

0400

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DEL DOCTORADO

U N A M



ANALISIS DE COLUMNAS DE CONCRETO
ARMADO POR LA TEORIA DEL MODULO
TANGENTE

T E S I S
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA (Estructuras)
p r e s e n t a:
FAUSTO VINCES VELEZ

MEXICO, D.F.

1964



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTO
AL INSTITUTO PERUANO DE FOMENTO EDUCATIVO
A LA DIVISION DEL DOCTORADO
AL DR. EMILIO ROSENBLUETH

BIBLIOTECA DE LAS DIVISIONES
DE INVESTIGACION Y DEL DOCTO-
RADO DE INGENIERIA.

A

LOS PROFESORES DE LA DIVISION DEL DOCTORADO EN
RECONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA RECIBIDA

Notación

- A_c : área de la sección transversal
 A_s : área del acero longitudinal
 b : ancho de la sección
 d : peralte efectivo de la sección
 d'' : distancia medida desde el centroide del acero longitudinal al eje de giro
 E_c : módulo de elasticidad para el concreto
 E_0 : módulo de elasticidad tomado en el origen de la curva esfuerzo-deformación del concreto
 E_t : módulo tangente para el concreto armado
 E' : módulo de elasticidad modificado
 f : esfuerzo unitario normal del concreto reforzado
 f_c : esfuerzo unitario del concreto
 f'_c : resistencia a la compresión de un cilindro (6" x 12") de concreto a los 28 días
 f_s : esfuerzo del acero
 f_y : esfuerzo de fluencia del acero
 I : momento de inercia de la sección
 I_s : momento de inercia del área de acero
 I_0 : momento de inercia de la sección A_c con respecto al eje que pasa por el eje neutro paralelo al lado de dimensión b
 l : longitud efectiva de la columna
 p : relación A_s/bh
 h : peralte de la sección (menor que b)
 P : carga axial aplicada
 P_t : carga obtenida por la teoría del módulo tangente
 P_0 : carga axial de rotura del miembro
 e : deformación unitaria
 e_0 : deformación unitaria para un esfuerzo máximo del concreto (f'_c)
 e_s : deformación unitaria del acero
 e_y : deformación unitaria del acero para un esfuerzo f_y
 l/h : esbeltez

I n t r o d u c c i ó n

Históricamente, han existido cuando menos tres teorías principales para explicar la acción de columnas cargadas por encima del límite de proporcionalidad. La primera de ellas, la teoría del módulo tangente, fue propuesta por Engesser. En ésta el valor de E de la ecuación de Euler es reemplazado por E_t que es el módulo tangente, pendiente de la curva esfuerzo-deformación. Esta teoría asume que para cualquier carga axial, el módulo de elasticidad y el momento de inercia son los mismos para todos los puntos; es decir, el material se considera homogéneo. Este método es más conservador que otros y en general es recomendable en la práctica de la ingeniería. Para columnas doblemente articuladas, la ecuación sería

$$P_c = \frac{\pi^2 E_t I}{l^2}$$

donde P_c es la carga de pandeo, E_t es el módulo tangente, I el momento de inercia del miembro sujeto a carga axial.

Broms y Viest afirman que la ecuación anterior puede ser aplicable a miembros de concreto reforzado tomando a E_t como el módulo tangente para el concreto e I como el momento de inercia de la sección transformada; l sería la longitud del miembro. Pero para ello es necesario conocer una relación esfuerzo-deformación que se ajuste en lo posible a los valores experimentales. Rosenblueth considera posible tal planteamiento utilizando la relación de P. Desayi-Krishman, para cargas de corta duración, y la relación de "deformación límite" de Rüsck para acciones axiales de larga duración.

Una confrontación teórico-experimental dirimiría si la fórmula del módulo tangente es la más conveniente para predecir la resistencia de miembros cargados axialmente. Una concordancia absoluta es imposible de esperar en atención a las imperfecciones de construcción del elemento, a la imposibilidad de evitar excentricidades accidentales así como a los problemas de apoyos.

La teoría del módulo tangente tiene poca utilidad cuando el elemento falla antes de que se presente una posible configuración de pandeo. Según Saénz y Martín, la resistencia de columnas de concreto reforzado con extremos planos y esbelteces de 6 a 25, depende principalmente de la resistencia de los materiales de la columna y pueden por lo tanto ser calculada por la fórmula modificada de Euler. Afirman que la resistencia de columnas de concreto con extremos planos y esbelteces entre 25 y 43 depende mucho de la resistencia de los materiales así como de las propiedades mecánicas y elásticas de los materiales que constituyen el elemento y su comportamiento no se ajusta exactamente a la teoría del módulo tangente. Esto no obliga a considerar como cierta tal afirmación pues Saénz y Martín no efectuaron una comparación teórico-experimental ya que los puntos teóricos de las gráficas fueron obtenidos por la fórmula de Euler sin considerar el módulo tangente correspondiente a la deformación unitaria de pandeo.

C A P I T U L O I

Generalidades

La teoría del módulo tangente se aplicará en el análisis de columnas de concreto reforzado. Se analizará el caso particular de columnas doblemente articuladas. Esta limitación es solo aparente pues podría generalizarse para otros tipos de apoyo introduciendo un parámetro que afecte la esbeltez de la columna en estudio; sin embargo esta situación no será tratada. Igualmente no serán tomadas en cuenta las siguientes variables: efectos del tiempo y contracción de fraguado. Ello garantiza que el presente trabajo sea sencillo en su tratamiento matemático.

Son objetivos de este trabajo:

- Estudiar las variables p y f_c^m .
- Comparar los resultados con estudios ya realizados, experimentales y/o teóricos.
- Obtener ecuaciones simplificadas de utilidad práctica.

Para ello tomaremos en cuenta cargas de corta y larga duración así como otras consideraciones que se discuten en el desarrollo.

Las fórmulas obtenidas se particularizan para los siguientes juegos de valores:

1. acero: $f_y=2,530 \text{ kg/cm}^2$
concreto: $f_c^m=100, 200, 300, 400 \text{ kg/cm}^2$
2. acero: $f_y=4,200 \text{ kg/cm}^2$
concreto: $f_c^m=100, 200, 300, 400 \text{ kg/cm}^2$

Para ambos casos el porcentaje de acero longitudinal se tomó como sigue: 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08. Tanto para columnas con carga axial de corta y larga duración se consideraron los grupos de valores ya mencionados y en ningún caso se consideró refuerzo transversal.

Las características de las columnas tratadas son las siguientes:

- sección rectangular
- I_c constante a lo largo de la longitud de la columna.

Los valores y características mencionadas fueron utilizados en la obtención de curvas similares a las hipérbolas de Euler relacionando l/h con P_t/P_0 .

Finalmente, las consideraciones anteriores se utilizaron para buscar la carga crítica de una serie de pilotes de características geométricas variables pero permaneciendo I_c siempre constante a lo largo de la longitud del pilote.

CAPITULO II

Análisis. Cargas de corta duración

2.1 Hipótesis fundamentales. Para estudiar columnas con carga axial de corta duración estableceremos las siguientes hipótesis:

a.) Curva esfuerzo-deformación del concreto.- Aceptaremos que el concreto bajo cargas de corta duración se comporta de acuerdo con la siguiente expresión:

$$f_c = \frac{E_c e}{1 + (e/e_0)^2} \quad (1)$$

que relaciona esfuerzos con deformaciones unitarias (fig.1).

La deformación e_0 está definida por la ecuación:

$$e_0 = 2 f_c' / E_0 \quad (2)$$

donde E_0 es la pendiente en el origen de la curva (1) y su valor es el dado por Lyse

$$E_0 = 126,000 + 460 f_c' \quad (3)$$

o por la fórmula

$$E_0 = C \sqrt{f_c'} \quad (4)$$

dada por el reglamento del ACI donde C es una constante cuyos valores pueden ser 10,000 ó 15,000 dependiendo de la densidad del concreto.

La ecuación (1) presenta dos ventajas fundamentales:

- ser continua y de fácil manejo algebraico,
- y aproximarse mucho a los resultados experimentales aún para valores mayores que e_0 .

Esta ecuación (1) fue propuesta por P. Desayi - S. Krishman y de ella se obtienen las siguientes características: El módulo tangente queda expresado por la derivada de f_c con respecto a e ,

$$\frac{d f_c}{d e} = E_t = \frac{E_c (1 - e^2/e_0^2)}{(1 + e^2/e_0^2)^2} = r E_c \quad (5)$$

siendo

$$r = \frac{(1 - e^2/e_0^2)}{(1 + e^2/e_0^2)^2} \quad (6)$$

Designando $m = f_c^n / f_c$ (6)

y considerando que de (2): $E_0 = 2 f_c^n / e_0$, se llega a la siguiente expresión:

$$e = e_0 (m + \sqrt{m^2 - 1}) \quad (7)$$

De acuerdo a (7) es posible determinar e cuando son conocidos e_0 y m; así si $f_c = 0.85 f_c^n$

$$e = 1.778 e_0 \quad (8)$$

que corresponde al e de rotura. En general sabemos que E_0 y f_c^n pueden ser determinados; así pues con (2) y (7) puede determinarse fácilmente el valor de e.

b. Relación entre f_c^n y f_c^i . Las siguientes relaciones tienen carácter experimental:

$$f_c^n = 0.85 f_c^i \quad (9)$$

para miembros colados verticalmente, y

$$f_c^n = f_c^i \quad (10)$$

para miembros colados horizontalmente. El estudio en general se hace suponiendo valores de f_c^n en vez de f_c^i .

c. Curva esfuerzo-deformación del acero. Se adopta la curva trapezoidal de la figura 2 en

la que la pendiente es nula para valores superiores de e_y . De cero a e_y su pendiente es constante y bruscamente se anula al llegar a e_y . Para valores mayores que e_y , f_s permanece constante e igual a f_y . Se acepta la relación

$$E_s = f_y / e_y = 2'100,000 \text{ kg/cm}^2.$$

d. Cargas P_t y P_0 . Los efectos ocasionados por cortante no se toman en cuenta debido a que aceptaremos que las deformaciones son pequeñas.

Se aceptará que P_0 queda definido por la siguiente expresión:

$$P_0 = A [0.85 (1-p) f_c^i + p f_y] \quad (11)$$

y P_t por

$$P_t = A [(1-p) f_c + p f_s] \quad (12)$$

donde f_c se obtiene de la ecuación (1) y f_s es igual a: e E_s .

P_t también quedará definido por:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I'}{l^2} \quad (13)$$

Para la aplicación de esta última expresión se considerará que el material que constituye al miembro es homogéneo.

2.2 Desarrollo.- Se estudian los siguientes casos:

a. Para $e \leq e_y$

Consideremos la ecuación (13). El valor de $E_t I'$ puede expresarse por la relación

$$E_t I' = E_t I_c + E_s I_s \quad (14)$$

$$\text{pero } I_c = I - I_s \quad (15)$$

donde I es el momento de inercia de la sección total, luego:

$$E_t I' = E_t (I - I_s) + E_s I_s \quad (16)$$

$$E_t I' = E_t I + I_s (E_s - E_t) \quad (17)$$

$$E_t I' = I \left[E_t + \frac{I_s}{I} (E_s - E_t) \right] \quad (18)$$

denominaremos E' a las cantidades que aparezcan dentro del corchete en la expresión (18). E_s es el módulo de elasticidad del acero; E_t es el módulo tangente del concreto que se relaciona de acuerdo a (5) y (6):

$$E_t = r E_o \quad (19)$$

$$\text{Si hacemos } n = E_s / E_o$$

y sustituimos en la expresión correspondiente a E' deducida de (18) tenemos:

$$E' = r E_o + \frac{I_s}{I} (n E_o - r E_o),$$

factorizando:

$$E' = E_o \left[r + \frac{I_s}{I} (n - r) \right] \quad (20)$$

Sustituyendo (20) en (18)

$$E_t I' = I \left[r + \frac{I_s}{I} (n - r) \right] E_o \quad (21)$$

Por otro lado, de la ecuación (13) tenemos el valor de l :

$$l = \pi \sqrt{\frac{E_t I'}{P_t}} \quad (22)$$

Pero la fuerza axial para cualquier deformación e y deflexiones pequeñas está dada por la ecuación (12) y es:

$$P_t = A f \quad (23)$$

$$\text{donde } f = \left[(1-p) f_c + p f_s \right] \quad (24)$$

Sustituyendo (24) y (21) en la expresión (22) y dividiendo ambos miembros entre h , se obtiene:

$$\frac{l}{h} = \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{I \left[r + I_s (n-r)/I \right] E_0}{A f}} \quad (25)$$

$$\text{o } \frac{l}{h} = \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{I E_0}{A}} \sqrt{\frac{r + I_s (n-r)/I}{f}} \quad (26)$$

Nótese que la expresión (26) es de carácter general, donde I está en función de las dimensiones de la sección transversal cualquiera que sea su forma. La ecuación (26) expresa el valor de la esbeltez para una deformación determinada, ésta nos definirá un valor de r y f_c a través de las relaciones (6) y (1) respectivamente.

Sección rectangular. - Para una sección rectangular se tienen las siguientes relaciones:

$$I = \frac{b h^3}{12} \quad (27)$$

$$I_s = p h b \left(\frac{d^n}{2} \right)^2 \quad (28)$$

Reemplazando en (26) las expresiones (27) y (28) se obtiene:

$$\frac{l}{h} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E_0}{3}} \sqrt{\frac{r + 3p(n-r) \left(\frac{d^n}{h} \right)^2}{f}} \quad (29)$$

$$\frac{l}{h} = 0.907 \sqrt{\frac{[r + 3p(n-r) (d^n/h)^2] E_0}{[(1-p) f_c + p f_s]}} \quad (30)$$

b. Para $e > e_y$

Con valores de e mayores que e_y el valor de n es nulo y f_s es igual a f_y en todas las expresiones anteriores. Así:

la fórmula (26) queda

$$\frac{l}{h} = \frac{11}{h} \sqrt{\frac{E_0 I}{A}} \sqrt{\frac{r(1-I_S/I)}{[(1-p)f_c + pf_y]}} \quad (31)$$

y la fórmula (30) queda modificada a

$$\frac{l}{h} = 0.907 \sqrt{\frac{E_0 [1-3p (d^n/h)^2]}{[(1-p)f_c + pf_y]}} r \quad (32)$$

Observamos que para $e = e_y$ existen dos valores de l/h ; uno para $n \neq 0$, o sea $E_S \neq 0$ y otro para $E_S = n = 0$. Esta observación tiene mucha importancia para los casos de las curvas $l/h - P_t/P_0$ que se manifiesta en una marcada discontinuidad.

2.3 Relación P_t/P_0 Considerando (11) y (12):

$$\frac{P_t}{P_0} = \frac{(1-p)f_c + p f_s}{0.85(1-p)f_c' + p f_y} \quad (33)$$

para $e \leq e_y$; y

$$\frac{P_t}{P_0} = \frac{(1-p)f_c + pf_y}{0.85(1-p)f_c' + pf_y} \quad \text{para } e > e_y. \quad (34)$$

Sabiendo además que la ecuación (1) puede expresarse como:

$$f_c = \frac{2f_c'' (e/e_0)}{1 + (e/e_0)^2} \quad (35)$$

$$\text{de donde } \frac{f_c}{f_c''} = s = \frac{2 (e/e_0)}{1 + (e/e_0)^2} \quad (36)$$

y haciendo $p = 0$ en (33) y (34) se obtiene que

$$\frac{P_t}{P_0} = s \quad (37)$$

$$y \quad P_t = A [(1-p) s f_c'' + p f_s] \quad (38)$$

para $e < e_y$;

$$y \quad P_t = A [(1-p) s f_c'' + p f_y] \quad (39)$$

para $e \geq e_y$.

CAPITULO III

Análisis. Cargas de larga duración

3.1 Hipótesis fundamentales. Cuando cargas de larga duración actúan axialmente en miembros de concreto reforzado, es necesario modificar solamente la hipótesis a que sirvió para el estudio de cargas de corta duración, en vez de ella consideraremos la siguiente:

a. Curva esfuerzo-deformación del concreto. - Aceptaremos que el concreto se comporta de acuerdo a la siguiente relación:

$$f_o = \frac{E_o'}{1 + 0.67(e/e_o)} \quad (40)$$

La deformación e_o está definida por la ecuación:

$$e_o = 0.6 f_c^n / E_o' \quad (41)$$

donde E_o' es la pendiente en el origen de la curva (40) y su valor está dado por

$$E_o' = 0.3 E_o \quad (42)$$

que corresponde al 30% del valor del módulo tangente inicial de la relación (1). Se escogió 30% porque para la valuación de E_o se utilizó la expresión (3).

De (40) obtenemos el valor de E_o' que de el valor del módulo tangente para cargas axiales de larga duración para diferentes valores de e ; se obtiene:

$$\frac{df_c}{de} = E_o' = \frac{E_o'}{(1 + 0.67 e/e_o)^2} = r E_o' \quad (43)$$

$$\text{donde } 1/r = (1 + 0.67 e/e_o)^2 \quad (44)$$

De (40) y (41) podemos obtener las siguientes relaciones:

$$f_c = \frac{0.6 (e/e_o) f_c^n}{1 + 0.67 e/e_o} \quad (45)$$

$$\text{o bien } f_c = s f_c^n \quad (46)$$

$$\text{donde } s = \frac{0.6 e/e_o}{1 + 0.67 (e/e_o)} \quad (47)$$

La curva (40) corresponde a la curva "Límite de deformación" de Rüsck y sus características son:

• es una curva asintótica para un valor de la relación $k = f_c/f_c^m$; en (40) se tiene

$$k + 0.67 k(e/e_0) = 0.6 (e/e_0)$$

de donde

$$e/e_0 = k/(0.6 - 0.67k)$$

y para $e/e_0 \rightarrow \infty$

$$k = 0.6/0.67 = 0.8955.$$

• para $e/e_0 = 1$

$$\frac{f_c}{f_c^m} = \frac{0.6}{1.67} = 0.36 .$$

CAPITULO IV

Análisis y Aplicación. Pilotes

Para aplicar el procedimiento descrito al estudio de pilotes de concreto reforzado, la ecuación (13) es sustituida por

$$P_t = 2\sqrt{K E I} \quad (48)$$

Esta fórmula es propuesta por M. T. Davisson siendo P_t la carga crítica de pandeo para pilotes, E es el módulo de elasticidad, I el momento de inercia; K es el módulo tangente de la curva que representa la variación de la reacción del suelo en función de la deflexión del mismo. En realidad K no depende únicamente de la deflexión provocada por el pilote, sino también de las propiedades mecánicas y físicas del pilote y del suelo así como de la forma de hincado. Se afirma que K es pequeño en la zona cerca a la superficie y por lo tanto el pandeo tiende a iniciarse cerca de esa zona, K pues también varía con la profundidad y en suelos blandos es sugerida una variación lineal.

En lo que sigue se tratará de determinar la carga crítica de un pilote considerado como articulado en sus extremos aceptando que K es constante tanto para cargas de corta como de larga duración. Se sigue un procedimiento análogo al de los capítulos anteriores.

Utilizando (21) en (48)

$$P_t = 2\sqrt{K (r + (n-r)I_s/I) E_o I} \quad (49)$$

Además, para columnas:

$$P_t = A [(1-p)f_c + p f_s] \quad (50)$$

Se pretende encontrar una relación e/e_o para la cual ambas fórmulas proporcionen la misma P_t . Esto es razonable e indicaría a qué valor de e se presenta un comportamiento como columna y la consideración de dicha carga como carga de pandeo.

Las fórmulas anteriores tienen carácter general en lo que se refiere a cargas axiales de corta o de larga duración.

Aplicación: - Se trata de encontrar la carga P_t de los pilotes con las siguientes características:

1. Pilote de concreto reforzado de sección circular de 40 cm de diámetro, de concreto $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, con 6 varillas # 8 de refuerzo longitudinal.
2. Pilote de concreto reforzado de sección circular de 30 cm de diámetro, de concreto $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$, con 6 varillas # 6 de refuerzo longitudinal.
3. Pilote de concreto reforzado de sección cuadrada de 15 cm de lado, de concreto $f'_c = 500 \text{ kg/cm}^2$, con 4 varillas # 5 de refuerzo longitudinal.

Se considerará $K = 8 \text{ kg/cm}^2$ para acción de larga duración

$K = 32 \text{ kg/cm}^2$ para acción de corta duración

$E_0 = 10,000 f'_c$ para acción de corta duración

$E'_0 = 0.4 E_0$ para acción de larga duración

$f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$, $E_s = 2 \cdot 100,000 \text{ kg/cm}^2$

$$\frac{f_c}{f'_c} = \frac{2 e/e_0}{1 + (e/e_0)^2} \quad \text{para acción de corta duración}$$

$$\frac{f_c}{f'_c} = \frac{0.8 e/e_0}{1 + 0.9(e/e_0)} \quad \text{para acción de larga duración.}$$

La última relación cambia conforma varía la relación de E_0 y E'_0 , pero siempre se tendrá que cuando e/e_0 tiende a infinito, la relación f_c/f'_c tiende a 0.9 de acuerdo con el criterio de Rüsck.

También se consideró que $f''_c = 0.85 f'_c$ para los pilotes de sección circular, y para el pilote de sección cuadrada se consideró $f''_c = f'_c$ pensando que puedan ser colados horizontalmente, mientras que el colado en los circulares será siempre vertical.

Los resultados se muestran en la tabla siguiente, en todos ellos el esfuerzo en el acero era el de fluencia.

CARGAS DE LOS PILOTES

Sección Carga	CORTA DURACION			LARGA DURACION		
	circular d=40cm	circular d=30cm	cuadrada a=15cm	circular d=40cm	circular d=30cm	cuadrada a=15cm
P_c (columna)	338.026	271.367	136.352	221.986	155.264	67.064
P_c (pilote)	338.348	272.584	135.952	220.008	155.261	66.982
P (promedio)	338.187	271.426	136.152	220.997	155.262	67.032
P_o (Tn)	339.079	273.620	140.152	314.75	251.52	128.070
a/e_o	0.4065	0.862	0.7648	1.22	1.01	0.646
error %	0.92	0.51	0.27	0.89	0.02	0.24

Conclusiones

El análisis de los resultados anteriores permite afirmar lo siguiente:

1. Tiene importancia la resistencia del concreto, así como la cantidad y calidad del refuerzo longitudinal. El factor de esbeltez disminuye conforme crece la resistencia del concreto o del acero, y se incrementa con p .
2. No siempre es conveniente sustituir una curva por una recta en las gráficas anteriores, y menos una sola recta por todas ellas. En un determinado intervalo podría ser adecuado, pero en otros tramos las curvas se alejan mucho de las rectas.
3. La recta dada por la ecuación $P_t/P_o = 1.20 - 0.025 l/h$ que es propuesta para representar la variación de la relación P_t/P_o con l/h , aparece en las gráficas con línea en trazos y por lo general queda debajo de ellas. Esto no sucede para el caso de $p = 0$ y cargas axiales de larga duración. En general se puede afirmar que para una determinada relación de l/h y para determinadas características de un miembro de concreto reforzado, esta ecuación da valores de P_t/P_o menores que los que se obtienen por la teoría del módulo tangente.
4. Será notado que los tramos horizontales de las gráficas corresponden al estado de fluencia del acero del refuerzo longitudinal y se recordará que en el tratamiento expuesto no se ha considerado la calidad y cantidad del acero de refuerzo transversal.
5. Se aprecia en las gráficas que las curvas para cargas axiales de larga duración permanecen debajo de las correspondientes a acciones axiales de corta duración.
6. Para considerar las variables p , f_o^n y f_y en fórmulas adecuadas y de fácil manejo, se sugiere seguir los procedimientos siguientes:
 - a. Curvas para secciones rectangulares. La ecuación que proporciona la teoría del módulo tangente es, de acuerdo a (13) y (21):

$$P_t = \frac{\pi^2 A}{(l/h)^2} \frac{R_o}{12} \left[r + 3p (n-r) (d^n/h)^2 \right]$$

Teniendo en cuenta las gráficas r , l/h se trató de encontrar una recta que las representara satisfactoriamente, esta es tomada como

$$r = [0.0018 \sqrt{f_c''} - 0.1 p] (l/d)$$

y para $d''/h = 0.85$.

Sustituido el valor de r y efectuando las operaciones correspondientes en la ecuación para P_t se tiene:

$$P_t = \frac{A}{(l/h)^2} \left[(0.0015 f_c'' - 0.08 p) E_0 (l/h) + 1.3 p E_s \right]$$

Esta expresión tiene la desventaja que en algunos intervalos da valores de P_t/P_0 un poco menores que los de las curvas. Fue aplicada a las columnas que experimentaron Saéñz-Martín y se obtuvo un error máximo de 18%. En este caso el módulo de elasticidad para el concreto se halló por la fórmula de Lyse.

b. Rectas. Puede proponerse una familia de rectas del tipo

$$P_t/P_0 = a + q (l/h)$$

en donde el valor de a puede considerarse igual a 1.4, y el valor de q dependería de p , f_c'' y f_y . Se tomará en cuenta que para valores de P_t/P_0 comprendidos entre 0 y 0.17 las curvas de la teoría del módulo tangente tienden a ser asintóticas al eje (l/h) .

c. Curvas tipo de Rankine. Se propone familia de curvas del tipo

$$\frac{P_t}{P_0} = \frac{1}{1 + a(l/h) + b(l/h)^2} = \frac{1}{(1 + w \frac{l}{h})^2}$$

tal que para $l/h = 0$ $P_t/P_0 = 1$

$l/h \rightarrow \infty$ $P_t/P_0 \rightarrow 0$

En estas fórmulas a , b , w estarán en función de p , f_c'' y f_y y pueden determinarse considerando las curvas resultantes de la teoría del módulo tangente y a partir de datos experimentales.

7. De lo expuesto anteriormente se deduce que la teoría del módulo tangente puede adaptarse convenientemente al análisis de columnas de concreto reforzado aún para condiciones generales de apoyo diferentes al caso aquí analizado.

ACCIONES AXIALES DE CORTA DURACION

e/e_0	$(e/e_0)^2$	$[1+e^2/e_0^2]$	$[1-e^2/e_0^2]$	$1/[1+e^2/e_0^2]^2$	α	r	S
0.1	0.01	1.01	0.99	0.9803	0.9900	0.9705	0.1980
0.2	0.04	1.04	0.96	0.9258	0.9615	0.9888	0.3846
0.3	0.09	1.09	0.91	0.8409	0.9174	0.7652	0.5504
0.4	0.16	1.16	0.84	0.7435	0.8620	0.6245	0.6896
0.5	0.25	1.25	0.75	0.6400	0.8000	0.4800	0.8000
0.6	0.36	1.36	0.64	0.5405	0.7352	0.3459	0.8822
0.7	0.49	1.49	0.51	0.4504	0.6711	0.2297	0.9395
0.8	0.64	1.64	0.36	0.3861	0.6097	0.1389	0.9755
0.9	0.81	1.81	0.19	0.3052	0.5524	0.0579	0.9986
1.0	1.	2.	0	0.2500	0.5000	0.000	1.000
1.1	1.21	2.21	0.21	0.2049	0.4524	0.043	0.9952
1.2	1.44	2.44	0.44	0.1680	0.4098	0.0739	0.9835
1.3	1.69	2.69	0.69	0.1381	0.3717	0.0953	0.9664
1.4	1.96	2.96	0.96	0.1141	0.3378	0.1095	0.9458
1.5	2.25	3.25	1.25	0.0943	0.3076	0.1176	0.9228
1.6	2.56	3.56	1.56	0.0787	0.2803	0.1227	0.8985
1.7	2.89	3.89	1.89	0.0662	0.2570	0.1251	0.8638
1.8	3.24	4.24	2.24	0.0556	0.2358	0.1245	0.8488

Características de los

f''_c	100	200	300	400
E_0	17200	22000	264,000	310,000
e_0	1.1527×10^{-3}	1.9348×10^{-3}	2.2726×10^{-3}	2.5806×10^{-3}
e_u	2.063×10^{-3}	3.44×10^{-3}	4.04×10^{-3}	4.59×10^{-3}
n	12.207	9.632	7.954	6.774
e_y/e_0 $f_y = 2530$	1.035	0.622	0.529	0.466
e_y/e_0 $f_y = 4200$	1.72	1.036	0.88	0.775

$E_0 = 126000 + 460 f''_c$ en $K\phi/cm^2$ $e_0 = 2 f''_c / E_0$ $n = 2 \times 10^6 / E_0$



DERFI

		$[(1-p)f'_c + pf_y]$			
		$f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$			
$p \backslash f'_c$		100	200	300	400
0.02		148.6	246.6	344.6	432.6
0.04		197.2	293.2	389.2	485.2
0.06		245.8	339.8	433.8	527.8
0.08		294.4	386.4	478.4	566.4

		$[(1-p)f'_c + pf_y]$			
		$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$			
$p \backslash f'_c$		100	200	300	400
0.02		182.4	280.4	378.4	466.4
0.04		264.8	360.8	456.8	552.8
0.06		347.2	441.2	535.2	629.2
0.08		429.6	521.6	613.6	701.6

		$n \cdot p$			
$p \backslash f'_c$		100	200	300	400
0.02		0.2441	0.1926	0.15908	0.1354
0.04		0.4282	0.38528	0.31816	0.2709
0.06		0.7324	0.5779	0.4772	0.4064
0.08		0.9765	0.7705	0.6363	0.5419

		$3np(d'/h)^2$			
$p(d'/h)^2 \backslash f'_c$		100	200	300	400
0.02 (0.8)		0.4687	0.3698	0.3054	0.2601
0.04 (0.6)		0.9374	0.7397	0.6108	0.5202
0.06 (0.9)		1.7651	1.3927	1.1501	0.9795
0.08 (0.9)		2.3535	1.8570	1.5335	1.3060

		$P_t/P_0 - L/h$				$P=0$			
$f''_c \rightarrow$	100		200		300		400		
$e/e_0 \rightarrow$	P_t/P_0	L/h	P_t/P_0	L/h	P_t/P_0	L/h	P_t/P_0	L/h	
0.1	0.1980	83.44	0.1980	64.62	0.1980	59.73	0.1980	56.00	
0.2	0.3840	57.11	0.3840	44.27	0.3840	40.80	0.3840	38.33	
0.3	0.5504	45.03	0.5504	34.44	0.5504	31.80	0.5504	29.82	
0.4	0.6896	35.00	0.6896	27.75	0.6896	25.62	0.6896	24.62	
0.5	0.8000	29.14	0.8000	22.59	0.8000	20.80	0.8000	19.55	
0.6	0.8822	23.51	0.8822	18.23	0.8822	16.23	0.8822	15.78	
0.7	0.9395	18.80	0.9395	14.42	0.9395	13.31	0.9395	12.48	
0.8	0.9755	14.00	0.9755	10.62	0.9755	10.02	0.9755	9.39	
0.9	0.9986	13.26	0.9986	10.28	0.9986	9.47	0.9986	8.98	
1.0	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	

		$P_t/P_0 - L/h$				$P=0.02$				$f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$
$f''_c \rightarrow$	100		200		300		400			
$e/e_0 \rightarrow$	P_t/P_0	L/h	P_t/P_0	L/h	P_t/P_0	L/h	P_t/P_0	L/h		
0.1	0.1635	91.43	0.1799	69.96	0.1963	64.00	0.1988	59.50		
0.2	0.3120	63.47	0.3732	48.32	0.3810	44.20	0.3900	41.12		
0.3	0.462	51.19	0.536	38.25	0.552	34.97	0.562	32.49		
0.4	0.587	43.96	0.679	31.92	0.699	28.97	0.708	26.82		
0.5	0.692	36.21	0.800	27.19	0.821	24.54	0.825	18.27		
0.6	0.779	31.51	0.905	23.55	0.899	19.43	0.875	14.65		
0.7	0.852	27.95	0.954	12.79	0.939	12.06	0.946	11.48		
0.8	0.905	25.24	0.975	9.67	0.979	9.13	0.976	8.68		
0.9	0.955	23.03	0.998	8.09	0.999	8.80	0.999	8.30		
1.00	0.988	21.22	1.000	0.00	1.000	0.00	1.000	0.000		

		$P_t/P_0 - L/h$				$D=0.04$				$f_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$
$f''_c \rightarrow$	100		200		300		400			
$e/e_0 \rightarrow$	P_t/P_0	L/h	P_t/P_0	L/h	P_t/P_0	L/h	P_t/P_0	L/h		
0.1	0.1456	96.81	0.1755	73.75	0.1825	67.19	0.193	62.38		
0.2	0.2849	67.51	0.3636	51.32	0.391	46.75	0.391	43.16		
0.3	0.436	54.88	0.527	41.07	0.569	37.26	0.569	35.09		
0.4	0.533	45.77	0.674	34.60	0.723	31.83	0.723	28.80		
0.5	0.636	39.93	0.804	29.90	0.839	26.91	0.839	17.16		
0.6	0.726	35.56	0.913	26.56	0.886	14.30	0.886	13.77		
0.7	0.804	32.40	0.960	11.63	0.949	11.11	0.949	10.62		
0.8	0.870	29.75	0.985	8.72	0.976	8.34	0.976	8.02		
0.9	0.931	27.82	0.997	5.52	0.996	5.26	0.996	4.83		
1.0	0.972	26.16	1.000	0.00	1.000	0.00	1.000	0.000		

		Pt/P ₀		L/h		P = 0.06		f _y = 2530 Kg/cm ²	
f _c	100		200		300		400		
e/e ₀	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	
0.1	0.1392	107.91	0.1760	81.57	0.1955	73.76	0.1957	68.19	
0.2	0.266	75.66	0.3579	57.17	0.382	51.60	0.397	47.55	
0.3	0.389	62.02	0.521	46.12	0.556	41.35	0.577	38.23	
0.4	0.502	52.29	0.671	39.29	0.713	35.35	0.736	32.35	
0.5	0.601	46.25	0.799	34.45	0.851	30.98	0.856	26.40	
0.6	0.696	41.81	0.921	31.15	0.924	28.39	0.900	22.95	
0.7	0.776	38.48	0.969	28.75	0.961	26.35	0.967	20.05	
0.8	0.851	35.94	0.987	26.01	0.983	24.72	0.983	17.52	
0.9	0.917	33.99	0.999	23.02	0.997	23.85	0.997	15.52	
1.0	0.983	32.20	1.000	20.00	1.000	20.00	1.000	20.00	

		Pt/P ₀		L/h		P = 0.08		f _y = 2530 Kg/cm ²	
f _c	100		200		300		400		
e/e ₀	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	
0.1	0.1279	111.53	0.1735	84.50	0.198	76.65	0.195	70.62	
0.2	0.254	78.25	0.351	59.29	0.382	53.65	0.399	49.34	
0.3	0.371	64.49	0.514	47.97	0.536	43.32	0.582	39.90	
0.4	0.477	54.64	0.666	41.02	0.717	36.98	0.748	33.94	
0.5	0.582	48.35	0.800	36.29	0.862	32.54	0.870	28.42	
0.6	0.674	43.87	0.903	32.81	0.935	29.79	0.905	25.41	
0.7	0.756	40.45	0.972	30.03	0.966	27.74	0.961	23.49	
0.8	0.834	37.84	0.988	27.57	0.987	26.25	0.983	21.08	
0.9	0.907	35.87	0.999	25.65	0.999	24.53	0.998	19.25	
1.0	0.974	34.01	1.000	23.00	1.000	23.00	1.000	23.00	

		Pt/P ₀		L/h		P = 0.02		f _y = 4200 Kg/cm ²	
f _c	100		200		300		400		
e/e ₀	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	
0.1	0.133	91.43	0.1594	69.96	0.1789	64.00	0.1775	59.50	
0.2	0.260	63.47	0.327	48.32	0.349	44.20	0.360	41.12	
0.3	0.376	51.19	0.471	38.25	0.504	36.97	0.522	32.49	
0.4	0.478	43.96	0.596	31.92	0.636	28.97	0.657	26.82	
0.5	0.574	36.21	0.701	27.19	0.748	24.54	0.771	22.63	
0.6	0.634	31.51	0.789	23.55	0.836	21.15	0.842	19.37	
0.7	0.694	27.95	0.856	22.36	0.906	18.41	0.929	16.77	
0.8	0.738	25.24	0.912	18.48	0.959	16.30	0.980	14.66	
0.9	0.777	23.03	0.956	16.67	0.997	15.80	0.998	13.30	
1.0	0.805	21.22	0.988	15.17	1.00	15.00	1.00	15.00	
1.1	0.832	19.94							
1.2	0.849	18.98							
1.3	0.868	18.28							
1.4	0.886	17.79							
1.5	0.892	17.42							
1.6	0.913	17.12							
1.7	0.919	17.02							

c →	100		200		300		400	
	Pt/Po	L/h	Pt/Po	L/h	Pt/Po	L/h	Pt/Po	L/h
0.1	0.1005	66.61	0.145	72.75	0.167	67.19	0.169	62.38
0.2	0.209	67.51	0.295	51.32	0.326	46.75	0.346	43.16
0.3	0.326	54.88	0.427	41.07	0.473	37.26	0.501	35.08
0.4	0.398	45.77	0.546	34.60	0.604	31.23	0.636	28.80
0.5	0.474	39.73	0.651	29.90	0.714	26.91	0.754	24.75
0.6	0.541	35.56	0.742	26.56	0.809	23.76	0.831	21.70
0.7	0.598	32.40	0.816	23.91	0.884	21.28	0.926	19.31
0.8	0.648	29.75	0.879	21.91	0.950	19.38	0.981	8.02
0.9	0.693	27.82	0.937	20.39	0.997	5.26	0.997	4.83
1.0	0.730	26.16	0.983	19.06	1.000	0.00	1.00	0.00
1.1	0.766	24.93						
1.2	0.799	24.01						
1.3	0.829	23.20						
1.4	0.857	22.72						
1.5	0.880	22.13						
1.6	0.916	21.71						
1.7	0.939	21.36						

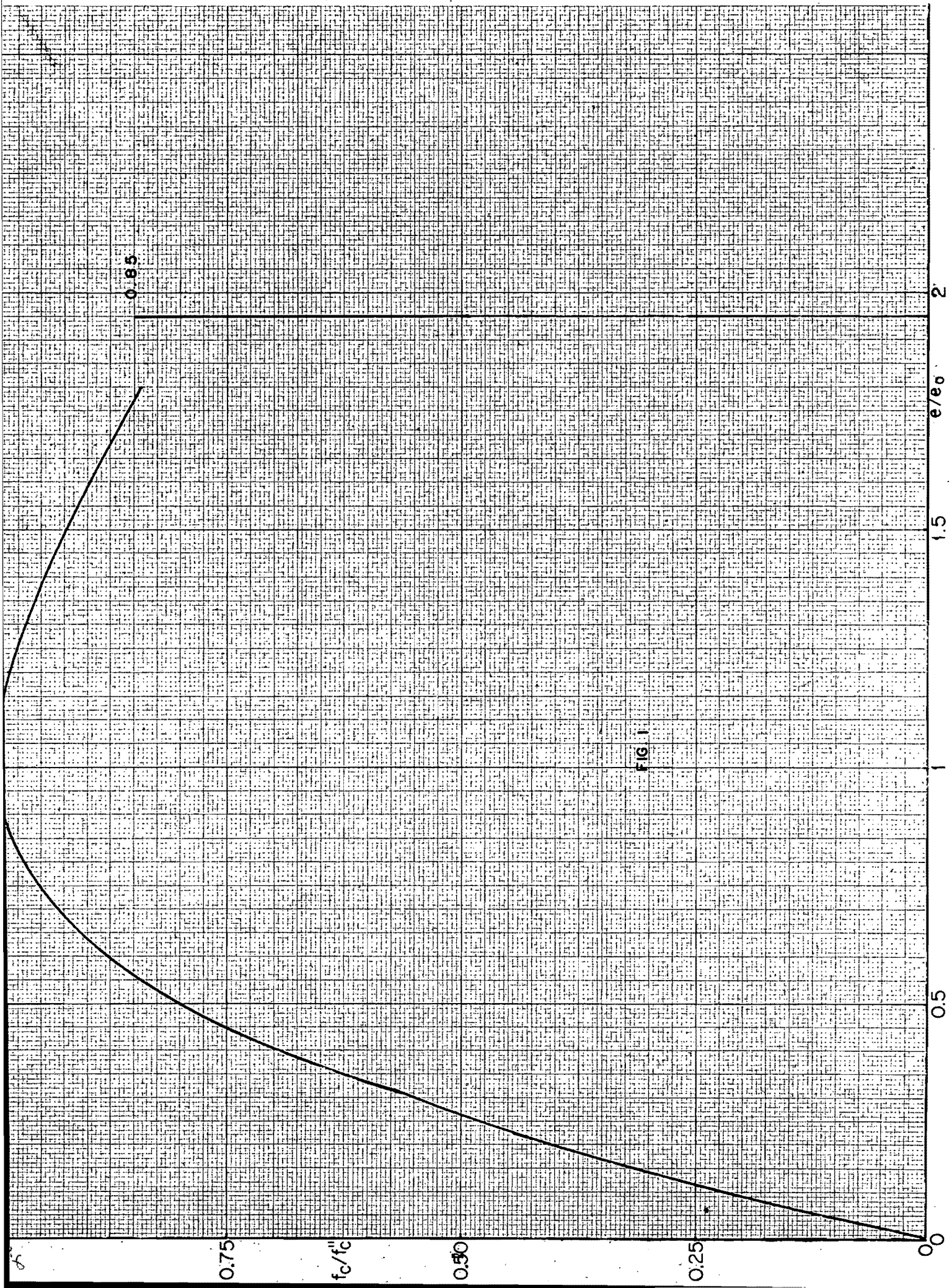
P = 0.04 F_y = 4200 K_g/cm²

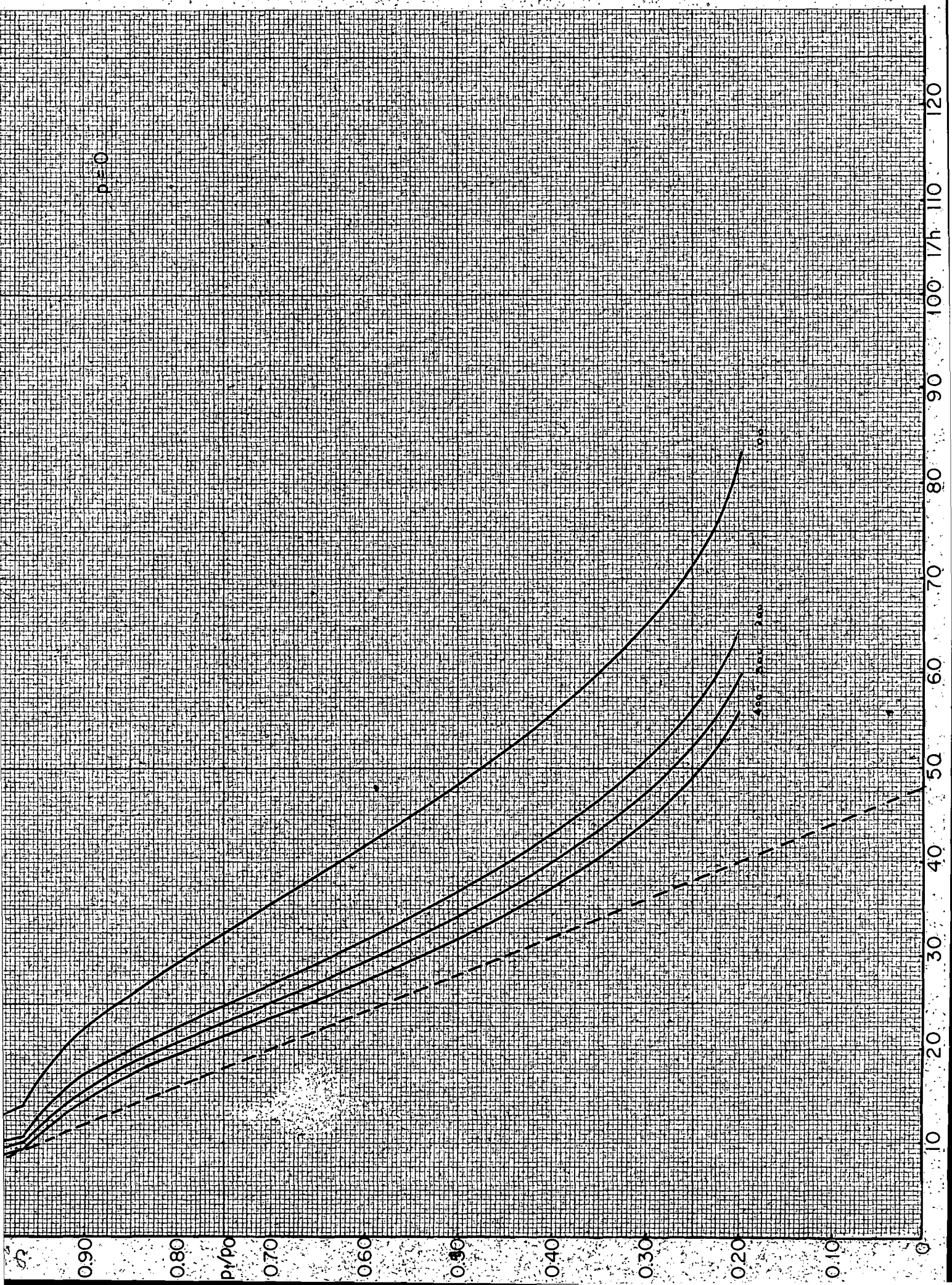
c →	100		200		300		400	
	Pt/Po	L/h	Pt/Po	L/h	Pt/Po	L/h	Pt/Po	L/h
0.1	0.0960	107.91	0.135	81.57	0.158	73.76	0.1649	68.18
0.2	0.1885	75.66	0.274	57.17	0.3105	51.60	0.332	47.55
0.3	0.276	62.02	0.400	46.12	0.452	41.55	0.486	38.23
0.4	0.356	52.29	0.514	39.29	0.579	35.35	0.619	32.35
0.5	0.425	46.25	0.616	34.45	0.691	30.98	0.722	28.31
0.6	0.492	41.81	0.708	31.13	0.769	27.79	0.826	25.25
0.7	0.551	38.48	0.785	28.57	0.825	25.40	0.927	23.01
0.8	0.601	35.94	0.845	26.57	0.942	23.51	0.985	7.52
0.9	0.649	33.99	0.924	25.08	0.997	4.85	0.999	4.52
1.0	0.694	32.30	0.979	23.74	1.00	0.00	1.000	0.00
1.1	0.734	30.92						
1.2	0.774	29.83						
1.3	0.806	28.94						
1.4	0.845	28.26						
1.5	0.873	27.57						
1.6	0.916	26.87						
1.7	0.922	26.41						

P = 0.06 F_y = 4200 K_g/cm²

c →	100		200		300		400	
	Pt/Po	L/h	Pt/Po	L/h	Pt/Po	L/h	Pt/Po	L/h
0.1	0.088	111.53	0.1284	84.50	0.152	76.65	0.160	70.62
0.2	0.174	78.45	0.260	59.29	0.298	53.65	0.323	49.34
0.3	0.256	64.49	0.381	47.97	0.421	43.32	0.494	39.90
0.4	0.331	54.64	0.493	41.02	0.561	36.98	0.608	33.94
0.5	0.398	48.35	0.592	36.29	0.674	32.54	0.728	29.80
0.6	0.464	43.07	0.687	32.81	0.774	29.39	0.819	26.63
0.7	0.521	40.45	0.771	30.94	0.863	26.95	0.922	24.52
0.8	0.574	37.84	0.841	28.90	0.939	25.13	0.966	7.08
0.9	0.622	35.87	0.913	26.8	0.999	4.53	0.999	4.25
1.0	0.670	34.01	0.975	25.29	1.00	0.00	1.000	0.000
1.1	0.716	32.70						
1.2	0.759	31.51						
1.3	0.810	30.27						
1.4	0.852	29.75						
1.5	0.870	28.83						
1.6	0.921	28.19						
1.7	0.962	27.58						

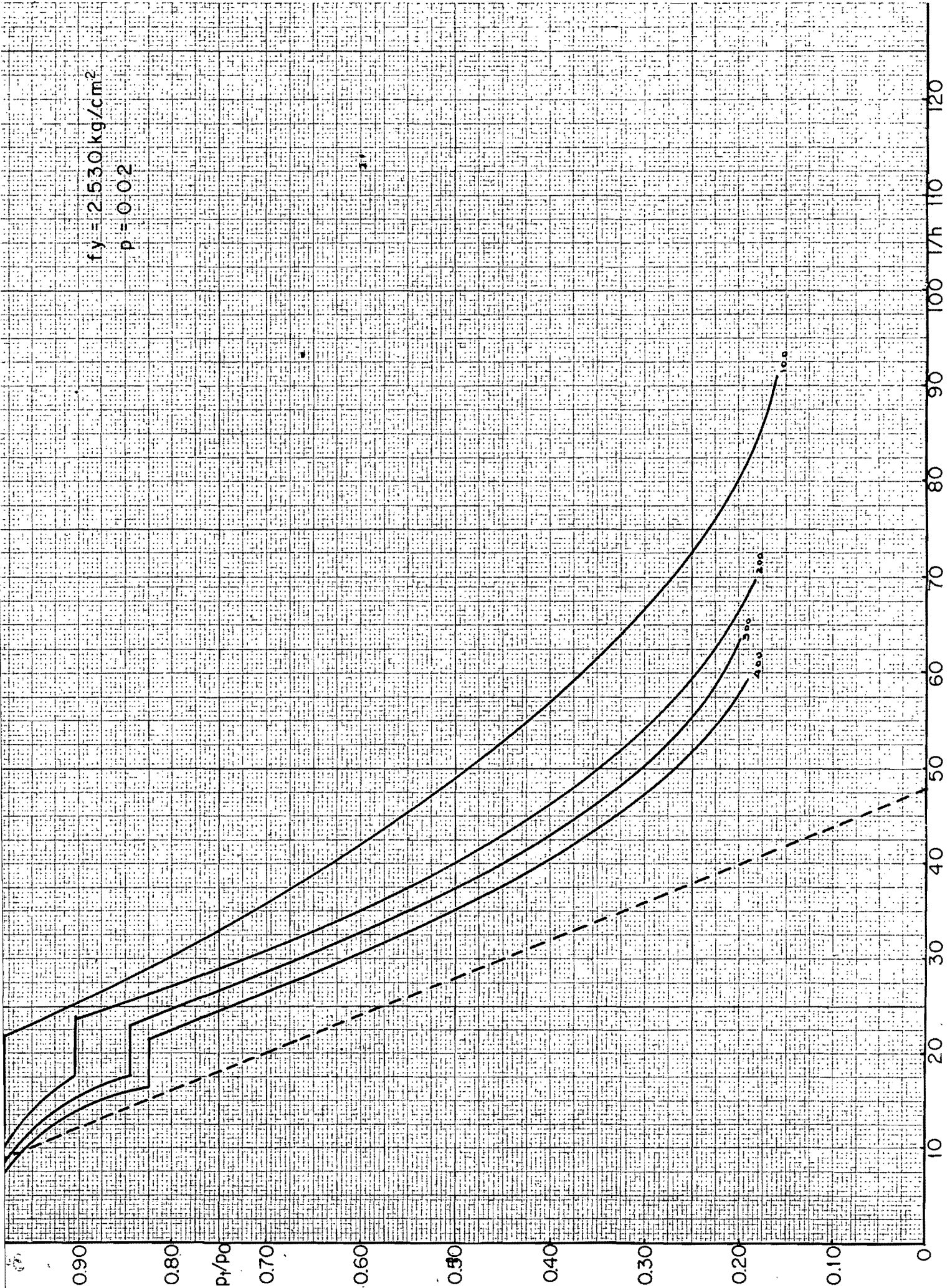
P = 0.08 F_y = 4200 K_g/cm²



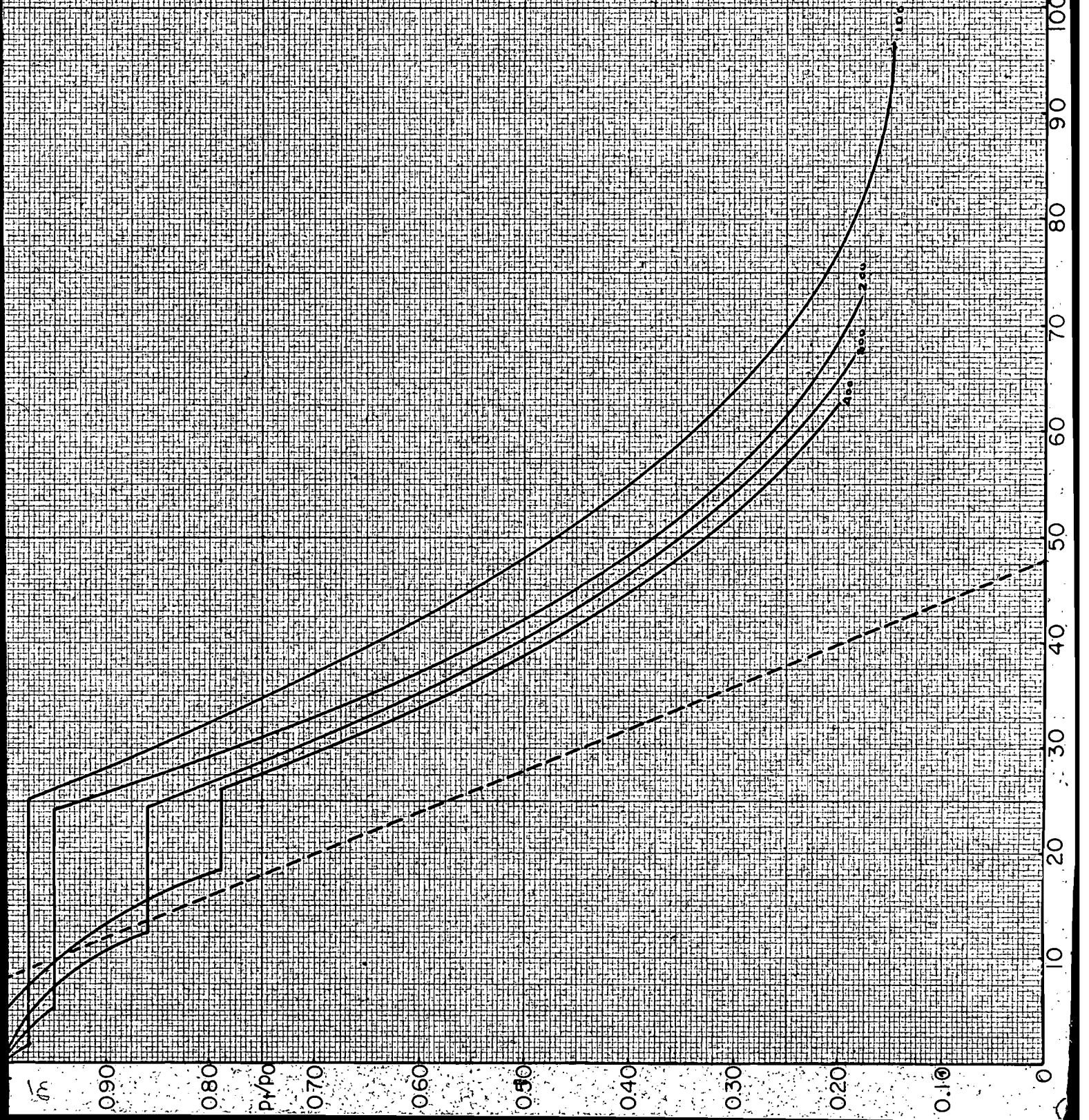


$f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$

$p = 0.02$

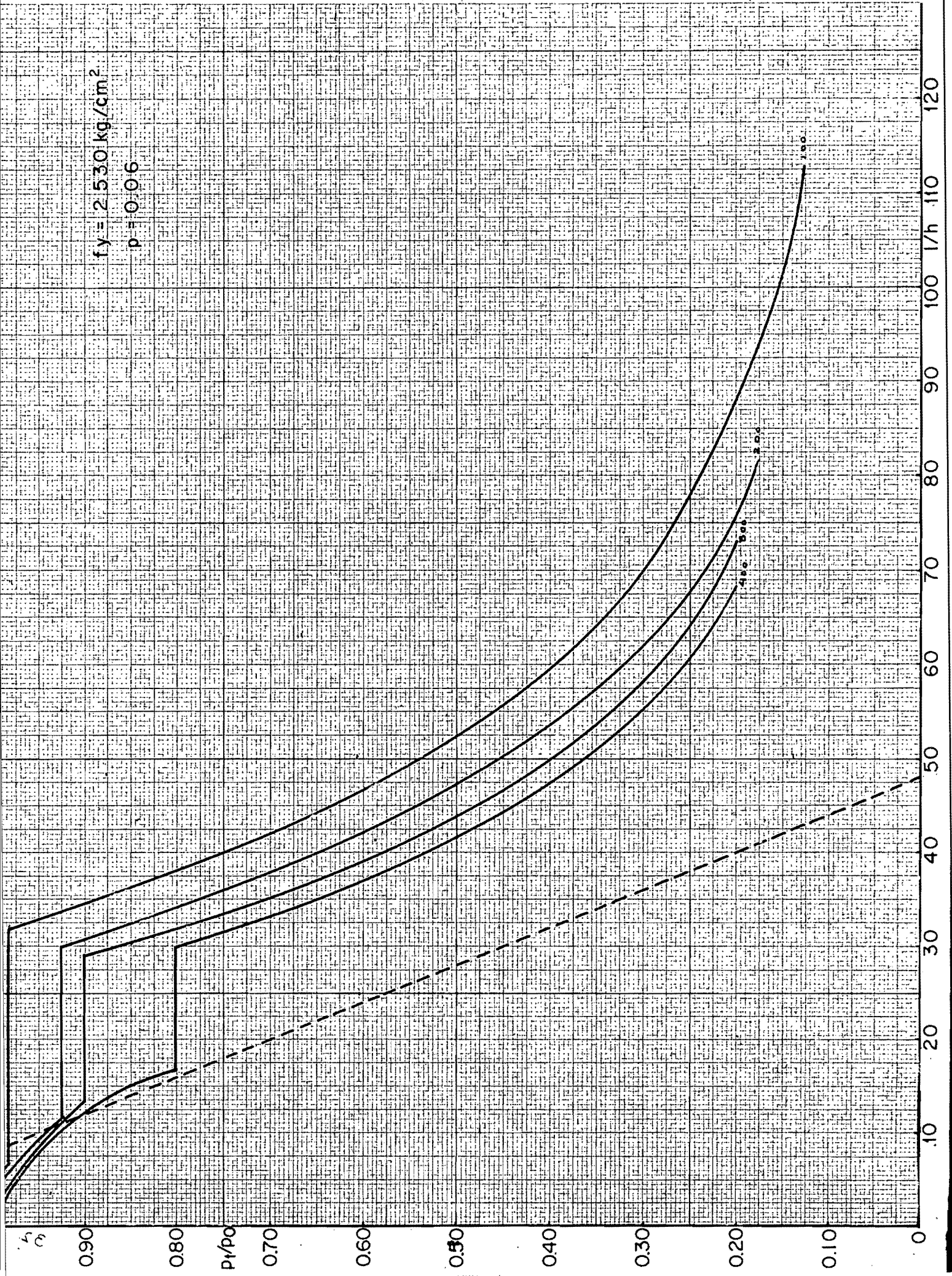


$r, \gamma = 2.530 \text{ kg/cm}^2$
 $p = 0.04$

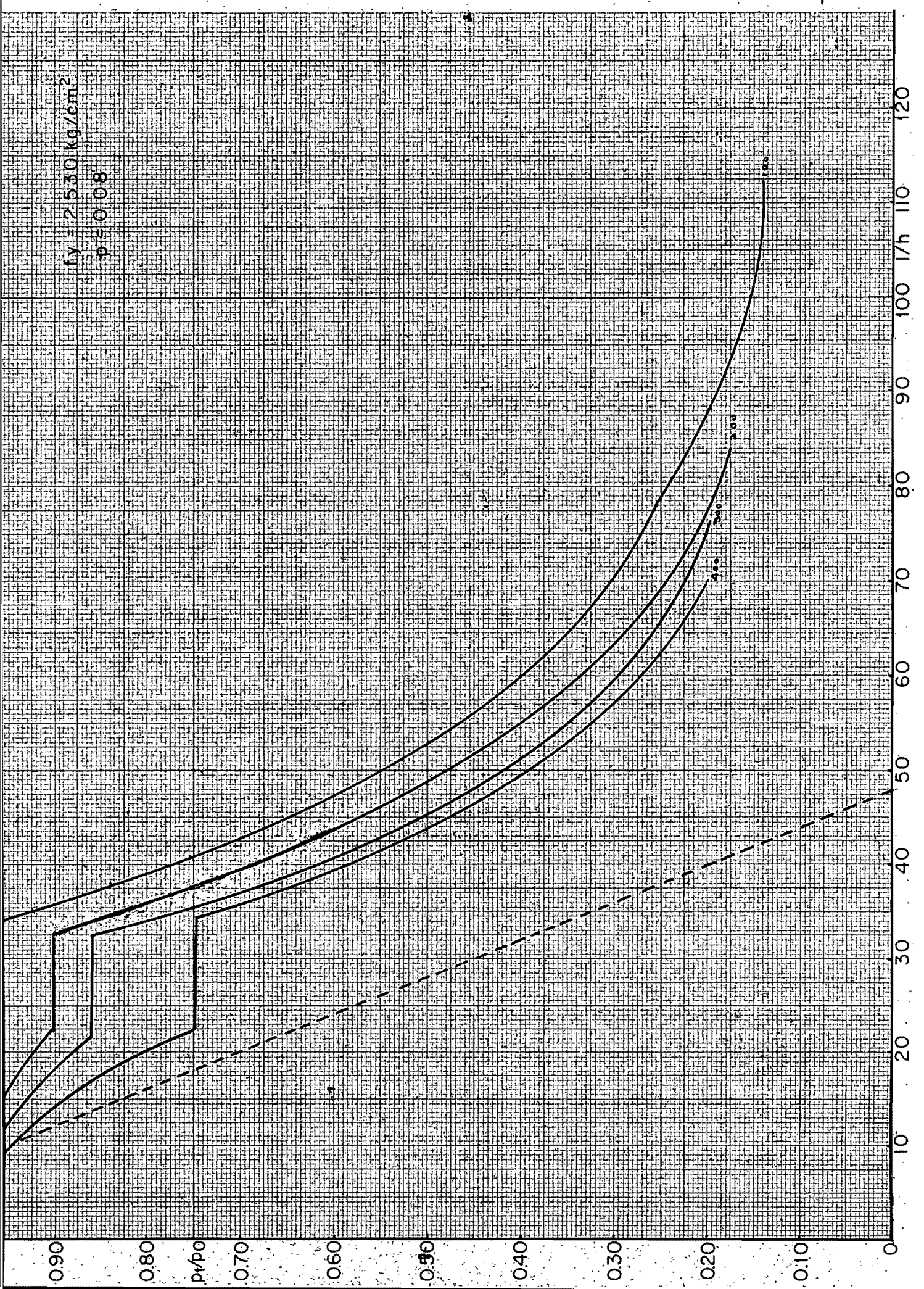


$f_y = 2.530 \text{ kg/cm}^2$

$\rho = 0.06$

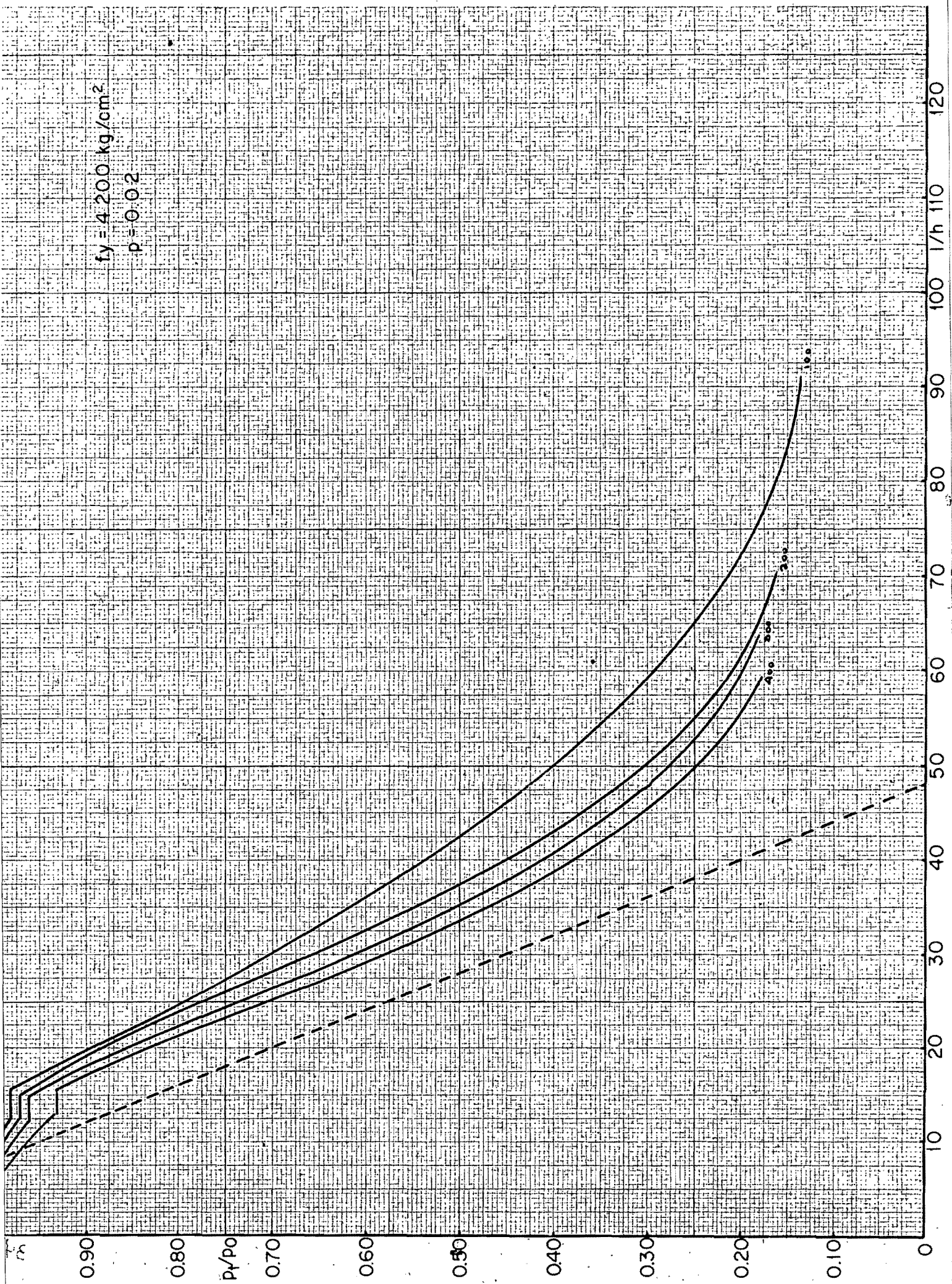


$\gamma = 2.530 \text{ kg/cm}^3$
 $\rho = 0.08$

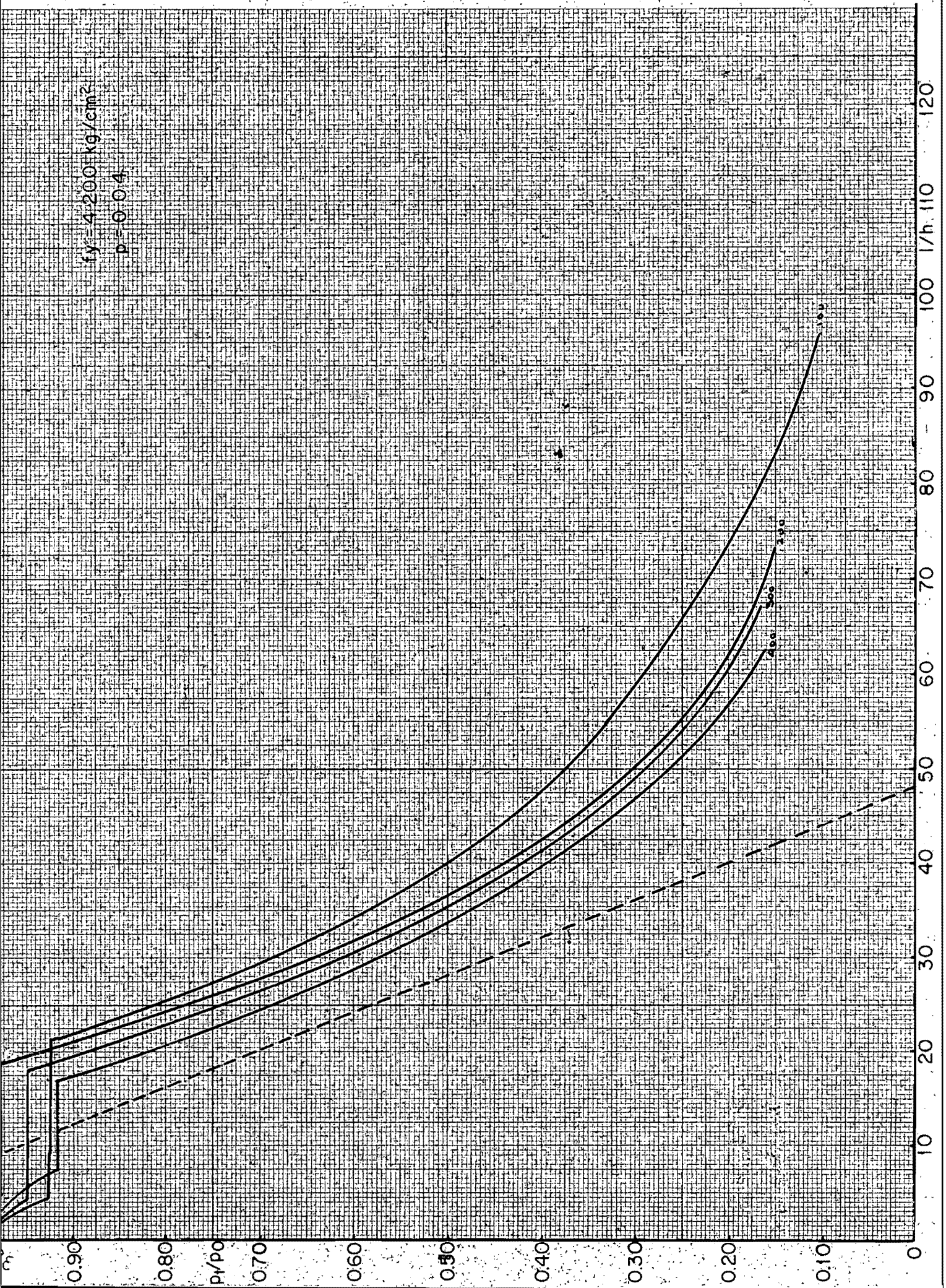


$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

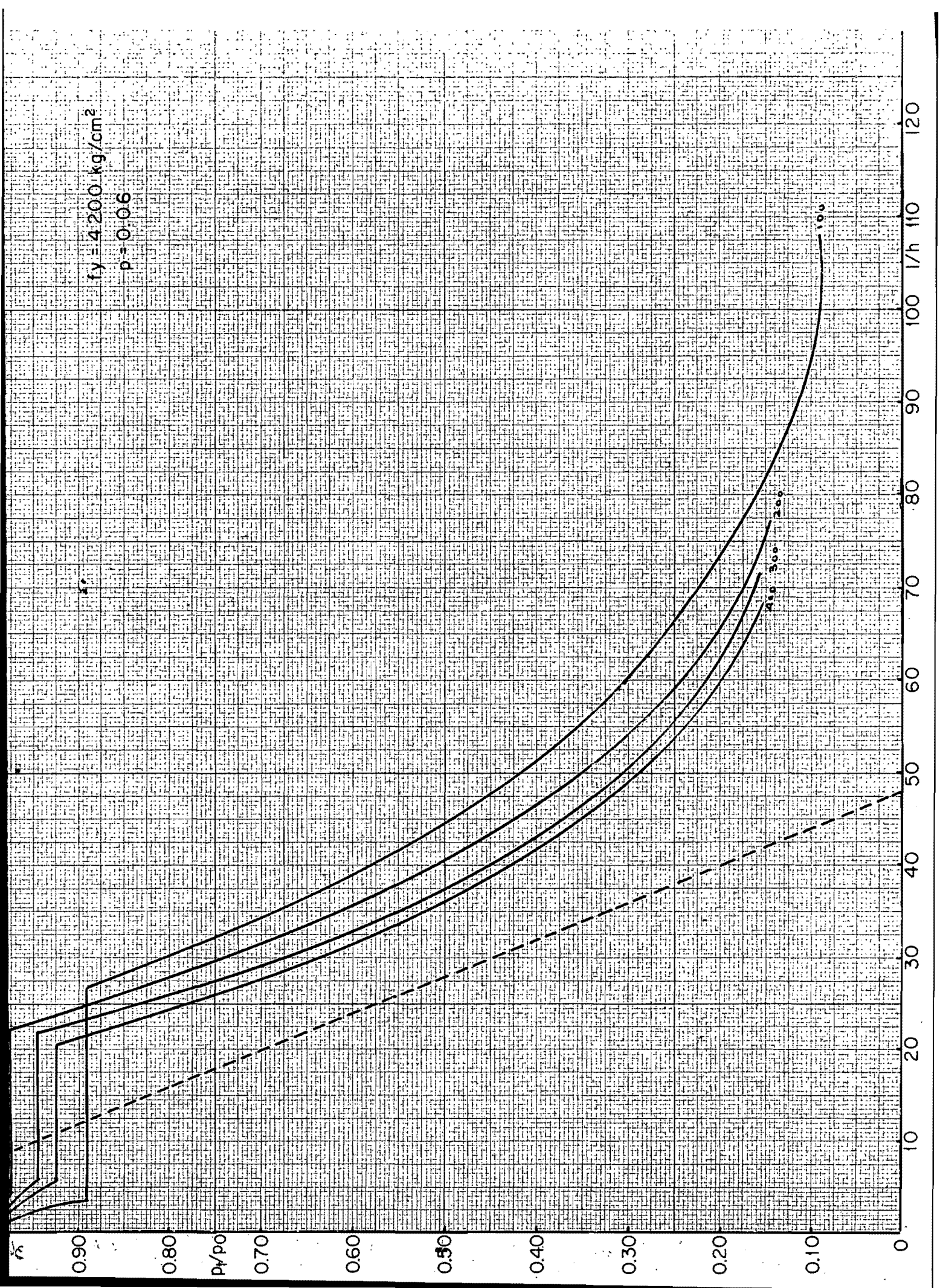
$\rho = 0.02$



$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 $\rho = 0.04$



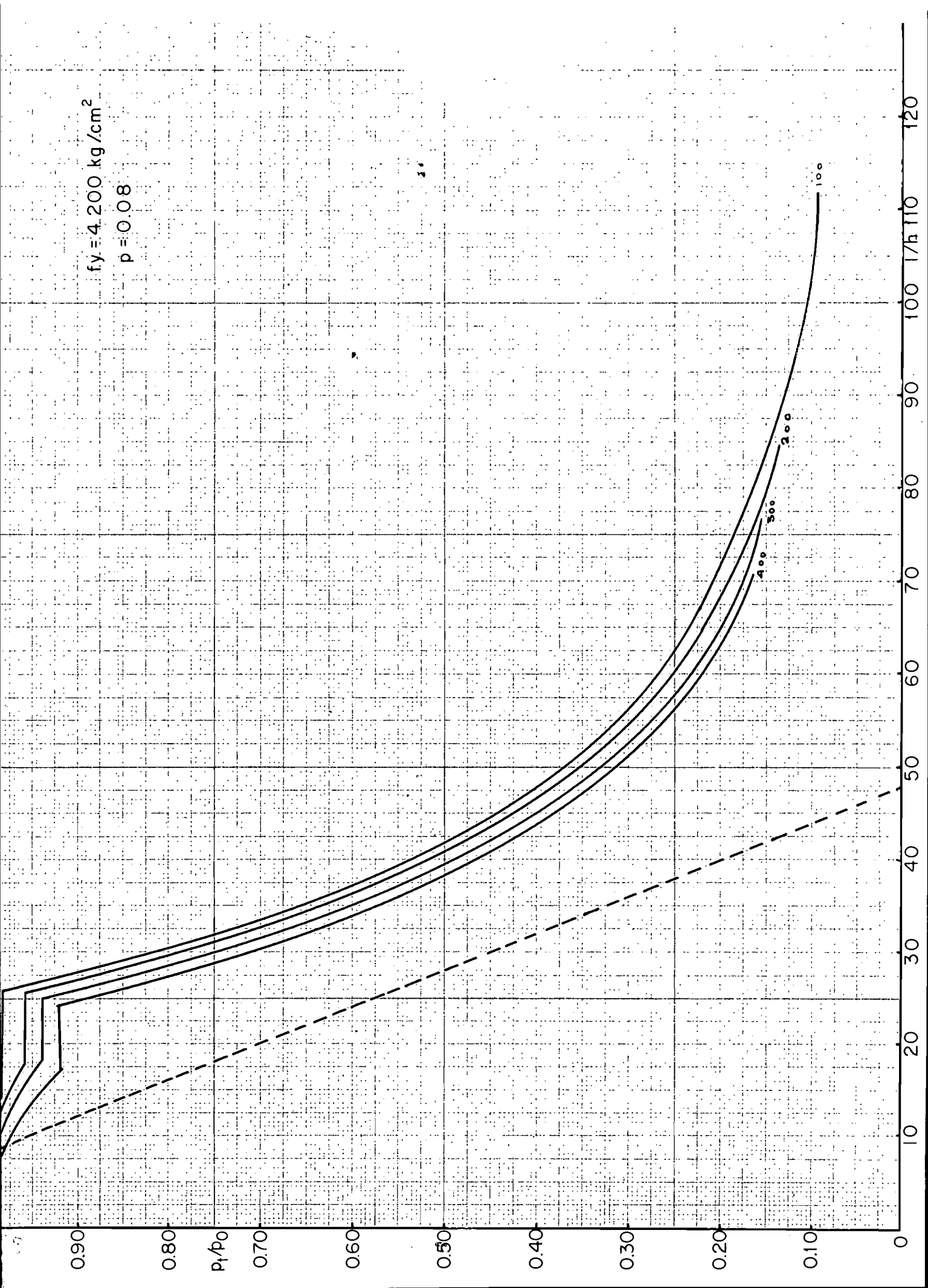
$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 $p = 0.06$



$f_y = 4.200 \text{ kg/cm}^2$

$p = 0.08$

3.



ACCIONES AXIALES DE LARGA DURACION

ν/e_0	$0.67 \nu/e_0$	$0.6 \nu/e_0$	$1+0.67(\nu/e_0)$	S	$[1+0.67 \nu/e_0]^2$	r	α
0.2	0.134	0.12	1.134	0.1058	1.285	0.7782	0.6818
0.4	0.268	0.24	1.264	0.1892	1.607	0.6222	0.7886
0.6	0.402	0.36	1.402	0.2567	1.955	0.5089	0.7132
0.8	0.536	0.48	1.536	0.3125	2.359	0.4426	0.6510
1	0.670	0.60	1.670	0.3592	2.788	0.3586	0.5988
1.2	0.804	0.72	1.804	0.3991	3.254	0.3073	0.5543
1.4	0.938	0.84	1.938	0.4334	3.755	0.2663	0.5159
1.6	1.072	0.96	2.072	0.4633	4.293	0.2329	0.4826
1.8	1.206	1.08	2.206	0.4895	4.866	0.2055	0.4533
2	1.340	1.20	2.340	0.5123	5.475	0.1826	0.4273
2.2	1.474	1.32	2.474	0.5335	6.120	0.1633	0.4042
2.4	1.608	1.44	2.608	0.5521	6.801	0.1470	0.3834
2.6	1.742	1.56	2.742	0.5689	7.518	0.1330	0.3646
2.8	1.876	1.68	2.876	0.5841	8.271	0.1209	0.3477
3	2.010	1.80	3.010	0.5980	9.060	0.1103	0.3322
3.5	2.345	2.10	3.345	0.6278	11.189	0.0893	0.2989
4	2.680	2.40	3.680	0.6521	13.542	0.0738	0.2717
10	6.700	6	7.700	0.7792	59.290	0.0168	0.1298
40	26.80	24	27.80	0.8633	772.840	0.0013	0.0359
80	53.60	48	54.60	0.8791	2982.160	0.0003	0.0183
∞				0.8955		0.0000	

Características de los materiales.

f''_c	100	200	300	400
ν_0	51600	65400	79,200	93,000
ν_e	1.1627×10^{-3}	1.9348×10^{-3}	2.2726×10^{-3}	2.5806×10^{-3}
ν_u	2.063×10^{-3}	3.44×10^{-3}	4.04×10^{-3}	4.59×10^{-3}
ν/e_0 330	1.035	0.622	0.529	0.466
ν/e_0 200	1.72	1.036	0.88	0.775
n	12.207	9.632	7.954	6.774

np

f''_c	100	200	300	400
0.2	0.5130	0.6421	0.5302	0.4516
0.4	1.5270	1.2842	1.0604	0.9032
0.6	2.4414	1.9263	1.5996	1.3548
0.8	3.2552	2.5694	2.1208	1.8064

$3(d''/h)^2 p n$

f''_c	100	200	300	400
$(0.8)^2$	1.5623	1.2326	1.013	0.867
$(0.8)^2$	3.1246	2.4652	2.036	1.734
$(0.9)^2$	4.5869	3.6978	3.054	2.601
$(0.9)^2$	6.2492	4.9304	4.072	3.468

L/h - Pt/P ₀ P=0								
f _c	100		200		300		400	
e/e ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀
0.2	53.82	0.1058	44.52	0.1058	39.81	0.1058	37.04	0.1058
0.4	37.49	0.1892	29.68	0.1892	26.54	0.1892	25.17	0.1892
0.6	28.90	0.2567	23.02	0.2567	20.72	0.2567	19.38	0.2567
0.8	24.51	0.3125	19.50	0.3125	17.48	0.3125	16.45	0.3125
1	20.49	0.3592	16.34	0.3592	14.67	0.3592	13.77	0.3592
1.2	18.02	0.3991	14.37	0.3991	12.91	0.3991	12.11	0.3991
1.4	16.17	0.4334	12.87	0.4334	11.53	0.4334	10.87	0.4334
1.6	14.58	0.4633	11.61	0.4633	10.41	0.4633	9.79	0.4633
1.8	13.30	0.4895	10.64	0.4895	9.51	0.4895	8.93	0.4895
2.0	12.27	0.5123	9.78	0.5123	8.75	0.5123	8.24	0.5123
2.2	11.39	0.5335	9.06	0.5335	8.14	0.5335	7.66	0.5335
2.4	10.62	0.5521	8.44	0.5521	7.60	0.5521	7.13	0.5521
2.6	9.92	0.5689	7.93	0.5689	7.09	0.5689	6.66	0.5689
2.8	9.37	0.5841	7.44	0.5841	6.68	0.5841	6.25	0.5841
3	8.83	0.5980	7.08	0.5980	6.32	0.5980	5.94	0.5980
3.5	7.76	0.6278	6.16	0.6278	5.52	0.6278	5.20	0.6278
4	6.96	0.6521	5.51	0.6521	4.95	0.6521	4.57	0.6521
10	3.02	0.7792	2.38	0.7792	2.14	0.7792	2.04	0.7792
40	0.80	0.8633	0.60	0.8633	0.58	0.8633	0.52	0.8633
80	0.26	0.8791	0.21	0.8791	0.20	0.8791	0.19	0.8791
∞	0	0.8955	0	0.8955	0	0.8955	0	0.8955

L/h - Pt/P ₀ P=0.02 f _y =2530 Kg/cm ²								
f _c	100		200		300		400	
e/e ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀
0.2	70.24	0.1353	54.17	0.1499	42.28	0.1455	44.64	0.1455
0.4	49.35	0.2821	37.84	0.2721	33.76	0.2716	31.08	0.2901
0.6	40.16	0.3664	30.74	0.4016	25.20	0.3657	16.04	0.3495
0.8	34.93	0.4591	14.58	0.4535	14.21	0.4134	13.99	0.4000
1	31.14	0.5354	12.61	0.4906	12.22	0.4532	11.94	0.4424
1.2	22.85	0.6037	11.33	0.5223	10.92	0.4873	10.64	0.4765
1.4	11.02	0.6263	10.27	0.5496	9.87	0.5163	9.62	0.5096
1.6	10.13	0.6460	9.39	0.5133	8.98	0.5420	8.74	0.5367
1.8	9.41	0.6633	8.67	0.5940	8.29	0.5644	8.02	0.5605
2	8.75	0.6783	8.07	0.6123	7.68	0.5638	7.44	0.5811
2.2	8.19	0.6923	7.51	0.6291	7.17	0.6019	6.94	0.6003
2.4	7.70	0.7045	7.04	0.6439	6.71	0.6178	6.47	0.6171
2.6	7.29	0.7156	6.65	0.6573	6.30	0.6321	6.11	0.6310
2.8	6.90	0.7257	6.28	0.6694	5.94	0.6451	5.75	0.6465
3	6.55	0.7348	5.93	0.6804	5.63	0.6569	5.44	0.6588
3.5	5.80	0.7565	5.26	0.7041	4.97	0.6823	4.78	0.6858
4	5.23	0.7705	4.70	0.7234	4.44	0.7031	4.28	0.7078
10	2.36	0.8543	2.11	0.8244	1.96	0.8116	1.82	0.8230
40	0.61	0.9098	0.51	0.8913	0.51	0.8833	0.47	0.8292
80	0.30	0.9202	0.24	0.9038	0.23	0.8968	0.22	0.9135
∞	0	0.9310	0	0.9158	0	0.9107	0	0.9233



DEPFI

		L/h		Pt/P ₀		P=0.04		F _y =2530	
f _c	100		200		300		400		
	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	
0.2	74.98	0.1595	37.51	0.1800	31.53	0.1762	47.85	0.1730	
4	52.73	0.2901	40.58	0.3455	37.25	0.3361	33.46	0.3283	
6	43.05	0.4220	33.39	0.5006	13.83	0.4499	13.96	0.4117	
8	37.29	0.5497	12.17	0.5497	12.30	0.4911	12.33	0.4558	
0	34.19	0.6650	16.78	0.5803	10.66	0.5257	10.70	0.4926	
2	9.66	0.7074	9.62	0.6066	9.64	0.5553	9.62	0.5244	
4	8.37	0.7241	8.85	0.6289	8.75	0.5806	8.71	0.5515	
6	8.24	0.7386	8.11	0.6484	7.98	0.6027	7.99	0.5751	
8	7.54	0.7514	7.51	0.6657	7.42	0.6222	7.32	0.5959	
0	7.21	0.7625	7.00	0.6806	6.91	0.6390	6.85	0.6140	
2	6.81	0.7728	6.58	0.6944	6.48	0.6547	6.38	0.6307	
4	6.36	0.7819	6.16	0.7066	6.07	0.6685	5.97	0.6455	
6	6.01	0.7901	5.82	0.7176	5.71	0.6809	5.58	0.6587	
8	5.68	0.7975	5.51	0.7276	5.41	0.6921	5.33	0.6708	
0	5.41	0.8042	5.21	0.7366	5.12	0.7024	5.03	0.6817	
5	4.79	0.8306	4.68	0.7561	4.51	0.7244	4.45	0.7053	
0	4.36	0.8606	4.17	0.7721	4.08	0.7423	4.09	0.7246	
0	1.99	0.8924	1.90	0.8553	1.81	0.8365	1.79	0.8252	
0	0.53	0.9334	0.51	0.9104	0.43	0.8987	0.47	0.8917	
0	0.25	0.9411	0.26	0.9207	0.02	0.9104	0.21	0.9042	
0	0	0.9490	0	0.9315	0	0.9225	0	0.9172	

		L/h		Pt/P ₀		P=0.06		F _y =2530 Kg/cm ²	
f _c	100		200		300		400		
	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	
2	76.42	0.1596	59.28	0.2015	53.59	0.2007	49.76	0.1984	
4	54.38	0.3106	41.74	0.3915	37.76	0.3869	34.90	0.3819	
6	44.29	0.4557	34.06	0.5723	12.17	0.5171	12.50	0.4711	
8	38.52	0.5962	10.62	0.6201	10.99	0.5535	11.20	0.5105	
0	34.40	0.7333	9.39	0.6460	9.64	0.5838	9.79	0.5438	
2	8.30	0.7709	8.53	0.6680	8.70	0.6097	8.90	0.5722	
4	7.64	0.7840	7.83	0.6870	7.93	0.6320	8.07	0.5966	
6	7.04	0.7874	7.23	0.7036	7.34	0.6469	7.38	0.6188	
8	6.61	0.8055	6.72	0.7181	6.78	0.6685	6.83	0.6366	
0	6.22	0.8142	6.23	0.7307	6.32	0.6833	6.33	0.6528	
2	5.85	0.8223	5.89	0.7424	5.92	0.6971	5.91	0.6679	
4	5.52	0.8294	5.56	0.7527	5.52	0.7092	5.58	0.6812	
6	5.23	0.8354	5.19	0.7620	5.25	0.7201	5.25	0.6931	
8	4.98	0.8417	4.96	0.7704	4.97	0.7300	4.97	0.7040	
0	4.73	0.8470	4.73	0.7781	4.72	0.7391	4.72	0.7139	
5	4.24	0.8584	4.19	0.7946	4.18	0.7584	4.20	0.7351	
0	3.83	0.8677	3.89	0.8080	3.77	0.7742	3.76	0.7524	
0	1.77	0.9163	1.62	0.8783	1.70	0.8568	1.68	0.8429	
0	0.45	0.9485	0.46	0.9249	0.43	0.9115	0.41	0.9026	
0	0.23	0.9545	0.22	0.9336	0.20	0.9218	0.19	0.9141	
0	0	0.9608	0	0.9427	0	0.9324	0	0.9288	

		L/h - Pt/P ₀				P=0.08		F _y =2530kg/cm ²	
f _c	100		200		300		400		
e ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	
0.2	72.28	0.1657	60.29	0.2185	54.61	0.2205	50.89	0.2217	
0.4	55.20	0.3242	43.13	0.4265	38.79	0.4283	36.88	0.4113	
0.6	45.11	0.4782	34.76	0.6268	30.97	0.5711	21.36	0.5240	
0.8	39.14	0.6284	9.55	0.6726	9.97	0.6833	10.34	0.5603	
1.0	35.02	0.7756	8.41	0.6948	8.95	0.6093	9.04	0.5906	
1.2	7.33	0.8121	7.72	0.7138	7.98	0.6532	8.21	0.6165	
1.4	6.85	0.8229	7.11	0.7301	7.32	0.6730	7.49	0.6383	
1.6	6.34	0.8322	6.58	0.7444	6.81	0.6903	6.91	0.6583	
1.8	5.93	0.8404	6.16	0.7568	6.27	0.7054	6.41	0.6753	
2.0	5.58	0.8475	5.75	0.7677	5.89	0.7186	5.97	0.6901	
2.2	5.23	0.8542	5.40	0.7778	5.51	0.7308	5.58	0.7038	
2.4	4.96	0.8600	5.12	0.7866	5.18	0.7415	5.25	0.7160	
2.6	4.69	0.8652	4.82	0.7946	4.95	0.7512	4.95	0.7268	
3.0	4.26	0.8743	4.35	0.8085	4.71	0.7680	4.50	0.7458	
3.5	3.81	0.8836	3.87	0.8227	4.53	0.7852	3.98	0.7651	
4.0	3.46	0.8912	3.57	0.8343	3.52	0.7992	3.54	0.7809	
5.0	1.60	0.9309	1.60	0.8948	1.60	0.8725	1.63	0.8635	
6.0	0.41	0.9579	0.39	0.9348	0.38	0.9211	0.38	0.9132	
8.0	0.23	0.9621	0.21	0.9423	0.20	0.9302	0.19	0.9284	
10.0	0	0.9673	0	0.9502	0	0.9396	0	0.9391	

		L/h - Pt/P ₀				P=0.02		F _y =4200kg/cm ²	
f _c	100		200		300		400		
e ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	
0.2	70.24	0.1103	54.03	0.1318	48.28	0.1325	44.56	0.1353	
0.4	49.31	0.2087	37.82	0.2481	33.66	0.2478	31.93	0.2519	
0.6	40.14	0.2984	30.68	0.3553	27.35	0.3507	25.19	0.3500	
0.8	34.89	0.3821	26.64	0.4502	23.81	0.4445	12.80	0.4426	
1.0	31.10	0.4606	23.60	0.5408	11.12	0.5610	11.03	0.4819	
1.2	28.46	0.5356	9.83	0.5785	9.87	0.5320	9.90	0.5155	
1.4	26.45	0.6076	9.27	0.6026	8.82	0.5586	8.90	0.5443	
1.6	24.80	0.6771	8.34	0.6233	8.26	0.5819	8.17	0.5694	
1.8	8.11	0.7233	7.69	0.6417	7.63	0.6022	7.52	0.5914	
2.0	7.60	0.7357	7.32	0.6576	7.06	0.6197	6.99	0.6106	
2.2	6.83	0.7491	6.79	0.6724	6.66	0.6364	6.50	0.6284	
2.4	6.50	0.7571	6.40	0.6854	6.20	0.6503	6.11	0.6440	
2.6	6.18	0.7661	6.05	0.6972	5.81	0.6639	5.72	0.6582	
2.8	6.01	0.7743	5.68	0.7078	5.83	0.6757	7.39	0.6709	
3.0	5.70	0.7817	5.38	0.7175	5.23	0.6865	5.17	0.6826	
3.5	5.10	0.7978	4.82	0.7383	4.64	0.7097	4.53	0.7076	
4.0	4.55	0.8108	4.33	0.7553	4.15	0.7285	4.01	0.7281	
5.0	2.10	0.8791	1.94	0.8442	1.86	0.8273	1.82	0.8349	
6.0	1.73	0.9243	0.51	0.9029	0.43	0.8927	0.47	0.9056	
8.0	0.84	0.9328	0.28	0.9140	0.26	0.9049	0.25	0.9134	
10.0	0	0.9416	0	0.9254	0	0.917	0	0.9326	

		L/h - Pt/P ₀				P = 0.04		f _y = 4200 Kg/cm ²	
f _c	100		200		300		400		
e ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	
0.2	74.57	0.1120	57.47	0.1460	51.57	0.1501	47.82	0.1517	
0.4	52.50	0.2160	40.46	0.2808	36.36	0.2863	33.60	0.2880	
0.6	43.01	0.3142	32.99	0.4068	29.66	0.4125	27.38	0.4133	
0.8	37.35	0.4082	28.68	0.5266	25.77	0.5312	10.84	0.5207	
1	33.53	0.4951	25.60	0.6415	9.26	0.5982	9.51	0.5531	
1.2	30.54	0.5871	9.20	0.6779	8.39	0.6193	8.54	0.5808	
1.4	28.38	0.6733	7.55	0.6962	7.68	0.6409	7.80	0.6045	
1.6	26.62	0.7576	6.98	0.7121	7.09	0.6598	7.16	0.6253	
1.8	6.34	0.8118	6.49	0.7261	6.58	0.6763	6.63	0.6435	
2	5.97	0.8200	6.07	0.7382	6.12	0.6907	6.19	0.6594	
2.2	5.62	0.8277	5.70	0.7494	5.74	0.7040	5.98	0.6740	
2.4	5.31	0.8341	5.38	0.7594	5.41	0.7158	5.42	0.6870	
2.6	5.00	0.8405	5.07	0.7683	5.03	0.7260	5.11	0.6986	
2.8	4.73	0.8460	4.80	0.7764	4.83	0.7359	4.84	0.7090	
3	4.55	0.8511	4.56	0.7838	4.59	0.7447	4.59	0.7188	
3.5	4.07	0.8519	4.08	0.7996	4.08	0.7535	4.09	0.7385	
4	3.68	0.8507	3.66	0.8126	3.67	0.7788	3.67	0.7564	
10	1.70	0.9160	1.69	0.8802	1.68	0.859	1.65	0.8446	
40	0.45	0.947	0.44	0.9249	0.43	0.9120	0.44	0.9030	
80	0.28	0.953	0.26	0.9334	0.25	0.9219	0.23	0.9140	
∞	0	0.958	0	0.9421	0	0.9322	0	0.9254	

		L/h - Pt/P ₀				P = 0.06		f _y = 4200 Kg/cm ²	
f _c	100		200		300		400		
e ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	
0.2	76.87	0.1130	59.20	0.1555	53.54	0.1626	49.62	0.1665	
0.4	54.30	0.2199	41.81	0.2015	37.76	0.2135	34.98	0.2197	
0.6	44.37	0.3226	34.08	0.3408	30.85	0.3560	28.48	0.3633	
0.8	38.25	0.4221	29.61	0.4551	26.77	0.45924	9.57	0.45872	
1	34.16	0.5191	26.40	0.5055	8.11	0.5599	8.40	0.6151	
1.2	31.42	0.6171	7.09	0.5811	7.40	0.6809	7.63	0.6389	
1.4	27.08	0.7079	6.53	0.6537	6.81	0.6989	6.99	0.6594	
1.6	24.80	0.8004	6.07	0.7685	6.25	0.7147	6.47	0.6773	
1.8	5.39	0.8582	5.65	0.7797	5.84	0.7285	6.00	0.6929	
2	5.08	0.8644	5.31	0.7894	5.46	0.7405	5.58	0.7066	
2.2	4.77	0.8701	4.98	0.7984	5.11	0.7517	5.25	0.7192	
2.4	4.53	0.8752	4.70	0.8063	4.84	0.7615	4.95	0.7303	
2.6	4.30	0.8797	4.47	0.8135	4.55	0.7703	4.67	0.7404	
2.8	4.07	0.8839	4.24	0.8200	4.33	0.7783	4.39	0.7495	
3.0	3.89	0.8876	4.03	0.8259	4.13	0.7857	4.20	0.7578	
3.5	3.48	0.8957	3.59	0.8386	3.90	0.8014	3.73	0.7756	
4	3.17	0.9023	3.24	0.8489	3.31	0.8178	3.37	0.7901	
10	1.48	0.9367	1.50	0.9031	1.53	0.8811	1.52	0.8661	
40	0.42	0.9547	0.41	0.9320	0.35	0.9255	0.38	0.9163	
80	0.19	0.9637	0.18	0.9457	0.18	0.9327	0.18	0.9257	
∞	0	0.9682	0	0.9527	0	0.9424	0	0.9353	

L/h - Pt/P₀

P = 0.08

F_y = 4200 Kg/cm²

f _c	100		200		300		400	
	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀	L/h	Pt/P ₀
2	78.17	0.1135	60.29	0.1619	54.68	0.1719	50.83	0.1790
4	55.22	0.2223	42.57	0.3159	38.61	0.3339	36.52	0.3320
6	45.33	0.3277	34.73	0.4643	31.49	0.4887	29.26	0.5053
8	39.16	0.4306	30.14	0.6086	27.35	0.6382	8.65	0.6428
	35.02	0.5325	26.94	0.7497	7.40	0.6928	7.66	0.6672
2	31.97	0.6310	6.35	0.7818	6.68	0.7270	6.97	0.6881
4	29.70	0.7292	5.86	0.7969	6.17	0.7423	6.41	0.7062
5	27.68	0.8265	5.44	0.8075	5.71	0.7559	5.91	0.7218
8	4.77	0.8869	5.10	0.8167	5.33	0.7677	5.50	0.7356
	4.49	0.8913	4.77	0.8248	4.97	0.7780	5.17	0.7476
2	4.24	0.8963	4.49	0.8322	4.64	0.7875	4.84	0.7587
4	4.01	0.9003	4.24	0.8368	4.41	0.7958	4.56	0.7689
5	3.81	0.9039	4.01	0.8447	4.18	0.8034	4.31	0.7772
8	2.62	0.9071	3.82	0.8501	3.98	0.8102	4.09	0.7852
	3.50	0.9101	3.64	0.8550	3.77	0.8165	3.90	0.7925
5	3.09	0.9165	3.24	0.8655	3.36	0.8299	3.45	0.8080
	2.80	0.9217	2.94	0.8741	3.06	0.8408	3.15	0.8209
	1.31	0.9489	1.36	0.9189	1.40	0.8980	1.41	0.8875
	0.37	0.9669	0.35	0.9486	0.33	0.9358	0.38	0.9316
	0.18	0.9703	0.16	0.9541	0.16	0.9429	0.15	0.9399
	0	0.9738	0	0.9599	0	0.9503	0	0.9485

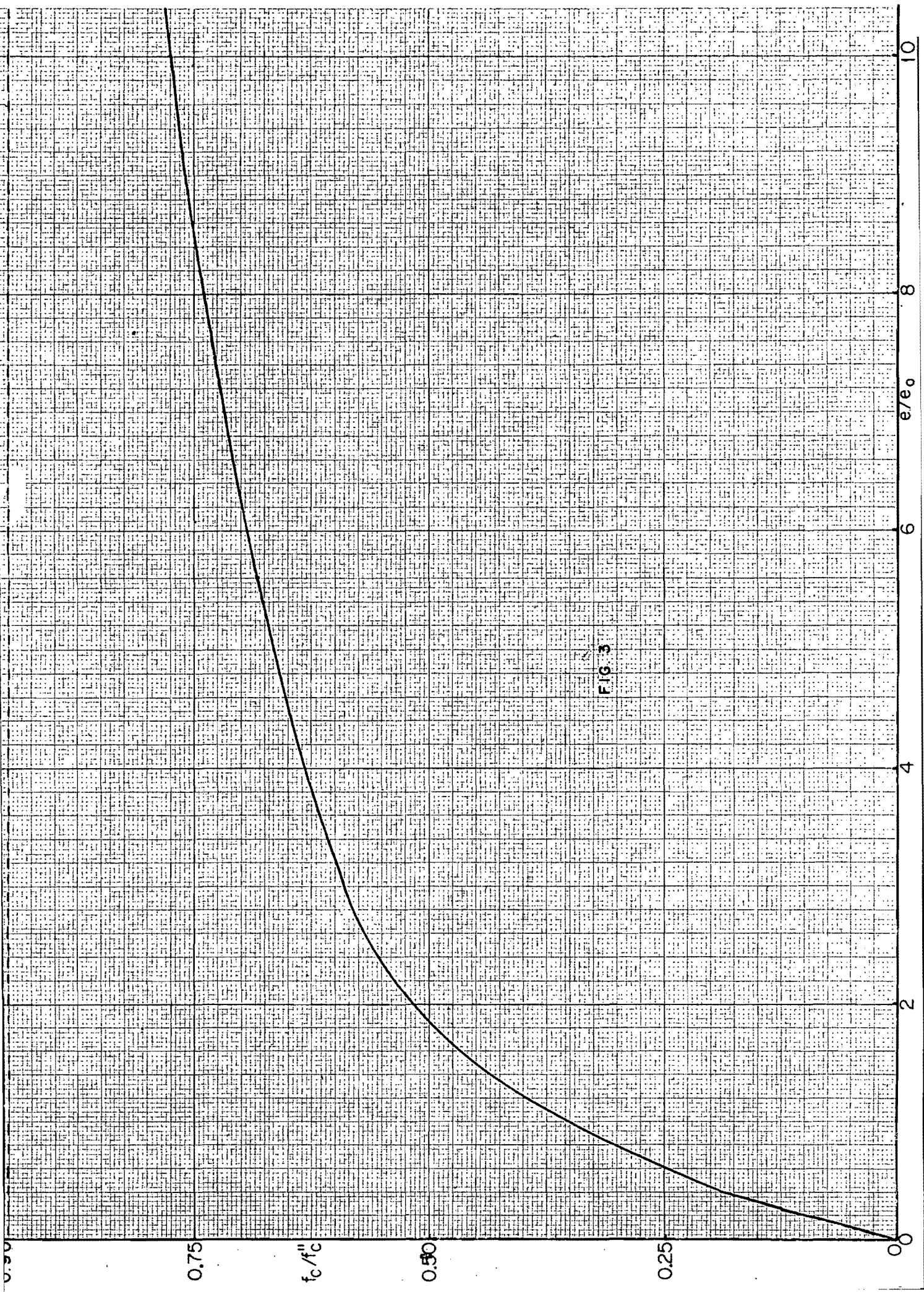
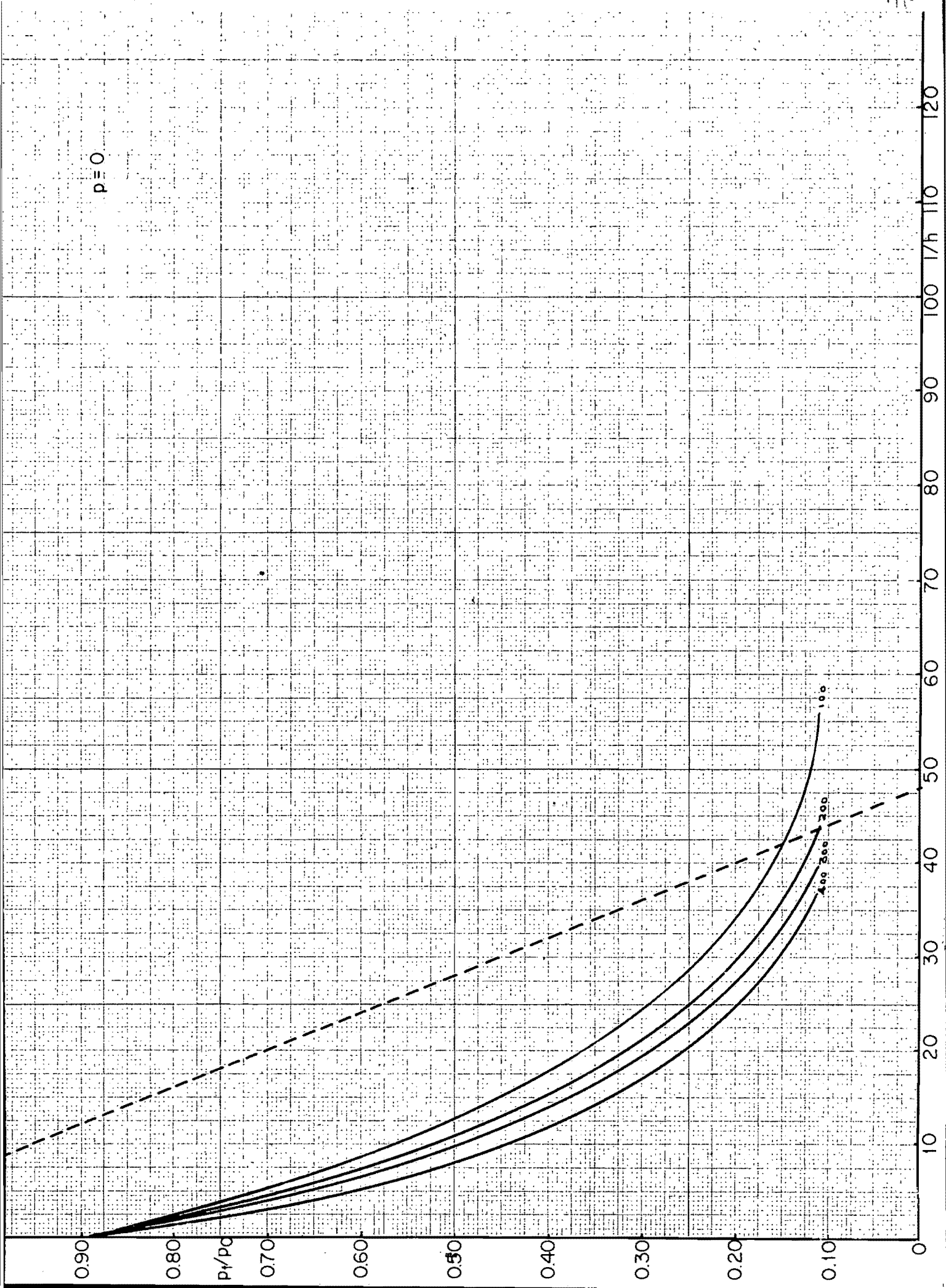
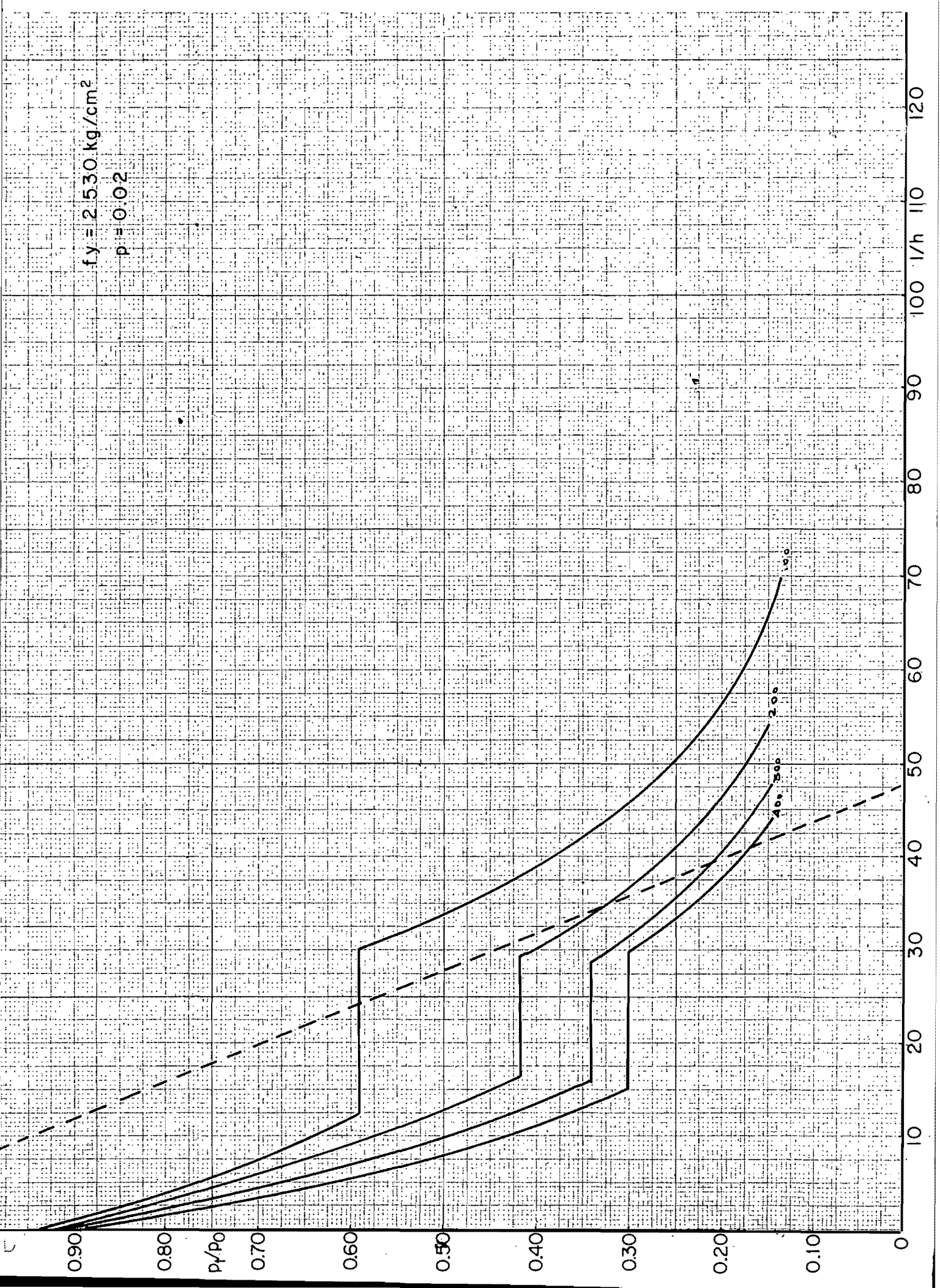


FIG. 3



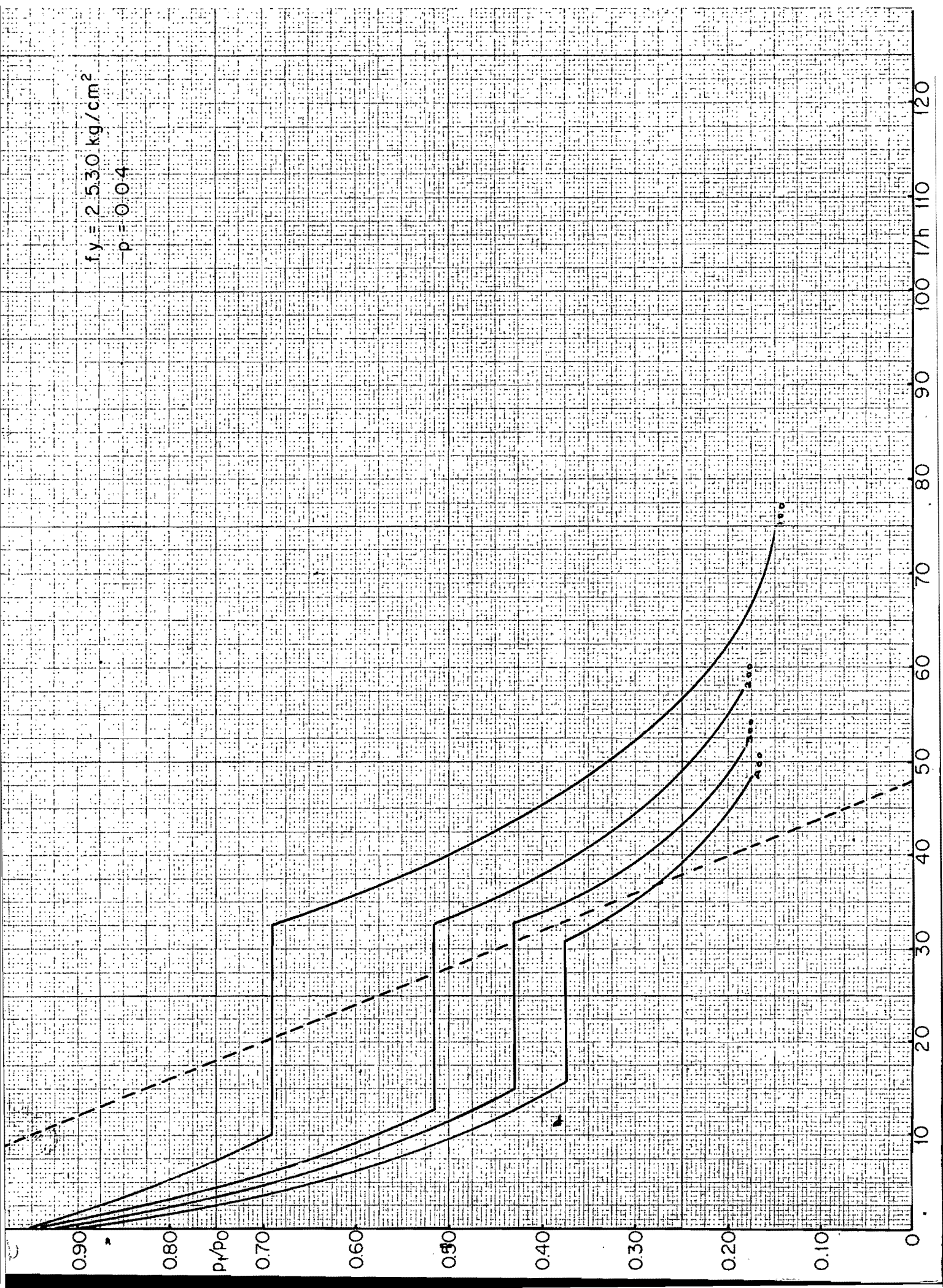
$f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$

$\rho = 0.02$



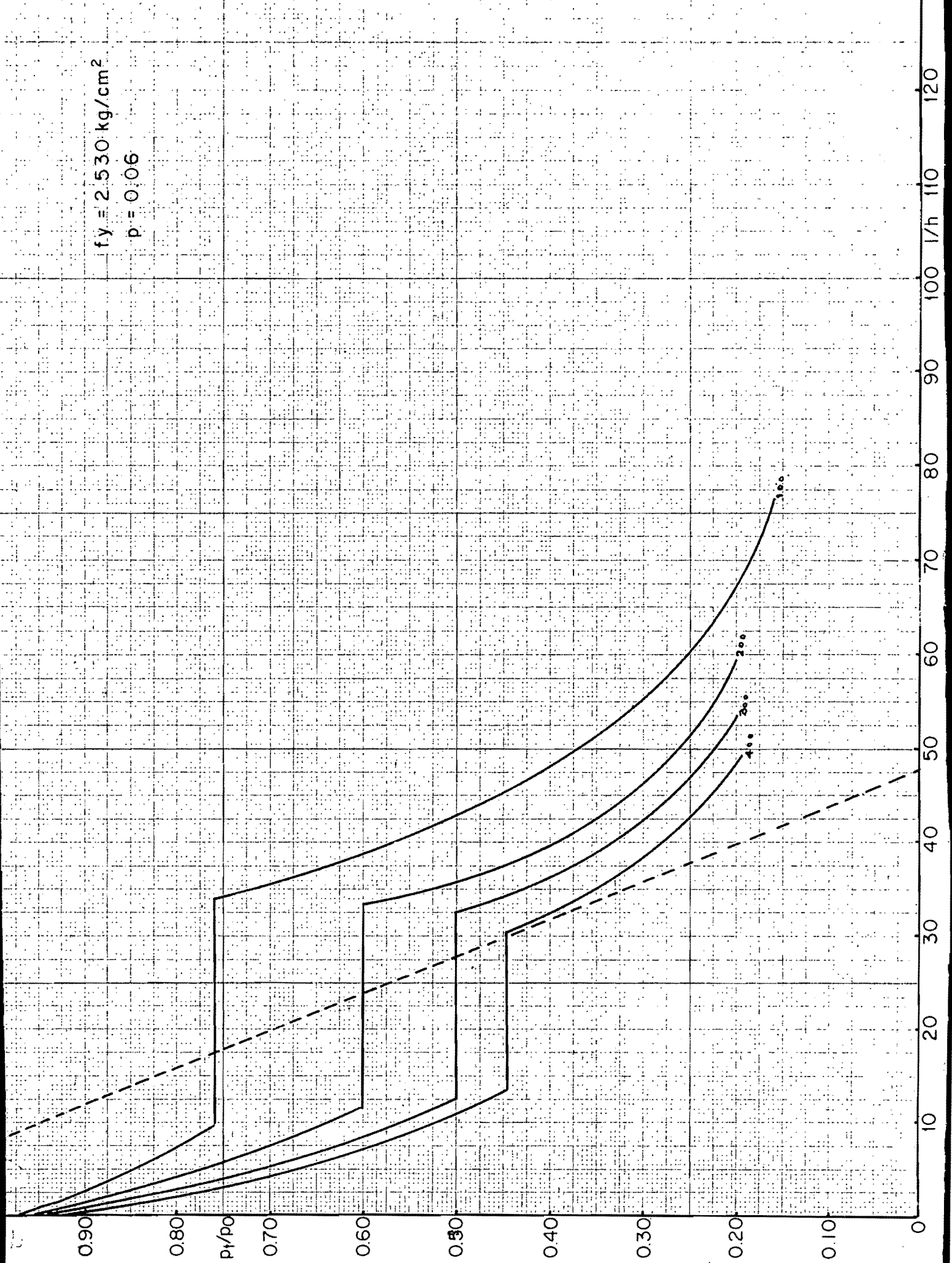
$f_y = 2.530 \text{ kg/cm}^2$

$p = 0.04$



$f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$

$p = 0.06$



0.90

0.80

p_i/p_0

0.70

0.60

0.50

0.40

0.30

0.20

0.10

0

10

20

30

40

50

60

70

80

90

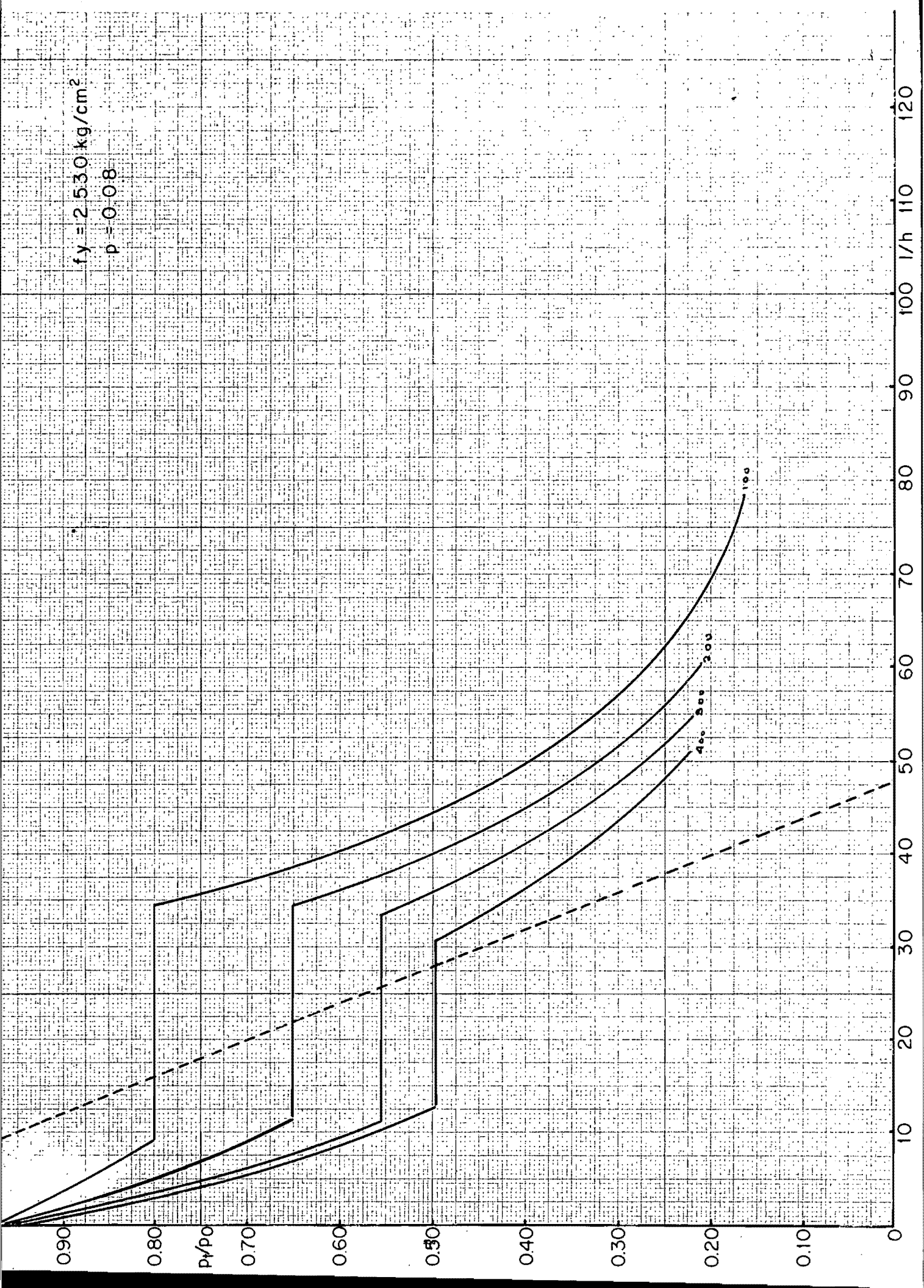
100

110

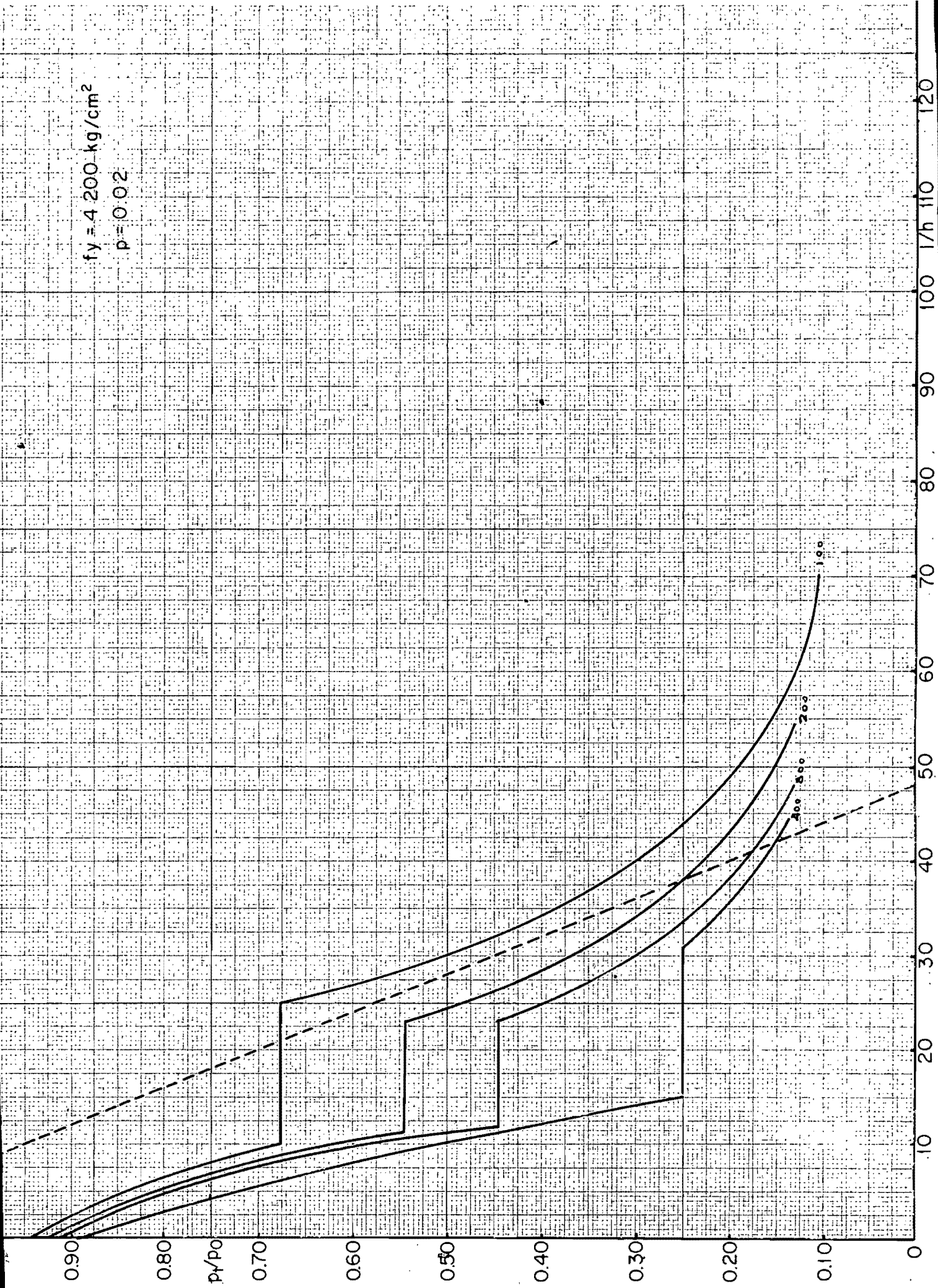
120

l/h

$f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$
 $p = 0.08$

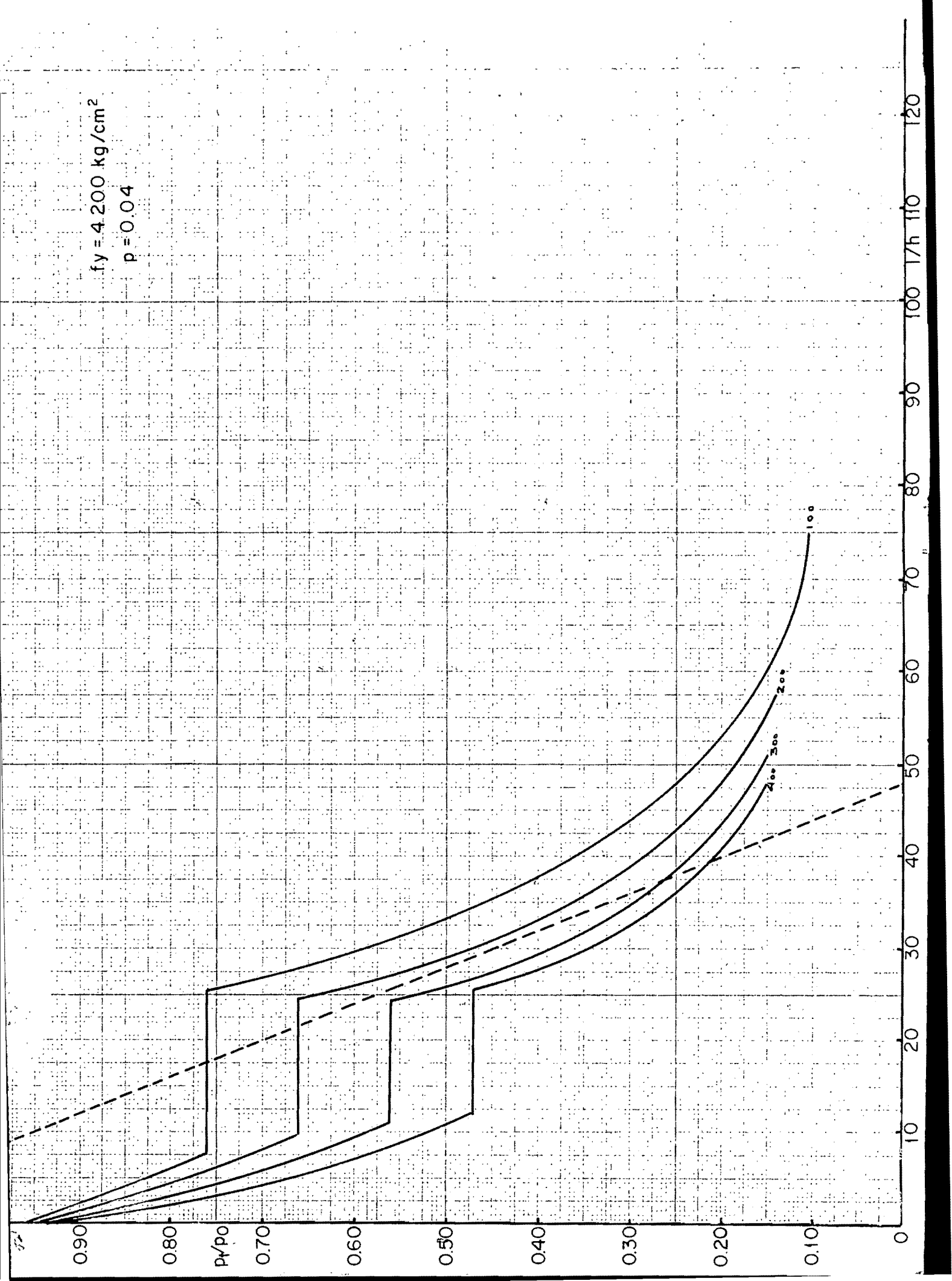


$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
 $\rho = 0.02$



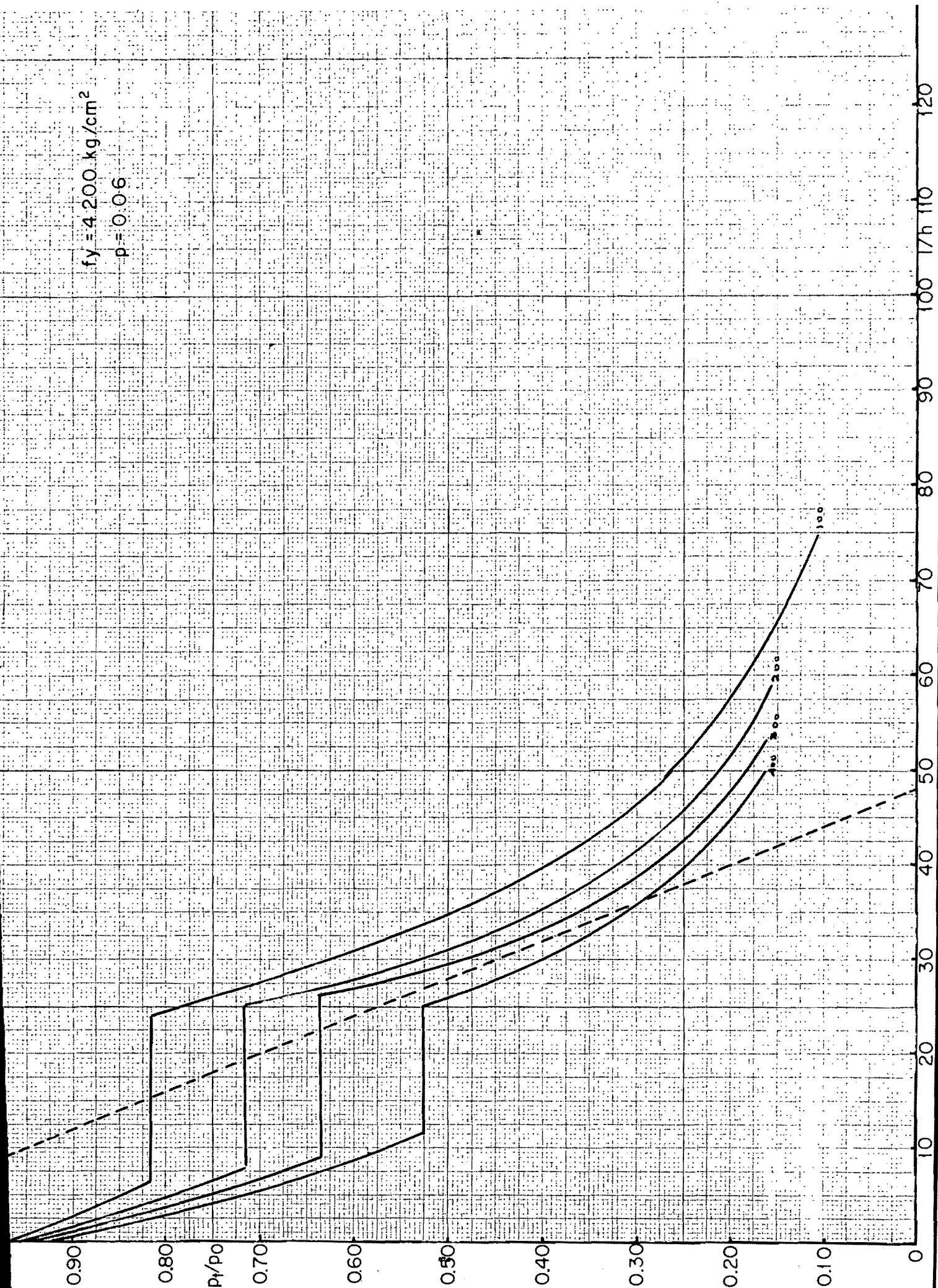
$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$p = 0.04$



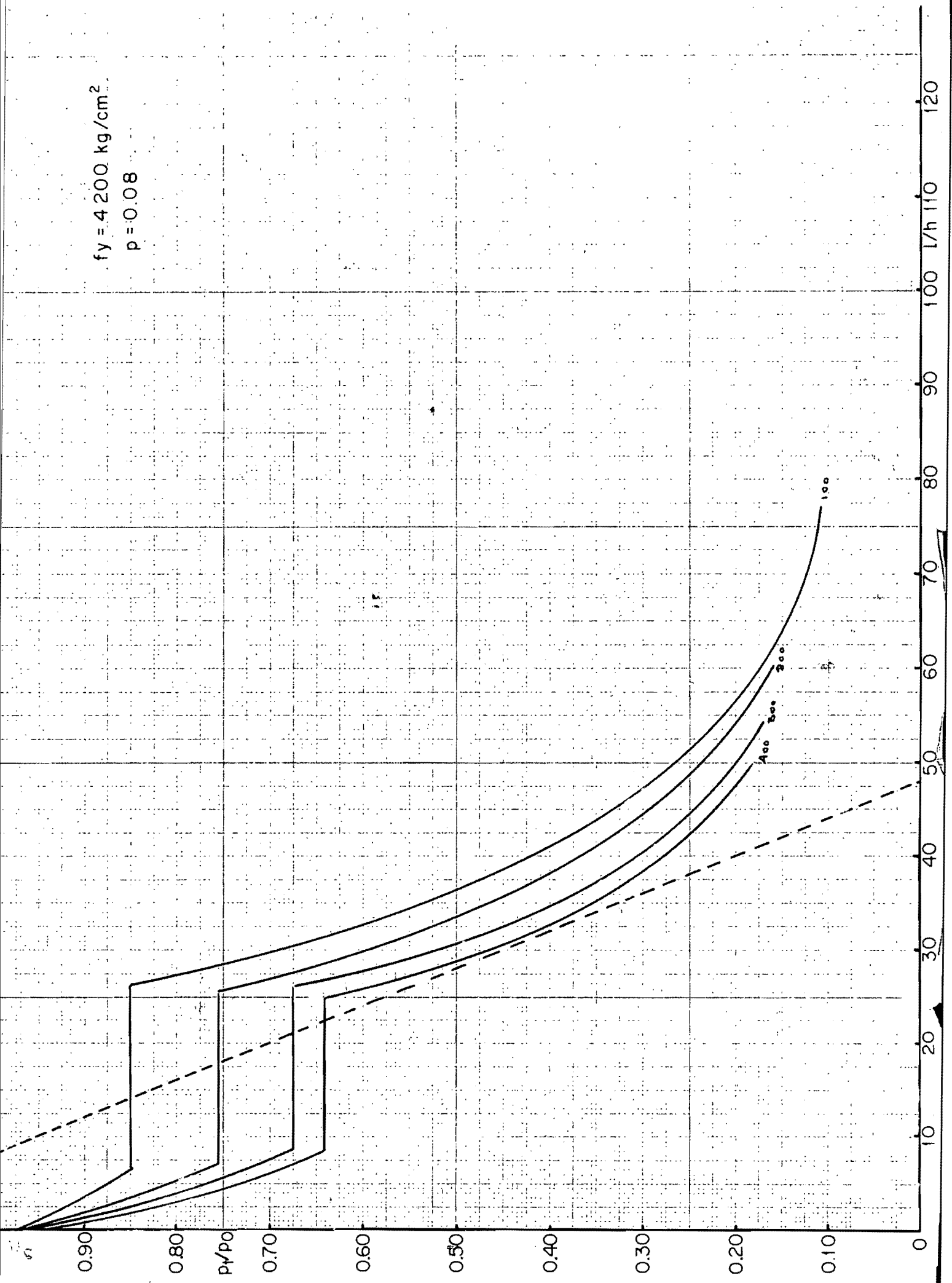
$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$\rho = 0.06$



$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$p = 0.08$



Referencias

1. P. Desayi-S. Krishnan, "Equation for stress-strain curve of concrete". Jour. ACI III 64.
2. J. J. Hromádk, "Strength of long piles of concrete" Jour. ACI V 64.
3. Luis Saénz--L. Martín, "Pruebas de columnas esbeltas de concreto reforzado". Jour. ACI V 63.
4. Beng Broms, D. J. Lee, "Discusión del trabajo anterior" Jour. ACI XII 63.
5. John Breen, Phil Ferguson, "Columnas largas de concreto restringidas en sus extremos formando parte de un marco rectangular". Jour. ACI V 64.
6. Blakey, F. A. "A theory of deflection of reinforced beam concrete under short-term load". Mag. of Concrete 7.
7. Den Hartog, "Advanced Strength of Materials". John Wiley & Sons, Inc.
8. Broms-Viest, "Design of long reinforced concrete columns" Boletín # 11 del R.C.R.C.
9. S. Timoshenko, "Theory of Elastic Stability". Mc Graw Hill Book Company
10. Roger Díaz de Cossío, "Notas de Comportamiento de Concreto" Sobretiros Revista IMCYC.
11. A. C. Lienenberg, "A stress-strain function for concrete subjected to short-term loading" Magaz. of Concrete # 41.
12. F. Bleich, "Buckling strength of metal structures" Mc Graw Hill Book Company.
13. H. Rüsck, "Researches toward a general flexural theory for structural concrete". Jour. ACI VI 60.
14. M. T. Davisson, "Estimating Buckling loads for piles" Bol. Illinois University