \neq 159)2/6 - (43 \neq 84)/6 = -94.5 \text{ "}$$

$$H_1(0-1) = (621 \neq 811)2/6 \neq (816 \neq 908)/6 = 764.6 \text{ "}$$

Resolución de las ecuaciones de piso.-

$$840.5 a - 62.6 b \neq 5.5 c = A \quad \text{-----} \quad 1$$

$$-122.0 a \neq 772.5 b - 94.5 c = B \quad \text{-----} \quad 2$$

$$22.8 a - 211.0 b \neq 764.6 c = C \quad \text{-----} \quad 3$$

$$\text{De 1: } a = \frac{A \neq 62.6 b - 5.5 c}{840.5} \quad \text{-----} \quad 4$$

$$\text{De 2: } a = \frac{-B \neq 772.5 b - 94.5 c}{122.0} \quad \text{-----} \quad 5$$

$$\text{De 3: } a = \frac{C \neq 211.0 b - 764.6 c}{22.8} \quad \text{-----} \quad 6$$

$$4=5: \quad \frac{A \neq 62.6 b - 5.5 c}{840.5} = \frac{-B \neq 772.5 b - 94.5 c}{122.0} \quad \text{--- } 7$$

$$5=6: \quad \frac{-B \neq 772.5 b - 94.5 c}{122.0} = \frac{C \neq 211.0 b - 764.6 c}{22.8} \quad 8$$

$$\text{De } 7: \quad b = \frac{0.145 A \neq B \neq 93.702 c}{763.414} \quad 9$$

Sustituyendo 9 en 8:

$$c = \frac{0.0127 A \neq 0.2742 B \neq C}{738.7611} \quad \text{----- } 10$$

1) Coeficientes que resultan para una carga de 1000 Kgs. aplicada en el N-3.

$$A = B = C = 1000$$

$$\text{De } 10: \quad c_3 = 1.7417$$

$$\text{De } 9: \quad b_3 = 1.7138$$

$$\text{De } 4: \quad a_3 = 1.3060$$

2) Coeficientes para carga de 1000 Kgs. en N-2.

$$A = 0; \quad B = C = 1000$$

$$c_2 = 1.7247$$

$$b_2 = 1.5216$$

$$a_2 = 0.1020$$

3) Coeficientes para carga de 1000 Kgs. en N-1.

$$A = B = 0; \quad C = 1000$$

$$c_1 = 1.3536$$

$$b_1 = 0.1661$$

$$a_1 = 0.0035$$

Momentos finales.-

Nomenclatura: Una barra nos queda definida por los números de los nudos que liga, el primero de los cuales nos indica el extremo considerado de la barra.

Carga de 1000 Kgs. aplicada en el N-3

1-2 = 3-2:	$M_3 = - 775 \times 1.3060 = - 1012$	Kg.m.
	$M_2 = / 46 \times 1.7138 = / 79$	" "
	$M_1 = - 5 \times 1.7417 = - 9$	" "
	$M = - 942$	" "
1-4 = 3-6:	$M_3 = / 775 \times 1.3060 = / 1012$	" "
	$M_2 = - 46 \times 1.7138 = - 79$	" "
	$M_1 = / 5 \times 1.7417 = / 9$	" "
	$M = / 942$	" "
2-1 = 2-3:	$M_3 = - 476 \times 1.3060 = - 622$	" "
	$M_2 = / 11 \times 1.7138 = / 19$	" "
	$M_1 =$	" "
	$M = - 603$	" "
2-5:	$M_3 = / 952 \times 1.3060 = / 1244$	" "
	$M_2 = - 22 \times 1.7138 = - 38$	" "
	$M_1 =$	" "
	$M = / 1206$	" "
4-1 = 6-3:	$M_3 = / 800 \times 1.3060 = / 1045$	" "
	$M_2 = - 111 \times 1.7138 = - 190$	" "
	$M_1 = / 12 \times 1.7417 = / 21$	" "
	$M = / 876$	" "
4-5 = 6-5:	$M_3 = - 588 \times 1.3060 = - 768$	" "
	$M_2 = - 588 \times 1.7138 = - 1008$	" "
	$M_1 = / 49 \times 1.7417 = / 85$	" "
	$M = - 1691$	" "
4-7 = 6-9:	$M_3 = - 212 \times 1.3060 = - 277$	" "
	$M_2 = / 699 \times 1.7138 = / 1198$	" "
	$M_1 = - 61 \times 1.7417 = - 106$	" "
	$M = / 815$	" "
5-4 = 5-6:	$M_3 = - 428 \times 1.3060 = - 559$	" "
	$M_2 = - 421 \times 1.7138 = - 721$	" "
	$M_1 = / 22 \times 1.7417 = / 38$	" "
	$M = - 1242$	" "

5-2:	$M_3 = \cancel{941} \times 1.3060 = \cancel{1229}$	Kg.m.
	$M_2 = - 40 \times 1.7138 = - 69$	" "
	$M_1 = - 1 \times 1.7417 = - 1$	" "
	$M = \cancel{1159}$	" "
5-8:	$M_3 = - 85 \times 1.3060 = - 111$	" "
	$M_2 = \cancel{882} \times 1.7138 = \cancel{1511}$	" "
	$M_1 = - 43 \times 1.7417 = - 75$	" "
	$M = \cancel{1325}$	" "
7-4 = 9-6:	$M_3 = - 90 \times 1.3060 = - 117$	" "
	$M_2 = \cancel{739} \times 1.7138 = \cancel{1266}$	" "
	$M_1 = - 159 \times 1.7417 = - 277$	" "
	$M = \cancel{872}$	" "
7-8 = 9-8:	$M_3 = \cancel{43} \times 1.3060 = \cancel{56}$	" "
	$M_2 = - 413 \times 1.7138 = - 707$	" "
	$M_1 = - 462 \times 1.7417 = - 805$	" "
	$M = - 1456$	" "
7-10 = 9-12:	$M_3 = \cancel{47} \times 1.3060 = \cancel{61}$	" "
	$M_2 = - 326 \times 1.7138 = - 559$	" "
	$M_1 = \cancel{621} \times 1.7417 = \cancel{1082}$	" "
	$M = \cancel{584}$	" "
8-7 = 8-9:	$M_3 = \cancel{21} \times 1.3060 = \cancel{27}$	" "
	$M_2 = - 344 \times 1.7138 = - 589$	" "
	$M_1 = - 366 \times 1.7417 = - 637$	" "
	$M = - 1199$	" "
8-5:	$M_3 = - 43 \times 1.3060 = - 56$	" "
	$M_2 = \cancel{877} \times 1.7138 = \cancel{1502}$	" "
	$M_1 = - 84 \times 1.7417 = - 146$	" "
	$M = \cancel{1300}$	" "
8-11:	$M_3 = \cancel{1} \times 1.3060 = \cancel{2}$	" "
	$M_2 = - 189 \times 1.7138 = - 324$	" "
	$M_1 = \cancel{816} \times 1.7417 = \cancel{1420}$	" "
	$M = \cancel{1098}$	" "
10-7 = 12-9:	$M_3 = \cancel{82} \times 1.3060 = \cancel{29}$	" "
	$M_2 = - 165 \times 1.7138 = - 283$	" "
	$M_1 = \cancel{811} \times 1.7417 = \cancel{1413}$	" "
	$M = \cancel{1159}$	" "
11-8:	$M_3 = - 2 \times 1.3060 = - 2$	" "
	$M_2 = - 95 \times 1.7138 = - 163$	" "
	$M_1 = \cancel{908} \times 1.7417 = \cancel{1581}$	" "
	$M = \cancel{1414}$	" "

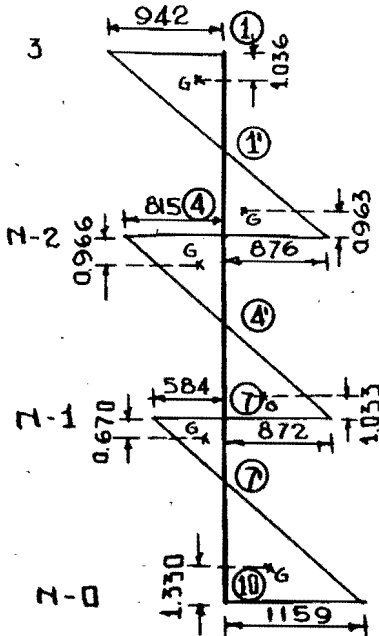
Para obtener los momentos originados por - cargas de 1000 Kgs. aplicadas en el N-2 ó en el N-1 repetimos las mismas operaciones, pero multiplicando ahora por los coeficientes $a_2, b_2, c_2,$ y a_1, b_1, c_1 respectivamente.

	Carga en el N-2	Carga en el N-1
1-2 = 3-2	M = - 18 Kg.m.	M = - 2 Kg.m.
1-4 = 3-6	M = / 18 " "	M = / 2 " "
2-1 = 2-3	M = - 32 " "	M = 0
2-5	M = / 64 " "	M = 0
4-1 = 6-3	M = - 66 " "	M = / 1 " "
4-5 = 6-5	M = - 870 " "	M = - 34 " "
4-7 = 6-9	M = / 936 " "	M = / 33 " "
5-4 = 5-6	M = - 647 " "	M = - 42 " "
5-2	M = / 33 " "	M = - 5 " "
5-8	M = / 1261 " "	M = / 89 " "
7-4 = 9-6	M = / 841 " "	M = - 92 " "
7-8 = 9-8	M = - 1421 " "	M = - 694 " "
7-10 = 9-12	M = / 580 " "	M = / 786 " "
8-7 = 8-9	M = - 1152 " "	M = - 552 " "
8-5	M = / 1185 " "	M = / 32 " "
8-11	M = / 1119 " "	M = / 1072 " "
10-7 = 12-9	M = / 1150 " "	M = / 1070 " "
11-8	M = / 1421 " "	M = / 1213 " "

Todos los momentos obtenidos son momentos de barra sobre nudo.

Deformaciones provocadas por las cargas unitarias.-

Deformaciones debidas a carga de 1000 Kgs. aplicada en el N-3:



Puntos de inflexión

$$\begin{aligned}
 1-1' &= 6.00 \times 942 / (942 \neq 876) = 3.109 \text{ m.} \\
 1'-4 &= 6.00 - 3.109 = 2.891 \text{ " } \\
 4-4' &= 6.00 \times 815 / (815 \neq 872) = 2.899 \text{ " } \\
 4'-7 &= 6.00 - 2.899 = 3.101 \text{ " } \\
 7-7' &= 6.00 \times 584 / (584 \neq 1159) = 2.010 \text{ " } \\
 7'-10 &= 6.00 - 2.010 = 3.990 \text{ " }
 \end{aligned}$$

Areas de los triángulos en Kg.m.²

$$\begin{aligned}
 1-1' &= 3.109 \times 942 / 2 = 1464.34 \\
 1'-4 &= 2.891 \times 876 / 2 = 1266.25 \\
 4-4' &= 2.899 \times 815 / 2 = 1176.34 \\
 4'-7 &= 3.101 \times 872 / 2 = 1352.04 \\
 7-7' &= 2.010 \times 584 / 2 = 591.92 \\
 7'-10 &= 3.990 \times 1159 / 2 = 2312.25
 \end{aligned}$$

En el esquema tenemos anotadas - las distancias a los centros de gravedad de los triángulos.

Diagrama de momentos flexionantes.

Aplicamos el 2º teorema de Mohr.

$$\begin{aligned}
 K_{1-3} &= \frac{(2312.25 \times 4.670 - 591.92 \times 0.670) 10^6}{E I_{7-10}} = \\
 &= \frac{10\ 401\ 621\ 000}{210000 \times 1486000} = 10401 / 312060 = 0.03333 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

$$K_{2-3} = \frac{2312.25 \times 10.67 - 591.92 \times 6.67}{312060} \neq$$

$$\neq \frac{1352.04 \times 4.965 - 1176.34 \times 0.966}{E I_{4-7}}$$

$$K_{2-3} = \frac{20723.60}{312060} \neq \frac{5576.51}{160230} = 0.10120 \text{ cm.}$$

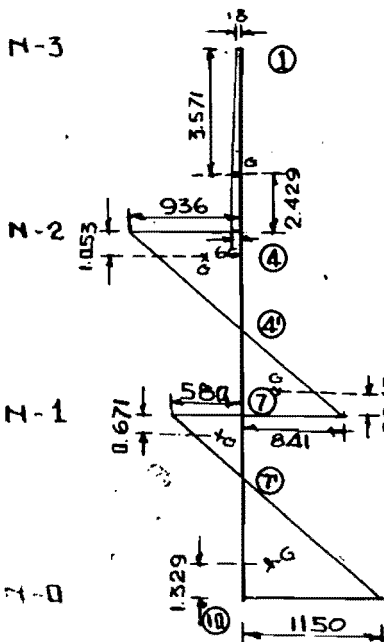
$$K_{3-3} = \frac{2312.25 \times 15.670 - 591.92 \times 12.670}{312060} \neq$$

$$\neq \frac{1352.04 \times 10.965 - 1176.34 \times 6.966}{160230} \neq$$

$$\neq \frac{1266.25 \times 5.036 - 1464.34 \times 1.036}{E I_{1-4}} =$$

$$= \frac{31045.58}{312060} \neq \frac{6630.67}{160230} \neq \frac{4859.79}{71820} = 0.20653 \text{ cm.}$$

Deformaciones debidas a carga de 1000 Kgs. en el N-2:



Puntos de inflexión

$$\begin{aligned} 4-4' &= 6.00 \times 936 / 1777 = 3.160 \text{ m.} \\ 4'-7 &= 6.00 - 3.160 = 2.840 \text{ " } \\ 7-7' &= 6.00 \times 580 / 1730 = 2.012 \text{ " } \\ 7'-10 &= 6.00 - 2.012 = 3.988 \text{ " } \end{aligned}$$

Areas de los triángulos (Kg.m²)

$$\begin{aligned} 1-4 &= 6.00(18 \neq 66) / 2 = 252.00 \\ 4-4' &= 3.160 \times 936 / 2 = 1478.88 \\ 4'-7 &= 2.840 \times 841 / 2 = 1194.22 \\ 7-7' &= 2.012 \times 580 / 2 = 583.48 \\ 7'-10 &= 3.988 \times 1150 / 2 = 2293.10 \end{aligned}$$

Diagrama de momentos flexionantes

$$2293.10 \times 4.671 - 583.48 \times 0.671$$

312060

$$= 0.03307 \text{ cm.}$$

$$K_{2-2} = \frac{10319.55 \neq 2293.10 \times 6 - 583.48 \times 6}{312060} \neq \frac{1194.22 \times 5.053 - 1478.88 \times 1.053}{160230} = 0.09388 \text{ cm.}$$

$$K_{3-2} = \frac{10319.55 \neq 2293.10 \times 12 - 583.48 \times 12}{312060} \neq \frac{4477.13 \neq 1194.22 \times 6 - 1478.88 \times 6}{160230} - \frac{252 \times 3.571}{71820} = 0.10340 \text{ cm.}$$

Deformaciones debidas a carga de 1000 Kgs. en el N-1:

Puntos de inflexión

$$7-7' = 6.00 \times 786/1856 = 2.549 \text{ m.}$$

$$7'-10 = 6.00 - 2.549 = 3.451 \text{ m.}$$

Areas (Kg.m²)

$$4-7 = 6.00(33 \neq 92)/2 = 375.00$$

$$7-7' = 2.549 \times 786/2 = 1001.76$$

$$7'-10 = 3.451 \times 1070/2 = 1846.28$$

$$K_{1-1} = \frac{1846.28 \times 4.850 - 1001.76 \times 0.850}{312060}$$

$$K_{1-1} = 0.02664 \text{ cm.}$$

$$K_{2-1} = \frac{8102.88 \neq 1846.28 \times 6 - 1001.76 \times 6}{312060}$$

$$- \frac{375 \times 3.472}{160230} = 0.03408 \text{ cm.}$$

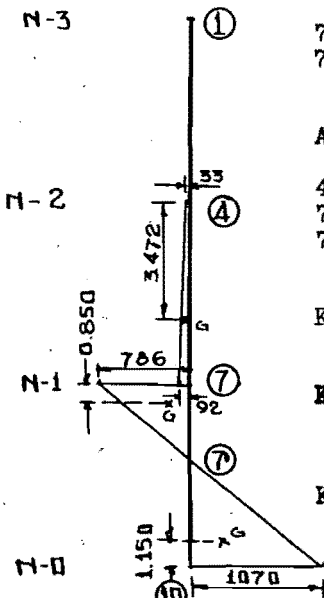


Diagrama de momentos flexionantes.

$$K_{3-1} = \frac{8102.88 \neq 1846.28 \times 12 - 1001.76 \times 12}{312060}$$

$$\frac{1302.00 \neq 375 \times 6}{160230} = 0.03003 \text{ cm.}$$

Hasta aquí tenemos completamente resueltos los marcos I y II en un plano para cargas unitarias.

1a. Etapa.

Vamos a aplicar las ecuaciones de deformación establecidas en las hojas 14 y 15. Los valores conocidos son:

$$\frac{12 E I}{L^3} = \frac{12 \times 210000 \times 60 \times 30^3 / 12}{600^3} \times 3$$

$$\frac{12 E I}{L^3} = 4725 \text{ Kg./cm.} = 4.725 \text{ Ton./cm.}$$

$$F_3^{II} = F_2^{II} = F_1^{II} = 5 \text{ Tons.}$$

$$F_3^I = F_2^I = F_1^I = 3 \text{ "}$$

$$(5 - 4.725 D_3) 0.20853 \neq (5 - 4.725 D_2) 0.10340 \neq (5 - 4.725 D_1) 0.03003 = (3 \neq 4.725 D_3) 0.20853 \neq (3 \neq 4.725 D_2) 0.10340 \neq (3 \neq 4.725 D_1) 0.03003 \neq D_3 \text{ -- 1}$$

$$(5 - 4.725 D_3) 0.10120 \neq (5 - 4.725 D_2) 0.09388 \neq (5 - 4.725 D_1) 0.03408 = (3 \neq 4.725 D_3) 0.10120 \neq (3 \neq 4.725 D_2) 0.09388 \neq (3 \neq 4.725 D_1) 0.03408 \neq D_2 \text{ ---- 2}$$

$$(5 - 4.725 D_3) 0.03333 \neq (5 - 4.725 D_2) 0.03307 \neq (5 - 4.725 D_1) 0.02664 = (3 \neq 4.725 D_3) 0.03333 \neq (3 \neq 4.725 D_2) 0.03307 \neq (3 \neq 4.725 D_1) 0.02664 \neq D_1 \text{ ---- 3}$$

$$\text{De 1: } (2 - 2x4.725D_3)0.20853 \neq (2 - 2x4.725D_2)0.10340 \neq \\ (2 - 2x4.725D_1)0.03003 = D_3 \text{ ----- 4}$$

$$\text{De 2: } (2 - 2x4.725D_3)0.10120 \neq (2 - 2x4.725D_2)0.09388 \neq \\ (2 - 2x4.725D_1)0.03408 = D_2 \text{ ----- 5}$$

$$\text{De 3: } (2 - 2x4.725D_3)0.03333 \neq (2 - 2x4.725D_2)0.03307 \neq \\ (2 - 2x4.725D_1)0.02662 = D_1 \text{ ----- 6}$$

De 4 despejamos D_3 :

$$D_3 = \frac{2x0.20853 \neq (2 - 9.45D_2)0.10340 \neq (2 - 9.45D_1)0.03003}{1 \neq 9.45x0.20853}$$

$$D_3 = \frac{0.68392 - 0.97713 D_2 - 0.28378 D_1}{2.97061} \text{ ----- 7}$$

Sustituyendo 7 en 5:

$$(2 - 9.45 \frac{0.68392 - 0.97713D_2 - 0.28378D_1}{2.97061})0.10120 \neq$$

$$(2 - 9.45D_2)0.09388 \neq (2 - 9.45D_1)0.03408 = D_2$$

$$D_2 = 0.20240 - 0.22017 \neq 0.31257D_2 \neq 0.09136D_1 \neq$$

$$0.18776 - 0.88717D_2 \neq 0.06816 - 0.32206D_1$$

$$D_2 = \frac{0.23815 - 0.23070 D_1}{1.57260} \text{ ----- 8}$$

Sustituyendo 7 en 6:

$$(2 - 9.45 \frac{0.68392 - 0.97713D_2 - 0.28378D_1}{2.97061})0.03333 \neq$$

$$(2 - 9.45D_2)0.03307 \neq (2 - 9.45D_1)0.02664 = D_1$$

$$0.06666 - 0.07251 \neq 0.10360D_2 \neq 0.03009D_1 \neq$$

$$0.06614 - 0.31251D_2 \neq 0.05328 - 0.25175D_1 = D_1$$

$$D_2 = \frac{0.11357 - 1.22166 D_1}{0.20891} \text{ ----- 9}$$

$$8 = 9: \frac{0.23815 - 0.23070D_1}{1.57260} = \frac{0.11357 - 1.22166D_1}{0.20391}$$

$$D_1 = 0.06879 \text{ cms.}$$

$$\text{De 9:} \quad D_2 = 0.14135 \quad "$$

$$\text{De 7:} \quad D_3 = 0.17716 \quad "$$

Conocidas las deformaciones en los 3 niveles podemos encontrar las fuerzas que los originan:

$$D_3 \times 12EI/L^3 = 0.17716 \times 4.725 = 0.837 \text{ Tons.}$$

$$D_2 \times 12EI/L^3 = 0.14135 \times 4.725 = 0.668 \quad "$$

$$D_1 \times 12EI/L^3 = 0.06879 \times 4.725 = 0.325 \quad "$$

$$F_3^{II} - D_3 \times 12EI/L^3 = 5 - 0.837 = 4.163 \text{ Tons.}$$

$$F_2^{II} - D_2 \times 12EI/L^3 = 5 - 0.668 = 4.332 \quad "$$

$$F_1^{II} - D_1 \times 12EI/L^3 = 5 - 0.325 = 4.675 \quad "$$

$$F_3^I \neq D_3 \times 12EI/L^3 = 3 \neq 0.837 = 3.837 \quad "$$

$$F_2^I \neq D_2 \times 12EI/L^3 = 3 \neq 0.668 = 3.668 \quad "$$

$$F_1^I \neq D_1 \times 12EI/L^3 = 3 \neq 0.325 = 3.325 \quad "$$

2a. Etapa.

Vamos a encontrar el valor de los momentos producidos en las barras paralelas al eje YY por la diferencia de las deformaciones en los 2 marcos.

El momento en una barra empotrada que se deforma linealmente, vale en función de la deformación

$$M = \frac{6EI}{L^2} D$$

Barra de 30 x 60 cms.. $I_z = \frac{60 \times 30^3}{12} = 135\ 000\ \text{cm}^4$

$$\frac{6 E I_z}{L^2} = \frac{6 \times 135000 \times 210000}{600^2} = 472\ 500\ \text{Kgs.}$$

Barras del N-3: $M_3 = 472500 \times 0.0017716 = 837\ \text{Kg.m.}$

" " N-2: $M_2 = 472500 \times 0.0014135 = 668\ \text{" "}$

" " N-1: $M_1 = 472500 \times 0.0006879 = 325\ \text{" "}$

Rigideces.-

Trabes paralelas a YY

$$r_z = \frac{4 \times 135000}{600} E = 900 E\ \text{Kg.cm.}$$

Trabes paralelas a XX

$$I_z = \frac{1}{12} 90 \times 40^3 = 480\ 000\ \text{cm}^4$$

$$r_z = \frac{4 \times 480000}{1000} E = 1920 E\ \text{Kg.cm.}$$

Columnas de 45 x 45 cms.

$$r_t = \frac{G J_t}{L}$$

$$\frac{h}{b} = 1 \quad k = 0.14 \quad (\text{hoja 4})$$

$$J_t = 0.14 \times 45^4 = 575\ 000\ \text{cm}^4$$

$$r_t = \frac{575000 \times 3}{600 \times 7} E = 489 E\ \text{Kg.cm.}$$

Columnas de 55 x 55 cms.

$$J_t = 0.14 \times 55^4 = 1\ 285\ 000\ \text{cm}^4$$

$$r_t = \frac{1285000 \times 3}{600 \times 7} E = 1090 E\ \text{Kg.cm.}$$

Columnas de 65 x 65 cms.

$$J_t = 0.14 \times 65^4 = 2\ 572\ 000\ \text{cm}^4$$

$$r_t = \frac{2572000}{600} \cdot \frac{3}{7} E = 2123 E \text{ Kg.cm.}$$

Rigideces relativas.-

Nudos 1 y 3

$$\text{Suma de } r = 900 \neq 1920 \neq 489 = 3309$$

barras	1-1 y 3-3:	900/3309	=	0.272
"	1-2 y 3-2:	1920/3309	=	0.580
"	1-4 y 3-6:	489/3309	=	0.148

Nudo 2

$$\text{Suma de } r = 1920 \neq 1920 \neq 900 \neq 489 = 5229$$

Barra	2-1:	1920/5229	=	0.367
"	2-3:	1920/5229	=	0.367
"	2-2:	900/5229	=	0.172
"	2-5:	489/5229	=	0.094

Nudos 4 y 6

$$\text{Suma de } r = 900 \neq 1920 \neq 489 \neq 1090 = 4399$$

Barras	4-4 y 6-6:	900/4399	=	0.205
"	4-5 y 6-5:	1920/4399	=	0.437
"	4-1 y 6-3:	489/4399	=	0.111
"	4-7 y 6-9:	1090/4399	=	0.247

Nudo 5

$$\text{Suma de } r = 1920 \neq 1920 \neq 900 \neq 489 \neq 1090 = 6319$$

Barra	5-4:	1920/6319	=	0.304
"	5-6:	1920/6319	=	0.304
"	5-5:	900/6319	=	0.142
"	5-2:	489/6319	=	0.077
"	5-8:	1090/6319	=	0.173

Nudos 7 y 9

$$\text{Suma de } r = 900 \neq 1920 \neq 1090 \neq 2123 = 6033$$

Barras	7-7 y 9-9:	900/6033	=	0.149
"	7-8 y 9-8:	1920/6033	=	0.318
"	7-4 y 9-6:	1090/6033	=	0.181
"	7-10 y 9-12:	2123/6033	=	0.352

Nudo 8

$$\text{Suma de } r = 1920 \neq 1920 \neq 900 \neq 1090 \neq 2123 = 7953$$

Barra	8-7:	1920/7953	=	0.241
"	8-9:	1920/7953	=	0.241
"	8-8:	900/7953	=	0.113
"	8-5:	1090/7953	=	0.137
"	8-11:	2123/7953	=	0.268

Vamos a permitir girar libremente los nudos vistos en planta.

Por la simetría de la estructura nada más resolvemos los nudos 1, 2, 4, 5, 7 y 8 de un solo marco.

La distribución de los momentos está en la hoja siguiente.

Las fuerzas tangenciales en planta de las barras paralelas al eje YY se nos modifican. Ahora valen en total por cada nivel:

$$\begin{array}{l} \text{En el N-3} \quad \frac{535 \times 2}{6} \quad 2 \neq \frac{733 \times 2}{6} = 601 \text{ Kgs.} \\ \text{En el N-2} \quad \frac{446 \times 2}{6} \quad 2 \neq \frac{583 \times 2}{6} = 492 \text{ " } \\ \text{En el N-1} \quad \frac{228 \times 2}{6} \quad 2 \neq \frac{283 \times 2}{6} = 246 \text{ " } \end{array}$$

Antes de permitir girar los nudos teníamos fuerzas tangenciales de 837 Kgs., 668 Kgs. y 325 Kgs. en los niveles 3, 2 y 1 respectivamente (hoja 38).

Así es de que al girar los nudos tenemos movimientos originados por la diferencia de estas fuerzas:

$$\begin{array}{l} F_3 = 837 - 601 = 236 \text{ Kgs.} \\ F_2 = 668 - 492 = 176 \text{ " } \\ F_1 = 325 - 246 = 79 \text{ " } \end{array}$$

	①			②		N-3		
Barra	1-1	1-4	1-2	2-1	2-5	2-2	2-3	
r/εr	.272	.148	.580	.367	.094	.172	.367	③
M _i	✓837	0	0	0	0	✓837	0	
e	-228	-124	-485	-307	-79	-144	-307	
t	-114	✓74	-153	-242	✓51	-72	-242	
e	✓53	✓28	✓112	✓185	✓48	✓87	✓185	
t	✓26	✓2	✓92	✓56	-17	✓43	✓56	
e	-33	-18	-69	-51	-13	-23	-51	
t	-16	✓2	-25	-34	-3	-11	-34	
e	✓11	✓6	✓22	✓30	✓8	✓14	✓30	
t	✓5	✓3	✓15	✓11	0	✓7	✓11	
e	-6	-4	-13	-11	-2	-5	-11	
t	-3	-1	-5	-6	-1	-2	-6	
e	✓3	✓1	✓5	✓6	✓1	✓2	✓6	
Suma	✓535	-31	-504	-363	-7	✓733	-363	③

	④		⑤		N-2					
Barra	4-4	4-7	4-1	4-5	5-4	5-2	5-5	5-8	5-6	
r/εr	.205	.247	.111	.437	.304	.077	.142	.173	.304	⑥
M _i	✓668	0	0	0	0	0	✓668	0	0	
e	-137	-165	-74	-292	-203	-51	-95	-116	-203	
t	-68	✓59	✓124	-101	-146	✓79	-47	✓45	-146	
e	-3	-3	-2	-6	✓65	✓17	✓31	✓37	✓65	
t	-1	✓19	-28	✓32	-3	-48	✓15	-1	-3	
e	-5	-5	-2	-10	✓12	✓3	✓6	✓7	✓12	
t	-2	-1	✓18	✓6	-5	✓13	✓3	-9	-5	
e	-4	-5	-3	-9	✓1	0	0	✓1	✓1	
t	-2	✓2	-6	0	-4	-8	0	0	-4	
e	✓1	✓1	✓1	✓3	✓5	✓1	✓2	✓3	✓5	
t	0	✓1	✓4	✓2	✓1	✓2	✓1	-1	✓1	
e	-1	-2	-1	-3	-1	0	-1	-1	-1	
Suma	✓446	-99	✓31	-378	-278	✓8	✓583	-35	-278	⑥

	⑦		⑧		N-1					
Barra	7-7	7-4	7-10	7-8	8-7	8-11	8-8	8-5	8-9	
r/εr	.149	.181	.352	.318	.241	.268	.113	.137	.241	⑨
M _i	✓325	0	0	0	0	0	✓325	0	0	
e	-48	-59	-115	-103	-78	-87	-37	-45	-78	
t	-24	✓165	0	-39	-51	0	-18	✓116	-51	
e	-15	-19	-36	-32	✓1	✓1	0	✓1	✓1	
t	-7	✓3	0	0	-16	0	0	-37	-16	
e	✓1	✓1	✓1	✓1	✓17	✓18	✓8	✓9	✓17	
t	0	✓5	0	✓8	0	0	✓4	-7	0	
e	-2	-2	-5	-4	✓1	✓1	0	0	✓1	
t	-1	✓5	0	0	-2	0	0	-1	-2	
e	-1	-1	-1	-1	✓1	✓1	✓1	✓1	✓1	
t	0	-1	0	0	0	0	0	-3	0	
e	0	0	✓1	0	✓1	✓1	0	0	✓1	
Suma	✓228	✓97	-155	-170	-126	-65	✓283	✓34	-126	⑨

Estas fuerzas son positivas para el marco II, y para el marco I negativas.

3a. Etapa.

Aplicamos estas diferencias de fuerzas a los marcos I y II y para considerar la rigidez de las barras paralelas a YY establecemos nuevamente ecuaciones que ligen las deformaciones de estas barras con las de los marcos. Estas ecuaciones las tenemos ya establecidas en la hoja 17.

$$2(0.236 - 4.725 D_3)0.26853 \neq 2(0.176 - 4.725 D_2)0.10340 \neq 2(0.079 - 4.725 D_1)0.03003 = D_3 \text{ ----- } 1$$

$$2(0.236 - 4.725 D_3)0.10120 \neq 2(0.176 - 4.725 D_2)0.09388 \neq 2(0.079 - 4.725 D_1)0.03408 = D_2 \text{ ----- } 2$$

$$2(0.236 - 4.725 D_3)0.03333 \neq 2(0.176 - 4.725 D_2)0.03307 \neq 2(0.079 - 4.725 D_1)0.02664 = D_1 \text{ ----- } 3$$

Este sistema de 3 ecuaciones queda resuelto con los siguientes valores para las deformaciones:

$$D_1 = 0.00949 \text{ cms.}$$

$$D_2 = 0.02485 \text{ "}$$

$$D_3 = 0.03790 \text{ "}$$

Las fuerzas tangenciales que aparecen en las barras paralelas a YY valen:

$$D_3 \times \frac{12 E I}{L^3} = 0.03790 \times 4.725 = 0.179 \text{ Tons.}$$

$$D_2 \times \frac{12 E I}{L^3} = 0.02485 \times 4.725 = 0.117 \text{ Tons.}$$

$$D_1 \times \frac{12 E I}{L^3} = 0.00949 \times 4.725 = 0.045 \text{ "}$$

Fuerzas en cada nivel de los marcos:

$$F_3^{II} = -F_3^I = 0.236 - 0.179 = 0.057 \text{ Tons.}$$

$$F_2^{II} = -F_2^I = 0.176 - 0.117 = 0.059 \text{ "}$$

$$F_1^{II} = -F_1^I = 0.079 - 0.045 = 0.034 \text{ "}$$

4a. Etapa.

Momentos que nos aparecen en las barras paralelas al eje YY por los movimientos de la 3a. etapa:

$$\text{Barras del N-3: } M = 4725 \times 0.03790 = 179 \text{ Kg.m.}$$

$$\text{" " N-2: } M = 4725 \times 0.02485 = 117 \text{ " "}$$

$$\text{" " N-1: } M = 4725 \times 0.00949 = 45 \text{ " "}$$

Vamos a permitir nuevamente el giro de los nudos en planta equilibrando toda la estructura. La distribución de momentos la encontramos en la siguiente hoja.

Ahora la suma de las fuerzas tangenciales por cada nivel de las barras paralelas al eje YY valen:

$$\text{En el N-3} \quad \frac{116 \times 2}{6} \quad 2 \neq \quad \frac{156 \times 2}{6} = 129 \text{ Kgs.}$$

$$\text{En el N-2} \quad \frac{79 \times 2}{6} \quad 2 \neq \quad \frac{101 \times 2}{6} = 86 \text{ "}$$

$$\text{En el N-1} \quad \frac{31 \times 2}{6} \quad 2 \neq \quad \frac{39 \times 2}{6} = 34 \text{ "}$$

	①		②		M-3		③	
Barra	1-1	1-4	1-2	2-1	2-5	2-2	2-3	
r/Er	.272	.148	.580	.367	.094	.172	.367	
M _i	✓179	0	0	0	0	✓179	0	
e	- 49	- 26	-104	- 66	- 17	- 30	- 66	
t	- 24	✓13	- 33	- 52	✓9	- 15	- 52	
e	✓12	✓7	✓25	✓40	✓11	✓19	✓40	
t	✓6	0	✓20	✓12	- 2	✓9	✓12	
e	- 7	- 4	- 15	- 11	- 3	- 6	- 11	
t	- 3	0	- 5	- 7	- 1	- 3	- 7	
e	✓2	✓1	✓5	✓7	✓1	✓3	✓7	
Suma	✓116	- 9	-107	- 77	- 2	✓156	- 77	

	④		⑤		M-2			⑥	
Barra	4-4	4-7	4-1	4-5	5-4	5-2	5-5	5-8	5-6
r/Er	.205	.247	.111	.437	.304	.077	.142	.173	.304
M _i	✓117	0	0	0	0	0	✓117	0	0
e	- 24	- 29	- 13	- 51	- 36	- 9	- 16	- 20	- 36
t	- 12	✓8	✓26	- 18	- 25	✓17	- 8	✓6	- 25
e	- 1	- 1	0	- 2	✓11	✓2	✓5	✓6	✓11
t	0	✓4	- 7	✓5	- 1	- 11	✓2	✓1	- 1
e	0	- 1	0	- 1	✓3	✓1	✓1	✓2	✓3
t	0	0	✓4	✓1	0	✓3	0	- 2	0
e	- 1	- 1	- 1	- 2	0	0	0	- 1	0
Suma	✓79	- 20	✓9	- 68	- 48	✓3	✓101	- 8	- 48

	⑦		⑧		M-1			⑨	
Barra	7-7	7-4	7-10	7-8	8-7	8-11	8-8	8-5	8-9
r/Er	.149	.181	.352	.318	.241	.268	.113	.137	.241
M _i	✓45	0	0	0	0	0	✓45	0	0
e	- 7	- 8	- 16	- 14	- 11	- 12	- 5	- 6	- 11
t	- 3	✓29	0	- 5	- 7	0	- 2	✓20	- 7
e	- 3	- 4	- 7	- 7	- 1	- 1	0	- 1	- 1
t	- 1	✓1	0	0	- 3	0	0	- 6	- 3
e	0	0	0	0	✓3	✓3	✓1	✓2	✓3
t	0	✓1	0	✓1	0	0	0	- 2	0
e	0	0	- 1	- 1	✓1	0	0	0	✓1
Suma	✓31	✓19	- 24	- 26	- 18	- 10	✓39	✓7	- 18

Tenemos que corregir por la diferencia de las fuerzas tangenciales que había antes de permitir girar los nudos y las que acabamos de encontrar.

$$F_3 = 179 - 129 = 50 \text{ Kgs.}$$

$$F_2 = 117 - 86 = 31 \text{ "}$$

$$F_1 = 45 - 34 = 11 \text{ "}$$

Fuerzas que tenemos que aplicar con el siguiente signo: positivas para el marco II y negativas para el marco I. Por lo pequeño de estas fuerzas no vamos a hacer más aproximaciones por el momento.

Resumen de las 4 etapas anteriores.

Fuerzas que hay que aplicar a los marcos para poderlos resolver como aislados (1a. etapa más 3a. etapa)

$$F_3^{II} = 4.220 \text{ Tons.}$$

$$F_2^{II} = 4.391 \text{ "}$$

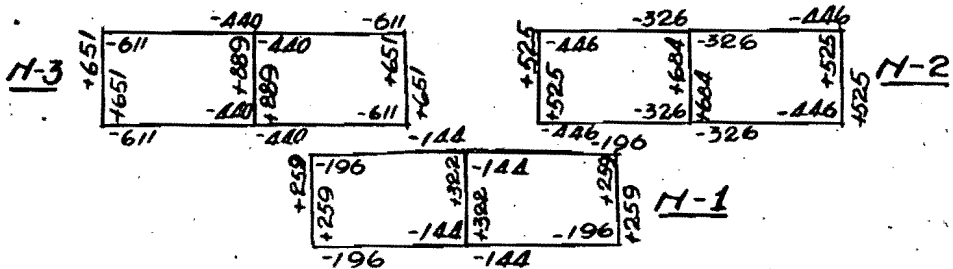
$$F_1^{II} = 4.709 \text{ "}$$

$$F_3^I = 3.780 \text{ "}$$

$$F_2^I = 3.609 \text{ "}$$

$$F_1^I = 3.291 \text{ "}$$

Momentos de las barras en planta y de torsión en columnas (2a. etapa + 4a. etapa):



Barras 1-4 y 3-6:	$M_t = - 40$	Kg.m.
" 2-5:	$M_t = - 9$	" "
" 4-7 y 6-9:	$M_t = - 119$	" "
" 5-8:	$M_t = - 43$	" "
" 7-10 y 9-12:	$M_t = - 179$	" "
" 8-11:	$M_t = - 75$	" "

A continuación vamos a estudiar los movimientos que se producen en la dirección del eje YY.

RESOLUCION DE LOS MARCOS PARALELOS AL PLANO YZ CON CARGAS UNITARIAS APLICADAS POR SEPARADO A CADA NIVEL

Rigidez angular de las piezas.-

Trabes paralelas a YY

$$I_x = 30 \times 60^3 / 12 = 540\ 000 \text{ cm}^4$$

$$r_x = \frac{4 \times 540\ 000}{600} E = 3600 E \text{ Kg.cm.}$$

Las rigideces de las columnas ya las tenemos obtenidas en la hoja 23.

Rigideces relativas.-

Nudos 1

$$\text{Suma de } r = 3600 + 2280 = 5880$$

$$\begin{array}{l} \text{Barra 1-1: } 3600/5880 = 0.612 \\ \text{" 1-4: } 2280/5880 = 0.388 \end{array}$$

Nudos 4

$$\text{Suma de } r = 3600 + 2280 + 4420 = 10300$$

$$\begin{array}{l} \text{Barra 4-1: } 2280/10300 = 0.221 \\ \text{" 4-4: } 3600/10300 = 0.350 \\ \text{" 4-7: } 4420/10300 = 0.429 \end{array}$$

Nudos 7

$$\text{Suma de r} = 3600 \neq 4420 \neq 9920 = 17940$$

$$\begin{array}{l} \text{Barra } 7-4: \quad 4420/17940 = 0.246 \\ \text{" } 7-7: \quad 3600/17940 = 0.201 \\ \text{" } 7-10: \quad 9920/17940 = 0.553 \end{array}$$

La distribución de los momentos debidos a desplazamientos en cada nivel está en la siguiente hoja. Suponemos desplazamientos tales que nos producen inicialmente en los extremos de las columnas momentos de - 1000 Kg.m.

Fuerzas cortantes en las columnas.-

$$H_3(2-3) = - (647 \neq 698)2/6 = - 448 \text{ Kgs.}$$

$$H_3(1-2) = (303 \neq 125)2/6 = 143 \text{ "}$$

$$H_3(0-1) = - (82 \neq 40)2/6 = - 41 \text{ "}$$

$$H_2(2-3) = (60 \neq 165)2/6 = 75 \text{ "}$$

$$H_2(1-2) = - (574 \neq 647)2/6 = - 407 \text{ "}$$

$$H_2(0-1) = (419 \neq 209)2/6 = 209 \text{ "}$$

$$H_1(2-3) = - (8 \neq 21)2/6 = - 10 \text{ "}$$

$$H_1(1-2) = (72 \neq 209)2/6 = 94 \text{ "}$$

$$H_1(0-1) = - (487 \neq 743)2/6 = - 410 \text{ "}$$

Ecuaciones de piso.-

$$- 448 a \neq 75 b - 10 c = A$$

$$143 a - 407 b \neq 94 c = B$$

$$- 41 a \neq 209 b - 410 c = C$$

Barra	Desalojamiento en el N-3		Desalojamiento en el N-2		Desalojamiento en el N-1	
	1-4	1-1	1-4	1-1	1-4	1-1
r/r	0.388	0.612	0.388	0.612	0.388	0.612
M _i	-1000	0	0	0	0	0
e	388	612	0	0	0	0
t	110	306	110	0	0	0
e	161	255	43	67	0	0
t	41	127	33	33	13	0
e	66	103	26	40	5	8
t	18	51	11	20	3	4
e	27	42	12	19	3	4
t	8	21	4	9	1	2
e	11	18	5	8	1	2
t	3	9	2	4	0	1
e	5	7	2	4	0	1
Suma	647	647	60	60	8	8

Barra	Desalojamiento en el N-2			Desalojamiento en el N-2			Desalojamiento en el N-1		
	4-1	4-4	4-7	4-1	4-4	4-7	4-1	4-4	4-7
r/r	0.221	0.350	0.429	0.221	0.350	0.429	0.221	0.350	0.429
M _i	-1000	0	0	0	0	-1000	0	0	0
e	221	350	429	221	350	429	0	0	0
t	194	178	0	0	175	123	0	0	123
e	82	129	158	66	104	128	27	43	53
t	80	64	26	18	52	38	0	21	12
e	37	60	73	23	37	46	7	12	14
t	32	30	12	13	18	11	2	6	4
e	16	26	32	9	15	18	3	4	5
t	13	13	5	6	7	1	1	2	1
e	7	11	13	4	6	1	1	1	2
t	8	5	2	2	3	1	0	0	0
e	3	4	8	1	2	3	0	0	0
Suma	698	395	303	165	409	574	21	51	72

Barra	Desalojamiento en el N-1			Desalojamiento en el N-1			Desalojamiento en el N-1		
	7-10	7-7	7-4	7-10	7-7	7-4	7-10	7-7	7-4
r/r	0.553	0.201	0.246	0.553	0.201	0.246	0.553	0.201	0.246
M _i	0	0	0	0	0	-1000	-1000	0	0
e	0	0	0	553	201	246	553	201	246
t	0	0	214	0	100	214	0	100	0
e	118	43	53	174	63	77	55	20	25
t	0	21	79	0	31	64	0	10	26
e	55	20	25	53	19	23	20	7	9
t	0	10	36	0	9	23	0	3	7
e	26	9	11	18	6	8	6	2	2
t	0	4	16	0	3	9	0	1	2
e	11	2	6	7	2	3	2	0	1
t	0	2	2	0	1	3	0	0	1
e	4	2	2	2	1	1	1	0	0
Suma	82	43	125	419	228	647	487	278	209

Barra	Desalojamiento en el N-0			Desalojamiento en el N-0			Desalojamiento en el N-0		
	10-7	10-7	10-7	10-7	10-7	10-7	10-7	10-7	10-7
r/r	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M _i	0	0	0	0	0	-1000	-1000	0	0
e	0	0	0	0	0	0	276	0	0
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	59	0	0	0	87	0	0	27	0
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	27	0	0	0	26	0	0	10	0
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	13	0	0	0	9	0	0	3	0
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	5	0	0	0	3	0	0	1	0
Suma	40	0	0	209	0	0	743	0	0

Al resolver este sistema de ecuaciones obtenemos los siguientes resultados:

$$a = \frac{75 \cdot b - 10 \cdot c - A}{448}$$

$$b = \frac{90.81 \cdot c - B - 0.3192 \cdot A}{383.06}$$

$$c = \frac{-0.077 \cdot A - 0.528 \cdot B - C}{361.66}$$

1) Coeficientes que resultan para una carga de - 1000 Kgs. aplicada en el N-3.

$$A = B = C = - 1000$$

$$c_3 = 4.438$$

$$b_3 = 4.495$$

$$a_3 = 2.886$$

2) Coeficientes para carga de - 1000 Kgs. en el N-2.

$$A = 0; \quad B = C = - 1000$$

$$c_2 = 4.225$$

$$b_2 = 3.613$$

$$a_2 = 0.511$$

3) Coeficientes para carga de - 1000 Kgs. en el N-1.

$$A = B = 0; \quad C = - 1000$$

$$c_1 = 2.765$$

$$b_1 = 0.655$$

$$a_1 = 0.049$$

Momentos finales.-

Multiplicando los momentos obtenidos en la hoja 49 por el coeficiente correspondiente y sumando

los 3 momentos así obtenidos, en cada caso obtenemos los momentos que se presentan aplicando fuerzas de - - 1000 Kgs. paralelas al eje YY en cada nivel por se parado.

	Carga en el N-3	Carga en el N-2	Carga en el N-1
1-1	$M = \neq 1633$	$M = \neq 148$	$M = \neq 15$
1-4	$M = - 1633$	$M = - 148$	$M = - 15$
4-1	$M = - 1365$	$M = \neq 150$	$M = \neq 16$
4-4	$M = \neq 2752$	$M = \neq 1465$	$M = \neq 146$
4-7	$M = - 1387$	$M = - 1615$	$M = - 162$
7-4	$M = - 1620$	$M = - 1391$	$M = \neq 161$
7-7	$M = \neq 2135$	$M = \neq 1977$	$M = \neq 916$
7-10	$M = - 515$	$M = - 586$	$M = - 1077$
10-7	$M = - 2473$	$M = - 2404$	$M = - 1919$

Nota.- Los momentos están dados en kilogramos-metro.

Deformaciones provocadas por las cargas unitarias.-

Carga en el N-3:

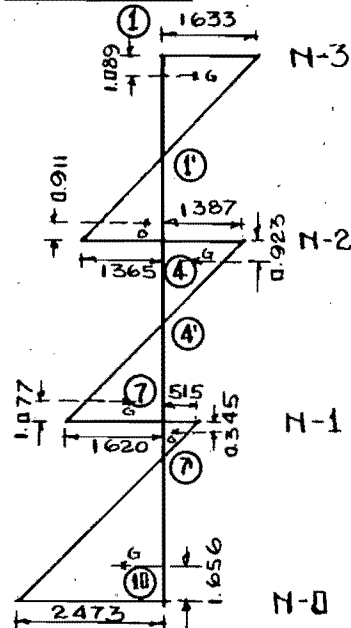
Distancias a los puntos de inflexión

$$\begin{aligned}
 1-1' &= 6.00 \times 1633 / 2998 = 3.268 \text{ m.} \\
 1'-4 &= 6.00 - 3.268 = 2.732 \text{ " " " } \\
 4-4' &= 6.00 \times 1387 / 3007 = 2.768 \text{ " " " } \\
 4'-7 &= 6.00 - 2.768 = 3.232 \text{ " " " } \\
 7-7' &= 6.00 \times 515 / 2988 = 1.034 \text{ " " " } \\
 7'-10 &= 6.00 - 1.034 = 4.966 \text{ " " " }
 \end{aligned}$$

Áreas de los triángulos en Kg.m²

$$\begin{aligned}
 1-1' &= 3.268 \times 1633 / 2 = 2668 \\
 1'-4 &= 2.732 \times 1365 / 2 = 1865 \\
 4-4' &= 2.768 \times 1387 / 2 = 1920 \\
 4'-7 &= 3.232 \times 1620 / 2 = 2618 \\
 7-7' &= 1.034 \times 515 / 2 = 266 \\
 7'-10 &= 4.966 \times 2473 / 2 = 6140
 \end{aligned}$$

Diagrama de momentos flexionantes



$$K_{1-3} = \frac{6140 \times 4.345 - 266 \times 0.345}{E I_{7-10}} = 0.07519 \text{ cm.}$$

$$K_{2-3} = \frac{6140 \times 10.345 - 266 \times 6.345}{E I_{7-10}} \neq$$

$$\frac{2618 \times 4.923 - 1920 \times 0.923}{E I_{4-7}} = 0.20983 \text{ cm.}$$

$$K_{3-3} = \frac{6140 \times 16.345 - 266 \times 12.345}{E I_{7-10}} \neq$$

$$\frac{2618 \times 10.923 - 1920 \times 6.923}{E I_{4-7}} \neq$$

$$\frac{1865 \times 5.089 - 2668 \times 1.089}{E I_{1-4}} = 0.49828 \text{ cm.}$$

Carga en el N-2:

Distancias a los puntos de inflexión

$$4-4' = 6.00 \times 1615 / 3006 = 3.224 \text{ m.}$$

$$4'-7 = 6.00 - 3.224 = 2.776 \text{ "}$$

$$7-7' = 6.00 \times 586 / 2990 = 1.176 \text{ "}$$

$$7'-10 = 6.00 - 1.176 = 4.824 \text{ "}$$

Areas del diagrama en Kg.m.²

$$1-4 = 150 \times 6 = 900$$

$$4-4' = 3.224 \times 1615 / 2 = 2603$$

$$4'-7 = 2.776 \times 1391 / 2 = 1931$$

$$7-7' = 1.176 \times 586 / 2 = 346$$

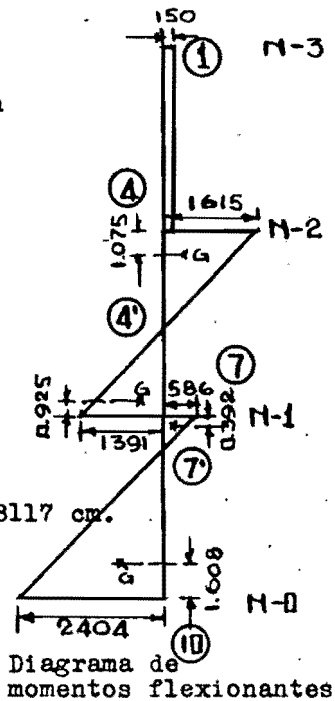
$$7'-10 = 4.824 \times 2404 / 2 = 5798$$

$$K_{1-2} = \frac{5798 \times 4.392 - 345 \times 0.392}{E I_{7-10}} = 0.08117 \text{ cm.}$$

$$K_{2-2} = \frac{5798 \times 10.392 - 345 \times 6.392}{E I_{7-10}} \neq$$

$$\frac{1931 \times 5.075 - 2603 \times 1.075}{E I_{4-7}}$$

$$K_{2-2} = 0.22971 \text{ cm.}$$



$$K_{3-2} = \frac{5798 \times 16.392 - 345 \times 12.392}{E I_{7-10}} - \frac{1931 \times 11.075 - 2603 \times 7.075}{E I_{4-7}} - \frac{900 \times 3.000}{E I_{1-4}}$$

$$K_{3-2} = 0.27181 \text{ cm.}$$

Carga en el N-1:

Distancias a los puntos de inflexión

$$7-7' = 6.00 \times 1077/2996 = 2.157 \text{ m.}$$

$$7'-10 = 6.00 - 2.157 = 3.843 \text{ "}$$

Areas del diagrama en Kg.m²

$$1-4 = 6.00 \times 15 = 90$$

$$4-7 = 6.00 \times 162 = 972$$

$$7-7' = 2.157 \times 1077/2 = 1162$$

$$7'-10 = 3.843 \times 1919/2 = 3687$$

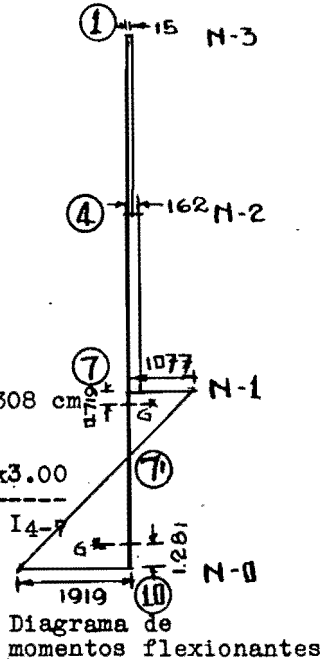
$$K_{1-1} = \frac{3687 \times 4.719 - 1162 \times 0.719}{E I_{7-10}} = 0.05308 \text{ cm}^2$$

$$K_{2-1} = \frac{3687 \times 10.719 - 1162 \times 6.719 - 972 \times 3.00}{E I_{7-10}} - \frac{972 \times 3.00}{E I_{4-7}}$$

$$K_{2-1} = 0.08343 \text{ cm.}$$

$$K_{3-1} = \frac{3687 \times 16.719 - 1162 \times 12.719}{E I_{7-10}} -$$

$$\frac{972 \times 9.00}{E I_{4-7}} - \frac{90 \times 3.00}{E I_{1-4}} = 0.09182 \text{ cm.}$$



5a. Etapa.

Si hacemos un corte en la estructura con un plano vertical paralelo a YZ encontramos las fuerzas tangenciales en planta de las barras paralelas al eje XX, sumando estas fuerzas de las 2 barras en cada nivel encontramos la fuerza horizontal que actúa por piso según la dirección YY.

$$F_3 = \frac{611 \neq 440}{10} \cdot 2 = 210 \text{ Kgs.}$$

$$F_2 = \frac{446 \neq 326}{10} \cdot 2 = 154 \text{ "}$$

$$F_1 = \frac{196 \neq 144}{10} \cdot 2 = 68 \text{ "}$$

Por la simetría de la estructura vemos que las mismas fuerzas están aplicadas a los marcos III y V, pero con signos contrarios. Por la misma razón el marco IV no tendrá movimientos según la dirección YY.

Vamos a establecer las ecuaciones que nos ligan las deformaciones de los marcos con las barras paralelas a XX.

$$\frac{12 EI}{L^3} = \frac{12 \times 210000 \times 90 \times 40^3 \times 1/12}{1000^3} \cdot 2 = 2419 \text{ Kg./cm.} = 2.419 \text{ Ton./cm.}$$

$$(0.210 - 2.419 D_3)0.49828 \neq (0.154 - 2.419 D_2)0.27181 \neq (0.068 - 2.419 D_1)0.09182 = D_3 \text{ ----- 1}$$

$$(0.210 - 2.419 D_3)0.20983 \neq (0.154 - 2.419 D_2)0.22971 \neq (0.068 - 2.419 D_1)0.08343 = D_2 \text{ ----- 2}$$

$$(0.210 - 2.419 D_3)0.07519 \neq (0.154 - 2.419 D_2)0.08117 \neq (0.068 - 2.419 D_1)0.05308 = D_1 \text{ ----- 3}$$

Este sistema de 3 ecuaciones queda resuelto con los siguientes valores:

$$D_1 = 0.01301 \text{ cm.}$$

$$D_2 = 0.03419 \text{ "}$$

$$D_3 = 0.05775 \text{ cm.}$$

Debido a este nuevo movimiento aparecen -- fuerzas tangenciales en las barras paralelas al eje XX que valen:

$$D_3 \times 12EI/L^3 = 0.05775 \times 2.419 = 0.140 \text{ Ton.}$$

$$D_2 \times 12EI/L^3 = 0.03419 \times 2.419 = 0.083 \text{ "}$$

$$D_1 \times 12EI/L^3 = 0.01301 \times 2.419 = 0.031 \text{ "}$$

Fuerzas aplicadas a los marcos en cada nivel:

$$F_3^V = - F_3^{III} = 0.210 - 0.140 = 0.070 \text{ Ton.}$$

$$F_2^V = - F_2^{III} = 0.154 - 0.083 = 0.071 \text{ "}$$

$$F_1^V = - F_1^{III} = 0.068 - 0.031 = 0.037 \text{ "}$$

6a. Etapa.

Momentos que nos aparecen en las barras paralelas a XX por los movimientos de la 5a. etapa:

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \times 210000 \times 90 \times 40^3 \times 1/12}{1000^2} = 604 \ 800 \text{ Kgs.}$$

$$\text{Barras del N-3: } M = 6048 \times 0.05775 = 349 \text{ Kg.m.}$$

$$\text{" " N-2: } M = 6048 \times 0.03419 = 207 \text{ " "}$$

$$\text{" " N-1: } M = 6048 \times 0.01301 = 79 \text{ " "}$$

En la siguiente hoja tenemos la distribución de estos momentos.

Fuerzas tangenciales en cada nivel después de la distribución de momentos de las barras paralelas a XX:

	①		②		N-3			
Barra	1-1	1-4	1-2	2-1	2-5	2-2	2-3	③
r/Er	.272	.148	.580	.367	.094	.172	.367	
M ₁	0	0	349	349	0	0	349	
e	- 95	- 52	-202	-256	- 66	-120	-256	
t	- 47	23	-128	-101	32	- 60	-101	
e	41	23	88	84	22	40	84	
t	20	2	42	44	2	20	44	
e	-16	9	-35	-39	-10	-18	-39	
t	- 8	1	-19	-17	1	9	-17	
e	8	4	16	16	4	8	16	
t	4	1	8	8	1	4	8	
e	- 3	2	8	8	2	3	8	
Suma	- 96	- 15	111	80	- 22	-138	80	
	①			②			③	

	④		⑤		N-2					
Barra	4-4	4-7	4-1	4-5	5-4	5-2	5-5	5-8	5-8	⑥
r/Er	.205	.247	.111	.437	.304	.077	.142	.173	.304	
M ₁	0	0	0	207	207	0	0	0	207	
e	- 42	- 51	- 23	- 91	-126	- 32	- 59	- 71	-126	
t	- 21	14	52	- 63	- 45	66	- 29	22	- 45	
e	4	4	2	8	10	2	4	5	10	
t	2	5	23	5	2	4	2	5	4	
e	2	3	1	5	2	1	1	1	2	
t	1	2	9	1	2	10	0	2	2	
e	- 2	2	- 1	- 4	- 4	- 1	- 1	- 2	- 4	
t	- 1	0	- 4	- 2	- 2	- 4	0	0	- 2	
e	1	2	1	3	2	1	1	2	2	
Suma	- 56	- 27	14	69	50	21	- 81	- 40	50	
	④				⑤			⑥		

	⑦		⑧		N-1					
Barra	7-7	7-4	7-10	7-8	8-7	8-11	8-8	8-5	8-9	⑨
r/Er	.149	.181	.352	.318	.241	.268	.113	.137	.241	
M ₁	0	0	0	79	79	0	0	0	79	
e	- 12	- 14	- 28	- 25	- 38	- 42	- 18	- 22	- 38	
t	- 6	51	0	- 19	- 12	0	- 9	71	- 12	
e	- 4	- 5	9	- 8	- 9	- 10	- 5	- 5	- 9	
t	2	4	0	- 4	- 4	0	- 2	- 5	- 4	
e	1	2	4	3	4	4	1	2	4	
t	0	- 3	0	2	1	0	0	- 1	1	
e	0	0	1	0	0	- 1	0	0	0	
t	0	2	0	0	0	0	0	2	0	
e	0	0	1	- 1	- 1	0	0	0	- 1	
Suma	- 23	29	33	27	20	- 49	- 33	42	20	
	⑦				⑧			⑨		

$$\begin{array}{r} \text{En el N-3} \quad \frac{111 \neq 80}{10} \quad 2 = 38 \text{ Kgs.} \\ \\ \text{En el N-2} \quad \frac{69 \neq 50}{10} \quad 2 = 24 \quad " \\ \\ \text{En el N-1} \quad \frac{27 \neq 20}{10} \quad 2 = 10 \quad " \end{array}$$

Por lo tanto todavía tenemos que corregir - los marcos III y V con los siguientes valores:

$$F_3 = 140 - 38 = 102 \text{ Kgs.}$$

$$F_2 = 83 - 24 = 59 \quad "$$

$$F_1 = 31 - 10 = 21 \quad "$$

Estas fuerzas son negativas para el marco III, y positivas para el V. Vamos pues a hacer estas correcciones.

7a. Etapa.

Volvemos a establecer las ecuaciones de de formación para las nuevas fuerzas horizontales:

$$\begin{array}{l} (0.102 - 2.419 D_3)0.49828 \neq (0.059 - 2.419 D_2)0.27181 \neq \\ (0.021 - 2.419 D_1)0.09182 = D_3 \text{ ----- } 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (0.102 - 2.419 D_3)0.20983 \neq (0.059 - 2.419 D_2)0.22971 \neq \\ (0.021 - 2.419 D_1)0.08343 = D_2 \text{ ----- } 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (0.102 - 2.419 D_3)0.07519 \neq (0.059 - 2.419 D_2)0.08117 \neq \\ (0.021 - 2.419 D_1)0.05308 = D_1 \text{ ----- } 3 \end{array}$$

Los valores que nos resuelven estas ecuaciones son:

$$D_1 = 0.00529 \text{ cm.}$$

$$D_2 = 0.01428 \text{ "}$$

$$D_3 = 0.02640 \text{ "}$$

En las barras paralelas a XX aparecen fuerzas tangenciales que valen:

$$\text{En el N-3: } 2.419 \times 0.02640 = 0.064 \text{ Ton.}$$

$$\text{" " N-2: } 2.419 \times 0.01428 = 0.034 \text{ "}$$

$$\text{" " N-1: } 2.419 \times 0.00529 = 0.013 \text{ "}$$

Fuerzas aplicadas a los marcos en cada nivel:

$$F_3^V = - F_3^{III} = 0.102 - 0.064 = 0.038 \text{ Ton.}$$

$$F_2^V = - F_2^{III} = 0.059 - 0.034 = 0.025 \text{ "}$$

$$F_1^V = - F_1^{III} = 0.021 - 0.013 = 0.008 \text{ "}$$

8a. Etapa.

Momentos que aparecen en las barras paralelas al eje XX por los movimientos de la última etapa:

$$\text{Barras del N-3: } M = 6048 \times 0.02640 = 160 \text{ Kg.m.}$$

$$\text{" " N-2: } M = 6048 \times 0.01428 = 86 \text{ " "}$$

$$\text{" " N-1: } M = 6048 \times 0.00529 = 32 \text{ " "}$$

En la hoja siguiente tenemos la distribución de estos momentos en el conjunto de las 3 plantas que forman la estructura.

Suma de las fuerzas tangenciales que hay en las barras paralelas a XX en cada nivel después de la distribución de momentos:

	①			②			N-3		
Barra r/zr	1-1	1-4	1-2	2-1	2-5	2-2	2-3		③
M _i	.272	.148	.580	.367	.094	.172	.367		
e	0	0	✓160	✓160	0	0	✓160		
t	- 43	- 24	- 93	-118	- 30	- 54	-118		
e	- 21	✓ 9	- 59	- 46	✓13	- 27	- 46		
t	✓19	✓11	✓41	✓39	✓10	✓18	✓39		
e	✓ 9	- 1	✓19	✓20	- 1	✓ 9	✓20		
t	- 7	- 4	- 16	- 18	- 4	- 8	- 18		
e	- 3	- 1	- 9	- 8	- 1	- 4	- 8		
e	✓ 3	✓ 2	✓ 8	✓ 8	✓ 2	✓ 3	✓ 8		
Suma	- 43	- 8	✓51	✓37	- 11	- 63	✓37		

	④		⑤		N-2					
Barra r/zr	4-4	4-7	4-1	4-5	5-4	5-2	5-5	5-8	5-6	⑥
M _i	.205	.247	.111	.437	.304	.077	.142	.173	.304	
e	0	0	0	✓86	✓86	0	0	0	✓86	
t	- 18	- 21	- 9	- 38	- 52	- 13	- 25	- 30	- 52	
e	- 9	✓ 6	✓24	- 26	- 19	✓30	- 12	✓ 9	- 19	
t	✓ 1	✓ 1	✓ 1	✓ 2	✓ 3	✓ 1	✓ 2	✓ 2	✓ 3	
e	0	✓ 2	- 11	✓ 1	✓ 1	- 10	✓ 1	✓ 2	✓ 1	
t	✓ 2	✓ 2	✓ 1	✓ 3	✓ 1	✓ 1	✓ 1	✓ 1	✓ 1	
e	✓ 1	- 1	✓ 4	0	✓ 1	✓ 4	0	- 1	✓ 1	
t	- 1	- 1	0	- 2	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	
Suma	- 24	- 12	✓10	✓26	✓20	✓12	- 34	- 18	✓20	

	⑦		⑧		N-1					
Barra r/zr	7-7	7-4	7-10	7-8	8-7	8-11	8-8	8-5	8-9	⑨
M _i	.149	.181	.352	.318	.241	.268	.113	.137	.241	
e	0	0	0	✓32	✓32	0	0	0	✓32	
t	- 5	- 6	- 11	- 10	- 15	- 17	- 8	- 9	- 15	
e	- 2	✓21	- 0	- 7	- 5	0	- 4	✓30	- 5	
t	- 2	- 2	- 4	- 4	- 4	0	- 2	- 2	- 4	
e	- 1	- 1	0	- 2	- 2	0	- 1	- 2	- 2	
t	✓ 1	✓ 1	✓ 1	✓ 1	✓ 2	✓ 2	0	✓ 1	✓ 2	
e	0	- 2	0	✓ 1	0	0	0	- 1	0	
t	0	0	✓ 1	0	0	✓ 1	0	0	0	
Suma	- 9	✓11	- 13	✓11	✓ 8	- 18	- 15	✓17	✓ 8	

$$\text{En el N-3} \quad \frac{51 \neq 37}{10} \cdot 2 = 18 \text{ Kgs.}$$

$$\text{En el N-2} \quad \frac{26 \neq 20}{10} \cdot 2 = 9 \text{ "}$$

$$\text{En el N-1} \quad \frac{11 \neq 8}{10} \cdot 2 = 4 \text{ "}$$

Nos queda por corregir los marcos con los siguientes valores:

$$F_3 = 64 - 18 = 46 \text{ Kgs.}$$

$$F_2 = 34 - 9 = 25 \text{ "}$$

$$F_1 = 13 - 4 = 9 \text{ "}$$

Negativas para el marco III y positivas para el V.

Resumen de las 4 etapas anteriores.

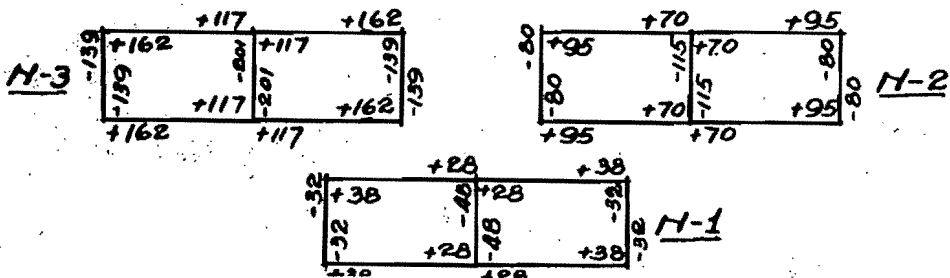
Fuerzas que hay que aplicar a los marcos para poderlos resolver como aislados (5a. etapa más 7a. etapa)

$$F_3^V = - F_3^{III} = 0.108 \text{ Ton.}$$

$$F_2^V = - F_2^{III} = 0.096 \text{ "}$$

$$F_1^V = - F_1^{III} = 0.045 \text{ "}$$

Momentos de las barras en planta y momentos de torsión en columnas (6a. etapa / 8a. etapa):



Columnas	1-4 y 3-6:	$M_t = - 23$	Kg.m.
"	2-5:	$M_t = - 33$	" "
"	4-7 y 6-9:	$M_t = - 39$	" "
"	5-8:	$M_t = - 58$	" "
"	7-10 y 9-12:	$M_t = - 46$	" "
"	8-11:	$M_t = - 67$	" "

9a. Etapa.

Al haber permitido los movimientos según - el eje YY nos aparecen fuerzas tangenciales en las - barras que siguen esta misma dirección, fuerzas tangenciales que valen en cada nivel:

$$\text{En el N-3} \quad \frac{139 \times 2}{6} \quad 2 \neq \frac{201 \times 2}{6} = 160 \text{ Kgs.}$$

$$\text{" " N-2} \quad \frac{80 \times 2}{6} \quad 2 \neq \frac{115 \times 2}{6} = 92 \text{ "}$$

$$\text{" " N-1} \quad \frac{32 \times 2}{6} \quad 2 \neq \frac{48 \times 2}{6} = 37 \text{ "}$$

Estas fuerzas las aplicamos a los marcos con los siguientes signos: negativas para el I y positivas para el II. Estas fuerzas sumadas a las que habíamos dejado sin corregir al final de la 4a. etapa (hoja - 46) nos dan correcciones aun necesarias con los siguientes valores:

$$F_3^{II} = - F_3^I = 210 \text{ Kgs.}$$

$$F_2^{II} = - F_2^I = 123 \text{ "}$$

$$F_1^{II} = - F_1^I = 48 \text{ "}$$

Establecemos las ecuaciones de deformación con estas fuerzas:

$$2(0.210 - 4.725D_3)0.20853 \neq 2(0.123 - 4.725D_2)0.10340 \neq \\ 2(0.048 - 4.725D_1)0.03003 = D_3 \text{ ----- } 1$$

$$2(0.210 - 4.725D_3)0.10120 \neq 2(0.123 - 4.725D_2)0.09388 \neq \\ 2(0.048 - 4.725D_1)0.03408 = D_2 \text{ ----- } 2$$

$$2(0.210 - 4.725D_3)0.03333 \neq 2(0.123 - 4.725D_2)0.03307 \neq \\ 2(0.048 - 4.725D_1)0.02664 = D_1 \text{ ----- } 3$$

Los valores que nos resuelven estas ecuaciones son:

$$D_1 = 0.00689 \text{ cms.}$$

$$D_2 = 0.01905 \text{ "}$$

$$D_3 = 0.03209 \text{ "}$$

En las barras paralelas a YY aparecen fuerzas tangenciales que valen:

$$\text{En el N-3} \quad 4.725 \times 0.03209 = 0.152 \text{ Ton.}$$

$$\text{" " N-2} \quad 4.725 \times 0.01905 = 0.090 \text{ "}$$

$$\text{" " N-1} \quad 4.725 \times 0.00689 = 0.032 \text{ "}$$

Fuerzas que aplicadas a los marcos nes originan las deformaciones encontradas:

$$F_3^{II} = - F_3^I = 0.210 - 0.152 = 0.058 \text{ Ton.}$$

$$F_2^{II} = - F_2^I = 0.123 - 0.090 = 0.033 \text{ "}$$

$$F_1^{II} = - F_1^I = 0.048 - 0.032 = 0.016 \text{ "}$$

10a. Etapa.

Momentos en las barras paralelas a YY:

$$\text{Barras del N-3:} \quad M = 4725 \times 0.03209 = 152 \text{ Kg.m.}$$

Barras del N-2: $M = 4725 \times 0.01905 = 90 \text{ Kg.m.}$

" " N-1: $M = 4725 \times 0.00689 = 32 \text{ " "}$

La distribución de estos momentos en planta la tenemos en la siguiente hoja.

Suma de las fuerzas tangenciales que hay en las barras paralelas a YY en cada nivel después de la distribución de momentos:

$$\text{En el N-3: } \frac{99 \times 2}{6} \text{ } \cancel{2} \text{ } \frac{133 \times 2}{6} = 110 \text{ Kgs.}$$

$$\text{" " N-2: } \frac{61 \times 2}{6} \text{ } \cancel{2} \text{ } \frac{78 \times 2}{6} = 67 \text{ "}$$

$$\text{" " N-1: } \frac{22 \times 2}{6} \text{ } \cancel{2} \text{ } \frac{27 \times 2}{6} = 24 \text{ "}$$

Por lo que nos queda aun por corregir los marcos I y II con los siguientes valores:

$$F_3^{II} = - F_3^I = 152 - 110 = 42 \text{ Kgs.}$$

$$F_2^{II} = - F_2^I = 90 - 67 = 23 \text{ "}$$

$$F_1^{II} = - F_1^I = 32 - 24 = 8 \text{ "}$$

Pero también nos aparecen fuerzas según la dirección YY. Fuerzas que valen:

$$\text{En el N-3: } \frac{95 \cancel{65}}{10} \text{ } \cancel{2} = 32 \text{ Kgs.}$$

$$\text{" " N-2: } \frac{54 \cancel{48}}{10} \text{ } \cancel{2} = 18 \text{ "}$$

$$\text{" " N-1: } \frac{18 \cancel{14}}{10} \text{ } \cancel{2} = 6 \text{ "}$$

Estas fuerzas sumadas con la corrección -

	①			②			N-3		
Barra	1-1	1-4	1-2	2-1	2-5	2-2	2-3		③
r/zr	.272	.148	.580	.367	.094	.172	.367		
M ₁	✓152	0	0	0	0	✓152	0		
e	- 41	- 23	- 88	- 56	- 14	- 26	- 56		
t	- 20	✓10	- 28	- 44	✓7	- 13	- 44		
e	✓10	✓6	✓22	✓35	✓8	✓16	✓35		
t	✓5	✓1	✓17	✓11	- 3	✓8	✓11		
e	- 6	- 3	- 14	- 10	- 2	- 5	- 10		
t	- 3	0	- 5	- 7	- 1	- 2	- 7		
e	✓2	✓1	✓5	✓6	✓2	✓3	✓6		
Suma	✓99	- 8	- 91	- 65	- 3	✓133	- 65		
	①			②				③	

	④		⑤		N-2					
Barra	4-4	4-7	4-1	4-5	5-4	5-2	5-5	5-8	5-6	⑥
r/zr	.205	.247	.111	.437	.304	.077	.142	.173	.304	
M ₁	✓90	0	0	0	0	0	✓90	0	0	
e	- 18	- 22	- 10	- 40	- 27	- 7	- 13	- 16	- 27	
t	- 9	✓6	✓23	- 13	- 20	✓14	- 6	✓4	- 20	
e	- 1	- 2	- 1	3	✓8	✓3	✓4	✓5	✓8	
t	0	✓3	- 6	✓4	- 1	- 8	✓2	✓1	- 1	
e	0	0	0	1	✓2	✓1	✓1	✓1	✓2	
t	0	0	✓3	✓1	0	✓2	0	- 1	0	
e	- 1	- 1	0	- 2	0	0	0	- 1	0	
Suma	✓61	- 16	✓9	- 54	- 38	✓5	✓78	- 7	- 38	
	④				⑤					⑥

	⑦		⑧		N-1					
Barra	7-7	7-4	7-10	7-8	8-7	8-11	8-8	8-5	8-9	⑨
r/zr	.149	.181	.352	.318	.241	.268	.113	.137	.241	
M ₁	✓32	0	0	0	0	0	✓32	0	0	
e	- 5	- 6	- 11	- 10	- 8	- 8	- 4	- 4	- 8	
t	- 2	✓22	0	- 4	- 5	0	- 2	✓16	- 5	
e	- 2	- 3	- 6	- 5	- 1	- 1	0	- 1	- 1	
t	- 1	✓2	0	0	✓2	0	0	- 5	- 2	
e	0	0	- 1	0	✓2	✓3	✓1	✓1	✓2	
t	0	0	0	✓1	0	0	0	- 1	0	
e	0	0	- 1	0	0	✓1	0	0	0	
Suma	✓22	✓15	- 19	- 18	- 14	- 5	✓27	✓6	- 14	
	⑦				⑧					⑨

que teníamos pendiente en la hoja 60 nos dan los valores con que aun nos resta por corregir los marcos III y V:

$$\begin{aligned} F_3^V &= - F_3^{III} = 46 / 32 = 78 \text{ Kgs.} \\ F_2^V &= - F_2^{III} = 25 / 18 = 43 \text{ " } \\ F_1^V &= - F_1^{III} = 9 / 6 = 15 \text{ " } \end{aligned}$$

Estas fuerzas las podemos despreciar por lo pequeño de su valor.

Resumen de los efectos obtenidos en las 10 etapas anteriores.

Fuerzas que hay que aplicar a los marcos para poderlos resolver como aislados:-

Sumando 1a., 3a. y 9a. etapas:

$$\begin{aligned} F_3^{II} &= 4.278 \text{ Ton.} \\ F_2^{II} &= 4.424 \text{ " } \\ F_1^{II} &= 4.725 \text{ " } \\ F_3^I &= 3.722 \text{ " } \\ F_2^I &= 3.576 \text{ " } \\ F_1^I &= 3.275 \text{ " } \end{aligned}$$

Sumando 5a. y 7a. etapas:

$$\begin{aligned} F_3^V &= - F_3^{III} = 0.108 \text{ Ton.} \\ F_2^V &= - F_2^{III} = 0.096 \text{ " } \\ F_1^V &= - F_1^{III} = 0.045 \text{ " } \end{aligned}$$

Momentos de torsión en las columnas:-

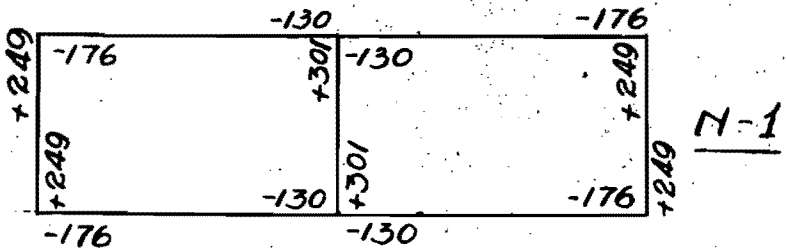
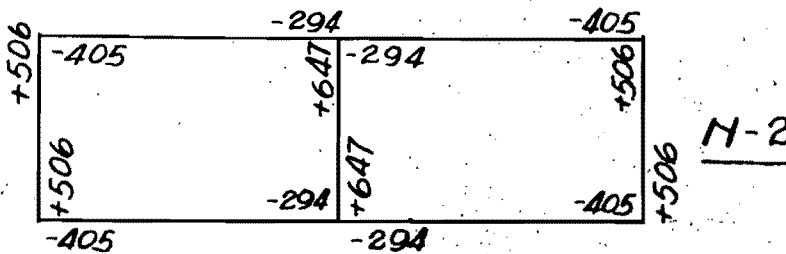
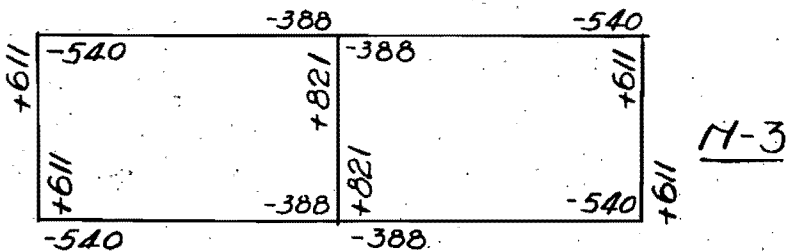
Sumando 2a., 4a., 6a., 8a. y 10a. etapas:

$$1-4 = 3-6 = - 71 \text{ Kg.m.}$$

$$\begin{aligned}
 2-5 &= && - 45 \text{ Kg.m.} \\
 4-7 &= 6-9 &= - 174 \text{ " " } \\
 5-8 &= && - 108 \text{ " " } \\
 7-10 &= 9-12 &= - 244 \text{ " " } \\
 8-11 &= && - 147 \text{ " " }
 \end{aligned}$$

Momentos de barra sobre nudo en planta:-

Sumando 2a., 4a., 6a., 8a. y 10a. etapas:

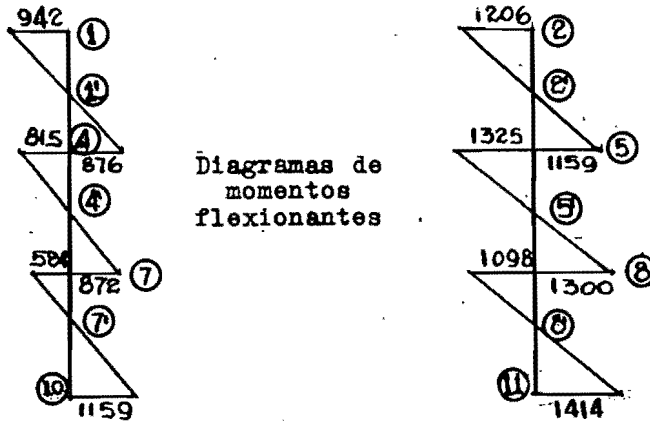


11a. Etapa.

Vamos a encontrar los efectos que nos produce en la estructura la rigidez torsional de las barras paralelas al eje YY.

Giros de los nudos provocados por la aplicación de cargas unitarias en la dirección XX.-

Carga de 1000 Kgs. aplicada en el N-3:



Areas de los triángulos en Kg.m ²	
1-1'	$= -6.00 \frac{942 \quad 942}{2} = -1464$
1'-4	$= 6.00 \frac{942 \quad 876}{2} = 1266$
4-4'	$= -6.00 \frac{815 \quad 815}{2} = -1181$
4'-7	$= 6.00 \frac{815 \quad 872}{2} = 1352$
7-7'	$= -6.00 \frac{584 \quad 584}{2} = -587$
7'-10	$= 6.00 \frac{584 \quad 1159}{2} = 2312$

2'-2'	= -6.00	$\frac{1206}{1206 \cancel{+} 1159}$	$\frac{1206}{2}$	= - 1845
		1159	1159	
2'-5'	= 6.00	$\frac{1206 \cancel{+} 1159}{1325}$	$\frac{2}{1325}$	= 1704
		1300	1300	
5'-5'	= -6.00	$\frac{1325 \cancel{+} 1300}{1300}$	$\frac{2}{1300}$	= - 2006
		1098	1098	
5'-8'	= 6.00	$\frac{1325 \cancel{+} 1300}{1098}$	$\frac{2}{1098}$	= 1932
		1414	1414	
8'-8'	= -6.00	$\frac{1098 \cancel{+} 1414}{1414}$	$\frac{2}{1414}$	= - 1440
		1414	1414	
8'-11'	= 6.00	$\frac{1098 \cancel{+} 1414}{1098 \cancel{+} 1414}$	$\frac{2}{2}$	= 2387

$$\theta_7 = (2312 - 587)/EI_{7-10} = 0.000055$$

$$\theta_4 = \theta_7 \cancel{+} (1352 - 1181)/EI_{4-7} = 0.000066$$

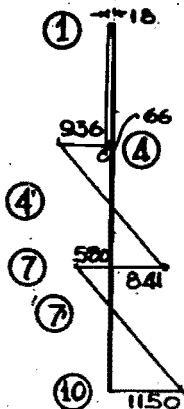
$$\theta_1 = \theta_4 \cancel{+} (1266 - 1464)/EI_{1-4} = 0.000038$$

$$\theta_8 = (2387 - 1440)/EI_{8-11} = 0.000030$$

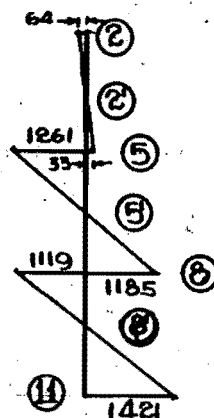
$$\theta_5 = \theta_8 \cancel{+} (1932 - 2006)/EI_{5-8} = 0.000026$$

$$\theta_2 = \theta_5 \cancel{+} (1704 - 1845)/EI_{2-5} = 0.000006$$

Carga de 1000 Kgs. aplicada en el N-2:



Diagramas de momentos flexionantes



Areas de los diagramas de momentos en Kg.m²

$$1-4 = - (18 \cancel{.66}) \frac{6.00}{2} = - 252$$

$$4-4' = -6.00 \frac{936}{936 \cancel{.841}} \frac{936}{2} = - 1479$$

$$4'-7 = 6.00 \frac{841}{936 \cancel{.841}} \frac{841}{2} = 1194$$

$$7-7' = -6.00 \frac{580}{580 \cancel{.1150}} \frac{580}{2} = - 583$$

$$7'-10 = 6.00 \frac{1150}{580 \cancel{.1150}} \frac{1150}{2} = 2293$$

$$2-2' = - 6.00 \frac{64}{64 \cancel{.33}} \frac{64}{2} = - 127$$

$$2'-5 = 6.00 \frac{33}{64 \cancel{.33}} \frac{33}{2} = 34$$

$$5-5' = - 6.00 \frac{1261}{1261 \cancel{.1185}} \frac{1261}{2} = - 1950$$

$$5'-8 = 6.00 \frac{1185}{1261 \cancel{.1185}} \frac{1185}{2} = 1722$$

$$8-8' = - 6.00 \frac{1119}{1119 \cancel{.1421}} \frac{1119}{2} = - 1479$$

$$8'-11 = 6.00 \frac{1421}{1119 \cancel{.1421}} \frac{1421}{2} = 2385$$

$$\theta_7 = (2293 - 583)/EI_{7-10} = 0.000055$$

$$\theta_4 = \theta_7 \cancel{.} (1194 - 1479)/EI_{4-7} = 0.000037$$

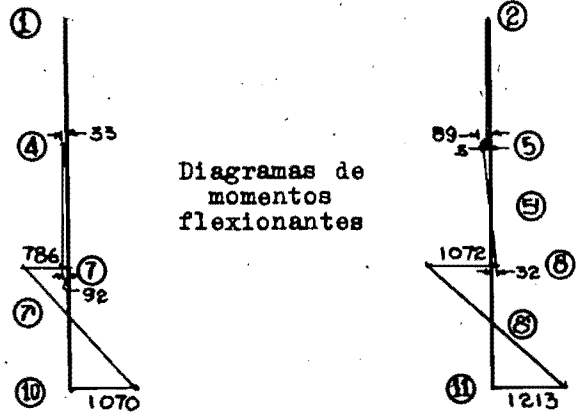
$$\theta_1 = \theta_4 \cancel{.} (- 252)/EI_{1-4} = 0.000002$$

$$\theta_8 = (2385 - 1479)/EI_{8-11} = 0.000029$$

$$\theta_5 = \theta_8 \cancel{.} (1722 - 1950)/EI_{5-8} = 0.000015$$

$$\theta_2 = \theta_5 \cancel{.} (34 - 127)/EI_{2-5} = 0.000002$$

Carga de 1000 Kgs. aplicada en el N-1:



Areas del diagrama de momentos en Kg.m.²

$$4-7 = - 6.00 \frac{33 \times 92}{2} = - 375$$

$$7-7' = - 6.00 \frac{786}{786 \times 1070} \frac{786}{2} = - 999$$

$$7'-10 = 6.00 \frac{786 \times 1070}{786 \times 1070} \frac{1070}{2} = 1850$$

$$2-5 = - \frac{6.00 \times 5}{2} = - 15$$

$$5-5' = - 6.00 \frac{89}{89 \times 32} \frac{89}{2} = - 196$$

$$5'-8 = 6.00 \frac{32}{89 \times 32} \frac{32}{2} = 25$$

$$8-8' = - 6.00 \frac{1072}{1072 \times 1213} \frac{1072}{2} = - 1509$$

$$8'-11 = 6.00 \frac{1213}{1072 \times 1213} \frac{1213}{2} = 1932$$

$$\theta_7 = (1850 - 999)/EI_{7-10} = 0.000027$$

$$\theta_4 = \theta_7 \times (- 375)/EI_{4-7} = 0.000004 = \theta_1$$

$$\theta_8 = (1932 - 1509)/EI_{8-11} = 0.000013$$

$$\theta_5 = \theta_8 \times (25 - 196)/EI_{5-8} = 0.000003$$

$$\theta_2 = \theta_5 \times (- 15)/EI_{2-5} = 0.000001$$

Para encontrar la torsión de las barras — que ligan los marcos I y II necesitamos encontrar la diferencia de giros de los nudos en uno y otro marco.

La diferencia de las fuerzas aplicadas a los marcos vale:

$$\begin{aligned} N-3 & \text{ --- } 4.278 - 3.722 = 0.556 \text{ Ton.} \\ N-2 & \text{ --- } 4.424 - 3.576 = 0.848 \text{ " } \\ N-1 & \text{ --- } 4.725 - 3.275 = 1.450 \text{ " } \end{aligned}$$

Multiplicando estos valores por los obtenidos de giros para cargas de 1000 Kgs. encontramos el ángulo de torsión de las barras paralelas a YY.

$$\begin{aligned} \text{Barras 1-1 y 3-3: } & 0.556 \times 0.000038 = 0.000021 \\ & 0.848 \times 0.000002 = 0.000002 \\ & 1.450 \times 0.000004 = 0.000005 \\ & \underline{0.000028} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Barra 2-2: } & 0.556 \times 0.000006 = 0.000003 \\ & 0.848 \times 0.000002 = 0.000002 \\ & 1.450 \times 0.000001 = 0.000001 \\ & \underline{0.000006} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Barras 4-4 y 6-6: } & 0.556 \times 0.000066 = 0.000037 \\ & 0.848 \times 0.000037 = 0.000031 \\ & 1.450 \times 0.000004 = 0.000005 \\ & \underline{0.000073} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Barra 5-5: } & 0.556 \times 0.000026 = 0.000014 \\ & 0.848 \times 0.000015 = 0.000013 \\ & 1.450 \times 0.000003 = 0.000004 \\ & \underline{0.000031} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Barras 7-7 y 9-9: } & 0.556 \times 0.000055 = 0.000030 \\ & 0.848 \times 0.000055 = 0.000047 \\ & 1.450 \times 0.000027 = 0.000040 \\ & \underline{0.000117} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Barra 8-8: } & 0.556 \times 0.000030 = 0.000017 \\ & 0.848 \times 0.000029 = 0.000024 \\ & 1.450 \times 0.000013 = 0.000020 \\ & \underline{0.000061} \end{aligned}$$

El momento torsionante de una barra en fun

ción del ángulo de torsión vale: $M_t = \frac{GJ_t}{L} \theta$
 que para nuestro caso de vigas de 30 x 60 cms. de sección

$$h/b = 60/30 = 2; \quad k = 0.23 \quad (\text{nomograma hoja 4})$$

$$J_t = 0.23 \times 30^3 \times 60 = 375\,000 \text{ cm}^4$$

$$\frac{GJ_t}{L} = \frac{3}{7} \times 210\,000 \times \frac{375\,000}{600} = 56\,250\,000 \text{ Kg.cm.} =$$

$$= 562\,500 \text{ Kg.m.}$$

Los momentos en las barras paralelas a YY valen:

$$M_{1-1} = 562\,500 \times 0.000028 = 16 \text{ Kg.m.} = M_{3-3}$$

$$M_{2-2} = 562\,500 \times 0.000006 = 3 \text{ " "}$$

$$M_{4-4} = 562\,500 \times 0.000073 = 41 \text{ " "} = M_{6-6}$$

$$M_{5-5} = 562\,500 \times 0.000031 = 17 \text{ " "}$$

$$M_{7-7} = 562\,500 \times 0.000117 = 66 \text{ " "} = M_{9-9}$$

$$M_{8-8} = 562\,500 \times 0.000061 = 34 \text{ " "}$$

Necesitamos distribuir estos momentos en el conjunto de los 2 marcos; para lo cual primero necesitamos obtener:

Rigidez torsional de las barras paralelas a YY.-

$$r_t = \frac{375\,000 \times 3}{600 \times 7} E = 270 E$$

Rigideces relativas.-

Nudos 1 y 3

$$\text{Suma de } r = 9720 \neq 2280 \neq 270 = 12270$$

$$\text{Barras } 1-2 \text{ y } 3-2 = 0.792$$

$$\text{" } 1-4 \text{ y } 3-6 = 0.186$$

$$\text{" } 1-1 \text{ y } 3-3 = 0.022$$

Nudo 2

$$\text{Suma de } r = 9720 \neq 9720 \neq 2280 \neq 270 = 21990$$

$$\text{Barra } 2-1 = 0.442$$

$$\text{" } 2-3 = 0.442$$

$$\text{" } 2-5 = 0.104$$

$$\text{" } 2-2 = 0.012$$

Nudos 4 y 6

$$\begin{aligned} \text{Suma de r} &= 9720 \neq 2280 \neq 4420 \neq 270 = 16690 \\ \text{Barras } 4-5 \text{ y } 6-5 &= 0.582 \\ " \quad 4-1 \text{ y } 6-3 &= 0.137 \\ " \quad 4-7 \text{ y } 6-9 &= 0.265 \\ " \quad 4-4 \text{ y } 6-6 &= 0.016 \end{aligned}$$

Nudo 5

$$\begin{aligned} \text{Suma de r} &= 9720 \neq 9720 \neq 2280 \neq 4420 \neq 270 = 26410 \\ \text{Barra } 5-4 &= 0.368 \\ " \quad 5-6 &= 0.368 \\ " \quad 5-2 &= 0.086 \\ " \quad 5-8 &= 0.167 \\ " \quad 5-5 &= 0.011 \end{aligned}$$

Nudos 7 y 9

$$\begin{aligned} \text{Suma de r} &= 9720 \neq 4420 \neq 9920 \neq 270 = 24330 \\ \text{Barras } 7-8 \text{ y } 9-8 &= 0.399 \\ " \quad 7-4 \text{ y } 9-6 &= 0.182 \\ " \quad 7-10 \text{ y } 9-12 &= 0.408 \\ " \quad 7-7 \text{ y } 9-9 &= 0.011 \end{aligned}$$

Nudo 8

$$\begin{aligned} \text{Suma de r} &= 9720 \neq 9720 \neq 4420 \neq 9920 \neq 270 = 34050 \\ \text{Barra } 8-7 &= 0.285 \\ " \quad 8-9 &= 0.285 \\ " \quad 8-5 &= 0.130 \\ " \quad 8-11 &= 0.292 \\ " \quad 8-8 &= 0.008 \end{aligned}$$

La distribución de momentos en el conjunto de los 2 marcos la tenemos en la hoja 74. Por la simetría de la estructura nada más tenemos resuelto -- parte del marco I. El marco II tiene los mismos valores pero con signos contrarios.

Debido a esta distribución obtenemos los siguientes valores de fuerzas tangenciales por piso:

$$\text{N-3} \quad \frac{5 \neq 5}{6} \quad 2 \neq \frac{1 \neq 0}{6} = 3 \text{ Kgs.}$$

$$\text{N-2} \quad \frac{15 \neq 15}{6} \quad 2 \neq \frac{1 \neq 0}{6} - 3 = 7 \text{ Kgs.}$$

MARCO I

	①			②				N-3
Barra	1-1	1-4	1-2	2-1	2-5	2-2	2-3	
r/Σr	.022	.186	.792	.442	.104	.012	.442	
M _i	✓ 16	0	0	0	0	✓ 3	0	
e	0	- 3	- 13	- 1	- 1	0	- 1	
e	0	- 2	0	- 6	- 1	0	- 6	
t	0	0	✓ 2	✓ 6	✓ 1	0	✓ 6	
e	0	✓ 1	✓ 3	✓ 1	✓ 1	0	✓ 1	
e	0	- 1	- 3	- 1	- 1	0	- 1	
Suma	✓ 16	- 5	- 11	- 1	- 1	✓ 3	- 1	

	④				⑤					N-2
Barra	4-4	4-7	4-1	4-5	5-4	5-2	5-5	5-8	5-6	
r/Σr	.016	.265	.137	.582	.368	.086	.011	.167	.368	
M _i	✓ 41	0	0	0	0	0	✓ 17	0	0	
e	- 1	- 11	- 5	- 24	- 6	- 2	0	- 3	- 6	
t	- 1	- 6	- 1	- 3	- 12	0	0	- 2	- 12	
e	0	✓ 3	✓ 2	✓ 6	✓ 10	✓ 2	0	✓ 4	✓ 10	
e	0	✓ 1	0	✓ 5	✓ 3	0	0	✓ 1	✓ 3	
e	0	- 2	- 1	- 3	- 3	0	0	- 1	- 3	
Suma	✓ 39	- 15	- 5	- 19	- 8	0	✓ 17	- 1	- 8	

	⑦				⑧					N-1
Barra	7-7	7-4	7-10	7-8	8-7	8-11	8-8	8-5	8-9	
r/Σr	.011	.182	.408	.399	.285	.292	.008	.130	.285	
M _i	✓ 66	0	0	0	0	0	✓ 34	0	0	
e	- 1	- 12	- 27	- 26	- 10	- 10	0	- 4	- 10	
t	- 1	- 5	0	- 5	- 13	0	0	- 1	- 13	
e	0	✓ 2	✓ 5	✓ 4	✓ 8	✓ 8	0	✓ 3	✓ 8	
t	0	✓ 1	0	✓ 4	✓ 2	0	0	✓ 2	✓ 2	
e	0	- 1	- 2	- 2	- 2	- 2	0	0	- 2	
Suma	✓ 64	- 15	- 24	- 25	- 15	- 4	✓ 34	0	- 15	

	⑩		⑪		N-0
Barra	10-7		11-8		
r/Σr	0		0		
M _i	0		0		
e	0		0		
t	- 13		- 5		
e	0		0		
t	✓ 2		✓ 4		
e	0		0		
Suma	- 11		- 1		

$$N-1 - \frac{24 \neq 11}{6} - \frac{2 \neq 1 \neq 4}{6} - 7 = 5 \text{ Kgs.}$$

Fuerzas que por su pequeño valor quedan despreciadas.

12a. Etapa.

Efectos que nos produce en la estructura - la rigidez torsional de las barras paralelas a XX.

Giros de los nudos en un plano paralelo al YZ provocados por la aplicación de cargas unitarias en la dirección YY.-

Todas las áreas de los diagramas de momentos flexionantes de las columnas de los marcos III, IV y V para cargas horizontales de 1000 Kgs. en cada nivel por separado ya las tenemos obtenidas en las hojas 51, 52 y 53.

Carga de 1000 Kgs. aplicada en el N-3:

$$\theta_7 = (6140 - 266)/EI_{7-10} = 0.000188$$

$$\theta_4 = \theta_7 \neq (2618 - 1920)/EI_{4-7} = 0.000232$$

$$\theta_1 = \theta_4 \neq (1865 - 2668)/EI_{1-4} = 0.000120$$

Carga de 1000 Kgs. aplicada en el N-2:

$$\theta_7 = (5798 - 345)/EI_{7-10} = 0.000175$$

$$\theta_4 = \theta_7 \neq (1931 - 2603)/EI_{4-7} = 0.000133$$

$$\theta_1 = \theta_4 - .900/EI_{1-4} = 0.000007$$

Carga de 1000 Kgs. aplicada en el N-1:

$$\theta_7 = (3687 - 1162)/EI_{7-10} = 0.000081$$

$$\theta_4 = \theta_7 - 972/EI_{4-7} = 0.000020$$

$$\theta_1 = \theta_4 - 90/EI_{1-4} = 0.000008$$

Tenemos aplicados a los marcos III y V --
fuerzas horizontales de 108, 96 y 45 Kgs. -
respectivamente en los niveles 3, 2 y 1, por lo que
los nudos girarán las siguientes cantidades:

$$\begin{array}{l} \text{Barras 1-2 y 3-2: } 0.108 \times 0.000120 = 0.000013 \\ \phantom{\text{Barras 1-2 y 3-2: }} 0.096 \times 0.000007 = 0.000001 \\ \phantom{\text{Barras 1-2 y 3-2: }} 0.045 \times 0.000008 = 0.000000 \\ \phantom{\text{Barras 1-2 y 3-2: }} \underline{0.000014} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Barras 4-5 y 6-5: } 0.108 \times 0.000232 = 0.000025 \\ \phantom{\text{Barras 4-5 y 6-5: }} 0.096 \times 0.000133 = 0.000013 \\ \phantom{\text{Barras 4-5 y 6-5: }} 0.045 \times 0.000020 = 0.000001 \\ \phantom{\text{Barras 4-5 y 6-5: }} \underline{0.000039} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Barras 7-8 y 9-8: } 0.108 \times 0.000188 = 0.000020 \\ \phantom{\text{Barras 7-8 y 9-8: }} 0.096 \times 0.000175 = 0.000017 \\ \phantom{\text{Barras 7-8 y 9-8: }} 0.045 \times 0.000081 = 0.000004 \\ \phantom{\text{Barras 7-8 y 9-8: }} \underline{0.000041} \end{array}$$

Para las barras de 40 x 90 cms.:

$$h/b = 90/40 = 2.25; \quad k = 0.24$$

$$J_t = 0.24 \times 90 \times 40^3 = 1\,383\,000$$

$$M_t = \frac{3}{7} \cdot 210\,000 \cdot \frac{1\,383\,000}{1000} \theta = 1\,245\,000 \theta$$

Los momentos en las barras paralelas a XX antes de -
permitir girar los nudos valen:

$$M_{1-2} = M_{3-2} = 1\,245\,000 \times 0.000014 = 17 \text{ Kg.m.}$$

$$M_{4-5} = M_{6-5} = 1\,245\,000 \times 0.000039 = 48 \text{ " "}$$

$$M_{7-8} = M_{9-8} = 1\,245\,000 \times 0.000041 = 51 \text{ " "}$$

Rigidez torsional de las barras paralelas a XX.-

$$r_t = \frac{1\,383\,000 \cdot 3}{1000 \cdot 7} E = 590 E$$

Rigideces relativas.-

Nudos 1 y 3

$$\begin{aligned} \text{Suma de } r &= 590 \cancel{+} 3600 \cancel{+} 2280 = 6470 \\ \text{Barras } 1-2 \text{ y } 3-2 &= 0.091 \\ " \quad 1-1 \text{ y } 3-3 &= 0.556 \\ " \quad 1-4 \text{ y } 3-6 &= 0.353 \end{aligned}$$

Nudos 4 y 6

$$\begin{aligned} \text{Suma de } r &= 590 \cancel{+} 3600 \cancel{+} 2280 \cancel{+} 4420 = 10890 \\ \text{Barras } 4-5 \text{ y } 6-5 &= 0.054 \\ " \quad 4-4 \text{ y } 6-6 &= 0.331 \\ " \quad 4-1 \text{ y } 6-3 &= 0.209 \\ " \quad 4-7 \text{ y } 6-9 &= 0.406 \end{aligned}$$

Nudos 7 y 9

$$\begin{aligned} \text{Suma de } r &= 590 \cancel{+} 3600 \cancel{+} 4420 \cancel{+} 9920 = 18530 \\ \text{Barras } 7-8 \text{ y } \cancel{9-8} &= 0.032 \\ " \quad 7-7 \text{ y } \cancel{9-9} &= 0.194 \\ " \quad 7-4 \text{ y } 9-6 &= 0.239 \\ " \quad 7-10 \text{ y } 9-12 &= 0.535 \end{aligned}$$

La distribución de momentos en el conjunto de los 3 marcos: III, IV y V, la tenemos en la siguiente hoja. Por simetría únicamente resolvemos la mitad del marco III. El marco V tiene los mismos valores pero de signo contrario que el III. El marco IV por estar entre los otros 2 que tienen movimientos en valor absoluto iguales pero de signos contrarios, no tendrá movimiento alguno en su plano.

Fuerzas tangenciales por piso después de la distribución:

$$N-3 \text{ ----- } \frac{8 \cancel{+} 9}{6} 2 = 6 \text{ Kgs.}$$

$$N-2 \text{ ----- } \frac{19 \cancel{+} 16}{6} 2 - 6 = 6 \text{ Kgs.}$$

$$N-1 \text{ ----- } \frac{21 \cancel{+} 9}{6} 2 - 6 = 4 \text{ Kgs.}$$

Cantidades tan pequeñas que las despreciamos.

MARCO III

	①		①		
	1-2	1-4	1-1	N-3	
Barra	0.091	0.353	0.556		
r/Er					
M _i	/ 17	0	0		
e	- 2	- 6	- 9		
t	0	- 5	- 4		
e	/ 1	/ 3	/ 5		
t	0	/ 2	/ 2		
e	0	- 2	- 2		
Suma	/ 16	- 8	- 8		

	④		④		
	4-5	4-7	4-1	4-4	N-2
Barra	0.054	0.406	0.209	0.331	
r/Er					
M _i	/ 48	0	0	0	
e	- 3	- 19	- 10	- 16	
t	0	- 6	- 3	- 8	
e	/ 1	/ 7	/ 4	/ 5	
t	0	/ 1	/ 1	/ 2	
e	0	- 2	- 1	- 1	
Suma	/ 46	- 19	- 9	- 18	

	⑦		⑦		
	7-8	7-4	7-10	7-7	N-1
Barra	0.032	0.239	0.535	0.194	
r/Er					
M _i	/ 51	0	0	0	
e	- 2	- 12	- 27	- 10	
t	0	- 9	0	- 5	
e	0	/ 3	/ 8	/ 3	
t	0	/ 3	0	/ 1	
e	0	- 1	- 2	- 1	
Suma	/ 49	- 16	- 21	- 12	

	⑩		⑩		
	10-7				N-0
Barra					
r/Er					
M _i		0			
e		0			
t		- 13			
e		0			
t		/ 4			
e		0			
Suma		- 9			

MOMENTOS FINALES EN LOS MARGOS.

Para obtener los momentos finales vamos a sumar 4 efectos: uno por cada empuje horizontal en los 3 diferentes niveles y uno por el efecto de la rigidez torsional de las trabes.



DEPFI

Marco I

Marco II

1-2 = 3-2:	- 942x3.722 = - 3506	- 942x4.278 = - 4030
	- 18x3.576 = - 64	- 18x4.424 = - 80
	- 2x3.275 = - 6	- 2x4.725 = - 9
	- 11	- 11
	M = - 3587	M = - 4108
1-4 = 3-6:	/ 942x3.722 = / 3506	/ 942x4.278 = / 4030
	/ 18x3.576 = / 64	/ 18x4.424 = / 80
	/ 2x3.275 = / 6	/ 2x4.725 = / 9
	- 5	- 5
	M = / 3571	M = / 4124
2-1 = 2-3:	- 603x3.722 = - 2244	- 603x4.278 = - 2580
	- 32x3.576 = - 114	- 32x4.424 = - 142
	0	0
	- 1	- 1
	M = - 2359	M = - 2721
2-5:	/ 1206x3.722 = / 4488	/ 1206x4.278 = / 5160
	/ 64x3.576 = / 228	/ 64x4.424 = / 284
	0	0
	- 1	- 1
	M = / 4715	M = / 5445
4-1 = 6-3:	/ 876x3.722 = / 3260	/ 876x4.278 = / 3747
	- 66x3.576 = - 236	- 66x4.424 = - 292
	/ 1x3.275 = / 3	/ 1x4.725 = / 5
	- 5	- 5
	M = / 3022	M = / 3465
4-5 = 6-5:	- 1691x3.722 = - 6293	- 1691x4.278 = - 7234
	- 870x3.576 = - 3111	- 870x4.424 = - 3849
	- 34x3.275 = - 111	- 34x4.725 = - 161
	- 19	- 19
	M = - 9534	M = - 11225
4-7 = 6-9:	/ 815x3.722 = / 3033	/ 815x4.278 = / 3487
	/ 936x3.576 = / 3347	/ 936x4.424 = / 4141
	/ 33x3.275 = / 108	/ 33x4.725 = / 156
	- 15	- 15
	M = / 6473	M = / 7799

MARCO I

MARCO II

10-7=12-9:	1159 x3.722 = 4314	1159 x4.278 = 4958
	1150 x3.576 = 4112	1150 x4.424 = 5088
	1070 x3.275 = 3504	1070 x4.725 = 5056
	<u>11</u>	<u>11</u>
	M = 11919	M = 15113
11-8:	1414 x3.722 = 5263	1414 x4.278 = 6049
	1421 x3.576 = 5081	1421 x4.424 = 6286
	1213 x3.275 = 3972	1213 x4.725 = 5731
	<u>1</u>	<u>1</u>
	M = 14315	M = 18067

MARCOS III y V

1-1 = - (3-3)	1633 x 0.108 = 176
	148 x 0.096 = 14
	15 x 0.045 = 1
	<u>8</u>
	M = 183
1-4 = - (3-6):	- 1633 x 0.108 = - 176
	- 148 x 0.096 = - 14
	- 15 x 0.045 = - 1
	<u>8</u>
	M = - 199
4-1 = - (6-3):	- 1365 x 0.108 = - 147
	150 x 0.096 = 14
	16 x 0.045 = 1
	<u>9</u>
	M = - 141
4-4 = - (6-6):	2752 x 0.108 = 297
	1465 x 0.096 = 141
	146 x 0.045 = 6
	<u>18</u>
	M = 426
4-7 = - (6-9):	- 1387 x 0.108 = - 150
	- 1615 x 0.096 = - 155
	- 162 x 0.045 = - 7
	<u>19</u>
	M = - 331
7-4 = - (9-6):	- 1620 x 0.108 = - 175
	- 1391 x 0.096 = - 134
	161 x 0.045 = 7
	<u>16</u>
	M = - 318
7-7 = - (9-9):	2135 x 0.108 = 231
	1977 x 0.096 = 190
	916 x 0.045 = 41
	<u>12</u>
	M = 450

$$\begin{array}{rcl}
 7-10 = - (9-12): & - 515 \times 0.108 = - & 56 \\
 & - 586 \times 0.096 = - & 56 \\
 & - 1077 \times 0.045 = - & 48 \\
 & & \underline{21} \\
 M = & - & \underline{181}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 10-7 = - (12-9): & - 2473 \times 0.108 = - & 267 \\
 & - 2404 \times 0.096 = - & 231 \\
 & - 1919 \times 0.045 = - & 86 \\
 & & \underline{9} \\
 M = & - & \underline{593}
 \end{array}$$

Todos estos momentos son de barra sobre mu
do y están dados en kilogramos-metro.

FUERZAS TANGENCIALES.

Para obtener las fuerzas tangenciales de una barra la consideramos cortada infinitamente cerca de los nudos. Los elementos mecánicos exteriores que tenemos que considerar en cada extremo de la barra para poderla aislar de la estructura son: una fuerza tangencial, una fuerza normal y un momento. Al obtener los momentos con respecto a un extremo de la barra vemos que se nos anulan las fuerzas normales y la tangencial de ese punto, quedándonos como incógnita únicamente la fuerza tangencial del otro extremo, ya que los momentos son conocidos.

	MARCO I	MARCO II
1-2 = 2-3:	$\frac{-3587 - 2359}{10} = -595$	$\frac{-4108 - 2721}{10} = -683$
4-5 = 5-6:	$\frac{-9534 - 7082}{10} = -1662$	$\frac{-11225 - 8365}{10} = -1959$
7-8 = 8-9:	$\frac{-12798 - 10405}{10} = -2320$	$\frac{-15768 - 12818}{10} = -2858$
1-4 = 3-6:	$\frac{3022 \cancel{-} 3571}{6} = 1099$	$\frac{3465 \cancel{-} 4124}{6} = 1265$
2-5:	$\frac{4415 \cancel{-} 4715}{6} = 1521$	$\frac{5080 \cancel{-} 5445}{6} = 1754$
4-7 = 6-9:	$\frac{5936 \cancel{-} 6473}{6} = 2068$	$\frac{7030 \cancel{-} 7799}{6} = 2471$
5-8:	$\frac{9181 \cancel{-} 9732}{6} = 3182$	$\frac{10954 \cancel{-} 11667}{6} = 3770$

MARCO I

$$7-10=9-12: \frac{11919 \cancel{7} 6798}{6} = 3119$$

$$8-11: \frac{14315 \cancel{7} 11595}{6} = 4318$$

MARCO II

$$\frac{15113 \cancel{7} 8802}{6} = 3986$$

$$\frac{18067 \cancel{7} 14716}{6} = 5464$$

MARCOS III y V

$$1-1 = - (3-3): \frac{183 \times 2}{6} = 61$$

$$4-4 = - (6-6): \frac{426 \times 2}{6} = 142$$

$$7-7 = - (9-9): \frac{450 \times 2}{6} = 150$$

$$1-4 = - (3-6): \frac{- 141 - 199}{6} = - 57$$

$$4-7 = - (6-9): \frac{- 318 - 331}{6} = - 108$$

$$7-10 = - (9-12): \frac{- 593 - 181}{6} = - 129$$

EN PLANTA:

$$1-2 = 2-3: \frac{- 540 - 388}{10} = - 93$$

$$1-1 = 3-3: \frac{611 \times 2}{6} = 204$$

$$2-2: \frac{821 \times 2}{6} = 274$$

$$4-5 = 5-6: \frac{- 405 - 294}{10} = - 70$$

$$4-4 = 6-6: \quad \frac{506 \times 2}{6} = 169$$

$$5-5: \quad \frac{647 \times 2}{6} = 216$$

$$7-8 = 8-9: \quad \frac{-176 - 130}{10} = -31$$

$$7-7 = 9-9: \quad \frac{249 \times 2}{6} = 83$$

$$8-8: \quad \frac{301 \times 2}{6} = 100$$

Todas las fuerzas están expresadas en kilo
gramos.

FUERZAS NORMALES.

Para obtener las fuerzas normales de una barra cortamos un nudo al que se inserte dicha barra y lo separamos de la estructura. Proyectamos todas las fuerzas sobre un eje paralelo a la dirección de la fuerza normal que estamos buscando, la suma de dichas fuerzas debe ser nula para que esté en equilibrio el nudo.

Vamos de una vez considerar los signos de tal manera que nos de resultados positivos para las tensiones y negativos para las compresiones.

Para todos los efectos estudiados hasta este momento no nos importaba el punto de aplicación de las fuerzas horizontales aplicadas a cada nivel; pero para encontrar las fuerzas normales en las barras paralelas al eje XX si nos interesa definir esto. Vamos a suponer que estas fuerzas horizontales están aplicadas en la siguiente forma: en cada nudo de los extremos del marco aplicada la cuarta parte de la carga total en ese nivel, y la mitad en el nudo central; por ejemplo en el N-2 del marco I en donde tenemos aplicada una fuerza exterior de 3 Tons. consideramos que en los nudos 4 y 6 tenemos aplicada en cada uno una fuerza de 0.75 Tons. y en el nudo 5, 1.50 Tons.

MARCO I

$$\begin{aligned}
 1-4 &= - (3-6): & 595 \neq 61 &= 656 \\
 4-7 &= - (6-9): & 656 \neq 1662 \neq 142 &= 2460 \\
 7-10 &= - (9-12): & 2460 \neq 2320 \neq 150 &= 4930 \\
 2-5 &= 5-8 = 8-11 &= 0 \\
 1-2 &= - (2-3): & 1099 - 750 - 204 &= 145 \\
 4-5 &= - (5-6): & 2068 - 1099 - 169 - 750 &= 50 \\
 7-8 &= - (8-9): & 3119 - 2068 - 83 - 750 &= 218
 \end{aligned}$$

MARCO II

$$\begin{aligned}
 1-4 &= - (3-6): & 683 - 61 &= 622 \\
 4-7 &= - (6-9): & 1959 \neq 622 - 142 &= 2439 \\
 7-10 &= - (9-12): & 2858 \neq 2439 - 150 &= 5147 \\
 2-5 &= 5-8 = 8-11 &= 0 \\
 1-2 &= - (2-3): & 1265 \neq 204 - 1250 &= 219 \\
 4-5 &= - (5-6): & 2471 \neq 169 - 1265 - 1250 &= 125 \\
 7-8 &= - (8-9): & 3986 \neq 83 - 1250 - 2471 &= 348
 \end{aligned}$$

Todas las fuerzas tienen por unidad el kilogramo.

En las barras paralelas al eje YY no existen fuerzas normales.

DESPLAZAMIENTOS FINALES.

Los desplazamientos en cada nivel los encontramos multiplicando las fuerzas horizontales por las constantes de deformación conocidas ya para cargas unitarias de 1000 Kgs.

MARCO I

En el N-3:	$3.722 \times 0.20853 = 0.77615$	cm.
	$3.576 \times 0.10340 = 0.36976$	"
	$3.275 \times 0.03003 = 0.09834$	"
	$D_3 = 1.24425$	"
En el N-2:	$3.722 \times 0.10120 = 0.37667$	"
	$3.576 \times 0.09388 = 0.33571$	"
	$3.275 \times 0.03408 = 0.11161$	"
	$D_2 = 0.82399$	"
En el N-1:	$3.722 \times 0.03333 = 0.12405$	"
	$3.576 \times 0.03307 = 0.11826$	"
	$3.275 \times 0.02662 = 0.08725$	"
	$D_1 = 0.32956$	"

MARCO II

En el N-3:	$4.278 \times 0.20853 = 0.89209$	cm.
	$4.424 \times 0.10340 = 0.45744$	"
	$4.725 \times 0.03003 = 0.14189$	"
	$D_3 = 1.49142$	"
En el N-2:	$4.278 \times 0.10120 = 0.43293$	"
	$4.424 \times 0.09388 = 0.41532$	"
	$4.725 \times 0.03408 = 0.16103$	"
	$D_2 = 1.00928$	"
En el N-1:	$4.278 \times 0.03333 = 0.14258$	"
	$4.424 \times 0.03307 = 0.14630$	"
	$4.725 \times 0.02664 = 0.12587$	"
	$D_1 = 0.41475$	"

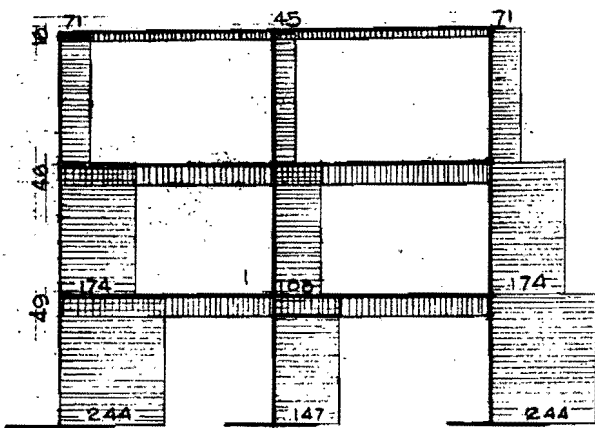
MARCO V = - MARCO III

En el N-3:	$0.108 \times 0.49828 = 0.05381$	cm.
	$0.096 \times 0.27181 = 0.02609$	"
	$0.045 \times 0.09182 = 0.00413$	"
	$D_3 = 0.08403$	"

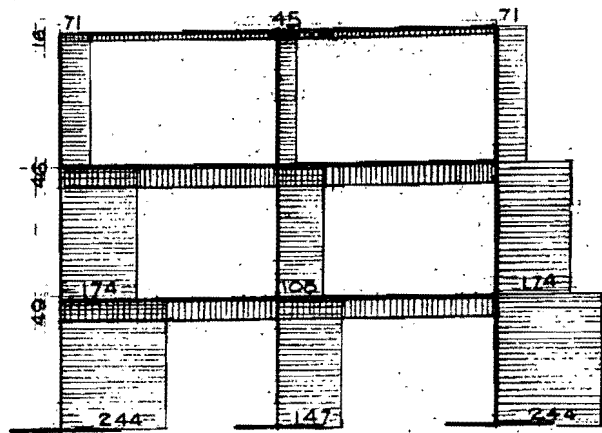
MARCO V = - MARCO III

En el N-2:	$0.108 \times 0.20983 = 0.02266$	cm.
	$0.096 \times 0.22971 = 0.02205$	"
	$0.045 \times 0.08343 = \underline{0.00375}$	"
	$D_2 = 0.04846$	"
En el N-1:	$0.108 \times 0.07519 = 0.00812$	"
	$0.096 \times 0.08117 = 0.00779$	"
	$0.045 \times 0.05308 = \underline{0.00239}$	"
	$D_1 = 0.01830$	"

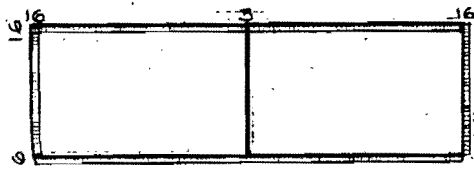
DIAGRAMAS DE MOMENTOS TORSIONANTES



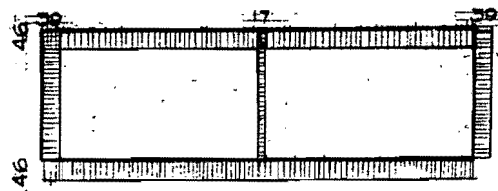
MARCO I



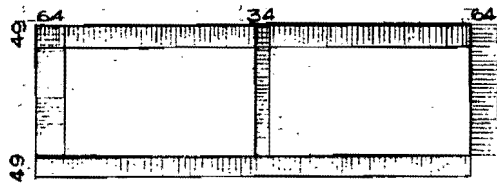
MARCO II



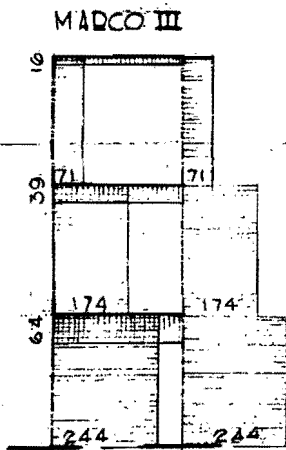
PLANTA NIVEL 3



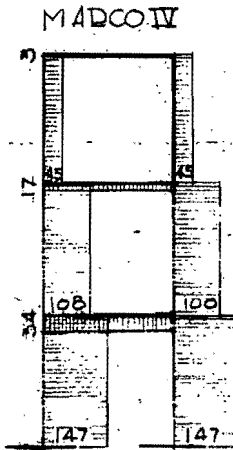
PLANTA NIVEL 2



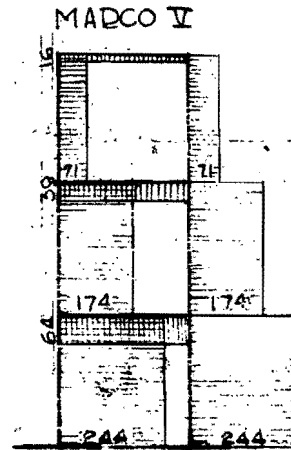
PLANTA NIVEL 1



MARCO III

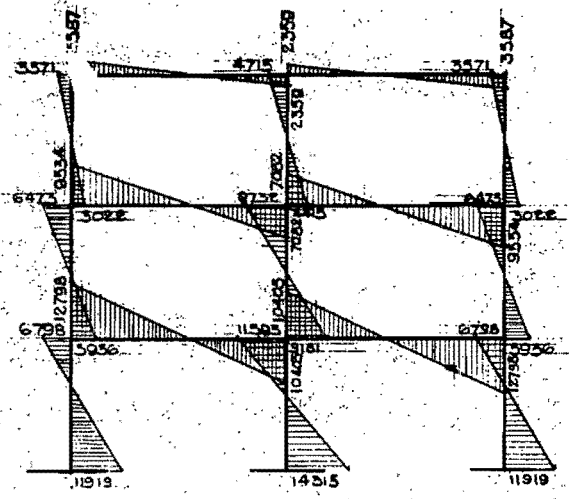


MARCO IV

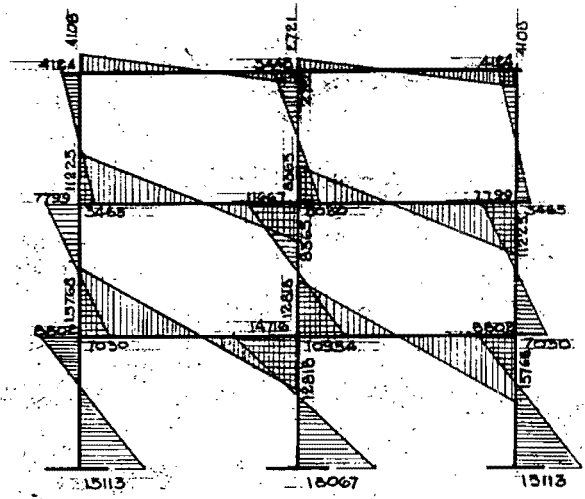


MARCO V

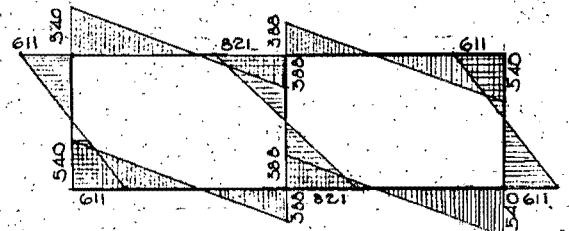
DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLEXIONANTES



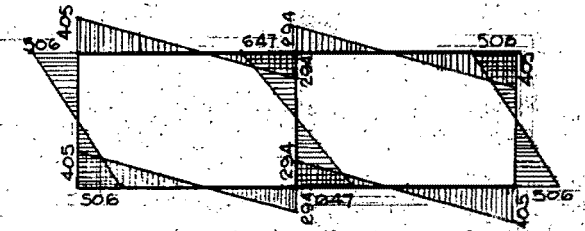
MARCO I



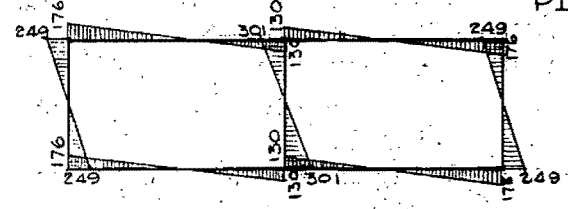
MARCO II



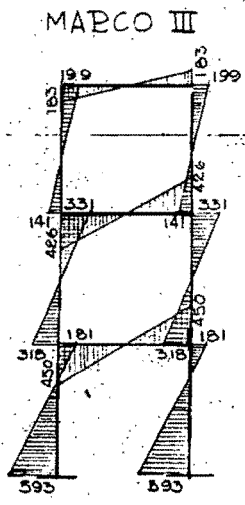
PLANTA NIVEL 3



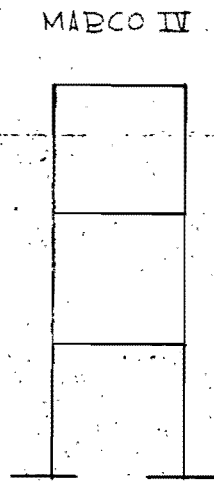
PLANTA NIVEL 2



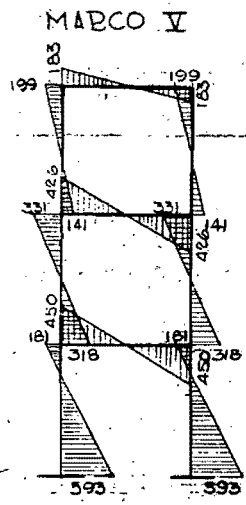
PLANTA NIVEL 1



MARCO III

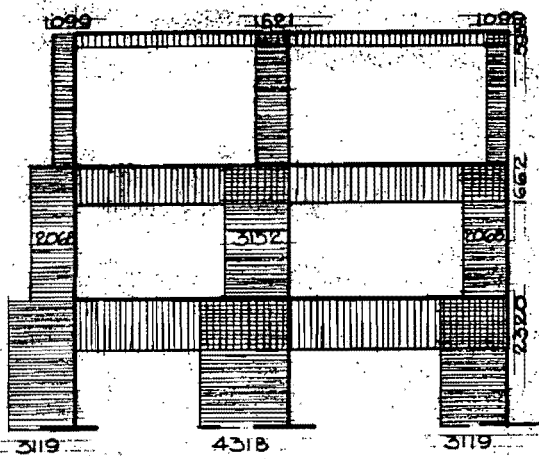


MARCO IV

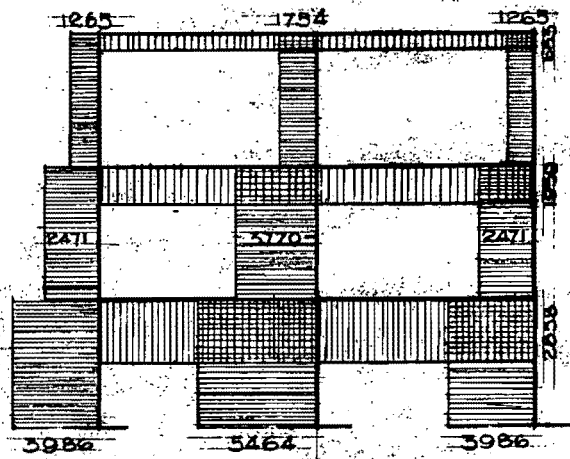


MARCO V

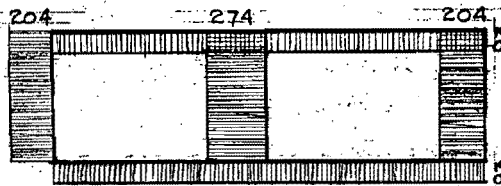
DIAGRAMAS DE FUERZAS CONSTANTES



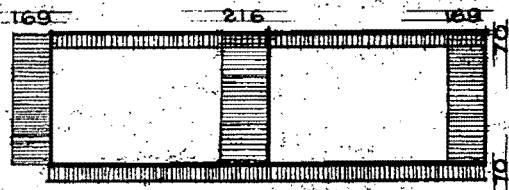
MARCO I



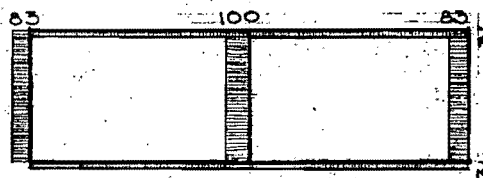
MARCO II



PLANTA NIVEL 3

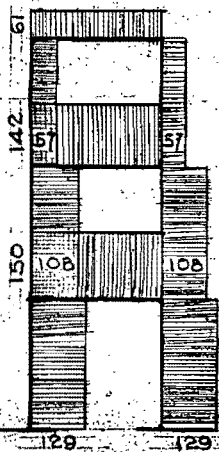


PLANTA NIVEL 2

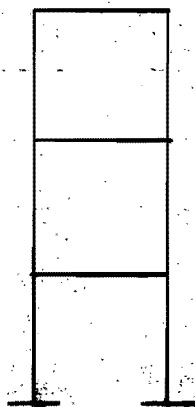


PLANTA NIVEL 1

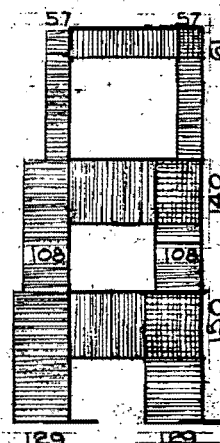
MARCO III



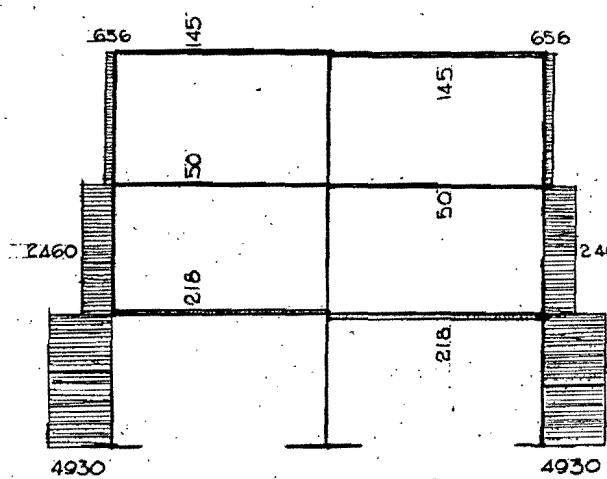
MARCO IV



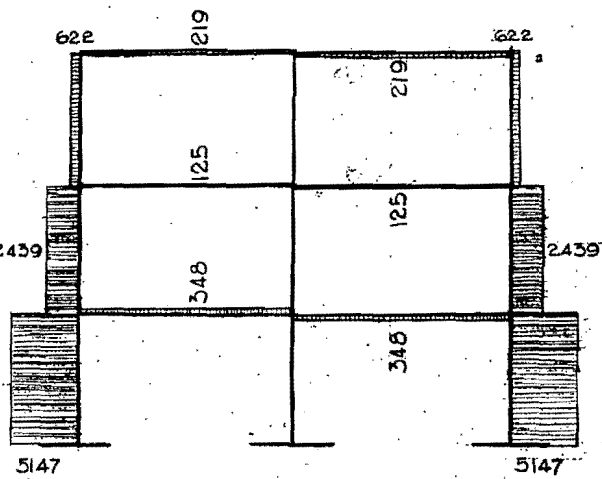
MARCO V



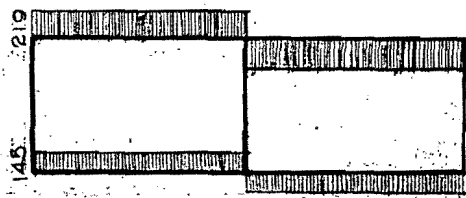
DIAGRAMAS DE FUERZAS NORMALES



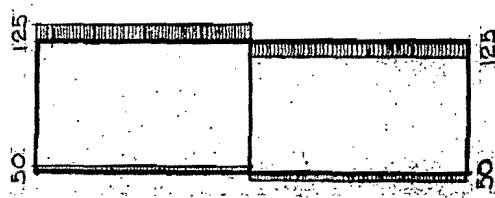
MARCO I



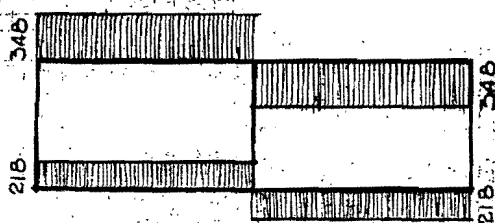
MARCO II



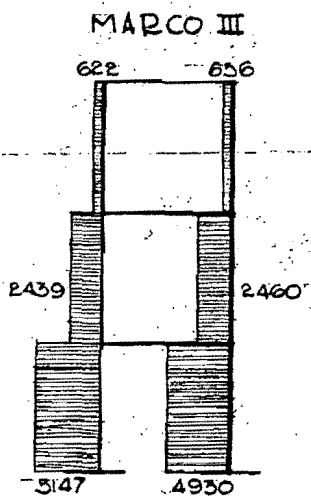
PLANTA NIVEL 3



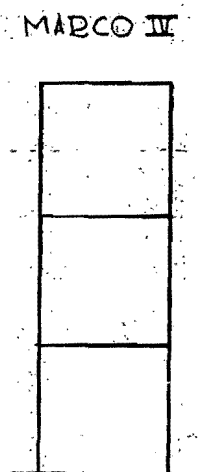
PLANTA NIVEL 2



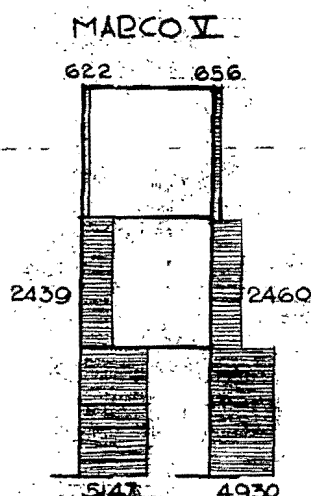
PLANTA NIVEL 1



MARCO III

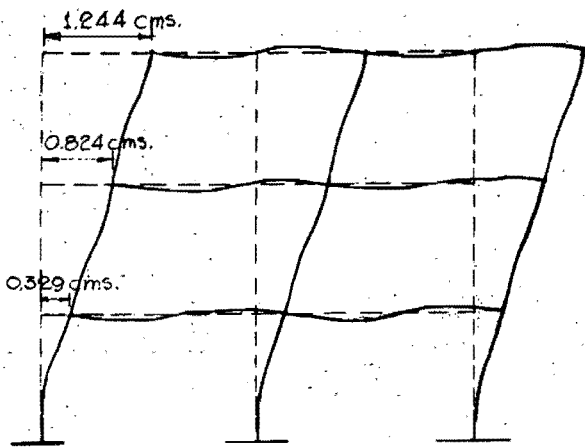


MARCO IV

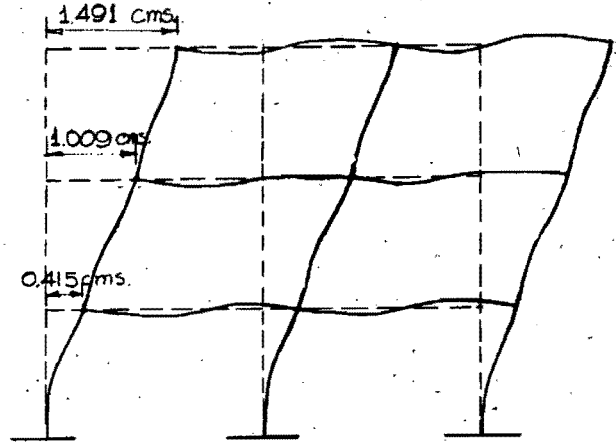


MARCO V

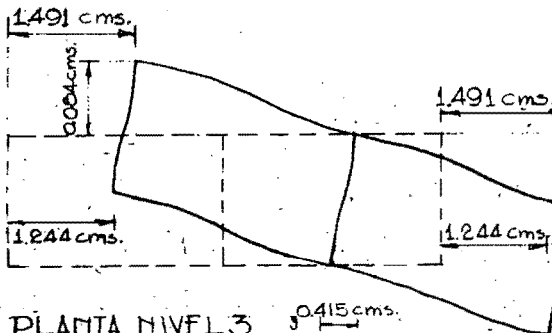
DIAGRAMAS DE DEFORMACIONES



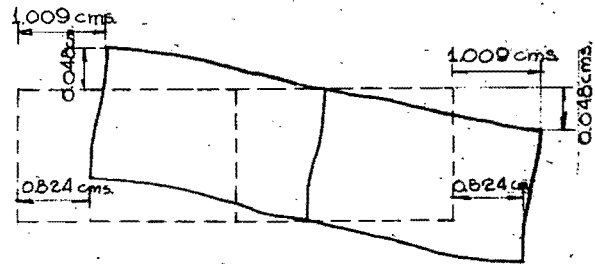
MARCO I



MARCO II



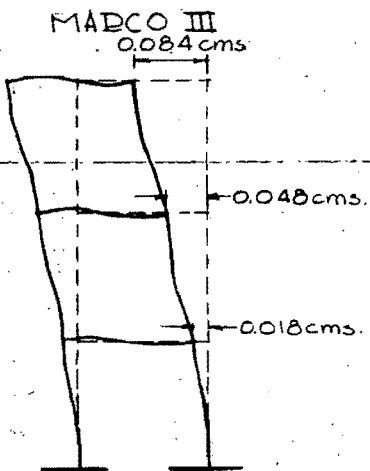
PLANTA NIVEL 3



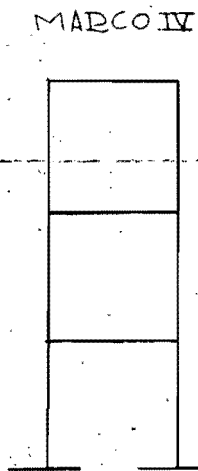
PLANTA NIVEL 2



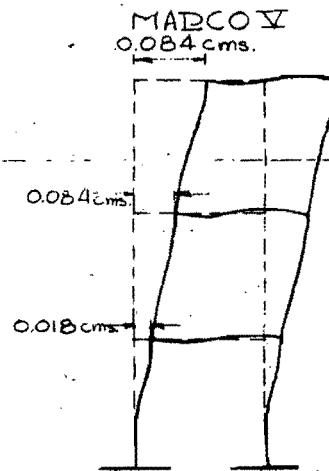
PLANTA NIVEL 1



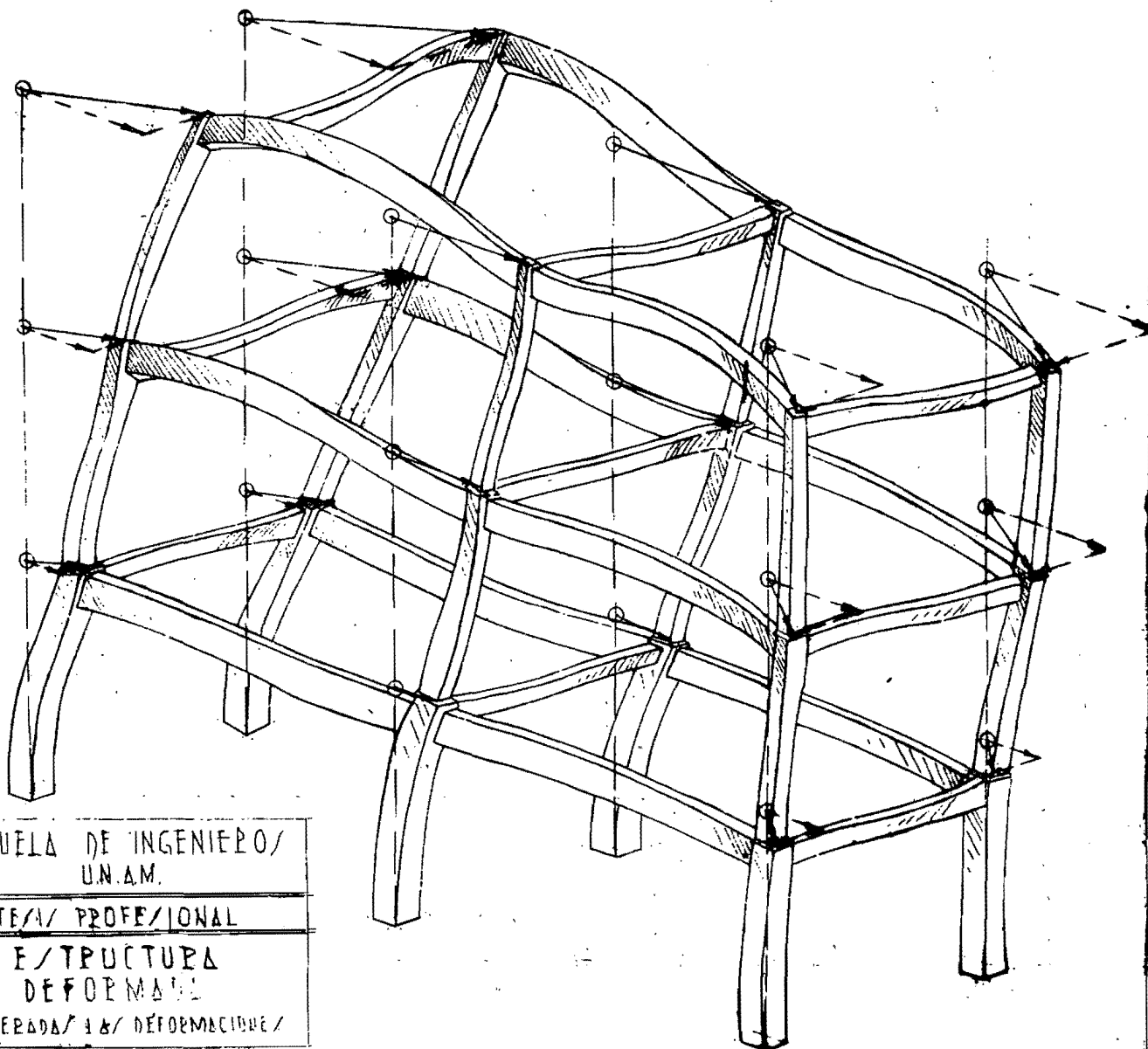
MARCO III



MARCO IV



MARCO V



ESCUELA DE INGENIEROS/
U.N.A.M.

TESIS PROFESIONAL

ESTRUCTURA
DEFORMABLE

EXAGERADA / 1 & / DEFORMACIONES /

LUIS FREIDMAN I

1947