"PLANTEAMIENTO METODOLOGICO DE SERIES DE EJERCICIOS DE MATERIAS BASICAS A NIVEL LICENCIATURA. EJERCICIOS"

GABRIEL VENTURA SUAREZ

TRABAJO

Presentada a la División de Estudios de

Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA

(Estructuras)

CIUDAD UNIVERSITARIA 1988

SINTESIS

Este trabajo se propone presentar las soluciones de las Series de la materia de "Mecánica II" que se imparte a nivel Licenciatura en nuestra Facultad de Ingeniería, para que los educandos tengan un apoyo en su proceso de aprendizaje lo más confiable posible. Algunos errores presenta dicha obra a nivel de soluciones claras y precisas, impidiendo al estudiante un aprendizaje confiable al encontrarse en constante duda por no poder cotejar su solución de cada problema con la respuesta que muestra el libro como adecuada.

Quepa la aclaración de que las Series y su resolución no han de tomarse como el único y absoluto material de estudio, se trata,solamente,de un apoyo ya que la Mecánica debe de aprenderse desde el punto de vista experimental y teórico, lo cual se explicita en el primer capítulo. Los conceptos epistemológicos (que nos permite conocer con certeza y claridad) y casuísticos (que su conocimiento exige una causa) sólo se pueden llevar a cabo en la medida en que el educando tiene una "necesidad de medir". Cuando el educando comprenda esta urgencia, sólo entonces podrá comprender con certeza los conceptos de Mecánica y usar adecuadamente sus axiomas y principios.

INDICE

LISTA DE SIMBOLOS

$\bar{\alpha}$	Aceleración Angular
$\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$	Acelerante Angular
$\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ $\frac{\delta}{\delta x}$, $\frac{\delta}{\delta y}$, $\frac{\delta}{\delta z}$	Derivación
h	Altura
I_o	Momento de Inercia con respecto a un eje que pasa por o
$\bar{I}_{XX}$	Momento de Inercia Centroidal con respecto al eje XX
$\bar{i}$	Vector unitario
$\bar{I}$	Vector unitario con respecto a un eje móvil (no lleva subíndice)
$\bar{j}$	Vector unitario
$\bar{J}$	Vector unitario con respecto a un eje móvil
$\bar{k}$	Vector unitario
$\bar{K}$	Vector unitario con respecto a un eje móvil
l	Longitud
m	Masa
$\bar{N}$	Fuerza normal
$\bar{e}_N$	Vector unitario en la dirección normal
$\bar{\omega}$	Velocidad angular
P_{xY}	Producto de Inercia
$\bar{r}_{A/B}$	Vector de posición de A con respecto a B
$\bar{r}_A$	Vector de posición de A con respecto a un sistema inercial fijo
r	Radio de una circunferencia
r_{giro}	Radio de giro

T	Tensión
$\bar{\theta}$	Vector de posición angular
$\bar{e}_t$	Vector unitario en la dirección tangencial
$\bar{v}$	Velocidad
W , g	Peso , aceleración de la gravedad (9.81 m/s^2)
μ	Coeficiente de fricción
m/s	Metro por segundo
m/s^2	Metros por segundo al cuadrado
Km/h	Kilómetros por hora
$\overline{Kg}$	Kilogramos fuerza
$\overline{Lb}$	Libras fuerza
t , t^2	Tiempo , Tiempo al cuadrado

Falta estructurarlo,
Explicar más cada
problema.
Ver objetivos. Exponerlos
Ver Den Hartog. Mechanics

CAPITULO A

PLANTEAMIENTO METODOLOGICO DE SERIES DE EJERCICIOS DE MATERIAS BASICAS A NIVEL LICENCIATURA

Gran controversia ha causado la poca distinción que se ha establecido entre la enseñanza y el aprendizaje de la física a nivel licenciatura en las escuelas de Ingeniería.

El problema gira en torno a la metodología que han manifestado las obras básicas de consulta en dicha asignatura. No manifiestan con claridad los conceptos que permiten la comprensión epistemológica y casuística de esta ciencia, que a su vez exige, en el caso de la ingeniería, una clara conciencia de la necesidad de medir. Ejemplo de ello es la llamada "Segunda Ley de Newton", la cual se ha malinterpretado al obligarla a ser causa, y no entenderla como lo que es: un axioma.

Mario Bunge, en su Filosofía de la Ciencia que ha desarrollado, también ha causado controversia entre los físicos al depositar en el concepto de Causa casi el único punto de partida de la ciencia contemporánea; falso apoyo es para alcanzar con certeza el conocimiento teórico que concede la física.

En verdad, el punto de partida está en la medición, ya que en la cuantificación se clarifica la cualidad y con ello la conceptualización de esta ciencia. No es posible, para el estudiante de ingeniería, partir de causas en cuanto tal y en abstracto, sino de la realidad tajante y palpable que nos da la actividad de medir, que es, además, la única manera como percibimos el fenómeno, la realidad.

Reducir la Mecánica a una mecánica puramente teórica que niegue toda posibilidad de percibir, palpar, observar la realidad tal como es para afrontarla, equivale a negarla desde su esencia (y por lo tanto desde su existencia), pues también es mecánica experimental que surge del quehacer cotidiano del hombre, dándose a éste en cuanto mesurable.

Y la historia nos da la razón. Antiguamente el intelecto humano formulaba hipótesis científicas sin atender en apariencia a los hechos naturales, cuidando sólo de la coherencia matemática y lógica, para luego convertirla en base de la observación. Pero se adquirió conciencia de que la invención de hipótesis no es una actividad autárquica de la mente humana, sino que debe practicarse en estrecha conexión con la observación de la Naturaleza. El científico debe dejarse guiar por los propios fenómenos naturales para llegar a sus hipótesis, de las cuales pasa luego a las observaciones y experimentos. El mismo Newton procedió así,al deducir de principios tan sencillos como sea posible las causas de todas las cosas, pero tomando como principio algo que todavía no se ha mostrado en los fenómenos. Procedió pues, siguiendo un doble método, analítico y sintético. A partir de algunos fenómenos escogidos, derivó mediante el análisis las fuerzas de la Naturaleza y sus sencillas leyes, para luego, mediante la síntesis, determinar tales fenómenos como fundamento de las restantes propiedades naturales. Como buen ejemplo de sus resultados, es la felíz deducción del sistema del Universo a partir de la ley de la gravedad. Que la fuerza de la gravedad es inherente a todo cuerpo, algunos lo habían presentido, otros pensado; pero él fue el primero que demostró su existencia mediante los fenómenos, dándole un firme fundamento gracias a notables especulaciones.

Partiendo de los fenómenos y generalizando por inducción, Newton alcanza el conocimiento de la movilidad y la fuerza de percusión de los cuerpos, y de las leyes del movimiento y de la gravedad.

Desde el punto de vista de elementos auxiliares en el proceso Enseñanza-Aprendizaje, las Series de Ejercicios de Mecánica II son provechosas, sin embargo, si no tienen una secuencia adecuada pierden su valor y se vuelven un obstáculo para el estudiante. Las Series deben tener como cualidad la fácil visualización del fenómeno, para proceder al análisis del modelo con base en los Axiomas de la mecánica. Contrariamente, si no se visualiza el fenómeno se cae en la imposibilidad de usar los conceptos cinemáticos que permiten el uso de las correctas ecuaciones de la Mecánica.

Un obstáculo para el aprendizaje es la falta de conocimiento de los conceptos de esta ciencia. Sólo son dominados en la medida en que el alumno los ha percibido por la experiencia, de otra forma, los "ha medido". Esto justifica las funciones heterónomas: posición v.s. tiempo, giro v.s. tiempo porque se pueden medir y ésto explica que los parámetros cinemáticos están en función del tiempo (no le puede tocar un mismo tiempo a varias posiciones en el movimiento de una partícula). Aparece aquí la necesidad del laboratorio en donde se deben hacer las experiencias antes de resolver cualquier ejercicio de nivel teórico (es importante también aclarar que en el laboratorio deben usarse instrumentos de medición de mayor exactitud que permitan la representación gráfica certera de los datos, cosa que dificultan los cronómetros manuales y cintas métricas).

La realidad dista mucho de ofrecer al educando la necesidad imperiosa de medir, conviertiendose la lección en una Mecánica teórica, la cual da la impresión de que existe aislada de la Mecánica experimental siendo un claro fra caso el proceso de aprendizaje.

Se hicieron unas experiencias didácticas con estudiantes de la Facultad de Ciencias y de Ingeniería a cargo del M. en C. José Luis Pérez Silva y los resultados no fueron afortunados. Una de ellas se centró en definir la Superficie, y los alumnos respondieron que de una hoja carta su superficie es la base por la altura; más aún, a la misma hoja se le cambió su configuración en una superficie curva no pudiendo definir el concepto, ni siquiera el área la pudieron obtener. Quepa preguntarse: ¿Dónde está la idea de Superficie, de cálculo del área, de longitud de una línea que estudiaron en los primeros cursos de Matemáticas? ¿Por qué definieron la superficie como: base por altura?

Otra experiencia fue la caída de dos cuerpos idénticos, uno en caída libre y otro sobre un plano inclinado prácticamente liso. Al preguntarseles si los dos cuerpos caían iguales, la respuesta fue afirmativa, a pesar de que era visible que no llegaron al mismo tiempo en la experiencia que observaron. Esto se torna conflictivo al saber que los alumnos que entraron en el interrogatorio eran los que tenían una trayectoria brillante en la Facultad de Ingeniería (número de sorteo bajo, promedios mayores a ocho, tercer semestre,en promedio).

Se concluye que estos alumnos siguen teniendo las concepciones de un nivel primaria sin alcanzar una evolución de dichos conceptos a lo largo de toda la escolaridad anterior a la Facultad, llegando a ésta, con una clara ausencia de espíritu crítico y conformandose con lo que recogieron en su memoria.

Si los educandos interrogados hubieran medido los lados de la hoja en cualquier configuración, notarían invariancia, ya que una misma línea al cambiar su configuración de recta a curva no cambia su longitud; y si recordaran que la integral es una suma, con facilidad hubieran calculado el área de la hoja. Así mismo, en la experiencia de los cuerpos que caen, si hubieran medido con tiempo para la misma ordenada, encontrarían diferencia entre ellos y sería inmediata la respuesta.

En cuanto a la clase de Mecánica teórica, para muchos alumnos, es una clase de patrones de memoria: "Si lo que me dan en clase es lo mismo que aprendí de memoria desde la primaria y va acorde con la fórmula que me sé, entonces, entenderé la clase"; pero si no concuerda la temática de la lección con lo que sabe el alumno, obligan al modelo matem'tico a una respuesta con base en su conocimiento (V. gr. para este tipo de alumno, la fuerza de fricción es contraria al movimiento y siempre vale μW -coeficiente de fricción por el peso- porque así lo aprendió de memoria junto con la fórmula). Luego, no es racional culpar al alumno y buscar resolver el problema reprobando al 80% ó 90% del alumnado. La solución está en enfocar la materia de Mecánica de tal forma que alcance a concientizar al educando en la necesidad de medir.

Empecemos a discutir la noción de <u>medida</u> transcribiendo algunos párrafos de la excelente investigación de M. en C. José Luis Pérez Silva, Epistemología y Psicopedagogía:

¿La Mecánica se instala en el objeto como tal, o sea lo describe, o sólo traduce en símbolos las impresiones que el hombre como sujeto cognoscente recibe del objeto como realidad de conocimiento?

Esta pregunta es fundamentel, ya que si la ciencia sólo traduce a símbolos las impresiones que del objeto recibe el sujeto desde su aquí, tendremos tantos físicos o ingenieros como sujetos. Pero si entendemos que es realmente un conocimiento del objeto creado por el sujeto y traduci do a símbolos, es un modelo de la realidad, y es posible -- descentrarlo del yo personal y es por lo tanto posible de - educar en este campo.

Según J. Piaget el avance del conocimiento equivale simultáneamente a eliminar la subjetividad egocéntrica y a -- acrecentar la actividad coordinadora del sujeto. Por otro -- lado la Historia del pensamiento científico evidencia que - las realidades experimentales y las estructuras lógico matemáticas se elaboran unas en función de las otras, y estas - acciones físicas especializadas se adelantan tanto más en - lo real, cuanto más activamente esten estructuradas sus --- coordinaciones lógico matemáticas por el sujeto, logrando - desprenderlas de lo concreto, ya que por ser una acción, esta entraña una lógica que como vimos depende del sujeto y - no radica en los objetos a los que se aplica, se estructura en el sujeto y se apoya en sus principios.

Visto así, el pensamiento científico no es de ninguna- manera una simple comprobación de realidades, como se ve en la enseñanza de la Mecánica, sino el aprender el hecho de - hacer suyo por parte del estudiante el conocimiento, es decir integrarlo como parte de su actividad por medio de la - construcción de relaciones (dudas). Contrastadas estas con- la realidad, a partir de la vivencia de la realidad física- y el estudiante generará de acuerdo a su campo cognoscitivo a su perspectiva desde su aquí, un símil de la realidad. Este símil de la realidad, no es una identidad con ella.

¿Cómo se logra este símil de la realidad?

Afirmamos que el hombre es cambiante y es consciente - de su cambio y de los cambios de los otros, o sea, es consciente de las variaciones y son estas variaciones las que- físicamente son mesurables, o sea, medibles. Pero medir una magnitud es medir sus variaciones y consecuencias, es considerarla dinámica.

La similitud de la Mecánica con la realidad, no es la misma que la que existe entre un retrato fotográfico de una persona y ésta; en este caso, fotografía y persona son similares, y lo son porque existen diferencias entre la persona y su fotografía; la fotografía es plana y la persona tiene volumen; en este caso, en el símil, la fotografía carece de cosas que la realidad tiene como el volumen y sin embargo son similares. Como diría Ortega y Gasset: "Un cuadro se parece al retrato no porque todo el retratado se parezca al retrato, sinó porque todo lo que hay en el retrato es idéntico a parte de lo que hay en el retratado(Ref. 1 y 2)."

¿Que sucede si cada vez hay menos del retratado en el retrato? Pues es evidente que deja de ser un símil y esto implica la necesidad de un mínimo de correspondencia, de identidad entre los atributos de la realidad y el modelo, para que la similitud se dé.

Pero si la similitud, la correspondencia entre la realidad física no se da de esta forma ¿cómo se da?

Podemos, analizando las proposiciones físicas que conforman su teoría, percatarnos de que éstas no tienen una correspondencia de similitud como en la del retrato y retratado, ya que no hay nada de la realidad que aparezca en la teoría y menos aún lo enunciado en la teoría por cada propuesta física, se parece a la realidad, o en forma más simple: Lo que la Física dice de la realidad, no tiene nada que ver con ésto. La similitud entre la teoría física y la realidad, no se da a través de la predicciones de hechos de la realidad, de hechos evidentes que son los experimentos; la correspondencia de esta ciencia con la realidad se da por los experimentos, no por la similitud clásica.

Planck lo decía de esta forma: "sólo en el caso de que los elementos reales de nuestra imagen del mundo, es decir aquellas identidades conceptuales de que tal imagen se suponen que representan a los auténticos entes de la naturaleza no se mostrarán suceptibles de un ulterior mejoramiento, se podrá afirmar que se ha llegado a una representación de la última eseencia de lo real; sin embargo esta eventualidad - parece altamente improbable por lo que el desacuerdo perenne entre el mundo real y la imagen del mundo, constituye - un elemento inalterable de irracionalidad para la ciencia" (Ref. 3).

W. Heisenberg lo postula de esta forma: "El objeto de la investigación científica no es ya la naturaleza en sí,- sino la naturaleza sometida a la investigación del hombre,- a su interrogante; las leyes matemáticas que formulamos en la teoría cuántica, no tratan de las partículas elementales en sí, sino de nuestro conocimiento de las partículas elementales; dicho de otra forma, delante de nosotros no tenemos- un objeto, sino siempre una estructura compleja e inseparable de sus dos componentes elementales:observador y objeto. (Ref. 4).

K. Von Weisäcker lo dice así: "El experimento es una -- especie de experiencia sensible pero que no es una simple - sensibilidad receptiva; tampoco es suficiente que a la percepción se agregue sólo uno de los dos elementos activos: - sólo pensar o sólo manipular, ya que lo primero es filosofar y lo segundo simple manipulación" .(Ref. 5).

Albert Einstein lo explicitaba de la forma siguiente:- "La creencia de un mundo externo independiente del sujeto - que lo percibe, es la base de toda ciencia natural; sin embargo, puesto que la percepción sensorial sólo da la información de este mundo externo indirectamente, podemos aprender éste sólo por medios especulativos; se sigue de ésto - que nuestras nociones de la realidad física nunca pueden -- ser finales" (Ref. 6).

La Ciencia es experimental y se basa en la variación de lo mesurable y en la evidente circunstancia de la simili tud de analogía, entre la realidad y el experimento, y es esta relación la que se puede tomar como fuente de epistemología básica.

Pero es importante notar, que no es Física ni Ingeniería, o mejor dicho hacer Física o Ingeniería, una secuencia de simples percepciones por sí solas. La Ciencia es un conocimiento verdadero o sea un juicio, éste es una percepción a partir de un principio, es una relación de conocimiento entre objeto y sujeto, y esto es lo cierto aunque las percepciones estén en sí mismas estructuradas lógica y matemáticamente.

La contemplación de la realidad desde mi perspectiva como sujeto cognoscente a partir de mis principios busca la objetividad, o sea la asimilación del objeto de conocimiento por el objeto cognoscente; la simple percepción no busca ésto, sino que es una idea radicada en mi yo personal, formada de una mezcla de elementos del objeto y de estructuras del sujeto que éste intenta separar, para integrar al objeto del conocimiento y sus relaciones con otros elementos cognoscibles a las concepciones del sujeto.

Von Weisäcker opina: "se debería decir: Perceptibilidad sensible inmediata de una cosa, es una condición suficiente, pero no necesaria de su creencia en su realidad; perceptibilidad sensible inmediata de cualquier objeto relacionado con una cosa es una condición necesaria, pero no suficiente para que la ciencia experimental pueda hacer enunciados sobre esta cosa" (Ref. 7).

Así que el hecho físico se logra cuando a la percepción del objeto por parte del sujeto cognoscente, éste agrega elementos lógicos apoyados en sus creencias (principios) que le permitan constatar, la percepción que del objeto de conocimiento él tiene, con la realidad concreta de ese objeto y ésto solo se logra en la similitud, en las variaciones, en su percepción de cambio, o sea no busca el sujeto eliminarse de la percepción sino integrar en un so_ lo acto la percepción y la operación lógica que sobre el objeto realiza, es decir, mide.

Medir, no es por lo anterior la simple comparación de magnitudes, sino que la comparación cobra significado al introducirse relaciones y nuevas correspondencias de similitud física, las cuales no radican en el objeto a medir ni en la característica de este que se desea medir, sino en el sujeto que mide. La observación que implica físicamente una medida es el hecho de integrar en una sola acción y en forma indisociable, al objeto de conocimiento y al suejto cognoscente, por medio del instrumento de medida.

Esto surge de que al comparar se están haciendo iguales dos cosas, las que comparamos, para notar similitud y diferencias. <u>Al medir estamos tratando de hacer iguales,</u> la abstracción que de la realidad tengo y la realidad misma. <u>Esta abstracción es a lo que llamo la unidad de medida.</u> Una abstracción se da en referencia a nosotros, abstraemos a las cosas de su ser para una utilidad nuestra, pero al hacer esto dejamos a las cosas sin nada, ya que las cosas que integran la realidad no tienen un ser propio. Al abstraerlo, al aislarlo de lo demás, le hemos estirpado su realidad ya que ni existe ni puede existir aislado, ya que su contenido mismo depende de los demás constituyentes. Esto nos lleva a que para concretar la medida es necesario concretar la abstracción de la realidad física, en forma de patrón.

Pero además, medir implica cuantificar, y la única idea o forma de cuantificar es contando, o sea realizar sobre el continuo del objeto una participación que discretice la forma operatoria del instrumento de medida, el patrón y la medición es simplemente el conteo de sus partes; así planteada, la medición se vuelve isomorfa con el número y es por ésto que le es posible al sujeto experimental reducir la medida de una compleja operación a la simple aplicación del número a una magnitud física.

Podemos resumir las acciones para medir así:

A) Una estructura de partición. Esto por la necesidad

DEL CONTEO PARA CUANTIFICAR.

B) UNA ESTRUCTURA DE ORDEN. MAYOR QUE, MENOR QUE, IGUAL A.

C) UN CONTROL POR ITERACION CON EL OBJETO A MEDIR. ESTO POR LA NECESIDAD DEL SUJETO DE COORDINAR LAS ACCIONES.

Como ya se ha visto, después de la percepción se puede pasar a la experimentación, con toda la complejidad de lo que implica medir, logrando así una vivencia de la realidad física primero y después la contraposición de su medida con el fenómeno real, permitiéndole ésto desconcentrarse.

Pero: "La ciencia al enunciar una actitud contraria a la perceptiva natural y sustituirla por una visión completamente intelectual, reduce lo real a un sistema de relaciones matemáticas entre las dimensiones abstractas" (Ref. 8).

Esto es una costumbre arraigada por mucho tiempo en la enseñanza de la Ingeniería, y es que ésta se percibe como una mezcla de tres tipos de casos:

I) LAS ECUACIONES QUE RELACIONAN DATOS DE CANTIDADES FISICAS, O SEA LA REPRESENTACION METAFORMAL SIMBOLICA DE LOS DATOS.

II) EL EMPLEO FORMAL DE UNA LOGICA DEDUCTIVA.

III) UNA SERIE DE REGLAS SEMANTICAS, QUE DEFINAN LAS OPERACIONES ENTRE TERMINOS DADOS.

La raíz profunda que detrás de esta forma de darse la ciencia así, es la tendencia del hombre al pensar, depensar lo inmediato, lo evidente, o sea la experiencia, por una mediación recurriendo a lo que es más inmediato y evidente, que es la idea, la teoría, y ésto no se hace a causa de la existencia de la evidencia, sino a causa del creer que es posible dar razón de la misma, o sea probar de que debe de aparecer en la forma en que aparece, es decir un argumento intrateórico que impide el error o sea de nuevo el experimento.

Dice a ésto Leibniz: "Quienes habiendo aceptado la -

idea de una Física no demostrativa, parten de alguna hipó tesis para deducir de ella fenómenos conocidos, no pueden demostrar con ésto que su hipótesis es verdadera, a menos que observen la condición que propuse yo, la cual en rea lidad, no han hecho; y acaso no han querido o podido ha - cer; lo único que hay que reconocer es que una hipótesis- se hace tanto más probable cuanto más simple de compren - der es y más amplio poder tiene, es decir, que permite - explicar el mayor número de fenómenos con el mínimo de -- presuposiciones; y puede suceder que ciertas hipótesis -- pueda contenerse en certeza, a saber, cuando satisface -- plenamente todos los fenómenos que se presentan a la mane ra de una clave para criptogramas; pero lo que hace, ade más de su verdad, el mayor mérito de una hipótesis, es -- cuando permite hacer predicciones aún respecto a fenóme - nos todavía no experimentados; pues en este caso, una hi pótesis tal, puede ser tenida, en la práctica, por la ver dad misma." (Ref. 9).

Para terminar la discusión sobre la medida diré que- la realidad de un concepto no radica en la expresión for mal que de ésta se de, sino en la evidencia experimental- observable, de acuerdo a la idea de medida ya discutida,- y a la de modelo o símil de la naturaleza como conocimien to descentrado que el Alumno tiene de la naturaleza exter na a él.

A continuación se muestran algunas prácticas en las - cuales los conceptos se apoyan primero en la medición y - no en el modelo matemático:

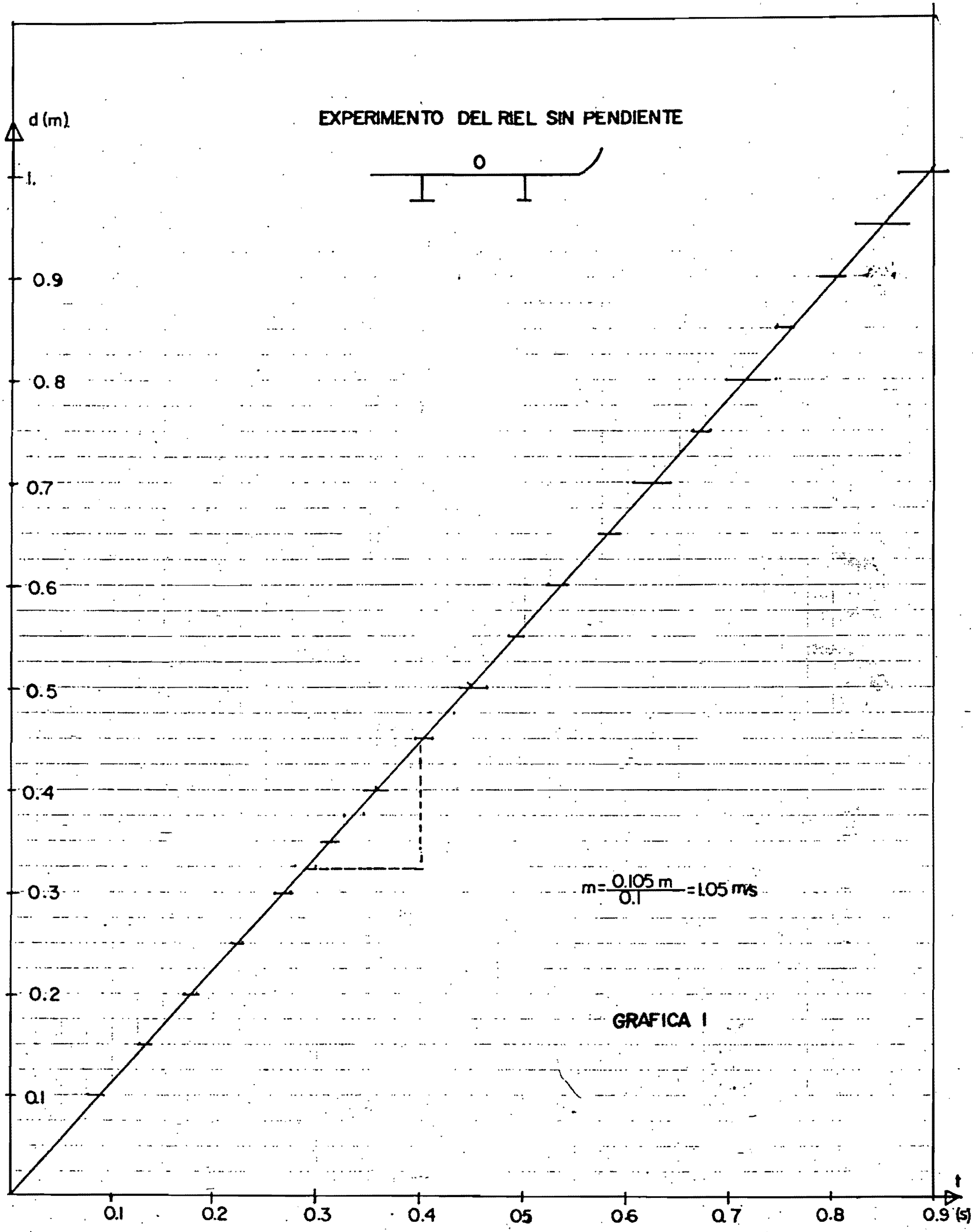
MUESTRA I

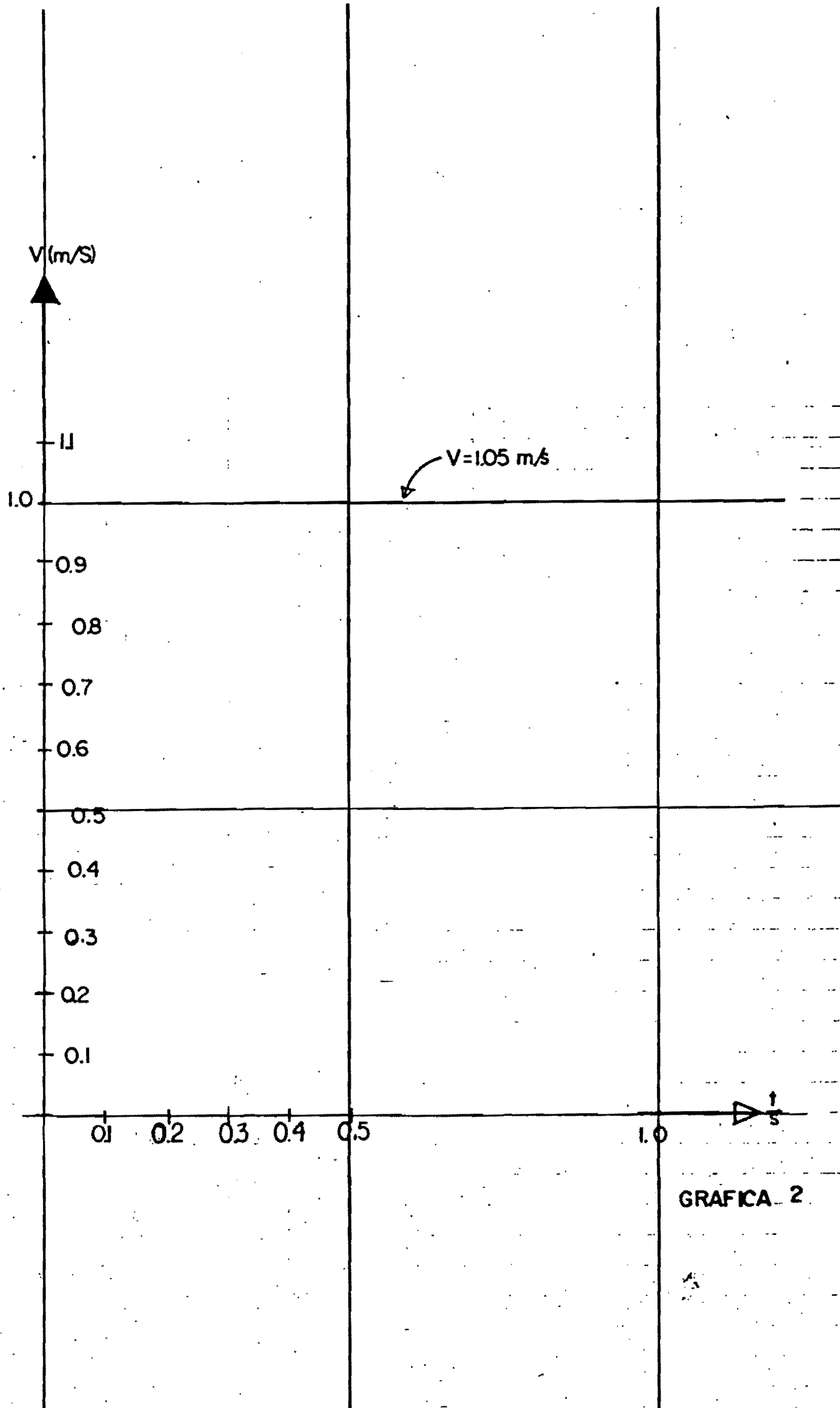
Para conceptualizar los elementos de cinemática, se recomienda la siguiente práctica:

Utilizando un riel de canal y un balín que se mueve a lo largo del canal, con una pendiente del riel nula se obtiene un movimiento rectilíneo uniforme; bastará con medir la distancia recorrida por el balín y el tiempo de recorrido, éste último con un cronómetro digital acoplado a dos fotoceldas que son accionadas al pasar por el haz de luz el balín al principio y final del recorrido. Esta experiencia se puede hacer con cronómetro de mano pero nunca se obtendrá una línea recta y haremos dudar al alumno, ya que si deseamos que tenga una objetividad integrada por él, esta debe de ser vivencial, ya que la objetividad no es la simple traducción de símbolos, o la lectura de datos, sino que implica una estructuración en la medición que supera y encuadra al objeto de conocimiento; en efecto la Mecánica no es un conocimiento adquirido, es un conocimiento que se construye y que es profundamente simbólico, ya que no conoce la realidad del objeto de conocimiento sino que pone este conocimiento en un signo o en un sistema de símbolos, cuyas características es estar en lugar del conocimiento del objeto, o sea el signo esta provisto de uno y sólo un significado; a partir de esto rompemos con la creencia de que el metalenguaje matemático juega sólo el papel de un simple cálculo y lo sustituiremos, por la evidencia anterior, por la idea de que forma parte constituyente de la teoría, ya sea porque el sujeto experimental está involucrado en el proceso físico en estudio, ó porque otros observables externos al proceso se involucran en el experimento; en estos dos casos la función deductiva de la lógica del metalenguaje no es solo el vincular datos medidos, sino en organizar los de acuerdo a una acción supuesta por el estudiante en base a sus principios, que no permite el reducir la observación experimental en la simple copia simbólica del dato, de ésto surgió el uso del cronómetro digital y las fotoceldas ya que de otra manera nunca llegaría a visualizar un movimiento rectilíneo.

En efecto al hacer la experiencia y graficarse se puede ajustar una recta, y en ningún punto ésta se sale del -- rango de incertidumbre existente en el experimento:

d (cm)	t (s)
10	0.089
15	0.136
20	0.186
25	0.233
30	0.279
35	0.330
40	0.374
45	0.419
50	0.471
55	0.511
60	0.556
65	0.609
70	0.652
75	0.703
80	0.750
85	0.794
90	0.841
95	0.897
100	0.938


EXPERIMENTO DEL RIEL SIN PENDIENTE
0
d (m)
1.
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
$m = \frac{0.105 \text{ m}}{0.1} = 1.05 \text{ m/s}$
GRAFICA I
t
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9 (s)



GRAFICA 2

MUESTRA II

A continuación se presenta una práctica de "Tiro Parabólico", en la cual la técnica experimental empleada en esta práctica no corresponde a la forma habitual que se acostumbra en los laboratorios convencionales (donde el comportamiento cinemático del móvil tiene lugar en el espacio en un plano vertical) ya que las dificultades técnicas, por un lado, se presentan en el registro de datos y financieras al tener que contar con equipo muy costoso, por otro lado; tal es el caso de los relojes digitales con sensores ópticos, fotografías estroboscópicas, etc..

En esta práctica, la reproducción y el registro de los datos asociados al movimiento parabólico, tendrá lugar en un plano inclinado, al que se supone desprovisto de fricción y sobre el cual quedará marcada directamente la trayectoria del móvil, en este caso un balín; por otro lado, todas sus propiedades cinemáticas se obtendrán a partir de las fuerzas actuantes en él, con el objeto de aplicar la 2a. Ley de Newton para encontrar su aceleración y a partir de esta última sea posible obtener las expresiones de la velocidad y la posición, en términos del tiempo.

También es conveniente señalar que la capacidad del educando para establecer una adecuada relación e interpretación de las variables físicas que intervienen en este experimento, depende en gran medida del manejo de los conceptos básicos del cálculo vectorial, ya que un objetivo colateral es: incorporar en el análisis el manejo constructivo e interpretación reflexiva de los modelos matemáticos, que deberán obtenerse a partir del fenómeno particular, para que de esta manera se propicie omitir al máximo el uso irreflexivo de ecuaciones "memorizadas" tan frecuentes en la resolución de problemas o ejercicios.

Los objetivos que tendría la practica serían:

a) Generar experimentalmente la gráfica correspondiente a la trayectoria de un balín, animado de movimiento parabólico.

b) Obtener los modelos matemáticos correspondientes a las propiedades cinemáticas asociadas al movimiento del balín.

c) Comparar las ordenadas de la gráfica experimental con las ordenadas teóricas, que se obtiene al sustituir las abscisas, en la expresión matemática que determina la posición del balín.

d) Señalar y cuantificar el máximo porcentaje de variación, en un intervalo de puntos de la trayectoria experimental, tomando como referencia la curva teórica que se genera a partir de los modelos matemáticos del movimiento.

El desarrollo teórico lo expongo en los siguientes términos:

Empecemos con algunas consideraciones importantes acerca de la forma en que se produce el movimiento del balín, la trayectoria que dibuja y, la relación que guardan estos dos aspectos (causa y efecto) con la selección adecuada de los datos experimentales que deberá obtener el alumno después de elaborar parcialmente su práctica; el disparador del móvil, de resorte es el dispositivo que genera el movimiento del balín; después de accionarse este dispositivo el pequeño cuerpo rodante, define dos tipos de movimientos, los cuales generan conjuntamente dos tipos de trayectorias superpuestas y continuas; a saber:

I.- Un movimiento rectilíneo a lo largo de la guía de el disparador, que inicia su movimiento en el punto A y lo termina en el punto B.

2.- Un movimiento curvilíneo, que tiene lugar sobre el bastidor, iniciándose inmediatamente después de que el balín abandona el extremo del vástago del disparador, en el punto B.

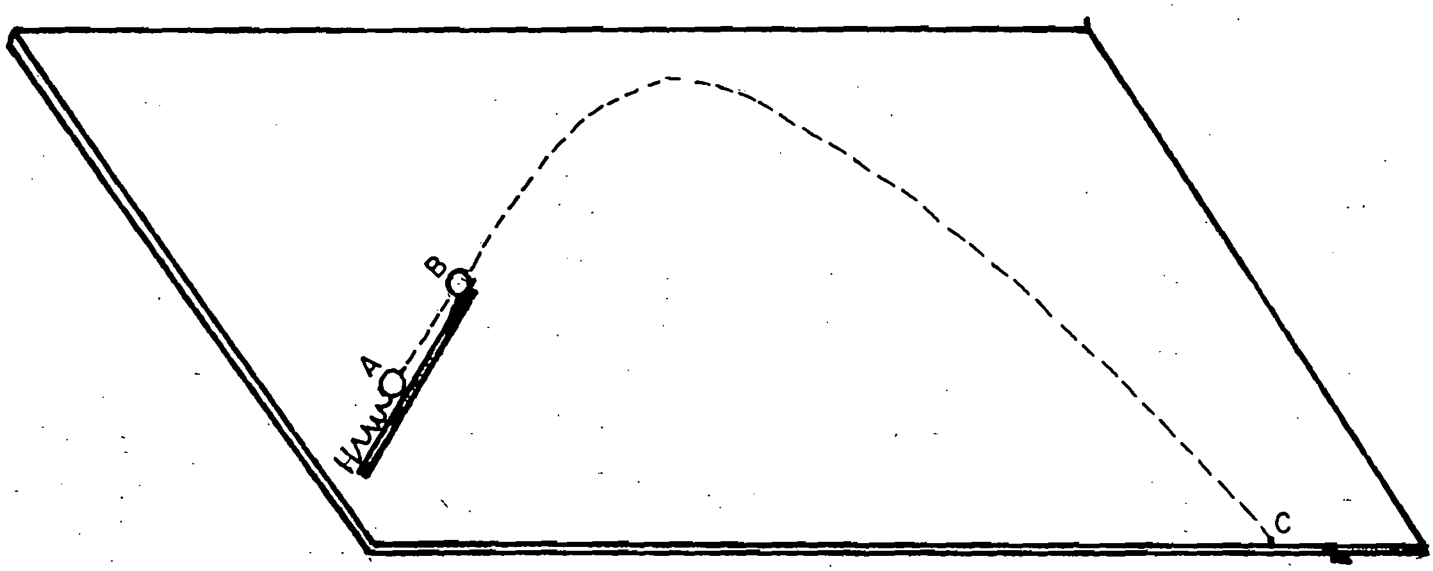


FIGURA I

Bajo este criterio el análisis correspondiente, deberá atender exclusivamente al segundo movimiento cuya trayectoria curvilínea está limitada por los puntos B y C. La omisión de las propiedades del primer movimiento, de A hacia B, se fundamenta, sencillamente a que este último solo sirve para generar la Velocidad Inicial v_0, condición inicial, de suma importancia, que da cabida al movimiento curvilíneo que tiene lugar entre los puntos B y C.

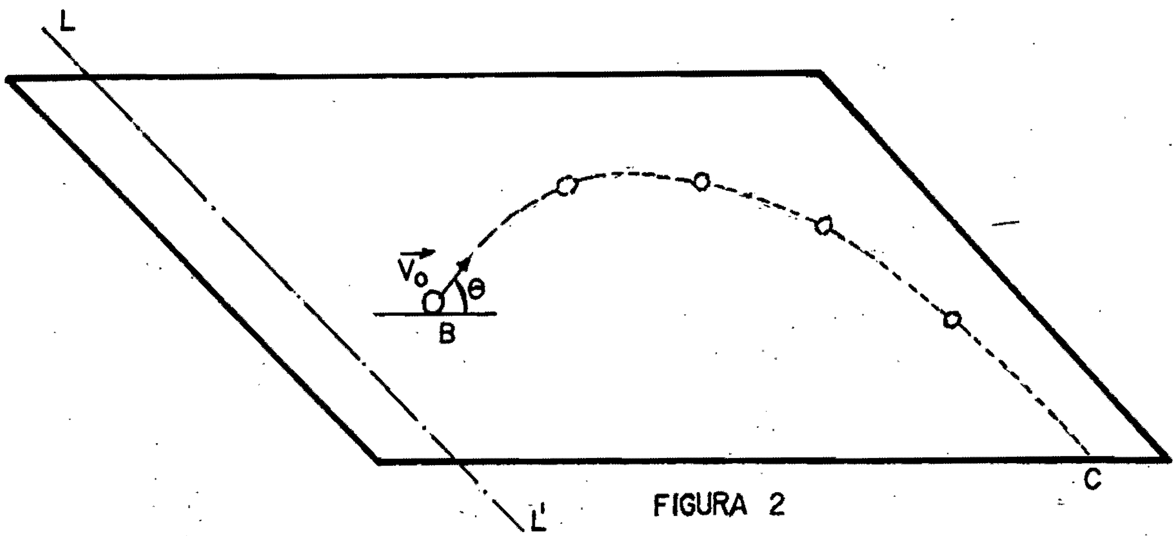
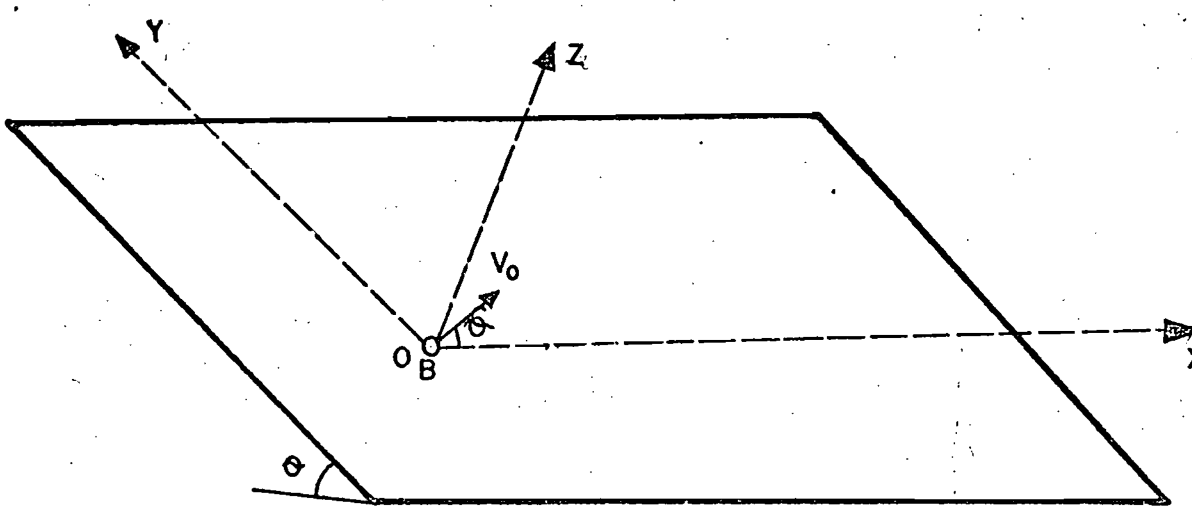


FIGURA 2

La velocidad inicial que se imprime al balín, es necesaria para generar la curva BC; siempre y cuando, su orientación, no coincida con la dirección LL', ya que en su defecto, se tendría un movimiento rectilíneo, hacia arriba o hacia abajo del plano.

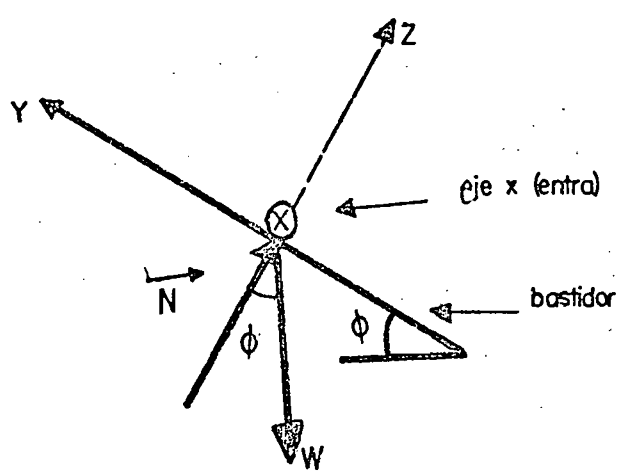
A continuación, se determinarán las propiedades cinemáticas del balín a partir de las fuerzas que actúan en él, y por último, con el empleo de estas propiedades, se demostrará que efectivamente, la trayectoria que describe el balín, corresponde a una parábola.

Con referencia a la figura 2, se ubica el siguiente marco de referencia:



El origen del sistema corresponde al extremo superior de salida del disparador, punto B.

La formulación del diagrama de cuerpo libre del balín para cualquier posición, a partir de una vista posterior -- del plano YZ, es la siguiente:



No aparece la fuerza de fricción, se asume que las superficies del balín y del bastidor son lisas.

La resultante del conjunto de fuerzas que actúa sobre el balín es:

$\overline{F} = \overline{N} + \overline{W}$

o también en términos de sus componentes axiales:

$F = - W \operatorname{sen}(\phi)\ \overline{j} + (N - W \cos(\phi))\overline{k}$ 1

Por otro lado, el movimiento del balín se realiza sobre el plano xy, por lo que su aceleración presenta las siguientes características:

$a = a_x\ \overline{i} + a_y\ \overline{j}$ 2

En la dirección de las z no existe movimiento.

De la 2a. Ley de Newton, se tiene:

$\overline{F} = m\ \overline{a}$ 3

Después de sustituir (1) y (2) en (3) se tiene:

$-W \operatorname{sen}(\phi)\overline{j} + (N - W \cos(\phi)\overline{k} = m\ (a_x\ \overline{i} + a_y\ \overline{j})$

al igualar componentes, queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$m\ a_x = 0$ 4

$m\ a_y = - W \operatorname{sen}(\phi)$ 5

y dado que $m = (W/g)$, al sustituir este último valor en (4) y (5) se obtiene:

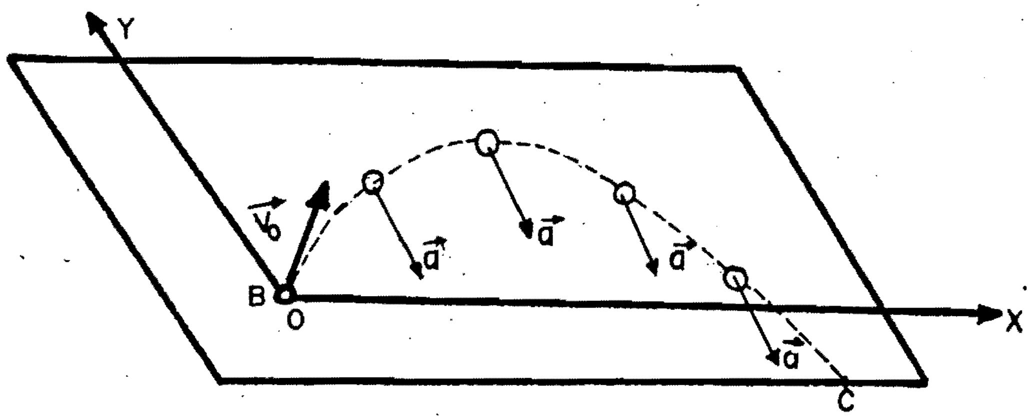
$a_x = 0$ 7

$a_y = - g \operatorname{sen}(\phi)$ 8

Por último, al sustituir (7) y(8) en (2)

$\overline{a} = - g \operatorname{sen}(\phi)\overline{j}$

Al ser los valores de g y ϕ constantes, se concluye que la aceleración en este tipo de movimiento es una cantidad constante, cuya dirección coincide con el eje y y apunta hacia abajo del plano inclinado, esto ocurre, en cualquier instante en que se desarrolle el movimiento.



Aceleración constante paralela al eje y y dirigida hacia abajo del plano..

Por otra parte las condiciones iniciales del movimiento son:

$\bar{r}_o = \bar{0}$

$\bar{v}_0 = v_0 \cos(\theta)\bar{i} + v_0 \operatorname{sen}(\theta)\bar{j}$

Donde:

v_0 es la rapidez inicial del balín, en el momento justo de abandonar el disparador en el punto B.

θ es el ángulo, que toma el disparador, con respecto al eje horizontal x.

Integrando las expresiones a partir de la aceleración:

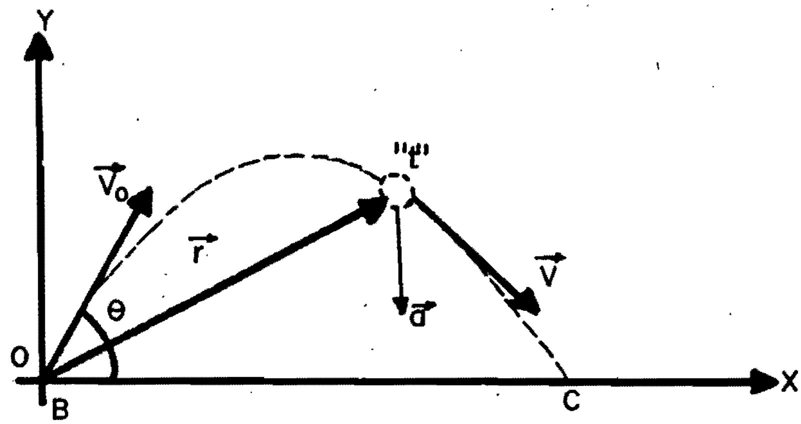
$\bar{v} = v_0 \cos(\theta)\bar{i} + (v_0 \operatorname{sen}(\theta)\bar{i} - g\ t \operatorname{sen}(\alpha)\bar{j})$ ....(10)

Volviendo a integrar queda:

$\bar{r} = v_0 t \cos(\theta)\bar{i} + (v_0 t \operatorname{sen}(\theta) - 0.5\ g\ t^2 \operatorname{sen}(\alpha))\bar{j}$.(11)

Las expresiones matemáticas (9), (10) y (11) determinan completamente el comportamineto cinemático del balín, por lo que cualquier información que se desee conocer acerca de la geometría de su movimiento, tendrá que obtenerse a través de estos modelos matemáticos.

En la siguiente figura se muestra la representación esquemática de las cantidades físicas vectoriales correspondientes a la posición, velocidad y aceleración para "t".



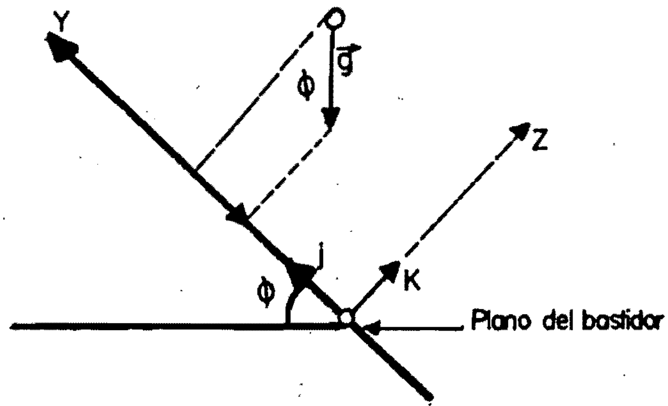
Vista frontal del plano "xy".

Es importante señalar en este dibujo que, los vectores que designan a la posición y a la velocidad del balín, cambian de magnitud y orientación conforme transcurre el tiempo, mientras que el vector aceleración, al ser una cantidad vectorial constante, no cambia estas características.

Como nota aclaratoria es necesario que el instructor exponga a sus alumnos, detalladamente y en el pizarrón, la forma de obtener la ecuación (9) -desde el inicio del desarrollo teórico, hasta la mitad de la práctica ya que al ubicarse ésta en el contexto de la cinemática, se supone que los alumnos no han estudiado aún, los principios básicos de la dinámica; de cualquier forma la comprensión del desarrollo teórico no implica gran esfuerzo si el alumno tiene la capacidad de obtener diagramas de cuerpo libre elementales, así como también ciertas bases del manejo vectorial de fuerzas, tal es el caso de composición y resolución de fuerzas.

Otro método alternativo para obtener la ecuación (9) es el siguiente:

Se proyecta la componente de la aceleración de la gravedad sobre el plano xy (plano del bastidor).



Es decir:

$\bar{a} = (\bar{g} \cdot \bar{j})\bar{j}$

donde $\bar{g} = -g\ \text{sen}(\Phi)\bar{j} - g\cos(\Phi)\bar{k}$

quedando al operar:

$\bar{a} = -\ g\ \text{sen}(\Phi)\bar{j}$

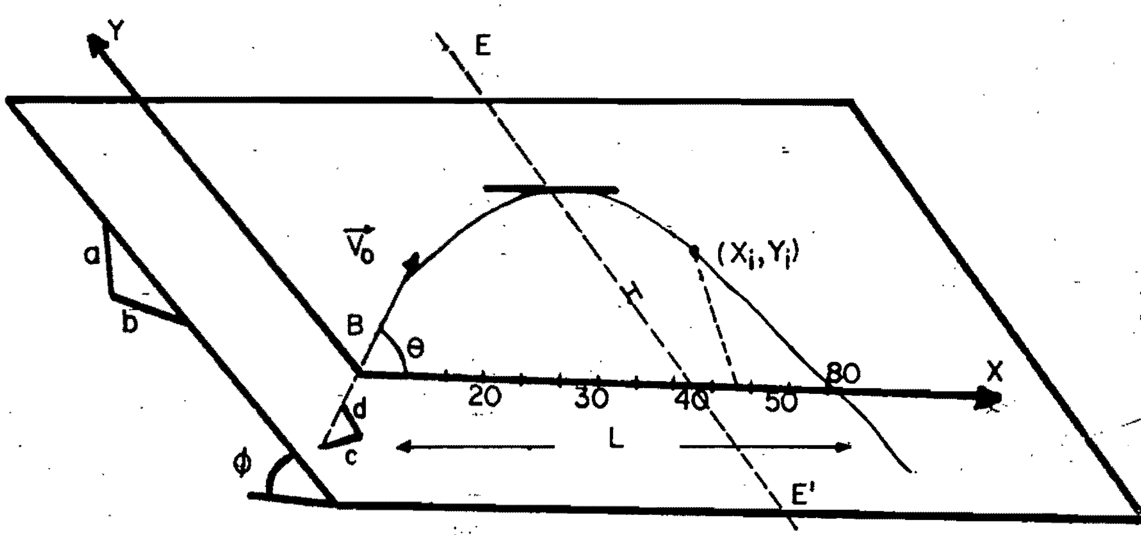
A manera de desarrollo práctico, se tendrá el siguiente Equipo para usar:

- Marco metálico
- Bastidor para tiro parabólico, forrado con papel micro.
- Disparador de resorte
- Balín de acero
- Flexómetro
- Regla de madera (100 cm.)
- Escuadras
- Solución colorante
- Dos niveles
- Franela

El procedimiento será:

- Colocar el bastidor sobre el marco metálico
- Medir el ángulo Φ de inclinación que forma el bastidor con el plano horizontal
- Fijar el disparador de resorte sobre la superficie del bastidor y marcar el ángulo Θ de disparo

- Colocar el balín sobre el disparador y ensayar varias veces el disparo, sin emplear la solución colorante, para limitar la gráfica de la trayectoria en toda la superficie del papel.
- Una vez ajustado el disparador, mojar el balín con la solución colorante, posteriormente colocarlo en el extremo del vástago y ejecutar el disparo
- Después de generar la trayectoria, trazar con un marcador el sistema de referencia xy, tomando como origen el extremo B del disparador.



También es conveniente tomar en cuenta que:

a) Los niveles sirven para fijar la horizontalidad del eje x

b) El uso de escuadras para trazar los ejes.

c) La regla y/o el flexómetro para medir las longitudes H y L, así como también la localización de los puntos (x_i, y_i) de la trayectoria.

Un punto importante es que los ángulos Φ y Θ deberán medirse en forma indirecta por medio de la relación de los catetos: a,b y c,d; a los que previamente deberán cuantificarse para la inclinación propuesta.

* Con base a este sistema de referencia, anotar los siguientes parámetros:

altura máxima H = __________

alcance máximo L = __________

ángulo de disparo Θ = ________

ángulo del bastidor Φ = ________

* Seleccionar arbitrariamente diez puntos de la trayectoria y, anotar las diferente abscisas y ordenadas medidas.

-El Profesor durante la práctica puede revisar:

I) Que el marco metálico y el bastidor estén bien fijos.

II) La horizontalidad del eje x.

III) Un buen ángulo de disparo está comprendido en el intervalo de 30° a 50°.

IV) El ángulo Φ del bastidor y el plano horizontal, no deberá exceder de 30°.

V) Una buena gráfica será aquella que presente el dibujo de la trayectoria lo más continua posible, ya que la carencia de ésta, indica que el balín desliza (no rueda) y la fricción se vuelve notoria.

VI) Una prueba sencilla, para verificar si la fuerza de fricción entre el balín y el bastidor es de magnitud des preciable, se realiza a través del grado de simetría que -- tiene la gráfica respecto al eje $\overline{EE'}$ paralelo al eje y y -- que pasa por la abscisa de máxima altura (0.5 L), doblando- el papel a lo largo del citado eje.

Con las mediciones de L, Φ, θ se puede encontrar la rapidez inicial:

Se calcula para una y = 0 su respectivo tiempo.-

$v_0\, t\, \mathrm{sen}(\theta) - 0.5\, g\, t^2\, \mathrm{sen}(\Phi) = 0$ .... se obtiene un t.-

$t = 2\, v_0 \mathrm{sen}(\theta) / (g\, \mathrm{sen}(\Phi))$ ..... sustituyendo esta - última ecuación en la componente horizontal del vector de - posición llegamos a.-

$L = 2\, v_0^2 \mathrm{sen}(\theta) \cos(\theta) / (g\, \mathrm{sen}(\Phi))$ ... así que.-

$v_0^2 = g\, L\, \mathrm{sen}(\Phi) / (2\, \mathrm{sen}(\theta) \cos(\theta))$

Por otro lado y siguiendo el mismo procedimiento se -- puede obtener la altura máxima que saldrá:

$H = 0.5(v_0\, \mathrm{sen}(\theta))^2 / (g\, \mathrm{sen}(\Phi))$

Es importante notar que la razón.-

$H/L = \tan(\theta)/4$, y se puede llegar a obtener la expresión del tiro parabólico con las mediciones hechas:

$$y = \left(\frac{4H}{L}\right) x - \left(\frac{4H}{L^2}\right) x^2$$

Para este nivel de la práctica se pueden comparar los- valores teóricos y medidos usando el porcentaje de error,v. gr.

%Error = Valor Absoluto(H(real)-H)x100/H(real)

Las series que se van a **presentar** involucran los si_ guientes temas:

Serie I: Movimiento relativo de la partícula.- movi_- miento relativo; posiciones, velocidades y aceleraciones - absolutas y relativas; velocidad y aceleración de arrastre -,aceleración de coriólis.

Serie II: Cinemática del cuerpo rígido.- teorema de - Chasle; movimiento general tridimensional; traslación recti línea y curvilínea; centro instantáneo de rotación.

La Serie III Dinámica de la partícula (movimientos rec tilíneos), Serie IV Dinámica de la partícula (movimientos - curvilíneos), Serie V Dinámica de la partícula y la Serie - VI Vibraciones de una partícula con un grado de libertad.- Segunda Ley de Newton (una, dos y tres dimensiones), en --- coordenadas intrínsecas y cilíndricas; condición para que - exista un movimiento rectilíneo; movimiento de partículas - conectadas; movimiento vibratorio con un grado de libertad: libre, forzado, amortiguado y forzado-amortiguado.

Las Series VII Traslación de un cuerpo rígido, VIII Mo mentos de Inercia, IX Rotación baricéntrica de un cuerpo rí gido y la Serie X Movimiento general en el plano.- Condicio nes del sistema de fuerzas resultante para producir trasla_ ción, rotación o movimiento plano general; momento de iner_ cia, radio de giro, teorema de Steiner, ejes principales de inercia; rodamiento perfecto.

La Serie XI.- Sistema de partículas; ecuaciones del -- movimiento del sistema; ecuaciones relativas al centro de - masa.

Serie XII Impulso y cantidad de movimiento para la par tícula y Serie XIII Impulso y cantidad de movimiento del -- cuerpo rígido.- Impulso y cantidad de movimiento lineal y - angular; conservación de la cantidad de movimiento; momen_ to de la cantidad de movimiento.

Las Series XIV Trabajo y energía para la partícula y -

XV Trabajo y energía para el cuerpo rígido.- Energía cinética; Campo conservativo; Energía Potencial; principio dela conservación de la energía mecánica; trabajo de un par.

Serie XVI.- Impacto, línea de impacto; choques elásticos e inelásticos; coeficiente de restitución.

CAPITULO B

EJERCICIOS

I MOVIMIENTO RELATIVO DE LA PARTICULA

I.1- Un auto "A" se mueve hacia el Noroeste+ con rapidez de 180 km/h y otro auto "B" se mueve hacia el Este a razón de 170 km/h. Determine:

a) La rapidez de "A" con respecto a "B"

b) La rapidez de "B" con respecto a "A"

Caso de ser Noroeste+:

$$\bar{v}_a = -127.278\bar{i} + 127.278\bar{j}$$

$$\bar{v}_b = 170\bar{i}$$

a) $\bar{v}_{a/b} = \bar{v}_a - \bar{v}_b = (-127.278\bar{i} + 127.278\bar{j}) - 170\bar{i}$

$$= -297.279\bar{i} + 127.278\bar{j}$$

Rapidez relativa de a/b = 323.37998 km/h

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{127.278}{297.279}\right) = 23.177^{o}$$

b) $\bar{v}_{b/a} = \bar{v}_b - \bar{v}_a = 297.279\bar{i} - 127.278\bar{j}$

Caso de ser Noreste+:

$$\bar{v}_a = 127.278\bar{i} + 127.278\bar{j}$$

$$\bar{v}_b = 170\bar{i}$$

a) $\bar{v}_{a/b} = \bar{v}_a - \bar{v}_b = (127.278\bar{i} + 127.278\bar{j}) - 170\bar{i}$

$$= -42.722\bar{i} + 127.278\bar{j}$$

Rapidez de a/b = 134.256 km/h

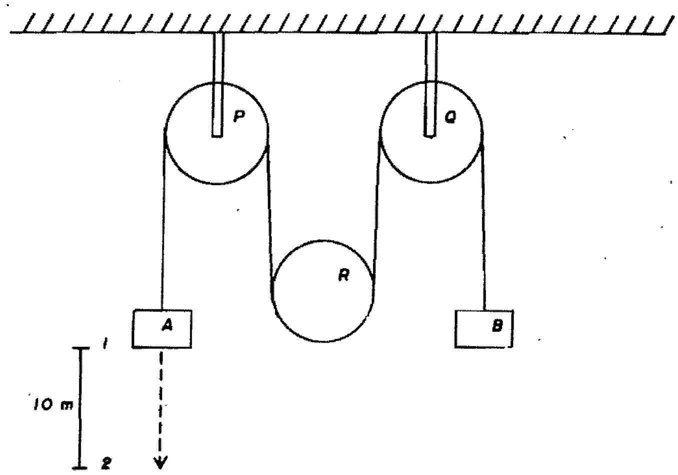
b) $\bar{v}_{b/a} = 42.722\bar{i} - 127.278\bar{j}$

Rapidez de b/a = 134.256 km/h

. . . .

Se pusieron dos posibilidades para la dirección del movimiento del cuerpo A.

I.2- Los cuerpos "A" y "B" se encuentran unidos por una cuerda que pasa por las poleas P, Q y R, como se muestra en la figura. Las poleas P y Q son fijas, mientras que la R se desplaza uniformemente hacia abajo con una rapidez de 2 m/s. Al comienzo del movimiento "A" cae desde la posición 1 partiendo del reposo y con aceleración constante.
Si la rapidez de "A" cuando llega al punto 2 es de 8 m/s, determine para este instante cuánto ha subido "B", y cuáles son su velocidad y aceleración.



$x_A + 2x_R + x_B \doteq$ longitud de la cuerda

derivando:

$v_A + 2v_R + v_B = 0$

$a_A + 2a_R + a_B = 0$

Usando datos:

$2\ (2) - v_B = 0$ así que $v_B = 4$

$a_A = v\dfrac{dv}{dx}$; $a_A\ dx = v\ dv$; integrando queda:

$$a_A\ x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

$a_A\ (10) = \dfrac{8^2 - 0^2}{2}$; además $a_{A_1} + a_{B_1} = 0$

De aquí se obtiene que al principio y al final $a_{A_{1,2}} = 3.2$

en consecuencia $a_{B_1} = a_{A_1}$ con sentido contrario $= -3.2$

Para las condiciones finales:

$v_A + 2v_R + v_B = 0$

$8 + 2\ (2) + v_B = 0$

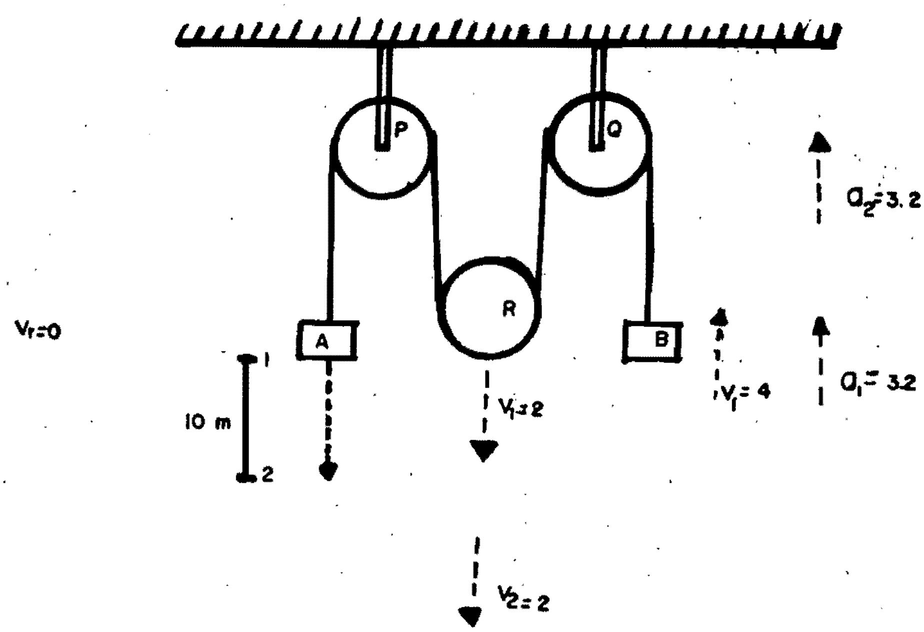
$v_B = -12$

de la integración queda:

$x = \dfrac{v_{B_2}^2 - v_{B_1}^2}{2(a)}$ como representando la distancia recorrida

$x = \dfrac{12^2 - 4^2}{2(3.2)}$ = 20m el recorrido de B

DIAGRAMA CINEMATICO



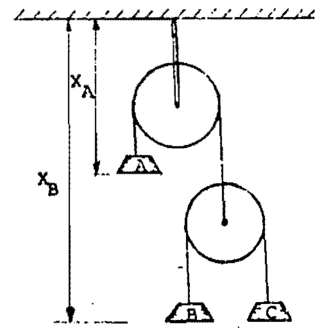
1.3- Para el sistema de masas y poleas de la figura, determine la velocidad y la aceleración del cuerpo "C", en el instante que corresponde a la configuración del sistema mostrado en la figura, conociendo los siguientes datos:

$v_A = 4$ ft/s $\downarrow$

$a_A = 1.5$ ft/s² $\downarrow$

$v_B = 2.5$ ft/s $\downarrow$

$a_B = 2$ ft/s² $\downarrow$



Nombrando como A' a la polea móvil queda:

$y_A + y_{A'}$ = longitud de la cuerda que une a el cuerpo A con A'

$v_{A'} = 4j$ (Positivo hacia arriba)

Para la cuerda que está sobre la polea móvil tendremos:

$y_{B/A'} + y_{C/A}$ = longitud de la cuerda que une B con C

Derivando:

$v_{B/A'} + v_{C/A'} = 0$

$v_B - v_{A'} + v_C - v_{A'} = 0$ usando la definición de velocidad relativa; queda $v_B + v_C - 2v_{A'} = 0$

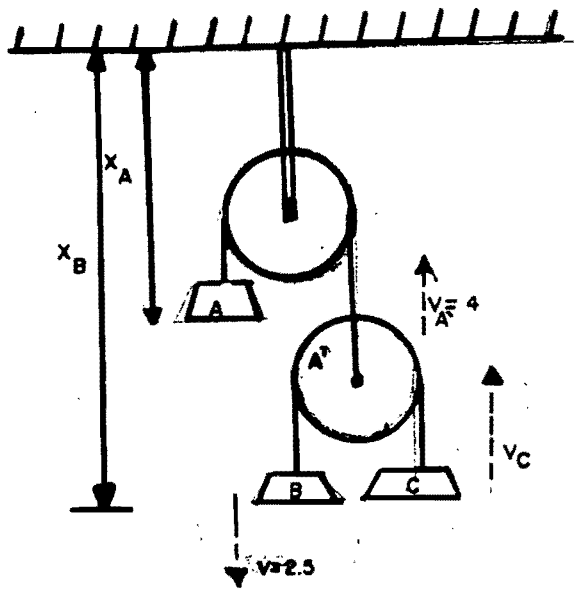
sustituyendo los datos: $-2.5\bar{j} + \bar{v}_C - 2(4\bar{j}) = \bar{0}$ (Positivo hacia arriba)

Quedando $\underline{v_C} = (8 + 2.5)j = \underline{10.5j}$

De igual manera $a_{A'} = 1.5j$

quedando $\underline{\bar{a}_C} = -\bar{a}_B + 2\bar{a}_{A'} = (2.0 + 3)\bar{j} = \underline{5.0\bar{j}}$ (Positivo hacia arriba)

DIAGRAMA DE VELOCIDADES



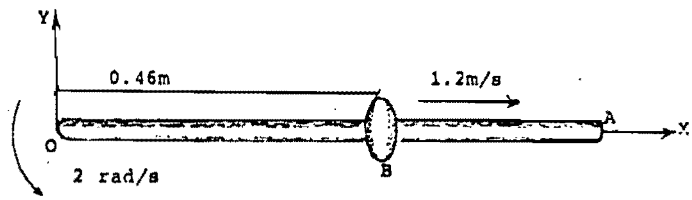
I.4- Un aeroplano "A" sobrevuela un aeropuerto a razón de 500km/h y rumbo E 10°N. En el instante considerado, otro aeroplano "B" despega de la pista del aeropuerto con una rapidez de 420 km/h y rumbo SW y con una rapidez ascencional de 9.14m/s. Determinar la velocidad relativa de "B" respecto a "A".

$$\bar{v}_A = 136.778\bar{i} + 24.117\bar{j}$$

$$\bar{v}_B = -82.99\bar{i} - 82.49\bar{j} + 9.14\bar{k}$$

$$\underline{\bar{v}_{B/A}} = \bar{v}_B - \bar{v}_A = \underline{-219.268\bar{i} - 106.607\bar{j} + 9.14\bar{k}}$$

I.5- La barra OA gira con una rapidez angular constante de 2 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en un plano horizontal, alrededor de un eje vertical que pasa por "O", como se muestra en la figura; mientras OA gira, un anillo "B" está deslizando hacia afuera, con una rapidez constante de 1.2m/s con respecto a OA. Determinar la velocidad de "B" cuando está a 0.46m de "O".



$\bar{r}_B = X\ \bar{I}$

$\bar{v}_B = \dot{X}\ \bar{I} + X\ \bar{\omega}\ \times\ \bar{I}$; si se tiene una $\bar{\omega}$ = k$\bar{\text{te}}$ (constante)

$\dot{X} = 1.2$; $\bar{\omega} = 2\ \bar{K}$, $X = 0.46$

$\bar{v}_B = 1.2\ \bar{I} + (0.46)\ (2\bar{K}\ \times\ \bar{I})$

$= 1.2\ \bar{I} + 0.92\bar{J}$

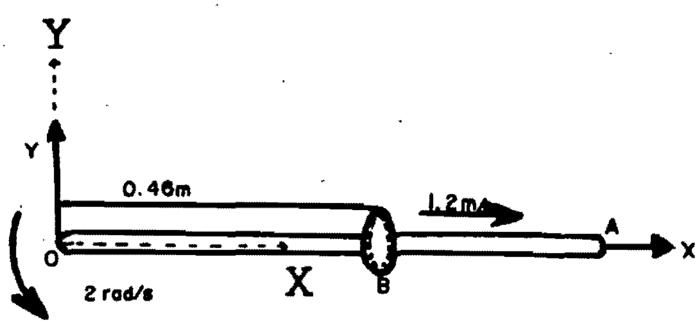
y como $\bar{I} = \bar{i}$

$\bar{J} = \bar{j}$

$\bar{v}_B = 1.2\bar{i} + 0.92\bar{j}$

La rapidez de B es igual: 1.51208 (m/s)

EJES FIJOS Y MOVILES CON EL MISMO ORIGEN



I.6 Determinar la aceleración de "B" en el problema anterior.

$\bar{a}_B = 2\,\dot{X}\,\bar{\omega} \times \bar{I} + X\,(-\omega^2)\,\bar{I}$ Como $\bar{\omega} = k\bar{t}e$ y $\dot{X} = cte$

$\bar{a}_B = 2\,(1.2)\,(2\,\bar{J}) - (0.46)\,(4)\,\bar{I}$

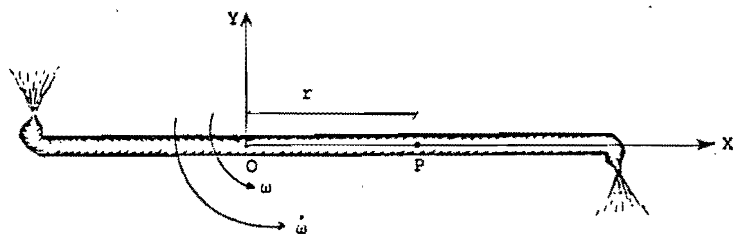
$= -1.84\bar{I} + 4.8\bar{J}$

y como $\bar{J} = \bar{i}$; $\bar{J} = \bar{j}$

$\bar{a}_B = -1.84\bar{i} + 4.8\bar{j}$

El acelerante de B = 5.1405 (m/s^2)

I.7- Un rociador hidráulico para un jardín gira con una velocidad angular ω y una aceleración angular $\dot{\omega}$, ambas en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se indica en la figura.
Si todas las partículas de agua se mueven con una rapidez constante v_0 respecto al tubo del rociador, determinar la aceleración de una partícula de agua en el punto P.



$$\bar{r} = X\,\bar{I}$$

$$\bar{v} = \dot{X}\,\bar{I} + X\omega\,\bar{J}$$

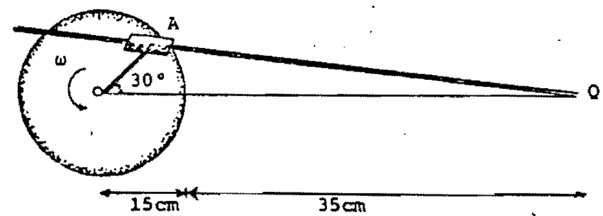
$$\bar{a} = 2\,\dot{X}\omega\,\bar{J} - X\omega^2\bar{I} + X\alpha\,\bar{J}$$

sustituyendo

$$\bar{a} = -\,r\,\omega^2\,\bar{I} + (2\,v_0\,\omega + r\,\dot{\omega})\,\bar{J}$$

De este último, los vectores unitarios mayúsculos se pueden sustituir por sus respectivos vectores unitarios minúsculos

I.8- Para el mecanismo de la figura, la rapidez angular de la manivela es de 20 rpm, y el largo de este elemento alcanza 15 cm. Halle la rapidez absoluta de la corredera y la rapidez relativa de ésta. con respecto al punto de la biela que se encuentra en coincidencia con ella.



$$\bar{v}_Q = \bar{v}_{OSM} + \dot{X}\,\bar{I} + \bar{\omega}_{SM} \times X\,\bar{I}$$

$$v_{OSM} = \bar{\omega}_A \times (15 \cos 30^\circ \bar{i} + 15 \text{ sen } 30^\circ \bar{j})$$ si se tiene:

$$\bar{\omega}_A = 2.0944\bar{k}$$

$$v_{OSM} = -15.708\bar{i} + 27.207\bar{j}$$

$$X = 37.7619 \quad ; \quad \dot{X} = 0 \quad ; \quad \bar{\omega}_{SM} = -\omega_{SM}\bar{k}$$

$$\bar{v}_Q = -15.708\bar{i} + 27.207\bar{j} - \omega_{SM}\, 37.7619\bar{J}$$ por ser $\dot{X} = 0$

Si se tiene $\bar{J} = (-\text{sen }(-11.4558)\bar{i} + \cos(-11.4558)\bar{j}\,)$

$$-v_Q\bar{i} + 0\bar{j} = -15.708\bar{i} + 27.207\bar{j} + (-7.5\bar{i} - 37\bar{j})\,\omega_{SM}$$

Igualando i con i, j con j

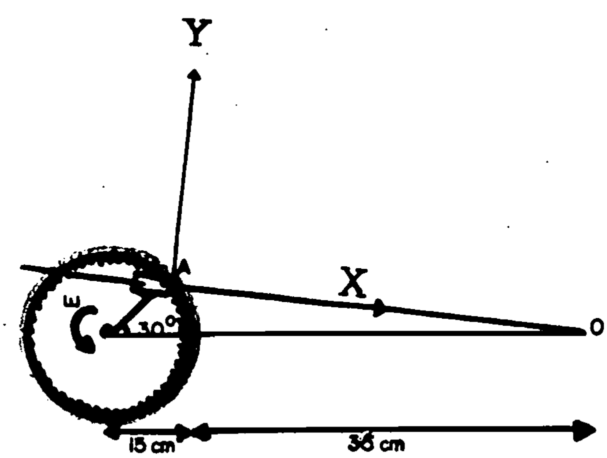
$$-v_Q = -15.708 - 7.5\,\omega_{SM}$$

$$0 = 27.207 - 37\,\omega_{SM}$$

Resolviendo

$$\omega_{SM} = \frac{27.207}{37} = .7353 \text{ s}^{-1}$$

ORIGEN DEL SISTEMA MOVIL EN A. EL EJE X DEL SISTEMA MOVIL TIENE UN ANGULO CON RESPECTO A LA HORIZONTAL= -11.4558°



$\underline{v_Q = 21.223 \text{ cm/s}}$

$\underline{\bar{v}_Q = -21.223\bar{i}}$

$\underline{v_{Q/A}} = .7353\ (37.7619) = \underline{27.7663 \text{ cm/s}}$

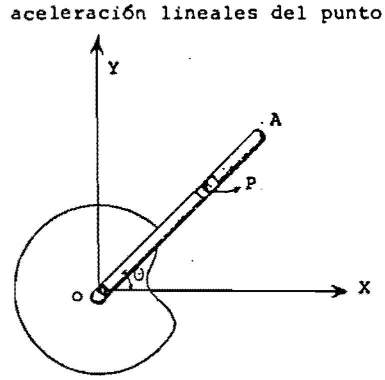
Nota: se usaron los subíndices OSM como origen del sistema móvil. Y SM como sistema móvil.

I.9- Una partícula "P" se localiza en la ranura de la barra OA y su movimiento está dado por:

$$r=a-b\cos\theta$$

$$\theta=\frac{1}{2}ct^2$$

en donde a, b y c son constantes. Determine la velocidad y la aceleración lineales del punto "P", sabiendo que a>b



$$\overline{r}_P = X\,\overline{I}$$

$$\overline{v}_P = \dot{X}\,\overline{I} + \overline{\omega} \times X\,\overline{I}$$

$$X = a - b\cos\theta$$

$$\dot{X} = b\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \;,\; \ddot{x} = b\,\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,(\theta) + b\,\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\overline{\omega} = \dot{\theta}\,\overline{k}$$

$$\overline{v}_P = b\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,(\theta)\,\overline{I} + \dot{\theta}(a - b\cos(\theta))\overline{J}$$

$$\theta = 1/2\,c\,t^2 \;,\; \dot{\theta} = c\,t \;,\; \ddot{\theta} = c$$

$$\overline{v}_P = b\,c\,t\;\mathrm{sen}\,(1/2\,c\,t^2)\,\overline{I} + (a\,c\,t - b\,c\,t\;\cos(1/2\,c\,t^2)\,\overline{J}$$

$$\overline{a}_P = (b\,c\;\mathrm{sen}\,(1/2\,c\,t^2) + (2b\,c^2\,t^2 - a\,c^2\,t^2)\cos(1/2\,c\,t^2)\overline{I} +$$

$$c\,(a - b\cos(1/2\,c\,t^2) + 2\,c\,t^2\,b\,\mathrm{sen}\,(1/2\,c\,t^2)\overline{J}$$

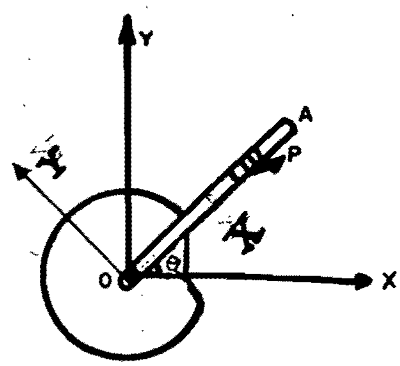
Donde $\overline{I} = \cos(1/2\,c\,t^2)\overline{i} + \mathrm{sen}\,(1/2\,c\,t^2)\overline{j}$

$\overline{J} = -\mathrm{sen}\,(1/2\,c\,t^2)\overline{i} + \cos(1/2\,c\,t^2)\overline{j}$

Este resultado se obtiene a partir de:

$$\bar{a}_P = \ddot{X}\,\bar{I} + \bar{\alpha} \times X\,\bar{I} - \omega^2 X\,\bar{I} + 2\,\bar{\omega} \times \dot{X}\,\bar{I}$$

ORIGEN DEL SISTEMA MOVIL EN O.

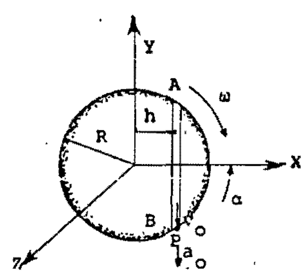


I.10- Una partícula "P" se mueve con una aceleración relativa constante a_o , de A hacia B, en la ranura AB de un disco giratorio. En el instante considerado, la partícula está en B con una rapidez v_o a lo largo de AB; el disco está girando con una rapidez angular ω en el sentido de las manecillas del reloj y con una aceleración angular α en sentido contrario, como se muestra en la figura. Determinar la velocidad y la aceleración de "P" si:

$h=3m$, $R=5m$ $v_o = 10m/s$, $a_o = 3m/s^2$,

$\omega=15$ rad/s y $\alpha= 3$ rad/s^2

9



$\overline{r}_P = \overline{O} + X\,\overline{I} + Y\,\overline{J}$

Para la velocidad

$\overline{v}_{relativa} = -v_o\overline{J} = -10\overline{J}$

$\overline{v}_{arrastre} = \overline{\omega} \times (X\,\overline{I} + Y\,\overline{J}) = -15\overline{K} \times (3\,\overline{I} - 4\,\overline{J}) = -60\overline{I} - 45\overline{J}$

$\overline{v}_P = -10\overline{J} - 60\overline{I} - 45\overline{J} = -60\overline{I} - 55\overline{J}$

Para la aceleración

$\overline{a}_{relativa} = -a_o\overline{J} = -3\overline{J}$

$\overline{a}_{arrastre} = \overline{\alpha} \times (3\overline{I} - 4\overline{J}) - \omega^2(3\overline{I} - 4\overline{J}) + 2\,\overline{\omega} \times (\dot{X}\,\overline{I} + \dot{Y}\,\overline{J})$

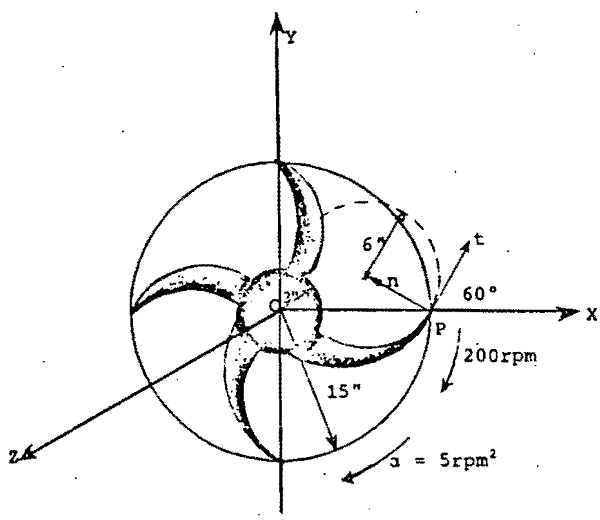
$= 3\,\overline{K} \times (3\overline{I} - 4\overline{J}) - 225\,(3\overline{I} - 4\overline{J}) - 2(15)\overline{K} \times (-10\overline{J})$

$= (12\overline{I} + 9\overline{J}) - 675\overline{I} + 900\overline{J} - (300\overline{I}) - 3\overline{J}$

$= -963\overline{I} + 906\overline{J}$

$\underline{\overline{a}_P} = \underline{-963\overline{I} + 906\overline{J}}$

I.11-Una partícula "P" de agua se mueve hacia afuera y a lo largo del aspa impulsora de una bomba centrífuga de agua, con una velocidad tangencial de 50m/s y una aceleración tangencial de $30 m/s^2$; relativas al extremo del aspa. Dado que el aspa gira con una aceleración constante de 5 rpm^2 , en el sentido indicado en la figura,determinar la velocidad y la aceleración de la partícula de agua en el instante en que abandona el aspa, cuando ésta gira con una rapidez de 200 rpm.



$\bar{r}_P = r_{OSM} + X\,\bar{I} + Y\,\bar{J}$; X = 0.381 para esta configuración Y = 0

Para la Velocidad:

$\bar{v}_{\text{relativa con respecto a el aspa}} = 50\,(.5)\bar{I} + 50\,(.866)\bar{J}$

$= 25\bar{I} + 43.301\bar{J}$

$\bar{v}_{arrastre} = \bar{\omega} \times X\,\bar{I} = -20.944\bar{K} \times .381\bar{I} = -\,7.9796\,\bar{J}$

$\underline{\bar{v}_P} = 25\,\bar{I} + (43.301 - 7.9796)\bar{J} = \underline{25\,\bar{I} + 35.321\,\bar{J}}$

Rapidez P = 272 m/s

Para la aceleración

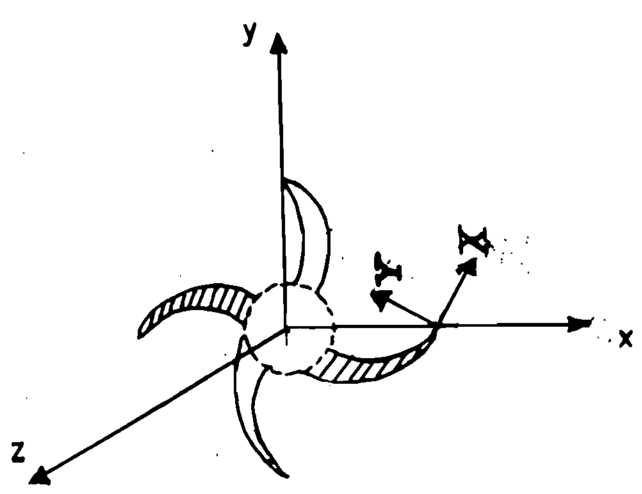
$\bar{a}_{\text{relativa con respecto a el aspa}}$

$\bar{a}_t + \bar{a}_N = (30\,(.5)\,\bar{I} + 30\,(.866)\,\bar{J}) + 16404.19\,((-.866)\bar{I} + .5\bar{J})$

$= (15\,\bar{I} + 25.98\,\bar{J}) + (-14206{,}201\,\bar{I} + 8202.099\,\bar{J})$

ORIGEN DEL SISTEMA MOVIL EN EL

EXTREMO DEL ALABE



$$= -14191.201\ \bar{I} + 8228.079\ \bar{J} = \ddot{X}\ \bar{I} + \ddot{Y}\ \bar{J}$$

$$\bar{a}_{arrastre} = \bar{\alpha} \times X\ \bar{I} - \omega^2\ X\ \bar{I} + 2\ \bar{\omega} \times (\dot{X}\ \bar{I} + \dot{Y}\ \bar{J})$$

recordando $\bar{v}_{relativa\ con\ respecto\ a\ el\ aspa}$ =

$\underline{\dot{X}\ \bar{I} + \dot{Y}\ \bar{J} = 25\ \bar{I} + 43.301\ \bar{J}}$

$$= -.00872\ \bar{K} \times .381\ \bar{I} - 20.944^2\ (.381)\bar{I} + 2(-20.944\bar{K}) \times (25\ \bar{I} + 43.301\ \bar{J})$$

$$= -0.00332\ \bar{J} - 167.12608\ \bar{I} - 1047.2\ \bar{J} + 1813.7923\ \bar{I}$$

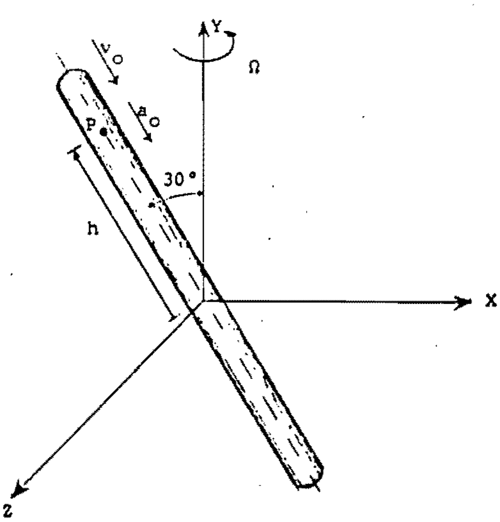
$$= 1646.666\ \bar{I} - 1047.2033\ \bar{J}$$

$$\underline{\bar{a}_P} = (-14191.201\ \bar{I} + 8228.074\ \bar{J}) + (1646.666\ \bar{I} - 1047.2033\ \bar{J})$$

$$= \underline{-12544.535\ \bar{I} + 7180.8757\ \bar{J}} \qquad (m/s^2)$$

10

I.12- Una partícula "P" se mueve con una aceleración relativa a_o dentro de un tubo recto inclinado, mientras que el tubo está girando con una velocidad angular constante Ω alrededor de un eje vertical. En el instante considerado la partícula se mueve con una rapidez v_o respecto al tubo. Cuando el tubo está en el plano YZ, determinar la velocidad y la aceleración de la partícula en la posición indicada en la figura.



$$\bar{r}_P = \bar{r}_{OSM} + Z\,\bar{K} + Y\,\bar{j}$$

Para v_P:

$$\bar{v}_{\text{relativa sobre OXY}} = -.866\, v_o \bar{j} - .5\, v_o\, \bar{k}$$

$$\bar{v}_{\text{arrastre}} = \Omega \bar{j} \times \bar{r} = \Omega \bar{j} \times (.8666\, h\, \bar{j} + .5\, h\, \bar{k}) = .5\, h\, \Omega\, \bar{I}$$

$$\underline{\bar{v}_P} = v_{\text{relativa}} + \bar{v}_{\text{arrastre}} = \underline{.5\, \Omega\, h\, \bar{I} - .866\, v_o \bar{j} - .5\, v_o \bar{k}}$$

Para a_P :

$$\bar{a}_{\text{relativa sobre OXY}} = -.866\, a_o \bar{j} - .5\, a_o \bar{k}$$

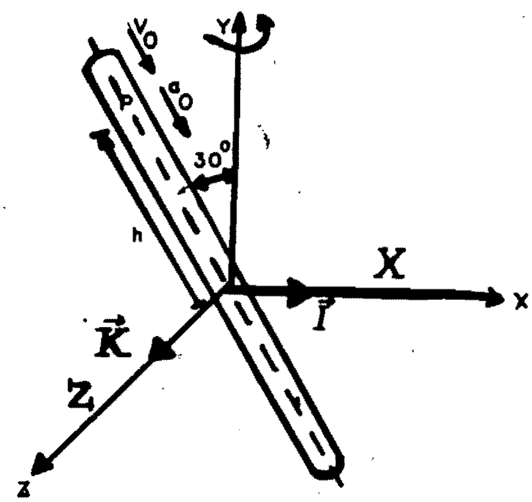
$$\bar{a}_{\text{arrastre}} = \dot{\bar{\Omega}} \times \bar{r}_{OSM} - \Omega^2\, Z\, \bar{K} + 2\, \bar{\Omega} \times \dot{Z}\, \bar{K}$$

Como $\Omega = kte$, $\dot{\Omega} = 0$, $Z = .5\, h$, $\dot{Z} = .5\, v_o$

$$= -.5\, \Omega^2\, h\, \bar{k} + 2\, \Omega\, (.5)\, v_o\, \bar{I}$$

$$\underline{\bar{a}_P} = \underline{\Omega\, v_o \bar{I} - .8666\, a_o \bar{j} - .5(a_o + \Omega^2\, h)\, \bar{K}}$$

SOLO LOS EJES "X" Y "Z" CAMBIAN DE DIRECCION:

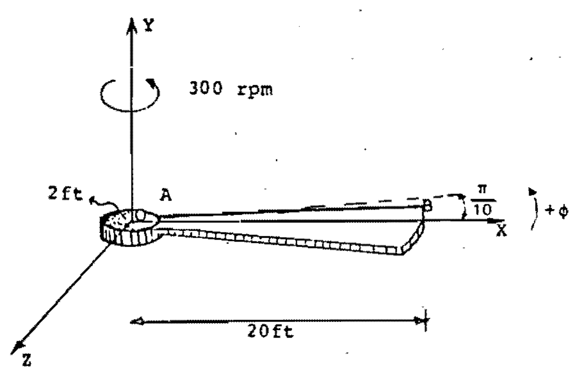


I.13- El aspa AB de un rotor de helicóptero está unida a la placa del rotor en "A", como se muestra en la figura. La placa está en el plano horizontal XOZ, el aspa ejecuta oscilaciones de cuerpo libre alrededor de A, hacia arriba y hacia abajo, de tal manera que:

$$\phi = \frac{\pi}{10} \text{ sen } 4\pi t$$

11

Determinar la velocidad y la aceleración del extremo B cuando el rotor gira a 300 rpm.



$\overline{r}_B = \overline{r}_{OSM} + X\ \overline{I} + Y\ \overline{J}$; $\Phi = \frac{\pi}{10}$ sen $(4\pi t)$

$\dot{\Phi} = \frac{2\pi^2}{5}$ cos $(4\pi t)$; si $\Phi = \frac{\pi}{10}$ por tanto el tiempo

$1 =$ ang sen $(4\pi t)$ y además $t = 1/8$ s

$\overline{v}_{\text{relativo sin giro } \Omega} = \dot{\overline{\Phi}} \times \overline{r}_{OSM} = \dot{\Phi}\ \overline{k} \times (r \cos(\Phi)\ \overline{I} + r\ \text{sen}(\Phi)\overline{J})$

$= \overline{0}$

$\dot{\Phi}\ (t = 1/8) = 0$; $r \cos\Phi\ \overline{I} + r\ \text{sen}\ \Phi\ \overline{J} = 20\ (\cos\ (\frac{\pi}{10})\overline{I} +$

$\text{sen}\ (\frac{\pi}{10})\overline{J})$

$$\bar{v}_{\text{relativa de arrastre}} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{OSM} = 31.416\bar{j} \times (19.0211\bar{i} + 6.1803\bar{j}) = -974.558\bar{k}$$

$$\bar{v}_B = -628.010\ \bar{k}$$

$$\ddot{\Phi} = -\frac{8\pi^3}{5} \text{ sen } (4\pi t) = -\frac{8\pi^3}{5} \quad \text{y } \dot{\Phi} = 0 \text{ para } t = 1/8 \text{ s}$$

$$\bar{a}_{\text{relativa sin giro}} = \ddot{\bar{\Phi}} \times \bar{r}_{OSM} = -\frac{8\pi^3}{5}\,\bar{k} \times r_{OSM} = (9.8884\bar{i} - 30.4336\bar{j})\,\pi^3$$

$$\Omega = \text{kte} \qquad \dot{\Omega} = 0$$

$$\bar{a}_{\text{relativa de arrastre}} = -\Omega^2 X\,\bar{I} + 2\,\bar{\Omega} \times \dot{X}\,\bar{I}$$

$$X = r \cos(\Phi)\ ;\ \dot{X} = -\dot{\Phi}\, r \text{ sen } (\Phi) \text{ pero } \dot{\Phi} = 0 \text{ para } t = 1/8 \text{ s}$$

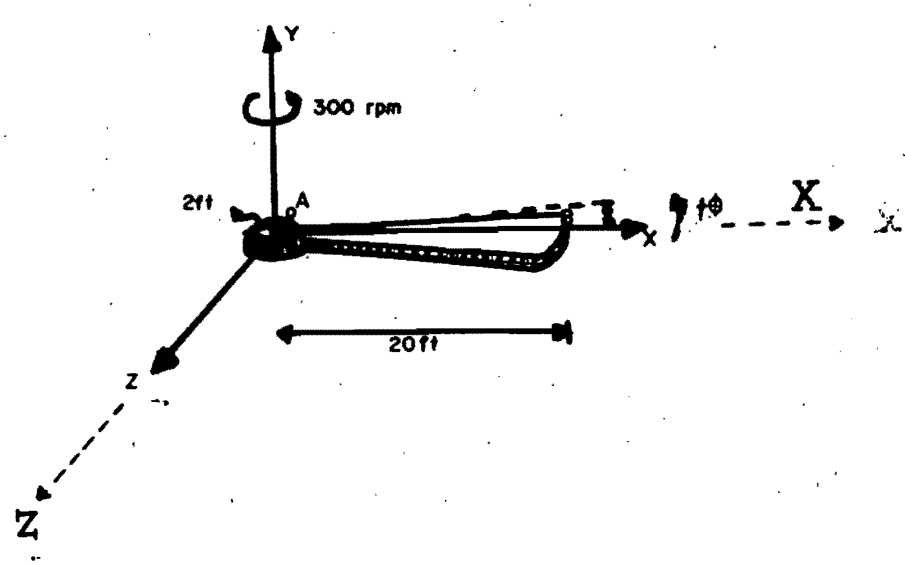
$$\bar{a}_{\text{relativa de arrastre}} = -(31.416)^2(19.0211\bar{i}) + \bar{0} = -18773.16\bar{i}$$

$$\bar{a}_B = -18466.55\bar{i} - 943.639\bar{j}$$

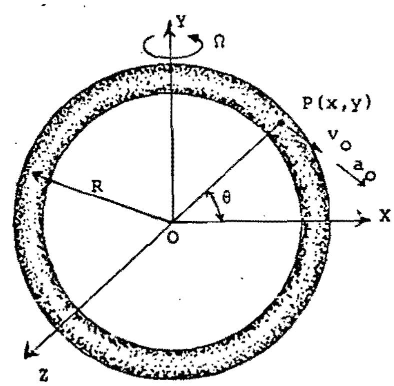
$$\bar{a}_B = \ddot{X}\bar{I} + 2\,\dot{X}\,\bar{\omega} \times \bar{I} - x\,\omega^2\,\bar{I} + \ddot{Y}\,\bar{J}$$

LOS EJES "X" Y "Z" CAMBIAN DE

DIRECCION



I.14- Una partícula "P" se mueve con una rapidez relativa constante v_o a lo largo de la periferia de un tubo circular de radio R, a la vez que el tubo gira con una velocidad angular constante Ω alrededor de un diámetro del tubo, como se muestra en la figura.
Dado que v_o aumenta uniformemente a razón de a_o por unidad de tiempo, determinar la velocidad y la aceleración de la partícula en la posición indicada.



$$\bar{r}_P = \bar{r}_{OSM} + X\,\bar{I} + Y\,\bar{J}$$
$$= \bar{r}_{OSM} + \bar{J}_{P/OSM}$$

velocidad relativa sin giro Ω $= \bar{\omega} \times \bar{r}_{OSM} = -\dot{\theta}\,\bar{k} \times (R\cos\theta\,\bar{I} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\bar{J})$

$$= \dot{\theta}\,R\,\mathrm{sen}\,(\theta)\bar{I} - \dot{\theta}\,R\cos(\theta)\,\bar{J})$$

$$v_o = \omega R$$

velocidad relativa sin giro $\dot{\theta}$:

$$\bar{\Omega} \times \bar{r}_{OSM} = \Omega\,\bar{J} \times (R\cos\theta\,\bar{I} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\bar{J})$$
$$= -\Omega\,R\cos(\theta)\,\bar{K}$$

$$\bar{v}_P = \bar{0} + \bar{v}_{\text{relativa sin giro }\Omega} + \bar{v}_{\text{relativa de arrastre}} =$$
$$= \dot{\theta}\,R\,\mathrm{sen}\,(\theta)\bar{I} - \dot{\theta}\,R\cos(\theta)\bar{J} - \Omega R\cos(\theta)\,\bar{K}$$
$$= v_o\,\mathrm{sen}\,(\theta)\bar{I} - v_o\cos(\theta)\bar{J} - \Omega\,R\cos(\theta)\,\bar{K}$$

$\bar{a}_P = \bar{a}_{\text{relativa sin giro } \Omega} + \bar{a}_{\text{relativa de arrastre}}$

$\bar{a}_{\text{relativa sin giro } \Omega} = \bar{\alpha} \times \bar{r}_{OSM} - \omega^2 \bar{r}_{OSM}$

así que $\alpha = \omega\, t$ $\quad \backsim \ddot{x}\, I + \ddot{y}\, \bar{j}$

$= - \omega t\, \bar{k} \times (R \cos(\theta)\bar{I} + R \operatorname{sen}(\theta)\bar{J}) -$

$v_o \omega \cos(\theta)\bar{I} - v_o \omega \operatorname{sen}(\theta)\bar{J}$

$= v_o t \operatorname{sen}(\theta)\bar{I} - v_o t \cos(\theta)\bar{J} - v_o^2/R \cos(\theta)\bar{I} -$

$v_o^2/R \operatorname{sen}(\theta)\bar{J}$

$\bar{a}_{\text{relativa de arrastre}} = \dot{\bar{\Omega}} \times \bar{r} - \Omega^2 X\, \bar{I} + 2\, \dot{X}\, \bar{\Omega} \times \bar{I}$

así que $X = R \cos\theta$, $\dot{X} = - \dot{\theta}\, R\, (-\operatorname{sen}(\theta))$

$= - \Omega^2 X\, \bar{I} + 2\, (\omega R \operatorname{sen}(\theta)\, (\Omega\, j \times \bar{I}) = - \Omega^2 R \cos\theta\, \bar{I} -$

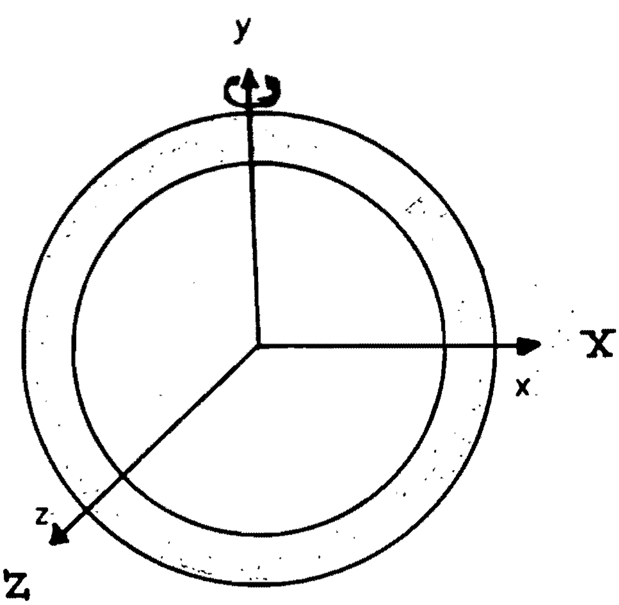
$2\, \Omega\, \omega R \operatorname{sen}(\theta)\bar{k}$

Así que $v_o\, t = a_o$ $\quad \omega R = v_o$

$\bar{a}_P = (a_o \operatorname{sen}(\theta) - \frac{v_o^2}{R} \cos(\theta) - \Omega^2 R \cos(\theta))\bar{I} - (a_o \cos(\theta) +$

$\frac{v_o^2}{R} \operatorname{sen}(\theta)\, j - 2\, \Omega\, v_o \operatorname{sen}(\theta)\, \bar{k}$

LOS EJES "X" Y "Z" TIENEN MOVIMIENTO:



I.15- Resolver el problema anterior suponiendo que, en el instante considerado, el tubo está girado con una velocidad angular Ω y una aceleración angular α.

Ahora $\dot{\bar{\Omega}} = \dot{\Omega}\ \bar{j}$

$\bar{v}$ es la misma, por tanto $\bar{v} = v_o \text{ sen } (\theta)\ \bar{i} - v_o \cos (\theta)\ \bar{j} - \Omega R \cos (\theta)\ \bar{k}$

$$\bar{a}_{arrastre} = \dot{\bar{\Omega}} \times \bar{r} - \omega^2\ \bar{r} + 2\ \bar{\Omega} \times \dot{X}\ \bar{I}$$

$$= \dot{\Omega}\ \bar{j} \times (R \cos (\theta)\bar{i} + R \text{ sen } (\theta)\bar{j}) - \omega^2\ \bar{r} + 2\ \bar{\Omega} \times \dot{X}\ \bar{I}$$

$$= - \dot{\Omega}\ R \cos (\theta)\bar{k} - \omega^2\ \bar{r} + 2\ \bar{\Omega} \times \dot{X}\ \bar{I}$$

Por tanto $\bar{a}_P = \bar{a}_{relativa} + \bar{a}_{arrastre}$

$$\bar{a}_P = (- \frac{v_o^2}{R} \cos (\theta) + a_o \text{ sen } (\theta) - R\ \Omega^2 \cos (\theta)\ )\ \bar{i}$$

$$- (\ \frac{v_o^2}{R} \text{ sen } (\theta) + a_o \cos (\theta)\ )\bar{j} - (2\ v_o\ \Omega \text{ sen}(\theta) + \dot{\Omega}\ R \cos (\theta)\bar{k}$$

II. CINEMATICA DEL CUERPO RIGIDO

II.1- Los vectores velocidad y aceleración de un cuerpo rígido dotado de un movimiento de translación coinciden. Se sabe que

$\bar{a} = 12i + 4j + 18k$

En un cierto instante, la rapidez del cuerpo es de 22 m/s. ¿Cuál es la velocidad del cuerpo 5 segundos más tarde?

$$\bar{e} = \frac{\bar{a}}{a} = .5454\ \bar{i} + 0.181818\ \bar{j} + 0.818181\ \bar{k}$$

$$\bar{v} = 22\ \bar{e} = 12\ \bar{i} + 4\ \bar{j} + 18\ \bar{k}$$

$$\bar{v}_f = (12 \times 5 + 12)\ \bar{i} + (4 \times 5 + 4)\ \bar{j} + (18 \times 5 + 18)\ \bar{k}$$

$$= 72\ \bar{i} + 24\ \bar{j} + 108\ \bar{k}$$

II.2- En cualquier instante, las componentes de la aceleración de los puntos P, Q y R de un cuerpo rígido que se translada son:

según el eje X'X: $\bar{a}_P = 8i \; [m/s^2]$

según el eje Y'Y: $\bar{a}_Q = 12j \; [m/s^2]$

según el eje Z'Z: $\bar{a}_R = 0$

En cierto momento, la rapidez del cuerpo alcanza 310 m/s, de suerte que para los puntos en cuestión:

según el eje X'X: $\vec{v}_P = 40i \; [m/s]$

según el eje Y'Y: $\vec{v}_Q = 60j \; [m/s]$

según el eje Z'Z: $\vec{v}_R > 0$

Encuentre la velocidad del cuerpo 4 segundos después del instante que corresponde a estos datos.

$$\bar{v}_{final} = (40 + 8\ (4)\ )\ \bar{i} + (60 + 12\ (4)\ )\ \bar{j} + v_R\ \bar{k}$$

siendo $v_R^2 = 310^2 - 40^2 - 60^2$ por ser constante esta componente

$$\bar{v}_{final} = 72\ \bar{i} + 108\ \bar{j} + 301.49\ \bar{k}$$

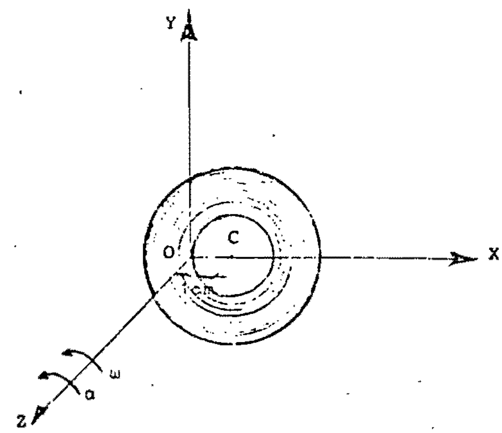
II.3- La velocidad y la aceleración de un cuerpo rígido que se translada coinciden en dirección. Suponiendo que: $\vec{a} = 36i + 12j + 54k$ $[m/s^2]$ y que, en cierto instante, la rapidez del cuerpo móvil alcance 44m/s, calcule la velocidad del sólido 5 segundos después del último acontecimiento.

$$\frac{\bar{a}}{a} = \frac{36\ \bar{i} + 12\ \bar{j} + 54\ \bar{k}}{(36^2 + 12^2 + 54^2)^{1/2}} = .5454\ \bar{i} + .1818\ \bar{j} + .8181\ \bar{k}$$

$\bar{v}_i = 44\ \frac{\bar{a}}{a}$ así que $\bar{a} = \bar{cte}$ $\qquad \bar{v} = \bar{v}_i + \bar{a}\ (t)$

$$\bar{v}_f = 44\ \frac{\bar{a}}{a} + (36(5)\ \bar{i} + 12\ (5)\ \bar{j} + 54\ (5)\ \bar{k}) = 204\ \bar{i} + 68\ \bar{j} + 306\ \bar{k}$$

II.4- Un disco circular gira excéntricamente en el plano XOY, alrededor del eje z, con una velocidad angular ω y una aceleración angular α, ambas en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Si en el instante considerado: ω = 8 rad/s y α = 2 rad/s². Hallar la velocidad y la aceleración del centro "C" en la posición mostrada.



$\bar{\omega} = 8\ \bar{k}$ $\qquad \bar{\alpha} = 2\ \bar{k}$ $\qquad \bar{r} = \bar{i}$

$\underline{\bar{v}_c} = \bar{\omega} \times \bar{r} = 8\ \bar{k} \times \bar{i} = \underline{8\ \bar{j}}$

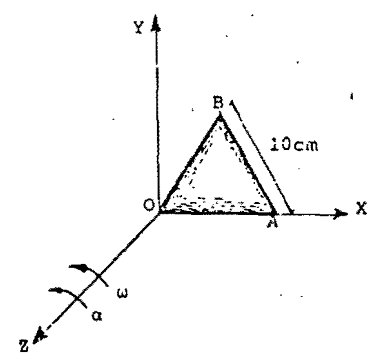
$\bar{a}_c = \bar{\alpha} \times \bar{r} - \omega^2\ \bar{r} = 2\ \bar{j} - 64\ \bar{i}$

II.5- Una placa OAB cuya forma es de un triángulo equilátero gira en el plano XOY, alrededor del eje Z, con una velocidad angular ω y una aceleración angular α, ambas en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Dado que:

$\omega = 5$ rad/s; $\alpha = 1$ rad/s²

en el tiempo considerado, determinar las velocidades y las aceleraciones de los vértices A y B.

· 15 ·



$$\bar{v}_A = 5\ \bar{k} \times 10\ \bar{i} = 50\ \bar{j}$$

$$\bar{v}_B = 5\ \bar{k} \times (10 \cos 60^\circ\ \bar{i} + 10 \operatorname{sen} 60^\circ\ \bar{j}) = -43.301\ \bar{i} + 25\ \bar{j}$$

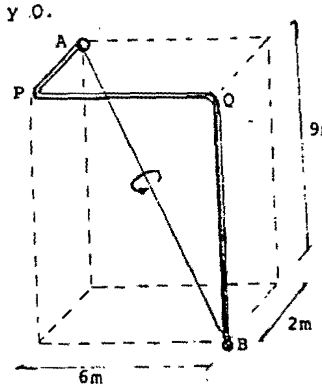
$$\bar{a}_{N_A} = 5\ \bar{k} \times 50\ \bar{j} = -250\ \bar{i}$$

$$\bar{a}_A = -250\ \bar{i} + \bar{k} \times 10\ \bar{i} = -250\ \bar{i} + 10\ \bar{j}$$

$$\bar{a}_{N_B} = 5\ \bar{k} \times (-43.301\ \bar{i} + 25\ \bar{j}) = -125\ \bar{i} - 216.505\ \bar{j}$$

$$\underline{\bar{a}_B} = -125\ \bar{i} - 216.505\ \bar{j} + \bar{k} \times (5\ \bar{i} + 8.6602\ \bar{j}) = \underline{-133.66\bar{i} - 211.505\bar{j}}$$

II.6- La barra alabeada de la figura gira uniformemente en torno de los cojinetes colocados en A y B. Si lo hace a razón de 60rpm en el sentido indicado, encontrar la velocidad y la aceleración de los puntos P y Q.



$$\bar{e}_{eje} = \frac{-2\,\bar{i} - 6\,\bar{j} + 9\,\bar{k}}{(4 + 36 + 81)^{1/2}} = -\frac{2}{11}\,\bar{i} - \frac{6}{11}\,\bar{j} + \frac{9}{11}\,\bar{k}$$

$$\bar{\omega} = \frac{6.0 \times 2\pi}{60}\,\bar{e} = -\frac{4\pi}{11}\,\bar{i} - \frac{12\pi}{11}\,\bar{j} + \frac{18\pi}{11}\,\bar{k}$$

$$\bar{r}_{P/A} = 2\,\bar{i} \qquad \bar{r}_{Q/A} = (2\,\bar{i} + 6\,\bar{j})$$

$$\underline{\bar{v}_P} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{P/A} = \frac{36\pi}{11}\,\bar{j} + \frac{-24\pi}{11}\,\bar{k} = \underline{\frac{12\pi}{11}\,(3\,\bar{j} + 2\,\bar{k})}$$

$$\bar{v}_Q = \frac{\pi}{11}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -12 & 18 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{108\,\pi\,\bar{i}}{11} + \frac{36\pi}{11}\,\bar{j} + (-24 + 24)\,\frac{\pi}{11}\,\bar{k}$$

$$= \underline{\frac{36}{11}\,\pi\,(-3\,\bar{i} + \bar{j})}$$

$$\bar{a}_P = \bar{\omega} \times \bar{v}_P = \frac{12\ \pi^2}{11^2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -12 & 18 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{12\ \pi^2}{121} \left((-24\ -54)\ \bar{i} + (8)\bar{j} + (-12\ \bar{k}) \right)$$

$$= \underline{\frac{24\ \pi^2}{121} (-39\ \bar{i} + 4\ \bar{j} - 6\ \bar{k})}$$

$$\bar{a}_Q = \bar{\omega} \times \bar{v}_Q = \frac{36\,\pi^2}{121} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -12 & 18 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{36\ \pi^2}{121} \quad (-18\bar{i}\ -54\bar{j} + (-4\ -36)\bar{k})$$

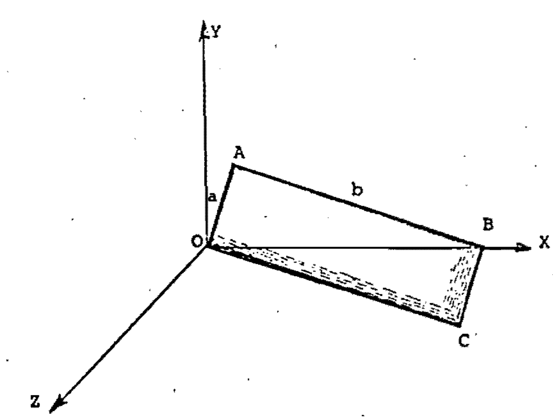
$$= \frac{72\ \pi^2}{121} \quad (-9\ \bar{i}\ -27\ \bar{j}\ -20\ \bar{k})$$

II.7- Una placa rectangular OABC, de lados a y b, gira alrededor de la diagonal OB; en el instante considerado, la placa está en el plano XOY. Dado que la velocidad y la aceleración de A son:

$\bar{v}_A = 60\ k$ [cm/s]

$\bar{a}_A = -300j$ [cm/s²]

y suponiendo que a = 15 cm y b = 20 cm, determinar la velocidad angular y la aceleración angular de la placa.



$\bar{v}_A = 60\ \bar{k}$ $\qquad\qquad \bar{a}_A = 300\ \bar{j}$

$\bar{v}_A = \bar{\omega}\ \bar{i} \times \bar{r}_A$

$\left|\bar{v}_A\right| = \left|\bar{\omega}\right| \left|\bar{r}_A\right|$ sen (α) por tanto $= \dfrac{v_A}{r_A \text{ sen } (\alpha)} = \dfrac{60}{15(20/(15^2+20^2)^{1/2})} = 5$

$\overline{\omega}_A = 5\ \overline{i}$

como sólo existe $\overline{a}_N = \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})$

$$= 5\ \overline{i} \times (5\ \overline{i} \times (9\ \overline{i} + 12\ \overline{j}))$$

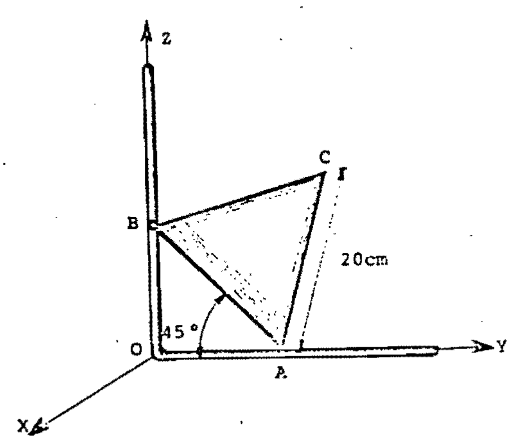
$$= 5\ \overline{i} \times (60\ \overline{k}) = -300\ \overline{j}$$

$\overline{a}_t = \overline{0}$ porque $\overline{\alpha} = \overline{0}$

II.8- Dos vértices de una placa triangular equilátera se mueven en las ranuras guiadas, como se indica en la figura; en el instante considerado:

$$\bar{v}_A = -10\,j \quad [cm/s] \quad ; \quad \bar{a}_B = -2K \quad [cm/s^2]$$

Determinar la velocidad y la aceleración del vértice C, que se está moviendo en el plano YOZ.



$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + Y\,(-\omega\,\bar{I} \times \bar{J})$$

$$\bar{v}_B = v_B\,K \quad ; \quad Y = -20 \quad ; \quad \bar{\omega} = -\omega\,\bar{I} \quad ; \quad y = -20$$

por tanto $\quad v_B\,\bar{k} = -10\,\bar{j} + 20\,(-\text{sen}\,(-45^o)\,\bar{j} + \cos\,(-45^o)\,\bar{k})\,\omega$

$$= -10\,\bar{j} + 20\,(.7071\,\bar{j} + .7071\,\bar{k})\,\omega$$

$$v_B\,\bar{k} = -10\,\bar{j} + 14.1421\,\omega\,\bar{j} + 14.1421\,\omega\,\bar{k}$$

$0 = -10\,\bar{j} + 14.1421\,\omega\,\bar{j}$ por tanto $\omega = 0.7071$ (rad/s) $\uparrow$

$v_B = 14.1421$ $v_B = 10$ (cm/s) $\uparrow$

$\bar{a}_A = \bar{a}_B + Y\,(\alpha\,\bar{I} \times \bar{J}) - Y\,\omega^2\,\bar{J}$; $\bar{\alpha} = \alpha\bar{k}$; $Y = 20$

$\bar{a}_A = -2\,\bar{k} + 20(.7071\bar{j} + .7071\bar{k})\,\alpha - 20(.5)(.7071\bar{j} - .7071\bar{k})$

$a_A\,\bar{j} = -2\,\bar{k} + 14.1421\,\bar{j} + 14.1421\,\alpha\,\bar{k} - 7.071\,\bar{j} + 7.071\,\bar{k}$

$a_A = 14.1421\,\alpha\,\bar{j} - 7.071\,\bar{j}$ $\alpha = 0.3585$ (rad/s^2)

$0 = -2\,\bar{k} + 14.1421\,\alpha\,\bar{k} + 7.071\,\bar{k}$ $a_A = 12.142$ (cm/s^2)

$\bar{v}_C = \bar{v}_B + (-0.7071\,\bar{I}) \times (20\cos(15^\circ)\,\bar{j} + 20\,\text{sen}\,(15^\circ)\,\bar{k})$

$= 14.1421\,\text{sen}\,(15^\circ)\,\bar{j} + (10\,\bar{k} - 14.1421\cos(15^\circ)\,\bar{k})$

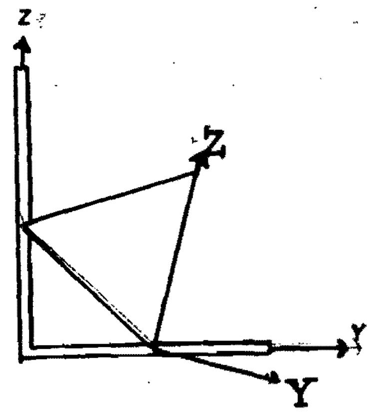
$= \underline{3.6602\,\bar{j} - 36602\,\bar{k}}$

$\bar{a}_C = \bar{a}_B + (-.3585\,\bar{I}) \times (20\cos 15^\circ\bar{j} + 20\,\text{sen}\,15^\circ\,\bar{k}) -$
$(.5)(20\cos(15^\circ)\,\bar{j} + 20\,\text{sen}\,(15^\circ)\bar{k})$

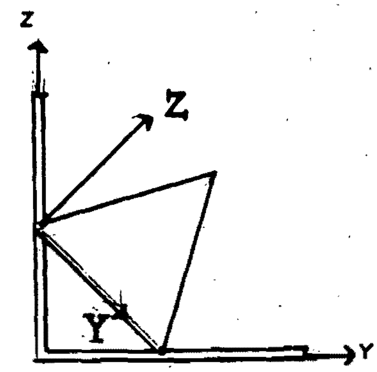
$= -2\,\bar{k} + 1.8557\,\bar{J} - 6.9256\,\bar{k} - 9.65925\,\bar{j} - 2.58819\,\bar{k}$

$= -7.80355\,\bar{j} - 11.51379\,\bar{k}$

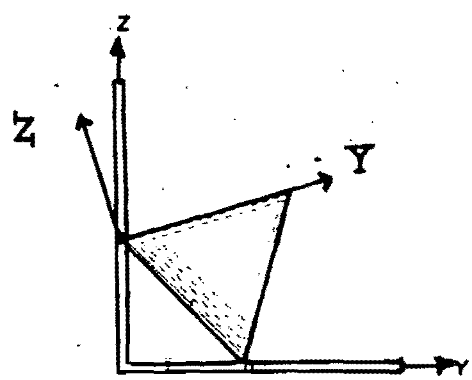
[redacted]apidez
[redacted]ngular



para la acelera
ción angular



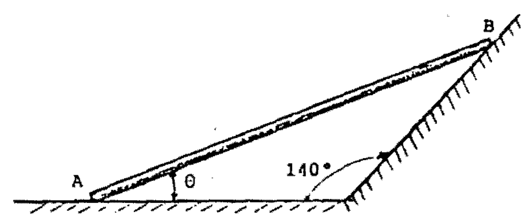
[redacted]



Ejes para el cálculo de
la aceleración $_c$.

[redacted]

II.9- La varilla de 1 m de longitud que se muestra en la figura se des liza hacia abajo de tal suerte que la velocidad del punto A es de 2.2 m/s, hacia la izquierda, y la aceleración de B es de 2.5 m/s² hacia la derecha. Determinar el valor de la velocidad angular ω y el de la aceleración angular α de la barra cuando θ = 25°.



A priori

$$\bar{v}_B = v_B\,(-\cos 40^\circ\ \bar{i} - \text{sen } 40^\circ\ \bar{j})$$

Por otra parte:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + X\ \bar{\omega} \times \bar{I}$$

Así que $\bar{\omega} = -\omega\,\bar{k}$

$$-\cos 40^\circ\ v_B\ \bar{i} - \text{sen } 40^\circ\ v_B\ \bar{j} = -2.2\ \bar{i} - X\,\omega\,\bar{J}$$

$$= -2.2\ \bar{i} - \omega\,(-.4226\ \bar{i} + .9063\ \bar{j})$$

quedando

$$-\cos 40^\circ\ v_B = -2.2 + .4226\ \omega$$

$$-\text{sen } 40^\circ\ v_B = -.9063\ \omega$$

resolviendo

$$v_B = 2.0641 \quad (\text{m/s})$$

$$\omega = 1.46401 \quad (\text{rad/s})$$

por tanto

$$\bar{\omega} = -1.46401\ \bar{k}$$

+ (MODIFICACION: a_A en lugar de a_B)

Para las aceleraciones $\bar{a}_A = 2.5\ \bar{i}$

A priori $\bar{a}_B = a_B\ (\cos 40^\circ\ \bar{i} + \text{sen}\ 40^\circ\ \bar{j})$

Por otra parte: $\bar{a}_B = \bar{a}_A + X\,\alpha\,\bar{j} - X\,\omega^2\,\bar{I}$ así que $\bar{\alpha} = \alpha\,\bar{k}$

$$\bar{a}_B = 2.5\ \bar{i} + \alpha\ (-\text{sen}\ 25^\circ\ \bar{i} + \cos 25^\circ\ \bar{j}) - 2.1433\ (\cos 25^\circ\ \bar{I} + \text{sen}\ 25^\circ\ \bar{J})$$

$$a_B \cos 40^\circ\ \bar{i} + a_B\ \text{sen}\ 40^\circ\ \bar{j} = 2.5\ \bar{i} - \alpha\ \text{sen}\ 25^\circ\ \bar{I} + \alpha \cos 25^\circ\ \bar{j} - 2.1433 \cos 25^\circ\ \bar{I} - 2.1433\ \text{sen}\ 25^\circ\ \bar{J}$$

quedando:

$$a_B \cos 40^\circ = 0.55746 - \alpha\ \text{sen}\ 25^\circ$$
$$a_B\ \text{sen}\ 40^\circ = -.905818 + \alpha \cos 25^\circ$$

resolviendo

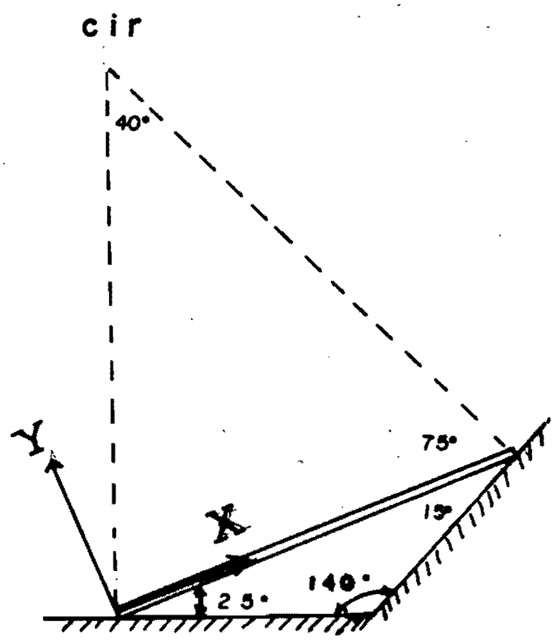
$$a_B = .12673\ m/s^2$$
$$\alpha = 1.08934\ m/s^2$$

por lo tanto

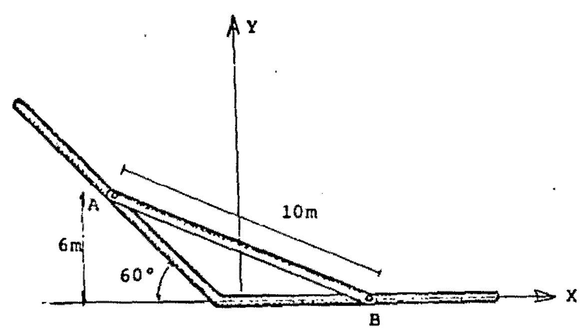
$$\bar{\alpha} = -1.08934\ \bar{k}$$

. . . .

Se modificó la aceleración porque en el cuarto renglón dice 2.5 m/s^2 hacia la derecha.


cir
40°
75°
15°
Y
X
140°
25°

II.10- Los extremos de la barra AB, cuya longitud es de 10 m, se mueven en las ranuras guiadas . Para la posición mostrada en la figura, el extremo "B" tiene una velocidad de 3 cm/s y una aceleración de 2 m/s², ambas hacia la derecha. Determinar la velocidad y la aceleración de "A" en ese instante.



$$\text{Rapidez angular} = \frac{3}{10.618} = 002825$$

$$\text{Rapidez}_A = \text{rapidez angular } (9.237)$$

$$= 2.609787$$

$$\text{por tanto} \quad \bar{r}_A = 2.609787\,(\cos 60^\circ\, \bar{i} - \text{sen } 60^\circ\, \bar{j})$$

$$= 1.3048\, \bar{i} - 2.26\, \bar{j}$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B + X\, \bar{\omega} \times \bar{I} \qquad \text{si} \quad X = -10$$

$$v_A\,(\cos 60^\circ\, \bar{i} - \text{sen } 60^\circ\, \bar{j}) = 3\, \bar{i} - 10\,(\omega)\,(-\text{sen }(\nu)\, \bar{i} + \cos(\nu)\, \bar{j})$$

$$0.5\, v_A\, \bar{i} - 0.866\, v_A\, \bar{j} = (3 - 6\,\omega)\, \bar{i} - 8\,\omega\, \bar{j}$$

Queda Resolviendo

$$0.5\, v_A = 3 - 6\,\omega \qquad \vdots \qquad v_A = 2.60978$$

$$-.866\, v_A = -8\,\omega \qquad \vdots \qquad \omega = 0.2825$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + X\, \bar{\alpha} \times \bar{I} - X\, \omega^2\, \bar{I} \qquad \text{si } X = -10 \text{ e } \bar{I} = \cos \nu\, \bar{i} + \text{sen } \nu\, \bar{j}$$

$$0.5\, a_A \bar{i} - .866\, a_A\, \bar{j} = 2\, \bar{i} - 6\,\alpha\, \bar{i} - 8\,\alpha\, \bar{j} + 0.6384\, \bar{i} - 0.4788\, \bar{j}$$

Queda

$$0.5\ a_A = 2.63845 - 6\,\alpha$$

$$-.866\ a_A = -.478836 - 8\,\alpha$$

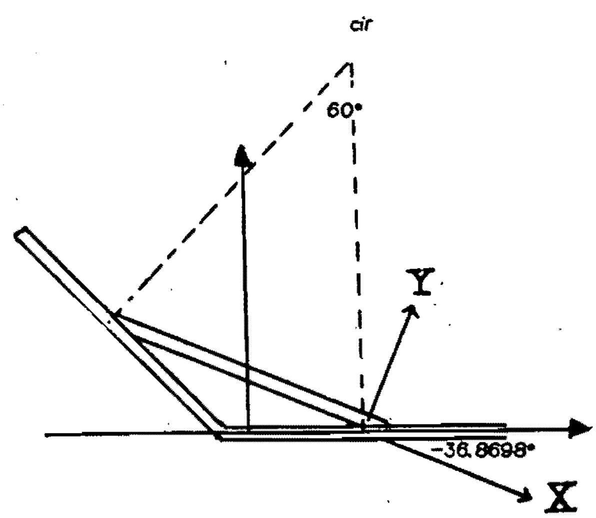
Resolviendo

$$a_A = 2.60767$$

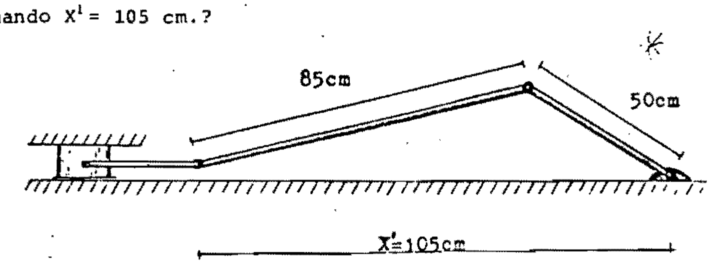
$$\alpha = 0.22243$$

$$\bar{a} = 0.5\ a_A\ \bar{i} - .866\ a_A\ \bar{j}$$

$$= 1.303839\ \bar{i} - 2.25831\ \bar{j}$$



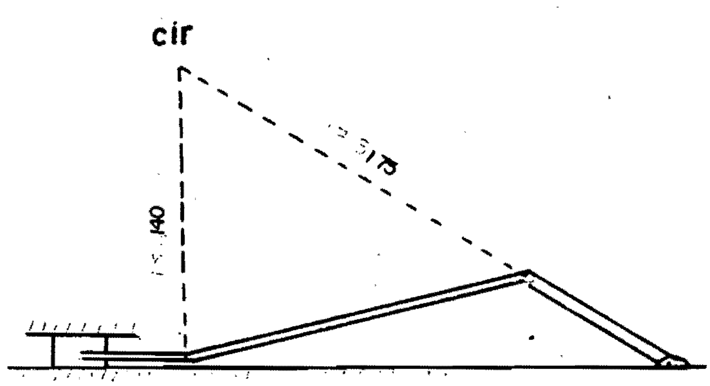
II.11- En el mecanismo de la figura, la manivela gira con una rapidez angular constante de 10 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. ¿Cuál será la rapidez del émbolo "D" cuando $X^1 = 105$ cm.?



$$\text{Rapidez angular} = \frac{10\ (50)}{(175 - 50)} = 4 \quad \text{rad/s}$$

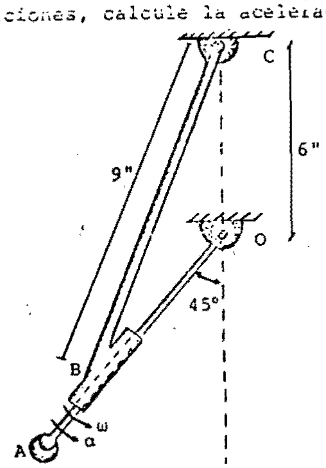
$$\text{Rapidez del émbolo} = 4\ (140)$$

$$= 560\ (\text{cm/s})$$



II.12- En el mecanismo de la figura, la rapidez angular del péndulo es: $\omega = 10s^{-1}$, en tanto que el módulo de la aceleración angular es :

$\alpha = 28s^{-2}$. Estos parámetros se miden cuando el eje centroidal de la pieza forma un ángulo de 45°con la vertical. Bajo tales condiciones, calcule la aceleración angular de la barra CB.



$$\text{Arrastre} = \bar{\alpha}_{OB} \times \bar{r}_{OB} - \omega_{OB}^2\,\bar{r} + 2\,\bar{\omega}_{OB} \times \dot{X}\bar{I} =$$

$$28\bar{k}x\ (-2.6124\bar{I} - 2.6124\bar{J}) - 100(-2.6124\bar{I} - 2.6124\bar{J}) + 20\dot{X}(-.7071\bar{I} + .7071\bar{J})$$

$$= 73.1487\bar{I} - 73.1487\bar{J} + 261.24\bar{I} + 261.24\bar{J} - 14.142\dot{X}\bar{I} + 14.142\dot{X}\bar{J}$$

$$= (334.388 - 14.142\dot{X})\ \bar{I} + (188.09126 + 14.142\ \dot{X})\ \bar{J}$$

además $\bar{v}_B$ arrastre $= \bar{\omega}_{OB} \times \bar{r}_{OB} = 10\bar{k} \times (-2.6124\bar{I} - 2.6124\bar{J})$

$$= 26.124\ \bar{I} - 26.124\ \bar{J}$$

$\bar{v}_{relativa} = \dot{X}\,\bar{I}$; $\bar{a}_{relativa} = \ddot{X}\,\bar{I}$ si $\bar{I} = \cos 45^{\circ}\,\bar{I} + \text{sen}\ 45^{\circ}\,\bar{J}$

por tanto $\bar{v}_B = (26.124 + 0.7071\,\dot{X})\,\bar{I} + (-26.124 + .7071\,\dot{X})\,\bar{J}$ $\underline{1}$

$\bar{a}_B = (334.388 - 14.142\,\dot{X} + .7071\,\ddot{X})\,\bar{I} + (188.09126 + 14.142\,\dot{X} + .7071\,\ddot{X})$ $\underline{2}$

Ahora partiendo de C

$\bar{v}_B = \bar{\omega}_{OC} \times \bar{r}_{OC} = \omega_{OC}\,\bar{k} \times (-2.612471\,\bar{i} - 8.61249\,\bar{j}) =$

$= 8.61249\,\omega_{OC}\,\bar{i} - 2.612471\,\omega_{OC}\,\bar{j}$ $\underline{I}$

Igualando $\underline{1}$ con $\underline{I}$ Resolviendo

$26.124 + .7071\,\dot{X} = 8.61249\,\omega_{OC}$ ⋮ $\omega_{OC} = 4.6546$

$-26.124 + .7071\,\dot{X} = -2.61247\,\omega_{OC}$ ⋮ $\dot{X} = 19.7481$

Si $\bar{a}_B = \bar{\alpha}_{OC} \times (-2.61247\,\bar{I} - 8.61249\,\bar{J}) - \omega_{OC}^2(-2.61247\bar{I} - 8.61249\bar{J}) =$

$= (8.61249\,\alpha_{OC} + 2.61247\,\omega_{OC}^2)\bar{I} + (-2.61247\,\alpha_{OC} + 8.61249\omega_{OC}^2)\bar{J}$ $\underline{II}$

Igualando $\underline{II}$ con $\underline{2}$

$8.61249\,\alpha_{OC} + 56.6 = 55.11036 + .7071\,\ddot{X}$

$-2.61247\,\alpha_{OC} + 186.592 = 467.3688 + .7071\,\ddot{X}$

Resolviendo

$\ddot{X} = -304.17$

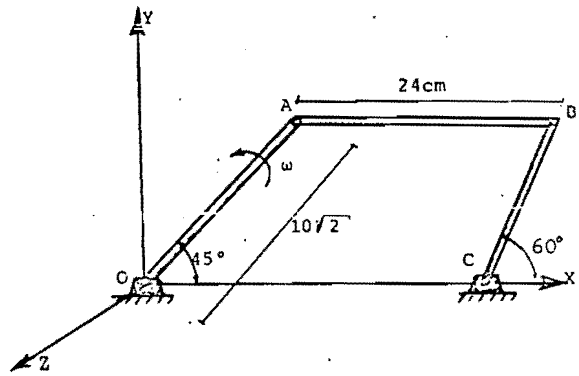
$\underline{\alpha_{OC} = -25.146}$

Por tanto $\bar{\alpha}_{OC} = -25.146\,\bar{k}$

II.13- La barra OA de un mecanismo de cuatro articulaciones que se mueve en el plano XOY tiene una velocidad angular de 6 rad/s, en el sentido y en la posición mostradas. Determinar:

a) Las velocidades angulares de las barras AB y BC.

b) Las velocidades de B y del punto medio D de AB



$\overline{v}_A = 6\ \overline{k} \times (10\ \overline{i} + 10\ \overline{j})$

$\quad = -60\ \overline{i} + 60\ \overline{j}$

Por otra parte

$\overline{v}_A = \overline{v}_B + \overline{\omega}_{AB} \times X\ \overline{I}$

$\overline{v}_B = -\ \omega_{CB}\ 10\ \overline{i} + \omega_{CB}\ 5.733\ \overline{j}$

ω_{AB} se supone negativo

$\overline{\omega}_{AB} \times -24\ \overline{I} = \omega_{AB}\ 24\ \overline{j}$

así que $\overline{v}_A = (-\ \omega_{CB}\ 10)\ \overline{i} + \omega_{CB}\ 5.733\ \overline{j} + \omega_{AB}(24)\ \overline{j}$

por tanto $-60\ \overline{i} + 60\ \overline{j} = (-10\ \omega_{CB})\ \overline{i} + 5.733\ \omega_{CB}\ \overline{j} + 24\ \omega_{AB}\ \overline{j}$

el sistema será

$-60 = -10\ \omega_{CB}$

$60 = 5.733\ \omega_{CB} + 24\ \omega_{AB}$

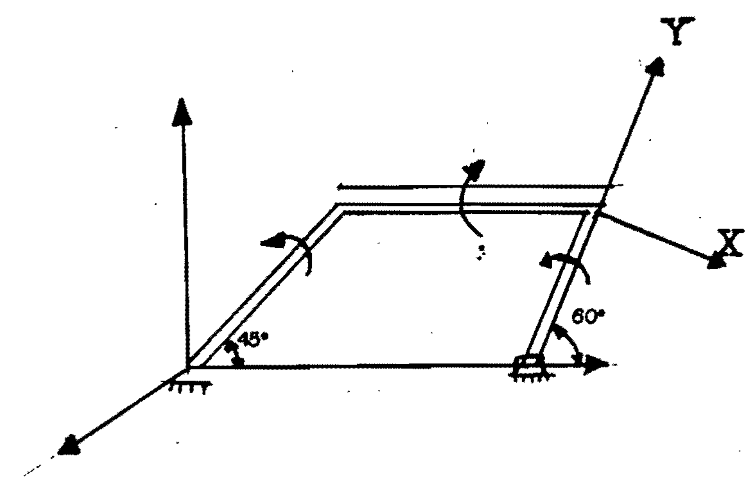
por tanto

$\omega_{CB} = 6\ \overline{k}$

$\omega_{AB} = 1.0667\ \overline{k}$

$$\bar{v}_B = -6.0\ (10)\ \bar{i} + 6.00\ (5.733)\ \bar{j}$$
$$= -60\ \bar{i} + 34.398\ \bar{j}$$

$$\bar{v}_{punto\ medio} = \underline{1/2\ (\bar{v}_A + \bar{v}_B)} = 1/2\ (-120\ \bar{i} + 94.398\ \bar{j})$$
$$= \underline{-60\ \bar{i} + 47.199\ \bar{j}}$$



II.14- La barra OA del problema anterior tiene una aceleración angular de 3 rad/s², en el sentido contrario al de las manecillas, en el instante considerado. Determinar las aceleraciones angulares de AB y BC.

$$\bar{a}_A = \bar{\alpha}_{OA} \times (10\,\bar{i} + 10\,\bar{j}) - \omega_{OA}^2\,(10\,\bar{i} + 10\,\bar{j})$$

$$= 3\,\bar{k} \times (10\,\bar{i} + 10\,\bar{j}) - 36\,(10\,\bar{i} + 10\,\bar{j})$$

$$= -30\,\bar{i} + 30\,\bar{j} - 360\,\bar{i} - 360\,\bar{j}$$

$$= -390\,\bar{i} - 330\,\bar{j}$$

Por otra parte $\bar{a}_B = \bar{\alpha}_{CB} \times (5.773\,\bar{i} + 10\,\bar{j}) - \omega_{CB}^2\,(5.773\bar{i} + 10\bar{j})$

suponiendo α_{CB} positivo

$$\bar{a}_B = -\alpha_{CB}\,(10)\,\bar{i} + \alpha_{CB}\,(5.773)\,\bar{j} - 207.828\,\bar{i} - 360\,\bar{j}$$

quedando $\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{\alpha}_{AB} \times (-24\,\bar{i}) - \omega_{AB}^2\,(-24\,\bar{i})$

suponiendo α_{AB} negativo

$$\bar{a}_A = (-10\,\alpha_{CB} - 207.828)\bar{i} + (5.773\,\alpha_{CB} - 360)\bar{j} + 27.3083\bar{i} + 24\,\alpha_{AB}\bar{j}$$

y además $\bar{a}_A = -390\,\bar{i} - 330\,\bar{j}$

Resolviendo

$$-390 = -10\,\alpha_{CB} - 180.5196$$

$$-330 = 5.773\,\alpha_{CB} - 360 + 24\,\alpha_{AB}$$

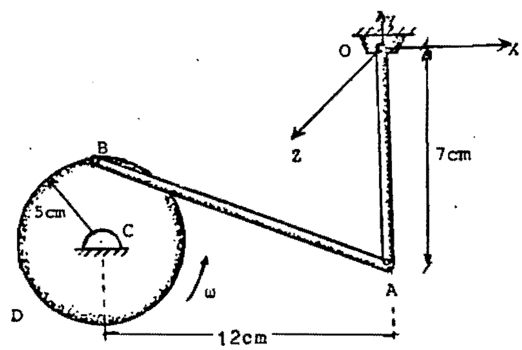
$$\underline{\alpha_{CB} = 20.9}$$

$$\alpha_{AB} = -3.788$$

por tanto

$$\alpha_{AB} = 3.788\,\bar{k}$$

II.15- El disco "D", situado en el plano XOY, tiene un radio de 5 cm y gira con una velocidad angular constante $\omega = 8$ rad/s, en el sentido de las manecillas del reloj. El disco está unido a la barra AB, que a su vez está unida a la barra OA.
Determinar la velocidad y la aceleración del punto A para la posición mostrada.



Como A y B tienen velocidad horizontal $\omega_{BA} = 0$

por tanto $\bar{v}_B = 8\ (5)\ \bar{i} = 40\ \bar{i}$

$\bar{v}_A = 40\ \bar{i}\ ,\quad \omega_{OA} = 40/7 = 5.7142$

$\bar{a}_B = -\ \omega^2\ r_{CB}\ \bar{j} = -64\ (5)\ \bar{j} = -320\ \bar{j}$

proponiendo α_{AB} positiva

$\bar{a}_{relativa} = \alpha_{AB}\ \bar{k} \times 13\ \bar{I} = -13\ \alpha_{AB}\ \bar{J}$ si $\omega_{AB} = 0$ y $\dot{X} = 0$

si $\bar{J} = -\text{sen}\ 22.6198^\circ\ \bar{i} + \cos\ 22.6198^\circ\ \bar{j}$

por tanto $\bar{a}_{relativa} = (-5\ \bar{i} + 12\ \bar{j})\ \alpha_{AB}$

$\bar{a}_A = -5\ \alpha_{AB}\ \bar{i} + (12\ \alpha_{AB} - 320)\ \bar{j}$

y por otra parte

$a_N = \omega_{OA}^2\ r = 228.5714\ \bar{j}$

$a_t = -\ \alpha_{OA}\ 7\ \bar{i}$ proponiendo α_{OA} negativa

también $\bar{a}_A = -\alpha_{OA}\ 7\ \bar{i} + 228.5714\ \bar{j}$

por tanto, resolviendo

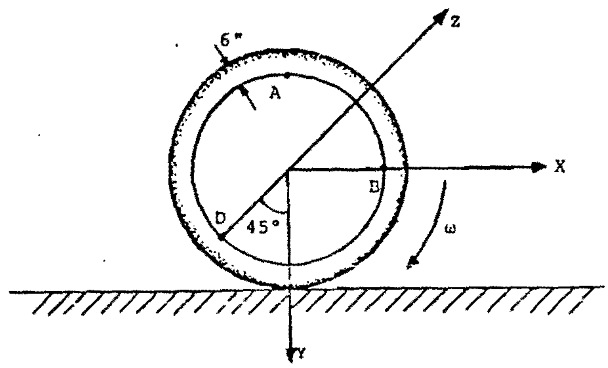
$- \alpha_{OA}\, 7 = -5\ \alpha_{AB}$ ⋮ $\alpha_{AB} = 45.714283$

$12\ \alpha_{AB} - 320 = 228.5714$ ⋮ $\alpha_{OA} = 32.65306$

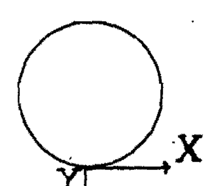
Por tanto

$$\bar{a}_A = -32.65306\ (7)\ \bar{i} + 228.5714\ \bar{j}$$

$$= \underline{-228.57\ \bar{i} + 228.5714\ \bar{j}}$$



II.16- Una rueda de 5 ft de diámetro tiene rodamiento perfecto a lo largo de un plano horizontal. El espesor del aro de la rueda es de 6 in. Usando el método del centro instantáneo determine las velocidades de A, B y D, cuando la rueda está girando a razón de 12 rad/s.

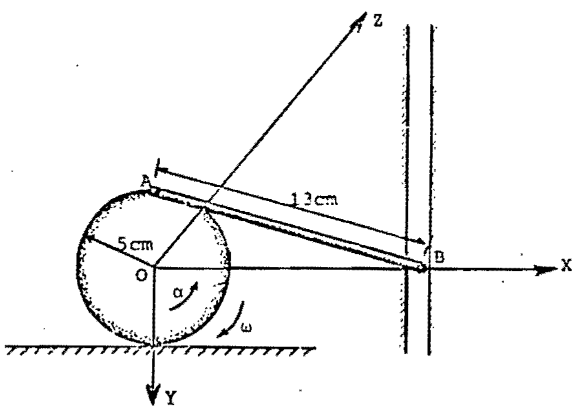


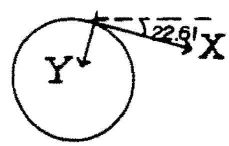
$$\bar{v}_A = 12\,\bar{k} \times -54\,\bar{j} = 648\,\bar{i}\ (\text{pul/s})$$
$$= 54\,\bar{i}\ (\text{pies/s})$$

$$\bar{v}_B = 12\,\bar{k} \times (24\,\bar{i} - 30\,\bar{j}) = 360\,\bar{i} + 288\,\bar{j}\ (\text{pul/s})$$
$$= 30\,\bar{i} + 24\,\bar{j}\ (\text{pies/s})$$

$$\bar{v}_D = 12\,\bar{k} \times (-16.9704\,\bar{i} - 13.0296\,\bar{j})$$
$$= 156.355\,\bar{i} - 203.6448\,\bar{j}\ (\text{pul/s})$$
$$= 13.0296\,\bar{i} - 16.9704\,\bar{j}\ (\text{pies/s})$$

II.17- El disco "O" tiene rodamiento perfecto con una velocidad angu-
lar $\omega = 8$ [rad/s] y una aceleración angular $\alpha = \dot{\omega} = -2$ [rad/s²]
La barra AB está ligada a la periferia del disco en su extremo
A y el extremo B se está moviendo a lo largo de una guía verti-
cal. Halle la velocidad y la aceleración de B, sin usar el mé-
todo del centro instántaneo.





$\overline{v}_A = 8\ \overline{k} \times -5\ \overline{j} + 40\ \overline{i} = 80\ \overline{i}$

$\overline{v}_B = 80\ \overline{I} + \overline{\omega}_{AB} \times X\ \overline{I}$

$= 80\ \overline{I} + \omega_{AB}\ (13)\ \overline{J}$ si $\overline{J} = \text{sen}\ (22.6198^o)\ \overline{i} + \cos\ (22.6198^o)$

A priori

$a\ \overline{i} + v_B\ \overline{j} = 80\ \overline{i} - \omega_{AB}\ (5)\ \overline{i} + \omega_{AB}\ (12)\ \overline{j}$

Resolviendo

$0 = 80 - 5\ \omega_{AB}$ $\quad\vdots\quad$ $\omega_{AB} = 16$

$v_B = 12\ \omega_{AB}$ $\quad\vdots\quad$ por tanto $\quad \overline{v}_B = 192\ \overline{j}$

$$\bar{a}_A = -20\ \bar{i} + \omega^2\ (5)\ \bar{j} = -20\ \bar{i} + 320\ \bar{j}$$

$$\bar{a}_B = -20\ \bar{i} + 320\ \bar{j} - \omega_{AB}^2\ \bar{i} + (-\ \bar{\alpha}_{AB}) \times \bar{i}$$

$$= -20\ \bar{i} + 320\ \bar{j} - 256\ (12\ \bar{i} + 5\ \bar{j}) - \alpha_{AB}(-5\ \bar{i} + 12\ \bar{j})$$

A priori $0\ \bar{i} - a_B\ \bar{j}$ así que:

Resolviendo

$0 = -3092 + 3\ \alpha_{AB}$	$\alpha_{AB} = 618.4$ en contra de las manecillas del reloj.
$-a_B = -960 - 12\ \alpha_{AB}$	$a_B = 8380.8$

II.18- Utilizando el método del centro instantáneo, determine la velocidad del vértice C en el problema II.8.

$$\omega = \frac{(2)^{1/2} \quad 10}{20} = \frac{1}{(2)^{1/2}}$$

Por tanto $\underline{v_B} = \frac{1}{(2)^{1/2}} \left(\frac{20}{(2)^{1/2}}\right) = \underline{10}$ (hacia arriba)

II.19- Usando el método del centro instántaneo resuelva el problema anterior, para la velocidad de B.

$$\omega = \frac{8\ (10)}{5} = 16$$

$$v_B = 16\ (12) = 192 \qquad \text{(hacia abajo)}$$

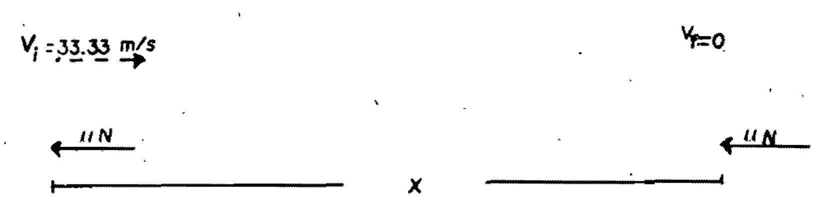
III DINAMICA DE LA PARTICULA
(MOVIMIENTOS RECTILINEOS)

III.1- Un automóvil que se mueve a razón de 120 km/h, sobre una pista horizontal recta, frena repentinamente. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.6 ¿qué distancia recorre el automóvil antes de detenerse al derrapar sobre el piso?

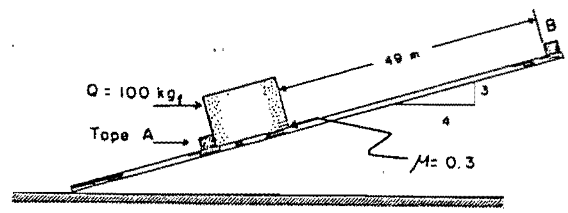
$$\overline{F}_R = m\,a \qquad -\mu W = \frac{W}{g}\,a \quad ; \quad -0.6\ (9.81) = a \quad ; \quad -5.886 = a \quad m/s^2$$

$$120\ Km/h = 33.33\ m/s \quad ; \quad -5.886 = \frac{v\ \delta v}{\delta x} \quad ; \quad -5.886\ \delta x = v\ \delta v$$

$$-5.886 \int_0^x \delta x = \frac{v^2}{2} \Bigg|_{33.333}^{0} \quad ; \quad x = \frac{33.333^2}{2\ (5.886)} = 94.3859\ m$$



III.2- Una caja que pesa 50 kg_f se mueve sobre un plano inclinado debido a la acción de una fuerza Q, horizontal y de módulo constante. ¿Cuánto tardará en llegar al punto B, el cual dista 49 m del punto de partida?. El tope A evita que la caja deslice hacia abajo antes de aplicar la fuerza Q.



$\overline{F}_R = m\ a$

a) Solución de la Ecuación Diferencial

$$20 = \frac{50}{9.81} \quad \frac{\delta^2}{\delta t^2} \; ; \; 3.924 = \ddot{x}$$

$$(c_1 + c_2\ t + c_3\ t^2) = x \quad ; \quad c_2 + 2c_3\ t = \dot{x} \quad ; \quad 2\ c_3 = \ddot{x}$$

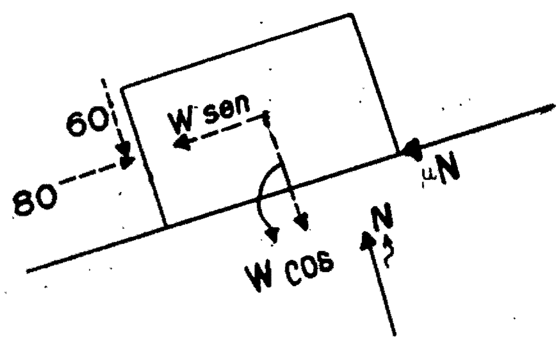
Para $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$; $c_1 + c_2\ (0) + c_3\ (0)^2 = 0$

por tanto $c_1 = 0$ y $c_2 + 2\ c_3(0) = 0$

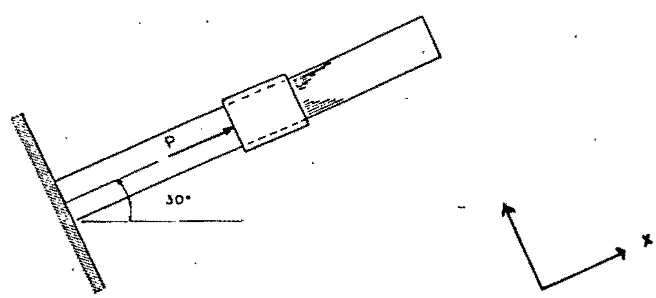
por tanto $c_2 = 0$, $2\ c_3 = 3.94$

$c_2 = 0$; $c_3 = 1.962$; $c_1 = 0$ por tanto $x = 1.962\ t^2$

$t = (\frac{49}{1.962})^{1/2} = 4.9974$ s = 5 s



III.3- Una corredera de 9.81 kg_f de peso se mueve partiendo del reposo sobre la varilla indeformable mostrada. Si en el instante en que la corredera alcanza una rapidez de 5 m/s se le aplica una fuerza constante P, paralela a la varilla, ¿cuál será la magnitud de P capaz de detener la corredera en un metro de recorrido?. El coeficiente de fricción entre la corredera y la varilla es 0.1



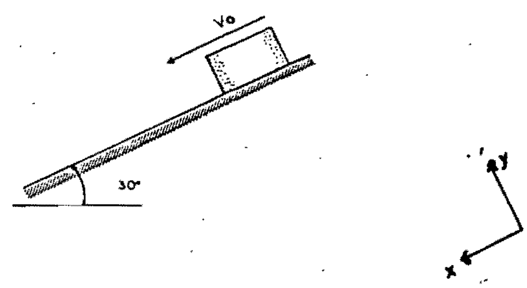
$$P - 4.055429 = \frac{9.81}{9.81} a \qquad \text{si} \quad v_x \frac{\delta v_x}{\delta x} \quad \text{y} \quad \Big| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \quad ; \quad \Big| \begin{matrix} 0 \\ -5 \end{matrix}$$

son los límites

$$(4.055429 - P) = \frac{v_x^2}{2} \Big| \begin{matrix} 0 \\ -5 \end{matrix}$$

$$4.055429 - P = -\frac{25}{2} \quad ; \quad P = 4.055429 + 12.5 = 16.5554 \text{ m/s}$$

III.4- El paquete de la figura que pesa 10 kg_f se lanza hacia abajo sobre plano inclinado, con una rapidez de 3 m/s. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es $\sqrt{3}/2$, determine la velocidad del móvil después de haberse desplazado 3 m a lo largo del plano, así como la distancia que deberá recorrer desde el punto en que se lanzó hasta donde se detendrá.



$\Sigma F_y = 0$

de ahí $N = W \cos 30^{o}$

$\Sigma F_x = m\ a$

$- \mu N + W \text{ sen } 30^{o} = \frac{W}{g} a$

$$- \frac{(3)^{1/2}}{2} (10) \cos (30^{o}) + 10 \text{ sen } 30^{o} = \frac{10}{9.81} \quad v \frac{\delta v}{\delta x}$$

o

$9.81 (-.25) \quad \delta x = v\, \delta v$

Integrando

$$-2.4525 \int_{0}^{0.3} \delta x = \int_{3}^{v_f} v\, \delta v$$

$- 0.73575 = \frac{v_f^2 - 9}{2}$ despejando:

a) $\underline{v_f} = \underline{2.7438}$ (m/s)

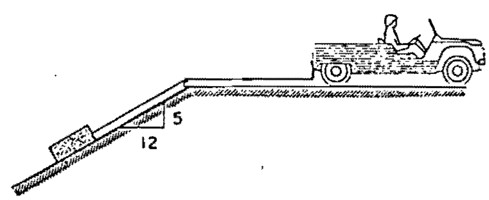
para el segundo inciso queda la integral

$$-2.4525 \int_0^d \delta x = \int_3^0 v \, \delta v$$

$$-2.4525 \, d = \frac{3^2}{2}$$ despejando:

b) distancia d = 1.8348 m

III.5- Una camioneta jala un bloque de acero que pesa 1 300 kg_f, como lo indica la figura, el que al ascender sobre el plano inclinado se mueve uniformemente a razón de 10.8 km/h. Si el módulo de la tensión ejercida por el cable es constante, el coeficiente de fricción en todo instante vale 0.2 y el peso del cable es despreciable, ¿qué distancia horizontal recorrerá el bloque hasta alcanzar una rapidez de 21.6 km/h, considerando que el bloque siempre está en contacto con el piso?.



Si se mueve con velocidad uniforme para cualquier instante $\bar{v} = 10.8\ \bar{i}$ del coche. Además falta dar el peso del coche. Este problema es más apropiado, con sus correcciones pertinentes, ponerlo en dinámica de una partícula.

III.6- Un bloque que pesa 19.62 kg_f descansa sobre una superficie horizontal lisa. Si a partir de t = 0 se le aplica una fuerza paralela al plano cuyo módulo está dado por Q = 12 t - 3 t (Q está en kg_f y t en s), ¿cuánto tiempo tardará el bloque antes de cambiar el sentido inicial de su movimiento y cuál será su máxima velocidad antes de que esto ocurra?.

Proponiendo Q = 12 t - 3

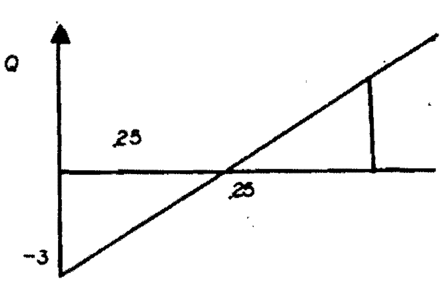
v_{max} para Q = 0 por tanto t = 0.25 s

1) A los 0.5 segundos cambia de sentido

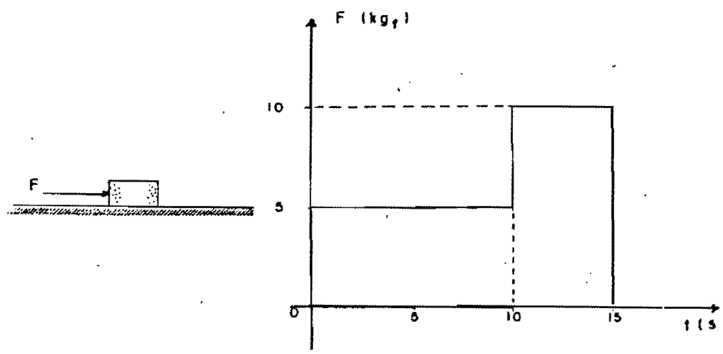
$$v_f = \frac{\Sigma A}{m} + v_i = \frac{-.375 + .375}{2} + 0 = 0$$

2) $$v_{max}\ (t = .25\ s) = \frac{-.375}{2} = -.1875$$

$$\bar{v}_{max} = -.1875\ \bar{I}\ \ (m/s)$$



III.7- Una fuerza horizontal actúa sobre una partícula cuyo peso es 9.81 kg_f . Si la fuerza es función del tiempo y sus características están dadas en la gráfica, calcule el módulo de la velocidad y la distancia recorrida por la partícula cuando t = 30 s, sabiendo que ésta parte del reposo.



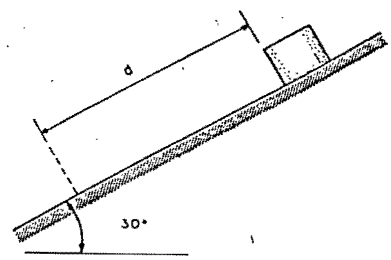
$$v_f = \frac{\Sigma A}{m} + v_i \quad ; \quad x_f = \frac{\Sigma \text{ Momentos Estáticos}}{m} + v_i\, t + x_i$$

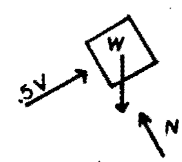
$$v_f = \frac{50 + 50}{1} + 0 = 100 \quad (m/s)$$

$$x_f = \frac{50\ (25) + 50\ (17.5)}{1} + 0\ (30) + 0 = 2125 \quad (m)$$

$\underline{d = 2125 \text{ m}}$

III.8- Un bloque que pesa 19.62 kg_f se suelta en la posición que muestra la figura. Si la resistencia al movimiento del bloque es directamente proporcional a la rapidez de éste, a razón de 0.5 $kg_f \cdot \frac{s}{m}$, ¿cuál será la distancia d recorrida por el bloque cuando alcanza una rapidez de 11.20 m/s ?





$$9.81 - .5\ v = 2\ \frac{v\ \delta v}{\delta x} \quad \text{de} \quad \Sigma F_x$$

$$\frac{1}{2} \int_0^d \delta x = \int_0^{51.2} \frac{v}{9.81 - .5\ v}\ \delta v$$

$$\frac{1}{2}\ x = -\frac{v}{.5} - \frac{9.81}{.25}\ \ln\ (9.81 - .5\ v)\ \Bigg|_0^{11.2}$$

$$= -\frac{11.2}{.5} - \frac{9.81}{.25}\ \ln\ (9.81 - 5.6) + 0 + \frac{9.81}{.25}\ \ln\ (9.81)$$

$$= \frac{9.81}{.25}\ (-\ln\ (4.21) + \ln\ (9.81))\ -22.4$$

$$= 39.24\ (2.28 - 1.44) - 22.4$$

$$= 39.24\ (.8459) - 22.4$$

$2\ (1/2)\ \ddot{x} = d$

21.58 m

$t = 3.38$ s

III.9- Un proyectil cuyo peso es de 10 t_f sale disparado verticalmente debido a la acción de sus cohetes impulsores, los cuales ejercen sobre él un empuje de 40 t_f durante todo el movimiento. Si la resistencia del aire se considera de magnitud 20 v en kg_f, para v en m/s, determine la altura a la que alcanzará una rapidez de 300 m/s.

$$\Sigma F_y = m\,a$$

$$-20\,v - 10{,}000 + 40{,}000 = \frac{10{,}000}{9.81}\,a$$

o

$$-20\,v + 30{,}000 = \frac{10{,}000}{9.81}\,a$$

Separando variables cuando $a = v\,\dfrac{\delta v}{\delta x}$

$$(-20\,v + 30{,}000)\,\delta x = \frac{10{,}000}{9.81}\,v\,\delta v$$

$$\frac{9.81}{10{,}000}\int_0^h \delta x = \int_0^{300}\frac{v\,\delta v}{-20\,v + 30{,}000}$$

$$\frac{9.81}{10{,}000}\,h = \frac{v}{-20} - \frac{30{,}000}{400}\ln(-20\,v + 30{,}000)\Bigg|_0^{300}$$

valuando límites

$$\frac{9.81}{10{,}000}\,h = (-771.4356 + 773.1714)$$

despejando

Altura $\underline{h} = \underline{1769.469}$ m

IV DINAMICA DE LA PARTICULA
(MOVIMIENTOS CURVILINEOS)

IV.1- Una partícula de 1.5 kg_f de peso se mueve sobre un plano horizontal liso, describiendo una trayectoria circular de 50 cm de radio, con una rapidez lineal constante de 2 m/s, como lo indica la figura. Si cuando t=0 la partícula coincide con el eje x, describa el movimiento usando coordenadas rectangulares y determine también la fuerza necesaria para mantener dicho movimiento.

$x = .50\ (\cos(\omega t))$ $\qquad$ $y = .50\ (\text{sen}\ (\omega t))$

Usando coordenadas intrínsecas:

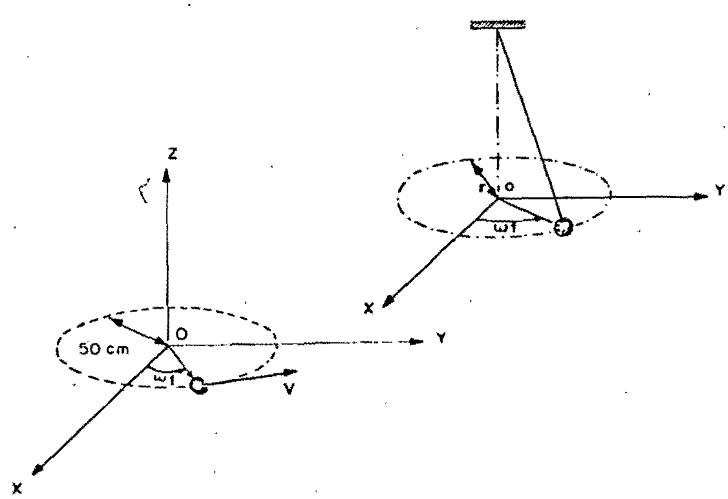
$$F_N = \frac{W}{g} a_N \quad \text{por tanto} \quad \underline{F_N} = \frac{1.5}{9.81}\ \frac{v^2}{0.5} = \frac{1.5}{9.81}\ \frac{(2)^2}{.05}$$

$$= \underline{1.223\ \ K\overline{g}}$$

Y en coordenadas rectangulares $\overline{F_N} = 1.223\ (-\cos(\omega t)\bar{i} - \text{sen}(\omega t)\bar{j})$

IV.2- Un péndulo cónico de longitud L, cuya péndola pesa W, describe un círculo horizontal definido por las ecuaciones paramétricas: $x = r \cos \omega t$ $\quad y = r \operatorname{sen} \omega t$

Donde r es el radio de la trayectoria y ω es la rapidez angular, constante, del radio vector que fija la posición de la péndola. Determine la magnitud de la tensión en la cuerda y demuestre que es constante.



Componente de T en la dirección radial es:

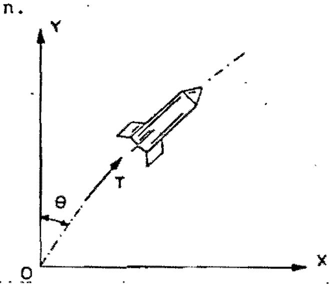
$$T_N = T \left(\frac{r}{L}\right)$$

y $\Sigma F_n = m \; \omega^2 \; r$

Por tanto $\quad T \left(\frac{r}{L}\right) = \frac{W}{g} \; \omega^2 \; r$

Así que $\quad \underline{T = \frac{W}{g} L \; \omega^2}$

IV.3- El movimiento del cohete de la figura es producido por una fuerza T, tangente a la trayectoria y está programado para una variación cuya ley es $\theta = kt$, donde k es una constante y t el tiempo. Cuando $t = 0$, el cohete se encuentra en el origen del sistema de referencia y la componente vertical de la velocidad es v_o. Determine las coordenadas de la posición del móvil, como funciones del tiempo, considerando que el peso y el empuje T permanecen constantes en magnitud. Desprecie las fuerzas de fricción.



$$\overline{T} = T\,(\cos(90 - \theta)\,\overline{i} + \text{sen}\,(90 - \theta)\,\overline{j}$$

$$= T\,\text{sen}\,(\theta)\,\overline{i} + T\cos(\theta)\,\overline{j}$$

$$\overline{W} = -W\,\overline{j}$$

Para $t = 0 \quad v_y = v_o \quad x = 0 \quad y = 0$

$$\Sigma F_x = m\,a\,x \;;\quad T\,\text{sen}\,(k\,t) = \frac{W}{g}\,\frac{\delta v}{\delta t}$$

Por tanto $$\int_0^t T\,\text{sen}\,(k\,t)\,\delta t = \frac{W}{g}\int_0^{v_x} \delta v$$

$$-\frac{T}{k}\cos(k\,t) = \frac{W}{g}\,v_x - \frac{T}{k}$$ por tanto $$v_x = -\frac{T\,g}{k\,W}\cos(k\,t) + \frac{T\,g}{k\,W}$$

$$\int_0^x \delta x = \int_0^t \left(-\frac{T\,g}{k\,W}\cos(k\,t)\,\delta t + \int_0^t \frac{T\,g}{k\,W}\,\delta t\right.$$

$$x = - \frac{T\,g}{k^2 W} \operatorname{sen}(k\,t) + \frac{T\,g}{k\,W}$$

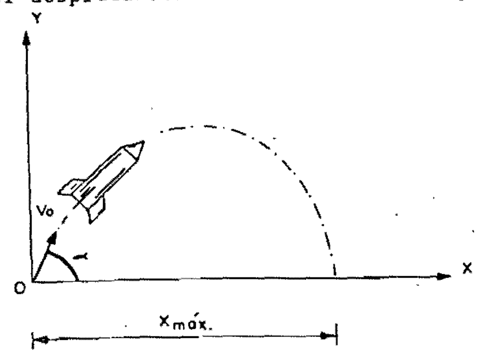
$$\Sigma F_y = m\,a\,y\,; \quad T \cos(k\,t) - W = \frac{W}{g}\,\frac{\delta v}{\delta t}$$

Por tanto $\quad v_y = \frac{T\,g}{W\,k} \operatorname{sen}(k\,t) - \frac{g\,W\,t}{W} + v_o$

$$y = \frac{T\,g}{W\,k^2}(1 - \cos(k\,t)) - \frac{g\,W\,t^2}{W\,2} + v_o\,t$$

$$\bar{r} = \left(- \frac{T\,g}{k^2 W}(\operatorname{sen}(k\,t) - k t)\right)\bar{i} + \left(v_o\,t + \frac{g\,T}{W\,k^2}(1 - \cos(k\,t)) - \frac{g\,t^2}{2}\right)\bar{j}$$

IV.4- Un proyectil de peso W es disparado con una velocidad inicial $\bar{v}_o$, como se muestra en la figura. Si la resistencia del aire, R, en dirección contraria a la velocidad es directamente proporcional a la rapidez (siempre que ésta no exceda de 30 m/s), encuentre las expresiones para las coordenadas del proyectil en función del tiempo. Determine también el desplazamiento horizontal máximo posible.



$$m\,\bar{a} = -k\,\dot{x}\,\bar{i} - (W + k\,\dot{y})\,\bar{j}$$

$$m\,\ddot{x} = -k\,\dot{x} \qquad y \qquad m\,\ddot{y} = -W - k\,\dot{y}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0 \qquad y \qquad \ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = -\frac{W}{m}$$

Resolviendo

$$x = c_1 + c_2\, e^{-\frac{k}{m}t}$$

por tanto $\quad v_x = -\frac{k}{m}\, c_2\, e^{-\frac{k}{m}t}$

$$y \quad c_2 = -\frac{\dot{x}_o\, m}{k}$$

$$y \quad c_1 = \frac{\dot{x}_o\, m}{k}$$

Resolviendo

$$y = c_1 + c_2 \; e^{-\frac{k}{m} t} + c_3 \, t$$

$c_3 = - \frac{W}{k}$ al aplicar el operador

$$v_y = - \frac{k}{m} c_2 \; e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{W}{k}$$

$$y \; (\dot{y}_o + \frac{W}{k}) \; (- \frac{m}{k}) = c_2 \; ; \quad c_1 = (\frac{m}{k}) \; (\dot{y}_o + \frac{W}{k})$$

Quedando la posición así definida

a) $\underline{x = \frac{\dot{x}_o \, m}{k} - \frac{\dot{x}_o \, m}{k} \; e^{-\frac{k}{m} t}}$

$$\underline{y = \frac{m}{k} \; (\dot{y}_o + \frac{W}{k}) - \frac{m}{k} \; (\dot{y}_o + \frac{W}{k}) \; e^{-\frac{k}{m} t} - \frac{W}{k} \, t}$$

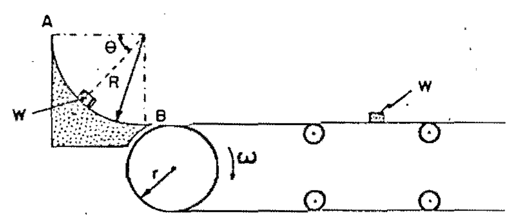
b) como $\quad v_x = \dot{x}_o \; e^{-\frac{k}{m} t} \quad$ y si $\quad v_x = 0$

entonces $\quad x_{max}$, así que $\quad 0 = \dot{x}_o \; e^{-\frac{k}{m} t}$

$$\underline{x_{max}} = \frac{\dot{x}_o \, m}{k}$$

$$= \underline{\frac{m \, v_o \cos (\alpha)}{k}}$$

IV.5- Unas cajas se sueltan desde A, partiendo del reposo, resbalan por una guia circular lisa de radio R, hasta caer en el punto B de una banda transportadora, como se muestra en la figura. Determine, en términos de θ, la expresión de la fuerza normal de contacto N entre la guia y el objeto. Así mismo, calcule la velocidad angular de la polea de radio r para que las cajas no deslicen sobre la banda transportadora.



$$v_B = (2\ g\ h)^{1/2} = (2\ (9.81)\ R\ \mathrm{sen}\ (\theta))^{1/2}$$

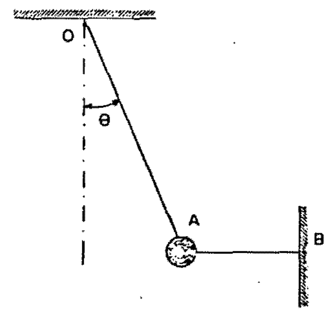
en B $\uparrow \hat{e}_N$

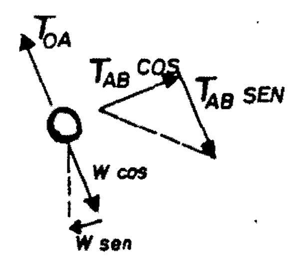
$$-W_N + N = \frac{W}{g}\ \frac{v_B^2}{R}$$

$$N = W\ (\mathrm{sen}\ (\theta) + 2\ \mathrm{sen}\ (\theta)\ ) = 3\ W\ \mathrm{sen}\ (\theta)$$

$$\omega = \frac{(2\ (g)\ R\ c_1 - \mathrm{sen}\ (\theta))^{1/2}}{r}$$

IV.6- Una cuerda flexible, inextensible y de peso despreciable, mantiene en reposo al péndulo de la figura en la posición mostrada. ¿Cuál es la relación que existe entre la tensión que tiene el alambre OA inmediatamente después de cortar el hilo AB y la que tenía antes de cortar éste ?





$$\Sigma F_t = 0$$

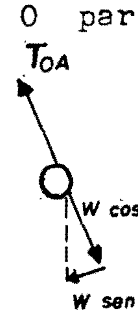
$$T_{AO} - W\cos\theta - T_{AB}\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$T_{AO} = W\cos\theta + T_{AB}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Sigma F_N = 0 \quad ; \quad \frac{\text{sen}\,\theta\, W}{\cos\theta} = T_{AB}$$

$$\underline{T_{AO}} = W\cos\theta + W\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\left(W\cos^2\theta + W\,\text{sen}^2\theta\right) = \underline{\frac{W}{\cos\theta}} \quad \ldots a)$$

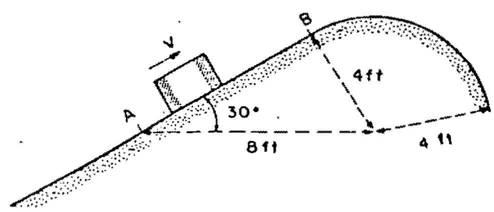
$$T_{OA} - W\cos\theta = \frac{W}{g}\,\omega_o^2\, r \quad ; \quad \omega_o = 0 \ \text{ parte del reposo}$$



$$\underline{T_{OA}} = W\cos\theta \quad \ldots b)$$

$1 : \cos^2\theta$ es la proporción

IV.7- Un objeto de peso W se mueve sobre un plano inclinado, como lo muestra la figura, y al pasar sobre el punto A su rapidez es v_o. Inmediatamente después de pasar por el punto B la reacción normal sobre el objeto descien_ de a la mitad de la magnitud que tenía cuando se acercaba a B. Si el coeficienté de fricción entre el objeto y la superficie es 0.3, determine la rapidez v_o del objeto.



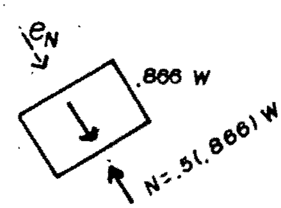
De A a B

$$\Sigma F_x = m\, a_x = m\, a_x \; : \; -.5\, W - .3\,(.866)\, W = \frac{W}{32.2}\, v_x \frac{\delta v_x}{\delta x}$$

$$3 - 24.46556 \int_0^{6.9282} \delta x = \int_{v_o}^{v_B} v_x\, \delta v_x \; ; \; -169.5022 =$$

$$\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_o^2}{2}$$

$$-339.004 + v_o^2 = v_B^2$$



Después de B

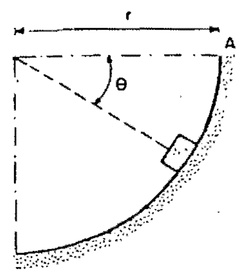
$$\Sigma F_N = m\, \frac{(v_B)\,(v_B)}{r}$$

$$.866\, W - .433\, W = \frac{W}{32.2} \left(\frac{-336.86 + v_o^2}{4} \right)$$

$$v_o = (4\,(32.2)\,(.433) + 339.004)^{1/2}$$

$$= \underline{19.8689 \text{ ft/s}}$$

IV.8- Un objeto de peso W se suelta desde el punto A, según se muestra en la figura, desliza sobre una guia circular rugosa. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es μ, determine las ecuaciones de movimiento de la caja, en las direcciones normal y tangencial.



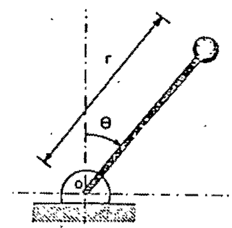
$$\Sigma F_N = m\,\omega^2\,r$$

$$-W\ \text{sen}\ (\theta) + N = \frac{W}{g}\,\omega^2\,r$$

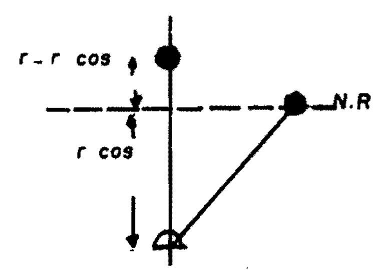
$$\Sigma F_t = m\,\alpha\,r$$

$$W\cos(\theta) - \mu\,W\ \text{sen}\ (\theta) = \frac{W}{g}\,\alpha\,r$$

IV.9- Una varilla rígida de peso despreciable gira libremente alrededor del punto o y tiene en su extremo libre una pequeña esfera de peso W. La distancia entre o y el centro de la esfera es r, tal como lo muestra la figura. Si ambas se sueltan partiendo del reposo en la posición vertical, determine el ángulo θ para la cuales nula la fuerza en la varilla (es decir, cuando la fuerza cambia de comprensión a tensión). Determine también la fuerza ejercida sobre ella cuando el ángulo θ es igual a 90° . Desprecie la fricción en la articulación.



Usando primero el método de Trabajo y Energía:



$$W\, r\, (1 - \cos\theta) = 1/2\, \frac{W}{g}\, v^2$$

o

$$\frac{m\, v^2}{r} = 2\, W\, (1 - \cos\theta)$$

Usando el principio de Newton:

$$\Sigma F_N = \frac{m\, v^2}{r}$$

$$W \cos\theta = 2\, W\, (1 - \cos\theta)$$

o

$$\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$$

despejando:

$3 \cos\theta = 2$ por tanto

a) $\underline{\theta} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

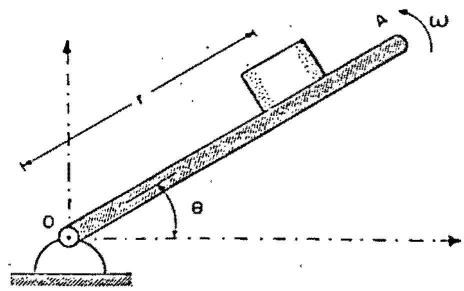
$= \underline{48.18^\circ}$

b) para $\theta = 90^{o}$: $\dfrac{m\ v^2}{r} = 2\ W$

y $\underline{T} = \dfrac{m\ v^2}{r}$ de $\Sigma F_N = m\ a_N$

$= \underline{2\ W}$

IV.10- La barra OA gira en un plano vertical, en torno a un eje normal que pasa por O, con una rapidez angular constante $\omega = 3\ s^{-1}$, como se muestra en la figura. Cuando $\theta = 0°$ se coloca sobre la barra un bloque de peso W a una distancia $r = 18$ pulgadas. Determine el coeficiente de fricción μ entre el bloque y la barra en el instante en que aquél empieza a deslizar, sabiendo que esto ocurre cuando $\theta = 45°$.



Como $\omega = kte$ $\quad \alpha = 0$ $\quad$ por tanto $a_t = 0$ $\quad N = W\ (.7071)$

$$\Sigma F_N = \frac{W}{g}\ \omega^2\ r \quad ; \quad W\ (.7071) - \mu W\ (.7071) = \frac{W}{32.2}\ (3)^2\ (1.5)$$

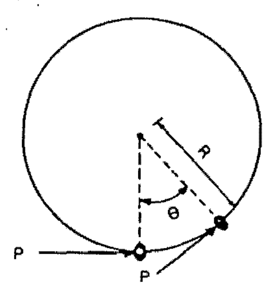
$$W\ (.7071) - \frac{3^2\ (1.5)\ W}{32.2} = W\ \mu$$

$$.40707 = \mu$$

IV.11- Un collar de peso W desliza sin fricción sobre un aro vertical de radio R, bajo la acción de una fuerza P de magnitud constante y cuya dirección siempre es tangente a la trayectoria, como se indica en la figura. Si el collar parte del reposo desde la posición inferior del aro, determine:

a) La magnitud de P con la cual la rapidez del collar sea cero en $\theta = \frac{\pi}{2}$ radianes.

b) Con el valor de P calculado en el inciso anterior, encontrar el ángulo θ para el cual la aceleración angular α sea igual a cero.



a) $P - W \operatorname{sen}(\theta) = \frac{W}{g} R \; \omega \; \frac{\delta\omega}{\delta\theta}$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P \; \delta\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} W \operatorname{sen}(\theta) \; \delta\theta = \frac{W}{g} R \int_0^0 \omega \; \delta\omega$$

$P\left(\frac{\pi}{2}\right) - W = 0$ por tanto $P = \frac{2\,W}{\pi}$

b) $\Sigma F_t = 0$

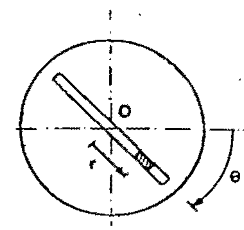
$$\frac{2\,W}{\pi} - W \operatorname{sen}(\theta) = 0$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{2}{\pi}$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

$$= 39.54^{\circ}$$

IV.12- El disco ranurado de la figura gira en un plano vertical alrededor de o, con una rapidez angular constante ω. Dentro de la ranura se mueve una corredera de peso W, la cual parte del reposo en $r = 0$ cuando la ranura cruza la posición $\theta = 0°$. Establezca las ecuaciones de movimiento de la corredera, considerando despreciable la fricción entre ranura y corredera; también determine la reacción normal N y el valor de r, como funciones de θ.



$$a_N = -\omega^2 r + \ddot{r} \; ; \quad a_t = 2\omega\dot{r}$$

$$\Sigma F_t = -N + W\cos(\theta)$$

Por tanto $N = W\cos(\theta) - \dfrac{2\omega\dot{r}\,W}{g}$

$$\Sigma F_N = m(-\omega^2 r + \ddot{r})$$

$$W\,\mathrm{sen}(\theta) = (-\omega^2 r + \ddot{r})\frac{W}{g}$$

$$g\,\mathrm{sen}(\theta) = \ddot{r} - \omega^2 r \quad \text{y} \quad \theta = \omega t$$

$$r = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} + c_3\cos(\omega t) + c_4\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

Aplicando el operador a la solución particular

$$-c_3\omega^2\cos(\omega t) - c_4\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t) - \omega^2 c_3\cos(\omega t) - \omega^2 c_4\,\mathrm{sen}(\omega t) = g\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$-\omega^2(c_4 + c_4)\,\mathrm{sen}(\omega t) = g\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$-\omega^2(c_3 + c_3)\cos(\omega t) = 0$$

Queda

$$c_4 = -\frac{g}{2\omega^2}$$

$$c_3 = 0$$

$$r = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} - \frac{g}{2^2} \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\dot{r} = \omega c_1 e^{\omega t} - \omega c_2 e^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega} \cos(\omega t)$$

Para $t = 0$ Queda

$$0 = c_1 + c_2$$

$$0 = \omega c_1 - \omega c_2 - \frac{g}{2\omega}$$

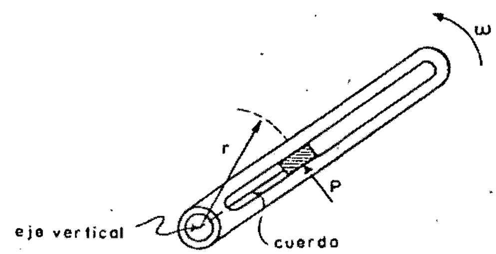
$$c_1 = \frac{g}{4\omega^2} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{g}{4\omega^2}$$

así que $r = \frac{g}{4\omega^2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) - \frac{g}{2\omega^2} \operatorname{sen}(\omega t)$

o

$$r = \frac{g}{4\omega^2}(e^{\theta} + e^{-\theta}) - \frac{g}{2\omega^2} \operatorname{sen}(\theta) \quad g\,N = W\cos(\theta) + \left(\frac{-e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} + \cos(\theta)\right) W$$

IV.13- La barra de la figura gira alrededor de un eje vertical. Una corredera que pesa 16.1 lb_f se mueve con fricción despreciable a lo largo de la ranura del brazo; el movimiento de la corredera es controlado por una cuerda de peso despreciable que pasa por el eje de rotación de la barra, con una rapidez lineal constante de 4 $\frac{in}{s}$. Determine la fuerza normal P debida a la acción de la ranura sobre la corredera cuando $r = 15$ in, si en este instante la rapidez angular $\omega = 3\ s^{-1}$ y la aceleración angular $\alpha = 2\ s^{-2}$. Obtenga la tensión T en la cuerda.



En General $\quad a_N = -\ddot{r} + \omega^2 r \quad , \quad a_t = r\alpha + 2\dot{r}\dot{\theta}$

ΣF_N : $\quad T = \frac{W}{g}(-\ddot{r} + \omega^2 r)$

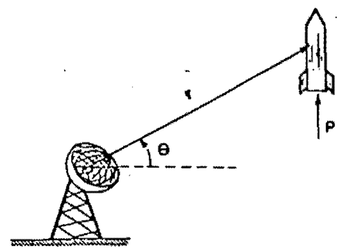
ΣF_t : $\quad P = \frac{W}{g}(r\alpha + 2\dot{r}\omega)$

Si $\quad r = \frac{15}{12}$ pies $\quad \omega = 3\ s^{-1} \quad \alpha = 2\ s^{-2} \quad \dot{r} = \frac{4}{12}$

$$T = \frac{16.1}{32.2}\left(3^2\left(\frac{15}{12}\right)\right) = 5.625 \quad (\bar{l}b)$$

$$P = \frac{16.1}{32.2}\left(\left(\frac{15}{12}\right)2 + 2\left(\frac{4}{12}\right)3\right) = 2.25 \quad (\bar{l}b)$$

IV.14- Un cohete se dispara verticalmente y su movimiento se sigue con un radar, como se muestra en la figura. En cierto instante los parámetros de su trayectoria son: $\theta = 60°$, $r = 6$ km, $\dot{\theta} = 0.005\ s^{-1}$, $p = 35\ t_f$; determine $\ddot{\theta}$ considerando que g permanece constante y que el peso del cohete es de $5\ t_f$



$$y = 3000 \tan(\theta)$$

$$\dot{y} = 3000\ \dot{\theta}\ \sec^2(\theta)$$

$$\ddot{y} = 3000\ (\ \ddot{\theta}\ \sec^2(\theta) + \dot{\theta}^2\ (2 \sec\theta)(\sec\theta \tan\theta))$$

además $\ddot{y} = \dfrac{F_y}{m} = \dfrac{30{,}000\ (9.81)}{5{,}000}$

$$= 58.86$$

Quedando $3000\ (\ \ddot{\theta}\ \sec^2(60^\circ) + (.005)^2\ (2 \sec^2(60^\circ) \tan(60^\circ)) = 58.86$

o

$$4\ \ddot{\theta} + .0003464 = .01962$$

despejando

$$\ddot{\theta} = .004818\ (s^{-2})$$

IV.15- La barra ranurada de la figura gira con una rapidez angular constante $\omega = 12\ s^{-1}$, alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de la leva fija que se muestra. El radio de la trayectoria de la partícula A, cuyo peso es de 4 oz, varía según: $r = r_o + b \text{ sen } N\omega t$

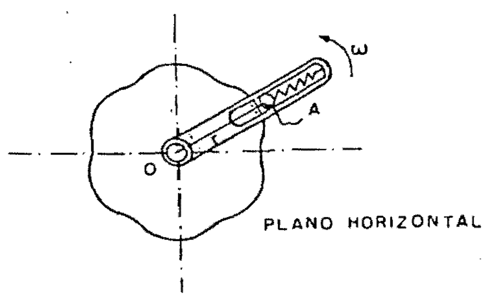
Siendo:

N = número de lóbulos (seis en este caso)

$r_o = 4$ in

$b = 0.5$ in

Si la compresión en el resorte es de 4.3 lb_f, cuando la partícula pasa por el tope del lóbulo, determine la fuerza reactiva R entre la leva y la partícula en dicha posición.



$$\Sigma F_N = -R + 4.3 = m\ (-\ddot{r} + r\,\omega^2)$$

$$m = \frac{.0625}{32.2} = .00194$$

$$\ddot{r} = -b\ (6^2)\ \omega^2\ \text{sen}\ (N\,\omega\, t) \quad \text{y} \quad \text{sen}\ (N\,\omega\, t) = 1$$

$$= -\ (\tfrac{.5}{12})\ 36\ (12)^2 = -216$$

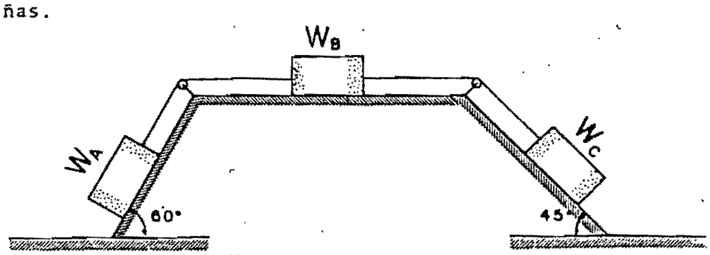
Quedando $\quad -R + 4.3 = .00194\ (216 + \frac{4.5}{12}\ (12)^2\ )$

$\quad -R + 4.3 = .5238$

Por tanto $\quad R = 3.7762\ \bar{l}b$

V · DINAMICA DE LA PARTICULA
(PARTICULAS CONECTADAS)

V.1- Un sistema formado por tres bloques unidos mediante cuerdas flexibles, inextensibles y de peso despreciable se muestra en la figura. Si los pesos de los bloques son $W_A = 128.8\ lb_f$, $W_B = 48.3\ lb_f$ y $W_C = 16.1\ lb_f$ y el coeficiente de fricción cinético entre todas las superficies en contacto es 0.2, determine el módulo de la aceleración del sistema y las magnitudes de las tensiones en las cuerdas.
Desprecie la fricción y la inercia de las poleas pequeñas.



$$\Sigma F_x = m\, a_x$$

$$-.2\, N_A + W_x - T_1 = \frac{128.8}{32.2}\, a$$

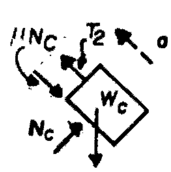
$$-12.88 + 111.51 - T_1 = 4\, a$$

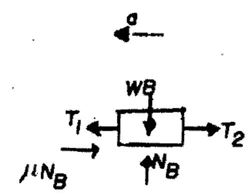
$$98.66 - T_1 = 4\, a$$

$$\Sigma F_x = m\, a_x$$

$$T_1 - .2\, N_B - T_2 = \frac{48.3}{32.2}\, a$$

$$T_1 - 9.66 - T_2 = 1.5\, a$$





$$\Sigma F_x = m\, a_x$$

$$T_2 - 2.2768 - 11.38431 = \frac{16.1}{32.2}\, a$$

$$T_2 - 13.661 = .5\, a$$

$$4\,a + T_1 + 0\,T_2 = 98.66$$

$$1.5\,a - T_1 + T_2 = -9.66$$

$$.5\,a + 0\,T_1 - T_2 = -\,13.66$$

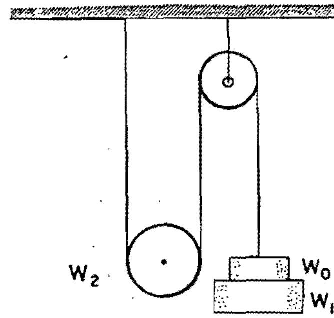
$$a = 12.5565 \quad ft/s^2$$

$$T_1 = 48.434 \quad \bar{l}b$$

$$T_2 = 19.93925 \quad \bar{l}b$$

V.2- Dos cuerpos de peso W_1 y W_2, inicialmente en reposo, están sostenidos por una cuerda flexible e inextensible como se muestra en la figura.

Si la fricción de las poleas es despreciable y $W_2=2W_1$, encuentre el peso de W_0 que aplicado sobre W_1 le produzca a éste una aceleración hacia abajo de magnitud 0.2 g



$2\,l_2 + l_1$ = longitud de la cuerda

por tanto $2\,v_2 = v_1$

De la polea móvil

$$2\,T - 2\,W_1 = \frac{2\,W}{g}(.1\,g) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \underline{1}$$

de los cuerpos 1 y 0

$$-T + W_o + W_1 = \frac{(W_o + W_1)}{g}\ (.2\,g) \ldots\ldots\ldots \ \underline{2}$$

Sustituyendo $T = .1\,W + W_1$ de la ecuación $\underline{1}$ en $\underline{2}$

$$-1.1\,W_1 + W_o + W_1 = .2\,W_o + .2\,W_1$$

por tanto $W_o = \frac{.3}{.8}\,W_1$

$$W_o = \frac{3}{8}\,W_1$$

$$10\,a_A + 0\,a_B + 0\,a_C - 9.81\,T = 0 \qquad a_A = 6.036\ m/s^2$$

$$0\,a_A + 20\,a_B + 0\,a_C + 19.62T = 196.2 \qquad a_B = 3.773\ m/s^2$$

$$0\,a_A + 0\,a_B + 40\,a_C - 9.81\,T = 0 \qquad a_C = 1.5092\ m/s^2$$

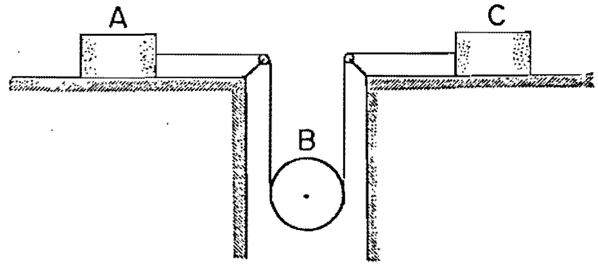
$$-\,a_a + 2\,a_B - a_C + 0T = 0 \qquad T = 6.1538\ \overline{Kg}$$

$$x_A = a_A \frac{t^2}{2} = 27.162\ m$$

$$x_B = a_B \frac{t^2}{2} = 16.9785\ m$$

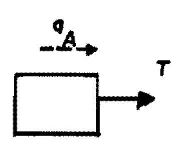
$$x_C = a_C \frac{t^2}{2} = 6.7914\ m$$

V.3- Los cuerpos A,B y C mostrados pesan 10,20 y 40 kg_f, respectivamente, y están unidos por medio de un cable liso flexible, inextensible y de peso despreciable como se indica en la figura. Si el sistema parte del reposo y no hay fricción, determine la distancia recorrida por cada uno de ellos cuando hayan transcurrido 3 s contados a partir del instante en que el sistema inicia su movimiento.



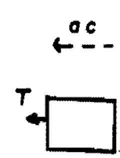
$$-a_A - a_C + 2\,a_B = 0$$

$$\Sigma F = m_A\, a_{xA}$$



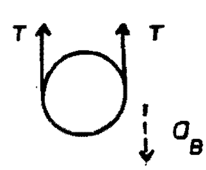
$$T = \frac{10}{9.81}\, a_A$$

$$\Sigma F = m_C\, a_C$$



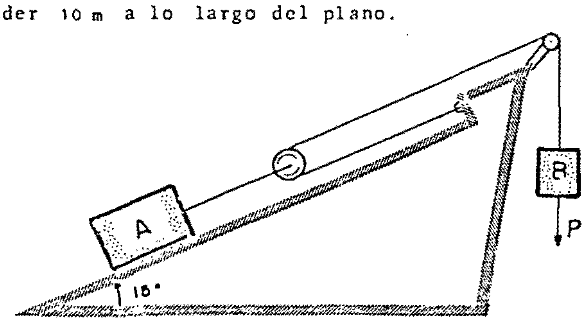
$$T = \frac{40}{9.81}\, a_C$$

$$\Sigma F = m_B\, a_B$$



$$-2\,T + 20 = \frac{20}{9.81}\, a_B$$

V.4- Los cuerpos A y B, mostrados en la figura, pesan 4 000 kg_f y 300 kg_f, respectivamente, y se encuentran conectados por medio de un cable flexible, inextensible y de peso despreciable. Si el sistema se encuentra en reposo en la posición mostrada y el coeficiente de fricción vale 0.1, determine el módulo que debe tener una fuerza vertical constante "P" aplicada en el cuerpo B, de tal forma que A adquiera una rapidez de 5 m/s después de ascender 10 m a lo largo del plano.



$$2\ v_A = v_B \quad \text{y} \quad 2\ a_A = a_B$$

Del cuerpo B se tiene

$$P + W_B - T = \frac{W_B}{g} (\ 2\ a_A) \ldots\ldots\ldots\ldots \underline{1}$$

Del cuerpo A tenemos

$$2\ T - \mu\ W_A \cos\ (15^o) - W_A \text{ sen } (15^o) = \frac{W_A}{g} a_A \ldots\ldots \underline{2}$$

de $\underline{1}$

$$T = P + W_B - \frac{W_B}{g} \ (2\ a_A)$$

y sustituyendo en $\underline{2}$

$$2P + 2W_B - \frac{4W_B}{g} a_A - \mu W_A \cos(15^o) - W_A \text{ sen } (15^o) = \frac{W_A}{g} a_A$$

con valores:

$$2\,P + 600 - \frac{1200}{9.81}\,a_A - .1(4000)(.96592) - 4000(.2588) = \frac{4000}{9.81}\,a_A$$

o

$$2\,P - 821.6465 = 530.071\,a_A$$

con $a_A = v\,\frac{\delta v}{\delta x}$ y separando variables

$$(2\,P - 821.6465)\int_0^{10} \delta x = 530.071 \int_0^{5} v\,\delta v$$

$$20\,P - 8216.465 = 6625.8875$$

$P = 742.117$ y si $a_A = \dfrac{2\,P - 821.6465}{530.071} = 1.25$

entonces $\underline{T} = 742.117 + 300 - \frac{300}{9.81}(2)\,1.25 = 965.66$

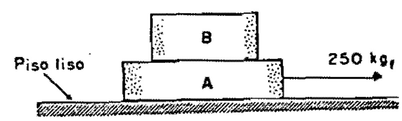
$\underline{T_1} = 2\,T = 1931.328$

V.5- El bloque A es jalado por una fuerza horizontal de módulo constante, como lo indica la figura. Si los bloques A y B pesan 200 y 300 kg_f, respectivamente, y el coeficiente de fricción cinético entre ellos es 0.2, calcule las aceleraciones:

a) Del bloque A

b) Del bloque B

c) Del bloque A respecto al bloque B

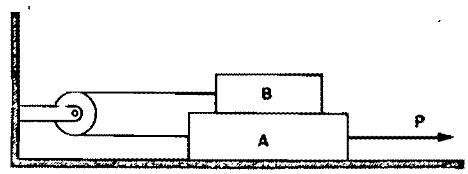


a) $a_B = \mu\, g = 1.962 \quad m/s^2$

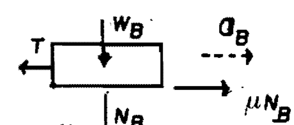
b) $a_A = \dfrac{-\mu\,(N_B) + 250}{m_A} = \dfrac{-.2\,(200) + 250}{300 / 9.81} = 6.867\ m/s^2$

c) $a_{A/B} = 6.867 - 1.962 = 4.905\ m/s$

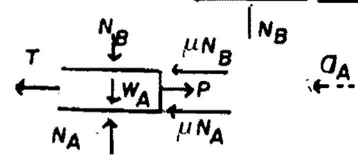
V.6- Determine la ecuación de movimiento para el bloque B en términos de μ, W_A, W_B, P y g. (Considere μ el coeficiente de fricción en todas las superficies en contacto).



$$T - \mu W_B = \frac{W_B}{g} a_B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \underline{1}$$



$$-\mu (N_A + N_B) + P - T = \frac{W_A}{g} a_A$$



por tanto

$$-\mu (2 W_B + W_A) + P - T = \frac{W_A}{g} a_A \quad \cdots \quad \underline{2}$$

así que

$$T = -\frac{W_A}{g} a_A + P - \mu (2 W_B + W_A)$$ sustituyendo en $\underline{1}$

$$-\frac{W_A}{g} a_A + P - \mu (2 W_B + W_A) - \mu W_B = \frac{W_B}{g} a_B$$

Por tanto

$$a_B = \frac{g}{W_B} \left(-\frac{W_A}{g} a_A + P - \mu (3 W_B + W_A) \right)$$

V.7- La cadena de la figura es flexible, inextensible de longitud L y cuyo peso por unidad de longitud está en kg_f/m; cuando $x = 0$ se suelta y comienza a moverse sobre las superficies lisas mostradas.

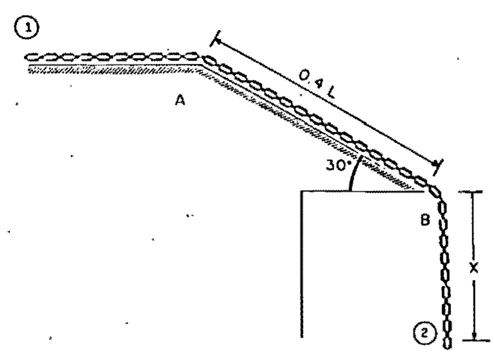
I. Determine el módulo de su aceleración:

a) Cuando el último eslabón deja la horizontal (Punto A),

b) Cuando el último eslabón está a punto de abandonar el plano inclinado (Punto B) ,

c) Cuando la cadena ya no ejerce contacto con el plano inclinado.

II. ¿Cuál es la rapidez del extremo 1 de la cadena en el instante en que ésta adopta la posición vertical?



Para $\quad 0 \leq x \leq 0.6\ L$

Eslabones horizontales: $T_1 = (.6\ L - x)\ \frac{w}{g}\, a$ . . . . $\underline{a}$

Eslabones inclinados: $- T_1 + .2\ w\ L + T_2 = .4\ L\ \frac{w}{g}\, a$ . . . $\underline{b}$

Eslabones verticales: $- T_2 + w\ x = \frac{w\ x}{g}\, a$ . . . . $\underline{c}$

Sustituyendo <u>a</u> y <u>c</u> en <u>b</u>

$$\frac{x\,w}{g}\,a - .6\,L\,\frac{w}{g}\,a + .2\,w\,L + w\,x - \frac{w\,x}{g}\,a = \frac{.4\,L\,w\,a}{g}$$

a) queda $.2\,L + x = \frac{L}{g}\,a$ y si $a = v\,\frac{\delta v}{\delta x}$

$$.2\,L \int_0^{.6\,L} \delta x + \int_0^{.6\,L} x\,\delta x = \frac{L}{g} \int_0^{v_A} v\,\delta v$$

$$.12\,L^2 + \frac{.36\,L^2}{2} = \frac{L}{g}\,\frac{v_A^2}{2} \quad \text{o} \quad v_A = (.24\,g\,L + .36\,g\,L)^{1/2} =$$

$$(.6\,g\,L)^{1/2}$$

Para $0 \leq x \leq .4\,L$

Del inclinado:

$$T_3 + (.4\,L - x)\,w\,\text{sen}\,30 = (.4\,L - x)\,\frac{w}{g}\,a \quad \ldots\ldots \quad \underline{1}$$

Del vertical:

$$-T_3 + w\,(x + .6\,L) = \frac{w}{g}\,(x + .6\,L)\,a \quad \ldots\ldots\ldots \quad \underline{2}$$

Sustituyendo T_3 de <u>1</u> en <u>2</u>

$$.2\,L\,w - .5\,w\,x - .4\,L\,\frac{w}{g}\,a + \frac{w\,x\,a}{g} + w\,(x + .6\,L) = \frac{w}{g}\,(x + .6L)\,a$$

o

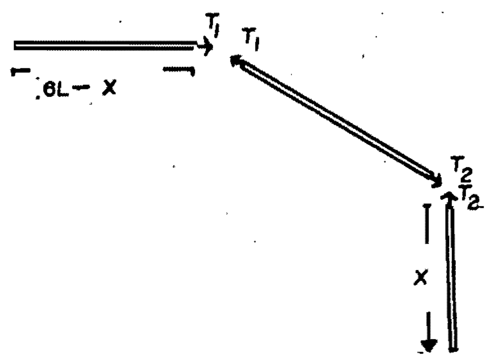
$$.5\,w\,x + .8\,w\,L = \frac{w\,L}{g}\,a \quad \text{y para} \quad x = .4\,L$$

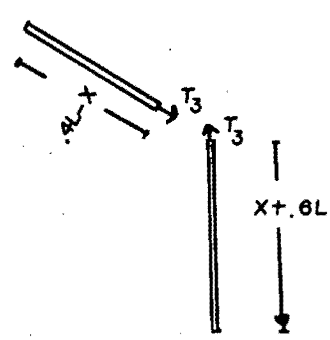
Por tanto <u>b</u> y <u>c</u> $a = g$

se obtiene $g\,(\frac{.5}{2}\,(.4\,L)^2 + .8\,L\,(.4\,L)) = \frac{L}{2}\,(v_2^2 - .6\,g\,L)$

$$2\ g\ (.04\ L\ +\ .32\ L)\ +\ .6\ g\ L = v_2^2$$

$$(1.32\ g\ L)^{1/2} = v_2 \quad \text{(rapidez en la configuración vertical)}$$

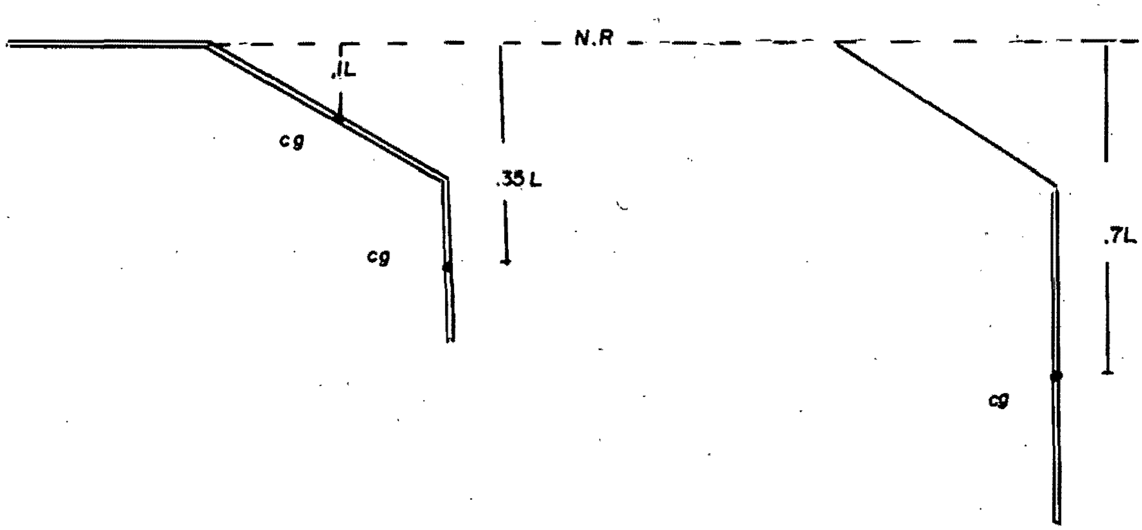




V.8- Resolver el inciso II del problema anterior si la cadena se suelta para $x = 0.3\ L$, considerando en todo instante un coeficiente de fricción de 0.5

Si $= 0.5$, se hace con trabajo y energía

Primero hay eslabones horizontales e inclinados, al final sólo verticales; se propone nivel de referencia en la parte superior.



$$W\ (.3\ L)(-.35\ L) + W\ (.4\ L)(-.1\ (L)) + \int_0^{.3\ L} (-.5)W(.3L-x)\ dx\ +$$

$$\int_0^{.3\ L} (-.5)W(.4\ L)\cos(30^o)\ dx + \int_0^{.4\ L} (-.5)W(.4L-x)\cos(30^o)d$$

$$= W\ (L)\ (-.7\ L) + \frac{1}{2}\ \frac{W}{g}\ (L)\ (V_f^2)$$

haciendo operaciones

$$-.105\ W\ L^2 -.04\ W\ L^2 - .045\ W\ L^2 + .0225\ W\ L^2 - .0519\ W\ L^2$$

$$- .0692\ W\ L^2 + .0346\ W\ L^2 =$$

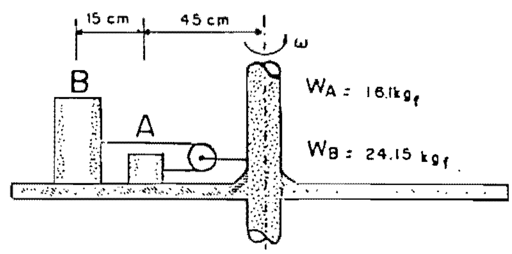
$$- .7\ W\ L^2 + \frac{1}{2}\ \frac{W}{g}\ L\ v_r^2$$

Por tanto $\underline{v_f}$ = $\underline{(.892\ g\ L)^{1/2}}$

V.9- Dos cuerpos que tienen el peso y la posición indicada en la figura, descansan sobre un plato que gira alrededor de un eje vertical con rapidez angular constante. Si el coeficiente de fricción entre los bloques y el plato es 0.2 y se desprecian la fricción y la inercia de la polea, calcule:

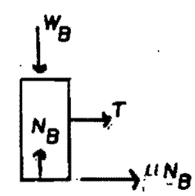
a) La rapidez angular, en rpm, a la cual los cuerpos empiezan a deslizar.

b) La tensión en la cuerda para dicho instante.



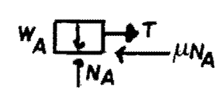
$\underline{e_N} \rightarrow$

$$a_A = .45\ w^2 \qquad\qquad a_B = .60\ w^2$$



$$T + 4.83 = 2.46177\ (.60)\ \text{rapidez angular}^2$$

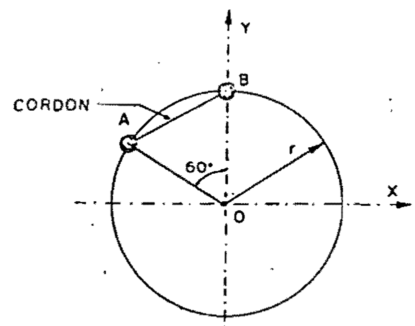
$$T - 3.22 = 1.6411\ (.45)\ \text{rapidez angular}^2$$



$$\begin{bmatrix} 1.4770 & -1 \\ .7385 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^2 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.03 \\ -3.22 \end{bmatrix} \quad \vdots \quad \begin{matrix} w^2 = 10.89958 \\ T = 11.2693 \end{matrix}$$

$$w = 3.30145 \text{ rad/s} = 3.30145\ \frac{1}{2\pi}\ \frac{60}{1} \text{ rpm} = 31.526462$$

V.10- Dos partículas A y B con un peso de 4 lb_f cada una se encuentran en reposo y conectadas por medio de un cordón flexible, inextensible y de peso despreciable. Si las partículas se encuentran restringidas a moverse en un plano vertical sobre el disco circular liso mostrado mismo que se encuentra fijo, determine la tensión T en el cordón inmediatamente después de que las partículas se sueltan.



En B

$$\Sigma F_t = \frac{W}{g} a$$ cuando empieza a moverse

Para A

$$W \text{ sen } (60^\circ) - T \text{ sen } (60^\circ) = \frac{W}{g} a \quad \ldots \quad \underline{1}$$

Para B

$$T \text{ sen } (60^\circ) = \frac{W}{g} a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underline{2}$$

Igualando $\underline{1}$ con $\underline{2}$

$$W \text{ sen } (60^\circ) - T \text{ sen } (60^\circ) = T \text{ sen } (60^\circ)$$

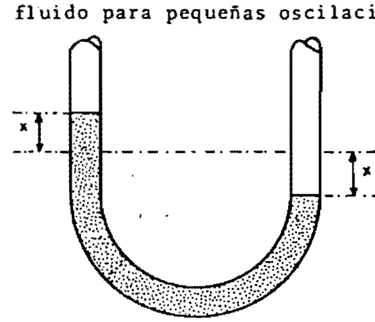
Por tanto $T = \frac{W}{2}$

$$T = \frac{4}{2}$$

$$= 2 \text{ lb}$$

VI VIBRACION DE UNA PARTICULA CON UN GRADO DE LIBERTAD

VI.1-Un tubo en forma de U, de sección transversal uniforme y abierto en ambos extremos, contiene una columna de líquido de longitud total ℓ. Si el tubo se encuentra en posición vertical como se muestra en la figura, deduzca la ecuación de movimiento y obtenga la frecuencia natural del fluido para pequeñas oscilaciones.



$\Sigma F = m a$

si $w = \gamma$ (Area del tubo)

$$- 2 w x = \frac{w(1)}{g} \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2 g x}{1} = 0$$

$$(D^2 + \frac{2 g}{1}) x = 0$$

$$D = \pm (\frac{2 g}{1})^{1/2} i$$

$$x = c_1 \operatorname{sen}((\frac{2 g}{1})^{1/2} t) + c_2 \cos((\frac{2 g}{1})^{1/2} t)$$

para $(\frac{2 g}{1})^{1/2} t = 2\pi$ se repite el movimiento

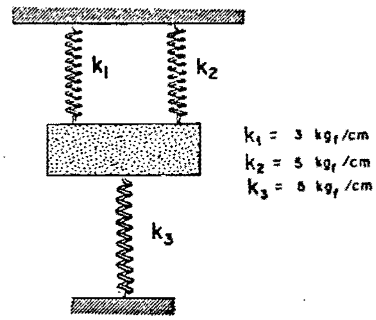
Por tanto

$$f = \frac{(\frac{2 g}{1})^{1/2}}{2 \pi}$$

VI.2-Una caja que pesa 35 kg_f está sujeta por unos resortes, tal como lo muestra la figura. Si dicha caja se desplaza verticalmente hacia abajo desde su posición natural de equilibrio y luego se suelta, determine:

a) El periodo de vibración del sistema,

b) La máxima velocidad y la máxima aceleración, si la amplitud del movimiento es de 15 cm.



$$K_{equi} = 300 + 500 + 500$$

$$= 1300 \quad (K\bar{g}/m)$$

$$-K_{equi}\, x = \frac{35}{9.81}\, \ddot{x}$$

Así que $\ddot{x} + \dfrac{9.81\,(K_{equi})}{35}\, x = 0$

Solución $x = c_1 \text{ sen } ((364.37)^{1/2}\, t) + c_2 \cos ((364.371)^{1/2}\, t)$

a) $t = \dfrac{2\pi}{(364.37)^{1/2}} = .3291 \text{ s}$

---

para $t = 0 \qquad x = .15 \text{ m} \qquad \dot{x} = 0 \text{ m/s}$

Por tanto $.15 = c_2$

$$\dot{x} = (364.37)^{1/2} \; c_1 \cos \left((364.37)^{1/2} \; t\right) - 2.86327 \text{ sen } (364.371 \; t)$$

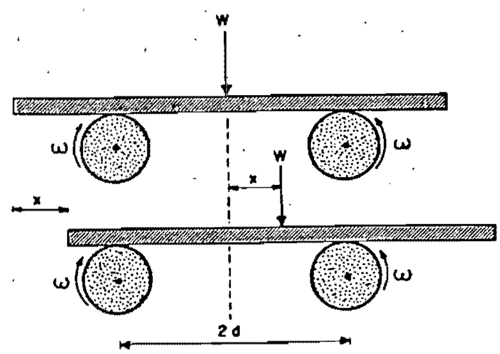
$$0 = (364.37)^{1/2} \; c_1 \quad \text{por tanto} \quad 0 = c_1$$

queda

$$\underline{\dot{x}_{max}} = \underline{-2.86327 \quad (m/s)}$$

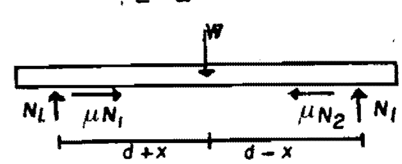
$$\dot{x}_{max} = -2.86327 \, (364.37)^{1/2} = -54.655 \quad (m/s^2)$$

VI.3- Dos poleas fijas, del mismo radio, giran en un plano en sentido opuesto con la misma rapidez angular y la distancia entre sus centros es $2d$. Una tabla recta, uniforme, horizontal de longitud ℓ y peso W, descansa encima de las poleas como lo muestra la figura superior. El coeficiente de fricción cinético entre la tabla y las poleas es μ. Suponiendo que se le desplaza una distancia x a partir de su posición inicial y se le suelte en la posición que muestra la figura inferior, demuestre que la ecuación que determina este movimiento está dada por $\ddot{x} + \frac{\mu g x}{d} = 0$



$$N_2 = \frac{(d + x)\ W}{2\ d} \qquad\qquad N_1 = \frac{(d - x)\ W}{2\ d}$$

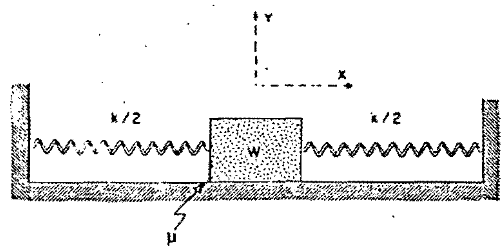
$$\mu N_1 - \mu N_2 = \frac{W}{g}\ \ddot{x}$$



$$\mu\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2d}\right) W - \mu\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2d}\right) W = \frac{W}{g}\ \ddot{x}$$

quedando $\quad -\mu \frac{x}{d} W = \frac{W}{g} \ddot{x} \qquad$ o

$$\ddot{x} + \mu g \frac{x}{d} = 0 \quad \text{l.c.q.d.}$$



VI.4- Estudie el amortiguamiento de Coulomb para el sistema mostrado en la figura, siendo μ el coeficiente de fricción y k/2 la constante de cada resorte. Si el bloque se separa de su posición de equilibrio una distancia x_o y luego se suelta, determine la ecuación diferencial de movimiento y represente gráficamente la variación de la posición, con respecto al tiempo, del sistema.

$$K_{equi} = K$$

$$\mu W - k\,x = \frac{W}{g}\,\ddot{x}$$

así que

$$\ddot{x} + \frac{g\,k\,x}{W} = \mu\,g$$ para la etapa que va de x_o a $-x$

$$x = c_1 \operatorname{sen}\left(\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} t\right) + c_2 \cos\left(\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} t\right) + k_1$$

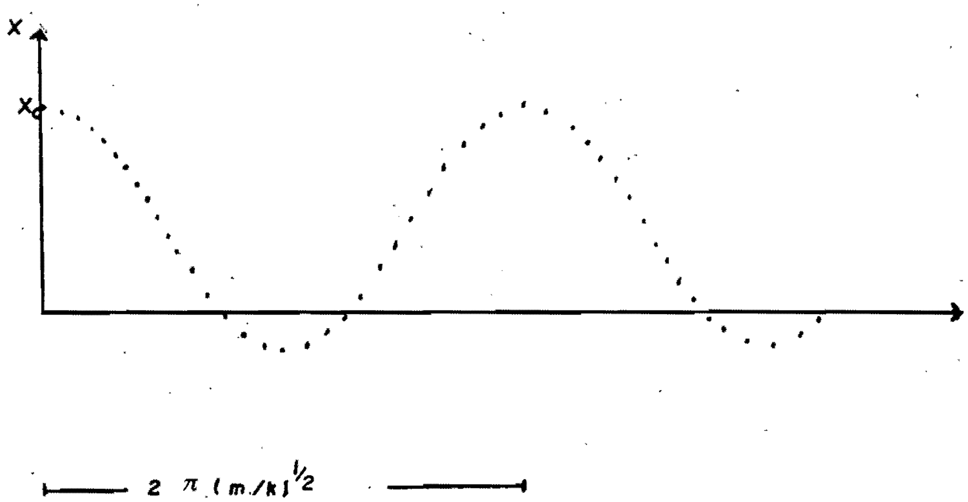
al aplicar el operador $(D^2 + \frac{g\,k}{W})\, k_1 = \mu g$

$\frac{g\,k}{W}\, k_1 = \mu\, g$ por tanto $k_1 = \frac{\mu\, W}{k}$

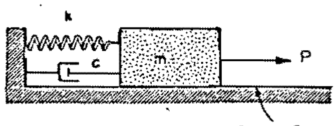
para $t = 0$ $x = x_o$ por tanto $c_2 = x_o - \frac{\mu\, W}{k}$

$\dot{x} = 0$ por tanto $c_1 = 0$

la ecuación es $x = (x_o - \frac{\mu\, W}{k}) \cos ((\frac{k}{m})^{1/2}\, t) + \frac{\mu\, W}{k}$



VI.5-Una fuerza horizontal cuya magnitud y sentido vienen dadas por la expresión $P = 4$ sen $2t$ kg_f actúa sobre un bloque cuyo peso es de 19.62 kg_f. Si un resorte de constante $K = 60$ kg_f/m y un amortiguador de coeficiente $c = 6$ kg_f s/m están unidos al cuerpo, como se muestra, encuentre la amplitud del movimiento del bloque en el estado permanente y la máxima fuerza transmitida a la pared.



$m = 2$ (U T M) ; $k = 60$ $k\overline{g}/m$; $c = 6$ $k\overline{g} \cdot s/m$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x + \frac{c}{m} \dot{x} = 4 \text{ sen } (2\ t)$$

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 30\ x = (4 \text{ sen } (2\ t))/\ m$$

$$(D^2 + 3D + 30)\ x = 2 \text{ sen } (2\ t)$$

$$\frac{-3 \pm (9 - 4\ (30))^{1/2}}{2} = \frac{-3 \pm (111)^{1/2}\ i}{2}$$ para la solución general

La solución particular es: c_3 sen $(2t)$ + c_4 cos $(2t)$

$30\ c_3$ sen $(2t)$ + $30\ c_4$ cos $(2t)$

$-6\ c_4$ sen $(2t)$ + $6\ c_3$ cos $(2t)$

$-4\ c_3$ sen $(2t)$ $-$ $4\ c_4$ cos $(2t)$

$(26\ c_3 - 6\ c_4)$ sen $(2t)$ + $(6\ c_3 + 26\ c_4)$ cos $(2t)$

Se obtiene

$26\ c_3 - 6\ c_4 = 2$ $\qquad$ $c_3 = .073$

$6\ c_3 + 26\ c_4 = 0$ $\qquad$ $c_4 = -.01685$

$$x = c_1\, e^{-1.5\ t}\ \text{sen}\ (5.2678\ t) + c_2\, e^{-1.5\ t}\ \cos\ (5.2678\ t) +$$

$$0.073\ \text{sen}\ (2t) - .01685\ \cos\ (2t)$$

Por tanto $x_p = .073\ \text{sen}\ (2t) - .01685\ \cos\ (2t)$ o

$$x_p = (\ .073^2 + .01685\ )^{1/2}\ \cos\ (2t + 0.0722\,\pi\ ) =$$

$$.0749\ \cos\ (2t + .0722\ \pi)$$

Donde $-.0722\pi = \tan^{-1}\ (-\ \frac{.01685}{.073})$

así que $\ddot{x}_p = -.2996\ \cos\ (2t + .0722\,\pi\ )$, quedando

$\underline{x_{max}\ =\ .0749\ \ (m)}$

$\underline{F_{max}\ =\ 0.6\ \ (K\bar{g})}$

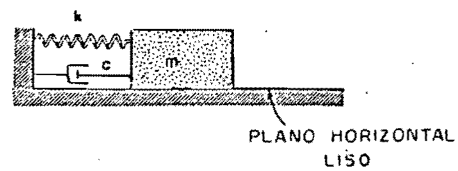
VI.6-Para el sistema masa-resorte-amortiguador mostrado en la figura, calcule el valor de c para que la respuesta libre del sistema sea:

a) No amortiguada

b) Subamortiguada

c) Sobreamortiguada

d) Críticamente amortiguada



La ecuación Diferencial es:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\left(D^2 + \frac{c}{m}D + \frac{k}{m}\right)x = 0$$

$$-\frac{c}{2m} \pm \frac{\left(\frac{c^2}{m^2} - \frac{4k}{m}\right)^{1/2}}{2}$$ son las raices

a) No amortiguada $c = 0$

b) Subamortiguada $c^2 < 4km$

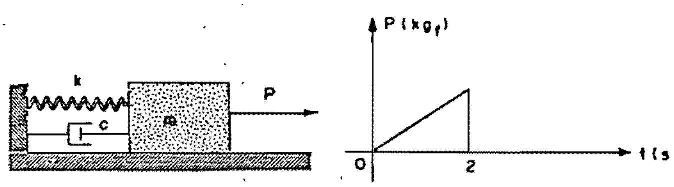
c) Sobreamortiguada $c^2 > 4km$

d) Críticamente amortiguada $c^2 = 4km$

VI.7-El sistema mecánico mostrado en la figura, tiene condiciones iniciales nulas en $t = 0$; para ese mismo instante, se aplica una fuerza P horizontal y en la dirección indicada, cuyo comportamiento está determinado en la gráfica adjunta. Determine:

a) Posición, rapidez y magnitud de la aceleración en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ s

b) Las mismas características cinemáticas preguntadas en el inciso anterior, pero para $t > 2$ segundos.



No se puede resolver, ya que faltan valores para k, c, m y p ; la k, c y m ayudarían a encontrar la solución homogénea.

La solución particular sería dentro de $0 \leq t \leq 2s$:

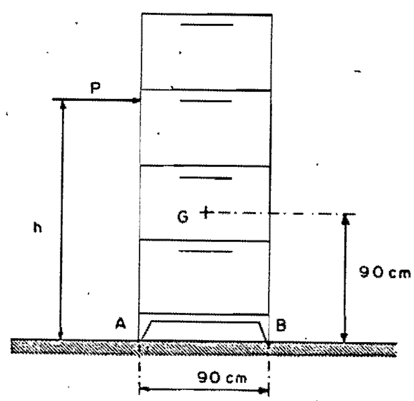
$x_p = c_3 + c_4 t$

VII DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO
(MOVIMIENTO DE TRANSLACION)

VII.1- Un armario dè 40 kg_f está situado sobre un piso horizontal rugoso cuyo coeficiente de fricción es 0.3. Si se aplica una fuerza P de 20 kg_f, como se muestra en la figura, calcular:

a) La aceleración del armario.

b) La máxima altura h a que debe aplicarse P para que el armario no voltee en torno al punto B.



$$P - \mu(40) = \frac{40}{9.81} a_{cG}$$

$$20 - .3\ (40) = \frac{40}{9.81} a_{cG}$$

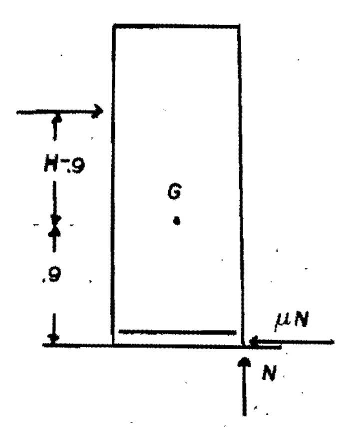
a) $a_{cG} = 1.962\ m/s^2$

$\Sigma M_{cG} = 0$

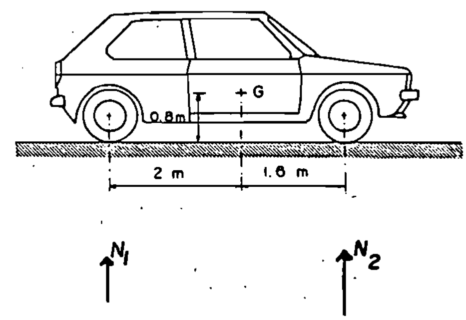
$-20\ (H - .90) - 12\ (.9) + 40\ (.45) = 0$

$18 - 10.8 + 18 = 20\ H$

b) $H = \underline{1.26\ m}$



VII.2- El automóvil que se muestra en la figura pesa 1.8 t_f, — viaja a 80 km/h y tarda 6 segundos para detenerse, frenando uniformemente. Calcule las componentes verticales de las reacciones del piso tanto en las ruedas delanteras como en las traseras durante el tiempo de frenado, y determine el coeficiente de fricción entre las ruedas y el pavimento.



$$-a = cte = \frac{\delta v}{\delta t} \; ; \quad t = 6 \text{ s} \; ; \quad -a\,(6 - 0) = (0 - 22.22)$$

por tanto $a = 3.7037 \text{ m/s}^2$

$$\mu N = \frac{W}{g}\,a \; ; \quad \mu\,(1800) = \frac{1800}{9.81}\,(3.7037) \; ; \quad \mu = 0.3775$$

$$\Sigma M_G = 0$$

$$1.6\,(1800 - N_1) - 2\,N_1 - .8\,(679.5786) =$$

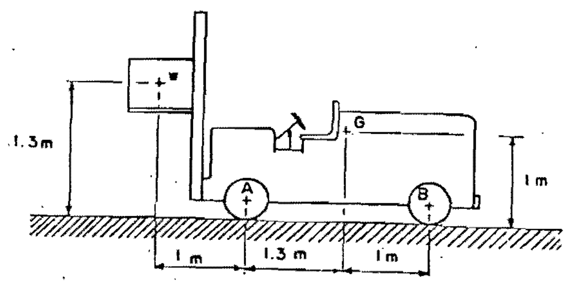
$$1.6\,(1800) - 1.6\,N_1 - 2\,N_1 - 543.6629 = 0$$

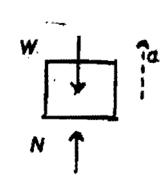
Por tanto $\underline{N_1} = 648.982 \; K\bar{g}$

$= \underline{649 \; K\bar{g}}$

$\underline{N_2} = \underline{1151 \; K\bar{g}}$

VII.3- Un montacargas que pesa 1 t_f levanta un embalaje de 800 kg_f de peso. Calcule la aceleración hacia arriba del citado embalaje para que no exista reacción en la rueda trasera B.





$N - 800 = \frac{800}{9.81}\, a$ por tanto $N = 800 + \frac{800}{9.81}\, a$

Como no se mueve el cG

$\Sigma M_A = 0$

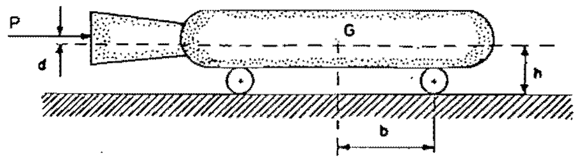
$1\left(800 + \frac{800}{9.81}\, a\right) - 1.3\ (1{,}000) = 0$

$$a = \frac{(1300 - 800)\ 9.81}{800} = 6.13125\ m/s^2$$

$N = 800 + \frac{800}{9.81}\ (6.13125) = 1300$

Por tanto $R = 2300 = 100 + 1300$

VII.4- Un proyectil de propulsión a chorro es empujado a lo largo de una trayectoria recta por una fuerza de impulso P, como se muestra. Si el coeficiente de fricción entre el proyectil y la pista es μ, la masa del proyectil es m y su pérdida debida al gasto de combustible es despreciable, determine la fuerza límite P para que el proyectil no vuelque.



$$\Sigma M_G = 0$$

Si $N = W$

$$-P(d) - \mu W(h) + W(b) = 0$$

$$P = \frac{W(b - \mu h)}{d}$$

Viii 5

$R_x = \frac{48}{32.2}(15) = \underline{22.3602\ \overline{lb}}$

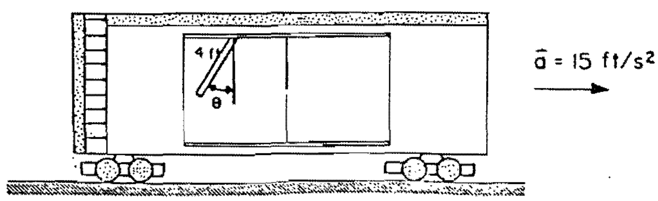
$R_y = 48\ \overline{lb}$

de $\underline{1}$ $\tan^{-1}\theta = \frac{R_x}{W} = \frac{22.3602}{48} = .4658$

$\theta = 24.97^{\circ}$

$= 25^{\circ}$

VII.5- Una barra uniforme, delgada, de 4 ft de longitud y 48 lb_f de peso cuelga de una articulación sin fricción en el techo de un vagón de ferrocarril, el cual lleva una aceleración $a = 15$ ft/s^2 . Determine la reacción ejercida sobre la barra por la articulación, así como también el ángulo θ que forma con la vertical.



$\Sigma F_y = 0$ por tanto $R_y = W$

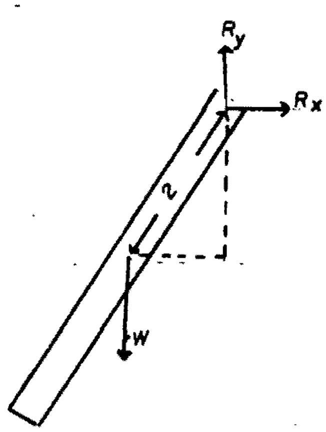
$\Sigma M_G = 0$

$$R_y\,(2\ \text{sen}\,(\theta)) - R_x\,(2\cos\,(\theta)) = 0$$

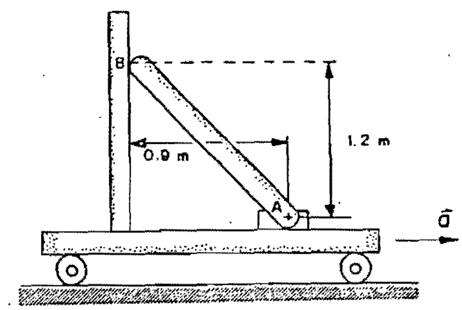
si $R_y = W$

$$W\ \text{sen}\,(\theta) = R_x \cos\,(\theta)\ \ldots\ldots\ldots\ \underline{1}$$

$\Sigma F_x = \frac{W}{g}\,(15)$



VII.6- El peso de la barra homogénea AB es de 200 N y el carro al que está conectada se mueve sobre el piso con una aceleración de 3.6 m/s². Calcular las reacciones en la articulación A y en el apoyo simple B, considerando que las superficies en contacto son lisas.



$\Sigma F_y = 0$ ⋮ $\Sigma M_{cG} = 0$

$R_{Ay} = 200$ N ⋮ $R_{Ay}\ (.95) + 0.6\ R_{Ax} - 0.6\ R_B = 0$

$$R_B + R_{Ax} = \frac{200}{9.81}\ (3.6)$$

$$-\ .6\ R_B + 0.6\ R_{Ax} = -\ 200\ (.45)$$

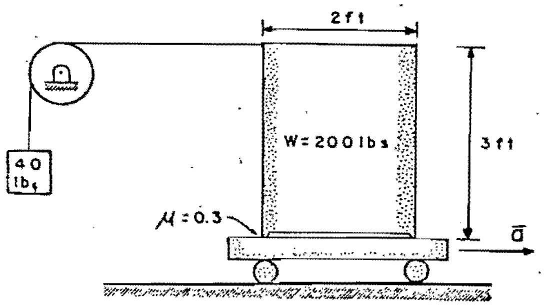
Cuya solución es:

$R_B = 111.7021$ N

$R_{Ax} = 38.3077$ N

$R_{Ay} = 200$ N

VII.7- Un bloque rectangular homogéneo de peso 200 lb_f descansa sobre la superficie plana de un carro y está unido a un bloque de 40 lb_f de peso por medio de un cable y una polea sin fricción, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción μ entre el bloque y la superficie del carro es 0.3 y el peso del cable y la inercia de la polea pueden despreciarse. Si el carro se mueve hacia la derecha y parte del reposo aumentando su aceleración, determine qué ocurre primero: que el bloque rectangular resbale o que voltee y con qué aceleración ocurrirá.



$$\Sigma M_G = 0$$

$$\left(40 + \frac{40}{32.2} a\right) 1.5 + F_f (1.5) - 1 (N_1) = 0$$

$$-\left(40 + \frac{40}{32.2} a\right) + F_f = \frac{200}{32.2} a$$

$$1.8633\, a + 1.5\, F_f = 140$$

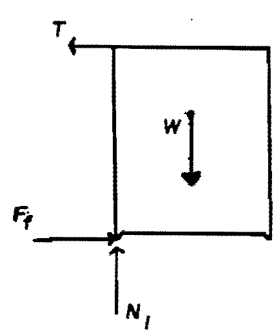
$$-7.4534\, a + F_f = 40$$

Resolviendo queda

$$a = 6.13 \text{ ft/s}^2$$

$$T = 47.619 \text{ lb}$$

Voltea



$\Sigma F = m\, a_G$

$- 40 - \frac{40}{32.2}\, a + 60 = \frac{200}{32.2}\, a$

$20 = \frac{240}{32.2}\, a$ por tanto $a = 2.6833$ aproximadamente g/12

$T = 40 + \frac{40}{32.2}\, 2.6833 = 43.33$ lb

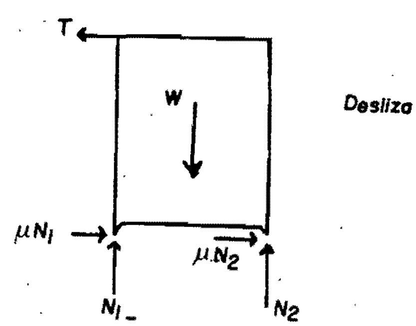
Por lo tanto

Desliza con $a = 2.6833$ ft/s^2 y $T = 43.33$ lb

Si $\Sigma F_x = \frac{W}{g}\, a$: $P - \mu\, .866\, W - .5\, W = m\, a$

quedando

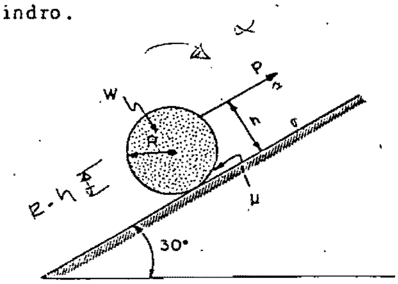
$P = \frac{W}{g}\, a + \mu\, W\, (.866)$



VII.8- Un cilindro circular homogéneo de radio R y peso W, resbala hacia arriba sobre un plano inclinado rugoso bajo la acción de una fuerza P que es paralela al plano, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción entre el plano y el cilindro es μ:

a) Determine la altura h para este movimiento.

b) Determine la aceleración del centro de masa del cilindro.



$$\Sigma M_{cG} = 0$$

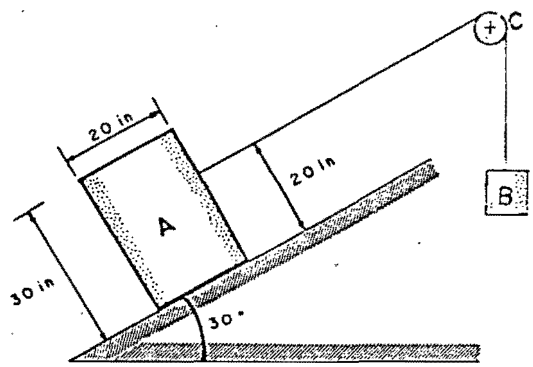
$$\mu(.866)\ W\ R - P\,(R - h) = 0$$

$$-\frac{\mu(.866)\ W\ R}{-\ P} + R = h$$

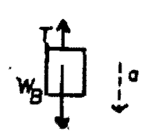
$$\frac{P\ R - \mu\ .866\ W\ R}{P} = h$$

$$a = \frac{P\ g}{W} - \mu\ .8666\ g - .5\ g$$

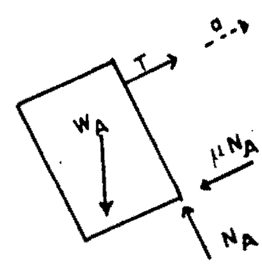
VII.9- Si el peso del bloque homogéneo A es de 180 lb_f y sus dimensiones son las que se indican en la figura, calcule el peso máximo que puede tener B para hacer que el cuerpo A deslice hacia arriba del plano inclinado sin volcar, así como la aceleración con que sube considerando que la polea C es lisa y que el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es $\mu = 0.2$.



$$- T + W_B = \frac{W_B}{32.2} a$$



$$T = W_B \left(1 - \frac{a}{32.2}\right)$$



$$\Sigma M_{cG} = 0$$

$$-W_B \left(1 - \frac{a}{32.2}\right) \frac{5}{12} - 31.1769 \left(\frac{15}{12}\right) + 155.88 \left(\frac{10}{12}\right) = 0$$

$$5 W_B - .15527 a W_B = 1091.23405 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underline{1}$$

$$\Sigma F_x = m a$$

$$- 90 - 31.1769 + W_B \left(1 - \frac{a}{32.2}\right) = \frac{180}{32.2} a$$

$$W_B - \frac{W_B a}{32.2} - 5.59 a = 121.1769 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underline{2}$$

de $\underline{1}$ $\quad W_B - \dfrac{a\, W_B}{32.2} = 218.2461$

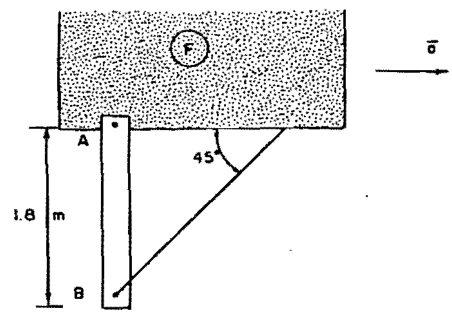
por tanto $\quad 218.2461 - 5.59\, a = 121.1769$

$a = 17.3647$ ft/s

$$W_B - \frac{17.3647}{32.2}\, W_B = 218.2461$$

por tanto $\quad W_B = 473.705$ lb

VII.10- La barra uniforme AB de la figura pesa 500N, está articulada en A y sujeta en B, por medio de un cable, a la armadura F. Si la armadura adquiere una aceleración $a = 0.5\ g$ hacia la derecha determine la tensión en el cable y la fuerza total ejercida por el pasador A sobre la barra.



$$\Sigma F_x = m\ a$$

$$1)\qquad R_{Ax} + .7071\ T = \frac{500}{g}\ (.5\ g)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$2)\qquad R_{Ay} + .7071\ T = 500$$

$$\Sigma M_{cG} = 0$$

$$3)\qquad .7071\ T\ (.9) - R_{Ax}\ (.9) = 0$$

$T = 176.77$ N

$R_{Ax} = 125$ N

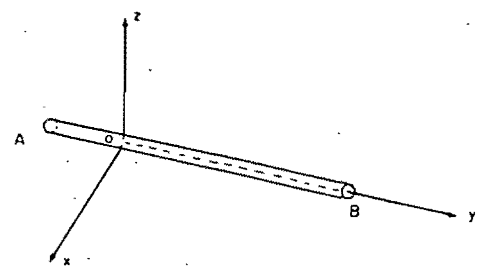
$R_{Ay} = 375$ N

$$\begin{array}{c|c|c} R_{Ax} & T & \\ 1 & .7071 & 250 \\ \hline -.9 & .6363 & 0 \end{array} \sim \left|\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 125 \\ 0 & 1 & 176.777 \end{array}\right.$$

$$R_{Ay} = 500 - .7071\ (176.777)$$

VIII MOMENTOS DE INERCIA

VIII.1 La barra que se muestra en la figura es delgada, homogénea, de 98.1 kg_f de peso y 0.6 m de longitud. Determine sus momentos de inercia, así como los correspondientes radios de giro, con respecto a los ejes coordenados que se indican. El origen del sistema coordenado dista 15 cm del extremo A.



$\bar{I}_{xx} = \bar{I}_{zz}$ $\quad \bar{I}_{xx} = \bar{I}_{zz} = \frac{1}{12}\ m\ l^2$ por tanto $\frac{1}{12}\ \frac{98.1}{9.81}\ (.6)^2 = .3$

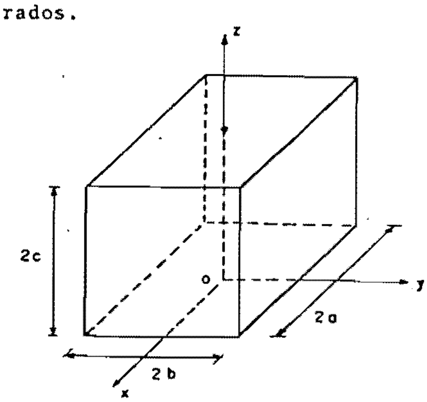
Con Steiner

$I_{xx} = I_{zz} = (.15)^2\ (10) + .3 = .525$

$\underline{r_{xx}} = \underline{r_{zz}} = \left(\frac{.525}{10} \right) = \underline{.229}$ (m)

$r_{yy} = 0$

VIII.2- El paralelepípedo rectangular de la figura es homogêneo, de masa m y su cara inferior coincide con el plano xy. Calcule los momentos de inercia respecto a los ejes x,y, y z mostrados.



$$\bar{I}_{XX} = \frac{m}{12}\ (4\ b^2 + 4\ c^2) \quad ; \quad \bar{I}_{YY} = \frac{m}{12}\ (4\ a^2 + 4\ c^2) \quad ;$$

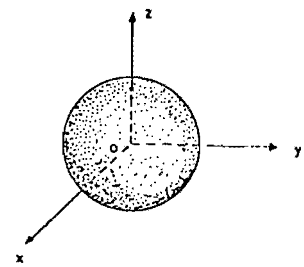
$$\bar{I}_{ZZ} = \frac{m}{12}\ (4\ a^2 + 4\ b^2)$$

Usando Steiner

$$\underline{I_{xx} = \frac{m}{12}\ (4\ b^2 + 16\ c^2)} \quad ; \quad \underline{I_{yy} = \frac{m}{12}\ (4\ a^2 + 16\ c^2)} \quad ;$$

$$\underline{I_{ZZ} = \frac{m}{12}\ (4\ a^2 + 4\ b^2)}$$

[illegible] La esfera maciza de aluminio fundido mostrada en la figura es homogénea, tiene un radio de 5 pulgadas, y su centro de masa coincide con el origen del sistema de referencia. Determine el momento de inercia con respecto al eje x, indicado, suponiendo que la densidad del material es de 160 lb/ft^3 .



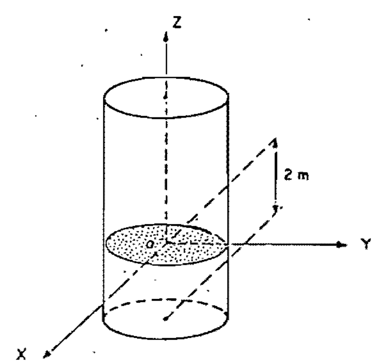
$$Vol. = \frac{4}{3}\,\pi\,\left(\frac{5}{12}\right)^3 = .0964\,\pi \quad ; \quad m = 160 \times .0964\,\pi = 15.424\,\pi\,(lb)$$

$$\bar{I}_{XX} = \frac{2}{5}\,(15.424\,\pi)\,\left(\frac{5}{12}\right)^2 = 3.365 \quad (lb \cdot pie^2)$$

V.4. El cilindro circular recto que se muestra en la figura es homogéneo, de 196.2 kg_f de peso, 1.5 m de radio y 8 m de altura. Si el plano xy es paralelo a la base y el origen del sistema coordenado que se indica está situado a 2 m de la base:

a) Determine el momento de inercia del cilindro con respecto a un eje paralelo al x, que pase por el centro de gravedad.

b) Utilizando el resultado del inciso a), determine su momento de inercia con respecto al eje x y el correspondiente radio de giro.



$W = 196.2\ K\bar{g}$; a) $\bar{I}_{XX} = \frac{1}{12}\left(\frac{196.2}{9.81}\right)\left(3\,(1.5)^2 + 8^2\right) =$

$117.91666 \quad (UTM\ .\ m^2)$

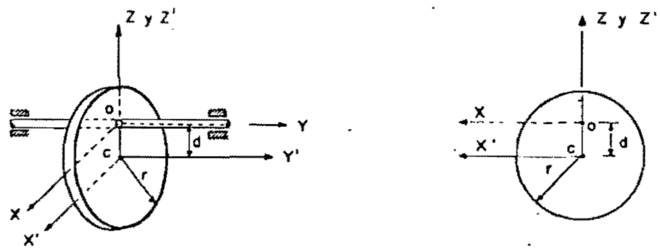
$I_{xx} = 20\ (2)^2 + 117.91666) = 197.916 \quad (UTM\ .\ m^2)$

$r_{xx} = \left(\frac{197.916}{20}\right) = 3.1457 \quad (m)$

VIII.5- El disco delgado, homogéneo, de masa m y radio r está montado excéntricamente sobre una flecha, como se indica en la figura; calcule:

a) Sus momentos y productos de inercia con respecto a los ejes coordenados que se muestran

b) Los valores respectivos si $d = r/2$



a) $I_{x'} = I_{z'} = \frac{1}{4} m\, r^2$; $I_{y'} = \frac{1}{2} m\, r^2$;

Productos de Inercia Centroidales = 0

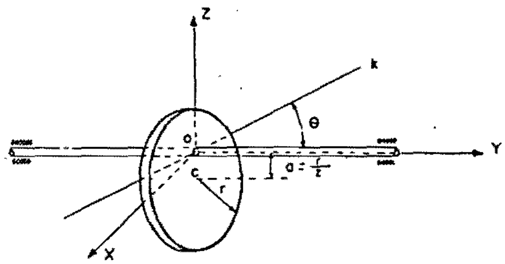
$I_x = \frac{1}{4} \; (m\, r^2 + 4\, m\, d^2)$; $I_y = \frac{1}{2} (m\, r^2 + 2\, m\, d^2)$;

$I_Z = \frac{1}{4} m\, r^2$

$P_{xZ} = P_{yZ} = 0$ y $P_{xy} = m \left(\frac{r}{2}\right) \left(\frac{r}{2}\right) = \frac{m\, r^2}{4}$

b) $I_x = \frac{1}{4} \; (2\, m\, r^2)$; $I_y = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\, m\, r^2\right)$; $I_Z = \frac{1}{4} m\, r^2$

VIII.6- Utilizando los datos del problema anterior determine el momento de inercia del disco con respecto al eje k, situado en el plano yz.



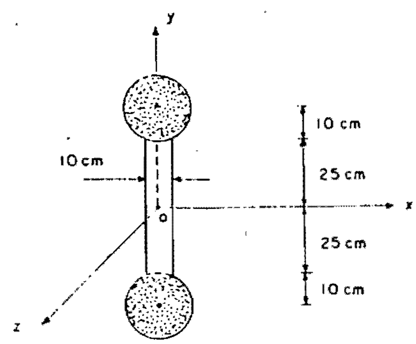
$$I_k = l^2\, I_x + m^2\, I_y + n^2\, I_Z - 2\, l\, m\, P_{xy} - 2\, l\, n\, P_{xZ} - 2\, m\, n\, P_{yZ}$$

$$= \underline{\cos^2(\theta)\ \frac{3}{4}\ m\, r^2 + \operatorname{sen}^2(\theta)\ \frac{1}{4}\ m\, r^2}$$

VIII.7- Dos esferas homogéneas, de 5 geokilos de masa y 10 cm de radio cada una, están unidas por una barra cilíndrica delgada homogénea de 50 cm de longitud y 49.05 kg_f de peso. Calcule el momento de inercia del conjunto con respecto al eje x, en los dos siguientes casos:

1ª Despreciando el espesor de la barra.

2ª Teniendo en cuenta el espesor de la barra.



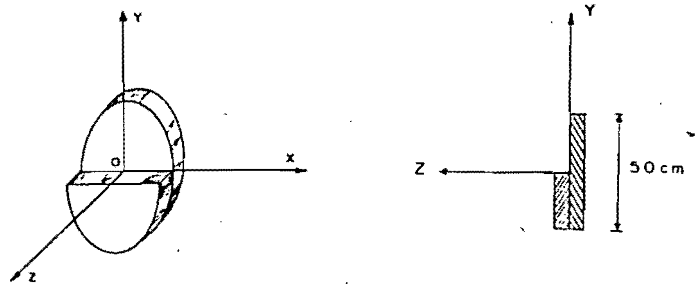
a.1) $I_x = 2\ (5\ (.35)^2 + \frac{2}{5}\ (5)\ (.1)^2\ ) + \frac{1}{12}\ (\frac{49.05}{9.85})\ (.5^2)$

$= 1.3691$ (geokilos . m^2)

a.2) $I_x = \frac{1}{12}\ (\frac{49.05}{9.81})\ (.5^2 + 3\ (.05)^2\ ) + 2\ (5\ (.35)^2 + \frac{2}{5}(5)(.1)^2$

1.37229 (geokilos . m^2)

VIII.8- La masa de un disco homogéneo, cuyo peso es de 100 kg_f ; se aumenta añadiéndole un semidisco como se muestra en la figura. Determine el peso de éste si el valor del momento de inercia de aquél, con respecto al eje z, se incrementa en 25% al añadirle dicho semidisco.



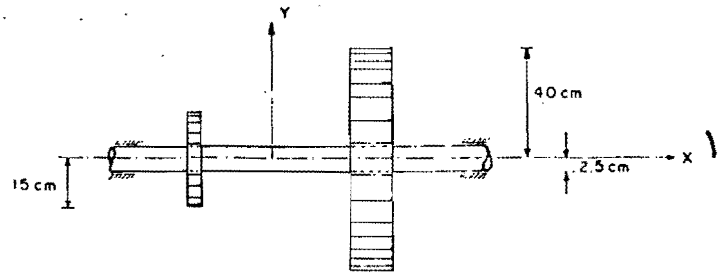
$$I_{x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{9.81}\right)(.25)^2 = .31855 \quad ; \quad I_{x_2} = .39819$$

Además $I_{x_2} = I_{x_1} + I_{x_1'}$

$$I_{x_1'} = .32\ \frac{W}{9.81}(.25)^2 + \frac{W}{9.81}\left(\frac{16\ (.25)^2}{9\ \ 2}\right) = .003186\ W$$

$$W = \frac{.39819 - .31855}{.003186} = 24.994 \quad (K\bar{g})$$

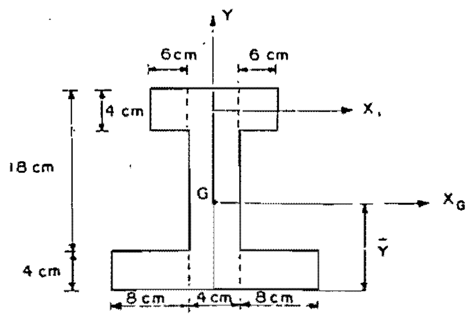
VIII.9- Un volante hueco de 300 kg_f de peso y 40 cm de radio y un piñón homogêneo de 20 kg_f de peso y 15 cm de radio, están montados en una flecha cilíndrica homogênea de 250 kg_f de peso y 2.5 cm de radio, como se indica en la figura. Calcule el momento de inercia del sistema con respecto al eje x.



$$I_x = \frac{1}{2\,(9.81)} \left(300\ (.4)^2 + 20\ (.15)^2 + 250\ (.025)^2\right) =$$

$$2.477 \quad (UTM \cdot m^2)$$

VIII.10- Determine el momento de inercia y el radio de giro de la sección I, de espesor constante, respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad.



$$\bar{y} = \frac{2\ (32)\ 2 + (88)\ 11 + 2\ (24)\ 20}{2\ (32) + 88 + 2\ (24)} = 10.28 \text{ cm}$$ con respecto a la base inferior.

$$\bar{I}_{xx} = 2\ (8)\ 4^3/12 + 4\ (22)^3/12 + 2\ (6)\ 4^3/12 + 2\ (32)\ (8.28)^2 + 88\ (.72)^2 + 2\ (24)\ (9.72)^2 = 12666.987 \text{ cm}^4$$

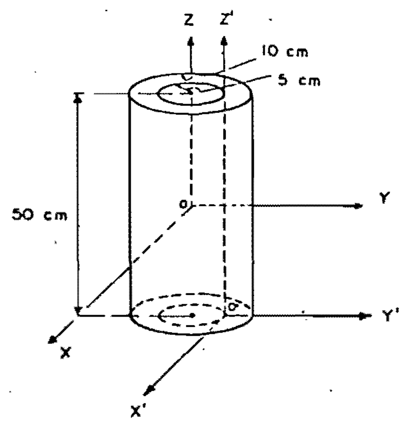
$$\underline{\bar{r}_{xx}} = \left(\frac{I_{xx}}{200} \right)^{1/2} = \underline{7.958 \text{ cm}}$$

VIII.11- Un cilindro circular recto, hueco y homogénco, como el que se muestra en la figura, pesa 50 kg_f y su base inferior coincide con el plano x'y'. Determine:

a) El tensor de inercia en el centro de masa o, origen del sistema x,y,z.

b) El tensor de inercia en el punto o', origen del sistema de referencia x',y',z'.

c) Los momentos de inercia del cilindro, respecto a los ejes principales de inercia que pasan por el origen del sistema x', y', z' ; así como los vectores unitarios que determinan la dirección y el sentido de dichos ejes principales.



$$dm = \rho \pi (R^2 - r^2)\, dZ$$

$$dI_Z = \frac{1}{2} (R^2 + r^2)\, dm$$

$$I_Z = \frac{\pi \rho}{2} (R^2 + r^2)(R^2 - r^2) \int_{-h/2}^{h/2} dZ = \frac{\pi \rho}{2} (R^2 + r^2)(R^2 - r^2) =$$

$$\frac{1}{2} m (R^2 + r^2) = \frac{1}{2} \frac{50}{9.81} (.05^2 + .1^2) = .031855$$

$$dI_x = d\bar{I}_x + Z^2\ dm$$

$$I_x = \frac{1}{4}\ (R^2 + r^2)\ \rho\pi\ (R^2 - r^2) \int_{-h/2}^{h/2} dZ + \rho\pi\ (R^2 - r^2) \int_{-h/2}^{h/2} Z^2\ dZ$$

$$= \frac{1}{4}\ (R^2 + r^2)\ m + \rho\pi\ \frac{(R^2 - r^2)}{3}\ (\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8})$$

$$= \frac{m}{12}\ (3\ R^2 + 3\ r^2 + h^2) = .12211$$

$$I_x = I_y$$

Usando unidades de Geokilos . cm^2

$$a)\ \left[\begin{array}{c|c|c} 1221.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1221.1 & 0 \\ 0 & 0 & 318.5 \end{array}\right]$$

Usando Steiner:

$$b)\ \left[\begin{array}{c|c|c} 4534.045 & -3248.61 & 649.722 \\ -3248.61 & 4406.62 & 637.105 \\ 649.722 & 637.105 & 445.921 \end{array}\right]$$

con respecto a x' y' Z'

Polinomio Característico

$$-\lambda^3 + 9386.586\ \lambda^2 - 12585135.26\ \lambda - 2186646999$$

$\lambda_1 = -155.431206$ con división sintética se tendrá

$$\lambda^2 \; -9542.0172\,\lambda \; + 14068262.84 = 0$$

$$\lambda_2 = 7719.6117$$

$$\lambda_3 = 1822.4055$$

Con $\lambda_1 = -155.431206$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -.69274 & 0.13854 \\ 0 & 2234.445 & 1087.1965 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & .4756 \\ \hline 0 & 1 & 0.486562 \end{array}\right] \sim$$

$$n = \left(\frac{1}{1 + .4756^2 + .486562^2}\right)^{1/2} = 0.82667$$

$$m = -.486562\ n = -.40227$$

$$l = -.4756\ n = -.39321$$

$$\overline{e}_1 = -.39321\ \overline{i} - .40227\ \overline{j} + .82667\ \overline{k}$$

Con $\lambda_3 = 1822.405$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 2711.6395 & -3248.61 & 649.722 \\ \hline -3248.61 & 2584.2145 & 637.105 \\ \hline 649.722 & 637.105 & -1376.4895 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1.19802 & 0.2396 \\ \hline 0 & -1307.6852 & 1415.487 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & -1.05718 \\ 0 & 1 & -1.0824 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Así que

$$n = \left(\frac{1}{1 + 1.05718^2 + 1.082^2}\right)^{1/2} = 0.5513$$

$m = .59681$

$l = .58291$

$\bar{e}_3 = .582991\ \bar{i} + .59681\ \bar{j} + .5513\ \bar{k}$

$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 \doteq 0$

para $\bar{e}_2$

Si $\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = 0$ por tanto $-.39321\ l - .40227\ m + .82667\ n = 0$

$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = 0$ $\quad .58291\ l + .59681\ m + .5513\ n = 0$

$\left| \bar{e}_2 \right| = 1$ $\quad e^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1.02304 & -2.10236 \\ 0 & 0 & 1.77678 \end{array}\right]$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c} 1 & 1.02304 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$n = 0 \quad ; \quad m = \left(\frac{1}{(1 + 1.023^2)}\right)^{1/2} = .69902$$

$l = -0.71512$

$\underline{I_{max} = 7719.6117 \text{ UTM} \cdot \text{cm}^2}$

$\underline{\bar{e} = -.7151\ \bar{i} + .699\ \bar{j}}$

$I_{min} = 155.431 \quad UTM \cdot cm^2$

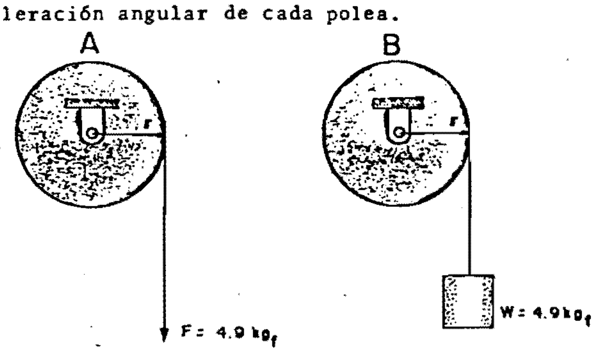
$\bar{e} = -.393\,\bar{i} - .402\,\bar{j} + .826\,\bar{k}$

$I = 1822.4055 \quad UTM \cdot cm^2$

$\bar{e} = .5829\,\bar{i} + .5968\,\bar{j} + .5513\,\bar{k}$

IX DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO
(ROTACION BARICENTRICA)

IX.1- Dos poleas idénticas, A y B, están montadas en ejes sin fricción, como se muestra. Cada una de ellas pesa 19.62 kg_f y tiene una cuerda enrollada. La polea A se jala con una fuerza de magnitud 4.9 kg_f , en tanto que la B se mueve debido a un cuerpo que pesa 4.9 kg_f atado a su cable. Considerando que los cables son flexibles, inextensibles y sin peso, determine el módulo de la aceleración angular de cada polea.



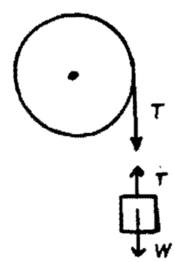
$$m\ a = \frac{19.62}{9.81} = 2 \text{ UTM} \qquad\qquad I_c + \frac{1}{2}\, m\, r^2$$

$$\Sigma M = I_c\, \alpha$$

$$4.9\, r = \frac{1}{2}\,(2)\, r^2 \alpha \qquad \text{por tanto} \quad \alpha = \frac{4.9}{r} = \frac{g}{2r} \text{ rad/s}^2$$

$$\Sigma F = m\, a$$

$$4.9 - T = \frac{4.9}{9.81}\, r\, \alpha \quad ; \qquad T = 4.9 - .5\, r\, \alpha \ - (1)$$



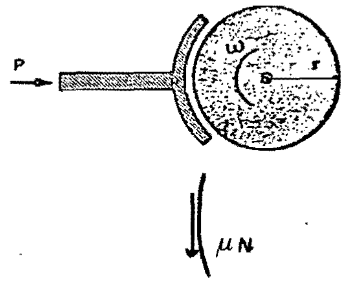
$$\Sigma M = I_c\, \alpha$$

$$T\, r = 1/2\ (2)\ r^2 \alpha \ - (2)$$

$$(4.9 - .5\, r\, \alpha)\, r = r^2 \alpha \quad \text{por tanto} \quad 4.9 = r\,\alpha + .5\, r\,\alpha$$

$$\alpha = (\frac{4.9}{1.5})/r = \underline{(3.266)/r} = \frac{g}{3r} \text{ rad/s}^2$$

IX.2- Un tambor de 75 cm de radio, cuyo momento de inercia de 50 $kg_f \cdot s^2 \cdot m$ respecto a su eje centroidal, gira en torno a este eje con una rapidez angular de 200 rpm en el sentido indicado en la figura. ¿Qué fuerza deberá ejercer el freno para que el tambor se detenga en 15 vueltas, si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es de 0.4 ?



$$\omega_o = \frac{200 \times 2 \times \pi}{60} = 20.944 \text{ rad/s} \qquad \omega_f = 0 \text{ rad/s}$$

$$I_c = 50 \text{ Kg} \cdot s^2 \cdot m \quad ; \quad 15 \text{ vueltas} = 15 \times 2 \times \pi = 94.248 \text{ rad}$$

$$\Sigma M_c = I \alpha$$

$$- .4 \, N \, r = 50 \; \omega \; \frac{\delta \omega}{\delta \theta}$$

$$\frac{- .4 \, N \, (.75)}{50} \; \delta \theta = \omega \; \delta \omega \quad ; \quad - .006 \, N \, (\theta_f - \theta_i) = \frac{\omega_f^2 - \omega_o^2}{2}$$

$$- .012 \, N \, (94.298) = 0^2 - 20.994^2$$

$$N = \frac{20.994^2}{.012 \, (94.248)} = 387.851 \text{ K}\bar{g}$$

$$F_{fricción} = \mu \, N = 155.14 \text{ K}\bar{g}$$

IX.3- El volante mostrado en la figura pesa 200 kg_f y está montado sobre un eje fijo que pasa por su centro de masa. Si el sistema parte del reposo determine el módulo de la aceleración angular del volante, la tensión en el cable y la rapidez del cuerpo B en el instante en que haya descendido 10 metros.

Considere que:

a) El radio de giro del volante, respecto a su eje de rotación, es de 0.7 metros.

b) El cable es flexible, inextensible y de peso despreciable.

c) La fricción en el eje mencionado es despreciable.

$r_{giro} = .7$ m ; $I_i = r^2\, m = .7^2\,(\frac{200}{9.81}) = 9.989\ \bar{Kg}\ .\ s^2 .\ m$

$\Sigma M_c = I\,\alpha$

$.75\ T = 9.989\ \alpha$ (1)

$\Sigma F = m\,a$

$$- T + 200 = \frac{200}{9.81}\ (.75)\,\alpha$$

$- T + 200 = 15.2905\ \alpha$ (2)

$T = 200 - 15.2905\ \alpha$; $T = 200 - 1.14805\ T$

$$T = \frac{200}{2.14805} = 93.107686\ \bar{Kg}$$

$a = 106.89231$ /masa $= 5.243$ m/s

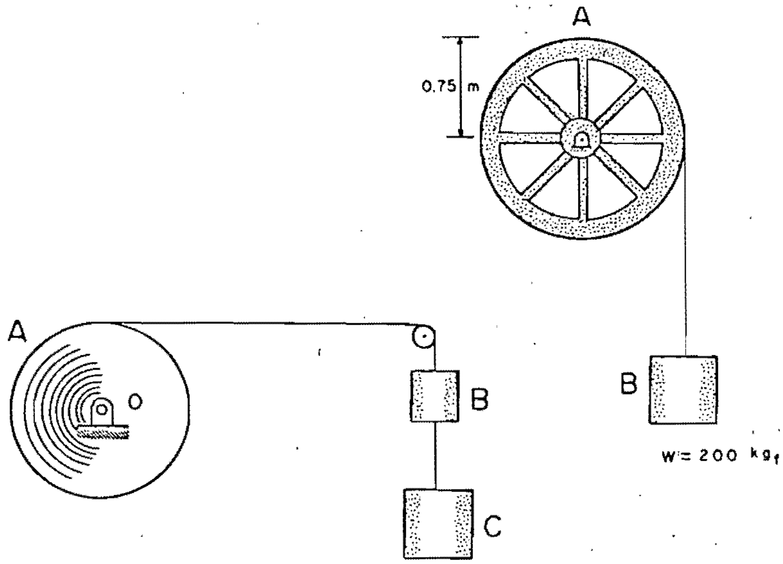
$d = \frac{a\,t^2}{2}$ y $v = a\,t$

por tanto, si $d = 10$ m $\qquad 10 = \frac{5.243\ t^2}{2}$

por tanto $t = 1.9531$ s para $d = 10$ m

por tanto $v = a\,t = 10.24$ m/s

IX.4 - El cilindro homogéneo A cuyo radio es de 50 cm, pesa 392.4N y gira alrededor de un eje fijo sin fricción . Los cuerpos B y C pesan 147.15 N y 49.05 N , respectivamente; la cuerda que los une es inextensible , flexible , de peso despreciable y pasa por una articulación lisa, estando enrollada en el cilindro A.
Calcule el módulo de la aceleración angular del cilindro y las tensiones en las cuerdas, así como la reacción del eje o.



$$m_A = \frac{392.4}{9.81} = 40 \text{ Kg}$$

$$\Sigma M_O = I\,\alpha$$

$$.5\ T = \frac{1}{2}\, m\, r^2\, \alpha$$

$$.5\ T = \frac{1}{2}\,(40)\,(.5)^2\,\alpha$$

$$.1\ T = \alpha$$

$$m_B + M_C = \frac{147.15 + 49.05}{9.81} = 20$$

$$\Sigma F = m\, a$$

$$-T + (147.15 + 49.05) = 20\,(.5)\,\alpha$$

$$-T + 196.20 = 10\,\alpha \quad (2)$$

por tanto

$$T = \frac{196.20}{2} = 98.1 \text{ N}$$

$$\alpha = 9.81 \text{ rad/s}$$

Reacción

$R = (392.4^2 + 98.12)^{1/2} = 404.47$

Para la cuerda que une B con C

$m\ a = 73.575$

$(\frac{147.15}{9.81})\ .5\ (9.81)$

$\Sigma F = m\ a$

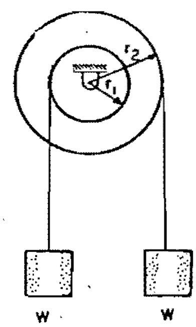
$-98.1 + T_1 + 147.15 = 73.575$

$T_1 = -73.575 + 98.1$

$T_1 = 24.525\ N$

IX.5- Una polea de doble paso tiene un peso de 200 lb_f y un radio de giro de 10 in con respecto al eje de rotación. De los cables que se enrollan en la periferia de las poleas cuelgan dos cuerpos iguales de 40 lb_f de peso cada uno. Suponiendo que se desprecia la fricción en el eje determine la magnitud de la aceleración del cuerpo que desciende; así también, el módulo de la aceleración angular de la polea.

Considere $r_2 = 2r_1 = 16$ in ; los cables son flexibles, inextensibles y sin peso.



$r_g = \frac{10}{12} = .8333$ pies ; $r_g^2 = .6944$ pies^2 $m = \frac{200}{32.2} = 6.211\overline{lb}.s^2/p$

$r_2 = \frac{16}{12} = 1.33$ pies $r_1 = \frac{8}{12} = .666$ pies ; $I = r^2 g\, m =$ $4.31291\ \overline{lb}\ s^2$ pie

hipótesis

$\frac{40}{32.2}(.66)\alpha + 40 = T_1$; α en sentido a las manecillas del reloj

$T_2 = -\frac{40}{32.2}(1.333)\alpha + 40$

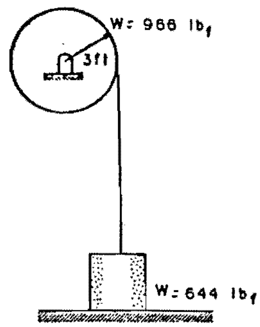
$\Sigma M_c = I\alpha$: $-(.82807\alpha + 40)\ .666 + (-1.65273\alpha + 40)\ 1.333 = 4.312191\ \alpha$

$26.668 = 7.06777\alpha$

$\underline{\alpha = 3.773\ s}$

El de la derecha desciende $\underline{a = \alpha r = 3.733\ (1.333) = 5.029\ \text{pies/s}^2}$

IX.6- El tambor de la figura tiene 3ft de radio, pesa 966 lb_f y su radio de giro es de 2ft con respecto a su eje de rotación, que a su vez pasa por su centro de masa. Si se le aplica un par de magnitud constante e igual a 2000 $lb_f \cdot ft$ para levantar el bloque que se indica, determine la rapidez que adquiere éste cuando transcurren 5 segundos, contados a partir de la iniciación del movimiento.



$r_g^2 = 4$ pies $\qquad m = \frac{966}{32.2} = 30 \qquad I_c = 120\ \overline{lb} \cdot s^2 \cdot$ pie

$2000\ \overline{lb} \cdot$ pie

$F = m\,a$

$$T_1 - 644 = \frac{644}{32.2}\, r$$

$$T_1 = \frac{644}{32.2}(3)\,\alpha + 644 = 60\,\alpha + 64.4$$

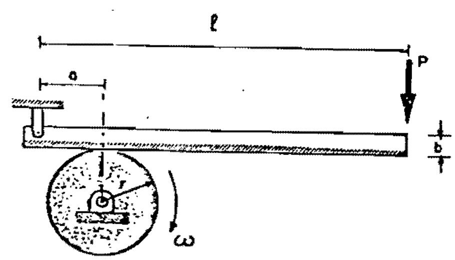
$$\Sigma M_c = I\,\alpha$$

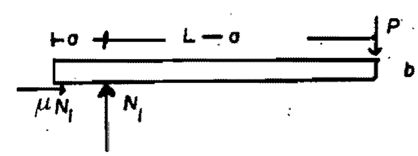
$$2000 - (60 \quad + 644)^3 = 120\,\alpha$$

$68 = 300\,\alpha$ por lo tanto $\underline{\alpha = 0.2266}$

$\underline{v_t} = r\,\omega\,t = \underline{3.545\ ft/s}$

IX.7. Un rotor cilíndrico macizo de radio r y peso W , que gira alrededor de su eje con una rapidez angular ω , se detiene mediante un sistema de frenaje como se indica en la figura. Si el coeficiente de fricción entre el freno y el rotor es μ, determine el número de revoluciones N que dará el rotor antes de llegar al reposo . Despréciense todas las fricciones en los ejes.





$$\Sigma M = b\mu N_1 + a N_1 - P l = 0$$

$$\omega_o \,,\ \omega_f = 0$$

$$\frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g} r^2 = I_c$$

$$\Sigma M = I\alpha$$

$$-\mu N_1 r = \frac{1}{2}\frac{W}{g} r^2 \alpha \quad ; \quad -\mu \frac{P\,l\,2\,g}{r\,(a + b\mu)\,W} = \alpha$$

integrando

$$\frac{2\mu P l g \theta}{a\, r\, W\, (a + b\mu)} = \frac{\omega^2}{2} \quad ; \quad \theta = \frac{\omega_o^2\,(a + b\mu)\, r\, W}{2\pi\,(4\mu P l g)}$$

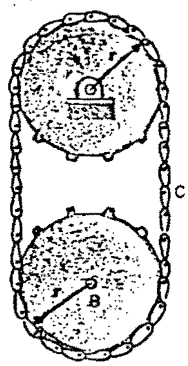
$$\theta_{\text{revoluc.}} = \frac{W r \omega_o^2}{8\pi P l g \mu}\,(a + b\mu)$$

IX.8.- Dos ruedas dentadas de peso W y radio r , inicialmente en reposo, se encuentran unidas por medio de una cadena de eslabones , como se ilustra. De pronto se rompe el pasador $\overline{C}$ y se desea calcular en ese instante la magnitud de:

a) la aceleración angular de cada rueda,

b) la tensión en la rama izquierda de la cadena,

c) la aceleración en el punto B al quedar libre y caer.



$$\frac{1}{2}\,\frac{W}{g}\,r^2\,\alpha_A = r\,T \qquad \text{por tanto} \qquad \alpha_A = \frac{2\,g\,T}{W\,r}$$

por tanto

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{W}{g}\,r\,\alpha_B$$

$$-T + W = \frac{W}{g}\,a_B$$

$$-\frac{\frac{W\,r\,\alpha_B}{2}}{g} + \frac{\frac{2\,g\,W}{2}}{g} = \frac{W}{g}\,2\,r\,\alpha_B$$

$$\frac{2\,g - r\,\alpha_B}{2\,g} = \frac{2\,r\,\alpha_B}{2\,g} \;;\quad \frac{2\,g}{2\,g} = \frac{2\,r\,\alpha_y}{2\,g} + \frac{1\,r\,\alpha_B}{2\,g}$$

$$\frac{2\,g}{3\,r} = \alpha_B = \alpha_A$$

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{W}{g}\,r\,\alpha_B = \frac{1}{3}\,W$$

$$a_B = r\,\alpha_B = \frac{2}{3}\,g$$

X DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO (ROTACION NO BARICENTRICA Y MOV. GENERAL EN EL PLANO)

X.1-Un tambor cuyo peso es de 160 kg_f y tiene 0.8 m de diámetro, gira alrededor del eje horizontal como se indica en la figura. El radio de giro del tambor respecto a su eje geométrico es de 0.30 m. Si en la posición mostrada la rapidez angular es de 12 s^{-1}, determine la reacción en el eje de rotación.

$$m = \frac{160}{9.81} = 16.3098 \qquad I_g = m\, r_g^2 = m\,(.30)^2 = 1.4678$$

$$I_o = 1.4678 + 16.3098\,(.4)^2 = 4.07745$$

$$\Sigma M = I_o\,\alpha \quad ; \quad .28284\,(160) = 4.07745\,\alpha \; ; \quad \alpha = 11.0987 \text{ rad/s}^2$$

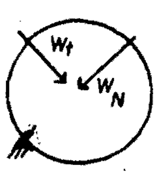
$$\Sigma F_N = m\,\omega^2\,r$$

$$R_N + 113.136 = 939.444 \quad \text{por tanto} \quad R_N = 826.30848 \text{ Kg}$$

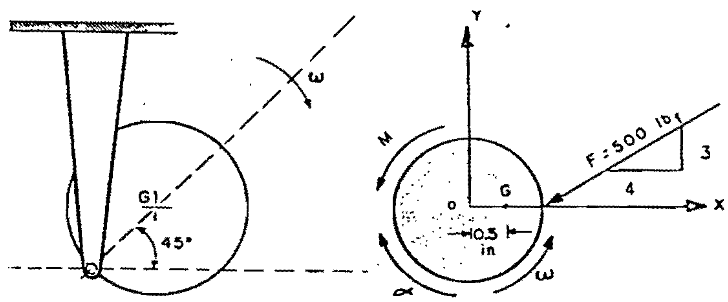
$$\Sigma F_t = m\,r\,\alpha$$

$$-R_t + 113.136 = 72.4070309 \quad \text{por tanto} \quad R_t = 40.7289$$

$$R = (R_N^2 + R_t^2)^{1/2} = 827.3116 \text{ Kg}$$



X.2-Una rueda desbalanceada de 2 pies de radio pesa 64.4 libras y tiene un radio de giro de 0.5 pies con respecto a su eje geométrico. En la posición indicada en la figura está girando alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro geométrico, con una aceleración y una rapidez angulares de 2 s^{-2} y 12 s^{-1}, respectivamente, la primera en el sentido de las manecillas del reloj y la segunda en el contrario, estando sometida a las acciones de una fuerza F y un par M. Determine dicho par y las componentes axiales O_x y O_y de la reacción en O, suponiendo que la fricción en el eje es despreciable.



$m = \dfrac{64.4}{32.2} = 2 \qquad r_{giro}\ .5 \text{ pies} \qquad \alpha = 2\ s^{-2} \qquad \omega = 12\ s^{-1}$

$I_o = .5$

$\Sigma M = I_o\,\alpha$

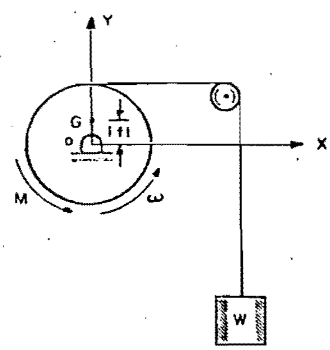
$-M + 300\ (2) + (.5)\ 54.4 = 1$

por tanto $M = 631.2$ lb - pie

$\Sigma F_N = m\ \omega^2\ r = 2\ (12)^2\ (.5)\ ;\ -R_N + 400 = 144\ ;\ R_N = 256$ lb

$\Sigma F_t = m\ \alpha\ r = 2\ (2)\ .5\ ;\ -R_t + 64.4 + 300 = 2\ ;\ R_t = 362.4$

X.3- Una polea desbalanceada de 8 in de radio, pesa 32.2 lb_f y tiene un radio de giro de 6 in con respecto a su eje geométrico. Cuando se aplica un par $M = 100\ lb_f \cdot ft$ levanta un peso de 96.6 libras. En la posición indicada en la figura la polea tiene una rapidez angular de $3 s^{-1}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine la tensión T en la cuerda y las componentes axiales O_x y O_y de la reacción en O, despreciando las fricciones y suponiendo que la periferia de la polea pequeña es lisa.



$$m_P = \frac{32.2}{32.2} = 1 \qquad r_{g_o} = \left(\frac{6}{12}\right) \qquad I_o = m\, r_g^2 = .25$$

$$\Sigma M_o = I_o \alpha$$

$$100 - T\,(.666) = .25\,\alpha \qquad\qquad 100 - (2\alpha + 96.6)\ .666 = .25\,\alpha$$

$$-96.6 + T = \frac{96.6}{32.2}\,(.666)\,\alpha \qquad\qquad \alpha = 22.48651$$

$$T = 141.5730$$

$$\Sigma F_t = R_{ot} - 141.573 = 1\,\left(\frac{1}{12}\right)\, 22.48651$$

por tanto $\quad R_{ot} = 143.44\ lb$

$$\Sigma F_N = 32.2 - R_{oN} = 1\ (3^2)\ \left(\frac{1}{12}\right)$$

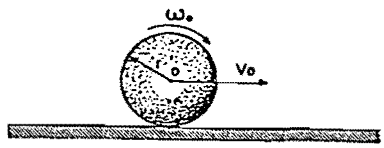
por tanto $\quad R_{oN} = 31.45\ lb$

X.4- Una esfera homogênea de radio r y peso w se lanza a lo largo de una superficie horizontal. Si la rapidez inicial de su centro es v_o y la rapidez angular inicial ω_o, investigue las características del movimiento para los tres casos siguientes:

a) $v_o = r\,\omega_o$

b) $v_o > r\,\omega_o$

c) $v_o < r\,\omega_o$

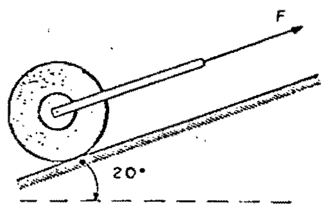


a) Rueda sin deslizar.

b) Rueda y desliza con fuerza de fricción hacia la izquierda; cIR abajo del suelo.

c) Rueda y desliza con fuerza de fricción hacia la derecha; cIR arriba del suelo.

X.5- Un disco de 20 cm de radio, 49.05 kg_f de peso y cuyo radio de giro es 10 cm, respecto a un eje que pasa por su centro de masa, se mueve sobre una superficie inclinada soportando la acción de la fuerza constante F que se indica en la figura. Si rueda sin deslizar y la magnitud de F es 10 kg_f, determine la aceleración angular del disco, la aceleración de su centro de masa y el coeficiente de fricción mínimo para que el movimiento descrito sea posible (es decir, para que exista rodadura sin deslizamiento).



$r_g = .1 \qquad r = .2 \qquad m = \frac{49.05}{9.81} = 5 \qquad I_o = 5\ (.1)^2 = .05$

$I_u = .05 + 5\ (.2)^2 = .25$

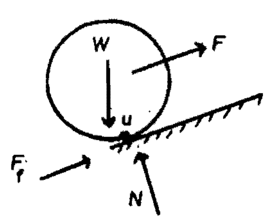
$\Sigma M_u = I_u \alpha$

$.2\ (16.776 - 10) = .25\alpha$ por tanto $\alpha = 5.4208\ s^{-2}$

$\Sigma F_t = m\,r\,\alpha\ ; \quad r\alpha = 1.08416\ m/s^2$

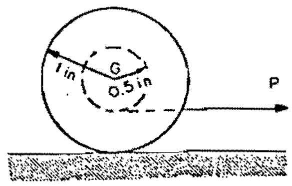
$6.776 - F_f = 5\ (.2)\ 5.4208\ ; \quad f_f = 1.372\ Kg$

$$\mu = \frac{f_f}{46.09192} = .0297$$



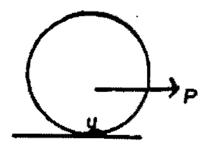
X.6- Un carrete que pesa 64.4 libras, cuyo radio de giro es $1/\sqrt{2}$ pies respecto al eje del disco, rueda sin deslizar a lo largo de una superficie horizontal, como se indica en la figura. Se jala por medio de una fuerza P aplicada a la cuerda que se enrolla en la ranura. Dado que $P = 48\ lb_f$ determinar:

a) La aceleración del centro G.
b) La fuerza de fricción que actúa sobre el carrete.



$r_g = .05892$ pies $r = .0833$ pies $\frac{.5}{12} = .04166$

$m = \frac{64.4}{32.2} = 2$; $P = 48$



$I_u = 2\ (.05892^2 + .0833^2) = .02083$

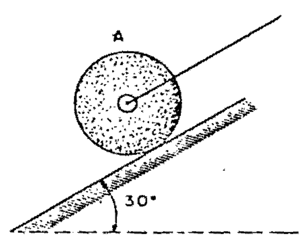
$\Sigma M_u = P\ (.041666) = .02083\ \alpha$; $\alpha = 96$; $r\,\alpha = 8\ ft/s^2 = a_c$

$\Sigma M_o = I_o\,\alpha$

$f_f\ (.0833) - 2 = .6665$

$f_f = 32.0127\ \overline{lb}$

X.7- Una esfera A maciza y homogénea rueda sin deslizar hacia arriba de un plano inclinado debido a la acción de un bloque B, al que está unida mediante una cuerda flexible, inextensible y de peso despreciable, que sa por una polea C como se muestra en la figura. los pesos de A y B son respectivamente de 98 y el radio de la esfera es de 0.4 m calcule l· ción angular α de la esfera, la tensión T y la aceleración a del bloque.



$W_A = 98$ Kg ; $M = \dfrac{98}{9.81} = 9.9898$ UTM ; $\dfrac{2}{5}\, m\, r^2 =$

$\dfrac{2}{5}\, m\, (.4)^2 = .63934\ \overline{Kg}\, .\, s^2\, .\, m$

$m_B = 8.97043$ UTM

$I_u = I_o + m\, r^2 = 2.237708$

$\Sigma M = .4\, (T - 49) = (2.237708)\, \alpha$

$-8.7589 + .178754\, T = \alpha$

$-.278693\, T + 24.52502 = \alpha$; esta proviene de

$\Sigma F = -T + 88 = 8.97043\, (.4)\, \alpha$

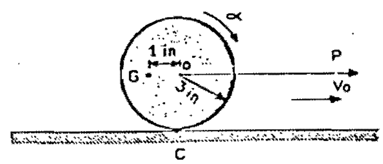
por tanto $T = 73.0157\ \overline{Kg}$

$\alpha = 4.2929\ s^{-2}$

$a_B = r\, \alpha = 1.7171\ m/s^2$

X.8- Un disco desbalanceado cuyo radio es de 3 ft pesa 966 lb_f y su radio de giro es de 2 ft con respecto al eje que pasa por su centro de masa G y es paralelo a su eje geométrico. El cuerpo rueda sin deslizar sobre la superficie horizontal, en la dirección indicada en la figura, cuando actúa sobre él una fuerza P horizontal cuya línea de acción pasa por el centro geométrico "O", de modo que éste tiene una rapidez de 10 ft/s y una aceleración de 5 ft/s^2.

Determine las fuerzas normal y tangencial (de fricción) que se ejercen sobre el disco en el punto de contacto C.



Cambiando a lo siguiente

$r = 3$ pies $\quad r_{o/G} = 1$ pie $\quad m = 30$

$\alpha = 5/3 = 1.666$

$I_o = 30\ (2)^2 + 30\ (1)^2 = 150$

$\Sigma M_o = I_o\,\alpha$

$-966\ (1) + F_f\ (3) = 150\ (1.666)$

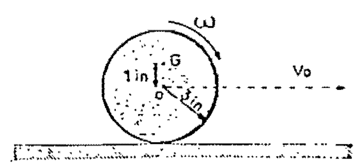
Por tanto $F_f = 405.333$ $(l\overline{b})$

$\Sigma M_G = I_G\,\alpha$

$405.33\ (3) - 1\ (N) = 120\ (1.666)$

Por tanto $N = 1016$ $(l\overline{b})$

X.9- El disco desbalanceado del problema anterior rueda y desliza sobre el plano horizontal de tal manera que, cuando se encuentra en la posición indicada en la figura, su rapidez angular es de $3s^{-1}$ y la rapidez del centro o es de 5 ft/s. Determine la aceleración del punto o en dicha posición, suponiendo que el coeficiente de fricción entre el disco y el piso es de 0.25



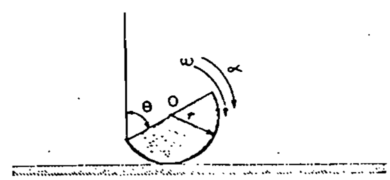
Falta una fuerza P que jale y además que sea conocida; la demostración de la necesidad que exista P es:

$\Sigma M_o = I_o \alpha$ donde $\alpha \neq 0$

$\Sigma M_{suelo} = (I_{suelo})\alpha$ y α debe ser diferente de cero, pero si no existe P la Suma de Momentos es cero y se llega a una contradicción.

Tiene que ser conocida P porque existen dos incógnitas a_G y α, que se encuentran de Σ Momentos y ΣF_x y si existiera P como incógnita serían 3 incógnitas con 2 ecuaciones y no se podría resolver.

X.10- Un semidisco homogêneo y uniforme de radio r rueda libremente sobre una superficie horizontal. Cuando $\theta = 0°$ la rapidez angular es ω_o.
Determine la aceleración angular α_o correspondiente a $\theta = 0°$



$$I_G + .32\, m\, r^2$$

$$\bar{x} = \frac{4\, r}{3\, \pi}$$

$$\Sigma\, M_{suelo} = I_{suelo}\ \alpha$$

$$\frac{4\, r}{3\, \pi}\ W = \frac{W}{g}\ \left(\left(r^2 + \frac{16\, r^2}{9\, \pi^2}\right)^{1/2} + .32 \right) \alpha$$

Por tanto

$$\alpha = \frac{4\ g}{3\ (1.406)\ r}$$

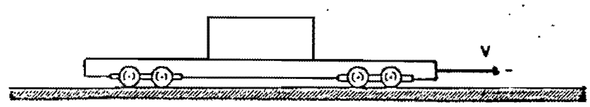
$$= \frac{4\ g}{4.219\ \pi\ r}$$

$$= \frac{8\ g}{8.44\ \pi\ r}$$

$$= \frac{8g}{9\, \pi\, r}$$

XI SISTEMAS DE PARTICULAS

XI.1- Un vagón que pesa 200 kg_f se mueve sobre una vía horizontal recta a razón de 12m/s. Si sobre aquél se suelta una caja que pesa 100 kg_f, determine la rapidez de ambos cuerpos al moverse juntos, despreciando las pérdidas de energía debidas a la fricción.



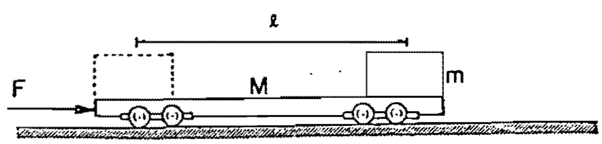
$$\frac{200}{g}\,(12) = \frac{200 + 100}{g}\,v_f$$

$$v_f = 8 \quad (m/s)$$

XI.2- Una carretilla de masa M, inicialmente en reposo, puede moverse horizontalmente sin rozamiento a lo largo de un carril. Cuando $t=0$ se aplica a la carretilla la fuerza F que se muestra en la figura. Durante la aceleración provocada a la carretilla debida a la fuerza F, una caja pequeña de masa m se desliza a lo largo de aquélla desde el frente hacia la parte posterior. Si el coeficiente de fricción entre ambas es μ y se supone que la aceleración de la carretilla es suficiente para producir el deslizamiento:

a) Determine dos ecuaciones de movimiento, una para la caja y otra para la carretilla y demuestre que pueden ser combinadas para dar la ecuación de movimiento del centro de masa del sistema formado por ambos cuerpos.

b) Determine el desplazamiento de la carretilla para el tiempo en que la caja se haya movido una distancia ℓ a lo largo de aquélla.



La caja para sus distancias

$$F_R \frac{t^2}{2} = m\,(x - l) \qquad \text{Por tanto} \quad \frac{t^2}{2} = \frac{(x - l)\,m}{\mu\, m\, g}$$

Para ambos

$$F \frac{t^2}{2} = M\,(x) + m\,(x - l)$$

$$\text{pero} \quad \frac{t^2}{2} = \frac{x - l}{\mu\, g}$$

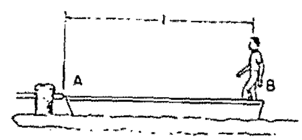
$$F \frac{(x - l)}{\mu\, g} = M\,(x) + m\,(x - l)$$

$$\frac{F\,(x)}{\mu\, g} - \frac{F\, l}{\mu\, g} = \frac{M \mu g\, x + m\mu g\, x - m\,\mu\, g\, l}{\mu\, g}$$

$$x\,(F - \mu M\, g - \mu\, m\, g) = F\, l - m\,\mu\, g\, l$$

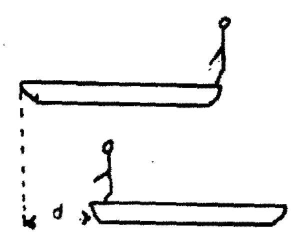
$$x = \frac{l\,(F - \mu\, m\, g)}{F - \mu\, g\,(M+m)}$$

XI.3- Un hombre que pesa w está parado en el extremo B de un bote de peso W, como se muestra en la figura. Si en ese instante el borde A del bote apenas toca el muelle, ¿a qué distancia del muelle se encontrará el hombre después de haber caminado desde el extremo B al A, si se desprecia la fricción entre el bote y el agua?



$$\bar{x}_{cM} = \frac{l\ W_P + \frac{l}{2}\ W_b}{W_P + W_b}$$

$$= \frac{d\ W_P + (d + \frac{l}{2})\ W_b}{W_P + W_b}$$



Así que

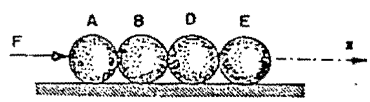
$$d\ (W_P + W_{\substack{c\\b}}) + \frac{l}{2}\ W_b = l\ W_P + \frac{l}{2}\ W_b$$

$$d = \frac{l\ W_P}{W_P + W_b}$$

XI.4- Cuatro esferas lisas, homogéneas, idénticas y de masa individual m, se encuentran confinadas lateralmente y descansando sobre una superficie horizontal. Si a partir de cierto instante actúa sobre A, como indica la figura, una fuerza constante cuya línea de acción pasa por los centros de las esferas, determine:

a) La ecuación de movimiento para el sistema que forman. Desprecie la fricción.

b) La ecuación de movimiento para el centro de masa del sistema.



a) $F - F_A = m_A \ddot{x}_A$; $F_A - F_B = m_B \ddot{x}_B$; $F_B - F_D = m_D \ddot{x}_D$;

$F_D = m_E \ddot{x}_E$, al acoplarlas queda

$F = (m_A + m_B + m_D + m_E) \ddot{x}$ porque $\ddot{x}_A = \ddot{x}_B = \ddot{x}_D = \ddot{x}_E$

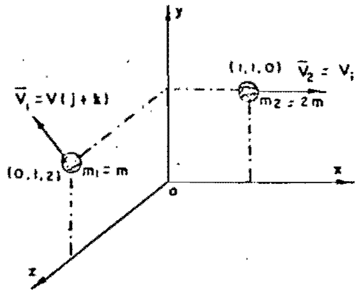
Si son las masas iguales:

b) $F = 4 \text{ m } \ddot{x}$

XI.5- Dos partículas tienen las posiciones, masa y velocidades que se indican en la figura.

a) Encuentre la posición del centro de masa del sistema que forman dichas partículas.

b) Determine para ese instante la velocidad del centro de masa del sistema.



$$\bar{r}_{cM} = \frac{m\,(0,\,1,\,2) \;+\; 2\,m\,(1,\,1,\,0)}{3\,m} = \left(\frac{2}{3}\,,\,1\,,\,\frac{2}{3}\right)$$

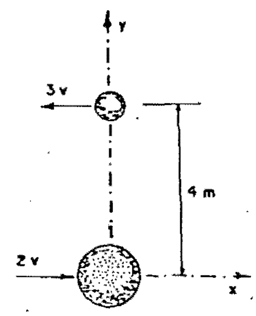
$$v_{cM} = \frac{(\,0,\,mv,\,mv\,) \;+\; (\,2\,m\,v,\,0,\,0)}{3\,m} =$$

$$v\left(\,\frac{2}{3}\,\bar{i} \;+\; \frac{1}{3}\,\bar{j} \;+\; \frac{1}{3}\,\bar{k}\,\right)$$

XI.6- Dos partículas de masas 3 m y 5 m se mueven con velocidades 3V y 2V , respectivamente, como lo indica la figura. Determine:

a) La posición del centro de masa para el instante indicado.

b) La velocidad de dicho centro de masa.



a) $r_{cm} = \dfrac{(0\ ,\ 4\ (3)\ m)}{8\ m} = \underline{(0\ ,\ 1.5)}$

b) $\underline{\bar{v}_{cm}} = \dfrac{-3\ v\ (3\ m) + 2\ v\ (5\ m)}{8\ m}\ \bar{j} = \frac{1}{8}\ v\ \bar{j}$

XI.7- Determine la posición del centro de masa del gobernador centrífugo de la figura, si $m_A = m_B = M$ y la masa del buje D es $M/4$. Las masas de los vástagos se desprecian.

$\bar{x} = 0$ por ser simétrico

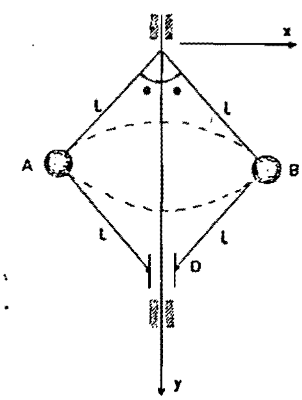
$$\bar{y} = \frac{(2\,L \cos(\theta))\;M + 2\,L \cos(\theta)\;M/4}{9/4\,M} =$$

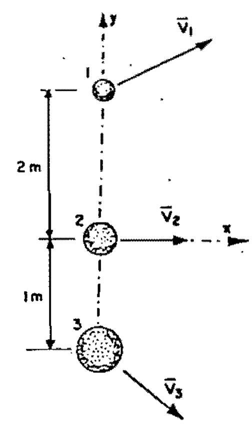
$$\frac{10}{9}\,L\,\cos(\theta)$$

XI.8.- Las partículas 1,2 y 3 de la figura, cuyas masas son m, 2 m y 3 m, respectivamente, inician su movimiento con velocidades constantes desde la posición que se muestra; si: $\vec{v}_1 = 5i + 3j$, $\vec{v}_2 = 6i$ y $\vec{v}_3 = 4i - 2j$, todas en m/s, calcule:

a) La velocidad del centro de masa

b) La ecuación de la trayectoria del centro de masa.





a) $$\bar{v}_{cm} = \frac{(5\ m\ ,\ 3\ m) + (12\ m\ ,\ 0) + (12\ m\ ,\ -\ 6\ m)}{6\ m}$$

$$\bar{v}_{cm} = \frac{1}{6}\ (\ 29\ ,\ -3\ )$$

a) Si $t = 0$: $$\bar{r}_{cmo} = \frac{(0\ ,\ 2\ m) + (0\ ,\ -3\ m)}{6\ m} =$$

$$\frac{1}{6}\ (0\ ,\ -\ 1)$$

y $$\bar{r}_{cm} = \frac{1}{6}\ (0 + 29\ t\ ,\ -1\ -3\ t)$$

XI.9- Dos partículas de masa m están conectadas mediante una varilla rígida y sin peso. Cuando el sistema se encuentra en reposo sobre un plano horizontal liso empieza a actuar una fuerza constante F_x como se indica.

a) Determine la posición del centro de masa en función del tiempo.

b) Compruebe el resultado anterior a partir de los desplazamientos respectivos de cada una de las partículas.

Coordenadas Pluckerianas $(F_x \bar{i} - 2\,m\,g\,\bar{j}\ ,\ F_x\ 1/2\ \bar{k})$

Si $a = cte$, posición $= \dfrac{a\ t^2}{2}$

a) $$\bar{r}_{cm} = \left(\frac{F_x}{m+m}\ \frac{t^2}{2}\ ,\ \frac{-g\ t^2}{2} \right)$$

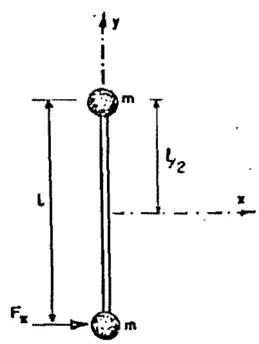
b) $$\bar{r}_{arriba} = \left(0\ ,\ \frac{-g\ t^2}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

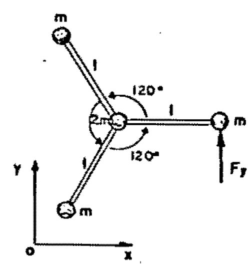
$$\bar{r}_{abajo} = \left(\frac{F_x}{m}\ \frac{t^2}{2}\ ,\ \frac{-g\ t^2}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\left(0\ ,\ \frac{-g\ t^2}{2}\ m + \frac{1}{2}\ m\right) + \left(F_x\ \frac{t^2}{2} - \frac{g\ t^2}{2}\ m - \frac{1}{2}\ m\right)}{m+m} =$$

$$\left(\frac{F_x}{m+m}\ \frac{t^2}{2}\ ,\ \frac{-g\ t^2}{2} \right)$$

XI.10- Tres partículas iguales de masa m están unidas mediante tres barras rígidas, de peso despreciable y de igual longitud ℓ , a una partícula de masa $2\,m$, como se indica en la figura. El sistema se encuentra inicialmente en reposo y, cuando $t = 0$, se ejerce una fuerza de magnitud constante F_y sobre una de las masas. Si los ejes horizontal y vertical son los ejes x e y, respectivamente, hallar la velocidad y el desplazamiento del centro de masa en términos de t.





Coordenadas Pluckerianas $\left((F_y - 5\,m\,g)\,\bar{j}\ ,\ l\,F_y\,\bar{k} \right)$

Si se pone el origen del sistema en donde se encuentra 2 m

$$\bar{v} = \left(\frac{F_y}{5m} - g\right) t\,\bar{j}$$

$$y\,\bar{j} = \left(\frac{F_y}{5m} - g\right) \frac{t^2}{2}\,\bar{j}$$

XII IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA LA PARTICULA

XII.1- Una partícula que pesa 9.81 kg_f se encuentra inicialmente en reposo. Si cuando $t = 0$ empieza a actuar sobre ella una fuerza dada por $\vec{F} = 0.5\, t i - 0.4\, t^2 j + 0.03\, t^3 k$, determine la velocidad de la partícula cuando $t = 5$ segundos.

$$m\, \overline{v}_{xf} = \int \overline{F}_x\, \delta t + m\, \overline{v}_{xi}$$

$$\frac{9.81}{9.81} (v_{xf}) = \int_0^5 .5\, t\, \delta t + 0$$

por tanto

$$v_{xf} = \frac{.5\,(25)}{2} = 6.25$$

$$m\, \overline{v}_{yf} = \int \overline{F}_y\, dt + m\, \overline{v}_{yi}$$

$$1\, (v_{yf}) = \int_0^5 (-.4\, t^2)\, dt + 0$$

$$v_{yf} = \frac{-.4\,(125)}{3} = -16.66$$

$$m\, \overline{v}_{Zf} = \int \overline{F}_Z\, dt + m\, \overline{v}_{Zi}$$

$$1\, (v_{Zf}) = \int_0^5 .03\, t^3\, dt + 0$$

$$v_{Zf} = .03\, \frac{(5)^4}{4} = 4.6875$$

$$\overline{v} = 6.25\, \overline{i} - 16.66\, \overline{j} + 4.6875\, \overline{k}$$

XII.2- Sobre una partícula que pesa 9.81 kg_f se ejerce una fuerza dada por la expresión:
$\overline{F} = (5 - 2t)\ i + (4 - t^2)\ j + (4 - 2t)\ k\ [kg_f]$ donde t se expresa en segundos. Si la velocidad de la partícula, cuando $t = 0$, es $\vec{v} = -130\ i + 80\ j + 192\ k\ [m/s]$ determine:

a) El tiempo para el cual la velocidad de la partícula es paralela al plano xy

b) La velocidad de la partícula en ese instante.

$$m\,\overline{v}_f = \int \overline{F}\,dt + m\,\overline{v}_i$$

$$m = \frac{9.81}{9.81} = 1 \text{ UTM}$$

$$1\,(v_{xf}\,\overline{i} + v_{yf}\,\overline{j} + v_{Zf}\,\overline{k}) = \int_0^t (5 - 2\,t)\ dt\,\overline{i} + \int_0^t (4 - t^2)\ dt\,\overline{j}$$
$$\int_0^t (4 - 2t)\ dt\,\overline{k} + m\,\overline{v}_i$$

$$v_{xf}\,\overline{i} + v_{yf}\,\overline{j} + v_{Zf}\,\overline{k} = (5t - t^2)\,\overline{i} + (4t - \tfrac{1}{3}\,t^3)\ j + (4t - t^2)\overline{k} +$$
$$(-130\,\overline{i} + 80\,\overline{j} + 192\,\overline{k}$$

Por tanto $v_{Zf} = 0$

$$0 = 4\,t - t^2 + 192 \begin{cases} \rightarrow 4 + \dfrac{(16 + 4\,(192)\,)^{1/2}}{2} = 16 \\ \rightarrow 4 - \dfrac{(16 + 4\,(192)\,)^{1/2}}{2} = -12 \end{cases}$$

$$t^2 - 4\ t - 192 = 0$$

a) $\bar{v}\ (t = 16\ s) = (5\ (16) - 16^2)\ \bar{i} + (4\ (16) - \frac{1}{3}\ (16)^3)\ \bar{j} -$

$$130\ \bar{i} + 80\ \bar{j}$$

$$= -306\ \bar{i} - 1221.33\ \bar{j}$$

b) Por tanto $t = 16\ s$

XII.3- Un barco petrolero que pesa 250 000 t_f se mueve con una rapidez de 2 nudos . Si un remolcador tarda en detenerlo 10 minutos ejerciendo contra él una fuerza constante, ¿cuál es el módulo de la fuerza ejercida por el remolcador si se desprecia la resistencia del agua al movimiento?

$W = 250{,}000{,}000 \quad k\bar{g}$

Pensando que es nudos/hora.

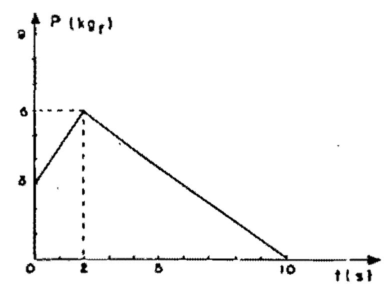
$v_i = 1.0294 \text{ m/s}$;

$\Delta t = 60 \text{ s}$

Por tanto $\quad F \Delta t = \frac{W}{g} (1.0294)$

$F = 437242.8 \quad k\bar{g}$

XII.4-Una nave espacial, cuyo peso es de 2 toneladas, se mueve siguiendo una trayectoria rectilínea con una rapidez de 30 000 km/h. Si para disminuir su rapidez a 27 500 km/h el astronauta dispara un cohete de freno que tiene un empuje de 5 000 kg_f, obtenga el intervalo de tiempo necesario para llevar a cabo esta reducción de rapidez en la nave.



$$v_{yf} = 27500 \text{ Km/h} = 7638.88 \text{ m/s}$$

$$F_y = -5000 \text{ K}\bar{g}$$

$$v_{yi} = 30{,}000 \text{ Km/h} = 8333.33 \text{ m/s}$$

$$m = \frac{2000}{9.81} = 203.8735 \quad \text{UTM}$$

$$m\, v_{yf} = \int_0^t F_y \; dt + m\, v_{yi}$$

$$203.8735\ (7638.88) = -5000\ t + 203.8735\ (8333.33)$$

$$T = 28.316 \quad \text{s}$$

XII.5.- Un cañón que pesa 5 toneladas dispara una bomba de 30 kg_f con una rapidez de 100 m/s, formando un ángulo de 30° con la horizontal. Encuentre la fuerza horizontal necesaria para mantener inmóvil el cañón, sabiendo que, la bomba sale de éste 0.03 s después de ser disparada.

Despreciando el peso de la bomba

$F\,(.03) = 3.058\,(100)$

$(W_x\; A\Delta t = .45)$

$F = 10193.67992$

$0 + G\,(\Delta t) - F\,\Delta T \cos 30^{\circ} = 0$

en x

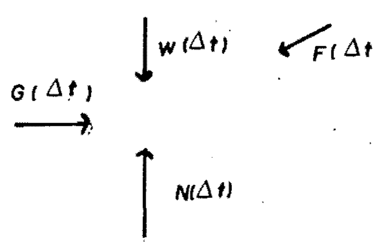
$G = F \cos 30^{\circ}$

$G = 8827.985\ \overline{Kg}$

$N = W + F \operatorname{sen} 30^{\circ}$

$= 5000 + 5096.839$

$= 10{,}096.839\ \overline{Kg}$



XII.6-Una vagoneta cuyo peso es de 300 kg_f está animada de una rapidez inicial de 40 m/s y debe acoplarse a un furgón que pesa 500 kg_f, cuando éste se encuentra en reposo. Obtenga:

a) La rapidez de ambos, estando enganchados.

b) La fuerza impulsiva promedio que actúa sobre cada uno si se enganchan en 0.5 segundos.

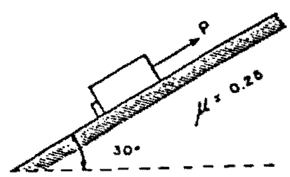
$$\frac{300}{9.81}(40) = \frac{800}{9.81} v_f \quad ; \quad a) \quad \underline{v_f = 15 \ m/s}$$

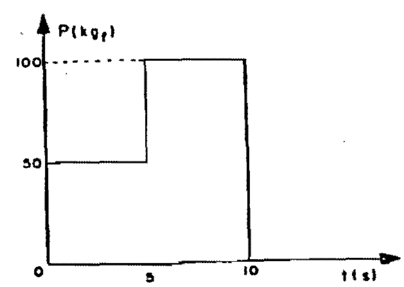
$$F = \frac{m(v_f - v_i)}{\Delta t}$$

$$F = \frac{30.581\ (40 - 15)}{.5} = 1529.05 \ \bar{kg}$$

Módulo de la fuerza impulsiva promedio

XII.7-Un bloque que pesa 50 kg_f se encuentra en reposo sobre un plano inclinado.
Si se mueve ascendiendo sobre el plano bajo la acción de una fuerza que varía según la gráfica correspondiente y el coeficiente de fricción existente entre el bloque y el plano inclinado vale 0.25, calcule la velocidad del bloque cuando t = 15 segundos.



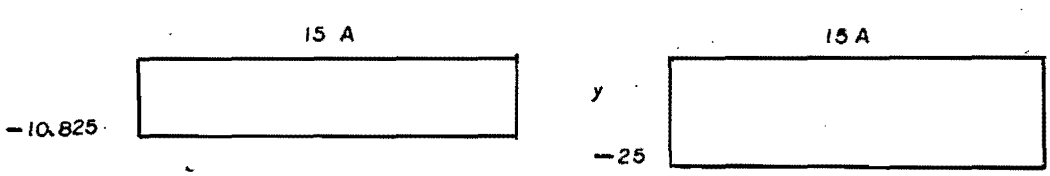


Hay dos rectángulos negativos, uno de fricción y el otro de la componente del peso.

$$v_{15} = \frac{\Sigma \text{ Areas}}{m} + v_i$$

$$= \frac{5 \times 50 + 5 \times 100 - 10.825\ (15) - 25\ (15)}{5.0968}$$

$$= 41.7173 \quad m/s$$



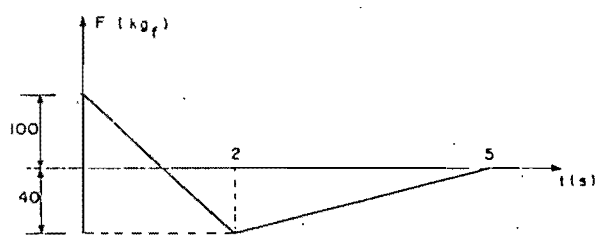
XII.8- El bloque mostrado en la figura pesa 4.9 kg_f y se mueve so bre un plano horizontal rugoso bajo la acción de la fuerza P, cuyo comportamiento se muestra en la gráfica. Si el coeficiente de fricción es 0.2 y la rápidez inicial es de 5 m/s, calcule la velocidad del bloque cuando t = 8 segundos.

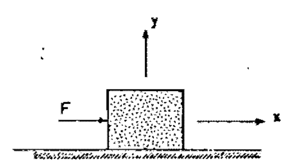
No se puede hacer porque no está dibujada la gráfica que le corresponde.

XII.9- Un bloque que pesa 25 kg_f está inicialmente en reposo. Si sobre él actúa una fuerza F que varía como lo indica la figura y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.25, calcule:

a) La velocidad máxima que alcanza el bloque,

b) La velocidad del mismo cuando t = 5 segundos.

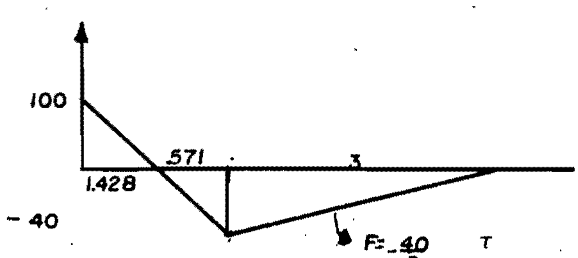


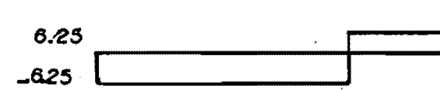


$N = F_f$

$= 6.25\ \overline{kg}$

Las figuras son:





a) La v_{max} cuando $F = 6.25$ ó $F_R = 0$

$100 - 70\ t = 6.25$

Por tanto $t = 1.339$ s

$$v_{max} = \left(\int_0^{1.339} (100 - 70\ t)\ dt\right)/m - \frac{6.25\ (1.339)}{m}$$

$$= 24.634 \text{ m/s}$$

b) $m\ v\ (t = 2) = 60 - 6.25\ (2) = 47.5$

$$\frac{(-40 - \frac{40}{3}\tau)\tau}{2} - 6.25\ \tau = -47.5$$

$$-20\ \tau - \frac{20}{3}\ \tau^2 - 6.25\ \tau = -47.5$$

$$\frac{20}{3}\ \tau^2 + 26.25\ \tau - 47.5 = 0$$

$\tau = 1.348$ s

Se detiene a los (2 + 1.348) segundos.

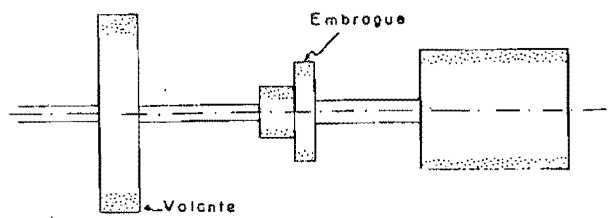
A los 3.348 s cambia de sentido

$$v_f = \frac{1.652\ (\frac{17.973}{2} - 6.25)}{2.5484}$$

$$\underline{v_f = 1.7739\ \ (s)}$$

XIII IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO DEL CUERPO RIGIDO

XIII.1- El volante de la figura pesa 1 t_f y tiene un radio de giro de 2 m con respecto al eje de rotación que pasa por su centro de masa. Si el volante tiene una rapidez angular de 1800 rpm cuando se desembraga del motor que lo impulsa, tardando 20 minutos en detenerse, ¿cuál es el módulo del par resistente considerando constante a este último?



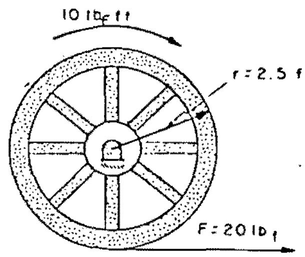
$\omega_i = 1800 \text{ rpm} = 1800 \times 2 \times \pi/60 = 188.496 \text{ rad/s} \qquad \omega_f = 0$

$20 \times 60 = 1200 \text{ s} = \Delta t \quad ; I = r^2_{giro} \; m = 2^2 \times \dfrac{1000}{9.81} = 407.7472 \; \overline{Kg} \; s^2 \; m$

$$- \int_0^{1200} M_R \, dt = I \; (\omega_f - \omega_i)$$

$$M_R = \frac{407.7472 \times 188.496}{1200} = 64.0489 \; \overline{Kg} \cdot m$$

XIII.2- Un volante que pesa 483 lb_f gira con respecto a un eje fijo que pasa por su centro de masa. Si el radio de giro del volante con respecto a dicho eje es de 2 pies y la rapidez angular cambia de 20 rpm en sentido antihorario a 60 rpm en sentido horario, durante el intervalo de tiempo en que el volante está sujeto a la acción de una fuerza constante y un par constante como se muestra en la figura, encuentre el valor del tiempo necesario para que ocurra dicho cambio en las rapideces angulares.



$$m = \frac{483}{32.2} = 15\ \bar{lb}\ s^2/pie \quad I = r^2_{giro}\ m = 2^2 \times 15 = 60\ \bar{lb}\ s^2\ pie$$

$$\omega_i = 20 \times 2 \times \pi / 60 = 2.0944\ rad/s \quad ;$$

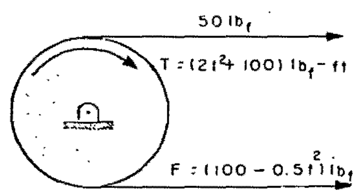
$$\omega_f = -6.2832\ rad/s$$

$$M_R = -100 + 50 = -50$$

$$-50\ \Delta t = 60\ (-6.2832 - 2.0944)$$

$$\Delta t = 10.0531\ s$$

XIII.3- Una polea de 2ft de radio y 322 lb_f de peso tiene un radio de giro de 1.5 ft con respecto a su eje de rotación. Si actúan sobre ella un par T, una fuerza F y una fuerza constante de 50 lb_f, como se muestra en la figura, determine la rapidez angular de la polea cuando t = 10 s sabiendo que en t = 0 tenía una rapidez angular de 10 rpm, en sentido antihorario.



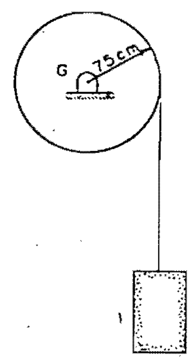
$$I = r_{giro}^2 m = 1.5^2 \times \frac{322}{32.2} = 22.5\ l\bar{b}\ s^2\ pie \qquad \omega_f = 1.0472\ rad/s$$

$$M_R = -50x(2) - 2\ t^2 - 100 + 100\ x(2) - .5\ t^2\ (2) = -3\ t^2 \quad ;$$

$$\int_0^{10} M_R\ dt = -\ t^3 = 1000; - 1000 = 22.5\ (\ \omega_f - 1.0472) \quad ;$$

$\omega_f = -43.3972$ por tanto ω_f ↻

XIII.4- El sistema de la figura está formado por un bloque que pesa 5 kg_f unido a un tambor mediante un cable flexi - ble, inextensible y de peso despreciable. Si el tambor pesa 20 kg_f y tiene un radio de giro de 40 cm respecto al eje de rotación que pasa por G, determine la rapidez del bloque 4 segundos después de haberse iniciado el movimiento partiendo del reposo. Desprecie toda fric - ción.



$$I = r^2_{giro} m = .40^2 \times \frac{20}{9.81} = .326197 \ K\bar{g} \ s^2/m$$

$$\Sigma M_G = I \frac{a}{r} = .326197 \ \frac{a}{.75} = .43493 \ a = T\ (.75)$$

$$-T + 5 = \frac{5}{9.81}\ a \qquad \text{por tanto} \qquad T = 2.66112 \ K\bar{g}$$

$$M_R = 2 \ K\bar{g} \cdot m \qquad \int_0^4 2 \ dt = .326197 \ \omega_f$$

por tanto $\omega_f = 24.525$ rad/s

por tanto $v_f = 18.39$ m/s

XIII.5- Un disco homogéneo de peso $W = 196.2$ N y radio $r = 1$ m rueda sin deslizar sobre un plano horizontal rugoso con una rapidez angular de 50 rpm, como se muestra en la figura. Determine su cantidad de movimiento angular:

a) Respecto al eje que pasa por el centro de masa del disco y que es perpendicular al plano del movimiento

b) Respecto al eje instantáneo de rotación.

$\omega_f = 60 \times 2 \times \pi/60 = 5.236\ s^{-1}$; $r = 1$ m $\quad v_{cm} = r\,\omega_f = 1x5.236$

$$H_{cm} = I\,\omega_f = \frac{1}{2}\ \frac{196.2}{9.81}\ (1)^2\ 5.236 = 52.36$$

$$I_{cIR} = 10 + 1^2 \times 20 = 30$$

$$H_{cIR} = I_{cIR}\ \omega_f = 30 \times 5.236 = 157.08$$

XIII.6- El centro del cilindro homogêneo y macizo de la figura tiene una rapidez inicial de 61 m/s, plano arriba. Determine el tiempo necesario para que alcance una rapidez, plano abajo, del doble de la inicial, suponiendo que el cuerpo rueda sin deslizar en todo instante.

$$\omega_i = \frac{-61}{r} \qquad \omega_f = \frac{122}{r}$$

$$I_{cIR} = \frac{3}{2}\,\frac{W}{g}\,r^2$$

$$\int_0^t M_R \, dt = \frac{3}{2}\,\frac{W}{g}\,r^2 \left(\frac{183}{r}\right) \qquad \Sigma M \, \Delta t = I \, \Delta\omega :$$

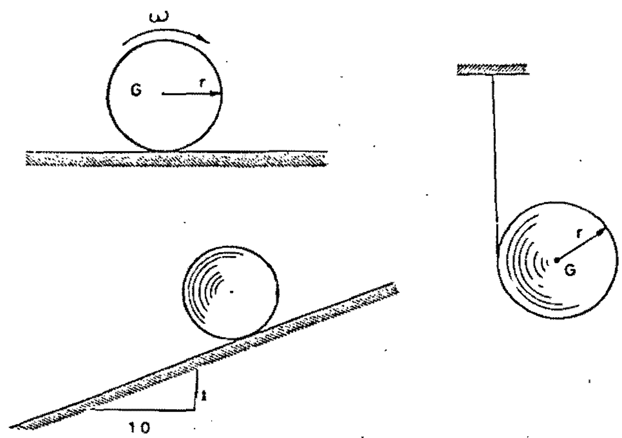
$$r\,W \,\frac{1}{(101)^{1/2}} \,\Delta t = \frac{1}{2}\,\frac{W}{g}\,r\,183$$

por tanto

$$\Delta t = \frac{3 \times 183 \times (101)^{1/2}}{1 \times 2 \times 9.81}$$

$$= \frac{183 \times 3}{2 \text{ sen } \theta \, 9.81} = 93.73 \text{ s}$$

XIII.7- Un cilindro circular homogéneo está sostenido en la posición que muestra la figura. Determine la rapidez de su centro de masa y la tensión en la cuerda enrollada en él, 2 segundos después de soltarlo.



$$I_{cIR} = \frac{1}{2}\ m\, r^2 + \frac{2\, r^2\ m}{2} = \frac{3}{2}\, m\, r^2 \quad ; \quad \Sigma M_{cIR} = W\, r$$

$$W\, r\, (2) = \frac{3}{2}\ \frac{W}{g}\, r^2\ \omega_f \quad ; \quad \omega_f = \frac{4}{3}\ \frac{g}{r}$$

$$v_{cm} = \frac{4}{3}\, g = \omega\, r$$

$$= 13.08\ \ m/s$$

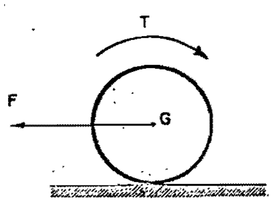
$$F_R\ \Delta t = m\, v_f$$

$$(W - T)\ 2 = \frac{W}{g}\ \frac{4}{3}\, g$$

$$\left(\frac{3}{3} - \frac{2}{2} \right)\ W = T$$

$$\frac{1}{3}\ W = T$$

XIII.8- Un cilindro circular, homogéneo, de radio 2 ft y peso 161 lb_f rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal, sujeto a la acción conjunta de un par de magnitud $T = 100 - 0.4\,t^2$ y una fuerza de módulo $F = 100 - 0.1\,t^2$, en donde t está en segundos, F en lb_f y T en $lb_f - ft$. Si en el instante $t=0$ el centro G presenta una velocidad de 5 ft/s hacia la derecha, determine la velocidad de G cuando $t = 3$ s; considere los sentidos mostrados para los elementos mecánicos.



$$I_{cIR} = \frac{1}{2}\,\frac{161}{32.2}\,2^2 + 2^2\,\frac{161}{32.2} = 30 \quad lb \quad s/pie$$

$$M_R = (100 - .12^2)\,2 - (100 - .4\,t^2) = 200 - .2\,t^2 - 100 + .4\,t^2 =$$

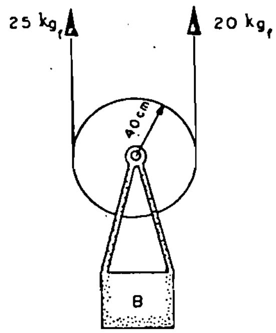
$$100 + .2\,t^2$$

$$\int_0^3 M_R\,dt = 100(3) + .2\,\frac{(3)^3}{3} = 301.8$$

$$301.8 = 30\,(\omega_f + \tfrac{5}{2}) \qquad \text{por tanto} \qquad \omega_f = 7.56 \text{ rad/s}$$

Por tanto $\quad v_G = r\,\omega_f = 1512 \quad ft/s$

XIII.9- La polea mostrada en la figura pesa 10 kg_f, tiene un radio de giro centroidal de 25 cm y soporta el bloque B que pesa 15 kg_f . En cierto instante se tensan ambos cables como se indica en la figura, de manera que el bloque adquiere una rapidez inicial de 2 m/s hacia abajo, mientras que la rapidez angular de la polea es de 8 s^{-1} en sentido antihorario. Determine v y ω después de que transcurrieron 4 segundos de aplicarse las tensiones.



$$I_{cm} = r_g^2 \, m = .25^2 \times \frac{10}{9.81} = .06371 \ \overline{Kg} \ s^2/m$$

$$F_R = -20 - 25 + 10 + 15 \quad ; \quad m = 1.01936 \quad ;$$

$$-20 \ (4) = 1.01936 \ (\omega_f - \omega_i)$$

$$v_f = 76.48 \quad ; \quad \Sigma M \ \Delta t = I \ (\omega_f - \omega_i)$$

$$-5 \ (.40) \ 4 = .06371 \ (\omega_f - 8)$$

por tanto

$$\omega_f = 117.5689$$

XIV TRABAJO Y ENERGIA PARA LA PARTICULA

XIV.1- Un avión que pesa 19.62 t_f debe aterrizar en un aeropuerto de modo que al hacer contacto con la pista de aterrizaje su rapidez sea de 250 km/h. ¿Cuál deberá ser el módulo de la fuerza de frenaje que actuará sobre el avión para que éste se detenga después de recorrer una distancia de 1000m? Suponga que la pista es recta y horizontal.

$W = 19.62 \ \overline{\text{Ton}}$ $\qquad v_o = 250 \ \text{Km/h} = 250 \times 1000/3600 = 69.44 \ \text{m/s}$

$d = 1{,}000 \ \text{m}$ $\qquad m = \dfrac{19620}{9.81} = 2{,}000 \ \text{Geokilos}$

$$\frac{1}{2}\, m\, v_o^2 + \Sigma T = \frac{1}{2}\, m\, v_f^2$$

$$\frac{1}{2}\, 2000\, (69.44)^2 - f_r\, (1000) = \frac{1}{2}\, 2000\, (0)^2$$

$$f_r = \frac{2\ (69.44)^2}{2} = 4821.9136 \ \overline{\text{Kg}}$$

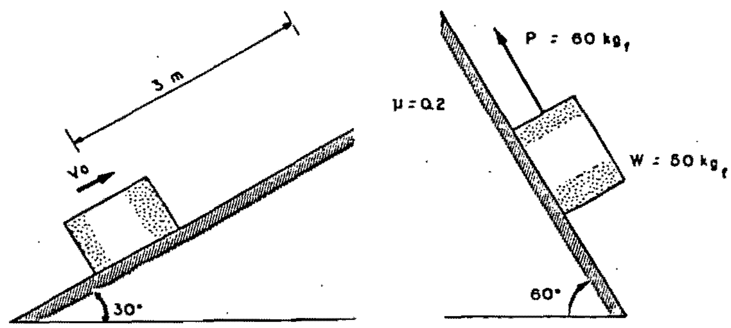
XIV.2-Un bloque cuyo peso es W se lanza con una rapidez inicial Vo m/s hacia arriba y sobre un plano inclinado, cómo se muestra en la figura. Si el bloque se detiene después de recorrer 3 m a lo largo del plano y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.4, determine Vo.

$$\frac{1}{2}\ \frac{W}{g}\, v_o^2 + 0 - \mu\, N\ (3) = 0 + W\ (3)\ (.5)$$

$$v_o = (\ (3\ (.5) + .4\ (.8666)\ (3))\ 2\ g\ )^{1/2} =$$

$$7.058\ \text{m/s}$$

XIV.3- El bloque mostrado en la figura se mueve debido a la acción de la fuerza P de magnitud constante. Si después de recorrer 3 m a partir del reposo se quita la fuerza P, determine la rapidez del cuerpo cuando vuelve a su posición inicial.



a)

$\mu = .2 \quad ; \quad m = 50/9.81 = 5.0968$ Geokilos

$\mu N = 50 \cos 60^{o} = 25\ K\bar{g}$

$N = 5\ K\bar{g}$

$P\ (3) - \mu N\ (3) = \frac{1}{2}\, m\, (v_{f_a}^{2} - v_{o}) + 50\ (2.598)$

$\frac{1}{2}\, m\, v_{f_a}^{2} = (60\ (3) - 5\ (3) - 50\ (2.598)) = 35.1$

b) $-\mu N\ (d) = \frac{1}{2}\, m\, (0 - v_{a}^{2}) + W\ (d \text{ sen } 60^{o})$

$$d = \frac{\frac{1}{2}\, m\, v_{a}^{2}}{W \text{ sen } 60^{o} + 5} = \frac{35.1}{50 \text{ sen } 60^{o} + 5} = .7266 \text{ m}$$

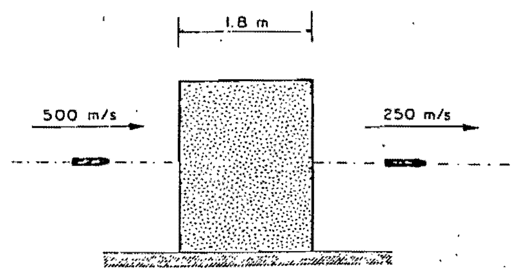
c)

$$-\mu N\ (d + 3) = \frac{1}{2}\ m\ (v^2 - 0) - W\ (d + 3)\ \text{sen}\ 60^\circ$$

$$v = \left(\frac{2\ (50\ \text{sen}\ 60^\circ\ (3.7266) - 5\ (3.7266)}{5.0968} \right)^{1/2} =$$

7.4839 m/s

XIV.4-Se dispara un proyectil de 3 kg_f de peso contra un muro de corcho de 1.8 m de espesor. Si el proyectil alcanza al muro con una rapidez de 500 m/s y sale de él a 250 m/s, determine la resistencia media R en kg_f , a la penetración en el espesor de 1.8 metros.

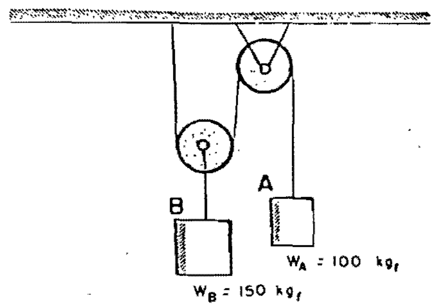


$$\frac{1}{2}\ \frac{3}{9.8}\ (500^2) - R\ (1.8) = \frac{1}{2}\ \frac{3}{9.8}\ (250^2)$$

$$R = \frac{3}{2\ (9.8)\ (1.8)}\ (500^2 - 250^2)$$

$$= 15927.62487\ \ \overline{Kg}$$

XIV.5-Determine la distancia que debe recorrer el cuerpo A mostrado en la figura para cambiar su rapidez de 1.8 m/s a 3.6 m/s. Suponga que las poleas carecen de fricción y tienen peso despreciable.



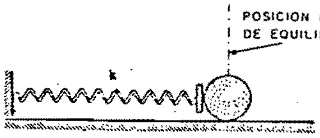
$$\frac{1}{2}\ \frac{150}{9.81}\ (.9)^2 + \frac{1}{2}\ \frac{100}{9.81}\ (1.8)^2 - 150\ (\frac{\Delta h}{2}) + 100\ (\Delta h) =$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{150}{9.81}\ (1.8)^2 + \frac{1}{2}\ \frac{100}{9.81}\ (3.6)^2$$

$$\Delta h = \frac{\frac{1}{9.81\ (2)}\ (\ 150\ \ (1.8^2 - .9)^2 + 100\ (3.6^2 - 1.8^2)\ \ )}{25} =$$

2.7247 m

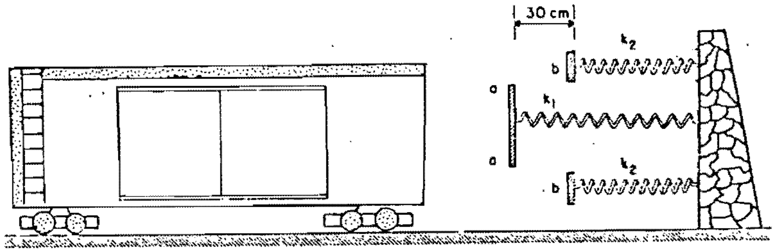
XIV.6- Una partícula cuyo peso es W se encuentra situada en el extremo de un resorte y apoyada sobre una superficie lisa, como se muestra en la figura. Si el resorte es comprimido una distancia Xo, a partir de su posición natural de equilibrio, determine la rapidez de la partícula en el instante en que el resorte regrese a su posición natural de equilibrio.



$$\frac{k}{2}\, x_o^2 = \frac{1}{2}\,\frac{W}{g}\, v_f^2 \quad ; \quad v_f = \left(\frac{k\, x_o^2\, g}{W} \right)^{1/2}$$

XIV.7- El vagón de la figura se está moviendo hacia los resortes parachoques y tiene una energía cinética de 1 250 $kg_f \cdot m$

El escudo parachoques principal (a-a) se encuentra conectado al resorte cuya constante es de 200 kg_f/cm.. Los dos escudos auxiliares (b) están a 30 cm detrás de a-a y están unidos a resortes secundarios cuyas constantes son de 100 kg_f/cm. Determine el máximo desplazamiento del escudo a - a y el porcentaje de energía absorbida por el resorte principal..



$$EC_i = 1250\ \overline{Kg}\ .\ m$$

$$1250 = \frac{20000\ (.30 + D)^2 + (10000D^2)\ 2}{2}$$

$$\frac{2500}{20{,}000} = (.30 + D)^2 + D^2$$

$$= .09 + .6\ D + 2\ D^2$$

por tanto

$$0 = 2\ D^2 + .6\ D - .035$$

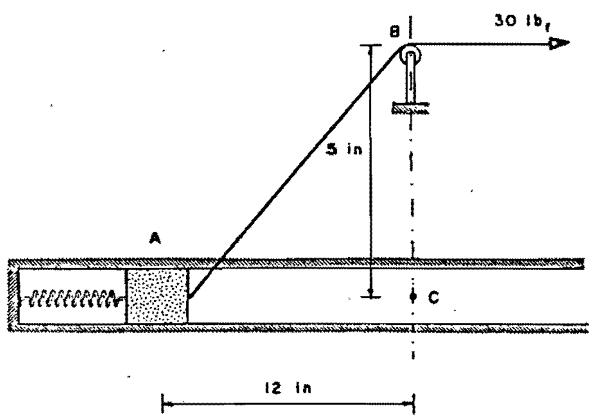
$$D = \frac{-.65 \pm (.65^2 + 4\ (2)\ (.035)}{4}$$

la raíz positiva es .047 m

$$D_{max} = .3 + .047 = .347 \text{ m}$$

$$\text{Energía} = \frac{\text{E. Resorte 1}}{\text{E. Cin. Inicial}} = \frac{1204.09}{1250} = .96\%$$

XIV.8- Una corredera de 10 lb_f de peso se encuentra fija, por uno de sus estremos a un resorte y por el otro extremo a una cuerda, como se muestra en la figura. Si por medio de la cuerda se aplica una fuerza de 30 lb_f cuando el resorte está comprimido 2 in, determine la rapidez con que la corredera pasa por el punto C. Considere despreciable la fricción existente entre la corredera y la guía.



$$F_x = 30 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{12 - x}{(5^2 + (12 - x)^2)^{1/2}}$$

$$T = \int_0^{12} 30 \left(\frac{12 - x}{(5^2 + (12 - x)^2)^{1/2}} \right) dx$$

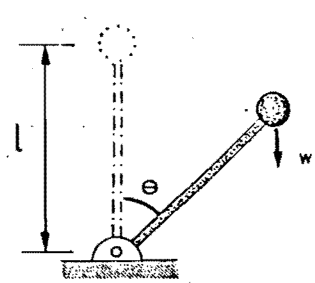
$$-30 \int_0^{12} \frac{12 - x}{(5^2 + (12 - x)^2)^{1/2}} (-dx) =$$

$$-30 \left(5^2 + (12 - x)^2 \right)^{1/2} \Bigg|_0^{12} =$$

$$-30 \left((5^2)^{1/2} - (5^2 + 12^2)^{1/2} \right)$$

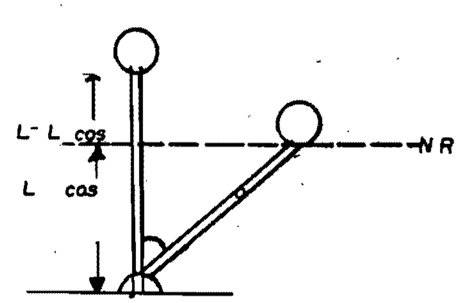
$T = -30 \left((25)^{1/2} - 13 \right) = 240$ es el trabajo de la cuerda

XIV.9- Un péndulo invertido, constituido por una masa de peso W y una barra rígida de peso despreciable, inicia su movimiento desde su posición de equilibrio inestable indicada. Demuestre que cuando θ = ang cos $\frac{2}{3}$ la barra no experimenta fuerzas de tensión ní de comprensión.



$$W L (1 - \cos\theta) = \frac{W}{g}\,\frac{v^2}{2}$$

$$2\,g\,(1 - \cos\theta) = \frac{v^2}{L}$$



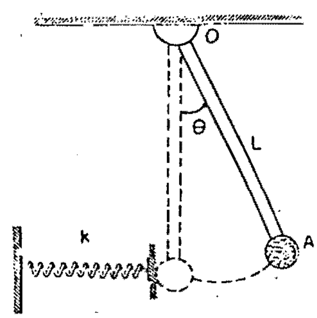
$$W \cos\theta = \frac{W}{g}\left(\frac{v^2}{L}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{2\,g}{g}\,(1 - \cos\theta)$$

$$\underline{1\cos\theta} + \underline{2\cos\theta} = \underline{2}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \quad \text{por tanto} \quad \text{ang}\cos\theta = \frac{2}{3}$$

XIV.10-Un péndulo simple de 1.5 m de longitud cuya péndola tiene un peso de 3 Kg_f se suelta desde la posición OA indicada en la figura hasta chocar, en su posición vertical, contra un resorte de constante $K = 0.5\ kg_f/cm$. Determine la deformación del resorte cuando $\theta = 90$, si se considera a la barra L rígida y de peso despreciable.



$$E\,C = 3\,(1.5) = 4.5\ \overline{Kg}\cdot m$$

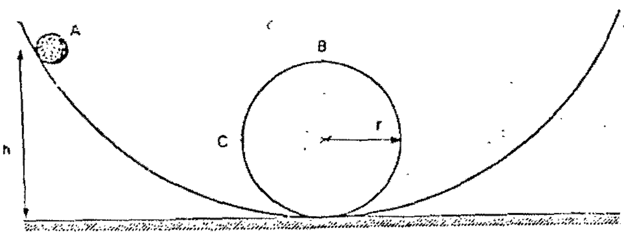
$$4.5 = 50\ \frac{D^2}{2}$$

$$\left(\frac{9}{50}\right)^{1/2} = D = .4242\ m$$

XIV.11-Un cuerpo de masa m desliza sin fricción sobre la pista mostrada en la figura. Si parte del reposo a una altura h por encima del piso, determine:

a) El valor de la fuerza ejercida por la pista, cuando $h = 3R$ y el cuerpo pase por los puntos B y C.

b) La altura mínima h a la que puede soltarse el cuerpo para que recorra la pista sin perder contacto.



a) $W\,(3R) = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 + W\,(2R)$

$v_B = (2\,W\,R/m)^{1/2}$; $N = \frac{m}{R}\left(\frac{2\,W\,R}{m}\right) - W = 1\,W$

y $W\,(3R) = \frac{1}{2}\, m\, v_A + W\,(R)$

$v_A = (4\,W\,R/m)^{1/2}$; $N = \frac{m}{R}\left(\frac{4\,W\,R}{m}\right) = 4\,W$

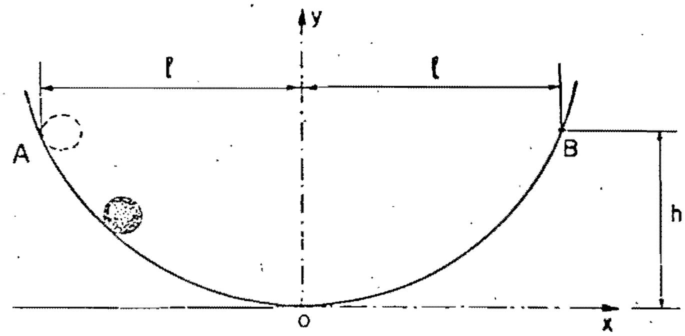
b) $N = 0$ $\quad m\,\frac{v^2}{R}$ = F normal inercial

$v = \left(\frac{R}{m}\,W\right)^{1/2} = (R\,.\,g)^{1/2}$

$W\,h = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + W\,(2R)$

$$h = \frac{\frac{1}{2}\ m\ v^2 + W\ (\ 2\ R\ )}{W} = \frac{\frac{1}{2}\ W\ R + W\ (\ 2\ R\ )}{W} = 2.50\ R$$

XIV.12-Una esfera cuyo peso es W parte del reposo desde el punto A y se mueve a lo largo de una pista curva definida por $y = \dfrac{h\,x^2}{\ell^2}$. Despreciando la fricción demuestre que la reacción R, ejercida sobre la partícula por la pista en el punto O, es: $R = W\,(1 + 4\,h^2/\ell^2)$.



$$W\,h = \frac{1}{2}\,\frac{W}{g}\,v_f^2$$

Con $\quad F_N = m\,a_N = m\,v_f^2/\rho \quad$ . . . . $\underline{1}$

y $\quad \dfrac{d\,y}{d\,x} = \dfrac{2\,h\,x}{l^2} \quad ; \quad \dfrac{d^2\,y}{d\,x^2} = \dfrac{2\,h}{l^2} \quad$ y $\quad \dfrac{1}{\rho} =$

$$\frac{(2\,h)\,/\,l^2}{(1 + (4\,h^2\,x^2)\,/\,l^4)^{3/2}}$$

Si $\quad F_N = R - W \quad$ de $\quad \underline{1}$

$$R - W = 2\,W\,h\,\left(\frac{2\,h}{l^2}\right)$$

Despejando $\quad \underline{R} = \dfrac{4\,W\,h^2}{l^2} + W$

$$= W\,\left(\frac{4\,h^2}{l^2} + 1\right)$$

XV TRABAJO Y ENERGIA PARA EL CUERPO RIGIDO

XV.1-Determine la energía cinética del anillo mostrado de masa m para los dos casos siguientes:

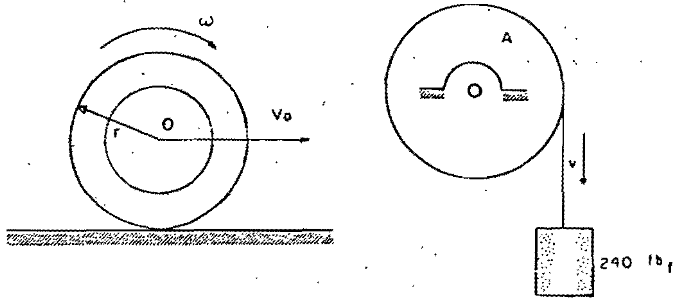
a) Considerando que se mueve únicamente en rotación pura en torno a un eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por O.

b) Considerando que desliza sobre el plano horizontal y gira simultáneamente.

a) $$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} r^2 \omega^2$$

b) $$E_c = \frac{1}{2} \frac{W}{g} r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v_o^2$$

XV.2- Un bloque de 240 lb_f se suspende por un cable flexible, inextensible y de peso despreciable, el cual se enrolla a un cilindro de 1.25 pies de radio. El cilindro tiene un momento centroidal de inercia de 10.5 slug.ft² En el instante mostrado la rapidez del bloque es de 6ft/s dirigida hacia abajo. Sabiendo que el eje A está mal lubricado y que el rozamiento del eje es equivalente a un par $M = 60$ ℓb_f - ft, determine la rapidez del bloque después de que se ha movido 4 pies hacia abajo.



$$h = \theta\, r = \theta\, 1.25 \qquad T_{par} = \int_0^\theta -60 \; d\,\theta = -600 = -19.2 \ \overline{1b} \ . \ \text{pie}$$

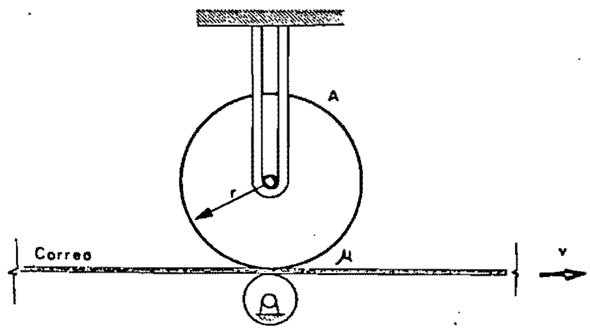
$$\frac{4}{1.25} = \theta = 3.2 \text{ rad} \quad ; \quad m_b = \frac{240}{32.2} = 7.453416$$

$$\frac{1}{2}(10.5)\frac{6^2}{1.25^2} + \frac{1}{2}\, 7.453416\, (6)^2 + 240\,(9) - 192 =$$

$$\frac{1}{2}(10.5)\frac{{}_{f}^{2}}{1.25^2} + \frac{1}{2}\, 7.453\; v_f^2$$

$$v_f^2 = 144.3761 \quad \text{por tanto} \quad v_f = 12.0156 \text{ ft/s}$$

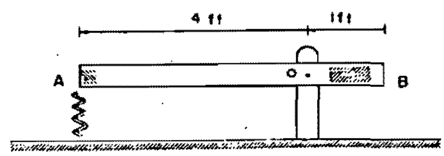
[illegible]-Un disco homogéneo A de radio R y peso W se encuentra en reposo antes de hacer contacto con una correa que se mueve con una rapidez constante V como se muestra en la figura. Cuando se establece el contacto, el coeficiente de fricción entre A y la correa es μ, calcular el número de revoluciones que debe dar el disco antes de alcanzar una rapidez angular constante. Desprecie la fricción en el pasador.



$$R \mu W \theta = \frac{1}{2} \; \frac{1}{2} \; \frac{W}{g} \; R^2 \; \frac{v^2}{R^2}$$

$$\theta = \frac{v^2}{4 g \quad R} \quad ; \quad \theta_{\text{en vueltas}} \; \frac{v^2}{8 \pi g \mu R}$$

Una varilla delgada AB de 30 lb_f de peso y 5 pies de longitud se apoya mediante una articulación en el punto O como se indica. Uno de sus extremos descansa sobre un resorte de constante $K = 1800\ lb_f/in$ hasta que se comprime una pulgada, quedando entonces la varilla en posición horizontal. Si la varilla se suelta, determine su rapidez angular cuando pase por la posición vertical.



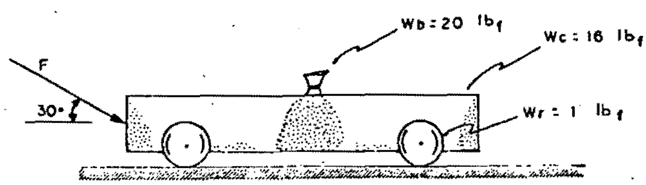
$k = 21600\ l\bar{b}/pie$ $\qquad I_o = 1.5^2\ \frac{30}{32.2} + \frac{1}{12}\ \frac{30}{32.2}\ 5^2 = 4.03726$

$$\frac{1}{2}\ 21600\ \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{2}\ 4.03726\ \frac{v_f^2}{1.5^2} + 30\ (1.5)$$

Por tanto $\quad v_f = 5.7826\ f/s \qquad \omega_f = 3.855\ rad/s$

Una bolsa se encuentra en el interior de un carro constituido por una caja montada sobre cuatro ruedas de 2in de diámetro y de una libra de peso cada una. Si se empuja el carro con una fuerza constante F como se muestra en la figura, determine la magnitud de F para que el carro alcance una rapidez de 3 ft/s después de haber sido empujado una distancia de 6 pies.

Considere que las ruedas son discos uniformes y que ruedan sin deslizar.



$$\cos 30^{o} = .866 \qquad F\ .866\ (6) = \left(\frac{1}{2}\ \frac{16}{32.2}\ 3^2 + \frac{1}{2}\ \frac{20}{32.2}\ 3^2 + \right.$$

$$\left. \frac{4}{2}\left(\frac{1}{32.2}\ \frac{1}{2}\ 3^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{3^2}{(1/12)^2}\right)\right)\right)$$

$$F = 1.12963\ \text{lb}$$

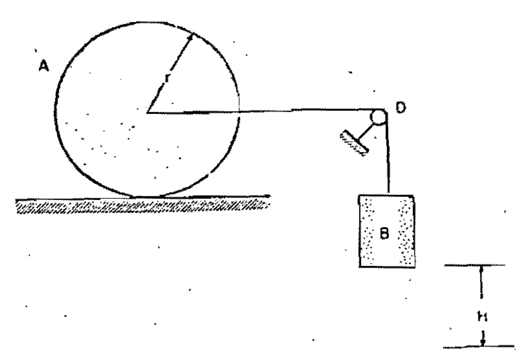
El cilindro A y el bloque B se encuentran unidos, como se muestra en la figura, mediante una cuerda flexible, inextensible y de peso despreciable.
Si parten del reposo y el cilindro gira sin deslizar, determine la rapidez angular de A para cuando el bloque B haya descendido una altura H.

Desprecie la fricción en las articulaciones del centro del cilindro y la polea D.

peso de A = W_A

peso de B = W_B

Radio de giro centroidal de A = K

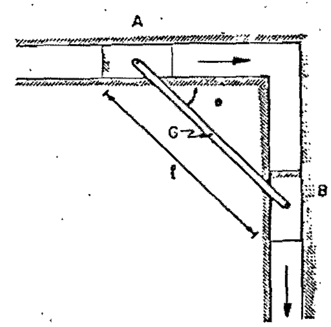


W_A , W_B $\qquad r_g = k$

$$W_B\, H = \frac{1}{2}\,\frac{W_A}{g}\,\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}\,\frac{W_B}{g}\,\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}\,\frac{W_A}{g}\,k^2\,\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{2\,g\,W_B\,H}{W_A\,r^2 + W_A\,k^2 + W_B\,r^2}$$

XV.7- Considere la varilla delgada AB de longitud ℓ y masa m cuyos extremos están unidos a bloques de pesos despreciables y que se deslizan a lo largo de un carril horizontal y otro vertical, ambos desprovistos de fricción. Si el movimiento de la varilla se inicia de su posición horizontal ($\theta = 0°$) partiendo del reposo, determine la rapidez angular ω de la varilla cuando ésta ha girado un ángulo θ .

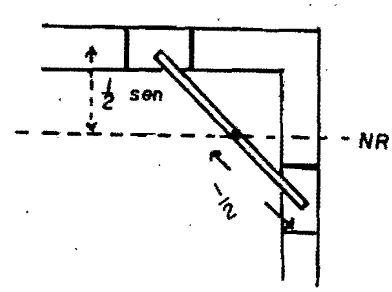


$$h_i = \frac{\text{longitud } l}{2} \text{ sen } \theta \qquad I_{cIR} = \frac{1}{12} m l^2 + (\frac{2}{2})^2 m$$

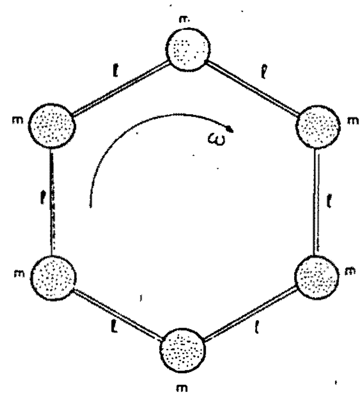
$$= \frac{1}{3} m l^2$$

$$m g \frac{l}{2} \text{ sen } \theta = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m l^2 \omega$$

Por tanto $\qquad \omega = (\dfrac{3 g}{l \text{ sen } \theta})^{1/2}$



XV.8- Seis partículas de masas iguales m se encuentran conectadas por seis barras rígidas de pesos despreciables, formando un hexágono como se muestra en la figura. Suponga que el sistema se encuentra en un plano vertical y que gira a una velocidad angular ω constante con respecto al centro de masa, el cual está inicialmente en reposo. Si para el tiempo $t = 0$ el sistema se suelta y cae bajo la acción de la gravedad, determine la energía cinética total para $t > 0$.



$$v_{cm} = g\,t$$

$$6\left(\frac{1}{2}\,m\,(gt)^2 + \frac{1}{2}\,m\,l^2\,\omega^2\right)$$

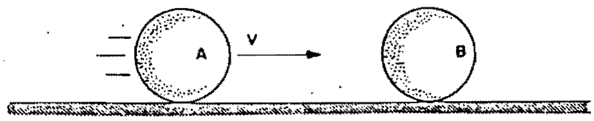
o

$$3\,m\left((g\,t)^2 + (l\,\omega)^2\right)$$

= Energía Cinética

XVI IMPACTO

XVI.1- Dos esferas idénticas, A y B, están sobre un plano horizontal liso. Demostrar que la esfera A, en movimiento, transfiere toda su energía cinética a la esfera B en un impacto elástico central directo. Considere que el cuerpo B se encuentra inicialmente en reposo.



Demostrar que $e = 1$; $e = - \dfrac{v_{f_2} - 0}{v_{f_1} - v_{i_1}}$

Con Impulso y cantidad de movimiento:

$v_{i_1} = - v_{f_1} + v_{f_2}$ o $v_{i_1} + v_{f_1} = v_{f_2}$ .. $\underline{1}$ por ser elástico

Con Trabajo y Energía

$v_{i_1}^2 = v_{f_1}^2 + v_{f_2}^2$ o

$v_{i_1}^2 - v_{f_1}^2 = v_{f_2}^2$ por tanto

$(v_{i_1} + v_{f_1})(v_{i_1} - v_{f_1}) = v_{f_2}^2$ . . . . . . $\underline{2}$

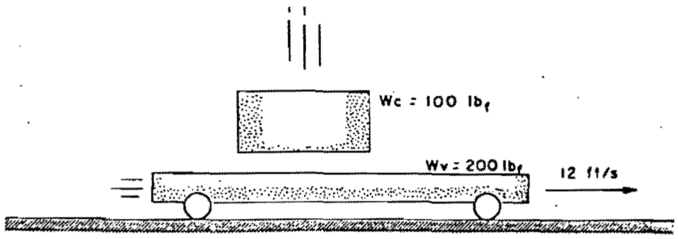
Dividiendo $\underline{1}$ / $\underline{2}$

$$\frac{(v_{i_1} + v_{f_1})(v_{i_1} - v_{f_1})}{v_{i_1} + v_{f_1}} = \frac{v_{f_2}^2}{v_{f_2}}$$

$$v_{i_1} - v_{f_1} = v_{f_2} \qquad \text{o}$$

$$1 = - \frac{v_{f_2}}{v_{f_1} - v_{i_1}} \quad \text{l.c.q.d.}$$

XVI.2- Un vagón de 200 lb_f de peso se mueve a lo largo de una vía horizontal y recta con una rapidez de 12 ft/s. Si durante el movimiento le cae verticalmente una caja de 100 lb_f determine la rapidez conjunta del vagón y la caja. Desprecie todas las pérdidas por fricción.



Quitando el factor común de 1/g

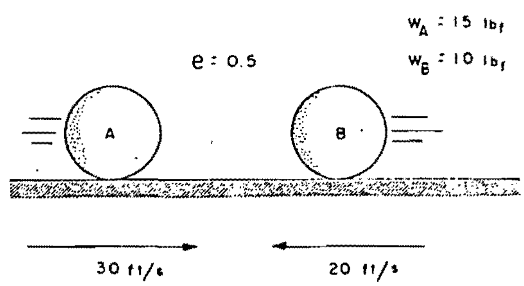
$$200\ (12)\ +\ 100\ (0)\ =\ 300\ v_f$$

$$v_f\ =\ 8\quad (ft/s)$$

XVI.3- Dos cuerpos, A y B, se mueven a lo largo de una línea recta sobre un plano horizontal liso como se muestra en la figura. Si los cuerpos chocan con un impacto central directo, y se considera un coeficiente de restitución $e = 0.50$, determine:

a) Las velocidades de A y B después del impacto.

b) La fuerza promedio ocurrida en el impacto si se considera que éste sucede en 0.01 segundos.



$$e = .5 \qquad m_A = \frac{15}{32.2} = .46583 \quad ; \quad m_B = \frac{10}{32.2} = .31056$$

$$v_{i_A} = 30 \qquad\qquad v_{i_B} = -20$$

$$v_{f_A} = -v_{f_A} \qquad\qquad v_{f_B} = v_{f_B}$$

$$e = - \frac{\bar{v}_{f_B} - \bar{v}_{f_A}}{v_{i_B} - v_{i_A}} \quad ; \quad .5 = - \frac{v_{f_B} - (-v_{f_A})}{-20 - 30} =$$

$$\frac{v_{f_B} + v_{f_A}}{50}$$

$$25 = v_{f_B} + v_{f_A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underline{1}$$

$$(.46583)\ (30) + (.31056)\ (-20) = .46583\ v_{f_A} + (.31056)\ v_{f_B}$$

$$7.7637 = .46583\ v_{f_A} + .31056\ v_{f_B} \quad \ldots\ldots \quad \underline{2}$$

Resolviendo $\underline{1}$ y $\underline{2}$ $\quad v_{f_A} = 0 \quad\quad v_{f_B} = 25$

Con A

$$m_A\ v_{i_A} - F\ (\frac{.01}{2}) = m_A\ v$$

$$m_A\ v - F\ (\frac{.01}{2}) = m_A\ v_{f_A}$$

Sumados y despejados quedan:

$$m_A\ v_{i_A} - m_A\ v_{f_A} = 2\ F\ (.01)$$

así que: $$\frac{.46583\ (30) - 0}{(.01)} = F$$

$$1397.48\ \text{l}\overline{\text{b}}$$

XVI.4- Dos bolas de plastilina, A y B de 10 y 15 lb_f de peso, respectivamente, chocan plásticamente en un punto O y se fusionan formando una nueva pelota cuando sus velocidades son:

$$\vec{v}_A = 12\,i + 5\,j + 3\,k \quad ft/s$$

$$\vec{v}_B = 6\,i + 6\,j \quad ft/s$$

Determine:

a) La velocidad de la nueva pelota.
b) La energía perdida debido al impacto.

$m_A = .31056$ $\qquad$ $m_B = .46583$

$$.31056 \begin{vmatrix} 12 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix} + .46583 \begin{vmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{vmatrix} = .77639 \begin{vmatrix} v_{f_x} \\ v_{f_y} \\ v_{f_z} \end{vmatrix}$$

Por tanto

$$v_{f_x} = 8.4$$

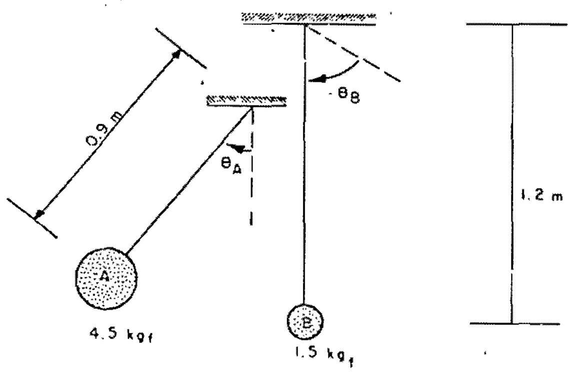
$$v_{f_y} = 5.6$$

$$v_{f_z} = 1.2$$

$$= \frac{-(8.4^2 + 5.6^2 + 1.2^2)\ .77639}{.31056\ (12^2 + 5^2 + 3^2) + .46583\ (6^2 + 6^2)} \doteq .9 \text{ ; se}$$

perdió el 10% de Energía

XVI.5- La esfera A, de 4.5 kg_f golpea a la esfera B de 1.5 kg_f. Si e = 0.90 , determine el ángulo θ_A, con el que debe soltarse A para que B alcance un ángulo $\theta_B = 90°$.



$$e = .9 \qquad \theta_A \qquad m_A = \frac{4.5\ Kg}{9.81\ m/s} = .45871 \qquad m_B = \frac{1.5}{9.81} = .1529$$

$$v_{Ai} = (2\ g\ h)^{1/2} = (2\ (9.81)\ .90\ (1 - \cos\theta_A))^{1/2}$$

$$v_{Bi} = 0 \qquad v_{Af} = -v_{Af} \qquad v_{Bf} = (2\ g\ 1.2)^{1/2} = 4.8522159$$

$$.9 = -\frac{4.8522159 + v_{Af}}{0 - (4.202149\ (1 - \cos\theta_A)^{1/2})}$$

$$-4.8522159 = -v_{Af} + 3.78192\ (1 - \cos\theta_A)^{1/2}$$

$m_A\ v_{Ai} = m_A\ v_{Af} + m_B\ v_{Bf}$

$-m_B\ v_{Bf} = m_A\ v_{Af} - m_A v_{Ai}$

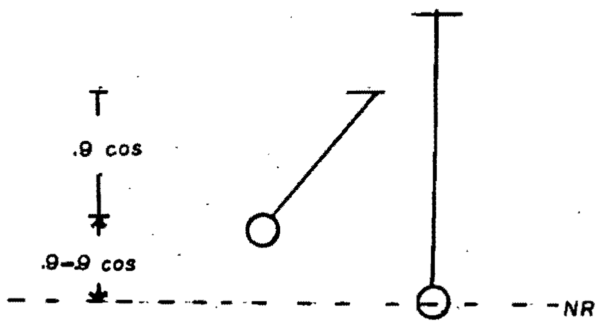
$-.7419 = . -1.92756\ (1 - \cos\theta_A)^{1/2} - .45871\ v_{Af}$

Por tanto

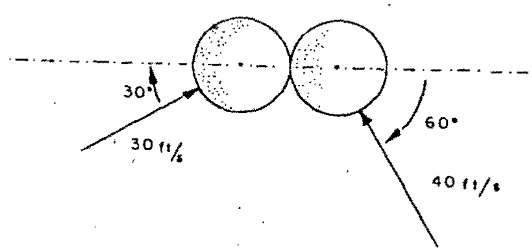
$.7419 = .45871\ v_{Af} + 1.92756\ (1 - \cos\theta_A)^{1/2}$

$(1 - \cos\theta)^{1/2} = .81031$ por tanto $\theta = 69.91^o$

$v_{fA} = -3.5535$ por tanto $v_{Af} = 3.5535$



XVI.6- En la figura se indican las magnitudes, direcciones y sentidos de las velocidades de dos esferas idénticas antes de chocar. Suponiendo que e = 0.90, determine la magnitud y dirección de las velocidades de las esferas después del impacto.



$v_{Aix} = 25.9807 \qquad v_{Bix} = -20 \quad ; \quad v_{Afx} = -v_{Afx} \qquad v_{Bfx} = v_{Bix}$

$$.9 = -\frac{v_{Bfx} + v_{Afx}}{-20 - 25.9807}$$

Por tanto

$41.38263 = v_{Bfx} + v_{Afx}$

con c. m. en x

$5.9807 = v_{Bfx} - v_{Afx}$

$v_{Afx} = 17.7$

$v_{Bfx} = 23.68116$

Por tanto

$\bar{v}_{fA} = -17.7\ \bar{i} + 30 \text{ sen } 30^{\circ}\ \bar{j}$

$\bar{v}_{fA} = 23.68116 + 40 \text{ sen } 60^{\circ}\ \bar{j}$

CONCLUSIONES

A.- La Mecánica no puede ser reducida, en su método, a una relación de causa-efecto, cuyo punto de partida sea sólo este último. Su comprensión tiene que partir de la claridad que se tenga de los conceptos, axiomas, postulados, etc. que comprende la materia.

B.- En la medida en que se tenga la necesidad de medir, la relación efecto-causa será inmediata para captar el problema y elevarlo a sus expresiones matemáticas, físicas, etc. más universales que remiten, de esta manera, alcanzar una base axiomática newtoniana. Si no se comprende esto, se cae en la imposibilidad de entender la Mecánica Hamiltoniana y su sustento en las coordenadas generalizadas, cuyo uso frecuente, se enmarca en la Ingeniería.

C.- Según mi saber y entender, algunos de los ejercicios que se encuentran publicados en la Serie de Mecánica II, están con resultados erroneos:

Serie I: ejercicios I.1, I.4, I.5, I.8, I.10.
Serie II: ejercicios II.8, II.10, II.13, II.17.
Serie IV: ejercicios: IV.1, IV.14, IV.15.
Serie V: ejercicios: V.5, V.6.
Serie VIII: ejercicios: VIII.9, VIII.10, VIII.11.
Serie IX: ejercicio: IX.6.
Serie X: ejercicio: X.10.
Serie XI: ejercicios: XI.5, XI.6, XI.8.
Serie XII: ejercicios: XII.3, XII.6, XII.7, XII.8 y XII.9.
Serie XIII: ejercicios: XIII.3, XIII.4, XIII.5.
Serie XVI: ejercicio: XVI.4.

D.- De los ejercicios que no tienen respuesta o su respuesta es incompleta por faltarle algún signo o letra, están:

Serie I: ejercicios: I.9, I.12, I.14, I.15.
Serie II: ejercicios: II.6, II.9, II.11, II.15.
Serie IV: ejercicio: IV.4.
Serie VIII: ejercicios: VIII.4 y VIII.11.
Serie IX: ejercicio: IX.7.
Serie X: ejercicio: X.10.
Serie XI: ejercicio: XI.10.
Serie XII: ejercicio: XII.2.
Serie XIII: ejercicio: XIII.6.
Serie XV: ejercicios: XV.1, XV.3, XV.8.

E.- Ejercicios que al corregir el enunciado correspondiente, la respuesta de la publicación es correcta:

Serie II: ejercicios: II.9 y II.10.
Serie X: ejercicios: X.2, X.3, X.6, X.8.
Serie XIII:ejercicio: XIII.3.

REFERENCIAS

1. Ortege y Gasset. El hombre y la gente. Revista de Occidente. pag. 82
2. Ortega y Gasset. La idea del principio de Leibniz. Revista de occidente. pag. 30
3. Planck, M.. El conocimiento del mundo físico. Barcelona 1969.
4. Heisenberg, W.. La imagen de la naturaleza en física actual. Ariel. Barcelona 1976. pags. 18 y 12.
5. Von Weisäcker. La imagen física del mundo. BAC. 1970.
6. Einstein, A.. Ideas and opinions. Carl Saling ed. Crown Publichers N. Y. 1954.
7. Von Weisäcker. IBID.
8. Leibniz. Carta a Conring del 19 de marzo de 1678.
9. Ortega y Gasset. La idea del principio de Leibniz. Revista de Occidente. pag. 72.

BIBLIOGRAFIA

Agazzi, E.; *Temas y problemas de filosofía de la física*; Herder.

Blanché, R.; *El método experimental y la filosofía de la física.* México, D. F.; Fondo de Cultura Económica; 1972.

Bourne, D. E.; *Vector Analysis and Cartesian Tensors;* New York, Academic Press, second edition, 1977.

Bunge, M.; *Causalidad. El principio de causalidad en la ciencia moderna*; Buenos Aires, E.U.D.E.B.A., 3a. ed.,1972.

Hibbeler, R. C.; *Mecánica para ingenieros*, vol II; México C.E.C.S.A., 2a. Impresión,1985.

Newton, I.; *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural y su Sistema del Mundo*; Madrid, Editora Nacional,1982.

Pérez Silva, J. y otros; *Epistemología y Psicopedagogía*;México; Centro de Instrumentos UNAM 1986.

Serrano H.y otros. *Prácticas de laboratorio del departamento de Mecánica II*; México, División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

Timoshenko, S.; D. H. Young; *Engineering Mechanics*; New York Mc Graw-Hill, 4a. edition, 1983.