



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA
SECCION DE HIDRAULICA

Tesis que presenta

CARLOS FLORES IBARRA

Para obtener el grado de:

MAESTRO EN INGENIERIA HIDRAULICA

Créditos asignados a la tesis 10 (diez)

JURADO

Dr. ROLANDO SPRINGALL GALINDO

M en I RAMON DOMINGUEZ MORA

M en I FELIPE I. ARREGUIN CORTES

M en I OSCAR FUENTES MARILES

M en I MOISES BEREZOWSKY VERDUZCO

Coordinador de la Sección

M en I Felipe I. Arreguin Cortes

Secretario Académico

M en I Gabriela Moeller de Jalife

Ciudad Universitaria, a 25 de marzo de 1985



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPHI

T. UNAM
1985
FLO

A mi esposa, Magaly

AGRADECIMIENTOS

Al M. en I. Ramón Domínguez Mora, por su atención y tiempo -
dedicado a este trabajo.

Al Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M., por las facilida--
des proporcionadas para el desarrollo de este trabajo.

A mis padres Alfredo y Ma. del Carmen, por su educación, di-
rección y apoyo.

I N D I C E

	Pág.
1. INTRODUCCION	1
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
2.1 Introducción	
2.2 Funcionamiento y operación de una presa	
2.3 Función objetivo	
3. DESARROLLO DEL MODELO DE OPTIMACION	23
3.1 Introducción	
3.2 Programación dinámica estocástica	
3.3 Adecuación de la programación dinámica estocástica a la operación de una presa	
4. REDUCCION DE LOS REQUERIMIENTOS DE MEMORIA Y TIEMPO DE COMPUTO	46
4.1 Introducción	
4.2 Reducción del número de operaciones	
4.3 Reducción del orden de las matrices de transición	
5. EJEMPLO DE APLICACION	61
5.1 Información necesaria	
5.2 Interpretación de resultados	
6. CONCLUSIONES	83

1. INTRODUCCION

El agua es un recurso natural renovable esencial para el consumo humano, la producción de alimentos y la generación de corriente eléctrica. Sin embargo, aun cuando se trata de un recurso tan valioso, puede causar daños sustanciales al presentarse en grandes cantidades.

Los volúmenes de agua que fluyen por un río varían ampliamente con el tiempo. Por esta razón los proyectos de abastecimiento de agua, riego o hidroeléctricos que extraen directamente el agua de la corriente, pueden no satisfacer la demanda de sus usuarios durante los periodos de sequía o no proteger las actividades que se desarrollan en las márgenes del río en los periodos de grandes escurrimientos.

Una forma de evitar dichos problemas es almacenando en una presa los excesos de agua generados durante los periodos de avenidas para luego utilizarlos en los periodos de estiaje. Las presas además proveen de carga para la generación de corriente eléctrica y protegen las zonas aguas abajo del vaso contra inundaciones.

En la fase de operación de una presa, el problema consiste en determinar una política que indique el volumen de agua de que puede disponerse en un momento dado para satisfacer la demanda, previendo además las condiciones futuras en lo que respecta a volúmenes de ingreso y demanda.

Cuando se conoce *apriori*, a lo largo de la vida útil de la obra, tanto las demandas como los volúmenes de ingreso, el problema de determinar una política de operación adecuada es más o menos sencillo. Sin embargo, cuando se considera el carácter aleatorio de los volúmenes de ingreso al vaso, el problema se complica, ya que una misma política en algunas ocasiones no podrá satisfacer la demanda (principalmente cuando la presa esté vacía y al inicio de una época de estiaje) y en otras dispondrá de mucha más agua que la necesaria (por ejemplo, cuando la presa esté llena al inicio de una época de avenidas).

Hay muchas formas de operar una presa, unas mejor que otras.

Sin embargo existirá una o algunas que se prefieran por sobre todas las demás por distintas razones (criterios de utilidad), como pueden ser: la que menos veces provoca déficit, la que maximiza los beneficios económicos o la que menos agua desperdicia.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo tal que, considerando la aleatoriedad de los volúmenes de ingreso a un vaso, determine una política de operación óptima para una presa con propósitos múltiples. La política que se obtenga será óptima con respecto a un criterio de utilidad económico y estará dada en función de la época del año y del volumen almacenado en la presa al inicio de dicho tiempo. En dicho modelo se desprecia la autocorrelación de los volúmenes de ingreso y se supone que la presa está aislada de otros sistemas.

En este trabajo se supuso el caso de una presa con dos propósitos: generación de energía y control de avenidas (cap 2). Esta particularidad no limita la aplicación del modelo de optimización a estos casos, ya que para problemas distintos sólo será necesario modificar la función objetivo (criterio de utilidad).

En el capítulo 3 se describen los principios básicos de la programación dinámica (método de optimización) el cual se escogió por la flexibilidad y facilidad de su aplicación, el ca-

rácter secuencial del problema y la forma no lineal y discontinua de la función objetivo. Uno de los inconvenientes de este método son sus requerimientos de memoria y tiempo de cómputo, por lo cual en el capítulo 4 se desarrolla un algoritmo que permite reducir sensiblemente estas limitaciones y hacer factible su utilización.

En el capítulo 5 se presenta un ejemplo de aplicación, en el que se enfatizan dos aspectos: la información que se requiere y los resultados que pueden obtenerse.

Por último, en el capítulo 6 dentro de las conclusiones del trabajo, se plantean las ecuaciones recursivas de la programación dinámica para el caso en que se amplie el campo de aplicación del modelo para tomar en cuenta la autocorrelación de los volúmenes de ingreso o se considere que la presa forma parte de un sistema interconectado.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 Introducción

Una parte importante en el proceso de optimación es modelar matemáticamente un fenómeno del mundo real, y escoger una medida de utilidad (función objetivo) que sea función de las variables independientes o controlables del fenómeno.

La modelación adecuada del fenómeno y de la función objetivo es básica para obtener buenos resultados en el uso de los métodos de optimación, ya que estos últimos determinan el valor de las variables controlables que mejor cumplen con la función objetivo. Por lo tanto, si la definición matemática del fenómeno y la función objetivo no reflejan la realidad, los resultados que se obtengan serán poco representativos.

Considérese el caso de una presa hidroeléctrica. Cualitativamente, su política óptima de operación será aquella que no desperdicia agua tirandola por el vertedor y además garantiza, tanto en época de estiaje como de avenidas, el agua y la carga suficiente para generar energía eléctrica. Si la presa hidroeléctrica se utiliza además para el control de avenidas, la política óptima se modifica tendiendo a descargar continuamente un gasto que no provoque daños aguas abajo y a mantener niveles bajos de almacenamiento para absorber las grandes avenidas. Nótese que ambos objetivos se contraponen, ya que para efectos de generación se prefiere tener el embalse en niveles altos, mientras que por razones de control de avenidas en niveles bajos.

Resumiendo, la política de operación óptima de una presa para generación y control de avenidas indica la cantidad de agua a utilizar en cada momento de tal forma que se logre maximizar la energía generada, minimizar los daños por inundación aguas abajo de la presa, surtir una demanda mínima y garantizar la seguridad de la presa.

En lo que sigue del capítulo, se describe la forma en que se modeló matemáticamente el problema. En primer lugar, se explican las ecuaciones que describen el funcionamiento del vaso, la forma en que se toman las decisiones y las restricciónes a que se sujetan. Por último, se enuncian los aspectos a considerar en la función objetivo.

2.2 Funcionamiento y operación de una presa

El funcionamiento de una presa está dado por la ecuación de continuidad, la cual establece para un intervalo de tiempo Δt que :

$$\Delta S = x - D$$

donde

- ΔS variación del volumen almacenado durante el intervalo considerado
- x volumen de agua que entra al vaso durante el mismo intervalo
- D volumen que sale del vaso durante el mismo intervalo

Si no se considera evaporación, infiltración y el volumen de lluvia en el vaso, la ecuación de continuidad puede escribirse como

$$S(t_{n+1}) - S(t_n) = x(t_n) - d_v(t_n) - d_t(t_n)$$

ó

$$S(t_{n+1}) = S(t_n) + x(t_n) - d_v(t_n) - d_t(t_n) \quad (2.1)$$

donde

- $S(t_n)$ volumen almacenado en el vaso al inicio del tiempo n
- $x(t_n)$ volumen de ingreso al vaso durante el intervalo de tiempo t_n
- $d_v(t_n)$ volumen de extracción por el vertedor durante el intervalo de tiempo t_n
- $d_t(t_n)$ volumen de extracción por la obra de toma durante

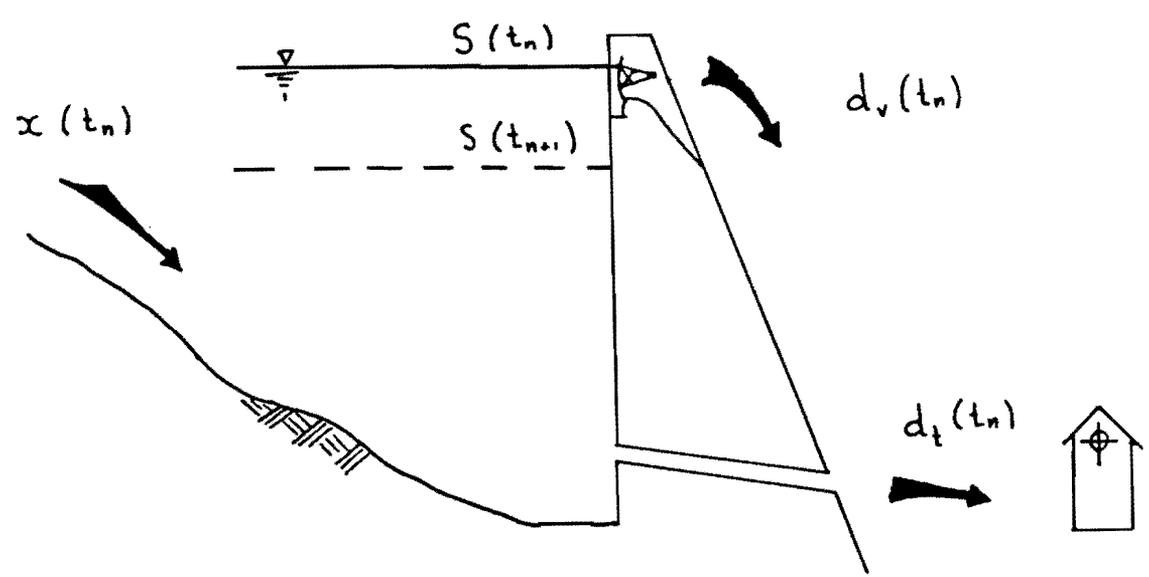
el intervalo de tiempo t_n

En la ecuación anterior, las únicas variables que pueden manejarse o controlarse son las de extracción, $d_v(t_n)$ y $d_t(t_n)$, ya que el volumen de ingreso al vaso, $x(t_n)$, es aleatorio y completamente incontrolable, y el volumen almacenado $S(t_{n+1})$, es producto de la aleatoriedad del ingreso, de la decisión tomada y de la condición inicial del caso, $S(t_n)$, que a su vez es función del ingreso en el instante anterior, $x(t_{n-1})$, de la decisión tomada en ese tiempo y del estado en que se encontraba la presa, $S(t_{n-1})$, y así sucesivamente.

Por lo cual, si se considera la presa como un sistema, la operación de la misma puede tratarse como un problema de control donde: las variables de control o decisión esten representadas por los volúmenes de extracción $d_v(t_n)$ y $d_t(t_n)$; la variable no controlable o ruido, por el volumen de ingreso $x(t_n)$; y los estados, por el volumen almacenado al inicio de cada tiempo $S(t_n)$, $S(t_{n+1})$, Ver fig 2.1.

En lo que se refiere al control de un sistema, cabe mencionar que éste puede darse en función del tiempo -"control de lazo abierto" (open loop control)- o en función del tiempo y del estado en que se encuentra el sistema -"control retroalimentable" (feedback control)-. La diferencia entre ambos radica en que el control retroalimentable observa al sistema antes de indicar la decisión a tomar, mientras que el de la

a)



b)

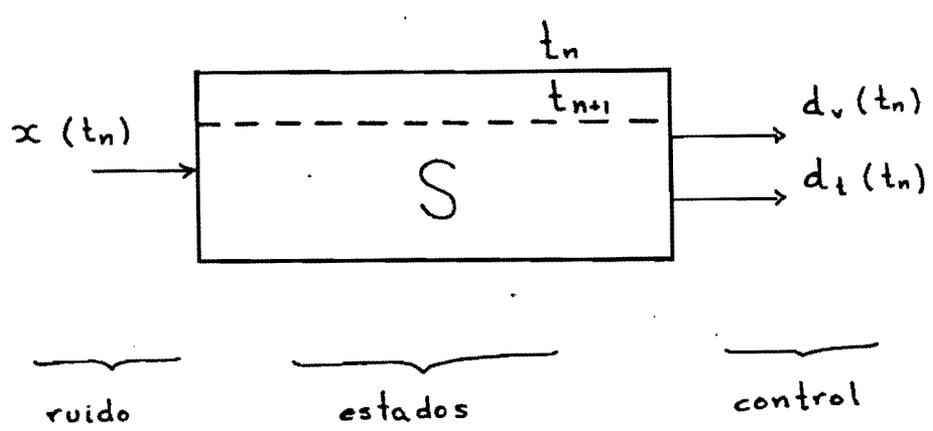


fig 2.1 a) Operación de una presa para generación y control de avenidas; b) Control del sistema correspondiente

zo abierto no.

Cuando el sistema es determinístico, esto es que se conoce *a priori* el valor de $x(t_n)$ para toda n , ambos tipos de control producen resultados equivalentes, ya que no es necesario observar el sistema porque se conoce de antemano el valor de to das las variables que intervienen en el proceso. Sin embargo, cuando la variable $x(t_n)$ es aleatoria, es decir solo se conoce su distribución de probabilidades, el control retroalimentable ofrece ventajas sobre el de lazo abierto porque al poder observar el sistema es posible modificar la decisión de acuerdo con el comportamiento que haya tenido el mismo durante el tiempo anterior.

Como se está considerando que los volúmenes de ingreso al vaso son aleatorios, se prefiere en este trabajo utilizar el control de tipo retroalimentable, el cual se define como

$$D(t_n, S(t_n)) = d_t(t_n) + d_v(t_n) \quad (2.2)$$

donde $D(t_n, S(t_n))$ es la política de operación (volumen de ex tracción por la obra de toma y vertedores) en función del volumen almacenado al inicio de cada tiempo t_n .

Nótese en la ec (2.2) que la forma de definir el control implica el uso de dos variables de decisión, el volumen a ex traer por la obra de toma $d_t(t_n)$ y el volumen por los verte-

dores, $d_v(t_n)$.

Analizando ambas variables se concluye que el control puede darse en función de una sola, el volumen total de extracción $d(t_n)$, por las siguientes razones:

- El volumen de agua que pasa por la obra de toma $d_t(t_n)$, sirve tanto para generación como para el control de avenidas
- El volumen de extracción por vertedores $d_v(t_n)$, sirve sólo en los casos que no es suficiente la capacidad de la obra de toma (turbinas) para controlar la avenida.
- El volumen de agua que pasa por las turbinas $d_t(t_n)$, genera un beneficio económico, no así la que pasa por los vertedores $d_v(t_n)$.

Lo anterior implica que si el volumen necesario para generación y control de avenidas, $d(t_n)$, es menor que la capacidad de las turbinas, C_t , toda el agua debe desalojarse por la obra de toma; en caso contrario las turbinas se operan a su capacidad máxima y el remanente se desaloja por los vertedores, esto es

$$D(t_n, S(t_n)) = d(t_n) \quad (2.3)$$

Si $d(t_n) < C_t(t_n, \bar{H})$

entonces

$$\begin{aligned}d_t(t_n) &= d(t_n) \\d_v(t_n) &= 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

Si $d(t_n) \geq C_t(t_n, \bar{H})$

entonces

$$\begin{aligned}d_t(t_n) &= C_t(t_n, \bar{H}) \\d_v(t_n) &= d(t_n) - C_t(t_n, \bar{H})\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde $C_t(t_n, \bar{H})$ es el volumen máximo que puede pasar por las turbinas con una carga media \bar{H} en el vaso durante el tiempo t_n .

Usando el volumen total de extracción como variable de decisión, la ecuación que describe el funcionamiento de la presa, ec (2.1), puede escribirse como,

$$S(t_{n+1}) = S(t_n) + x(t_n) - d(t_n)\tag{2.6}$$

Nótese en esta ecuación que si se toman valores discretos, dado el estado inicial $S_i(t_n)$ y el control $d_k(t_n)$, el estado resultante $S_j(t_{n+1})$ está asociado a la probabilidad de que la variable de disturbio $x_j(t_n)$ tome valores dentro de un cierto rango. Es por esto que cada estado $S_j(t_{n+1})$ tiene una probabilidad de ocurrencia igual a la de que se presente un volumen de ingreso $x_j(t_n)$.

Por último, considérese que la variable de decisión, ec(2.3),

y las de estado, ec(2.6), están sujetas a limitaciones o restricciones físicas dadas por el volumen mínimo y máximo de almacenamiento y el volumen mínimo y máximo que puede desalojar la obra de toma y los vertedores.

En lo que respecta a la variable de estado, se tiene que el volumen almacenado en cada tiempo no puede ser menor que el correspondiente al nivel de la obra de toma, ni mayor al del NAME, esto es

$$0 \leq S(t_n) \leq C_p \quad (2.7)$$

donde C_p es la capacidad útil de la presa.

Por lo que respecta a la variable de decisión, se tiene que el volumen total de extracción debe ser mayor o igual a cero y menor o igual a la capacidad de la obra de toma y vertedores, esto es

$$0 \leq d(t_n) \leq C_t(t_n, \bar{H}) + C_v(t_n, \bar{H})$$

o bien, debe cumplirse que

$$0 \leq d_t(t_n) \leq C_t(t_n, \bar{H}) \quad (2.8)$$

$$0 \leq d_v(t_n) \leq C_v(t_n, \bar{H}) \quad (2.9)$$

ya que

$$d(t_n) = d_t(t_n) + d_v(t_n)$$

donde

$C_t(t_n, \bar{H})$ capacidad de las turbinas. Volumen máximo que puede pasar por las turbinas durante el tiempo

t_n , el cual es función de la carga media \bar{H} en el vaso en el mismo tiempo

$C_v(t_n, \bar{H})$ capacidad de los vertedores. Volumen máximo que pueden descargar los vertedores con una carga media \bar{H} en el vaso durante el tiempo t_n

Como en la restricción (2.8) se toma en cuenta la forma en que se distribuye el agua por la obra de toma y vertedores, ecs (2.4) y (2.5), es suficiente que se cumpla la restricción (2.9) para asegurar que la variable de decisión $d(t_n)$ es factible.

Resumiendo, el funcionamiento del sistema (la presa) está dado por la ecuación de continuidad,

$$S(t_{n+1}) = S(t_n) + x(t_n) - d(t_n) \quad (2.6)$$

la cual se sujeta a

$$0 \leq S(t_{n+1}) \leq C_p \quad (2.7)$$

donde $S(t_n)$ y $S(t_{n+1})$ se consideran como variables de estado, $x(t_n)$ como variable de disturbio y $d(t_n)$ como variable de control.

El control utilizado es el de tipo retroalimentable por lo cual el volumen total de extracción durante el tiempo t_n , $d(t_n)$, se obtiene como:

$$d(t_n) = D(t_n, S(t_n)) \quad (2.3)$$

Este volumen se extrae usando preferentemente la obra de toma, según se indica en las ecs (2.4) y (2.5), y está sujeto a las restricciones (2.8) y (2.9).

2.3 Función objetivo

En el inciso anterior se mencionó que el volumen de ingreso al vaso se considera aleatorio, y que por esta razón al tomar una decisión cuando la presa se encuentra en un estado inicial dado, el estado resultante puede tomar varios valores, cada uno con cierta probabilidad, según sea el volumen de ingreso. Por este motivo, el beneficio o costo asociado a dicha decisión sólo puede conocerse en valor esperado, el cual se obtiene multiplicando el beneficio correspondiente a cada estado resultante por su probabilidad de ocurrencia y sumando después sobre todos los estados factibles.

El problema consiste en determinar los principales aspectos de los que depende un buen o un mal control. Cualitativamente un buen control debe cumplir los siguientes requisitos:

- ser factible
- obtener el máximo beneficio por generación
- minimizar los daños por inundación
- surtir durante la etapa la energía prometida
- garantizar la seguridad de la presa

2.3.1 Factibilidad de la política de operación

Una política de operación es factible cuando todas y cada una de las decisiones que la componen pueden llevarse a cabo.

Para el caso en estudio, por la forma en que se distribuye el volumen de extracción, ecs (2.4) y (2.5), la decisión siempre es factible cuando el volumen total de extracción $d(t_n)$ es menor a la capacidad de las turbinas $C_t(t_n, \bar{H})$, ec (2.4). Pero cuando la extracción $d(t_n)$ es mayor a $C_t(t_n, \bar{H})$, ec (2.5), la decisión será factible sólo si la carga media en el vaso \bar{H} , es suficiente para sacar el volumen remanente $d(t_n) - C_t(t_n, \bar{H})$, y además éste no sobrepasa la capacidad de los vertedores $C_v(t_n, \bar{H})$, ec (2.9).

2.3.2 Beneficios que se obtienen por energía producida en un tiempo dado,

La energía que se genera en un tiempo dado es función de la eficiencia, la carga media en las turbinas y el volumen de agua turbinado, esto es

$$E(t_n) = 2.725\eta (\bar{H} - \bar{H}_D) Q t_n$$

$$\delta E(t_n) = 2.725\eta (\bar{H} - \bar{H}_D) d_t(t_n) \quad (2.10)$$

donde

$E(t_n)$ energía generada en el tiempo t_n , MWh

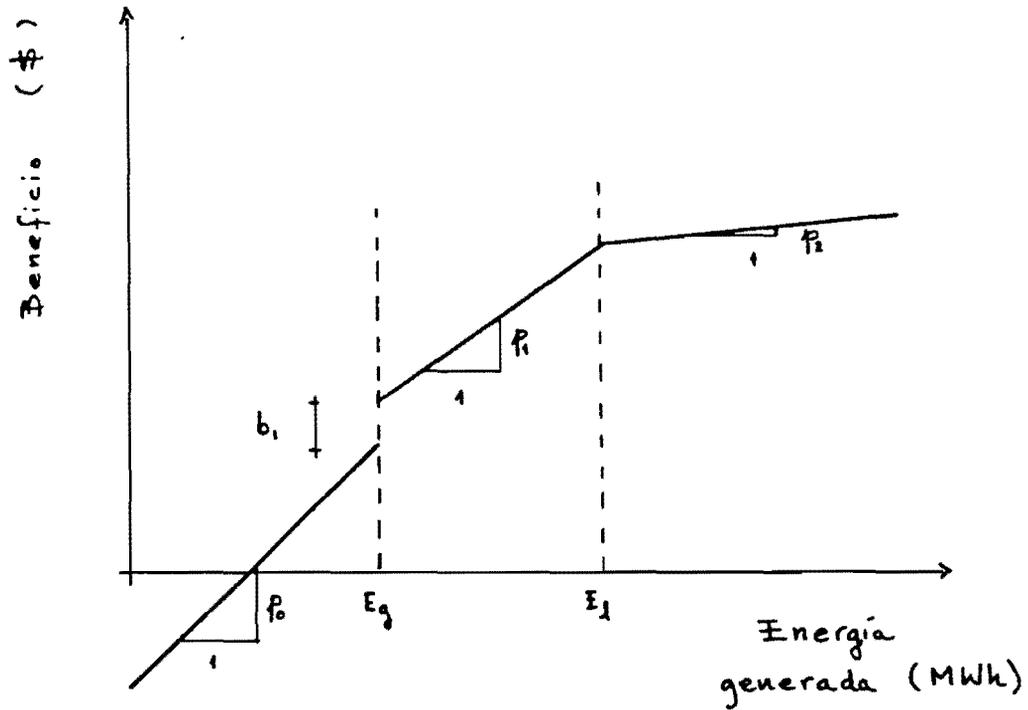


fig 2.2 Función energía generada-beneficio

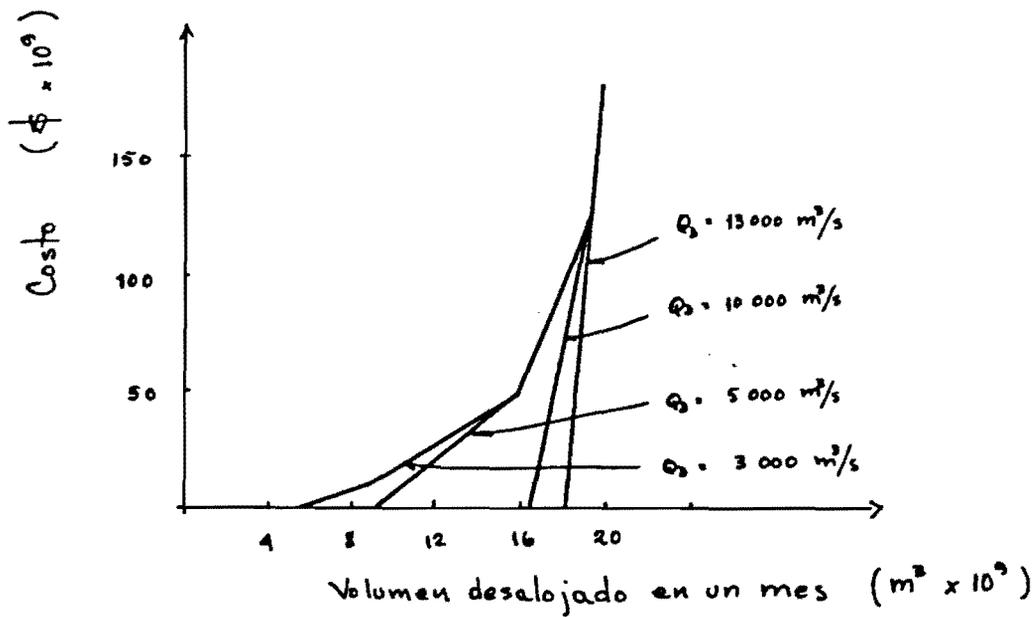


fig 2.3 Función volumen desalojado-costo por daños por inundación, para distintas capacidades del cauce

η	eficiencia media de las turbinas
\bar{H}	carga media en el vaso, m
\bar{H}_D	nivel medio de desfogue, m
$d_t(t_n)$	volumen de agua turbinado, 10^6 m^3

Los beneficios económicos por generación pueden calcularse como se muestran en la figura 2.2. En esta función se consideran hasta tres posibles valores del MWh. El primero, a través del parámetro p_1 , mide el valor de la energía cuando se entrega en las condiciones normales previstas. Con p_2 se considera la posibilidad de que la entrega de energía en exceso de la prevista tenga un valor real menor a la entregada en condiciones normales, esto es $p_2 \leq p_1$. Por último, si la energía entregada es menor que un valor mínimo prefijado, es posible imponer un castigo, b_1 , y además dar un valor distinto al MWh con el parámetro p_0 .

2.3.3 Daños por inundaciones causadas aguas abajo de la presa

El volumen total de agua desalojado de la presa V , en un intervalo de tiempo dado

$$V(t_n) = d_t(t_n) + d_v(t_n)$$

puede causar daños en los vertedores (como los provocados por la cavitación), y en las zonas de planicie aguas abajo de la presa (por inundaciones).

Los costos económicos por inundaciones están en función de la capacidad del cauce y pueden calcularse como se muestra en la figura 2.3.

Debe notarse que, en general, se puede disponer de información que relaciona los daños con los gastos máximos descargados pero no con los volúmenes. Por tal motivo, es necesario realizar un estudio paralelo que permita relacionar en promedio el gasto máximo descargado con el volumen derramado en un tiempo dado.

2.3.4 Costo por energía prometida y no entregada

El modelo de decisión propuesto, considera que el control se toma al inicio de cada etapa y éste se mantiene a lo largo de ella. Existe, sin embargo, la posibilidad de que la presa llege a su nivel mínimo antes de que la etapa finalice y por lo tanto no se entregue la energía programada al inicio.

Esto implica que el estado resultante $S(t_{n+1})$ no cumple con la restricción (2.7) y por tanto ocurra un déficit.

Con objeto de tomar en cuenta este estado de falla se calcula un costo proporcional a la diferencia de la energía prometida y la generada, esto es

$$C = \alpha (E_p - E_g) \quad (2.11)$$

$$E_g \leq E_p$$

donde

- E_p energía prometida
- E_g energía generada
- α costo unitario por energía prometida y no generada
- C costo por energía prometida y no entregada

Para calcular la energía que en estas condiciones puede generarse, E_g , es necesario conocer el volumen que ingresa al vaso y el que puede turbinarse. Sin embargo, como no se conoce a priori el volumen de ingreso, el volumen medio que puede turbinarse, $\bar{d}_t(t_n)$, es

$$\bar{d}_t(t_n) = S(t_n) + E \left[x(t_n) / S(t_n) = i \text{ y } S(t_{n+1}) = 0 \right]$$

$$\bar{d}_t(t_n) = S(t_n) + \bar{x}_{df} \quad (2.12)$$

donde

\bar{x}_{df} volumen medio que ingresa al vaso y provoca el déficit dado el estado inicial $S(t_n)$

La energía generada correspondiente se calcula según la ec (2.10) como

$$E_g = 2.725\eta (\bar{H} - \bar{H}_D) \bar{d}_t(t_n) \quad (2.13)$$

sustituyendo (2.10) y (2.13) en (2.11) se obtiene

$$C = \alpha 2.725\eta (\bar{H} - \bar{H}_D) \left[d_t(t_n) - \bar{d}_t(t_n) \right] \quad (2.14)$$

$$\bar{d}_t(t_n) \leq d_t(t_n)$$

2.3.5 Costo de falla por desborde

La principal finalidad de la obra vertedora, y por tanto de las descargas que por ella se efectuen, es impedir que el nivel del agua en el vaso alcance la corona de la presa (o el NAME si se considera oleaje). Pero puede ser que ingrese al vaso un volumen tal que dicho límite sea sobrepasado, aun cuando el control (volumen total de extracción) se efectue, lo cual implica, que el estado resultante $S(t_{n+1})$ no cumple con la restricción (2.7) y, por tanto, ocurra un desborde. Por esta razón, es necesario introducir en la función objetivo un parámetro que permita considerar dicha falla.

Una primera opción consiste en asignar un costo a la falla de rivada de sobrepasar la corona y dejar que el modelo de optimización produzca una política tal que el costo esperado por falla —es decir, el producto del costo asignado por la probabilidad de que ocurra la falla— se reduzca a un mínimo.

Una segunda opción consiste en definir un nivel de agua máximo ordinario (NAMO), e introducirlo en el modelo como una restricción en las posibilidades de operación, en cuyo caso no es necesario asignar un costo a la posibilidad de desborde.

Ambas opciones tienen ventajas y desventajas. La segunda tiene la ventaja de su simplicidad pero en cambio no permite -

que la optimación misma defina los niveles que deben alcanzarse en cada etapa. La primera opción es teóricamente la ideal, pero presenta dos desventajas interrelacionadas. Por una parte es difícil estimar un costo asociado a la falla, y por otra, debido a que se trabaja con intervalos de tiempo relativamente grandes y la decisión se mantiene durante todo el intervalo, no es posible reprogramar a tiempo la extracción por vertedores cuando se presentan las grandes avenidas, como se haría en la práctica. Por tal motivo, los costos que se asignan a la posibilidad de falla tendrían que manejarse sólomente como indicadores y no corresponderían directamente a los costos "reales" derivados de la falla.

En este trabajo, y en el programa para computadora desarrollado, se deja abierta la posibilidad de usar ambos criterios.

3. DESARROLLO DEL MODELO DE OPTIMACION

3.1 Introducción

En la teoría clásica de optimación se tratan problemas en los que, para ciertas condiciones iniciales, al definir el valor de las variables independientes (variables de decisión o control) se determina una sola solución (trayectoria) del sistema. Sin embargo, existen sistemas en los que al definir el valor de las variables de decisión (o simplemente, el control), no se define una sola trayectoria factible, sino un conjunto. Esto se debe a que dentro del sistema existen variables aleatorias (de disturbio) que no pueden controlarse y provocan dicha indeterminación.

Cuando la ley de probabilidades de las variables de disturbio queda definida al especificar el control, se dice que el sis-

tema es probabilístico o estocástico.

Para este tipo de casos existen varios métodos que podrían emplearse para determinar el control óptimo. Entre ellos se encuentran: la simulación (ref 1), el cálculo de variaciones basado en el principio de Pontryagin (ref 2) y la programación dinámica (refs 3,4,5).

Cada uno de estos métodos tienen distintas limitaciones, ventajas y desventajas. Por ejemplo, el cálculo de variaciones tiene la desventaja de que la mayor parte de la teoría supone una función objetivo cuadrática y continua, lo cual no siempre es representativo de la realidad. En contraste, la programación dinámica tiene como ventaja su fácil aplicación y además que la función objetivo y restricciones pueden ser discontinuas y no lineales; pero tiene la desventaja de que los requerimientos de memoria y tiempo de cómputo pueden ser muy grandes.

La operación de una presa con ingresos aleatorios (cap 2.2), puede tratarse como un sistema estocástico cuyo control óptimo puede determinarse utilizando uno de los métodos mencionados. En este trabajo se escogió el método de la programación dinámica, ya que en general, la función objetivo (cap. 2.3) es discontinua y no lineal.

En el desarrollo de este capítulo se presenta primero la teoría general de la programación dinámica y después se relacionan sus conceptos con los de la operación de una presa, para obtener así el modelo de optimación.

3.2 Programación dinámica estocástica

La programación dinámica es un método matemático desarrollado por R Bellman (ref 4) para determinar el control óptimo factible de un sistema.

Si se discretiza el sistema, de tal forma que se consideren n intervalos de tiempo, ns estados y nk decisiones un posible control del sistema estará dado, según (2.3), como

$$D_1(t_n, s_i) = d_k \quad (3.1)$$

$$i = 1, \dots, ns$$

$$n = 1, \dots, ne$$

donde

D_1 l-ésimo control del sistema, de tipo retroalimentable (ver inciso 2.2). Indica la decisión d_k a tomar al inicio de cada tiempo t_n si en ese momento el sistema se encuentra en el estado s_i

Los valores que pueden tomar las variables de decisión están limitados por una serie de restricciones, las cuales definen una región de factibilidad R . Cualquier decisión d_k que cum-

pla con todas las restricciones se dice que es factible y pertenece a R , esto es, $d_k \in R$.

En tales condiciones, un control es factible si y solo si cada una de las decisiones d_k que lo constituyen es factible. Esto es, D_1 es factible si

$$D_1(t_n, s_i) = d_k \in R \quad (3.2)$$

$$i = 1, \dots, ns$$

$$n = 1, \dots, ne$$

Ahora bien, si se determina una función objetivo F , que refleje los efectos de un control dado, se tiene entonces, que el control óptimo factible D , es aquel que genera el mejor valor de la función objetivo, esto es

$$F(D) > F(D_1)$$

donde $D_1 \in R$, $l = 1, \dots, nl$

o de otra forma

$$F(D) = \max_1 F(D_1), \quad D_1 \in R \quad (3.3)$$

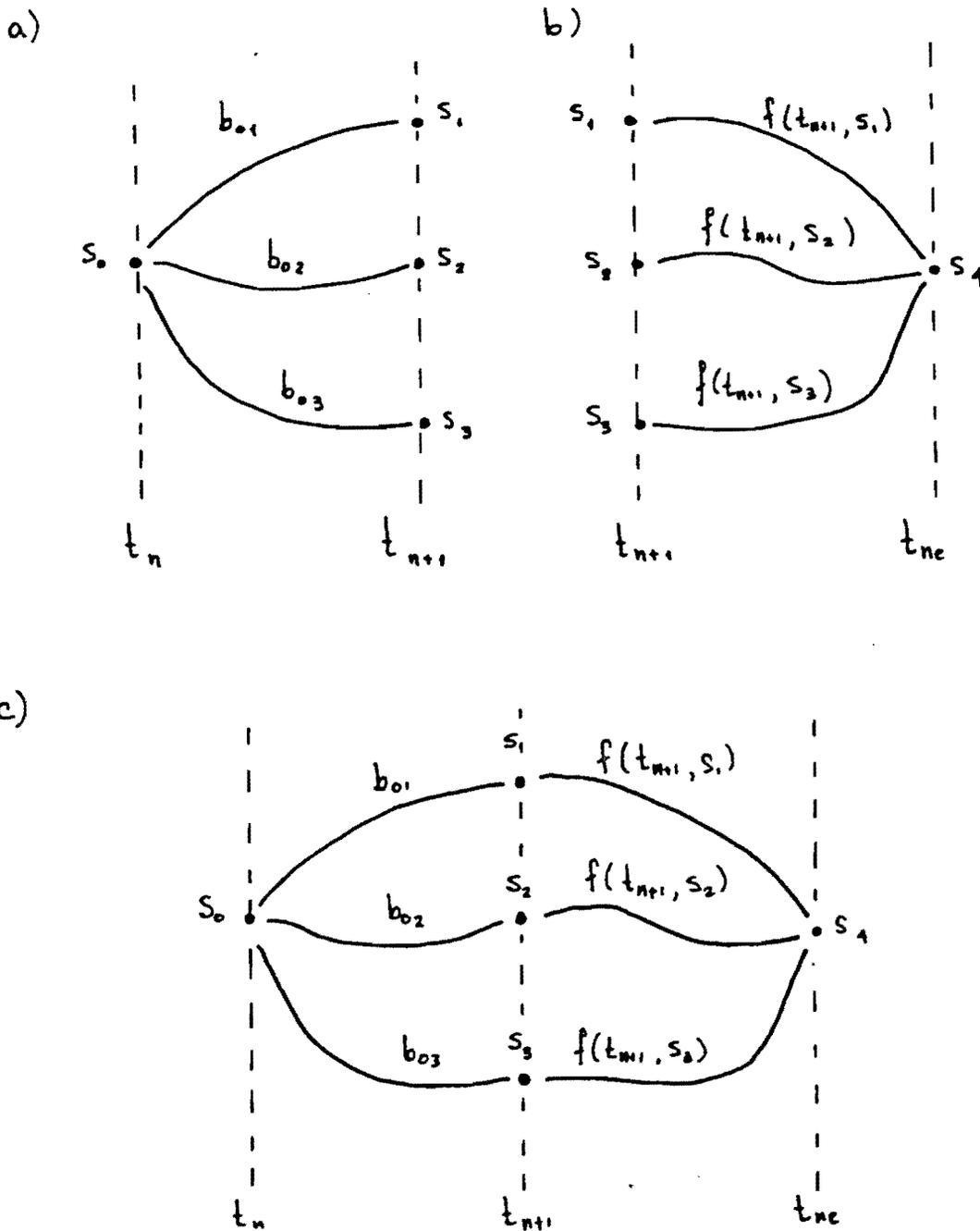
La programación dinámica determina el control óptimo factible del sistema empleando un concepto llamado, principio de optimalidad, que dice:

"Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que sea el estado y la decisión inicial, las decisiones restantes deben constituir una política óptima respecto al estado

restultante de la primera decisión".

Para ilustrar este principio, considérese un sistema determinístico de decisiones en secuencia, esto es, un sistema en el que al definir el control en cada tiempo (etapa) se determina una sola trayectoria. Supóngase que el sistema se encuentra en el tiempo t_n en el estado s_0 , fig 3.1(a), en donde puede tomar una de tres decisiones d_k , $k=1,2,3$. Según sea la decisión tomada, el sistema se transforma en los estados s_1, s_2 ó s_3 en el tiempo t_{n+1} , con un beneficio (o costo) $b(t_n, s_0, d_1, s_1)$, $b(t_n, s_0, d_2, s_2)$ ó $b(t_n, s_0, d_3, s_3)$ respectivamente. Además, supóngase que se conocen las decisiones óptimas que lleven al sistema desde los estados s_1, s_2, s_3 en el tiempo t_{n+1} hasta el estado final s_4 en el tiempo t_{ne} , y también el beneficio máximo $f(t_{n+1}, s_1)$, $f(t_{n+1}, s_2)$, $f(t_{n+1}, s_3)$ que se obtiene en cada trayectoria, fig 3.1(b).

El principio de optimidad implica que si $s_0(t_n) - s_1(t_{n+1})$ es el segmento inicial de la trayectoria óptima de $s_0(t_n)$ a $s_4(t_{ne})$, entonces $s_1(t_{n+1}) - s_4(t_{ne})$ es el segmento restante de esta trayectoria, fig 3.1(c). De la misma manera, si $s_0(t_n) - s_2(t_{n+1})$ y $s_0(t_n) - s_3(t_{n+1})$ fueran respectivamente el segmento inicial de dicha trayectoria óptima, se concluye que las trayectorias mostradas en la fig 3.1(c) son las tres únicas candidatas para determinar la trayectoria óptima de $s_0(t_n)$ a $s_4(t_{ne})$. A cada una de éstas le corresponde un beneficio acumulado $F(t_n, s_0, d_k)$ que se calcula como



se ha hecho

$$b_{01} = b(t_n, s_0, d_1, s_1)$$

$$b_{02} = b(t_n, s_0, d_2, s_2)$$

$$b_{03} = b(t_n, s_0, d_3, s_3)$$

fig 3.1 Sistema determinístico de decisiones

$$\begin{aligned}
 F(t_n, s_o, d_1) &= b(t_n, s_o, d_1, s_1) + f(t_{n+1}, s_1) \\
 F(t_n, s_o, d_2) &= b(t_n, s_o, d_2, s_2) + f(t_{n+1}, s_2) \\
 F(t_n, s_o, d_3) &= b(t_n, s_o, d_3, s_3) + f(t_{n+1}, s_3)
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

La trayectoria óptima desde el estado $s_o(t_n)$ se obtiene determinando la decisión d_k que genera el máximo beneficio acumulado.

$$f(t_n, s_o) = \max\{F(t_n, s_o, d_1), F(t_n, s_o, d_2), F(t_n, s_o, d_3)\}$$

ó

$$f(t_n, s_o) = \max_k \{F(t_n, s_o, d_k)\} \tag{3.5}$$

$k = 1, 2, 3$

$$D(t_n, s_o) = d_k(\max) \tag{3.6}$$

donde

- $f(t_n, s_o)$ beneficio máximo que se obtiene si al inicio del tiempo t_n el sistema se encuentra en el estado s_o y a partir de ese momento, hasta el final, se sigue un control óptimo
- $d_k(\max)$ decisión para la cual F es máximo
- $D(t_n, s_o)$ control óptimo. Indica la decisión a tomar cuando en el tiempo t_n el sistema se encuentra en el estado s_o

Nótese que con las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6), aplicadas en forma recursiva, puede determinarse el control óptimo

$D(t_n, s_i)$ para cada estado s_i , $i=1, \dots, ns$ y todo tiempo t_n , $n=1, \dots, ne$ siempre y cuando se conozcan los valores de frontera $f(t_{ne+1}, s_i)$, $i=1, \dots, ns$.

Si el sistema es estocástico y no determinístico, cuando en el tiempo t_n el sistema se encuentra en el estado s_i y se especifica una de las nk decisiones d_k , el sistema puede transformarse en cualquiera de los ns estados s_j con un beneficio $b(t_n, s_i, d_k, s_j)$, según sea el volumen de ingreso X durante la etapa (ver fig 3.2). Cada estado resultante s_j tendrá una probabilidad de ocurrir $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$ igual a la de que se presente un volumen de ingreso x_j .

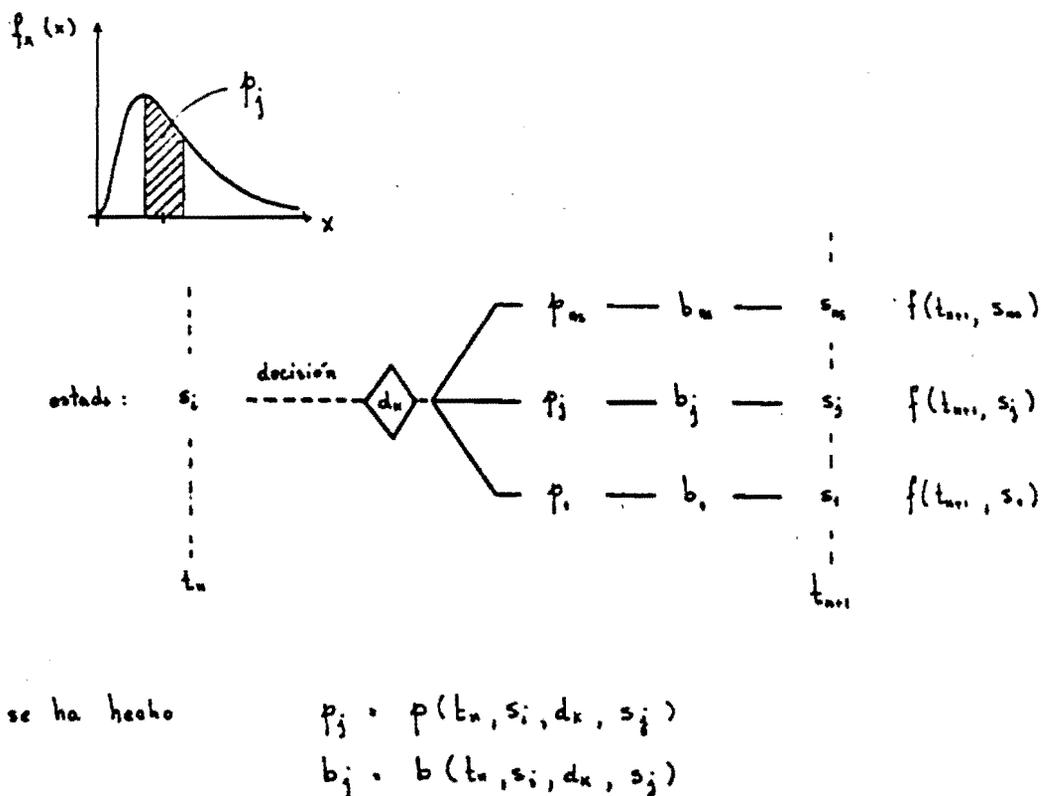


Fig 3.2 Sistema estocástico; efectos de una decisión

Por esta razón aunque se conozca la política óptima de decisión (control óptimo) a partir del tiempo t_{n+1} hasta el final, no puede definirse una sola trayectoria, como podía hacerse en el caso determinístico, fig 3.1(b), pero sí calcularse el valor esperado óptimo $f(t_{n+1}, s_i)$ de los beneficios que se obtendrían en cada caso.

Compárese la fig 3.2, donde una decisión define varias trayectorias cada una con cierta probabilidad y beneficio, con la fig 3.1(a), en donde cada decisión d_k define un solo estado resultante en el tiempo t_{n+1} y su beneficio correspondiente $b(t_n, s_o, d_k, s_k)$ con probabilidad uno.

Aplicando el principio de optimidad, la decisión óptima se encuentra en una de las nk . El beneficio acumulado que se obtiene en promedio, al tomar cada decisión d_k , cuando en el tiempo t_n el sistema se encuentra en el estado s_i es

$$\begin{aligned}
 F(t_n, s_i, d_k) &= E \left[b(t_n, s_i, d_k, s_j) + f(t_{n+1}, s_j) \right] \\
 &= \sum_{j=1}^{ns} p(t_n, s_i, d_k, s_j) \left[b(t_n, s_i, d_k, s_j) + f(t_{n+1}, s_j) \right] \\
 &\dots \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

La decisión d_k (máx) que genera el máximo beneficio esperado acumulado $f(t_n, s_i)$, es la que forma parte de la política de operación óptima D , esto es

$$f(t_n, s_i) = \max_k F(t_n, s_i, d_k) \quad (3.8)$$

y

$$D(t_n, s_i) = d_k \text{ (máx)} \quad (3.9)$$

Las ecuaciones recurrentes (3.7), (3.8) y (3.9) son las fundamentales de la programación dinámica para los sistemas estocásticos, o como un caso particular, los determinísticos.

Para resolverlas es necesario conocer o determinar los valores de frontera $f(t_{ne+1}, s_j)$, $j=1, \dots, ns$, ver fig 3.3.

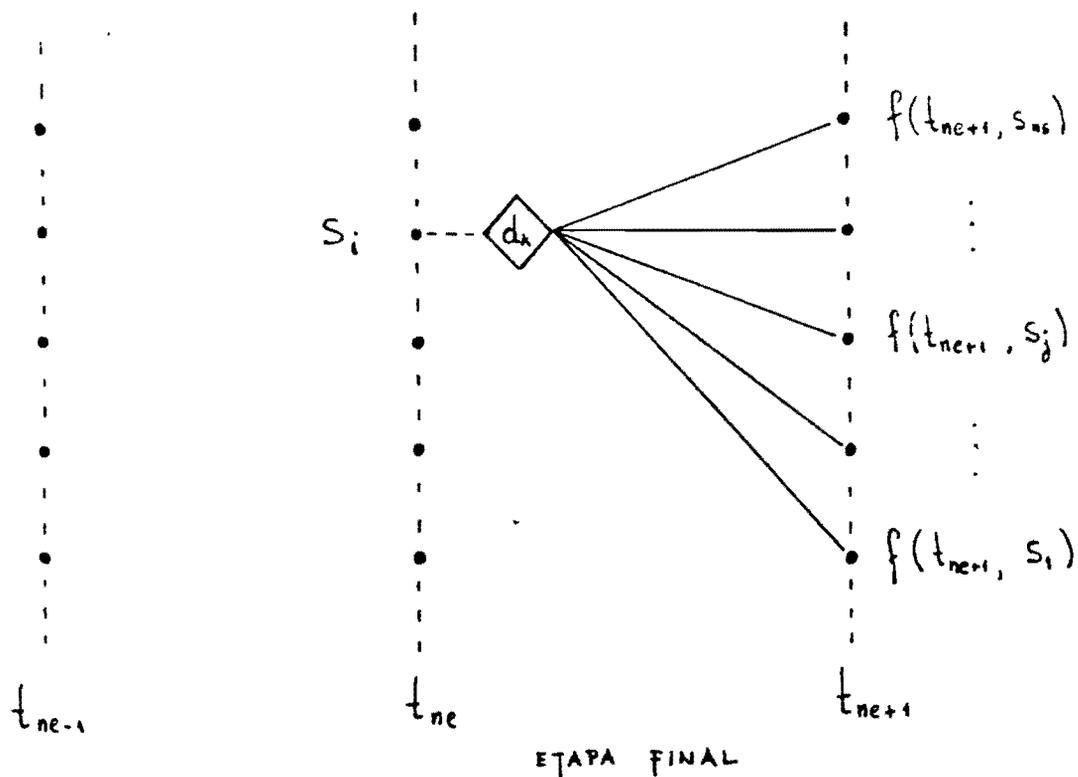


fig 3.3 Sistema estocástico; valores de frontera

Cuando se conocen los valores $f(t_{ne+1}, s_j)$, el control óptimo $D(t_n, s_i)$, $i=1, \dots, ns$, $n=1, \dots, ne$, se obtiene de la siguiente manera:

- a) Se aplica la ec (3.7) para la etapa final t_{ne} , fijando un estado inicial, s_1 por ejemplo, y se determinan así los nk valores $F(t_{ne}, s_1, d_k)$
- b) Se encuentra el valor máximo $f(t_{ne}, s_1)$, ec (3.8), y la decisión que lo define $d_k(\text{máx})$, ec(3.9), forma parte de la política óptima $D(t_{ne}, s_1)$
- c) Se procede de igual forma con todos los estados s_i , $i=1, \dots, ns$, pasos a) y b), determinándose así los ns valores $f(t_{ne}, s_i)$ y la política $D(t_{ne}, s_i)$ para la etapa t_{ne}
- d) Con los valores de $f(t_{ne}, s_i)$, se aplica el procedimiento anterior, pasos a), b) y c), pero ahora para la etapa t_{ne-1} y así sucesivamente, obteniéndose de esta manera las $ne \times ns$ decisiones que constituyen la política de operación óptima $D(t_n, s_i)$.

Sin embargo, existen sistemas en los que no es posible calcular o conocer los valores de frontera $f(t_{ne+1}, s_j)$, como es el caso de un sistema estacionario periódico—las características estadísticas de la variable aleatoria en un tiempo dado, se repiten después de un periodo T determinado . En este

tipo de sistemas se conforma un proceso cíclico donde los estados s_i , $i=1, \dots, ns$, en el tiempo t_{ne+1} son idénticos a los estados del tiempo t_1 , esto es,

$$s_i(t_{ne+1}) = s_i(t_1), \quad i=1, \dots, ns$$

Para obtener en estos casos la política de operación óptima $D(t_n, s_i)$, puede procederse por iteraciones, considerando que si las características estadísticas no cambian de una iteración a otra se conforma un proceso de Markov, el cual tiene un comportamiento asintótico al límite* (ref 6). Por lo tanto, si el beneficio máximo esperado que se obtiene en una iteración es semejante al de la anterior, el proceso empieza a estabilizarse y la política de operación correspondiente ya no cambia. Este proceso iterativo puede resumirse en los siguientes puntos:

- a) Se hace $\Delta_\ell(i) = 0$, $i=1, \dots, ns$; $\ell = 0$
- b) Se suponen los valores de frontera $f_\ell(t_{ne+1}, s_j)$ para la iteración $\ell = 1$
- c) Se aplica la programación dinámica desde $n=ne$ hasta $n=1$, obteniendo

$$D_\ell(t_n, s_i), \quad i=1, \dots, ns; \quad n=ne, \dots, 1$$

*significa que después de un número finito de ciclos (iteraciones), el beneficio esperado en cada ciclo es constante e igual para todos los demás.

y

$$f_{\ell}(t_1, s_i), i=1, \dots, ns$$

- d) Se obtienen el beneficio máximo esperado en la iteración ℓ ,

$$\Delta_{\ell}(i) = f_{\ell}(t_1, s_i) - f_{\ell}(t_{ne+1}, s_i)$$

$$i=1, \dots, ns$$

- e) Se comparan los beneficios máximos esperados en la iteración ℓ y $\ell-1$,

$$- \text{ si } \left| \Delta_{\ell}(i) - \Delta_{\ell-1}(i) \right| \leq \xi$$

$$i=1, \dots, ns$$

entonces $D_{\ell}(t_n, s_i)$, es la política óptima buscada

- en caso contrario, inciso f)

- f) Se asignan los valores de $f_{\ell}(t_1, s_j)$ a los de frontera de la siguiente iteración $f_{\ell+1}(t_{ne+1}, s_j)$

$$f_{\ell+1}(t_{ne+1}, s_i) = f_{\ell}(t_1, s_i), i=1, \dots, ns$$

- g) Se hace $\ell = \ell+1$ y se repite el procedimiento desde el inciso c).

3.3 Adecuación de la programación dinámica estocástica a la operación óptima de una presa

Como ya se ha mencionado anteriormente, la operación de una presa puede considerarse como un sistema estocástico,

$$s(t_{n+1}) = s(t_n) + x(t_n) - d(t_n)$$

cuyo control óptimo factible puede determinarse usando la programación dinámica estocástica.

En lo que sigue se relacionan los conceptos de programación dinámica con los de la operación de una presa, describiendo la forma en que se han considerado las etapas, los estados y las decisiones; así como la forma de calcular las probabilidades $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$ y beneficios $b(t_n, s_i, d_k, s_j)$.

3.3.1 Variable de disturbio, $X(t_n)$

La variable de disturbio en una presa está dada por el volumen de ingreso al vaso en un tiempo dado.

En general el volumen de ingreso es una variable estocástica estacionaria que puede tener una componente autorregresiva que relaciona el ingreso $x(t_n)$ en una etapa con el de las etapas anteriores, $x(t_{n-1})$, $x(t_{n-2})$, etc.

Cuando se considera correlación, los estados y la política

de operación, deben estar en términos del volumen almacenado en el tiempo t_n , $s(t_n)$, y de los volúmenes de ingreso $x(t_{n-1})$, $x(t_{n-2})$, etc, según sea el orden de correlación que se considere.

En este trabajo se considera que el proceso es estacionario periódico y se desprecia la autocorrelación.

3.3.2 Etapas, t_n

Las etapas en la operación de una presa están representadas por intervalos de tiempo en el lapso de un año (ya que el sistema se considera estacionario con periodo de un año).

3.3.3 Variables de estado, $s_i(t_n)$

El estado de un sistema debe estar dado por tantas variables como sean necesarias para resumir la información del mismo. Si se supone que la ec (2.6) junto con sus restricciones representan completamente al sistema, se deduce que sólo se requiere de una variable para definir el estado de la presa, el volumen almacenado en cada etapa $s(t_n)$; ya que $x(t_n)$ es la variable de disturbio y $d(t_n)$ el control que se busca determinar.

Para poder aplicar el método de la programación dinámica, tal y como se describe en el inciso 3.2, es necesario discretizar

la capacidad útil de la presa en ns estados. Entonces a cada estado j le corresponde un valor representativo s_j y un intervalo de valores $(s_j - \alpha_j, s_j + \beta_j)$, tal que $\alpha_j + \beta_j = \Delta_j$.

Si la discretización es uniforme, el tamaño de cada intervalo es $\Delta = C/ns$ ($\alpha_j = \beta_j = \Delta/2$, $j=1\dots,ns$) y el valor representativo de cada estado se define como el promedio entre los límites del intervalo correspondiente.

Si se designa con s_{ns} al estado con volumen máximo y s_1 al de volumen mínimo, los intervalos asociados a cada estado y su valor representativo son los mostrados en la tabla 3.1. Un caso especial en que se consideran cinco estados se muestra en la fig 3.4.

Ahora bien, la subdivisión de estados anterior presupone una operación estrictamente factible, esto es, que en un momento y estado dado al aplicar un control, el estado resultante s_j cumple, con probabilidad uno, la restricción (2.7). Lo anterior en ningún caso es cierto ya que si existe una probabilidad, por pequeña que ésta sea, de que el volumen de ingreso sea extraordinariamente bajo o alto, hay una probabilidad también distinta de cero de que el estado resultante no cumpla con dicha restricción.

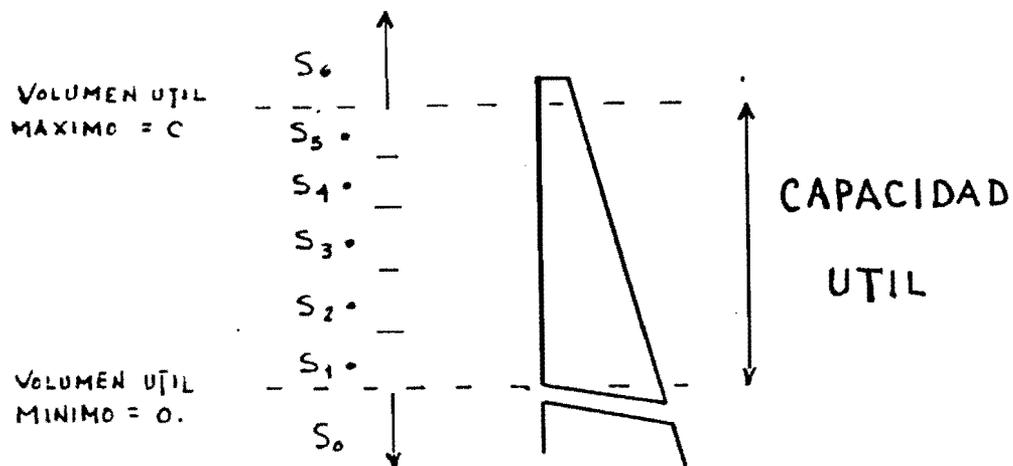
Con objeto de no descartar a priori ningún control por no cumplir estrictamente con la restricción (2.7), se consideran

TABLA 3.1 Discretización uniforme de estados

Estado j	Intervalo		Valor representativo S_j
	límite inferior	límite superior	
$ns+1^*$	C	$+\infty$	—
ns	$(ns-1)\Delta$	C	$(ns-1/2)\Delta$
⋮			⋮
i	$(i-1)\Delta$	$i\Delta$	$(i-1/2)\Delta$
⋮			⋮
2	Δ	2Δ	$3\Delta/2$
1	0	Δ	$\Delta/2$
0^{**}	$-\infty$	0	—

* estado de falla por superávit

** estado de falla por déficit



n_s : número de estados factibles (en la fig $ns=5$)

S_{ns+1} : estado de falla por superávit

S_0 : estado de falla por déficit

Fig 3.4 Discretización de la capacidad útil

dos estados más, llamados de falla por déficit y superávit, fig 3.4; para los cuales se calcula, al igual que para los demás, su probabilidad de ocurrencia y su contribución a la función objetivo. Dejando al método de optimización que sea quien descarte las decisiones con probabilidad de falla "grande", o visto de otra forma, que sea quien obtenga el control de valor esperado máximo.

La característica especial de los estados de falla es que sólo se toman en cuenta como un estado posible s_j en el que puede transformarse un estado inicial factible s_i . Las razones para considerarlos de esta forma son: a) el nivel en el vaso no puede bajar más del mínimo, aun cuando ocurra un déficit en el tiempo t_n , lo cual implica que el estado inicial en el tiempo t_{n+1} , en estas circunstancias, es precisamente el mínimo, b) nunca se deja que el nivel en el vaso sobrepase el máximo para evitar que la presa se desborde, por lo cual, cuando se presenta un superávit, el volumen inicial en la siguiente etapa es cuando más el de la capacidad útil.

Procediendo de esta forma, fig 3.5, es posible considerar la probabilidad de falla de cada decisión sin tener que descartar a priori algunas de ellas.

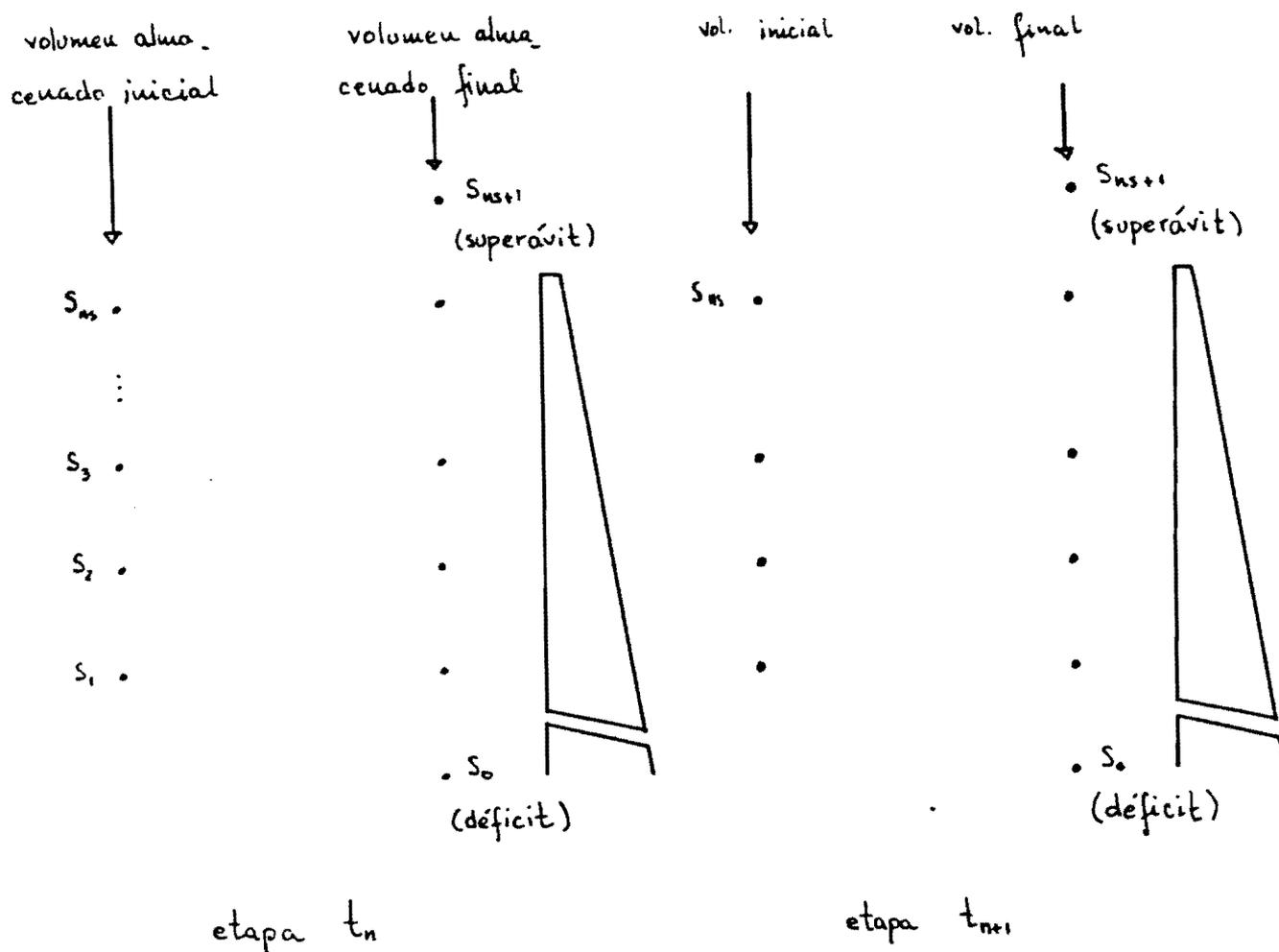


fig 3.5 Estados de falla

3.3.4 Variables de decisión, $d_k(t_n)$

Según se dedujo en el capítulo 2, el control de una presa puede darse en función de una sola variable de decisión, el volumen total de extracción $d(t_n)$, ec (2.3). Las ecuaciones (2.4) y (2.5) definen la forma de distribuir este volumen por turbinas y vertedor.

Para que la decisión sea factible es necesario que cumpla con las restricciones impuestas por la capacidad máxima de las turbinas y de los vertedores.

Por último, para aplicar el método de la programación dinámica, es necesario discretizar la variable de decisión y considerar sólomente nk decisiones distintas $d_k(t_n)$, $k=1, \dots, nk$.

3.3.5 Cálculo de la probabilidad $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$

Para calcular la probabilidad de transición $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$, considérese la ecuación que describe el funcionamiento del sistema en forma discreta, ec (2.6),

$$s_j(t_{n+1}) = s_i(t_n) + x_j(t_n) - d_k(t_n)$$

la cual puede reescribirse como

$$x_j(t_n) = s_j(t_{n+1}) - [s_i(t_n) - d_k(t_n)] \quad (3.10)$$

Si el sistema parte del estado s_i (volumen representativo del estado s_i) y se toma una de las decisiones d_k , existe un conjunto de valores del volumen de ingreso que va desde $(x_j - \alpha_j)$ hasta $(x_j + \beta_j)$ que transforman al sistema en el estado s_j ; ya que por definición, inciso 3.3.3, a cada estado le corresponde un intervalo de valores del volumen de almacenamiento $(s_j - \alpha_j, s_j + \beta_j)$.

Por lo tanto, la probabilidad $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$ de que en el tiempo t_n el sistema pase del estado s_i al s_j al tomar la decisión d_k , es igual a la probabilidad de que ingrese un volumen X tal que transforme al sistema en cualquiera de los volúmenes que definen el estado j , esto es

$$p(t_n, s_i, d_k, s_j) = P_n \left[x_j - \alpha_j < X \leq x_j + \beta_j \right]$$

Ahora bien, si se conoce la función de distribución F_n , del volumen de ingreso para cada etapa t_n , la ecuación anterior puede escribirse como

$$p(t_n, s_i, d_k, s_j) = F_n(x_j + \beta_j) - F_n(x_j - \alpha_j) \quad (3.11)$$

La probabilidad de transición a un estado de falla se calcula en forma semejante, considerando que el intervalo de valores de cada estado se extienda hasta $\pm \infty$, según sea el caso.

Falla por déficit, $j=0$ $(-\infty, x_1 - \alpha_1)$

$$p(t_n, s_i, d_k, s_0) = p_{df}(t_n, s_i, d_k) = P_n \left[-\infty < X \leq x_1 - \alpha_1 \right]$$

usando la función de distribución queda

$$p_{df}(t_n, s_i, d_k) = F_n(x_1 - \alpha_1) \quad (3.12)$$

Falla por superávit, $j=ns+1$ ($x_{ns} + \beta_{ns}, \infty$)

$$p(t_n, s_i, d_k, s_{ns+1}) = p_{de}(t_n, s_i, d_k) = P_n \left[x_{ns} + \beta_{ns} < X \leq \infty \right]$$

esto es

$$p_{de}(t_n, s_i, d_k) = 1 - F_n(x_{ns} + \beta_{ns}) \quad (3.13)$$

3.3.6 Cálculo del beneficio $b(t_n, s_i, d_k, s_j)$

La contribución a la función objetivo $b(t_n, s_i, d_k, s_j)$ depende en general del tiempo t_n , la decisión d_k y los estados iniciales s_i y final s_j .

Para el caso de una presa para generación y control de avenidas, los aspectos que deben considerarse en la función objetivo de tal forma que ésta refleje adecuadamente la preferencia entre un control y otro, se presentaron en el inciso 2.3.

El beneficio $b(t_n, s_i, d_k, s_j)$ se calcula de distintas formas según sea el estado s_j . Cuando por acción del control d_k , el sistema se transforma en un estado s_j dentro de la capacidad útil de la presa, entonces se consideran beneficios por generación y costos por inundación, ec (3.14). Pero cuando el estado resultante es de falla, entonces se contabiliza un costo por superávit o un costo de falla por déficit, según sea el caso; esto es

$$b(t_n, s_i, d_k, s_j) = \begin{cases} -\text{CDE} & \text{si } j = ns+1 & (\text{falla por superávit}) \\ \text{B-CC} & \text{si } 1 \leq j \leq ns & (3.14) \\ -\text{CDF} & \text{si } j = 0 & (\text{falla por déficit}) \end{cases}$$

donde

CDE	costo de falla por desborde
B	beneficio por generación
CC	costo por inundación
CDF	costo de falla por déficit

La forma de valuar cada uno de estos conceptos se describe en el cap 2.3, concerniente a la función objetivo.

Por último, el beneficio neto esperado en una etapa que se obtiene al tomar la decisión d_k cuando al inicio del tiempo t_n la presa se encuentra en el estado s_i se,

$$E \left[b(t_n, s_i, d_k, s_j) \right] = \sum_{j=0}^{ns+1} p(t_n, s_i, d_k, s_j) b(t_n, s_i, d_k, s_j)$$

4. REDUCCION DE LOS REQUERIMIENTOS DE MEMORIA Y TIEMPO DE COMPUTO.

4.1 Introducción

Una de las razones por la cual comúnmente no se usa el método de la programación dinámica, particularmente cuando se aplica a sistemas estocásticos, es por la gran cantidad de cálculos y memoria requeridos. Por esta razón se hicieron algunas adaptaciones al método para desarrollar un algoritmo eficiente tanto en el aspecto del número de operaciones como en el de memoria necesaria.

En este capítulo se describen las adaptaciones realizadas y se hace una síntesis del algoritmo resultante.

4.2 Reducción del número de operaciones

La forma funcional que gobierna el método de programación dinámica estocástica, ec (3.7) y (3.8), es

$$f(t_n, s_i) = \max_k \{ E [b(t_n, s_i, d_k, s_j) + f(t_{n+1}, s_j)] \} \quad (4.1)$$

$$n = n_e, n_e - 1, \dots, 1$$

Como se mencionó en el inciso 3.2, en muchos problemas es posible asignar un valor de frontera a la función objetivo para cada estado al inicio del proceso ($n=n_e$) y aplicar la ecuación recursiva hasta la etapa final ($n=1$). En el caso de la operación de las presas no es posible, por lo que se hace necesario, aprovechando que el proceso es cíclico, llevar el cálculo tantas etapas como se requieran para que, al cabo de una iteración completa, el beneficio máximo esperado en dicho ciclo sea igual al obtenido en la iteración anterior.

Al desarrollar el proceso por varios ciclos, muchos de los cálculos se repiten. Para evitarlo conviene desarrollar la ec (4.1) en la forma

$$f(t_n, s_i) = \max_k \{ E [b(t_n, s_i, d_k, s_j)] + E [f(t_{n+1}, s_j)] \} \quad (4.2)$$

En la ec (4.2) se han separado los términos involucrados en el cálculo gracias a las propiedades del operador esperanza

$E[.]$. De esta forma el cálculo de $E[b(t_n, s_i, d_k, s_j)]$ puede realizarse una sola vez, ya que es independiente del ciclo en cuestión; mientras que el término restante $E[f(t_{n+1}, s_j)]$ debe ser calculado en cada ciclo ya que f es el valor acumulado "óptimo" de la función objetivo.

Por otra parte, desarrollando el primer término del lado derecho de (4.2) se tiene que

$$E[b(t_n, s_i, d_k, s_j)] = \sum_{j=0}^{ns+1} p(t_n, s_i, d_k, s_j) * b(t_n, s_i, d_k, s_j) \quad (4.3) +$$

Analizando la ec (4.3) se observa que el valor esperado de los beneficios en una etapa depende sólo del estado inicial s_i y de la decisión d_k , por lo que es posible definir

$$b_e(t_n, s_i, d_k) = E[b(t_n, s_i, d_k, s_j)] \quad (4.4)$$

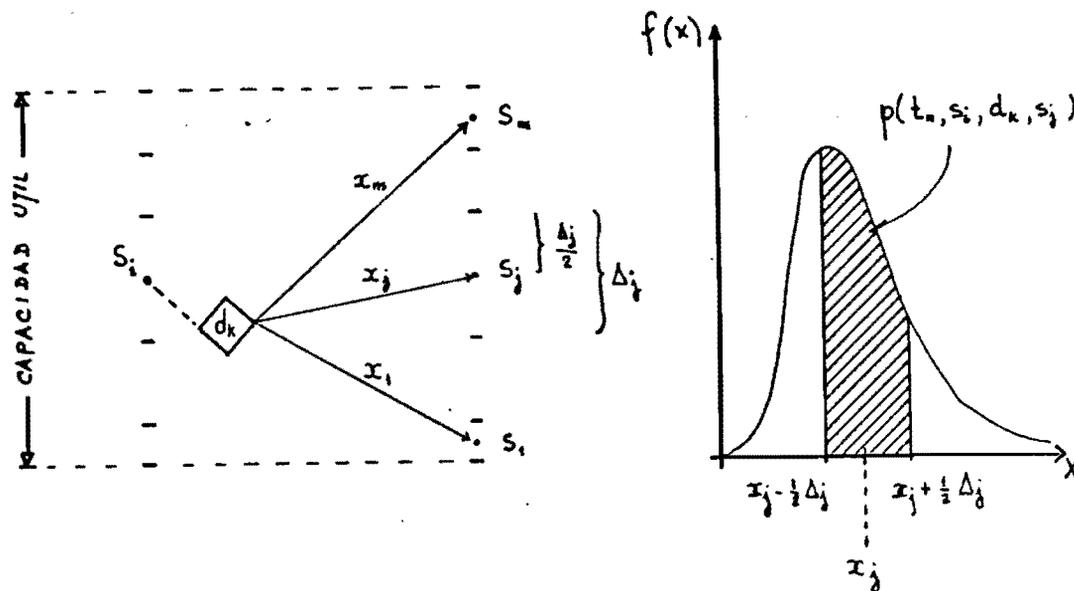
Obsérvese que de esta forma, pueden calcularse todos y cada uno de los beneficios esperado b_e , ec(4.4), y usar un arreglo matricial de tres dimensiones en lugar de calcular en cada ciclo la esperanza de los beneficios, ec (4.3), y necesitar entonces un arreglo matricial de cuatro dimensiones.

†Nótese que en esta ecuación se lleva la suma desde $j=0$ hasta $j=ns+1$, en lugar de como se muestra en (3.7), porque se adoptó la subdivisión de estados sugeridas en 3.3.3 y en ambos casos la suma debe hacerse sobre todos y cada uno de los estados resultantes j .

4.3 Reducción del orden de las matrices de transición

Si bien mediante los desarrollos anteriores se logró separar los términos que deben calcularse una sola vez, subsiste el problema de que la matriz de probabilidad $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$, contiene un gran número de elementos.

La probabilidad de transición $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$ es función del volumen de ingreso x_j , ec (3.11) y de la discretización. En el caso más general la discretización no es uniforme y puede decirse entonces que a cada estado j le corresponde un intervalo de valores Δ_j , fig 4.1.



$f(x)$ función de densidad de probabilidad

fig 4.1 Cálculo de la probabilidad de transición

Siendo así, y suponiendo que $\alpha_j = \beta_j = \frac{\Delta_j}{2}$, la ec (3.11) queda,

$$p(t_n, s_i, d_k, s_j) = P_n \left[x_j - \frac{1}{2} \Delta_j < X \leq x_j + \frac{1}{2} \Delta_j \right] \quad (4.5)$$

válida para $j=1, 2, \dots, ns$.

La probabilidad de transición para los estados de falla se calcula en forma distinta, por la manera en que fueron definidos dichos estados, tabla 3.1.

falla por superávit

$$p(t_n, s_i, d_k, s_{ns+1}) = p_{de}(t_n, s_i, d_k) = P_n \left[X > x_{ns} + \frac{1}{2} \Delta_{ns} \right]$$

o bien

$$p_{de}(t_n, s_i, d_k) = 1 - P_n \left[X \leq x_{ns} + \frac{1}{2} \Delta_{ns} \right] \quad (4.6)$$

falla por déficit

$$p(t_n, s_i, d_k, s_0) = p_{df}(t_n, s_i, d_k) = P_n \left[X \leq x_1 - \frac{1}{2} \Delta_1 \right] \quad (4.7)$$

Cuando la discretización no es uniforme es necesario contar con un vector de ns elementos para almacenar los valores de Δ_j y además un arreglo matricial de cuatro dimensiones para las probabilidades de transición $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$.

Sin embargo, cuando la subdivisión de estados es uniforme ($\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_j = \Delta$), y además los volúmenes de extracción d_k tienen el mismo incremento, esto es

$$d_k = d_{k-1} + \Delta, \quad k=2, \dots, nk \quad (4.8)$$

es posible reducir sensiblemente la memoria requerida, ya que muchos de los elementos de $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$ se repiten. Esto sucede porque un mismo volumen de ingreso puede provocar, con la misma probabilidad, distintas transformaciones en la presa según sea la decisión tomada y el estado inicial. Como muchos elementos se repiten, con solo calcular y almacenar aquellos valores que sean distintos pueden determinarse todos los demás. El desarrollo siguiente tiene por objeto determinar dicha correspondencia.

Sean las siguientes condiciones, que se denominarán base de aquí en adelante.

- a) Al inicio del intervalo de tiempo t_n la presa se encuentra en el estado s_1 (volumen almacenado mínimo)
- b) Se toma la decisión d_1 , que implica extracción nula, $d_1=0$
- c) La subdivisión de estados y decisiones es igual y uniforme.

Esto es, debe cumplirse que

$$s_j = s_{j-1} + \Delta = s_{j-2} + 2\Delta = \dots = s_{j-h} + h\Delta \quad (4.9)$$

o bien,

$$s_i = s_1 + (i-1)\Delta \quad (4.10)$$

y también que

$$d_k = d_1 + (k-1)\Delta \quad (4.11)$$

Ahora supóngase que

$$x_j = x_\alpha^* \quad (4.12)$$

donde

x_j volumen de ingreso necesario para pasar durante el tiempo t_n del estado s_i al s_j extrayendo un volumen d_k . De (3.10) se tiene que

$$x_j = s_j - s_i + d_k \quad (4.13)$$

x_α^* (+) volumen de ingreso necesario para pasar durante el tiempo t_n al estado s en condiciones base

$$x_\alpha^* = s_\alpha - s_1 + d_1 \quad (4.14)$$

De la ec (4.5) se tiene que

$$p(t_n, s_i, d_k, s_j) = P_n \left[x_j - \frac{\Delta}{2} < X \leq x_j + \frac{\Delta}{2} \right] \quad (4.15)$$

y

$$p^*(t_n, s_\alpha) = P_n \left[x_\alpha^* - \frac{\Delta}{2} < X \leq x_\alpha^* + \frac{\Delta}{2} \right] \quad (4.16)$$

donde x_j y x_α^* están dados por (4.13) y (4.14) respectivamente.

Sustituyendo (4.12) en (4.15) y comparando el resultado con (4.16) se concluye que

$$p(t_n, s_i, d_k, s_j) = p^*(t_n, s_\alpha) \quad (4.17)$$

esto es, la probabilidad de que en el tiempo t_n la presa pase

(+) el asterisco como superíndice, $(.)^*$, significa que $(.)$ se calcula en condiciones base.

del estado s_i a s_j extrayendo d_k , $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$, es igual a la de que en el mismo tiempo, la presa pase del estado s_1 a s_α extrayendo d_1 , $p^*(t_n, s_\alpha)$, si y sólo si los volúmenes de ingreso para ambas transformaciones son iguales.

Lo anterior implica que si se calculan sólo las probabilidades $p^*(t_n, s_\alpha)$, figura 4.2, es posible determinar cualquier probabilidad $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$, a excepción de las de falla, determinando el estado resultante s_α que provocaría el volumen de ingreso x_j , ec (4.13), en condiciones base, ec (4.14).

Sustituyendo (4.10) y (4.11) en (4.13), se obtiene

$$x_j = s_j - \left[s_1 + (i-1)\Delta \right] + \left[d_1 + (k-1)\Delta \right]$$

reagrupando

$$x_j = \left[s_j - (i-k)\Delta \right] - s_1 + d_1 \quad (4.18)$$

de (4.9) se tiene

$$s_{j-h} = s_j - h\Delta$$

por lo que, si $h = i-k$, entonces la ec (4.18) puede escribirse como

$$x_j = s_{j+k-i} - s_1 + d_1 \quad (4.19)$$

Igualando (4.19) con (4.14), por la condición (4.12), se obtiene que

$$s_\alpha = s_{j+k-i}$$

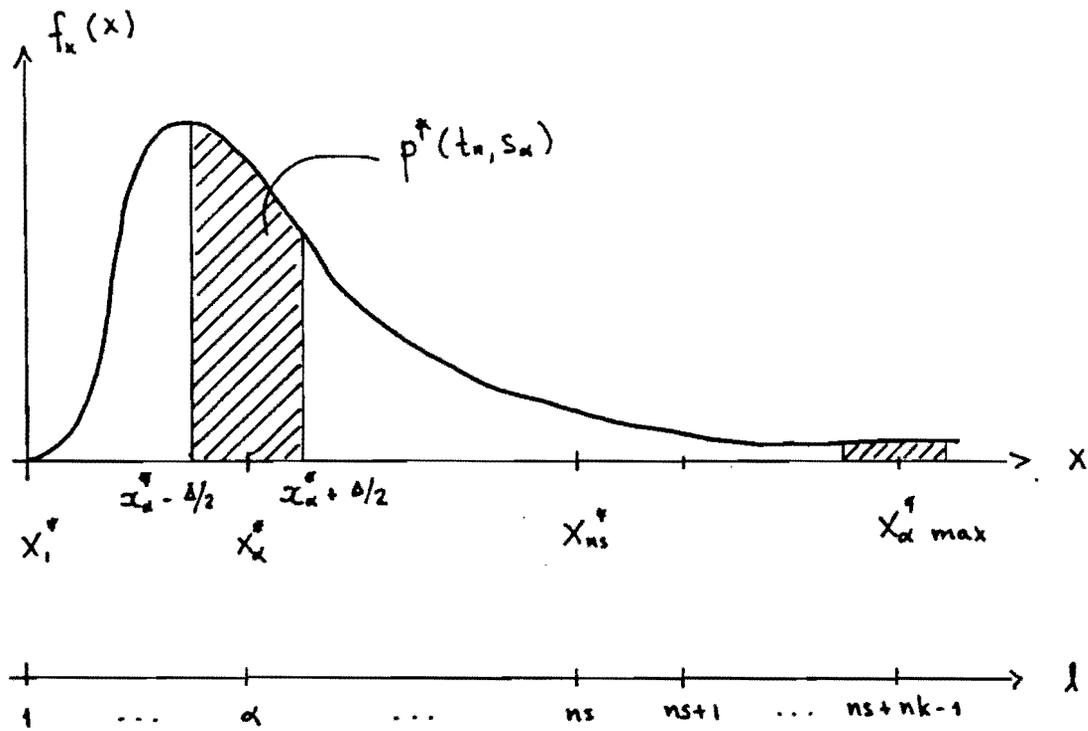
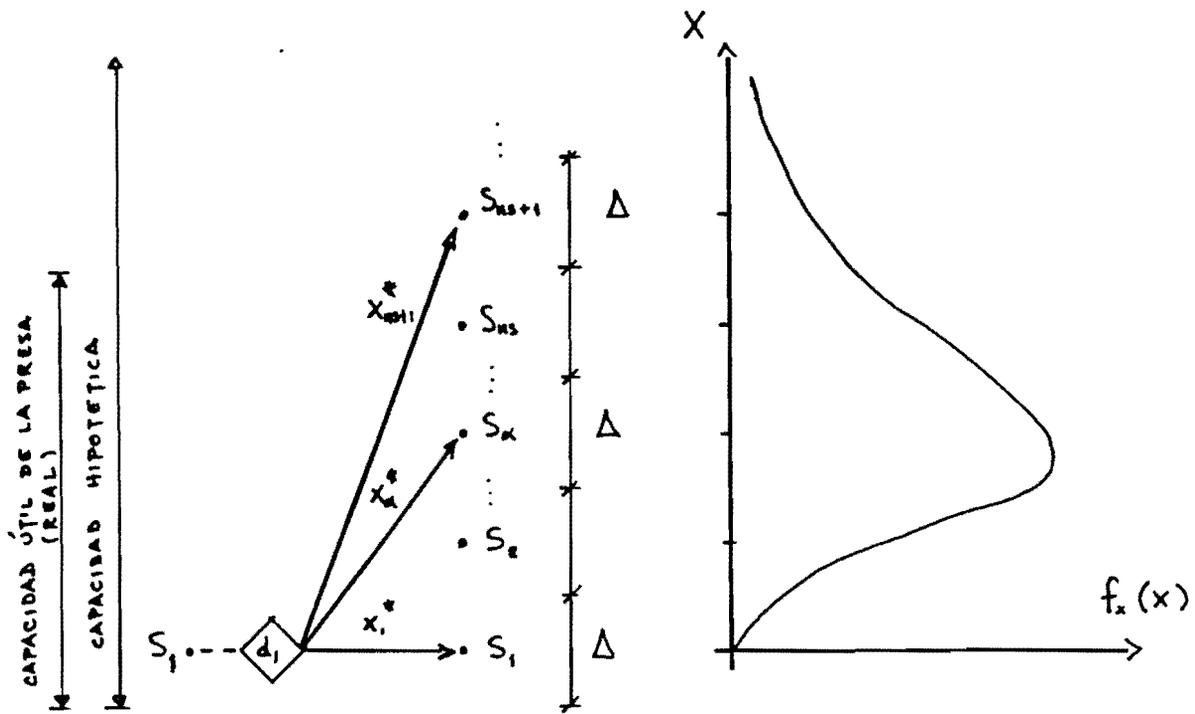


fig 4.2 Cálculo de la probabilidad de transición en condiciones base

o bien

$$\alpha = j + k - i \quad (4.20)$$

Si la capacidad útil de la presa se subdivide en ns estados y además se consideran nk decisiones distintas, el máximo número de estados s_α que se necesitan para deducir cualquier probabilidad $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$ es

$$ns_\alpha = (\alpha)_{\text{máx}} - (\alpha)_{\text{mín}} + 1$$

donde

- ns_α número de estados s_α
- $(\alpha)_{\text{máx}}$ valor máximo del índice α
- $(\alpha)_{\text{mín}}$ valor mínimo del índice α

Nótese en la figura 4.2 que la función de densidad de probabilidad del volumen de ingreso X está acotada únicamente en su extremo izquierdo, por $x_\alpha^* = 0, \alpha = 1$. Cualquier ingreso menor $x_\alpha^* (\alpha < 1)$ tiene probabilidad cero, por lo cual se concluye que

$$(\alpha)_{\text{mín}} = 1$$

y además que

$$p^*(t_n, s_\alpha) = 0, \quad \alpha < 1 \quad (4.21)$$

Por otro lado, el valor máximo del índice α es,

$$(\alpha)_{\text{máx}} = (j)_{\text{máx}} + (k)_{\text{máx}} - (i)_{\text{mín}}$$

$$(\alpha)_{\text{máx}} = ns + nk - 1$$

por lo cual,

$$ns_{\alpha} = ns + nk - 1 \quad (4.22)$$

Para calcular la probabilidad de falla por déficit y por superávit es necesario proceder de acuerdo a la definición de estos estados.

Falla por superávit

Si la discretización es uniforme, de la ec (4.6), la probabilidad de ocurrencia de este estado es

$$p_{de}(t_n, s_i, d_k) = 1 - P_n \left[X \leq x_{ns} + \frac{\Delta}{2} \right] \quad (4.23)$$

donde, ec (4.13),

$$x_{ns} = s_{ns} - s_i + d_k$$

la cual puede relacionarse con las condiciones base según la ec (4.19)

$$x_{ns} = s_{ns+k-i} - s_1 + d_1$$

$$x_{ns} = x_{\alpha}^* , \quad \alpha = ns+k-i \quad (4.24)$$

sustituyendo (4.24) en (4.23)

$$p_{de}(t_n, s_i, d_k) = 1 - P_n \left[X \leq x_{\alpha}^* + \frac{\Delta}{2} \right] \quad (4.25)$$

$$\alpha = ns + k - i$$

Si se define un nuevo vector base, denominado de falla por superávit en condiciones base p_{de}^* como

$$p_{de}^*(t_n) = 1.0 - P_n \left[X \leq x_{ns}^* + \frac{\Delta}{2} \right] \quad (4.26)$$

esto es

$$p_{de}^*(t_n) = 1.0 - F_n \left(x_{ns}^* + \frac{\Delta}{2} \right) \quad (4.27)$$

la probabilidad $p_{de}(t_n, s_i, d_k)$ se calcula de la siguiente manera, según sea α respecto a ns .

si $\alpha > ns$, entonces

$$P_n \left[X \leq x_{\alpha}^* + \frac{\Delta}{2} \right] = P_n \left[X \leq x_{ns}^* + \frac{\Delta}{2} \right] + P_n \left[x_{ns}^* + \frac{\Delta}{2} < X \leq x_{\alpha}^* + \frac{\Delta}{2} \right]$$

sustituyendo en (4.25) y considerando (4.26) resulta,

$$p_{de}(t_n, s_i, d_k) = p_{de}^*(t_n) - P_n \left[x_{ns}^* + \frac{\Delta}{2} < X \leq x_{\alpha}^* + \frac{\Delta}{2} \right]$$

esto es,

$$p_{de}(t_n, s_i, d_k) = p_{de}^*(t_n) - \sum_{\ell=ns+1}^{\alpha} p^*(t_n, s_{\ell}) \quad (4.28)$$

si $\alpha = ns$, se tiene directamente que

$$p_{de}(t_n, s_i, d_k) = p_{de}^*(t_n) \quad (4.29)$$

si $\alpha < ns$, entonces

$$P_n \left[X \leq x_{\alpha}^* + \frac{\Delta}{2} \right] = P_n \left[X \leq x_{ns}^* + \frac{\Delta}{2} \right] - P_n \left[x_{\alpha}^* + \frac{\Delta}{2} < X \leq x_{ns}^* + \frac{\Delta}{2} \right]$$

sustituyendo en (4.25) y considerando (4.26) se tiene

$$p_{de}(t_n, s_i, d_k) = p_{de}^*(t_n) + P_n \left[x_{\alpha}^* + \frac{\Delta}{2} < X \leq x_{ns}^* + \frac{\Delta}{2} \right]$$

esto es

$$p_{de}(t_n, s_i, d_k) = p_{de}^*(t_n) + \sum_{\ell=\alpha+1}^n p^*(t_n, s_{\ell}) \quad (4.30)$$

Falla por déficit

La probabilidad de falla por déficit cuando la discretización es uniforme se calcula según (4.7) como

$$p_{df}(t_n, s_i, d_k) = P_n \left[X \leq x_1 - \frac{\Delta}{2} \right] \quad (4.31)$$

donde

$$x_1 = s_1 - s_i + d_k$$

el cual, según (4.19) puede escribirse como

$$\begin{aligned} x_1 &= s_{1+k-i} - s_1 + d_1 \\ x_1 &= x_{\alpha}^*, \quad \alpha = 1+k-i \end{aligned}$$

sustituyendo en (4.31)

$$p_{d_f}(t_n, s_i, d_k) = P_n \left[X \leq x_\alpha - \frac{\Delta}{2} \right]$$

esto es

$$p_{d_f}(t_n, s_i, d_k) = \sum_{\ell=1}^{\alpha-1} p^*(t_n, s_\ell) \quad (4.33)$$

$$\alpha = k+1-i$$

obsérvese que cuando $\alpha \leq 1$, $p_{d_f}(t_n, s_i, d_k) = 0$

En resumen, al hacer la subdivisión de estados y decisiones igual y uniforme, puede reducirse sensiblemente la memoria requerida para la matriz de transición $p(t_n, s_i, d_k, s_j)$, ya que cualquier elemento de ella puede obtenerse de la siguiente forma:

$$p(t_n, s_i, d_k, s_j) = \begin{cases} p^*(t_n, s_\alpha) & \text{si } \alpha \geq 1 & (4.17) \\ 0.0 & \text{si } \alpha < 1 & (4.21) \end{cases}$$

donde $\alpha = j+k-i$

$$p_{de}(t_n, s_i, d_k) = \begin{cases} p_{de}^*(t_n) - \sum_{\ell=ns+1}^{\alpha} p^*(t_n, s_\ell) & \text{si } \alpha > ns & (4.28) \\ p_{de}^*(t_n) & \text{si } \alpha = ns & (4.29) \\ p_{de}^*(t_n) + \sum_{\ell=\alpha+1}^{ns} p^*(t_n, s_\ell) & \text{si } \alpha < ns & (4.30) \end{cases}$$

donde $\alpha = ns+k-i$

$$p_{d_f}(t_n, s_i, d_k) = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{\alpha-1} p^*(t_n, s_\ell) & \text{si } \alpha > 1 \\ 0.0 & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (4.32)$$

donde $\alpha = 1+k-i$

Considérese por ejemplo un caso en el cual se tienen 12 etapas, 15 estados y 10 variables de decisión,

	del arreglo	número de elementos
CASO A		
	$p(t_n, s_i, d_k, s_j)$	$12 \times 15 \times 10 \times 15 = 27\ 000$
	$p_{de}(t_n, s_i, d_k)$	$12 \times 15 \times 10 = 1\ 800$
	$p_{d_f}(t_n, s_i, d_k)$	$12 \times 15 \times 10 = \underline{1\ 800}$
		SUMA 30 600
CASO B		
	$p^*(t_n, s_\alpha)$	$12 \times 24 = 288$
	$p_{de}^*(t_n)$	$12 = \underline{12}$
		SUMA 300

$$(\alpha)_{\text{máx}} = ns + nk - 1$$

En el caso A se calcula y almacena la probabilidad de 30 600 elementos, mientras que en el caso B sólo de 300 elementos, y el remanente se deduce de acuerdo con las ecuaciones desarrolladas.

5. EJEMPLO DE APLICACION

Para emplear el modelo de optimación propuesto es necesario contar con información respecto de las características generales de la presa, de los volúmenes de ingreso al vaso y de la función objetivo. Además es necesario especificar el número de etapas a considerar en el año, el número de estados en que se subdivide la capacidad útil de la presa y el número de posibles extracciones (variables de decisión) que se tomarán en cuenta.

Una vez que se cuenta con esta información se utiliza el modelo de optimación y se determina la política de operación óptima. Para este efecto se elaboró un programa de computadora en FORTRAN tal que dado un paquete de datos, determina la política óptima.

Para el desarrollo de este ejemplo se escogió el caso de la presa "El Infiernillo" la cual tiene como objetivos la generación de corriente eléctrica y el control de avenidas en la parte baja del río Balsas.

5.1 Información necesaria

5.1.1 Características generales de la presa "Infiernillo"

Niveles característicos

a) Nivel de aguas máximas extraordinarias

NAME = 175.0 msnm

b) Nivel de aguas máximas de operación (NAMO).

En este ejemplo no se consideró ningún nivel restrictivo, dejando que éste fuera un resultado del modelo

c) Nivel de agua mínimo de operación

NAMINO = 140.0 msnm

d) Nivel de la cresta del vertedor

La cresta de los vertedores de la presa "El Infiernillo" se encuentran en la elev 154.0 msnm, pero como no se operan con menos de un metro de carga, para decidir en el modelo si se usan o no, se consideró dicho nivel en

HCRES = 155.0 msnm

e) Nivel del desfogue

$$\text{HDES} = 59.0 \text{ msnm}$$

Datos para el cálculo de la generación

a) Eficiencia

Se consideró constante (independiente de la carga en las turbinas)

$$\eta = 0.849$$

b) Capacidad máxima de las turbinas

Según información de la CFE, el consumo específico de las turbinas es

$$\text{C.E.} = \frac{366.85}{\eta(H-\text{HDES})}, \text{ en } \frac{\text{m}^3}{\text{KWh}}$$

y la función de potencia máxima-nivel

$$P = 16.8667 H - 1738.67, \text{ en MW}$$

transformando a energía en un mes

$$E = 12.144 H - 1251.842, \text{ en GWh}$$

multiplicando la función de energía máxima-nivel, por el consumo específico se obtiene el volumen máximo que puede pasar por las turbinas durante un mes, esto es

$$\text{CTUR} = \frac{4\,455.026 H - 459\,238.238}{\eta(H-\text{HDES})}, \text{ en } 10^6 \text{ m}^3$$

Curva elevaciones-capacidades

De acuerdo con la ref 7, la relación elevaciones-capacidades está dada por la ec

$$V = 59\,500 - 950 H + 3.75 H^2$$

H en msnm

V en 10^6 m^3

de donde

$$H = 126.67 + \frac{1}{7.50} \sqrt{10\,000 + 15 V}$$

5.1.2 Volúmenes de ingreso al vaso

Para poder determinar las funciones de distribución de probabilidad a los volúmenes de ingreso al vaso de Infiernillo es necesario primero determinar cuántas y cuáles serán las etapas a considerar en el modelo. Para esto es necesario tomar en cuenta, por un lado, el grado de detalle que se requiere en la política de operación, y por otro, las dificultades técnicas y teóricas para el ajuste de las funciones de probabilidad. Por lo que respecta a la política de operación generalmente es deseable que los intervalos de tiempo sean cortos, principalmente en la época de avenidas, ya que el modelo supone que cada decisión se toma al inicio de cada etapa y no se altera a lo largo de ella. En cambio, dado que se despreció el efecto de la autocorrelación, para el ajuste de las funciones de probabilidad es conveniente que dichas etapas sean grandes.

Con objeto de conciliar ambos aspectos se decidió tomar etapas de una semana durante la época de grandes avenidas (agosto, septiembre, octubre) y de un mes en el resto del año.

Los datos de volúmenes de ingreso mensual y semanal fueron tomados y deducidos de la ref 7 y de los boletines de CFE, contándose en total con un registro de 29 años. La información se agrupó por etapas (nueve meses y doce semanas) resultando así 21 conjuntos de 29 datos cada uno. A cada conjunto de datos se les ajustó varias funciones de probabilidad por el método de mínimos cuadrados. El mejor ajuste correspondió a la distribución de probabilidad "Log Normal" de tres parámetros (μ_L , σ_L , δ). En la fig 5.1 se muestran los histogramas de los ajustes correspondientes a los volúmenes de ingreso mensual, y en la fig 5.2 a los de ingreso semanal. En ésta última el encabezado de cada histograma indica el mes y semana al que corresponde.

5.1.3 Función objetivo

Para poder establecer la función objetivo es necesario elaborar un estudio económico a partir del cual puedan definirse los distintos parámetros que en ella intervienen. Para el caso en estudio se tomaron los siguientes valores:

Costo por energía prometida y no entregada, ec (2.12),

$$\alpha = \$ 8.0/\text{KWh}$$

Costo de falla por desborde

En el cap 2.3.5 se mencionó que CPRESA es sólo un indicador del daño causado en caso de que la obra se desbordara y no precisamente el costo real de este evento; para este ejemplo se tomó

$$\text{CPRESA} = \$ 50\ 000 \times 10^6$$

Función costo-volumen desalojado

Esta función depende de la capacidad del cauce, fig 2.3, y además de los daños que puedan provocarse en los vertedores por causa de la cavitación. Para el desarrollo del ejemplo se consideró

$$\text{Costo por cavitación} = \$ 0.00$$

$$\text{Capacidad del cauce} = 5\ 000 \text{ m}^3/\text{s}$$

La capacidad del cauce natural es aproximadamente de 3 000 m³/s. En este ejemplo se supone que se han ejecutado las obras de protección necesarias para que la capacidad aumente a 5 000 m³/s. El costo por inundación se incrementa con el volumen desalojado de acuerdo con la ley que se indica en la siguiente tabla.

Volumen desalojado en un mes (10^6 m^3)	Costo ($\$10^9$)
9 000.00	0.00
16 000.00	47.00
19 200.00	126.00
24 800.00	180.00

Función beneficio-energía generada

Las siguientes cantidades hacen referencia a la fig 2.2.

Energía garantizada al mes

$$E_g = 70\ 000.00 \text{ MWh}$$

Energía límite

$$E_\ell = 350\ 000.00 \text{ MWh}$$

Valor de la energía entregada en condiciones normales previstas

$$p_1 = \$ 9.0 \text{ /KWh}$$

Valor de la energía entregada, cuando ésta es mayor a la prevista (E_ℓ)

$$p_2 = \$ 3.15 \text{ /KWh}$$

Valor de la energía entregada, cuando ésta es menor a un mínimo prefijado (E_g)

$$p_0 = \$ 9.0 \text{ /KWh}$$

Multa por no entregar la energía mínima

$$b_1 = \$ 0.0$$

La información anterior se condensa en la tabla 5.1.

Antes de utilizar el modelo de optimación con toda la información anterior es necesario fijar el número de etapas, estados y decisiones para discretizar el problema.

De acuerdo con lo dicho en el cap 5.1.2 se consideran en el año veintiún etapas, doce de las cuales corresponden a las semanas de agosto, septiembre y octubre, y el resto a los meses de diciembre a julio. Por otro lado, se consideran 19 estados y 13 variables de decisión (extracciones).

La subdivisión de estados y decisiones correspondientes se muestran en la tabla 5.2 (ver además la fig 3.4).

Usando la información anterior en el programa OPER/INFIE se determina en tres ciclos anuales la política de operación óptima, tabla 5.3.

5.2 Interpretación de resultados

En la tabla 5.3 se muestra la política de operación óptima, la cual indica el volumen total a extraer del vaso durante la etapa, usando preferentemente las turbinas, según el estado en que se encuentre el vaso al inicio de cada etapa.

TABLA 5.1

INFORMACION DISPONIBLE

CARACTERISTICAS DE LA PRESA

CAPACIDAD UTIL	:	8094.00	(E6 M ³)
ELEVACION DE LA CRESTA	:	155.00	(MSNM)
NIVEL MEDIO DE DESFOGUE	:	59.00	(MSNM)
EFICIENCIA DE TURBINAS	:	0.849	

FUNCION OBJETIVO

BENEFICIOS POR GENERACION

ENERGIA GARANTIZADA	:	70000.00	(MWH)
ENERGIA LIMITE (ELIM)	:	350000.00	(MWH)
P1 =		9.00	(\$/KWH)
P2 =		3.15	(\$/KWH)
BO =		0.	(\$ E3)
B1 =		0.	(\$ E3)

COSTOS POR INUNDACION

VOLUMEN (E6 M ³)	COSTO (\$ E9)
9000.00	0.00
16000.00	47.00
19200.00	126.00
24800.00	180.00

COSTOS POR CAVITACION	:	0.	(\$ E3)
-----------------------	---	----	---------

COSTOS DE FALLA

POR DEFICIT	:	.80E+01	(\$/KWH)
POR DESBORDE	:	.50E+03	(\$ E3)

PROGRAMACION DINAMICA

# DE ETAPAS	:	21
# DE ESTADOS	:	19
# DE DECISIONES	:	13
# DE CICLOS	:	3

TABLA 5.1 (continuación)

PARAMETROS DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION

ETAPA #		DELTT	XMUL	SIGMAL	DELTA
1	4OCT	0.25	6.2454	0.3541	-171.2533
2	3OCT	0.25	6.1381	0.7517	1.0000
3	2OCT	0.25	6.3771	0.7419	1.0000
4	1OCT	0.25	6.3771	0.7419	1.0000
5	4SEP	0.25	6.6815	0.6069	1.0000
6	3SEP	0.25	6.6815	0.6069	1.0000
7	2SEP	0.25	6.9763	0.5251	1.0000
8	1SEP	0.25	6.7152	0.5028	1.0000
9	4AGO	0.25	6.7152	0.5028	1.0000
10	3AGO	0.25	6.8159	0.3512	-183.5928
11	2AGO	0.25	6.8159	0.3512	-183.5928
12	1AGO	0.25	6.3686	0.4932	1.0000
13	JUL	1.00	7.7856	0.3850	1.0000
14	JUN	1.00	6.9026	0.7017	1.0004
15	MAY	1.00	5.7641	0.3062	0.9999
16	ABR	1.00	5.4900	0.3189	1.0000
17	MAR	1.00	5.7321	0.3380	1.0000
18	FEB	1.00	5.8932	0.2763	0.9999
19	ENE	1.00	6.1503	0.3066	1.0002
20	DIC	1.00	6.3185	0.2843	1.0000
21	NOV	1.00	6.7021	0.4522	1.0000

TABLA 5.2

ESTADO #	VOLUMEN (E6 M ³)	ELEVACION (MSNM)	DECISION #	EXTRACCION (E6 M ³)
1	213.00	141.98	1	0.00
2	639.00	145.33	2	426.00
3	1065.00	148.16	3	852.00
4	1491.00	150.65	4	1278.00
5	1917.00	152.92	5	1704.00
6	2343.00	155.00	6	2130.00
7	2769.00	156.94	7	2556.00
8	3195.00	158.76	8	2982.00
9	3621.00	160.48	9	3408.00
10	4047.00	162.12	10	3834.00
11	4473.00	163.69	11	4260.00
12	4899.00	165.19	12	4686.00
13	5325.00	166.64	13	5112.00
14	5751.00	168.04		
15	6177.00	169.39		
16	6603.00	170.70		
17	7029.00	171.97		
18	7455.00	173.20		
19	7881.00	174.41		

Tabla 5.3

CICLO #	3																				
	E T A P A S																				
ESTADOS	4OCT	3OCT	2OCT	1OCT	4SEP	3SEP	2SEP	1SEP	4AGO	3AGO	2AGO	1AGO	JUL	JUN	MAY	ABR	MAR	FEB	ENE	DIC	NOV
19	3	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	13	12	8	7	5	5	4	4	6
18	3	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	13	11	8	6	5	5	4	4	5
17	2	3	5	6	6	6	6	6	6	6	6	5	13	10	8	5	5	4	4	4	4
16	2	3	4	5	6	6	6	6	6	5	5	4	12	9	8	5	5	4	4	4	4
15	1	2	3	4	5	5	6	6	6	4	4	3	11	9	8	5	5	4	4	4	4
14	1	2	3	3	4	4	6	5	5	3	3	3	10	8	8	5	5	4	4	3	4
13	1	2	2	3	3	3	5	4	4	3	3	3	9	8	7	5	4	4	3	2	3
12	1	2	2	2	3	3	4	3	3	3	3	3	9	8	6	5	4	4	2	1	2
11	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	8	8	5	5	4	3	1	1	1
10	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	8	8	5	4	4	2	1	1	1
9	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	8	7	5	4	3	1	1	1	1
8	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	2	2	8	7	5	4	2	1	1	1	1
7	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	7	6	5	3	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	7	5	4	2	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	6	5	4	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	5	5	3	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	5	4	2	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	5	3	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	5	2	1	1	1	1	1	1	1

En dicha tabla los renglones corresponden a los estados de la presa, las columnas a las etapas del año y el cuerpo a las decisiones. Así por ejemplo, si el día 1 de enero el vaso se encuentra en uno de los niveles correspondientes al estado 11 (esto es entre 162.9 msnm y 164.4 msnm), la decisión a tomar, según la política óptima (tabla 5.3) es la número 1 que corresponde a una extracción nula durante toda la etapa (ver tabla 5.2). Imagínese ahora que el 1 de febrero el vaso se encuentre en uno de los niveles correspondientes al estado 13 (esto es entre 165.9 msnm y 167.3 msnm), la decisión a tomar es la número 4 que corresponde a una extracción de $1\,278 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{mes}$ lo cual equivale a $42.6 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{día}$ durante todo el mes; como este gasto puede extraerse totalmente por las turbinas, no es necesario utilizar la obra de excedencias.

Ahora bien, la tabla 5.3 es poco descriptiva y no permite visualizar algunas consecuencias de la política misma, como son: número de veces que la presa falla por déficit en un lapso de tiempo (años) determinado, número de veces que es necesario usar el vertedor, probabilidad de que la presa falle por desborde, generación media anual, etc.

Para obtener este tipo de información se puede simular el funcionamiento del vaso utilizando la política óptima de operación y un registro sintético o el mismo registro histórico de los volúmenes de ingreso.

Para ilustrar lo anterior considérense los casos siguientes que fueron desarrollados con el objeto de observar la sensibilidad del modelo en relación con cambios en la forma de la función objetivo:

- . corrida A. Supone costos por inundación pequeños
- . corrida B. Supone costos por inundación relativamente altos.

Para cada caso se obtuvo su política de operación óptima y además se simuló el funcionamiento de vaso con el registro histórico (1959-1982). Un resumen de los resultados se muestra en la tabla 5.4, de los cuales pueden destacarse los siguientes comentarios.

- a) La generación anual obtenida con la política A es 1% mayor que la obtenida siguiendo la política B
- b) La política B es más conservadora que la A ya que
 - . El número de años con derrame pasa de 8 a 6
 - . El volumen derramado de $21\ 914 \times 10^6 \text{ m}^3$ pasa a $16\ 000 \times 10^6 \text{ m}^3$
 - . El número de años en que se sobrepasa la cota 169 se reduce de 13 a 6.

De manera semejante se realizaron corridas para analizar la conveniencia de efectuar obras que permitan mejorar el funcionamiento de una presa; así por ejemplo, suponiendo que se incrementa el número de unidades de generación en la presa (en términos del modelo descrito, este caso implica la misma presa pero con capacidad de turbinas mayor), el beneficio máximo esperado que se obtenga con esta alternativa (producto de la operación óptima) puede compararse con el del proyecto original y determinar así su factibilidad.

Tabla 5.4
Resumen de resultados de la corrida A

AÑO	DERRAME (MMC)	DEFICIT (MMC)	V máximo (MMC)	V mínimo (MMC)
1959	1220.0	0.0	6570	1980
60	0.0	0.0	5480	1430
61	0.0	0.0	5520	1060
62	324.0	0.0	6270	593
63	0.0	0.0	6180	468
64	541.0	0.0	6370	666
65	698.0	0.0	6420	742
66	0.0	0.0	5890	1480
67	5540.0	0.0	7740	1560
68	332.0	0.0	6250	1470
69	122.0	0.0	5470	419
70	2080.0	0.0	6400	1070
71	1900.0	0.0	6620	684
72	0.0	0.0	5500	1600
73	1860.0	0.0	6480	949
74	66.6	0.0	5870	1510
75	1140.0	0.0	6720	1080
76	2850.0	0.0	7520	449
77	0.0	0.0	5700	1800
78	0.0	0.0	6140	589
79	0.0	0.0	5320	200
80	0.0	0.0	5320	570
81	3240.0	0.0	6760	1140
82	0.0	0.0	5420	319

Tabla 5.4 (Continuación)

Resumen de resultados de la corrida B

AÑO	DERRAME (MMC)	DEFICIT (MMC)	V máximo (MMC)	V mínimo (MMC)
1959	332.0	0.0	5990	1760
60	0.0	0.0	5440	1250
61	402.0	0.0	4500	897
62	62.6	0.0	5010	263
63	0.0	0.0	4840	469
64	599.0	0.0	5660	527
65	578.0	0.0	5590	461
66	0.0	0.0	5370	1290
67	4430.0	0.0	7740	935
68	493.0	0.0	5570	1340
69	261.0	0.0	4980	310
70	1640.0	0.0	6300	709
71	1050.0	0.0	6380	682
72	63.3	0.0	5480	1410
73	1520.0	0.0	6300	748
74	326.0	0.0	5330	1390
75	703.0	0.0	5760	685
76	1500.0	0.0	6430	395
77	0.0	0.0	5830	835
78	0.0	0.0	4730	710
79	0.0	0.0	4390	0.0
80	0.0	0.0	4070	571
81	2040.0	0.0	6520	707
82	0.0	0.0	5420	112

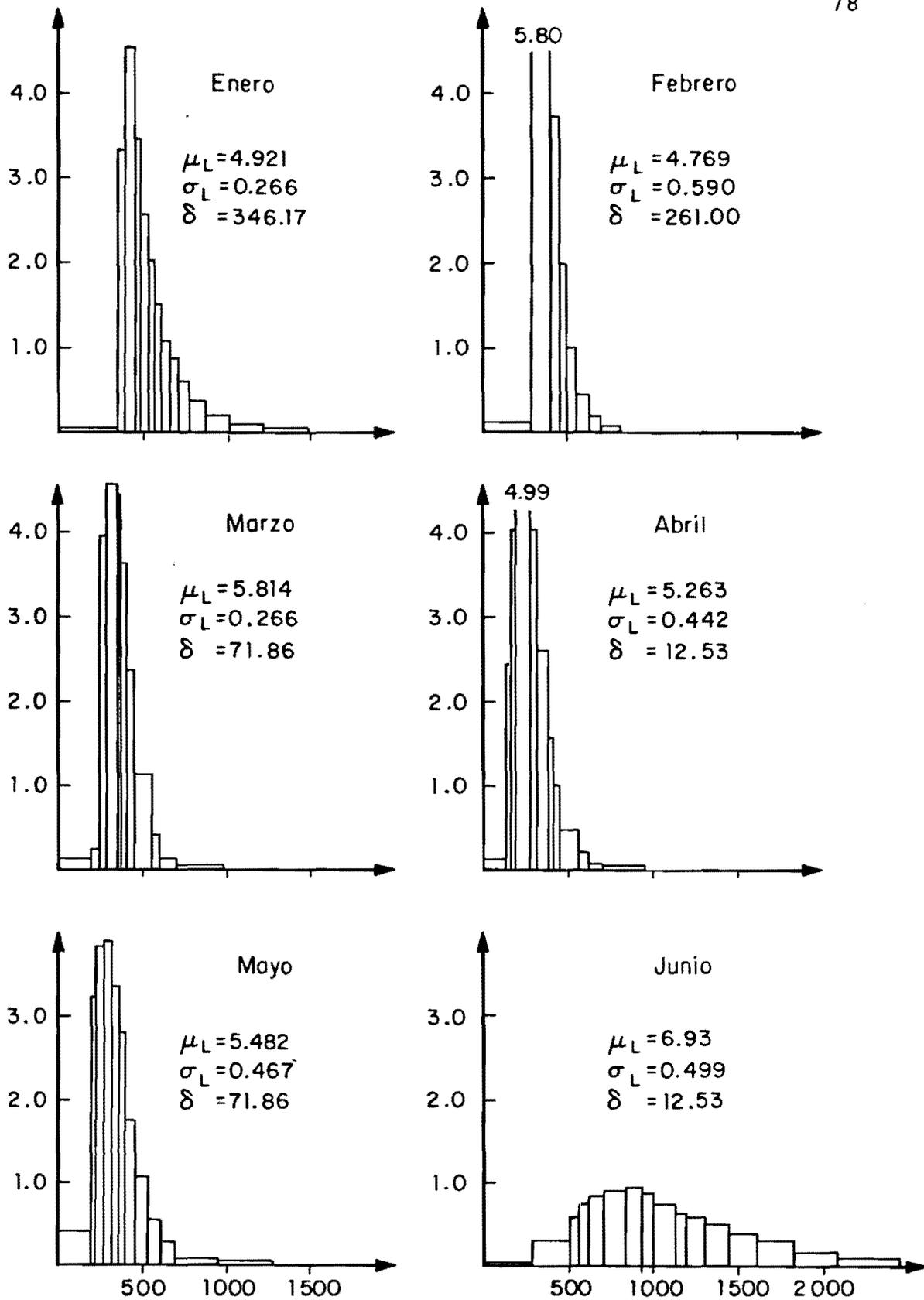


fig 5.1 Probabilidad de los escurrimientos mensuales en Millones de Metros Cúbicos (MMC)

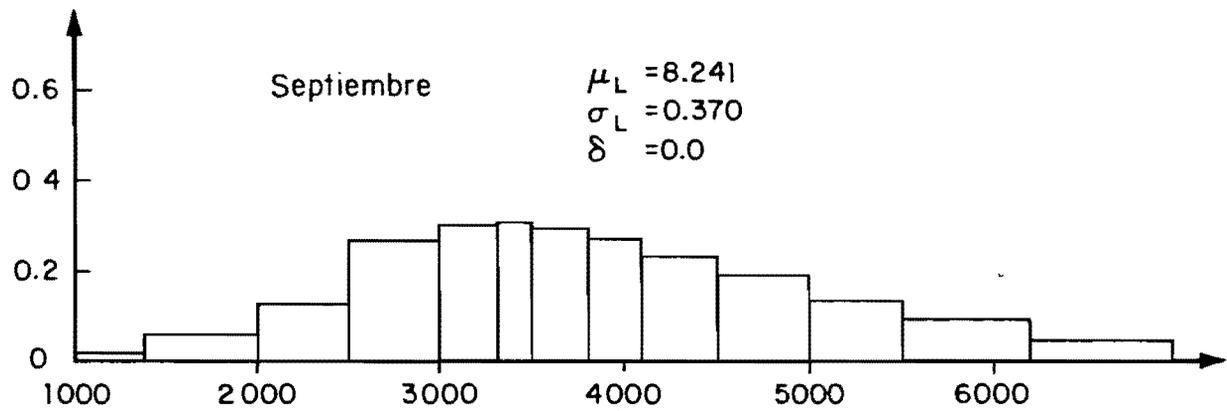
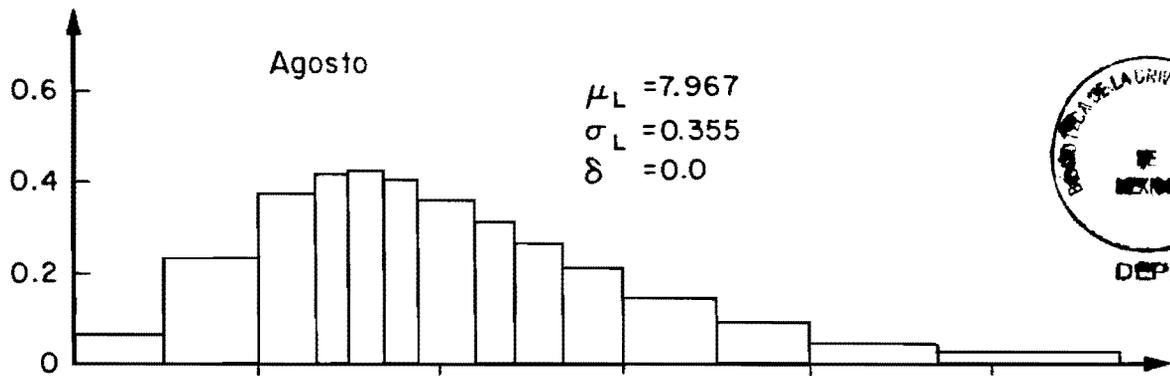
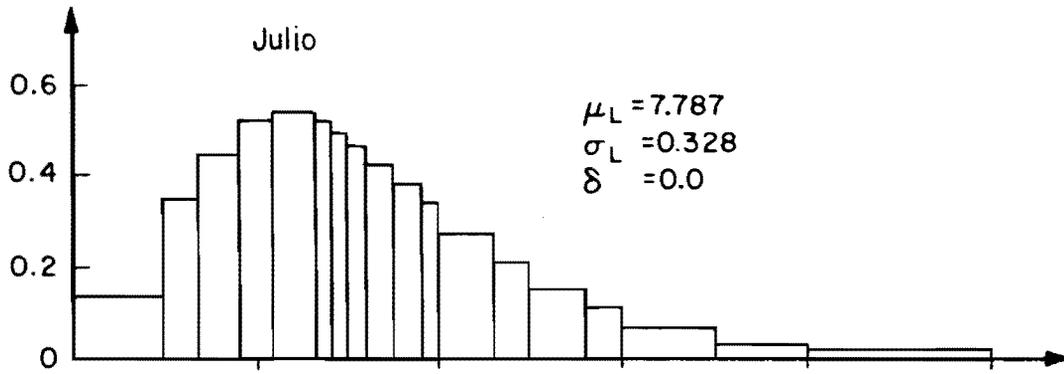


fig 5.1 (continuación)

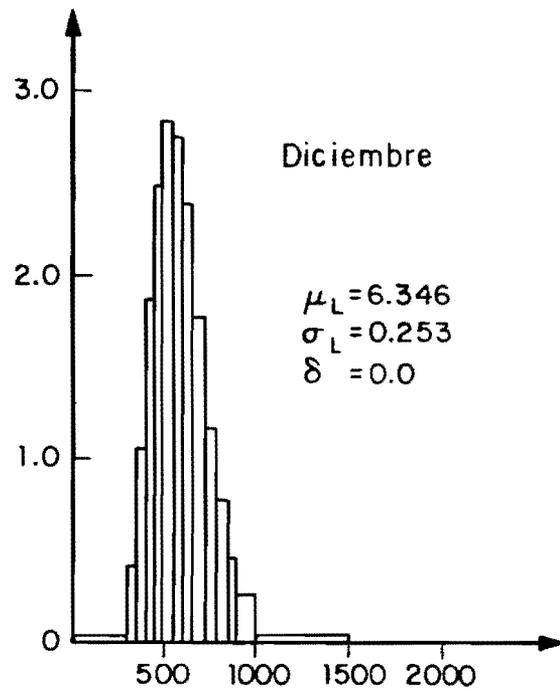
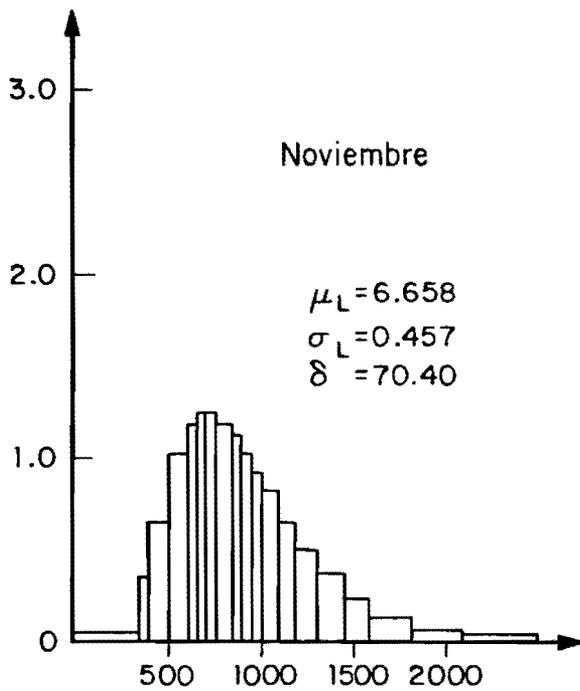
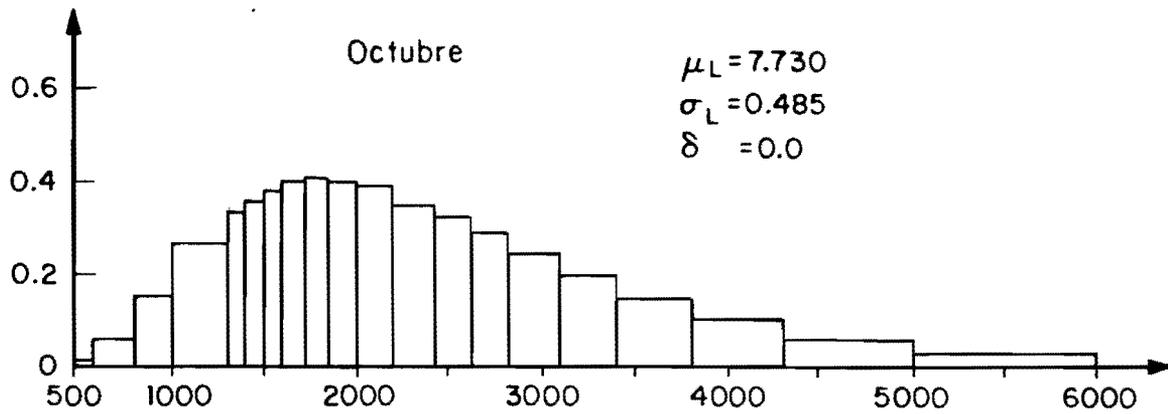


fig 5.1 (continuación)

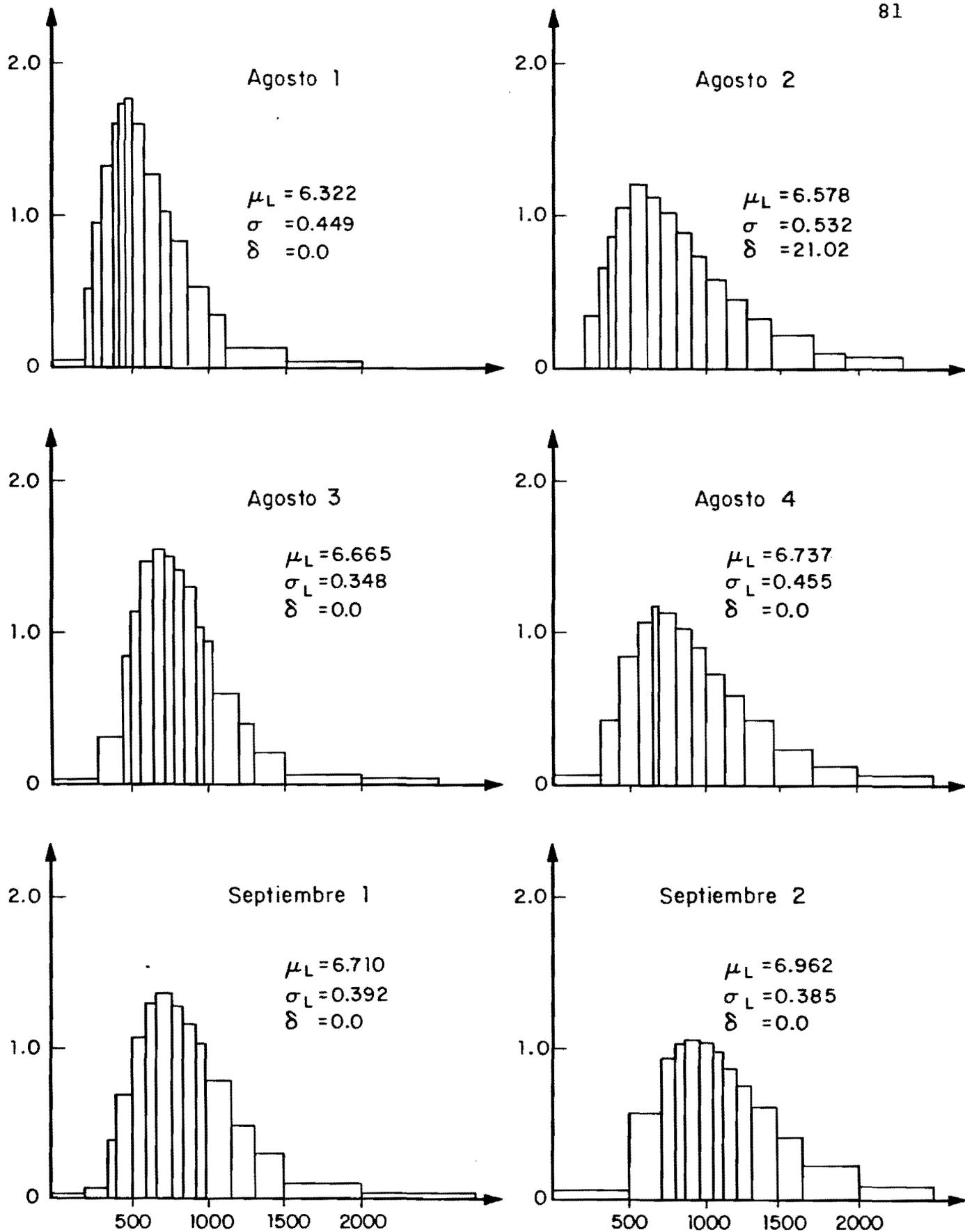


fig 5.2 Probabilidad de los escurrimientos semanales en Millones de Metros Cúbicos (MMC)

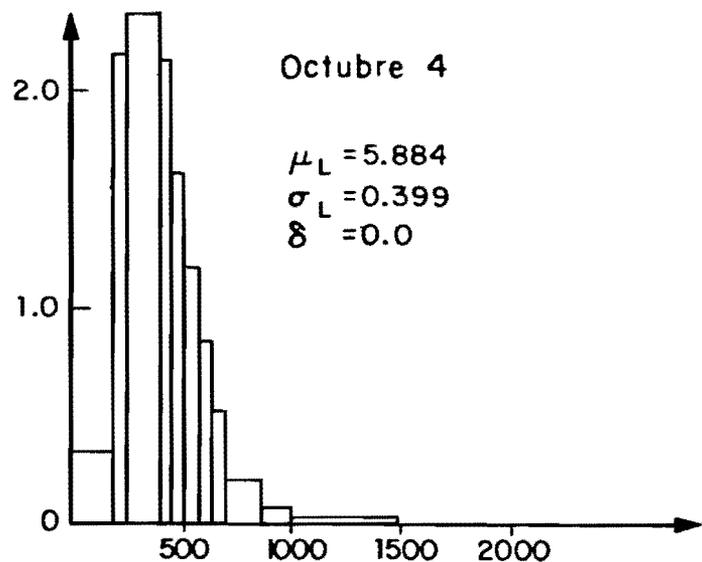
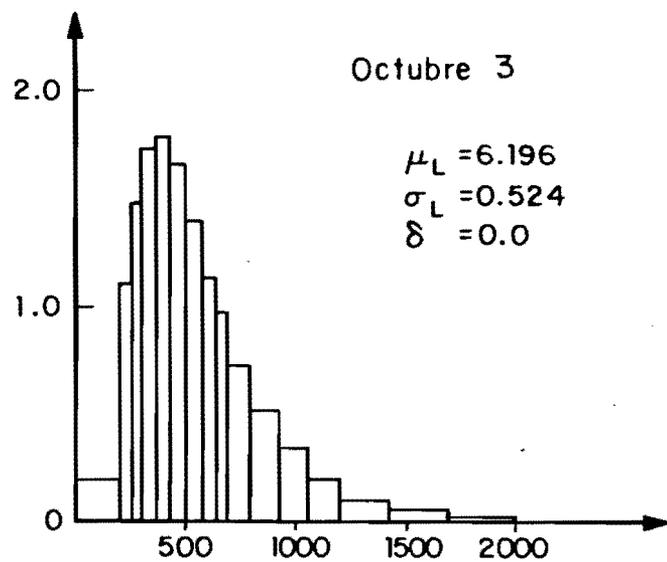
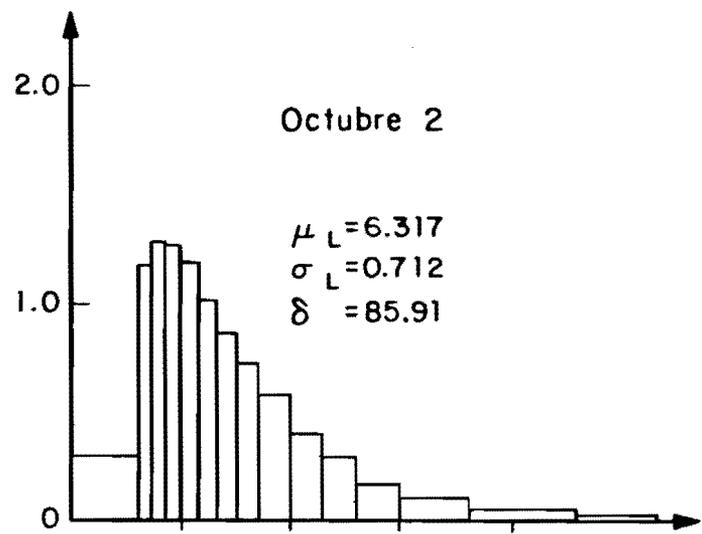
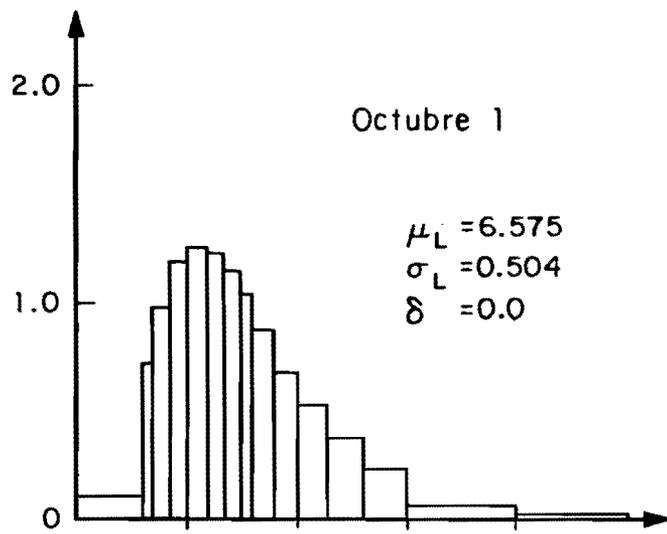
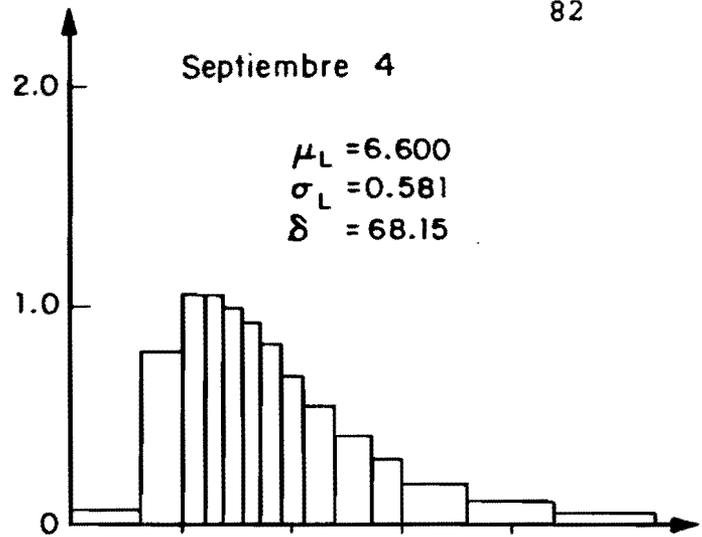
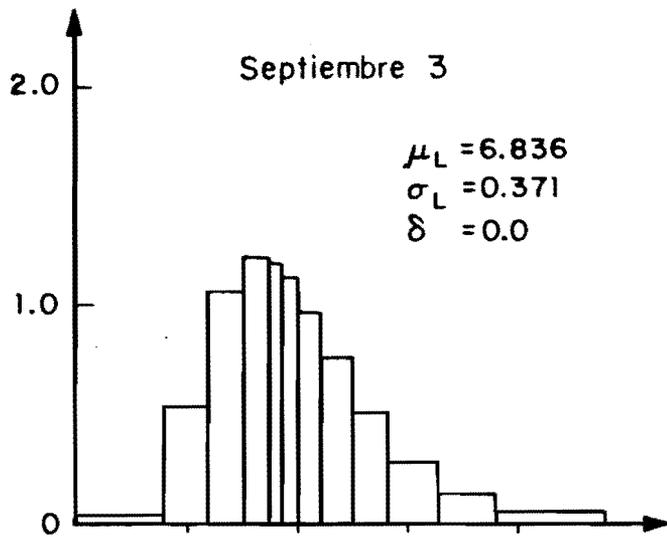


fig 5.2 (continuación)

6. CONCLUSIONES

En el desarrollo de este trabajo se ha hecho especial énfasis en el planteamiento de la función objetivo y en la reducción de los requerimientos de memoria y tiempo de cómputo del método de programación dinámica. Esto se debe a que la aplicación de los métodos de optimación que pueden encontrarse en la literatura no es inmediata, sino que es necesario efectuar una serie de estudios y cálculos que permitan adecuar los métodos generales a las condiciones particulares, aprovechando sus ventajas y reduciendo sus limitaciones.

El modelo de optimación desarrollado permite considerar una función objetivo tan compleja como sea necesario para representar la realidad y además, gracias al algoritmo desarrollado en el cap 4, hace posible efectuar un análisis fino en cuanto a número de estados y etapas, sin que por ello sea ne-

cesario utilizar una cantidad excesiva de memoria.

En el caso del ejemplo desarrollado para la presa "El Infiernillo", el uso del modelo permitió determinar una política de operación que optimiza un criterio de utilidad bien definido y que indica las decisiones adecuadas a tomar cualquiera que sea el estado en que se encuentre la presa (a diferencia de la práctica común en la que solo se especifican niveles recomendables a lo largo del año, pero no se dice que hacer cuando por algún motivo el nivel del vaso se aleja de ellos). Esto se logra gracias a que se utiliza un control retroalimentable, el cual garantiza además mayores beneficios con respecto al control de niveles recomendables (del tipo de lazo abierto), como se mencionó en el cap 2.

Aunque hasta ahora su aplicación se limita a una sola presa y al caso en que la autocorrelación de los volúmenes de ingreso se desprece, el modelo puede extenderse para eliminar dichas limitaciones, de acuerdo con los siguientes lineamientos.

Cuando se considera autocorrelación, el volumen de ingreso en una etapa dada depende en cierta medida de los volúmenes de ingreso en etapas anteriores. Por esta razón, la probabilidad de que se presente un volumen X_n es función no sólo de su magnitud sino también de los ingresos $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-\tau}$, donde τ es el orden de autocorrelación considerada. Esto im-

plica que las funciones de distribución de probabilidad sean condicionales y además que, para definir un estado sean necesarios τ parámetros más, los volúmenes de ingresos en etapas anteriores. Si el orden de autocorrelación considerado es uno, las ecuaciones recursivas de la programación dinámica adquieren la siguiente forma (compárese con las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9)).

El beneficio acumulado que se obtiene en promedio al tomar la decisión d_k , cuando en el tiempo t_n el volumen almacenado en la presa es s_i y en el tiempo t_{n-1} el ingreso fue de x_g , es

$$F(t_n, \xi_i, d_k) = E b(t_n, \xi_i, d_k, \xi_j) + f(t_{n+1}, \xi_j)$$

esto es

$$F(t_n, \xi_i, d_k) = \sum_{m=1}^{nm} \sum_{j=1}^{ns} p(t_n, \xi_i, d_k, \xi_j) * \left[b(t_n, \xi_i, d_k, \xi_j) + f(t_{n+1}, \xi_j) \right]$$

donde

p probabilidad condicional de pasar del estado ξ_i al estado ξ_j con una extracción d_k en la etapa n .

ξ_i y ξ_j estado inicial y final respectivamente. Se definen en términos del volumen almacenado y el ingreso en la etapa anterior.

La decisión $d_{k(\max)}$ que genera el máximo beneficio esperado acumulado $f(t_n, \xi_i)$, es la que forma parte de la política de operación óptima D , esto es

$$f(t_n, \xi_i) = \max_k F(t_n, \xi_i, d_k)$$

Y

$$D(t_n, \xi_i) = d_{k(\max)}$$

Cuando la presa está ligada a un sistema donde las decisiones de extracción de una de ellas influyen en las demás, se presume que la mejor manera de operar el conjunto de presas depende en cada momento del volumen almacenado en cada una de ellas y que interesa obtener el máximo beneficio neto de todo el conjunto.

REFERENCIAS

1. Loucks, D.P., "Water Resources Systems Analysis", Vol. 1, International Institute for Hydraulic and Environmental Engineering, Delft Netherlands.
2. Dreyfus, S.E., "Dynamic Programming and the Calculus of Variations", Mathematics in Science and Engineering, Vol 21, Academic Press, Inc., New York, N.Y., 1965.
3. Nemkauser, G.L., "Introduction to Dynamic Programming" John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1967.
4. Bellman, R.E., Dreyfus, S.E., "Applied Dynamic Programming" Princeton University Press, New Jersey, 1962.
5. Guitron, A., "Improved Stochastic Dynamic Programming for Optimal Reservoir Operation Based on the Asymptotic Convergence of Benefit Differences", Thesis submitted to the faculty of the Departament of Hidrology and Water Resources, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science, University of Arizona, 1974.
6. Howard, R. A., "Dynamic Programming and Markov Processes", J. Wiley New York, 1960.
7. "Revisión de las Políticas de Operación Recomendables para el grupo Infiernillo-Villita considerando distintos niveles de seguridad al 1^a de octubre", C.F.E. 1983.