

0066

"EL ELEMENTO FINITO APLICADO AL FLUJO EN MEDIOS POROSOS"

T E S I S

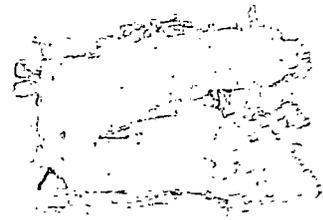
(sin crédito académico)

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRIA EN INGENIERIA ?

PRESENTA

EL INGENIERO FRANCISCO JAVIER ESCAMILLA HERNANDEZ





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPFI

T. UNAM
1981
ESC

I N D I C E

Introducción	1
I. Presentación del Método	4
I.1 Descripción General	4
I.2 Conceptos Generales	6
I.2.1 Problemas Generales de Variacional	6
I.2.2 Criterio de Convergencia	9
I.2.3 Criterio de Variables Nodales	11
I.2.4 Aproximaciones Alternativas a la Formulación del Elemento Finito	14
II Estado del Arte	18
II.1 Aplicaciones del Método del Elemento Finito	18
II.2 Aspectos Teóricos	19
II.2.1 Leyes constitutivas	20
II.2.2 Ecuaciones Gobernadoras	22
II.2.3 Categorías de Flujo	24
II.2.4 Condiciones de Frontera	24
II.3 Procedimientos de Formulación	26
II.4 Condiciones de Frontera	27
II.4.1 Superficie libre	27
II.4.2 Flujo no saturado	32
II.5 Flujo a Través de Medio Discontinuo	33
II.6 Factores que Afectan las Aplicaciones	35
II.6.1 Características Numéricas	35
II.6.2 Modelos de Orden de Aproximación	38
II.6.3 Discretización del Medio Infinito	39
II.7 Contaminación	40
II.8 Consolidación	41
II.9 Flujo Tridimensional	41

II.10 Flujo en Dos Fases	42
II.11 Deshielo y Calor	43
II.12 Distintas Aplicaciones	44
II.13 Métodos Combinados	45
III Conclusiones y Recomendaciones	46
III.1 Conclusiones	46
III.2 Recomendaciones	47
Bibliografía	48
Referencias	49

INTRODUCCION

Una parte muy importante del ciclo hidrológico es el flujo del agua por debajo de la superficie del terreno. La creencia de que en el subsuelo el agua se encuentra formando enormes lagos subterráneos o corrientes muy localizadas que fluyen a lo largo de conductos de gran tamaño ha sido muy difundida en el pasado y hasta hace relativamente poco tiempo se empezó a estudiar con detenimiento y dedicación.

Es cierto que en determinado tipo de rocas el agua fluye por canales subterráneos pero en la gran mayoría de los casos se almacena y circula por los poros que dejan entre sí las partículas de material; es decir, en un medio poroso.

El agua que se encuentra en estas circunstancias reviste una importancia muy grande dado que las fuentes superficiales que abastecen al hombre han empezado a ser insuficientes y se necesitan complementar con la explotación del agua subterránea que fluye a través del terreno.

El estudio del comportamiento del agua en el medio poroso se ha desarrollado desde principios de siglo con: 1) investigaciones de las relaciones existentes entre la geología y el flujo subterráneo, 2) desarrollo de las ecuaciones matemáticas que rigen el movimiento del agua en el interior de las rocas y sedimentos no consolidados, y 3) estudio de la química del agua subterránea.

Los desarrollos matemáticos han llegado a resolverse, para casos relativamente simples, de una manera analítica alcanzando una solución exacta.

Sin embargo, en situaciones reales el medio poroso presenta características variables en el espacio, condiciones complejas en los límites, sistemas de entradas y salidas variables,

debido al régimen de precipitación; por tanto el uso de ecuaciones o métodos simples no es más que una primera aproximación para la solución del problema.

Debido a lo anterior se han desarrollado herramientas más poderosas para manejar con mayor eficiencia las complejas situaciones del flujo en medio poroso, estas herramientas son los modelos.

Los modelos, entre sí, se diferencian en la forma de resolver las ecuaciones planteadas y en la manera de describir el sistema.

Entre los diferentes tipos de modelo se tiene el modelo matemático, que es el que utiliza métodos numéricos para resolver la ecuación diferencial de flujo subterráneo.

El método más utilizado es el de diferencias finitas, con el que se obtiene la solución de la ecuación para una serie de puntos discretos en el espacio y el tiempo.

Otro método que está adquiriendo mucho auge es el de elementos finitos.

En este trabajo se pretende presentar un estado del arte del método del elemento finito aplicado al flujo en medios porosos y una extensión al flujo en medios fracturados, con una breve presentación de lo que es el método.

En el primer capítulo se hace una descripción general de la técnica, desglosando los conceptos generales del mismo para tener una más amplia visión de lo que es el proceso del elemento finito.

En el segundo capítulo se hace una presentación del estado del arte propiamente dicho. El objetivo de este capítulo es llegar a presentar lo que se ha estudiado acerca de este método con relación al flujo subterráneo, a veces apoyado en el flujo a través de medio poroso de obras artificiales: diques, presas, etc.. Cada subtema específico está ampliamente referenciado por

si se tiene interés en profundizar en un tema específico. El material consultado es parte de las referencias y, por supuesto, la bibliografía.

Como parte final del trabajo se presentan las conclusiones y recomendaciones surgidas de la revisión bibliográfica de los artículos que tratan con este amplio e interesante tema.

PRESENTACION DEL METODO

I.1 DESCRIPCION GENERAL

El método de los elementos finitos se ha desarrollado principalmente para problemas estructurales; sin embargo, dada su versatilidad, se ha usado ampliamente en otros campos, como es el flujo de agua en medios porosos.

La solución de problemas de flujo en medio poroso a superficie libre, en sentido hidráulico, es muy difícil cuando la solución incluye la localización de dicha superficie. Para resolver estos problemas se han desarrollado distintas soluciones dependiendo del grado de dificultad y del tipo de problema que se trate de resolver: soluciones analíticas para un limitado número de problemas con geometría y condiciones de frontera simples; aproximaciones numéricas mediante métodos de diferencias finitas, cuando se considera el flujo a través de regiones anisotrópicas y no homogéneas de geometría arbitraria, sin embargo estos métodos, al aplicarse aquí son muy tardados y tediosos.

El método del elemento finito, por el contrario, se adapta con gran facilidad a las condiciones anisotrópicas y no homogéneas, ya que se define la función para cada elemento.

Para problemas de superficie libre se puede hacer variar la condición de frontera, con la variación de la superficie, conservando la condición de presión cero.

En problemas donde se considera la dispersión de sustancias disueltas también el método de elementos finitos tiene ventajas sobre los métodos analíticos y los de diferencias finitas dada la mejor adaptabilidad, a la mezcla, de la malla.

Esencialmente consiste en dividir la región en estudio en

una serie de elementos de geometría y magnitud definidas, usualmente triángulos. Se supone que dentro de cada uno de estos elementos el valor de la función (en este caso la altura piezométrica del acuífero) varía linealmente y por lo tanto el plano que forma cada triángulo queda definido por los valores de la función en los vértices del mismo. Dentro del triángulo es fácil hacer la integración de la ecuación de flujo con las restricciones mencionadas. La integral en toda la región será la suma de las integrales de cada elemento. Con esto puede plantearse un sistema de ecuaciones con los valores de potencial (h) en los vértices de los triángulos como incógnitas.

Como el problema se está resolviendo en cada elemento, no es necesaria la condición de homogeneidad; tampoco lo será la de isotropía.

Adicionalmente en cada elemento puede incluirse una función que represente el caudal que se extraiga, que se infiltre a otros acuíferos, que entre por filtración de lluvia, etcétera. El método es suficientemente flexible para permitir simular la operación de dos o más acuíferos a distintos niveles, conectados entre sí, siempre y cuando se cuente con una máquina calculadora que tenga capacidad de memoria suficiente para manejar todas las incógnitas que se generen.

Si los elementos que se eligen forman una red regular, las ecuaciones que se obtienen, como es lógico suponer, son iguales a las que se obtendrían aplicando un método de diferencias finitas; sin embargo, el método posee las siguientes ventajas:

- La división de elementos es arbitraria, lo que permite adaptarse muy bien a cualquier región.
- Se pueden localizar más puntos en la región de mayor interés y menos en regiones relativamente estables.
- Los valores de frontera se pueden introducir fácilmente en

el análisis.

- El método es susceptible de programarse inclusive en las etapas de preparación de datos.
- la principal ventaja es que se pueden usar el mismo tipo de programas para los distintos problemas en que sean aplicables los elementos finitos.

Por supuesto, esta técnica también presenta desventajas, entre las que destacan:

- Que no se pueden utilizar los métodos ADI e IADI (Alternating Direction Implicit Procedure e Iterative) que son muy efectivos y, en general, superiores a muchos otros en cuanto a la solución del sistema de ecuaciones para la misma dimensión de la matriz.
- Los métodos de elementos finitos son más abstractos y no pueden verse en ellos intuitivamente el funcionamiento físico del sistema.
- Dado lo anterior, mayor dificultad en la detección de errores al introducir datos o la programación.
- No se ha descubierto aún el funcional de todas las ecuaciones diferenciales y por tanto no es posible la aplicación de la integral que minimiza las cantidades desconocidas del problema.

I.2 CONCEPTOS GENERALES

Una vez que se ha hecho una descripción bastante general del método se presentará una descripción más detallada de los conceptos generales del Elemento Finito⁽²⁾.

I.2.1 Problemas Generales de Variacional

Los problemas de física aplicada que se presentan en ingenie

ría se pueden especificar mediante uno de dos caminos⁽³⁾. Primero las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de una región típica, infinitesimal, son conocidas. Segundo, se postula un principio variacional, extremo, válido sobre toda la región y la solución correcta es la que minimiza alguna cantidad, la cual es definida por una integración adecuada de las cantidades desconocidas, sobre todo el dominio. Una integral como χ , la cual es una función de funciones desconocidas, se conoce como 'funcional'.

Las dos aproximaciones son matemáticamente equivalentes, una solución exacta de una viene siendo solución de la otra. Ambas pueden tomarse como la formulación básica aunque probablemente es más usual la ecuación diferencial. Es posible pasar de una forma a otra haciendo uso de la matemática pura y manipulando la transición^(4,5,6).

La diferencia radica en el procedimiento de solución y mientras algunos -como el método de diferencias finitas^(7,8)- aproximan la solución de las ecuaciones diferenciales directamente acercándose a ella de una manera discreta, otros, como el proceso de Ritz y su variante, el método de elementos finitos, prefieren llegar directamente a una minimización aproximada del funcional. El proceso del elemento finito se puede presentar de una manera general como a continuación se hace:

Sea la formulación física (o puramente matemática) del problema requerir la minimización de un funcional χ sobre cierto dominio. χ se define como una integral sobre el dominio V y parte de su frontera S en la cual aparecen la función desconocida $\{\phi\}$, o sus derivadas, esto es

$$\chi = \int_V f(\{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x} \{\phi\} \dots) dV + \int_S g(\{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x} \{\phi\} \dots) dS \quad (1)$$

Se divide la región en partes pequeñas, subregiones, que

se llamarán elementos, y se describe la función que se está tratando de determinar, en cada elemento, como

$$\{\phi\} = [N]\{\phi\}^e \quad (2)$$

En ésta, $\{\phi\}^e$ puede representar valores nodales de la función asociada con el elemento o simplemente algunos parámetros característicos de ella. La función desconocida se escribe entre llaves para mostrar que puede ser un vector, $[N]$ es una matriz vector de forma, y es función sólo de las coordenadas.

Para minimizar el funcional χ con respecto al número total de parámetros $\{\phi\}$ asociados con el dominio debemos escribir un sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\phi\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \phi_2} \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Si es verdad decir que el funcional total es igual a la suma de las contribuciones de cada elemento, esto es

$$\chi = \sum \chi^e \quad (4)$$

entonces, una ecuación típica será

$$\frac{\partial \chi}{\partial \phi_n} = \sum \frac{\partial \chi^e}{\partial \phi_n} = 0 \quad (5)$$

con sumatoria sobre todos los elementos. La regla para el ensamble de un conjunto general de ecuaciones minimizantes está, entonces, disponible.

En el caso especial en que χ es un funcional de la matriz de forma cuadrática $\{\phi\}$ y sus derivadas, se encontrará que siempre se podrán escribir las derivadas del elemento en forma lineal, como

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} = [k]^e \{\phi\}^e + \{F\}^e \quad (6)$$

en la cual $[k]^e$ y $\{F\}^e$ son matrices constantes. Ahora el conjunto de ecuaciones a minimizar (3) puede escribirse simplemente como

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\phi\}} = [K] \{\phi\} + \{F\} = 0 \quad (7)$$

en donde

$$[K_{ij}] = \sum [k_{ij}]^e \quad (8)$$

$$[F_i] = \sum \{F_i\}^e \quad (9)$$

con suma sobre todos los elementos.

I.2.2 Criterio de convergencia

La función de aproximación dada por (1) debe cumplir ciertas reglas para permitir convergencia de resultados, como la subdivisión que se pretende en elementos más pequeños.

Primera, al decrecer el tamaño del elemento, las funciones f y g de la integral (1) deben tender a ser simplemente valuadas y en problemas físicos bien definidas. Por tanto es necesario que se satisfaga el siguiente criterio:

Criterio 1. Las funciones elementales de forma $[N]$ deben ser tales que con una adecuada selección de $\{\phi\}^e$ cualquier valor constante de $\{\phi\}$ o sus derivadas presente en el funcional χ pueda representarse en el límite al acercarse a cero el tamaño del elemento.

Segunda, la validez de la suma implicada en la ecuación (4) debe ser preservada y se debe estar seguro de que términos como f

y g permanecen finitos en ella. Esto se logra si las derivadas de mayor orden de ϕ presentes en esa expresión son finitas, lo cual conduce a

Criterio 2. Las funciones elementales de forma $[N]$ tienen que ser escogidas de tal manera que en las entrecaras de los elementos de $\{\phi\}$ y sus derivadas, de un orden menor que aquellas presentes en las expresiones f y g que definen el funcional, sean continuas.

Este criterio se puede explicar fácilmente si uno imagina los elementos separados por una franja extremadamente angosta que tiene que ser incluida en las integrales que definen χ y en las cuales ocurre una transición suave de la función desconocida entre valores dados en elementos adyacentes. Si, en el límite, cuando el ancho de esta zona de transición tiende a cero, su contribución a χ desaparece, entonces la ecuación (4) es cierta.

En la figura 1 se muestra una zona imaginaria de transición entre dos elementos. Suponiendo que ϕ , una función escalar, se define de tal modo que en la entrecara los valores obtenidos para ella a partir de los dos elementos, son idénticos. En la figura 1(a) se muestra una gráfica de la transición mediante la cual se ve que su pendiente es discontinua, indeterminada, pero que toma un valor finito en la zona de transición (figura 1(b)). Graficando de una manera similar la segunda derivada se aprecia que ésta sería muy grande en la transición (figura 1(c)) y, en efecto, tiende a infinito cuando el ancho decrece.

La continuidad de ϕ sola es por tanto suficiente para asegurar que no hay contribución sobre χ de la zona que está entre los elementos, si la definición de ésta envuelve sólo la primera derivada. Si estuviera presente la segunda derivada en esta función, de cualquier modo, podría ocurrir una contribución indeterminada (debida a una cantidad infinita multiplicada por un área cero) y la validez de la ecuación (4) no se puede garantizar.

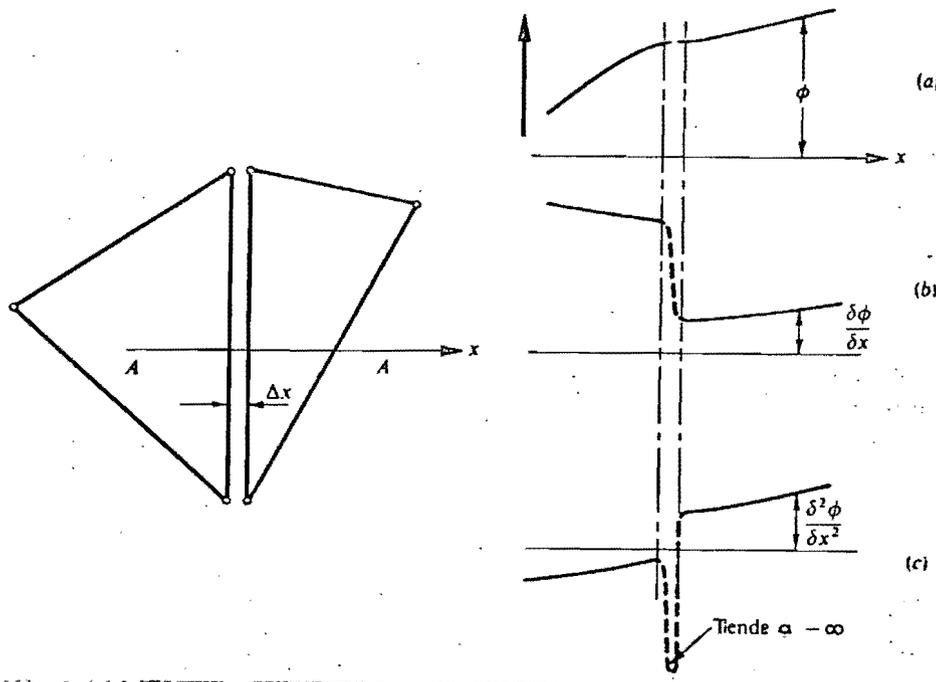


Figura 1

En la discusión anterior, se entiende por convergencia que los errores implicados en determinar la verdadera χ desaparecen cuando el tamaño de los elementos se hace infinitamente pequeño. es, sin embargo, a veces importante decir que la aproximación dada por una malla es un preciso avance hacia otra. En el sentido de determinar χ esta declaración es obviamente cierta si la forma de la función definida por la malla (ecuación (2)) es tal que incluye todas las formas de la segunda malla. En general, si los elementos de la primera malla proceden de subdividir los elementos de la malla más ancha, éste será el caso y en tal subdivisión puede ocurrir una convergencia monótonica⁽⁹⁾.

I.2.3 Criterio de variables nodales

Es importante recordar que al definir las funciones de forma de los elementos, ecuación (2), se estableció que $\{\phi\}^e$ se refiere a valores nodales de las funciones desconocidas o simplemente a algunos parámetros asociados con el elemento.

Para asegurar continuidad de la función entre los elementos como lo requiere el segundo criterio de convergencia, visto arriba, y para subrayar el significado físico del problema es usual concentrar la atención en los valores nodales. Siempre es posible, sin embargo, aumentar algunas formas de variación de la función las cuales, por ejemplo haciendo cero los valores en la frontera del elemento, no alteran la continuidad y al multiplicar éstos por un parámetro con respecto al cual el funcional es minimizado. Tales parámetros nodales pueden mejorar la precisión de la representación y en ocasiones pueden ser útiles⁽¹⁰⁾.

Como, en general, tales parámetros están asociados sólo con un elemento a un mismo tiempo se pueden minimizar antes de ensamblarse y eliminarse de las matrices elementales.

Una forma particular de las variables nodales son los multiplicadores de Lagrange⁽⁵⁾.

Esto ocurre si se impone alguna restricción extra a la función ϕ , la cual no está implicada ni en las condiciones de frontera ni en las funciones de forma propuestas. Sea esta restricción

$$G(\{\phi\}) = 0 \quad (10)$$

La solución requiere ahora minimizar

$$\chi^* = \chi + \lambda G \quad (11)$$

y λ es un parámetro adicional típico. Si se impone una serie de tales restricciones, entonces se tiene que minimizar

$$\chi^* = \chi + \sum_{i=1}^S \lambda_i G_i \quad (12)$$

Ahora λ_i serán parámetros adicionales del problema, que en la práctica serán asociados nuevamente con elementos o entrecarras de los mismos.

Es de interés hacer notar aquí la forma de las ecuaciones

que resultarán en un caso típico cuando el funcional es cuadrático (ecuación (1)) y los multiplicadores de Lagrange se aplican en una serie de restricciones lineales de .

Ahora se puede escribir en general

$$\chi = \frac{1}{2} \{\phi\}^T [K] \{\phi\} + \{F\}^T \{\phi\} \quad (13)$$

en términos de los parámetros nodales, donde $[K]$ es una matriz simétrica.

Las restricciones lineales pueden expresarse ahora en vez de la ecuación (10) por una forma matricial

$$[G] \{\phi\} = 0 \quad (14)$$

donde $[G]$ es una matriz de constantes. Introduciendo los multiplicadores de Lagrange $\{\lambda\}$ como un vector columna con el mismo número de renglones como $[G]$ de columnas (número de restricciones) se tiene

$$\chi = \frac{1}{2} \{\phi\}^T [K] \{\phi\} + \{F\}^T \{\phi\} + ([G] \{\phi\})^T \{\lambda\} \quad (15)$$

Poniendo el conjunto de ecuaciones minimizantes en la forma de la ecuación (6), pero tratando ambos conjuntos de incógnitas se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \{\phi\}} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \{\lambda\}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K] & [G]^T \\ [G] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F\} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (16)$$

Hay que hacer notar dos factores. Primeramente el sistema de ecuaciones permanece simétrico -un hecho que se desea en la solución adoptada para los sistemas. En segundo lugar, a veces se presentan ceros en la diagonal principal dificultando la solución del sistema.

I.2.4 Aproximaciones Alternativas a la Formulación del Elemento Finito

Mientras la minimización aproximada de un 'funcional' es la manera más ampliamente aceptada de llegar a una representación del elemento finito no significa que sea la única manera de hacerlo. En los primeros trabajos estructurales, por ejemplo, se creó un modelo puramente físico y, aunque se podrían haber hecho algunas reservas matemáticas acerca de la validez y convergencia de ciertas aproximaciones propuestas, se obtuvieron buenos resultados ingenieriles.

Ajeno a tales aproximaciones es posible llegar matemáticamente a la aproximación del elemento finito directamente a partir de las ecuaciones diferenciales que gobiernen el problema. Las posibles ventajas de esos métodos son:

(a) Que la búsqueda de un 'funcional', equivalente a la ecuación diferencial conocida, se hace innecesaria.

(b) Que los métodos se pueden extender a un rango de problemas para los cuales podría no existir un 'funcional', o que no se haya descubierto⁽¹¹⁾.

Considérese un problema de resolución de un conjunto de ecuaciones diferenciales que tienen que ser satisfechas por la función desconocida $\{\phi\}$, en la región V. Se escribirán las ecuaciones gobernadoras como

$$A(\{\phi\}) = 0 \quad (17)$$

y sus condiciones de frontera

$$C(\{\phi\}) = 0, \quad (18)$$

que se tienen que satisfacer en la frontera S.

Si una función que satisface las condiciones de frontera se escribe en forma general

$$\{\phi\}_a = [N] \{\phi\} \quad (19)$$

en donde, como antes, $[N]$ son funciones de las coordenadas y $\{\phi\}$ es un conjunto de n parámetros, entonces en general

$$A(\{\phi\}_a) = R \neq 0 \quad (20)$$

La mejor solución será aquella que, de alguna manera, reduzca el residuo R al mínimo valor en todos los puntos de V .

Un camino obvio para llevar a cabo lo anterior es hacer uso del hecho de que si R es cero en todos los puntos, entonces

$$\int_V WR \, dV = 0 \quad (21)$$

donde W es una función, cualquiera de las coordenadas. Si el número de parámetros desconocidos $\{\phi\}$ es n , entonces se escogen n funciones W_i , linealmente independientes, podemos escribir un adecuado número de ecuaciones simultáneas como

$$\int_V W_i R \, dV = \int_V W_i A([N]\{\phi\}) \, dV = 0 \quad (22)$$

para la cual se puede encontrar $\{\phi\}$. Este procedimiento se conoce como método de los residuos pesados y W_i es la función de peso. Dependiendo de cómo se escoja la función de peso se pueden tener diferentes aproximaciones clásicas:

Colocación de punto. $W_i = 1$ en un punto, i , y cero en todos los demás puntos. Esto es, de hecho, equivalente a satisfacer la ecuación diferencial gobernadora en n puntos separados.

Colocación de subdominio. $W_i = 1$ sobre un subdominio particular y cero en todos los demás. Esto es equivalente a hacer la integral cero en un número de subdominios suficiente para dar el número necesario de ecuaciones simultáneas.

Proceso de Galerkin. $W_i = N_i$, a saber la función de peso se hace igual a la función de forma que define la aproximación. Es-

te proceso conduce, en general, a la mejor aproximación.

Si alguno de los procedimientos anteriores se usa con la ecuación (19), la cual define la representación aproximada elemento por elemento, entonces los rasgos típicos de la aproximación del elemento finito serán redescubiertos.

En primer lugar las ecuaciones simultáneas serán asociadas como influencia de un parámetro que se extiende sólo a elementos cercanos a un punto nodal.

En seguida, las integrales se pueden evaluar (suponiendo que no hay contribución entre los elementos, como antes) sobre cada elemento independientemente, y entonces se suman para obtener la contribución total.

Inmediatamente aparece una desventaja: en las integrales de el proceso del residuo pesado el operador diferencial A aparece directamente, y en éste existen diferenciales de orden superior a las del funcional variacional χ . Entonces, para anular la contribución de la 'región inter-elemental' se debe implicar un orden mayor de continuidad en la definición de la función de forma. Esto es un asunto serio pues queda muy limitado el escoger la función de forma y puede plantear dificultades insuperables, pues el amplio conjunto de funciones que aseguran continuidad de la variable es solo restringido si la continuidad de la pendiente se supone adicionalmente. La continuidad de las segundas derivadas solo es posible en casos más restringidos.

Para salvar esta dificultad a veces es posible transformar las integrales de la ecuación (22) usando integración por partes (o sus formas más generales de transformaciones de Green o Stokes). Si esta transformación se cumple en su forma general entonces no hay restricciones implicadas y si resulta una integral de menor orden, sólo se deben satisfacer los requerimientos de continuidad para ésta.

En la presentación anterior se supuso que la aproximación _
escogida de la función desconocida, ecuación (19), satisfacía _
automáticamente las condiciones de frontera. Es preferible, en _
general, aceptar estas suposiciones y formular la ecuación en una _
forma general imponiendo las condiciones de frontera precisamen-
te en el paso final.

II

ESTADO DEL ARTE

El propósito de este capítulo es presentar un reporte del estado del arte en el desarrollo y aplicación del elemento finito al flujo en medios porosos.

II.1 Aplicaciones del Método del Elemento Finito

Los trabajos de vanguardia hacia el desarrollo y uso del método del elemento finito fueron hechos por Zienkiewicz y sus colaboradores⁽¹³⁻¹⁶⁾. Detalles de las formulaciones y revisiones para comprenderse mejor fueron hechas por Zienkiewicz⁽¹⁶⁾, Desai y Avel⁽¹⁷⁾ y Desai^(12,18,19). Los desarrollos y aplicaciones en el pasado consideraron varias categorías de flujo -confinado permanente^(13,16,17,19-24), no confinado permanente o a superficie libre^(16,17,19,22,23,25-32), no permanente confinado^(14,33-36) y no permanente no confinado^(16,17,37-52). Se presentará a continuación una descripción de estas categorías de flujo.

Varios investigadores han considerado el problema del flujo a través de medios porosos fracturados o medios discontinuos.⁽⁵²⁻⁵⁶⁾ Neuman⁽⁵⁷⁾ asevera que una de las características más importantes de la aproximación del elemento finito es la habilidad de la red para contraerse o expandirse en cualquier punto del cálculo, para seguir el contorno de las fronteras móviles, superficies libres y juntas de materiales deformables.

La técnica descrita en este artículo se puede aplicar a condiciones de saturación o de saturación parcial como formaciones de roca o arcillas expansivas. El problema se resuelve mediante

el esquema de aproximación de Galerkin con el método del elemento finito, con ayuda de un esquema iterativo implícito.

El efecto de la presión del fluido en la deformación del medio granular se ha presentado usando procedimientos iterativos⁽⁵⁵⁾. Este método se ha aplicado a problemas de flujo en medio poroso casi desde su inicio. Runesson, Tågnfors y Wiberg⁽⁵⁸⁾ tratan eficientemente el análisis integrado de sistemas arena-arcilla si el desarrollo de la presión de poro en las dos capas se supone separado en el tiempo. Para obtener resultados confiables del análisis de asentamientos, dependientes del tiempo, el modelo para arcilla debe incluir plasticidad y deslizamiento. El método adoptado de integración del tiempo da soluciones incondicionalmente estables y los incrementos de tiempo se escogen automáticamente basados en la tolerancia de truncado estimada.

Bajo la condición de flujo horizontal en los acuíferos y flujo vertical en los acuitardos se ha demostrado que el comportamiento transitorio del drenaje (del acuífero) es gobernado por un sistema de ecuaciones integro-diferenciales. Herrera y Rodarte⁽¹⁵⁹⁾ establecen que las ecuaciones integro-diferenciales de la dinámica de los acuíferos semiconfinados constituyen la base de un poderoso método de análisis.

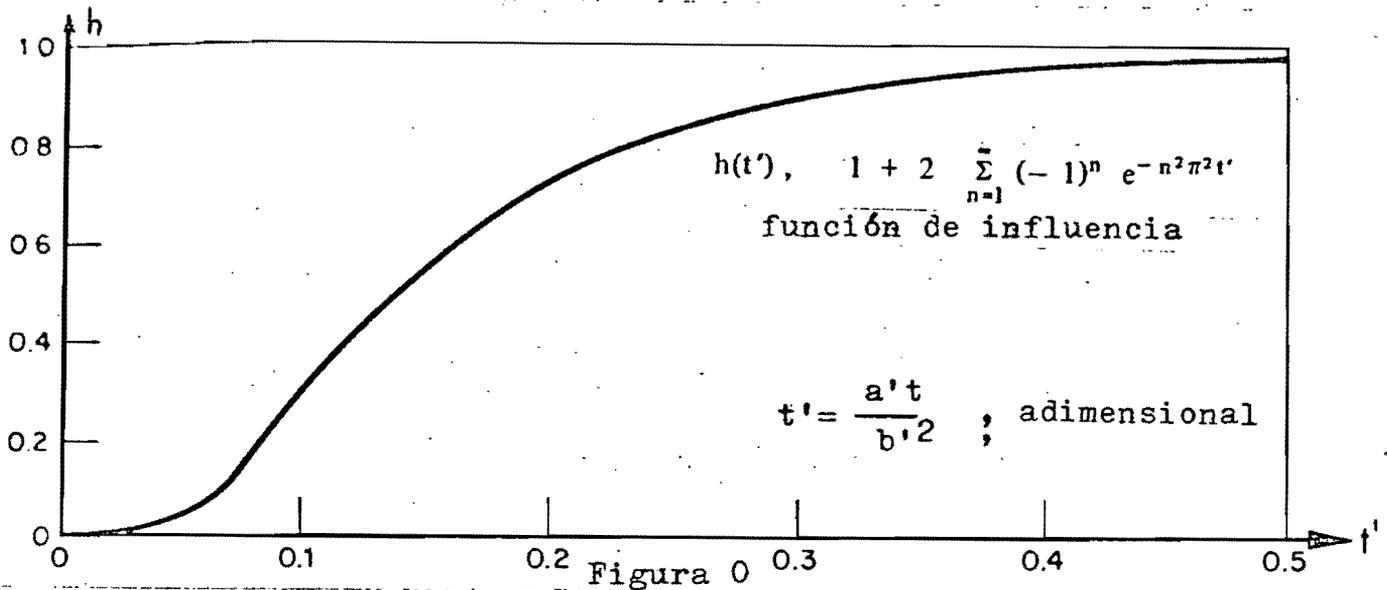
Es una herramienta muy flexible para análisis preliminar, antes de desarrollar un modelo complejo. Esto es debido a que las funciones que aparecen en el sistema tienen forma universal, a saber, la forma de estas funciones no depende del problema particular considerado; por tanto se puede derivar bastante información acerca de una situación dada casi antes de que se haga cualquier cálculo. Como ejemplo de las posibilidades al respecto los mismos autores han demostrado que la función de influencia de un acuífero al próximo tiene la forma de una función unitaria (figu

ra 0), con un tiempo t^*

$$t^* = \frac{b'^2}{6a'} \quad (0)$$

donde b' = espesor del acuitardo, $a' = k'/s'$; k' = permeabilidad del acuitardo y s' = coeficiente de almacenamiento del acuitardo.

Por tanto se puede concluir inmediatamente que el sistema se puede tratar como acuíferos separados, para tiempos menores que t^* .



II.2 Aspectos Teóricos

Las formulaciones para la mayoría de los problemas de flujo se basan en un buen número de suposiciones. Las principales son que el medio es rígido y continuo, el fluido es homogéneo e incompresible, continuo e irrotacional, y los efectos de inercia y capilaridad son despreciables; sin embargo en ciertas ocasiones si se consideran algunos de estos factores. Gran parte de los planteamientos se basan en la Ley de Darcy^(59,60); algunos trabajos han desarrollado procedimientos basados en otras leyes^(61,63). Como ejemplo Rammat y Eackx⁽⁶⁵⁾ desarrollaron un programa de computadora que resuelve la ecuación de Laplace para flujo en donde el elemento que se usa para modelar el movimiento del agua en el subsuelo es un elemento isoparamétrico bidimensional de 4 a 8 nodos. Los datos de entrada consisten en: geometría, la subdivisión del modelo en elementos finitos, la selección de los elementos finitos que se puedan ajustar a la superficie libre, coeficientes de

permeabilidad, condiciones de frontera. La salida es: las cargas hidráulicas en los nodos, los valores de la función de flujo y las velocidades. Se puede aplicar a flujo de agua subterránea con superficie libre o artesiana. El flujo puede ser plano o axisimétrico (tridimensional).

La teoría de Dupuit se ha empleado con frecuencia en la obtención de planteamientos simplificados.

El problema del flujo se ha formulado para construir modelos teóricos; los dos tipos de modelo usado son el determinístico y el probabilístico^(31,66-70); las acciones determinísticas son las que dependen del estado del sistema, por ejemplo, drenaje de un manantial, drenaje de un acuífero a un río, o a través de una capa semiconfinante. Las estocásticas o probabilísticas dependen de factores hidrológicos y climatológicos, recargas naturales de acuíferos, recarga de un río influente a un acuífero, etcétera, y pueden tratarse estadísticamente. Las aplicaciones del elemento finito se han basado esencialmente en los modelos determinísticos en los cuales el problema se ha planteado mediante dos conceptos: particular y continuo^(31,70). En la aproximación particular se usan modelos físicos idealizados para definir el comportamiento del flujo y en la aproximación continua se establecen expresiones matemáticas^(71,72). Elango y Suresh⁽⁷³⁾ hacen una comparación entre el modelo del elemento finito con el modelo analítico para el manejo simple del flujo subterráneo.

Más planteamientos del elemento finito se han basado en el concepto posterior en el cual el medio poroso - un ensamblaje de partículas sólidas, vacíos y fluido- se reemplaza por uno continuo. Las propiedades de los materiales se han determinado con base en pruebas hechas en muestras del medio (en laboratorio y en campo).

II.2.1 Leyes constitutivas

La ley de Darcy, que se supone válida en muchos de los desarrollos se puede expresar como

$$v = -k \phi' \quad (1)$$

donde v = velocidad promedio del flujo, ϕ' = gradiente hidráulico y k = coeficiente de permeabilidad en la dirección del flujo.

La ley de Darcy se puede considerar válida para flujos lentos con valores muy bajos del número de Reynolds, $Re \leq 1$ ⁽³¹⁾. Su validez depende de las propiedades del medio poroso como, por ejemplo, su uso puede justificarse para flujo a través de arcillas, limos y arenas limosas finas. Entonces la extensión del régimen de flujo cubierto por la ley de Darcy involucrará el régimen laminar con pequeñas magnitudes de velocidad del fluido donde los efectos del término de inercia, en la ecuación de Navier-Stokes, se pueden ignorar en comparación a los términos de viscosidad⁽³¹⁾. Kjaran y Sigurdsson establecen que la ecuación diferencial parabólica lineal que describe el flujo subterráneo no establecido en un acuífero anisotrópico y no homogéneo ha sido resuelta por varios autores usando el criterio de aproximación de Galerkin y el método del elemento finito para las variables espaciales.

Wexler⁽⁷⁵⁾ deriva la ecuación elíptica diferencial parcial de segundo orden que gobierna el flujo en un medio anisotrópico, no homogéneo.

El modelo del medio es consistente con la superficie de frontera que fue posible modelar con elementos isoparamétricos. Se prueba que aún en el caso de medio anisotrópico, la continuidad del flujo normal a una superficie de separación es una condición natural del procedimiento variacional.

El comportamiento del flujo en régimen sublaminar es esencialmente no lineal y para un valor de $Re \geq 1$ puede ser necesario usar leyes no lineales o no-Darcynianas.

Dos leyes no lineales que se usan en la formulación del ele

mento finito son

$$\phi' = av + bv^2 \quad (2a)$$

y

$$\phi' = cv^m \quad (2b)$$

donde a, b, c y m son constantes del material que se pueden determinar con pruebas de laboratorio (permeámetros). La relación de la ecuación 2a se llama ley de Forchheimer⁽⁶¹⁾ con a y b supuestas constantes, y la ecuación 2b se conoce como ley exponencial o ley de Missbach⁽⁶²⁾. La relación de Forchheimer se puede suponer válida para varios rangos de $Re = 0-5, 5-25, 25-100$, en régimen laminar y ha sido observado por Trollope, Stark y Volker⁽³¹⁾ que la ecuación 2a se puede extender también al régimen de flujo turbulento.

En el método del elemento finito el uso de las ecuaciones no lineales 2a y 2b ha sido reportado por Fenton⁽²⁷⁾, Volker⁽²⁸⁾, Mc Corquodale⁽³⁸⁾, Trollope, Stark y Volker⁽³¹⁾.

II.2.2 Ecuaciones Gobernadoras

Una ecuación gobernadora para flujo saturado que se usa en la formulación del elemento finito se puede expresar como^(16,17)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \bar{Q} = n \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3)$$

donde k_x , k_y y k_z coeficientes de permeabilidad (con dimensiones de longitud entre tiempo) en las direcciones x, y, z respectivamente, n = porosidad efectiva dividida por el espesor del acuífero (con dimensiones 1/longitud) para flujo no confinado y almacenamiento específico (con las mismas unidades) para flujo confinado, t = tiempo, $\phi = p/\gamma + z$ = carga hidráulica o potencial, p =

presión, γ = peso específico, z = carga de elevación y Q = gasto. Una ecuación gobernadora para flujo parcialmente saturado o no saturado podría expresarse como ⁽⁷⁶⁾

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho k(\Theta) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho k(\Theta) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho k(\Theta) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = \frac{\partial(\rho \Theta)}{\partial t} \quad (4)$$

donde Θ = contenido de humedad expresado como una fracción del volumen y ρ = densidad del fluido.

Una ecuación, llamada de Boussinesq ^(37,46,48,77), que gobierna el flujo unidimensional, que a menudo se resuelve mediante el método del elemento finito es

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = n \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5)$$

donde h = altura de la superficie libre. Es posible usar ecuaciones linealizadas de la ecuación (5) y versiones similares de ecuaciones bidimensionales ^(37,45,48,77,78).

Algunas soluciones de problemas de flujo subterráneo no estable que involucran una superficie libre variable han sido discutidos en libros ^(79,80,81) usando la extensión de Boussinesq ⁽⁸²⁾ al análisis de Dupuit-Forchheimer.

Puesto que las soluciones analíticas solo se obtienen con condiciones de frontera muy simples ⁽⁸³⁾ se ha recurrido a las soluciones numéricas. Así, Hornberger et al. ⁽⁸⁴⁾ y Zucker et al. ⁽⁸⁵⁾ han usado un método de diferencias finitas predictor-corrector, mientras Bruch ⁽⁸⁶⁾ usó uno de elementos finitos como lo sugiere Oden ⁽⁸⁷⁾, para obtener soluciones particulares.

En especial se ha tratado con el problema de flujo donde el nivel se cambia de repente a una altura constante diferente. Gureghian y Youngs ⁽⁸⁸⁾ comparan los dos procedimientos numéricos para obtener soluciones de la situación más difícil donde la velocidad del flujo es estable, mientras el nivel del embalse, obtenido como parte de la solución, sube con una velocidad variable.

para producir tal flujo.

Una forma de la ecuación gobernadora de flujo no Darcyniano dada por Mc Corquodale⁽³⁸⁾ es

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[k(v) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{g\eta} \frac{\partial v_i}{\partial t} \right] = 0 \quad (6)$$

en la cual g = aceleración de la gravedad, x_i = ejes coordenados ($x = 1, 2, 3$) y $k(v)$ = conductividad hidráulica o permeabilidad.

II.2.3 Categorías de Flujo

Las ecuaciones (3) y (6) representan flujo transitorio; si los términos dependientes del tiempo desaparecen, se obtienen las ecuaciones para flujo permanente. Dos subcategorías comunes de flujo son confinado y no confinado o a superficie libre. En las figuras 1 a, b, c y d, respectivamente, se presentan ejemplos de flujo permanente confinado, transitorio confinado, permanente no confinado y transitorio no confinado.

II.2.4 Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera comunes que ocurren en los sistemas de flujo pueden expresarse como (figura 1)

$$\phi = \bar{\phi}(t) \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (7a)$$

$$k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q(t) = 0 \quad \text{en } \Gamma_2 \quad (7b)$$

donde $\bar{\phi}(t)$ = potencial prestablecido en la frontera Γ_1 , l_x , l_y , l_z = cosenos directores de la normal a la frontera Γ_2 en la cual el flujo está restringido, y $q(t)$ = intensidad de flujo.

La condición en la ecuación 7a es llamada condición de frontera potencial o de carga y la de la ecuación 7b se llama condi-

ción de frontera de flujo. Estas dos condiciones representan, respectivamente, las condiciones de frontera tipo de Dirichlet y Neumann. Una variación prescrita de la carga de fluido en el lado aguas arriba de la presa de la figura 1c es un ejemplo de la condición de frontera potencial y la imposibilidad del flujo a través de la base impermeable; las figuras 1a, c y d representan condiciones de frontera de flujo.

En el caso de flujo no confinado, necesitan satisfacerse condiciones de frontera (mixtas) adicionales. Por ejemplo, en flujo transitorio no confinado, ocasionado por las fluctuaciones en el almacenamiento, dependientes del tiempo, figura 1d, las condiciones de frontera son:

$$\phi = \bar{\phi}_u(t) \quad \text{en la cara AB, aguas arriba} \quad (8a)$$

$$\phi = \bar{\phi}_d(t) \quad \text{en la cara EF, aguas abajo}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{a lo largo de la base impermeable AF} \quad (8b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{a lo largo de la superficie libre CD} \quad (8c)$$

$$\phi = z(t) \quad \text{a lo largo de la superficie libre CD} \quad (8d)$$

$$\phi = z(t) \quad \text{a lo largo de la superficie de flujo BC y la DE}$$

donde $z(t)$ = coordenada vertical y n denota perpendicularidad a la frontera.

II.3 Procedimientos de formulación

Comunmente se han empleado los métodos de residuo pesado y variacional para formular las ecuaciones del elemento finito.

Los procedimientos variacionales fueron usados en las primeras etapas del método del elemento finito. El funcional variacional que se usó en las primeras aplicaciones se puede expresar como

$$\pi_P(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[k_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(\bar{q} - n \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \phi \right] d\Omega - \iint_{\Gamma_2} \bar{q} \phi d\Gamma \quad (9)$$

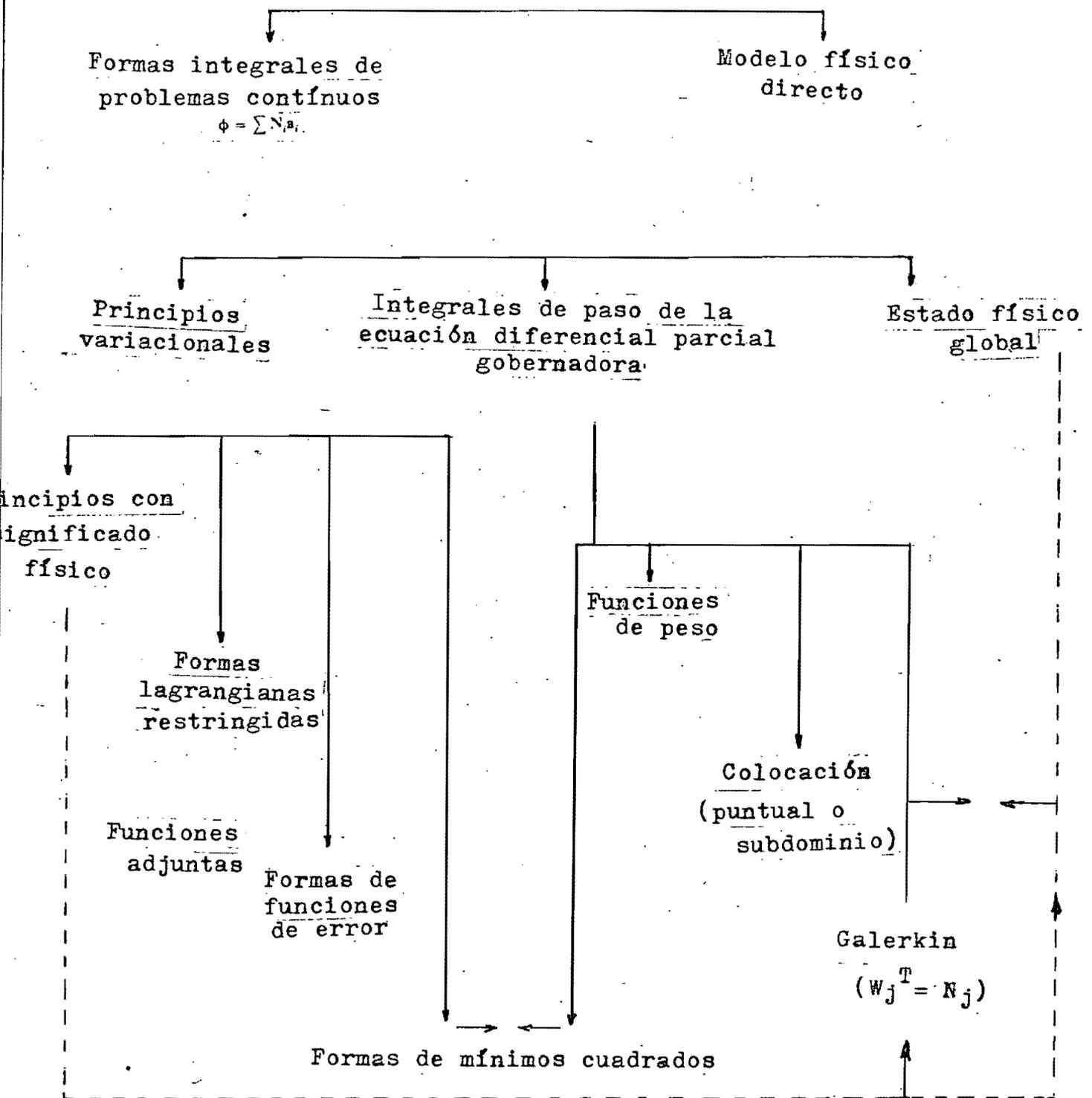
en la cual Ω = dominio (volumen) del flujo, Γ = superficie, Γ_2 = parte de la superficie (área) en la cual \bar{q} es prescrito. También se pueden emplear funcionales alternativos en términos de la función de flujo, Ψ ; Meissner⁽⁸⁹⁾ presentó un conjunto de principios variacionales generalizados para los problemas de flujo.

Sandhu y Wilson⁽⁹⁰⁾ han formalizado funcionales variacionales basados en el principio de Gurtin⁽⁹¹⁾ para el problema de consolidación y Javandel y Witherspoon^(33,34), y Neuman y Witherspoon^(29,40,92) para flujo a través de medio compresible suave y rígido. Una forma de dicho funcional dado por Neuman y Witherspoon es

$$\begin{aligned} \pi_P(\phi, h) = & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} k_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + S_s \phi \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) d\Omega - \iint_{\Gamma} (\phi - \bar{\phi}) k_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_i d\Gamma + \\ & + \iint_{\Gamma_2} \bar{q} \phi d\Gamma - \int_{FS} (\phi - h) k_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_i d\Gamma - \int_{FS} h \left(\bar{q} - S_y \frac{\partial h}{\partial t} \right) n_3 d\Gamma + \int_{SS} (\phi - x_3) k_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_i d\Gamma \quad (10) \end{aligned}$$

donde k_{ij} = tensor de permeabilidad, n_i = vector normal unitario, FS = superficie libre, SS = superficie de flujo, Ss = almacenamiento específico y Sy = rendimiento específico del medio.

APROXIMACION DEL ELEMENTO FINITO



PROCESO BASICO MEDIANTE EL CUAL LAS FORMAS INTEGRALES DE APROXIMACION HACEN UN PRELIMINAR DEL ANALISIS DEL ELEMENTO FINITO.

Se han obtenido soluciones satisfactorias con el funcional de la ecuación (9). Sin embargo, se ha observado que tal procedimiento no llena los requerimientos del cálculo de variaciones para problemas que dependen del tiempo. Esto es debido a que durante las variaciones de ϕ , la $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ se supone que no varía. Este principio es, por tanto, conocido como un principio pseudovariacional. Detalles del principio variacional verdadero, quasi- y restringido han sido dados por Finlayson⁽⁹³⁾ y los han discutido Aral y colaboradores⁽⁹⁴⁾ y Desai⁽¹⁸⁾.

Fenton⁽²⁷⁾, Volker⁽²⁸⁾ y Mc Corquodale⁽³⁸⁾ han reportado formulaciones variacionales con el método del elemento finito para flujo no Darcyniano. El funcional variacional para flujo bidimensional correspondiente a la ecuación (6) es

$$\pi(\phi) = \int_{\Omega} \left\{ k(|\nabla\phi|) \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{a}{6bc} (2 - c'|\nabla\phi|) \sqrt{1 + c'|\nabla\phi|} \right\} dx dy \quad (11)$$

donde $c' = 4b/a^2$. La segunda parte del funcional, ecuación (11), fue introducida para mantener la continuidad del flujo.

II.4 Condiciones de Frontera

II.4.1 Superficie libre

El flujo de agua u otro líquido a través de un medio poroso puede ocurrir sin una definición específica de la frontera superior de la región de flujo. La superficie superior es, entonces, libre en sentido hidráulico y es especificada sólo por las condiciones de presión constante. Tal problema es difícil de resolver cuando la solución incluye la localización de esta superficie libre. Una vez que esta posición es conocida es relativamente fácil obtener las líneas equipotenciales y de flujo y los subséquentes cálculos de interés ingenieril, tales como flujo y pre-

siones locales.

Se dispone de soluciones analíticas para flujos a superficie libre solo en un limitado número de problemas, con geometría y condiciones de frontera simples. Técnicas experimentales basadas en recursos análogos y aproximaciones numéricas usando los métodos de diferencias finitas han aportado soluciones útiles para muchos problemas físicos. De todos modos, cuando se considera el flujo a través de regiones anisotrópicas y no homogéneas de geometría arbitraria, estos métodos son muy tardados y tediosos.

En la formulación del elemento finito se pueden abordar con facilidad las condiciones de frontera en la forma de cargas prescritas y gastos diferentes de cero. Pero cuando existe una superficie libre o en condiciones de flujo saturado-no saturado surgen mayores dificultades.

La superficie libre para flujo establecido se determina usando procedimientos iterativos (19,25-32,39,95). La posición de la superficie libre primero se supone y posteriormente se corrige sucesivamente con base en los valores de las cargas del fluido computadas en cada paso de la iteración. Las condiciones de frontera de que no hay flujo que atravesase y de la carga total igual a la carga de elevación en la superficie libre, las ecuaciones (8c y 8d) se verifican cada paso, y el proceso continúa hasta que los movimientos de la superficie libre son esencialmente despreciables.

Al modelar sistemas geohidrológicos los flujos subterráneos no confinados tienen efectos indirectos debidos al comportamiento hidráulico de la superficie y del medio subsuperficial. De todos modos ellos juegan papeles muy importantes en problemas hidráulicos o diseños técnicos concernientes no solo a fuentes de agua sino con muchas otras aplicaciones.

Por otro lado, un amplio rango de problemas de flujo subterráneo se han manejado mediante técnicas numéricas de aproximación. Aún más después de las discusiones necesarias, mucha de esta actividad se ha centrado en el análisis numérico de flujo subterráneo con superficie freática, en particular el problema más difícil de flujo transitorio.

Recientemente Neuman propuso un modelo lineal que trata el acuífero no confinado como un sistema compresible y la superficie freática como una frontera móvil. El fenómeno transitorio puede ser simulado matemáticamente usando valores constantes de almacenamiento específico y rendimiento específico sin recurrir a la teoría del medio no saturado. Bajo este tratamiento, la ecuación básica de flujo tiene una forma diferencial parabólica que involucra derivadas con respecto al tiempo.

Al mismo tiempo (1972,73) Neuman y sus colaboradores dieron una revisión del método. Ohashi⁽⁹⁶⁾ considera la extensión del modelo de Neuman de tal modo que se pueda analizar un sistema de flujo no confinado en dos dimensiones con la frontera que tiene un efecto de fluctuación periódica. Se fija la atención al movimiento dependiente de la superficie freática, debido a que se utiliza un procedimiento simplificado, basado en la técnica de cambiar la posición de la superficie libre para obtener la elevación. Esto es, el problema de estabilidad y convergencia en el sentido de norma máxima para la ecuación parabólica de segundo orden se analiza usando la definición de Fujii.

La localización de la superficie libre en flujo transitorio es difícil. Debido a su amplia aplicación este problema ha sido sujeto de amplia investigación en las últimas décadas y se han hecho varios descubrimientos. La principal dificultad para resolver el problema surge de la dependencia de la humedad del coeficiente de difusión y de la conductividad hidráulica, las que pro

ducen la ecuación gobernadora altamente no lineal. Klute⁽⁹⁷⁾, Philip^(98,99), Remson y colaboradores⁽¹⁰⁰⁾, Singh⁽¹⁰¹⁾, Swartzen druber⁽¹⁰²⁾ y Parlange⁽¹⁰³⁾ entre otros investigadores usado diferentes métodos de aproximación o numéricos para atacar la ecuación diferencial parcial no lineal gobernadora. Recientemente Bruch y Zyvoloski⁽¹⁰⁴⁾ han usado el método del elemento finito en la solución del mismo problema. Ellos encontraron que problemas de difusión con dependencia lineal o no lineal de la humedad respecto del coeficiente de difusión puede ser manejada fácilmente con elementos finitos con un pequeño sacrificio de precisión.

El procedimiento que propusieron Desai^(19,37,43) y Taylor y sus colaboradores⁽³⁹⁾ se basa en la solución de la versión de flujo establecido de la ecuación (3). En cada intervalo de tiempo, los movimientos de la superficie libre (nodos) se obtienen de valores computados de cargas y velocidades nodales. Las coordenadas de los nodos en la superficie libre entonces se modifican quedando

$$x_i^{t+\Delta t} = x_i^t + \Delta t x_{i,t}(t') \quad (12)$$

donde x_i denota las coordenadas de los puntos nodales en la superficie libre, $i=1,2,\dots,N$, N = número de nodos en la superficie libre, t = tiempo, Δt = incremento de tiempo, los superíndices denotan rangos de variación de x_i y t' está entre t y $t+\Delta t$. En el esquema más simple, $t'=t$, que en esencia alcanza la siguiente integral diferencial en el tiempo. Aquí, se necesita preseleccionar un valor pequeño de t para asegurar una aproximación adecuada.

El esquema precedente fue modificado por Desai⁽⁸⁹⁾ para incluir un procedimiento iterativo en el cual se pueden usar localizaciones alternativas para calcular x_i . Basado en la condición de Lipschitz⁽¹⁰⁵⁾ el tamaño de Δt se incrementa o decrementa au

tomáticamente de tal modo que se asegura la convergencia y estabilidad para cada tiempo.

Keuman y Witherspoon⁽³⁹⁾ formularon el problema usando el principio variacional, ecuación (10). El sistema resultante de ecuaciones diferenciales no lineales se integró en el tiempo usando el procedimiento de Crank-Nicolson. De resultados cuantitativos, este procedimiento se consideró incondicionalmente estable.

Mc Corquodale⁽³⁸⁾ usó el concepto de coordenadas Lagrangianas para flujo gobernado por una ley no Darcyniana, ecuación (2).

El uso del principio variacional, ecuación (11), condujo a un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que se resolvió usando el método de sobrerelajación sucesiva. Se encontró que la estabilidad del procedimiento depende del tamaño de t .

Cheng y Li⁽⁵¹⁾ llegaron a la superficie libre resolviendo la forma siguiente de la ecuación gobernadora de la superficie libre y usando diferencias en el tiempo hacia adelante

$$\left(1 - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 - k_r \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (13)$$

donde $k_r = k_y/k_x$.

Desai⁽¹⁰⁶⁾ describe una aproximación alternativa a los procedimientos numéricos de elementos finitos que tanto se han usado en flujo en medio poroso a superficie libre y evalúa dos procedimientos de elementos finitos para flujotransitorio en medio rígido y para medio deformable (consolidación). El procedimiento es llamado el potencial residual o esquema de flujo a superficie libre. Este esquema suprime el volver a calcular las propiedades de los elementos durante los procesos iterativos y se puede probar que es más económico que los esquemas convencionales.

Recientemente se han desarrollado distintos esquemas para la obtención de la superficie libre: Finn y Vorog̃lu⁽¹⁰⁷⁾ presentan un método de elementos finitos con dominio variable para la

solución de la ecuación diferencial que involucra la determinación simultánea de la distribución de la variable dependiente y de la superficie libre.

Stauffer⁽⁷²⁾ presenta un modelo de simulación matemática que contempla el efecto dinámico en la relación entre la presión capilar y el contenido de agua y entre el contenido de agua y la permeabilidad.

II.4.2 Flujo no saturado

El concepto de la superficie libre es válido para muchos problemas prácticos como flujo en medios limosos, arenosos o granulares. En ciertas situaciones es útil fijarse en los problemas de flujo saturado-no saturado y apuntar a la determinación de la zona de separación de los dos regímenes, en vez de buscar la superficie libre.

Problemas de flujo no saturado o parcialmente saturado se han resuelto, usando el método de diferencias finitas, para la superficie libre satisfaciendo la condición de presión cero, Reisenauer⁽⁷⁶⁾, Taylor y Luthin⁽⁸¹⁾. Desai^(37,50,78) utilizó un procedimiento en el cual las cargas del fluido se calculan en todo el dominio del flujo y la superficie libre se localiza encontrando los puntos donde la carga total iguala sus cargas de elevación. El punto de salida en la superficie del flujo se localiza mediante un procedimiento iterativo junto con un método de fragmentos. Neuman⁽¹⁰⁹⁾ propone un procedimiento general, en el cual la tan mencionada superficie libre se localiza encontrando puntos donde la carga de presión se hace cero y la superficie del flujo es manejada por un método iterativo especial.

La ventaja de estas aproximaciones es que se puede evitar la necesidad de romper la malla de elementos finitos.

Se han propuesto procedimientos alternativos basados en el concepto de la discretización completa espacio-tiempo del elemento finito con el método de Galerkin^(46,110-112).

Tzimopoulos⁽¹¹³⁾ lo trata como flujo simultáneo de dos fluidos inmiscibles donde el aire se supone estancado.

Por otra parte, la predicción del movimiento del agua en suelos desérticos sólidos es un problema matemáticamente difícil de resolver y la dificultad aumenta con el suelo seco. Finlayson⁽¹¹⁴⁾ desarrolla un trabajo encaminado a entender estas dificultades matemáticas y a encontrar métodos para resolverlos.

II.5 Flujo a Través de Medio Discontinuo

Muchas aplicaciones del método del elemento finito suponen que el medio discontinuo (rocas geológicas) es incompresible y que el flujo ocurre sólo en las juntas. A menudo se supone válida la ley de Darcy, de cualquier modo, se ha observado que el flujo puede ser no lineal aún con pequeños gradientes. Una ley no lineal basada en experimentos de laboratorio de flujo a través de fracturas reportado por Maini, Noorishad y Sharp⁽¹¹⁵⁾ es

$$C \frac{\partial P}{\partial r} = (v_m)^n \quad (14)$$

donde v_m = velocidad media, n muestra el grado de no linealidad, $\frac{\partial P}{\partial r}$ = gradiente hidráulico y C = constante que depende de la geometría de las fracturas y la viscosidad del fluido. Wittke, Risler y Semprich⁽¹¹⁶⁾ han revisado teorías de flujo laminar y turbulento en juntas y fisuras.

Para flujo laminar a través de una junta se suponen paredes paralelas, las componentes de la velocidad pueden derivarse de la ecuación de Navier-Stokes como^(37,43,54,60,116).

$$v_{xj} = \frac{-g(z\alpha_j)^2}{12 \nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -k_j \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (15a)$$

$$v_{yj} = \frac{-g(z\alpha_j)^2}{12 \nu} \frac{\partial \phi}{\partial y} = -k_j \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (15b)$$

donde α_j = mitad del ancho de la junta y ν = viscosidad cinemática.

Se usan varios esquemas para simular el flujo a través de fisuras. Una junta abierta se puede tratar como un conducto discreto con permeabilidades calculadas como en la ecuación (15) y porosidad igual a la unidad⁽⁹¹⁾. Se pueden utilizar elementos especiales para juntas abiertas y rellenas con sus matrices de permeabilidad establecidas con base en el concepto similar al usado por Goodman y colaboradores⁽¹¹⁷⁾, Zienkiewicz y colaboradores⁽¹¹⁸⁾ y Ghaboussi y colaboradores⁽¹¹⁹⁾.

Se usó un elemento finito triangular para juntas con apertura variable en el cual se incluyó la interferencia debida a las fisuras que intersectaban a la junta⁽⁵⁴⁾. En caso de tener un gran número de juntas, la red de conductos coplanares se reemplaza por un dominio homogéneo, continuo y anisotrópico con permeabilidad evaluada con base en la geometría de las juntas⁽¹¹⁶⁾.

Las investigaciones hacia soluciones numéricas para flujo en fracturas son de reciente origen y se espera que estas experiencias incrementen las actividades de investigación. La cuestión de obtener modelos numéricos realistas y de la medición precisa de las propiedades del material serán de importancia vital. Lo último requerirá sofisticadas técnicas de campo y laboratorio. Por otra parte, el concepto de medio discontinuo reemplazado por un medio continuo estadísticamente equivalente necesitará mayores investigaciones.

II.6 Factores que Afectan las Aplicaciones

II.6.1 Características numéricas

El método de elementos finitos fue aplicado por primera vez por Zienkiewicz y Cheung⁽¹²⁰⁾ para resolver la ecuación de Laplace, que es la ecuación gobernadora del flujo subterráneo establecido. Wilson y Nickell⁽¹²¹⁾ aplicaron el método para resolver la ecuación diferencial parabólica para flujo de calor no estable, usando el principio variacional desarrollado por Gurtin⁽¹²²⁾. Javandel y Witherspoon^(123,124) emplearon el método del elemento finito para elementos bidimensionales triangulares y rectangulares y encontraron que el método se podía adaptar para manejar problemas de flujo transitorio en sistemas anisotrópicos y multiestratificados con condiciones de frontera complejas. Un mayor avance, sensacional, en la aplicación del método del elemento finito fue el desarrollo de elementos curvos isoparamétricos por Ergatoudis y colaboradores⁽¹²⁵⁾. Pinder y Frind⁽¹²⁶⁾ aplicaron elementos isoparamétricos bidimensionales de orden mixto junto con un procedimiento de Galerkin para el análisis de acuíferos y concluyeron que el método del elemento finito aporta soluciones satisfactorias con muchos menos nodos que el método de diferencias finitas. Aunque el análisis de flujo subterráneo mediante elementos isoparamétricos tridimensionales fue esbozado por Zienkiewicz y Parekh⁽¹²⁷⁾, es desafortunado notar que se encuentran muy pocos trabajos en análisis tridimensional de flujo subterráneo.

La mayor disociación a la aplicación del análisis tridimensional es que se cree que requiere de mucho tiempo de computadora. Es verdad que en análisis tridimensional de esfuerzos, donde cada nodo tiene tres incógnitas, el tiempo de computo para resolver un problema práctico es muy costoso. Sin embargo, en simulación de acuíferos donde cada nodo tiene una sola incógnita el

tiempo de cómputo no es tan excesivo como se imagina. En vista de que los acuíferos naturales siempre son tridimensionales se justifica ampliamente.

Durante los últimos años, se ha tenido mucho progreso en la Universidad de Kentucky en el desarrollo del elemento finito tridimensional en programas de computadora para el análisis de flujo subterráneo no establecido.

Huang y Shen-Jyh Wu⁽¹²⁸⁾ revisan los tres tipos de elementos mencionados abajo y comparan su efectividad con respecto a exactitud y tiempo de cómputo. Los elementos son: cilíndricos, seis y ocho nodales^(129,130) e isoparamétricos. Recientemente se usaron elementos isoparamétricos mixtos por Gupta y colaboradores⁽¹³¹⁾ para el análisis tridimensional de flujo subterráneo.

En la práctica a menudo se evalúa la factibilidad de un procedimiento numérico resolviendo cierto número de problemas. Esta aproximación cuantitativa y pragmática es muy común y a menudo necesaria, pero no necesariamente conduce a un procedimiento general de solución. Un camino para establecer la generalidad de un esquema es estudiar sus características numéricas como son convergencia, estabilidad y consistencia.

Sólo para aclarar un poco se mencionará a que se refieren estos conceptos.

Convergencia. Un método numérico aplicado a una ecuación diferencial dada se dice convergente si, suponiendo que no hay error de redondeo, la solución numérica se aproxima a la solución exacta de la ecuación diferencial cuando el incremento de tiempo, Δt , se acerca a cero.

Estabilidad. Las ideas alrededor de la estabilidad de métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales se puede ilustrar mejor si se consideran métodos de varios pasos. Estos métodos envuelven valores de $f(y,t)$ en varios puntos a lo largo

deb eje t . La forma general de la solución analítica es tal que la presencia de los valores múltiples de $f(y,t)$ a lo largo del eje t resulta en múltiples soluciones de la ecuación diferencial. Si el método es convergente para el problema en consideración, una de estas soluciones a la ecuación diferencial aproximará la solución exacta a la ecuación diferencial (llamada la solución fundamental) y se aproximará esta solución exacta arbitrariamente cuando t tienda a cero (excepto para error de redondeo). Las otras soluciones a la ecuación se llaman soluciones parásitas, y es el comportamiento de estas soluciones el que determina si la solución numérica es estable o no.

Estas soluciones parásitas toman su nombre del hecho de que se alimentan de los errores en la solución numérica. La inestabilidad es resultado de un proceso de retroalimentación en el cual las soluciones parásitas crecen cuando se toma cada paso para la obtención de la solución, y el error creciente resultante ocasiona un crecimiento en estas soluciones.

Los estudios de las propiedades numéricas de las diferencias finitas están relativamente mejor establecidos en comparación con los del elemento finito.

Se han obtenido criterios que se basan en ejercicios cuantitativos para los procedimientos del elemento finito (32, 38, 42, 50, 132, 133)

Pocos estudios han discutido y examinado procedimientos del elemento finito apropiados al problema del flujo y han derivado criterios en forma cerrada (110, 134-138). Un procedimiento basado en la condición de Lipschitz en el cual se asegura la convergencia y estabilidad para cada tiempo ha sido propuesto por Sandhu, Rai y Desai (89).

La cuestión de propiedades matemáticas de varios procedimientos de elemento finito para problemas gobernados por ecuaciones no lineales y condiciones de frontera es importante y requerirá un esfuerzo significativo de aquí en adelante. Aún más, es necesario evaluar varios esquemas y subesquemas numéricos desde el punto de vista de las características numéricas, tiempos de computo y otros factores significativos (36,50,111,133,135,139-141). No se espera que un usuario conozca detalles del vasto número de procedimientos numéricos disponibles; tales evaluaciones pueden ayudar a seleccionar el esquema más económico y adecuado para sus necesidades específicas.

II.6.2 Modelos de Orden de Aproximación.

En el procedimiento del elemento finito de la ecuación (12) se utilizaron tres elementos finitos con 4-, 8- y 12 nodos isoparamétricos. Se compararon cargas calculadas en la superficie libre, dadas por las tres formulaciones con cargas observadas en un modelo de flujo viscoso (12,37). Este estudio mostró que los tres resultados numéricos dieron la misma precisión aceptable. Una de las razones puede ser que los órdenes más altos, aunque mejoran la distribución de los potenciales con el elemento y compatibilidad de los potenciales nodales, no parecen mejorar el cálculo de las velocidades. Tal vez el uso de un elemento con polinomios completos como modelos de aproximación pueda mejorar la precisión. Como sea, el tiempo de computo se incrementa con el orden de los modelos; para un número fijo de nodos, el radio aproximado de tiempo se encontró que es 1:6:10⁽⁵⁰⁾. El modelo de ocho nodos con variación cuadrática de puede proporcionar precisión y economía óptimas.

El estudio de la referencia (40), sin embargo, muestra que si se emplea una malla razonablemente fina, el elemento simple

de 4 nodos puede ser más adecuado. Es importante someter a consideración la mayor utilidad entre precisión y economía de los modelos de orden mayor para el problema general del flujo y requerirá trabajo adicional para poder dar conclusiones definitivas.

II.6.3 Discretización del Medio 'Infinito'

En eventos de rasgos naturales, tales como una base impermeable (roca), figura (1), disponibles, las zonas discretizadas se pueden definir fácilmente. Para dominios 'infinitos' de flujo tales como diques en ríos, se requiere establecer las zonas significativas que se han de incluir en la discretización del elemento finito. Esto involucrará la determinación de los límites geométricos de las zonas y del potencial adecuado y/o las condiciones de flujo en las fronteras discretizadas.

Con frecuencia se obtienen criterios para la evaluación de extensiones significativas y para condiciones de frontera con base en ejercicios cuantitativos. Diferentes extensiones de las zonas discretizadas y diferentes condiciones de frontera posibles se escogen y se obtienen las soluciones numéricas correspondientes. Su influencia se evalúa comparando con soluciones experimentales. Tales análisis cuantitativos para flujo transitorio no confinado (en diques de ríos) han sido reportados por Desai^(43,45). Las soluciones numéricas se compararon con resultados experimentales de un modelo de flujo viscoso entre dos placas paralelas largas. La figura (2a) muestra las extensiones significativas en términos del drenado total H . Se encontró que la frontera lateral se puede fijar a una distancia de 8 a 12 H del punto final del drenado y se puede suponer una base impermeable a una distancia de 3 a 6 H del mismo punto. También se encontró que la suposición de diferentes condiciones de frontera (figura 2b) puede influir en la solución numérica. Su selección depende de las condiciones geológicas del medio cercano a las fronteras discretiza

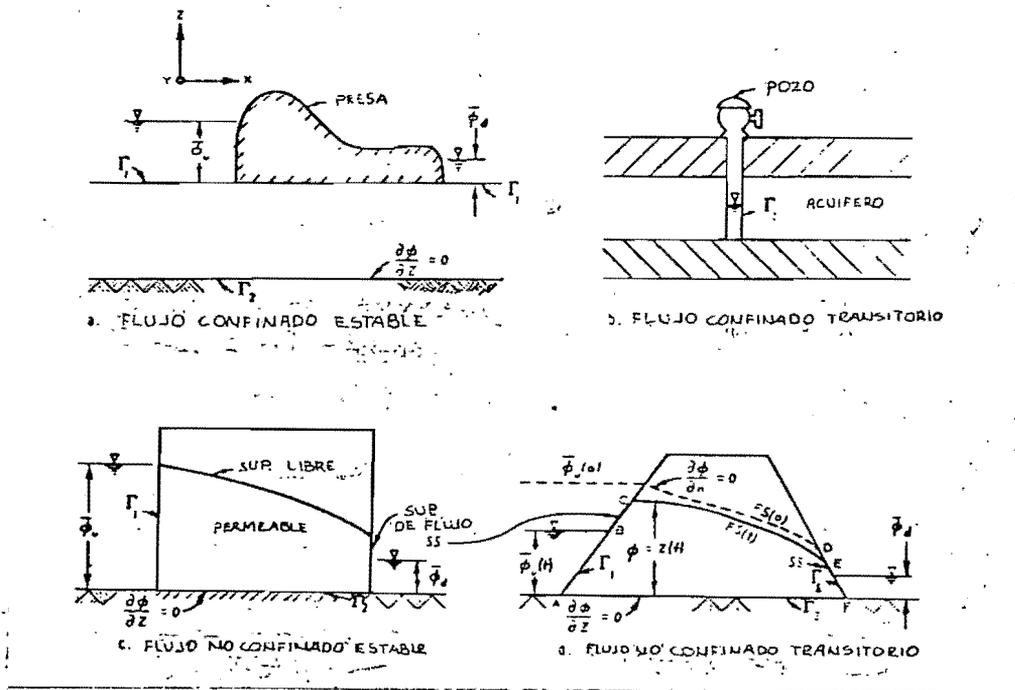
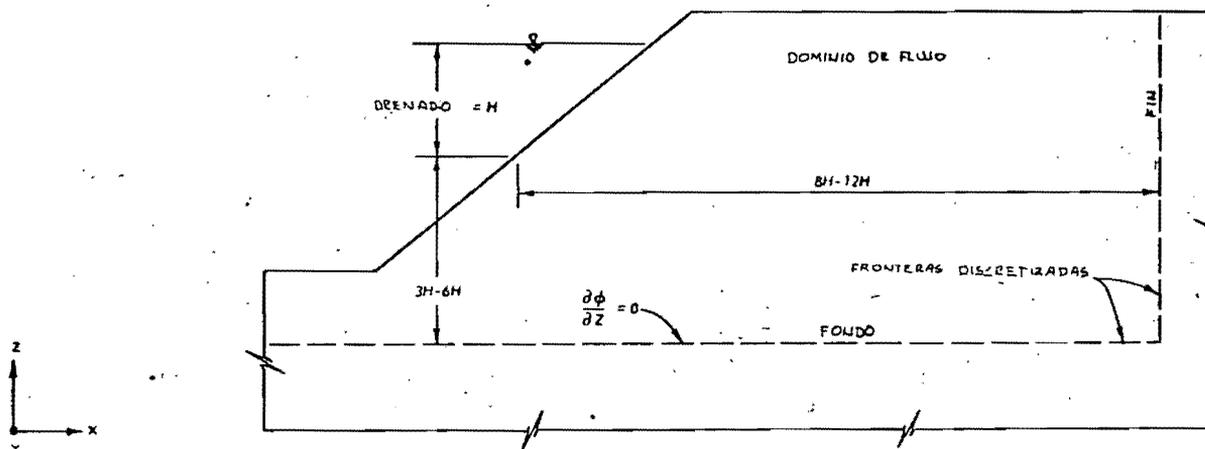
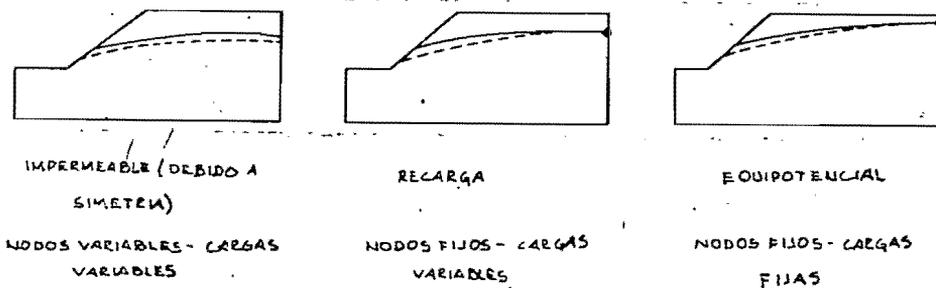


Figura 1



(a)



(b)

Figura 2

das. Kealy y Williams⁽³⁰⁾ han discutido criterios para condiciones de frontera en flujo permanente no confinado en represas y Fang y Wang⁽⁴⁷⁾ para flujo transitorio no confinado debido a mareas.

II.7 Contaminación

Pinder y Page⁽¹⁴²⁾ presentan un modelo bidimensional que usa elementos finitos y un modelo matemático que se basa en la hipótesis de contacto agudo para obtener la simulación de intrusión salina.

Mediante la aproximación de Galerkin al método de elementos finitos Segol⁽¹⁴³⁾ obtiene la solución de ecuaciones tridimensionales para flujo subterráneo y transporte de masa. El modelo se aplica en el análisis de transporte de contaminantes y se ha probado en problemas unidimensionales de filtración. El tamaño de la malla de elementos finitos es una limitante y el modelo no se puede aplicar en situaciones tridimensionales de campo que envuelvan flujo a superficie libre debido a la pequeña separación nodal requerida en la zona no saturada.

Thomas, Smith y Martínez⁽¹⁴⁴⁾ presentan una aproximación mediante elementos finitos para analizar lentes de sal en flujo subterráneo. Mediante esta aproximación, programas ya existentes con elementos finitos que usan elementos isoparamétricos, podrían adaptarse rápidamente para manejar eficientemente una amplia gama de difíciles problemas de lentes. La técnica se puede emplear usando programas existentes de transferencia de calor o de flujo modificados para aceptar condiciones específicas de flujo en movimiento (mediante datos de tiempo discretos). Se debe tener mucho cuidado de estar seguros que se emplea una representación suficientemente grande de elementos finitos de la masa de flujo subterráneo para producir efectos insignificantes de fron-

teras remotas.

II.8 Consolidación

Runneson, Tågnfors y Wiberg⁽⁵⁸⁾ discuten el análisis con elementos finitos del flujo subterráneo en acuíferos confinados por arcilla suave y los asentamientos resultantes en la superficie. Como resultado de un disturbio del equilibrio hidráulico en el acuífero ocurre flujo transitorio y deformación (consolidación) de la arcilla confinante. El análisis se basa en el concepto de arcilla como un medio poroso saturado, en dos fases con los desplazamientos y el exceso de presión de poro como incógnitas primarias.

II.9 Flujo Tridimensional

Cuando el flujo subterráneo ocurre en un medio real elástico, los esfuerzos que se desarrollan en el esqueleto sólido son necesariamente tridimensionales. Mediante el uso del concepto de 'centro de tensión' o 'núcleo de esfuerzos' la distribución de esfuerzos en un acuífero artesiano de bombeo se puede evaluar por integración si se conoce bien la presión de poro. La declinación de la carga de presión es provista por una ecuación integro diferencial nueva de flujo la que informa sobre las componentes horizontales de los esfuerzos y recientemente derivó Gambolabi⁽¹⁰⁹⁾. Su solución numérica se obtiene con una técnica iterativa del elemento finito. Los resultados mostraron que, contrariamente a lo que se supone en geohidrología, el esfuerzo vertical total no es constante en el acuífero y por tanto la variación del esfuerzo intergranular efectivo no es igual y opuesto a la presión de poro creciente. El esfuerzo cortante es significativo en los primeros tiempos, al empezar a bombear. El asentamiento tiende a desaparecer cuando el drenado proviene de estratos profundos.

También se muestra que los movimientos horizontales en la superficie del terreno son mayores que los desplazamientos verticales a cierta distancia del pozo, pero su importancia relativa decrece con el tiempo y la profundidad del acuífero.

Segol⁽¹⁴³⁾ desarrolla un modelo de elementos finitos tridimensional para el análisis de flujo y transporte de masa en medio poroso saturado-no saturado. El dominio discretizado consiste en elementos isoparamétricos en los cuales se aplica el proceso del Galerkin para obtener el sistema de ecuaciones de aproximación.

II.10 Flujo en dos Fases

Lewis, Verner y Zienkiewicz⁽¹⁴⁶⁾ presentan el problema del flujo en un medio poroso de dos líquidos con distinta densidad, en particular se refiere a los líquidos no mezclables agua y aceite, en la producción petrolera.

Dalen⁽¹¹⁹⁾ por su parte, describe una aproximación mediante elementos finitos a un desplazamiento frontal de dos fases. El método de solución se basa en el método de Galerkin para discretización espacial y una formulación incremental semiimplícita en el tiempo. Es fácilmente extensible a problemas más complejos de flujo de más fases. Mercer y Faust⁽¹⁴⁸⁾, sin embargo revelan dificultades comunes tales como: Oscilación numérica en aproximaciones de frentes agudos, inestabilidad para ciertos problemas no lineales, etc..

Tzimopoulos⁽¹¹³⁾ establece que el flujo en medio poroso es, en muchos casos prácticos, no saturado. Este es un caso especial de flujo simultáneo de dos fluidos no miscibles, donde el fluido no húmedo (aire) se supone estancado.

II.11 Deshielo y Calor

Baca, King y Norton⁽⁹⁵⁾ describen y demuestran un modelo del elemento finito para aplicarse al análisis del proceso de transporte en zonas áridas vadosas.

La formulación matemática del modelo no isotérmico consiste en la forma acoplada de la ecuación de flujo a presión y de la ecuación de conducción. La ecuación de flujo modela el flujo de humedad como función de la capilaridad, gravedad y fuerzas térmicas. La ecuación de calor considera conducción y flujo superficial proveniente del enfriamiento y calentamiento de la atmósfera.

Para resolver el sistema de ecuaciones gobernadoras se usa la aproximación de Galerkin con el elemento finito. Las ecuaciones acopladas no lineales se resuelven simultáneamente usando el esquema iterativo de Newton-Raphson. Para formar el subdominio de aproximación de las variables principales y los parámetros especialmente variables se usan funciones base cuadráticas. Las propiedades hidráulicas del suelo se representan por funciones cúbicas.

Sykes y Lennox⁽¹⁵⁰⁾ desarrollan un modelo de elementos finitos basado en el método de Galerkin de residuos pesados utilizando una forma no lineal de la curva de deshielo-sedimentación. La aplicabilidad de este modelo descansa en su más cercana aproximación al modelo físico que al fenómeno idealizado.

Guymon y Berg⁽¹⁵¹⁾ desarrollan una analogía unidimensional de elementos finitos al transporte de calor y humedad en suelos congelados con base en las hipótesis presentadas antes por Guymon y Luthin⁽¹⁵²⁾ y Harlan⁽¹⁵³⁾. Ellos suponen que el movimiento de la humedad en suelos congelados se puede modelar mediante la teoría de flujo no saturado. Después Guymon⁽¹⁵⁴⁾ publicó datos que confirman que el régimen térmico y de humedad en suelos con-

gelados es complejo y altamente dinámico durante el invierno en el deshielo y congelamiento. El problema de determinar los estados de calor y humedad en suelos congelados es complejo debido a que agua líquida y hielo coexisten en suelos a temperaturas que se encuentran en la naturaleza, calor latente es el proceso térmico dominante y debido a esto empiezan los problemas computacionales y las medidas de la presión de poro en suelos congelados aún debe determinarse.

II.12 Distintas Aplicaciones

Illangasekare y Morel-Sertoux⁽¹⁵⁵⁾ presentan un método de eficiente costo que tiene la potencialidad de ser usado efectivamente en la toma de decisiones de manejo día a día del flujo de los acuíferos. El programa que se discute simplifica la aplicación del modelo a problemas reales. La concordancia de los valores generados por el modelo con soluciones analíticas muestra que el modelo se puede usar para generar los 'núcleos discretos' con una razonable aproximación para diferentes rangos de valores de transmisibilidad y rendimiento específico.

Gupta y Tanji⁽¹⁵⁶⁾ presentan una aproximación en la solución del elemento finito y sus aplicaciones en la cual reducen significativamente la capacidad necesaria de almacenamiento de datos en memoria.

Los rasgos principales del esquema propuesto son: 1) se puede manejar cualquier sistema de flujo subterráneo, por complejo que sea; 2) el requerimiento de memoria se reduce mucho; 3) los parámetros que se requieren más de una vez sólo se estiman una y se almacenan en disco; y 4) diferentes condiciones reales se manejan ejecutando sólo subprogramas relacionados.

II.13 Métodos Combinados

Pindér, Frindý y Celia⁽¹⁵⁷⁾ presentan un método numérico nuevo para la solución de problemas de flujo potencial en dos dimensiones. El método combina los aspectos más atractivos de la colocación ortogonal y del elemento finito. Es particularmente adecuado obtener C^1 soluciones continuas en dominios irregulares porque es mucho más eficiente para problemas de este tipo que un esquema, comparable, de Galerkin. Esto lo hace un método interesante para simular flujo subterráneo y de problemas de transporte de masas.

Hannoura y Mc Corquodale⁽¹⁵⁸⁾ presentan un modelo que combina el método de las características y el del elemento finito para resolver problemas de flujo en medio granular.

El concepto del modelo híbrido que aquí se presenta es tratar la integración en el tiempo por el método de las características y la integración en el espacio por el método del elemento finito. De este modo los efectos de inercia mayores se incluyen en el método de características y los efectos de no-homogeneidad, variación de la presión y la velocidad en el espacio se calculan mediante elementos finitos y se usan para dar datos al método de las características.

III

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

III.1. Conclusiones

Después de haber hecho esta revisión del Estado del Arte del Método de Elementos Finitos aplicado a medios porosos concluyo que dicho método es una técnica muy poderosa y versátil que puede aplicarse tanto a flujo en medio fracturado como en flujo de dos o más fases y de consolidación. Puede tener aplicaciones en un plano o en tres dimensiones y hasta puede combinarse con alguna otra técnica numérica para optimizar el tiempo y la precisión en la solución de los problemas de particular importancia.

Es éste un método que compite con el de diferencias finitas y el método de las características pues en ciertos casos requiere de un menor número de iteraciones y consume menor tiempo de computadora.

El estudio de la técnica del elemento finito no ha llegado a un grado de aplicación rutinaria, sino que se está desarrollando por distintos caminos hacia una aplicación general en flujo de agua en medios porosos o en medios fracturados.

Y aún cuando todavía se sigue estudiando su aplicabilidad es una herramienta matemática que se debe emplear en problemas de flujo subterráneo. Problemas que cada vez son más necesario de afrontar en México, dada la importancia que la explotación racional (que evita la inutilización de los acuíferos) ha adquirido en los últimos años.

Esta técnica, por supuesto, no es la única ni la mejor; para decidirse a emplearla es necesario comparar con otras alternativas que utilicen distintas técnicas numéricas o, yendo más allá, combinarlas entre sí para optimizar el uso de métodos y computadoras.

III.2 Recomendaciones

Para llegar a una aplicación a problemas naturales es necesario tener una fuente precisa de información que permita elaborar redes con datos reales. Este es el principal problema en nuestro medio: la falta de datos.

Por tal motivo se recomienda que la información archivada y recolectada por cualquier tipo de estudio geohidrológico que se realice y se haya realizado en la República Mexicana, sea difundida mediante un boletín periódico que ponga tal información al alcance de todo aquel que se interese en este tipo de problemas.

En el presente trabajo se habla del método del elemento finito como una técnica aplicable a resolver una amplia gama de problemas, los cuales se han desglosado en el capítulo II; con base en esto se recomienda apoyar la investigación en México, pues es ésta la que va a desarrollar los métodos que serán aplicables a todas las zonas que están explotando los acuíferos del país, para evitar un mal manejo de los mismos.

El método del elemento finito está ligado totalmente con el uso de computadoras, así que al hablar de su aplicación se debe pensar en el uso de éstas y de modelos matemáticos. Por esto se recomienda impulsar el estudio de técnicas computacionales y pruebas de laboratorio, pues al aplicar métodos más eficientes, en la predicción de niveles, recargas, descargas, etcétera, se tendrán ahorros de costos y de horas-hombre que redundan en beneficio al país.

BIBLIOGRAFIA

1. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc Graw-Hill, London, 1971.
2. W.G. Gray, G.F. Pinder and C.A. Brebbia (Eds.) "Finite Elements in Water Resources", Pentech Press, 1977.
3. W.G. Gray, G.F. Pinder and C.A. Brebbia (eds.) "Finite Elements in Water Resources", Pentech Press, 1978.
4. R.H. Gallagher, J.T. Oden, C. Taylor and O.C. Zienkiewicz (Eds.), "Finite Elements in Fluids" - Vol. 1, John Wiley & Sons, 1975.
5. Asociación Mexicana de Hidráulica, ponencias del "I Congreso Nacional de Hidráulica", 1970.
6. G. Strang and G.J. Fix, "An analysis of the Finite Element Method", Prentice-Hall, Inc., 1973.
7. I. Remson, G.M. Hornberger and F.J. Molz, "Numerical Method in Subsurface Hydrology", Wiley-Interscience, 1971.
8. International Conference on Finite Elements in Water Resources, I. Princeton University, July 1976.
9. International Conference on Finite Elements in Water Resources, II. Princeton University, July 1976.

REFERENCIAS



- (1) D.F. de Hoyos Pérez, "Modelo Matemático del Comportamiento de un Acuífero con el Método de Elementos Finitos" I Congreso Nacional de Hidráulica.
- (2) O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science" Mc. Graw-Hill, London, 1971.
- (3) S.H. Crandall, "Engineering Analysis", Mc Graw-Hill, 1956.
- (4) K. Washizu, "Variational methods in elasticity and plasticity", Pergamon Press, 1968.
- (5) R. Weinstock, "Calculus of variations", Mc Graw-Hill, 1952.
- (6) P.N. Berg, "Calculus of Variations", in Handbook of Engineering Mechanics" Chapter 16, ed. W. Flügge, Mc Graw-Hill, 1962.
- (7) R.V. Southwell, "Relaxation methods in theoretical physics", Oxford Univ. Press, 1946.
- (8) G.E. Forsythe and W.R. Wasow, "Finite difference methods for partial differential equations", J. Wiley & Sons, 1960.
- (9) R.J. Melosh, "Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method", J.A.I.A.A., 1, 1631-7, 1963.
- (10) T.H.H. Pian, "Derivation of Element Stiffness Matrices", J.A.I.A.A., 2, 576-7, 1964.
- (11) I. Stakgold, "Boundary value problems in mathematics and physics, Macmillan, N.Y., 1966.
- (12) C.S. Desai, "Seepage in porous media", in Numerical Methods in Geotechnical Engineering, C.S. Desai and J.T. Christian (eds.), Mc Graw-Hill, New York, (forthcoming).
- (13) O.C. Zienkiewicz, P. Mayer and Y.K. Cheung, "Solution of anisotropic seepage by finite elements", Journal of Engineering Mechanics Division. ASCE, 92, no. EM1 (1966).
- (14) O.C. Zienkiewicz and C.J. Park, "Transient Field Problems: two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric

- tric finite element", International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2, 1(1970).
- (15) O.C. Zienkiewicz and D.J. Naylor, "Finite element studies of soil and porous media", Lectures of Finite Element Methods in Continuum Mechanics. J.T. Oden and E.R.A. Oliveira (eds.) UAH Press, Huntsville, 1973, pp. 459-493.
- (16) O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science". Mc Graw-Hill, London, 1971.
- (17) C.S. Desai and J.F. Avel, "Introduction to the Finite Element Method"; A Numerical Method for Engineering Analysis". Van Nosttrand Reinhold, New York, 1972.
- (18) C.S. Desai, "Overview, trends and projections: theory and applications of the finite element method in geotechnical engineering", State-of-the-Art Paper, Proceedings of Symposium on Application of FEM in Geotechnical Engineering, C.S. Desai (ed.), USA Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, 1972.
- (19) C.S. Desai, "Finite element procedures for seepage analysis using an isoparametric element", Proceedings of Symposium on Application of FEM in Geotechnical Engineering. C.S. Desai (ed.) USA Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, 1972.
- (20) C.S. Desai (ed.), Proceedings of Symposium on Application of FEM in Geotechnical Engineering. USA Waterways Experiment Station, Vicksburg, 1972.
- (21) J.C. Cavendish, H.S. Price and R.S. Varga, "Galerkin methods for the numerical solutions of boundary value problems", Journal of Society of Petroleum Engineers. 9, 2 (1969).
- (22) "Finite element solution of steady state potential flow problems", Hydrologic Engineering Center (HEC), No. 723-G2-L2440, USA Engineer District, Sacramento, California, Nov.

1970.

- (23) P. Guellec, "Calculation of flows in porous media by the FE method", Rapport de Recherche No. 11, Laboratoires des Ponts et Chaussees, Nov. 1970.
- (24) G.J.W. King and R.N. Chowdhury, "Finite element solution for quantity of steady seepage", Civil Engineering and Public Works Review, 66, 785 (1971).
- (25) R.L. Taylor and C.B. Brown, "Darcy flow solutions with a free surface", Journal of Hydraulic Division, ASCE, 93, HY2 (1967).
- (26) W.D.L. Finn, "Finite element analysis of seepage through dams", Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 93, SM6 (1967).
- (27) J.D. Fenton, "Hydraulic and stability analyses of rockfill dams", DR No. 15, Department of Civil Engineering, University of Melbourne, July 1968.
- (28) R.E. Volker, "Nonlinear flow in porous media by finite elements", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 95, HY6 (1969).
- (29) S.P. Neuman and P.A. Witherspoon, "Finite element method for analyzing steady seepage with a free surface", Water Resources Research, 6, 3 (1970).
- (30) C.D. Kealy and R.E. Williams, "Flow through a tailing pond embankment", Water Resources Research, 7, 4 (1971).
- (31) D.H. Trollope, K.P. Stark and R.E. Volker, "Complex flow through porous media", The Australian Geomechanics Journal, G1, 1 (1971).
- (32) C.S. Desai, "Free surface seepage through foundation and berm of cofferdams", Indian Geotechnical Journal.
- (33) I. Javandel and P.A. Witherspoon, "Application of the finite element method to transient flow in porous media", Transact-

- ions, Society of Petroleum Engineers, 243, 241-251 (Sept. 1968).
- (34) I. Javandel and P.A. Witherspoon, "A method of analyzing transient fluid flow in multilayered aquifers", Water Resources Research, 5, 4 (1969).
- (35) S.P. Neuman and P.A. Witherspoon, "Transient flow of groundwater to wells in multiple-aquifer systems", Report 69-1, Geotechnical Engineering, University of California at Berkeley, California, Jan. 1969.
- (36) G.F. Pinder and E.O. Frind, "Application of Galerkin's procedure to aquifer analysis", Water Resources Research, 8, 1 (1972).
- (37) C.S. Desai, "Seepage in Mississippi river banks: analysis of transient seepage using viscous flow model and numerical methods", Miscellaneous Paper S-70-3, USA Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, Feb. 1970.
- (38) J.A. Mc Corquodale, "Variational approach to non-Darcy flow", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 96, HY11 (1970).
- (39) P.W. France, C.J. Parekh, J.C. Peters and C. Taylor, "Numerical analysis of free surface seepage problems", Journal of Irrigation and Drainage Division, ASCE, 97, IR1 (1971).
- (40) S.P. Neuman and P.A. Witherspoon, "Analysis of unsteady flow with a free surface using the finite element method", Water Resources Research, 7, 3 (1971).
- (41) W. Harrison, C.S. Fang and S.N. Wang, "Groundwater flow in a sandy tidal beach I. One-dimensional finite element analysis", Water Resources Research, 7, 5 (1971).
- (42) L.T. Isaacs and K.G. Mills, Discussion to paper "Numerical analysis of free surface seepage problems", Journal of Irrigation and Drainage Division, ASCE, 98, IR1 (1972).
- (43) C.S. Desai, "Seepage analysis of earth banks under drawdown"

Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 98 SMI (1972).

- (44) J.D. Tulk and G.P. Raymond, "Drainage of granular soils", Proceedings, Specialty Conference on SCM in Civil Engineering. Mc Gill University, Montreal, Canada, June 1972.
- (45) C.S. Desai, "An approximate solution for unconfined seepage", Journal of Irrigation and Drainage Division, ASCE, 99, IR1 (1973).
- (46) J.C. Bruch, "Nonlinear equation of unsteady ground-water flow", Journal of Hydraulics Division, ASCE, 99, HY3 (1973).
- (47) C.S. Fang and S.N. Wang, "Groundwater flow in a sandy tidal beach 2. Two-dimensional finite element analysis", Water Resources Research, 8, 1 (1973).
- (48) C.S. Desai, "Seepage in Mississippi river banks, analysis of transient seepage using viscous flow model, and finite difference and finite element methods", Technical Report 1. USA Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, May 1973.
- (49) Y.H. Huang, "Unsteady flow toward an artesian well", Water Resources Research, 9, 2 (1973).
- (50) C.S. Desai, Y.S. Jeng and R.S. Sandhu, "Seepage in Mississippi river banks; analysis and design by numerical procedures and computer codes", Technical Report 2, USA Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg.
- (51) R.T. Cheng and C.Y. Li, "On the solution of transient free-surface flow problems in porous media by the finite element method", Journal of Hydrology, 20 (1973).
- (52) W. Wittke, "Methods of calculation of three-dimensional problems of percolation of fissured rock by finite elements and resistance networks", Proceedings, 2nd Congress International Society of Rock Mechanics, Vol. 3, Belgrade, 1970.
- (53) W. Wittke, "Three-dimensional percolation in fissured rock",

Proceedings, Symposium on Planning Open-Pit Mines, Johannesburg, South Africa, 1970.

- (54) C.R. Wilson and P.A. Witherspoon, "An investigation of laminar flow in fractured porous media", Geotechnical Engineering Report No. 70-6, University of California, Berkeley, 1970.
- (55) J. Noorishad, P.A. Witherspoon and T.L. Brekke, "A method for coupled stress and flow analysis of fractured rock masses", Geotechnical Engineering Report No. 71-6, University of California, Berkeley, 1971.
- (56) Proceedings of the Symposium on Percolation Through Fissured Rock, Stuttgart, W. Germany, 1972.
- (57) S.P. Neuman "Galerkin Approach to Saturated-Unsaturated Flow in Porous Media", Finite Elements in Fluids Vol. 1, R.H. Gallagher, J.T. Oden, C. Taylor and O.C. Zienkiewicz (Eds.) John Wiley & Sons, 1975.
- (58) K. Runesson, H. Taguators y N.E. Wiberg, "Finite Element Analysis of Groundwater Flow and Settlements in aquifers confined by Clay". Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.), Peutech Press, London: Plymouth, 1978
- (59) M.K. Hubbert, "Darcy's law and the field equations of flow of underground fluids", Journal of Petroleum Tech., 8, 222-239 (1956).
- (60) M.E. Harr, Groundwater and Seepage, Mc.Graw-Hill, New York 1962.
- (61) P.H. Fochheimer, "Wassebewegung durch boden", Z. Verdt. Ing., p. 782 (1901)
- (62) A. Missbach, Listy Cukrova, 55,293 (1937).
- (63) R. Englund, "On the laminar and turbulent flow of ground water through homogeneous sand", Transactions, Danish Academy of Technical Science, No. 3, 1953.

- (64) H.F. Wang and M.P. Anderson, "Finite Differences and Finite Elements as Weighted Residual Solutions to Laplace's Equation", Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.) Pentech Press, London: Plymouth, 1976.
- (65) J.P. Rammant, E. Backx, "Grow I: A Programs for Anisotropic Soil Fluid Flow with Free or Artesian Surface", Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.) Pentech Press, London: Plymouth, 1978.
- (66) J. Happel and H. Brenner, Low Reynolds Number Hydrodynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- (67) International Association of Hydraulic Research, Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Development in Soil Science 2. Elsevier, Amsterdam, New York, 1972.
- (68) A.E. Scheidegger, "Deterministic and statistical characterization of porous media and computational methods of analysis", Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Elsevier, Amsterdam, New York, 1972.
- (69) A.E. Scheidegger and K.H. Liao, "Thermodynamic analogy of mass transport processes in porous media", Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Elsevier, Amsterdam, New York, 1972.
- (70) D.H. Trollope, "The mechanics of discontinua on elastic mechanics in rock problems", in Rock Mechanics in Engineering Practice, K.G. Stagg and O.C. Zienkiewicz (Eds.) Wiley, London, 1968.
- (71) Leopoldo Rodarte, UAM, "Application of the Finite Element Method to the Numerical Analysis of a Leaky Aquifer", Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.) Pentech Press, London: Plymouth, 1978.

- (72) F. Stauffer "Simulation of One-Dimensional Unsteady Drainage in Porous Media", Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.) Pentech Press, London: Plymouth, 1978.
- (73) K. Elango, H. Suresh Rao, "Finite Element Description of Flow-field in Groundwater Management Models", Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.) Pentech Press, London: Plymouth, 1978.
- (74) S.P. Kiaran, S.T. Sigurdsson, "Two Techniques Associated with the Galerkin Method for solving Groundwater Flow Problems", Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.), Pentech Press, London: Plymouth, 1978.
- (75) A. Wexler "Isoparametric Finite Elements for Continuously Inhomogeneous and Anisotropic Media", International Conference on Finite Elements in Water Resources I Princeton Univ. 1976
- (76) A.E. Reissenauer, "Methods for solving problems in multidimensional partially saturated steady flow in soils", Journal of Geophysical Research, 68,20 (1963).
- (77) P. Ya. Polubarinova-Kochina, Theory of Groundwater Movement, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- (78) C.S. Desai and W.C. Sherman, "Unconfined transient seepage in sloping banks", Proc. ASCE, J. of Soil Mech and Fdn. Div. 97, SM2 (1971).
- (79) Aravin, V.I., and Numerov, S. (1965) "Theory of Fluid Flow in Underformable Porous Media", Israel Program for Scientific Publication, Jerusalem, SIIPP.
- (80) Harr, M.E. (1962) "Groundwater and Seepage", Mc Graw Hill, New York 315 pp.
- (81) Polubarinova-Kochina, P.Y. (1962) "Theory of Groundwater Movement", Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 613 pp.
- (82) Boussinesq J. (1904) Recherches théoriques sur l'écoulement d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit de sources", J. Maths Pures et Appl (5) 10, 363-394

- (83) Bouwer, H. (1969) Theory of seepage from open channels, Advances in Hydrosience, Academic Press, New York and London S, 121-172.
- (84) Hornberger, C.M., Ebert J. and Remson, I (1970) Numerical Solutions of the Boussinesq Equation for Aquifer Stream Interaction, Water Resources Research 6, 601-608,
- (85) Zucker, M.B., Remson, I., Ebert, J. and Aguado, E (1973) Hydrolic Studies using the Boussinesq Equation with a se-charge ferm, Water Resources Research 9, 586-592.
- (86) Bruch, J.C., Jr (1973) Non-linear equation of unsteady groundwater flow, Journal of the Hydraulic Division ASCE, 99, 395-403.
- (87) Oden, J.T. (1969) A general theory of F.E. II. Applications, Int. Journal of Numerical Methods in Engineering, 1, 247-
- (88) A.E. Gureghian y E.G. Youngs, "Numerical Solutions of Boussi-nesq's Equation for Seepage Flow". Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.), Pentech Press, London: Plymouth, 1978.
- (89) J.T. Oden. O.C. Zienkiewicz, R.H. Gallagher and C. Taylor (eds.) Finite Element Methods in Flow Problems. University of Alabama (Huntsville) Press, 1974.
- (90) R.S. Sandhu and E. L. Wilson, "Finite element analysis of seepage in elastic media", Journal of the Engineering Mechan-ics Division. ASCE, 95, EM3 (1969).
- (91) M.E. Gurtin, "Variational principles for linear initial-value problems". Quarterly of Applied Mathematics, 22,3 (1964).
- (92) S.P. Neuman and P.A. Witherspoon, "Variational principles for confined and unconfined flow of groundwater", Water Resources Research, 6, 5 (1970):

- (93) B.A. Finlayson. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. Academic Press, New York, 1972.
- (94) M.M. Aral, P.G. Mayer and C.V. Smith, "Finite element Galerkin method solutions to selected elliptic and parabolic differential equations", Proceedings, 3rd. Conference on Matrix Methods of Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, Dayton, Ohio, Nov. 1971.
- (95) J.C. Bruch Jr., "Two Dimensional Unsteady Flow in Unsaturated Porous Media". International Conference on Finite Elements in Water Resources I. Princeton University, July 1976.
- (96) G. Ohashi, "A Quantitative Comparison Between Finite Element Solution and Experimental Results of Transient, Unconfined Groundwater Flow". Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F.Pinder (Eds.) Pentech Press, London: Plymouth, 1978.
- (97) Klute, A., "A Numerical Method for Solving the Flow Equation for Water in Unsaturated Materials" Soil Science, Vol. 73 No. 2, 1952, p.p. 105-106.
- (98) Philip, J.R. "Theory of Infiltration: The infiltration Equation and its Solution", Soil Science Vol. 83 No. 4, 1957 p.p. 345-357.
- (99) Philip, J.R. "Theory of Infiltration" Advances in Hydroscience, Vol. 5 V.T. Chow, ed. Academic Press N.Y. 1969.
- (100) Remson I, et.al., "Vertical Drainage of an Unsaturated Soil", Journal H.D. ASCE Vol. 91 No. HY1, Jan. 1965
- (101) Scugh R. "Solution of a diffusion Equation" Journal of H.D. ASCE, Vol. 93 No. HY5 Sep. 1967.
- (102) Swartzendruber, D., "The flow of water in Unsaturated Soils", Flow through Porous Media, de Wiest Academic Press, New York, N.Y. 1969.

- (103) Parlange J-Y "Theory of Water Movement in Soils: One-Dimensional absorption" Soil Science Vol. III, No. 2 1973, p.p. 134-137.
- (104) Bruch, J.C. and Zyvolski, G. "Finite Element Solution of Unsteady and Unsaturated Flow in Porous Media" Mathematics of F.E. and applications, S.R. Whiterman, ed. Academic Press New York 1973.
- (105) P. Henrici, Elements of Numerical Analysis, Wiley, New York, 1964.
- (106) C.S. Desai, "Analysis and Evaluation of Some Finite Element Schemes for Flow through Rigid and Deformable Media" International Conference on Finite Elements in Water Resources I. Princeton University, July 1976.
- (107) W.D. Liam Finn and E. Voroglu, "Variable Domain Finite Element Analysis of Free Surface Flow Problems". International Conference on Finite Elements in Water Resources I. Princeton University, July 1976.
- (108) G.S. Taylor and J. N. Luthin, "Computer methods of transient analysis of water table aquifers", Water Resources Research, 15 (Feb. 1969).
- (109) R.H. Gallagher, J.T. Oden, C. Taylor and O.C. Zienkiewicz, "Finite Elements in Fluids" Volume 1, John Wiley & Sons, 1975.
- (110) J.T. Oden, Finite Elements of Nonlinear Continua. McGraw-Hill, New York, 1972.
- (111) G.Zyvolski and J.C. Bruch, "Finite element weighted residual solution of one dimensional unsteady and unsaturated flows in porous media", UCSM-ME-73-4, Department of Mechanical Engineering, University of California, Santa Barbara, June 1973.
- (112) C.S. Desai, J.T. Oden and L.D. Johnson, "Evaluation and Analyses of some finite element and finite difference procedures for time-dependent problems", Miscellaneous Paper, USA Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg.

- (113) C. Tzimopoulos, "Finite Elements Solution of Unsaturated Porous Media", Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.), Pentech Press, London: Plymouth, 1978.
- (114) B.A. Finlayson, "Water Movement in Dessicated Soils", International Conference on Finite Elements in Water Resources I Princenton University, July 1976.
- (115) Y.N.T. Maini, J. Noorishad and J. Sharp, "Theoretical and field considerations on the determination of in situ hydraulic parameters in fractured rock", Proceedings Symposium on Percolation Through Fissured Rock, Stuttgart, 1972.
- (116) W. Wittke, P. Rissler and S. Semprich, "Räumliche, laminare and turbulente strömung in klüftigem fels nach zwei verschiedenen rochenmodellen", Proceedings. Symposium on Percolation Through Fissured Rock, Stuttgart, 1972.
- (117) R.E. Goodman, R.L. Taylor and T. Brekke, "A model for the mechanics of jointed rock", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 94, SM3 (1968).
- (118) O.C. Zienkiewicz and coworkers, "Analysis of non-linear problems in rock mechanics with particular reference to jointed rock systems", Proceedings, 2nd. Congress Society for Rock Mechanics, Vol. 3, Belgrade, 1970.
- (119) J. Ghaboussi, E.L. Wilson and J. Isenberg, "Finite element for rock joints and interfaces", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 99, SM10 (1973).
- (120) Zienkiewicz, O.C. and Y.K. Cheung, "F.E. in the Solution of Field Problems", The Engineer pp. 507-510 Sept. 1965.
- (121) Wilson E.L. and R.E. Nickell, "Applications of the FEM to Heat Conduction Analysis "Nuclear Engineering and Design, North Holland, Amsterdam, pp. 276-286, 1966.

- (122) Gurtin M.E., "Variational Principles for Linear Initial-Value Problems", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 22 No. 3 p.p. 252 - 256, 1964.
- (123) Javandel, I. and P.A. Witherspoon, "Application of the FEM to Transient Flow in Porous Media", Journal of Society of Petroleum Engineers, Vol. 8, No. 3 pp 242-252, 1968.
- (124) Javandel I., and P.A. Witherspoon, "A Method of Analyzing Transient Fluid Flow in Multilayered Aquifers" Water Resources Research, Vol. 4 No. 5 pp 1069-1093, 1968.
- (125) Ergatoudis, I., Irons, B.M. and O.C. Zienkiewicz "Curved, Isoparametric, Quadrilateral Elements for Finite Element Analysis", Internal Journal of Solids and Structures, Vol. 4 pp. 31-42, 1968.
- (126) Pinder, G.F. and E.O. Frind, "Application of Galerkin's Procedure to Aquifer Analysis", Water Resources Research, Vol. 8 No. 1 pp 108-120, 1972.
- (127) Zienkiewicz, O.C. and C.J. Parekh, "Transient Field Problems: Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis by Isoparametric FE". International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 2 pp 61-77, 1970.
- (128) Y.H. Huang and Shen-Jyh Wu, "Comparison of Three-Dimensional Finite Elements for Aquifer Simulation", International Conference on Finite Elements in Water Resources II. Princeton University, July 1976.
- (129) Huang, Y.H. and S.L. Sonnenfield, "Analysis of Unsteady Flow Toward an Artesian Well by Three-Dimensional F.E.". Water Resources Research Vol. 10 No. 3 pp 591-596, 1974.
- (130) Huang, Y.H. and S. Wu "Simulation of Confined Aquifers by Three-Dimensional Finite Elements", Proceedings, AICA International Symposium on Computer Methods for Partial Differential Equations, Lehigh University, pp 251-258, 1975.

- (131) Gupta, S.K., Tauji, K.K., and J.N. Luthin, "A Three-Dimensional F.E. Groundwater Model", Contribution No. 152, California Water Resources Center, University of California, Davis, Novy 1975.
- (132) C.S. Desai and L.D. Johnson, "Evaluation of some numerical schemes for consolidation", International Journal Numerical Methods in Engineering, 7 (1973).
- (133) C.S. Desai and L.D. Johnson, "Evaluation of two finite element formulations for one-dimensional consolidation", Computers and Structures, 2, 469-486 (1972).
- (134) G. Strang and G.J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1973.
- (135) C.S. Desai and R.L. Lytton, "Stability criteria for two finite element schemes for parabolic equation", to be published.
- (136) R.S. Varga, Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1971.
- (137) J. Douglas and T. Dupont, "Galerkin methods for parabolic equations", SIAM Journal of Numerical Analysis, 7,4, (1970).
- (138) J. Douglas and T. Dupont, "A finite element collocation method for quasilinear parabolic equations", Mathematics of Computations, 27, 21, (1973).
- (139) A.F. Emery and W.W. Carson, "An evaluation of the use of the FE method in the computation of temperature", Journal of Heat Transfer, 93, 2, Series C (1971).
- (140) R.L. Schiffman, "Efficient use of computer resources", in Proceedings Symposium on Applications of FE Method in Geotechnical Engineering, C.S. Desai (ed) USA Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, 1972.
- (141) J.C. Bruch and G. Zvoloski, "A finite element weighted residual solution to one-dimensional field problems". International Journal Numerical Methods in Engineering, 6, 577-585 (1973).

- (142) G.F. Pinder and R.H. Page, "Finite Element Simulation of Salt Water Intrusion of the South Fork of Long Island", International Conference on Finite Elements in Water Resources II, Princeton University, July 1976.
- (143) G. Segol, "A Three-Dimensional Galerkin-Finite Element Model for the Analysis of Contaminant Transport in Saturated-Unsaturated Porous Media". International Conference on Finite Elements in Water Resources II, Princeton University, July 1976.
- (144) R.L. Thoms, C.G. Smith, J.D. Martínez, "Domal Salt Plumes in Groundwater". International Conference on Finite Elements in Water Resources II, Princeton University, July 1976.
- (145) G. Gambolati, "Stress-Strain Analysis in Three-Dimensional Pumped Aquifers by the Finite Element Method", International Conference on Finite Elements in Water Resources I, Princeton University, July 1976.
- (146) Lewis, Verver and Zienkiewicz, "A Finite Element Approach to Two-Phase Flow in Porous Media", Finite Elements in Fluids Vol. 1, R.H. Gallagher, J.T. Oden, C. Taylor and O.C. Zienkiewicz (Eds.) John Wiley & Sons, 1975.
- (147) V. Dalen, "Immiscible Flow by Finite Elements", International Conference on Finite Elements in Water Resources I, Princeton University, July 1976.
- (148) J.W. Mercer and Ch. R. Faust, "The Application of Finite Element Techniques to Immiscible Flow in Porous Media", International Conference on Finite Elements in Water Resources II, Princeton University, July 1976.
- (149) R.G. Baca, I.P. King and W.R. Norton, "Finite Element Models for Simultaneous Heat and Moisture Transport in Unsaturated Soils", Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.), Pentech Press, London: Plymouth, 1978.

- (150) J.F. Sykes and W.C. Lennox, "Thaw and Seepage in Nonlinear Elastic Porous Media", International Conference on Finite Elements in Water Resources II, Princeton University, July, 1976.
- (151) G.L. Guymon and R. L. Berg, "Galerkin Finite Element Analogy of Coupled Moisture and Heat Transport in Algid Soils", International Conference on Finite Elements in Water Resources I, Princeton University, July 1976.
- (152) Guymon, G.L. and J. N. Luthin "A Coupled Heat and Moisture Transport Model for Arctic Soils" Water Resources Research 10, 5, pp 995-1001, 1974.
- (153) Harban, R.L., "Analysis of Coupled Heat-Fluid Transport in Partially Frozen Soil", Water Resources Research, 9,5, pp. 1314-1323, 1973.
- (154) Guymon, G.L. "Soil-Moisture-Temperature for Alaskan Lowland" ASCE J. of Irr. and Drainage Div. 101, IR3, pp 187-199, 1975.
- (155) T. Illangasekare and H.J. Morel-Seyfoux "A Finite Element Discrete Kernel Generator for Efficient Groundwater Management" Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.), Pentech Press, London: Plymouth, 1978.
- (156) S.K. Gupta and K.K. Tanji, "A New Approach to Reduce Core Storage and Computational Time in Finite Element Solution and its Applications". International Conference on Finite Elements in Water Resources I, Princeton University, July 1976.
- (157) G.F. Pinder, E.O. Frindy and M.A. Celia, "Groundwater Flow Simulation Using Collocation Finite Elements", Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.), Pentech Press, London: Plymouth, 1978.

- (158) A.A. Hannoura, J. A. Mc Corquodale, "Unsteady Flow in Porous Media Solved by Combined Finite Element-Method of Characteristics Model", Finite Element in Water Resources, C.A. Brebbia, W.G. Gray and G.F. Pinder (Eds.), Pentech Press, London: Plymouth, 1978.
- (159) I. Herrera y L. Rodarte, "Integro-Diferential Equations for Systems of Leaky Aquifers and Applications", Public.E6 Instituto de Ingeniería, December, 1973, Universidad Nacional Autónoma de México.