

INESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS ESPACIALES.

1264

V i c t o r   V á z q u e z   R a m o s .

T R A B A J O .

Presentado a la División de Estudios de Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

Como requisito para obtener

el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA.

( E S T R U C T U R A S )

CIUDAD UNIVERSITARIA D. F. ,    MAYO DE 1991.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# C O N T E N I D O.

|   |    |
|---|----|
| 1.- INTRODUCCION  | 1  |
| 1.1 DESCRIPCION E HISTORIA.....   | 1  |
| 1.2 ALCANCE.....  | 4  |
| 1.3 METODOS DE ANALISIS.....  | 4  |
| 2.- CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE INESTABILIDAD   | 6  |
| 2.1 DEFINICION.....   | 6  |
| 2.2 CONSIDERACIONES GENERALES.....  | 6  |
| 3.- ESTRUCTURAS ESPACIALES DE UNA CAPA  | 13 |
| 4.- ANALISIS ESTRUCTURAL SIMPLIFICADO   | 15 |
| 4.1 TRABAJOS PREVIOS.....   | 15 |
| 4.2 FUERZAS DE MEMBRANA.....  | 17 |
| 4.3 FLEXION.....  | 18 |
| 4.4 FUERZAS EN LOS MIEMBROS.....  | 19 |
| 4.5 PROPIEDADES ELASTICAS DEL CONTINUO.....   | 20 |
| 4.6 ESPESOR EFECTIVO DEL CASCARON ANALOGO.....  | 25 |
| 4.7 MOMENTOS EN MIEMBROS.....   | 27 |
| 5.- CONDICIONES GENERALES PARA LOGRAR LA ESTABILIDAD  | 30 |
| 6.- CRITERIOS GENERALES PARA ANALISIS DE INESTABILIDAD LOCAL, SUBI-<br>TA, GENERAL ASI COMO PARA ESTUDIAR INESTABILIDAD DE LA SECCION | 34 |
| 6.1 CRITERIOS DE INESTABILIDAD.....   | 34 |
| 6.2 INESTABILIDAD LOCAL.....  | 34 |
| 6.3 INESTABILIDAD SUBITA.....   | 35 |
| 6.4 INESTABILIDAD GENERAL.....  | 41 |
| 6.5 INESTABILIDAD DE LA SECCION TRANSVERSAL DEL MIEMBRO.....  | 41 |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 6.5.1 | <u>PAREDES CURVAS</u> .....                            | 41 |
| 6.5.2 | <u>PAREDES PLANAS</u> .....                            | 44 |
| 7.-   | APLICACION A ESTRUCTURAS PARTICULARES                  | 48 |
| 7.1   | LA FALLA DEL DOMO DE BUCAREST EN 1963.....             | 48 |
| 7.1.1 | <u>INTRODUCCION</u> .....                              | 48 |
| 7.1.2 | <u>GEOMETRIA</u> .....                                 | 49 |
| 7.1.3 | <u>CARGAS</u> .....                                    | 50 |
| 7.1.4 | <u>VERIFICACION DE LA INESTABILIDAD ELASTICA</u> ..... | 52 |
| 7.1.5 | <u>CONCLUSION</u> .....                                | 56 |
| 7.2   | DOMO ESFERICO 1.....                                   | 57 |
| 7.3   | DOMO ESFERICO 2.....                                   | 61 |
| 8.-   | COMENTARIOS FINALES                                    | 67 |
| 9.-   | REFERENCIAS  | 68 |

## 1.- INTRODUCCION.

Durante los pasados 70 años y especialmente durante las dos décadas pasadas, las estructuras espaciales han aparecido en la escena mundial de la arquitectura. Los arquitectos fijaron su atención en estructuras espaciales porque estos sistemas les han dado grandes libertades de diseño y, en muchas instancias, conducido a un menor costo a través de prefabricaciones y estandarización de las partes componentes. En su búsqueda por nuevas formas, arquitectos e ingenieros han descubierto que las estructuras espaciales no únicamente ofrecen muchas ventajas estructurales, sino también producen una simplicidad de forma así como una apariencia muy agradable, por lo tanto las cubiertas espaciales han llegado a ser parte de la Arquitectura Moderna e Ingeniería Progresista.

Normalmente los techos de cascarón son asociados con un material continuo tal como el concreto reforzado, sin embargo, ellos se pueden construir de una retícula de miembros curvos o rectos, esto ha llevado a lo que se conoce como estructuras espaciales o bien más específicamente estructuras espaciales reticulares, y un tipo particular de estas estructuras son las que se estudian en este trabajo, las conocidas como estructuras espaciales de una capa.

El análisis estructural simplificado de estos cascarones reticulares, como también podría llamarseles, que se presenta en este trabajo, es una extensión del cascarón equivalente o teoría continua desarrollada por Wright; en base a este tipo de análisis se podrán establecer los criterios generales para el análisis de inestabilidad general, local, de la sección del miembro así como para estudiar la inestabilidad súbita. También se incluyen en este trabajo algunos ejemplos de aplicación.

### 1.1 DESCRIPCION E HISTORIA.

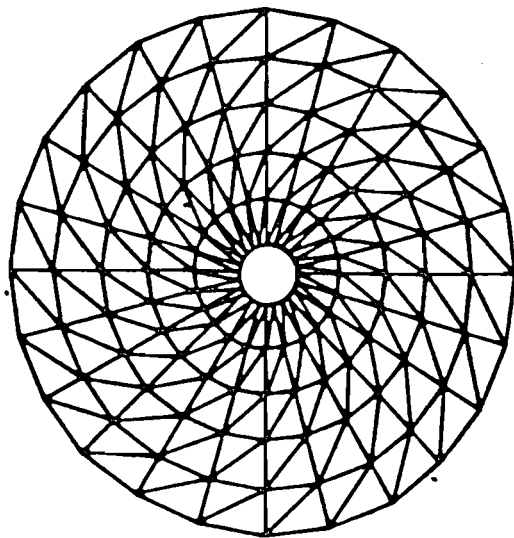
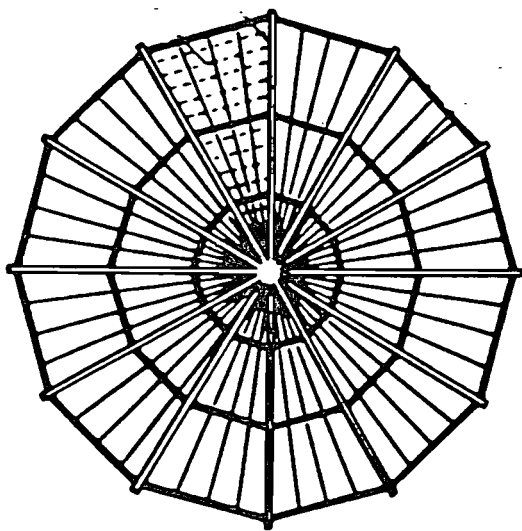
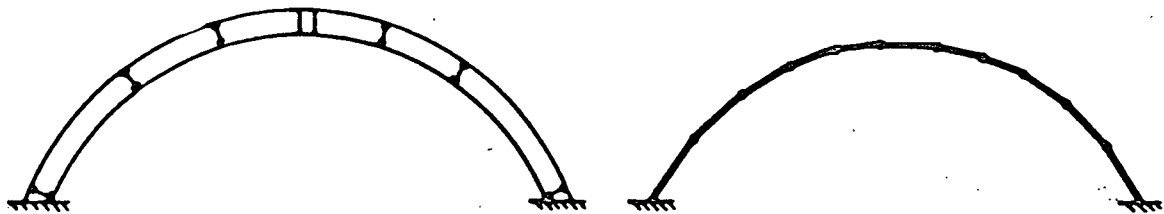
DEFINICION.- Se puede definir a un cascarón reticular, como aquella estructura en tres dimensiones, formada por barras en un

arreglo espacial. La fig. 1.1 muestra dos ejemplos de estas estructuras. El domo (a) es una combinación de arcos y armaduras, cada uno de los cuales puede constituir un sistema estable por sí mismo. El domo (b), sin embargo, no puede ser entendido como una combinación de elementos planos estables, pero su estabilidad se asegura por su naturaleza espacial. Esto se puede mostrar claramente cuando sus secciones transversales son comparadas. Esta diferencia entre un conjunto de arcos y una estructura reticular espacial puede ser entendida desde el punto de vista de flujo de fuerzas; en (a) hay contribución diversa de las capacidades de los miembros, mientras que en (b) todos los miembros contribuyen para soportar la carga de acuerdo a la topología tridimensional de toda la estructura. Así, para esta segunda descripción, una estructura reticular espacial se define como una estructura que trasmite las cargas a los apoyos de manera eficiente. La segunda definición clasifica ciertamente tipos de estructuras, como cascarones reticulares, las cuales presentan una mejor transmisión de cargas a los apoyos.

CARACTERISTICAS DESTACABLES DE ESTRUCTURAS ESPACIALES RETICULARES. - Una ventaja importante, de las estructuras espaciales es la facilidad de construcción, ya que los cascarones reticulares consisten de miembros longitudinales similares. Requieren de un procedimiento de fabricación preciso que facilite el montaje mediante conexiones tipo.

Se mencionan a continuación algunas ventajas de estas estructuras:

- 1) Facilidad de montaje. - La fabricación con pequeñas secciones es posible, y se puede eliminar así el uso de equipo pesado durante su construcción.
- 2) La cantidad de material y el trabajo de montaje son comparativamente bajos.
- 3) Apariencia. - Se puede construir estructuras con propiedades estéticas.



(a) Arcos tridimensionales.

(b) Estructura espacial.

4) Grandes espacios.- Permiten cubrir grandes áreas, con cantidades de material reducidas.

El arreglo de miembros se puede lograr en una superficie, que se conocen como estructuras espaciales de una capa, o en dos o más superficies. Se puede recurrir a diferentes patrones de división, como se verá más adelante.

Los sistemas de conexión entre miembros, tienen mucha importancia en el desarrollo de las estructuras espaciales reticulares, ya que de su resistencia y sencillez desde el punto de vista estructural, pueden ser fácilmente construidas. El desarrollo de distintos conectores patentados basados en los principios de simplicidad y precisión han influido en el incremento de uso de este tipo de estructuras. Se han propuesto muchos sistemas con el intento de satisfacer estos objetivos.

HISTORIA.- Probablemente las primeras estructuras espaciales reticulares fueron construidas por Siegel (ref 9.29), fueron tipo Lamella, usadas por los años 20 de este siglo, como obra falsa para la construcción de cascarones de concreto reforzado. Posteriormente se desarrollaron dos tipos de bóvedas cilíndricas en la Gran Bretaña durante los años 50, para usarse como un sistema estructural portante de una cubierta prefabricada. Torroja (ref 9.30) hizo uso de cascarones reticulares en 2 de sus estructuras: el primero en el Frontón Recoletos construido en 1935, donde los techos ligeros en los cascarones de concreto reforzado, se formaron con una retícula de triángulos equiláteros, y después un cascarón múltiple que cubrió los laboratorios de concreto reforzado en Costillares que fue construido en 1948. Nerví (ref 9.31) utilizó Lamellas con elementos en diamante, para sus hangares construidos entre 1935 y 1940.

Así, se han construido estructuras reticulares de diversas formas y arreglos, en distintos países, con miembros de acero o aluminio.



## 1.2 ALCANCE.

Una de las ventajas ofrecidas por las estructuras espaciales reticulares reside en su capacidad de cubrir claros grandes. En claros de 15 a 60 m. los cascarones reticulares son competitivos con estructuras reticulares convencionales y con cascarones de concreto reforzado. En claros arriba de 60 m., las estructuras espaciales reticulares son más atractivas, y ofrecen la posibilidad de cubrir claros de hasta 240 m.. Más allá de estas consideraciones, puramente utilitarias, estas estructuras abren nuevas avenidas de expresiones para construir estructuras.

Así, se puede responder a la arquitectura moderna, en lo que se refiere a la solución de proyectos de recintos para la concurrencia masiva de personas con diferentes fines, como son:

- a) Auditorios de gran capacidad.
- b) Espacios destinados a la industria, donde se almacena maquinaria costosa o productos y gente que los elaboran.
- c) Grandes centros comerciales.

En este tipo de construcciones ha predominado frecuentemente la construcción de cubiertas sobre áreas rectangulares o circulares, aunque han aparecido formas novedosas, que van desde las áreas irregulares limitadas por líneas rectas o parabólicas, hasta la forma completamente irregular. Ya que el sistema permite reducción en dimensiones, se han presentado problemas de inestabilidad que se revisan en este trabajo.

## 1.3 METODOS DE ANALISIS.

Los métodos usados para la investigación del comportamiento estructural de cascarones reticulares, pueden ser divididos en 4 categorías: (1) Análisis en el campo discreto; (2) Análisis del continuo equivalente o bien análisis estructural simplificado, como se presenta en este trabajo; (3) Análisis matricial; y (4) Análisis

El análisis estructural simplificado trata de relacionar características de fuerza y/o deformación de un segmento pequeño de la estructura a las de un elemento pequeño de un continuo. De estas relaciones, las propiedades equivalentes, tales como módulo de elasticidad, relación de Poisson y espesores de cascarón equivalente, se pueden encontrar. Los méritos ingenieriles de esta aproximación son: los resultados de la teoría continua pueden ser aplicados, dan una mejor sensación ingenieril de la respuesta de la estructura; y grandes problemas son analizados sin ningún problema de tiempo de computadora y costo. Hay, sin embargo, ciertas limitaciones en la aplicabilidad de esta aproximación, lo cual se evita con un trabajo completo, con un análisis matricial por ejemplo; tales limitaciones son por citar algunas: formas regulares, cargas continuas, soportes y condiciones de frontera de un tipo particular.

Los métodos matriciales expresan las ecuaciones fundamentales, en forma de matriz y proceden para la solución, mediante métodos numéricos adecuados vía programas para máquinas digitales. En épocas pasadas, existía la dificultad de esta aplicación, cuando se analizaban grandes estructuras con topología compleja; esto hoy en día ya no es problema debido a la evolución de las computadoras y el desarrollo de los métodos numéricos.

Resultados experimentales proporcionan información y descubren fenómenos de post-pandeo, que las aproximaciones teóricas o procedimientos numéricos existentes son incapaces de preveer. Este tipo de análisis, sin embargo, consume demasiado tiempo y es costoso; por esta razón, descripciones en la literatura de trabajos experimentales realizados para diseños específicos, contribuyen a mejorar el conocimiento sobre problemas de inestabilidad.

## 2.- CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE INESTABILIDAD.

### 2.1 DEFINICION.

Una estructura diseñada para soportar un sistema de cargas, genera una configuración que depende de la geometría seleccionada, de los materiales empleados, de los esfuerzos y elementos mecánicos que actúan sobre la estructura.

Normalmente las estructuras se diseñan para que permanezcan en equilibrio, pero generalmente existen perturbaciones externas que tienden a alterar la configuración en equilibrio.

En un espacio de configuraciones, se aceptará la existencia de un entorno de estabilidad alrededor de una configuración inicial.

- 1 ESTABILIDAD.
- 2 ESTABILIDAD ASINTOTICA.
- 3 INESTABILIDAD.
- 4 ENTORNO DE ESTABILIDAD.

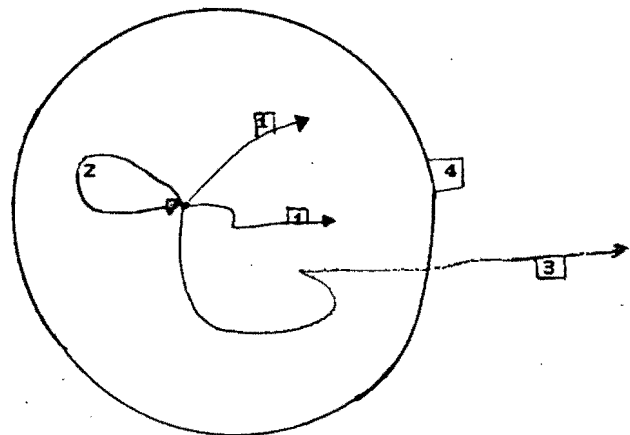


fig. 2.1

Cuando el conjunto de todas las trayectorias que surgan por todas las perturbaciones posibles no abandonen el entorno de estabilidad, diremos que la configuración inicial es estable. Cuando pueda existir una sólo trayectoria producida por una perturbación que abandone el entorno de estabilidad, diremos que la configuración es inestable.

### 2.2 CONSIDERACIONES GENERALES.

En las estructuras espaciales de este tipo se aprovechan las

características tridimensionales de la cubierta para reducir el nivel de sollicitación de cada miembro, para disminuir la cantidad de material resistente pero se aumentan las posibilidades de inestabilidad de la cubierta.

El revestimiento de la cubierta como parte del sistema reticular, contribuye a disminuir el nivel de esfuerzos en los miembros, así como para dar mayores restricciones a los desplazamientos de la estructura, aumentando su rigidez, y reducir la posibilidad de que se generen procesos de inestabilidad.

Cuando se diseñan cascarones reticulares es necesario considerar los miembros individuales, las juntas y todo el cascarón. Se requiere un nivel de esfuerzos para cada uno de los elementos mencionados, el cual para el diseño elástico será alguna fracción del esfuerzo de fluencia o crítico. Los miembros individuales que forman la estructura reticular, tendrán esfuerzos de primeramente tres fuentes. La fuerza axial y momento flexionante producen esfuerzos normales, mientras el momento torsionante produce esfuerzos cortantes. Por combinación de estos esfuerzos, los esfuerzos normal y cortante máximos pueden ser calculados, la magnitud de estos máximos es gobernada por los esfuerzos permisibles del material usado. Además es necesario considerar pandeo de los miembros, del miembro como tal y de la sección del mismo, cuando se usan secciones de pared delgada. El primero es el denominado pandeo local y el segundo pandeo de la sección del miembro.

Las juntas o métodos de conexión de miembros también tienen gran influencia. Si son capaces de resistir las fuerzas axiales, momentos y torsiones, con pequeños desplazamientos se reduce la posibilidad de que se generen procesos de inestabilidad.

Se busca que las juntas no introduzcan ningún momento adicional, lo que puede suceder al hacer empalmes de elementos. Hoy en día existen diferentes tipos de juntas cada una con su propia eficiencia, la cual puede ser determinada por pruebas experimentales, lo que establecerá el nivel de esfuerzos máximos admisible en los miembros.

La forma de la estructura es otro factor importante en la posible existencia de inestabilidad. Se ha demostrado por trabajos publicados como, para cubrir una determinada área, existen cubiertas que nos proporcionan mejores condiciones de estabilidad. Por ello se estudia la inestabilidad general del cascarón.

En este trabajo se supone que los apoyos de los cascarones reticulares en estudio tienen restricciones de desplazamiento y rotación; también pueden existir condiciones de apoyo que sólo impidan desplazamientos verticales, o bien que el cascarón reticular esté apoyado en sus puntos nodales periféricos, ya sea con puntos inmóviles o sólo con desplazamientos impedidos, inclusive puede tener apoyos dentro de la misma cubierta. Toda esta variación de condiciones de apoyo repercute en los desplazamientos de toda la estructura, los cuales muchas veces difieren bastante unos de otros. Esto lleva a considerar esto como importante para el estudio de la inestabilidad de cascarones reticulares.

El arreglo del patrón de divisiones de la superficie del cascarón también influye dentro de la estabilidad del cascarón; más adelante, esto se verá más obvio al estudiar el análisis estructural simplificado.

Es importante notar que cada problema específico tendrá sus propias sollicitaciones, las que pueden ser: peso propio y sobrecarga permanente, carga viva accidental, carga provocada por el viento, aceleraciones provocadas por movimientos sísmicos, efectos térmicos de la estructura, etc.. A cada uno estos estados de carga corresponderá una forma especial de estructura, que permita distribuir el material de la estructura para absorber la energía de manera óptima.

Es evidente que una sólo superficie puede ser óptima para soportar fuerzas de un determinado tipo, como podrían ser las verticales, pero al considerar fuerzas horizontales, la superficie óptima tendrá características diferentes. Así, será necesario buscar la forma de la cubierta que resulte eficiente para soportar las fuerzas verticales, pero al mismo tiempo soporte el resto de las

solicitaciones con márgenes de eficiencia aceptables, sin que se presenten problemas de inestabilidad en el cascarón reticular.

Existe un fenómeno llamado inestabilidad súbita en cascarones continuos, el cual también existe en cascarones reticulares y es asociado al pandeo de miembros y falla de una junta simple. Las investigaciones de este tipo de inestabilidad se concentran en una porción aislada de la estructura que contiene la junta; el efecto del resto de la estructura sobre la junta aislada es idealizado.

Enseguida se tratan más explícitamente los tipos de inestabilidad mencionados.

**INESTABILIDAD LOCAL.** - Este tipo de inestabilidad se presenta en un miembro individualmente sometido a fuerza axial. Se considera que está doblemente articulado, o sea que  $P_{cr} = \pi^2 EI / L^2$  donde E es el módulo de elasticidad del material, I es la inercia de la sección transversal y L es la longitud del miembro.

En general las cargas de pandeo de miembros individuales son más grandes que las calculadas al considerar las juntas, ya que tienen condiciones de sujeción diferentes a la articulación.

A partir de los años 50 de este siglo se generaron cúpulas basadas en patrones de división que contienen miembros de pequeñas dimensiones, que según algunos autores, pueden servir para claros de cualquier dimensión. Sin embargo, el uso de este tipo de cubierta, en claros comprendidos en el intervalo de 30 a 100m. han presentado algunos problemas de inestabilidad, por efectos de pandeo del miembro, que han dado lugar a colapsos importantes.

**INESTABILIDAD SUBITA.** - Como ya se mencionó, los resultados de la teoría continua pueden ser aplicados a los cascarones reticulares, es por eso que se tratará de definir la inestabilidad súbita a través del continuo. Se manejará un cascarón esférico como caso particular aunque evidentemente este fenómeno ocurre en cascarones de cualquier forma.

Un cascarón esférico sujeto a presión externa es una estructura para la cual la deformación se desvía de la teoría lineal, en valores relativamente pequeños de la amplitud de los desplazamientos. Es también algo para el cual el proceso de pandeo presenta un rápido decremento en la carga de equilibrio, una vez que el valor crítico ha sido sobrepasado.

El comportamiento de un cascarón con bordes empotrados (fig. 2.2) bajo presión externa variable puede ser ilustrado por curvas carga-desplazamiento. Las figs. 2.3 y 2.4 (ref 9.2) muestran las relaciones entre el desplazamiento en el centro del cascarón,  $W_0$ , y la presión externa uniforme,  $P_0$ ;  $W_0$  y  $P_0$  se transforman en cantidades adimensionales multiplicandolas por cantidades adecuadas. Los resultados que se presentan fueron obtenidos en pruebas con presión de aceite. Los especímenes del cascarón se caracterizan por un parámetro  $\lambda$ , definido como:

$$\lambda = [ 12 (1 - \nu^2) ]^{(1/4)} a / \sqrt{t R}$$

donde  $\nu$  = relación de Poisson.

$t$  = espesor.

$a$  = radio en planta

$R$  = radio de curvatura inicial.

Evidentemente el cascarón con más pequeño valor de radio  $a$ , tiene el más bajo valor de  $\lambda$ . Se nota que para valores cercanos a 5, los especímenes se pandearon de una forma continua. Cuando más aceite fue bombeado en la cámara de carga, la presión se incrementó rápidamente, llegando a un máximo y luego decreció. Pero para  $\lambda$  mayores que 5, el proceso fue discontinuo en un momento dado. Normalmente esto podría ser un movimiento leve del cascarón sin la adición de aceite, seguido por un salto súbito para una más baja presión y aún más grande desplazamiento. Los valores de  $P$  y  $W_0/t$  inmediatamente después de la inestabilidad súbita se muestran en la fig. 2.4. La configuración antes del pandeo cambió sistemáticamente con  $\lambda$ , como se observa en la fig. 2.5 (ref 9.2).

Los cascarones cargados con presión de aire producen resultados similares, excepto que para la presión de aire la inestabilidad ocurre

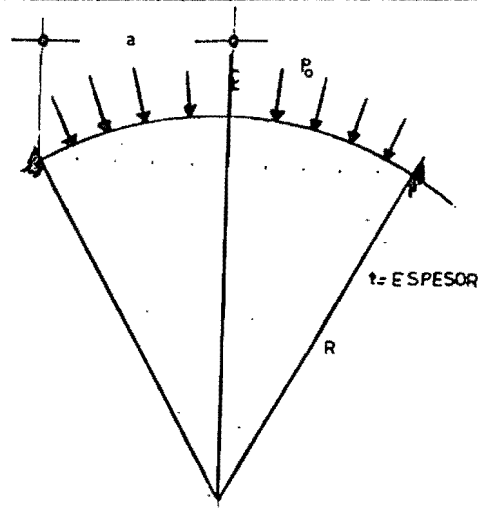


FIG. 2.2

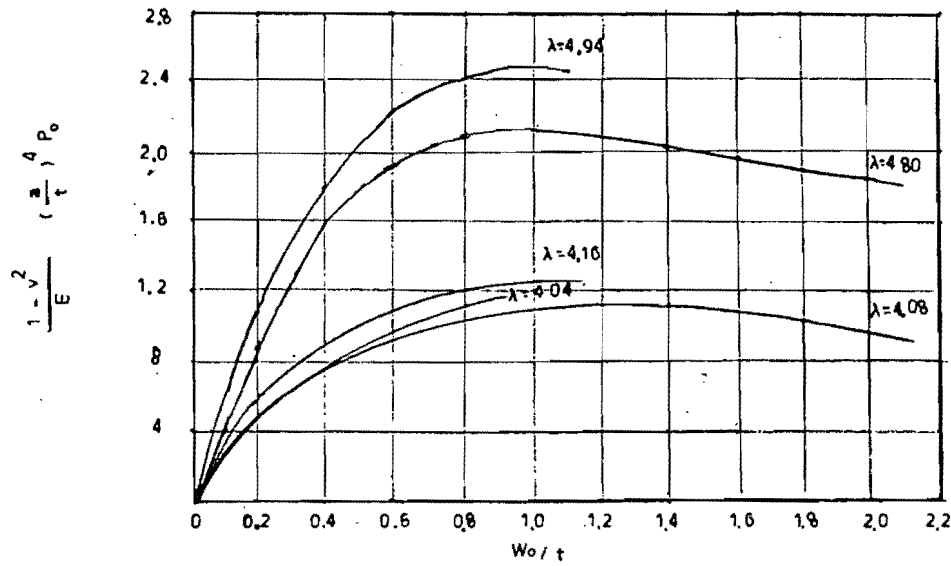


FIG. 2.3 PRESION VS. DESPLAZAMIENTO EN EL  $\zeta$ .

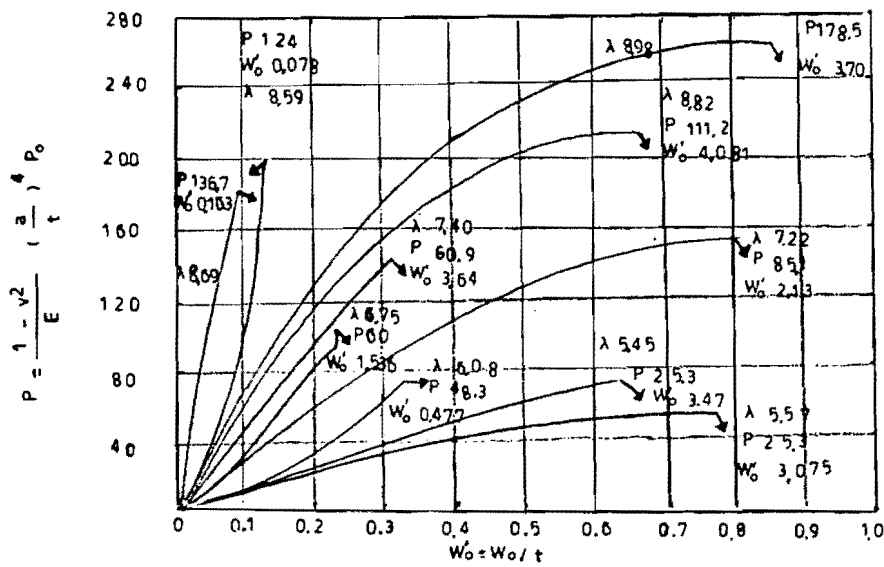


FIG. 2.4 PRESION VS. DESPLAZAMIENTO EN EL  $\zeta$ .



más súbitamente y además los desplazamientos post-pandeo son mucho más grandes que aquellos en las pruebas de aceite.

Este fenómeno, que se observó en las pruebas experimentales ya descritas, es conocido como inestabilidad súbita. Evidentemente este fenómeno incrementa sus posibilidades de existencia cuando se tienen condiciones de carga del tipo concentrado, en una determinada porción de la superficie del cascarón.

INESTABILIDAD GENERAL.- Se continuará con el ejemplo del cascarón continuo esférico. La carga crítica del cascarón esférico se expresa en la forma:

$$q_{cr} = C E \frac{t^2}{R^2}$$

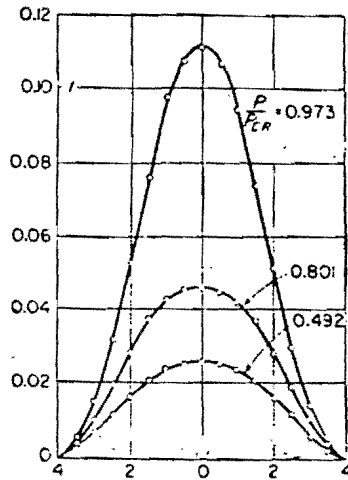
Donde C es una constante numérica. La teoría lineal clásica para el pandeo de esferas completas, dan un valor de C del orden de 0.606 con un módulo de Poisson de 0.3. La teoría de Tsien, basada en el criterio energético, da un valor en el intervalo 0.15 a 0.40.

La dependencia de los valores experimentales de C del parámetro  $\lambda$ , manejado anteriormente, se muestra en la fig. 2.6 (ref 9.2).

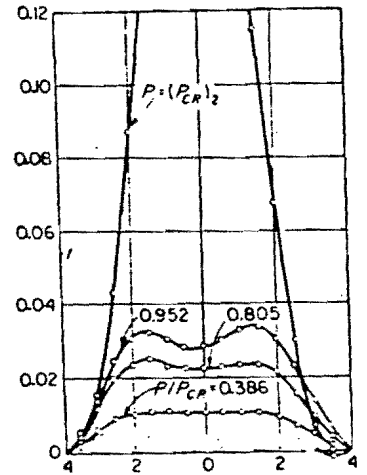
Una de las grandes dificultades en las pruebas experimentales sobre cascarones continuos es asegurar especímenes de prueba de geometría exacta, espesores uniformes, entre otros factores. Esto influye en que muchas veces los resultados teóricos y experimentales no coinciden.

INESTABILIDAD DE LA SECCION TRANSVERSAL DEL MIEMBRO.- Este tipo de inestabilidad se presentará cuando los miembros tengan secciones de pared delgada. Por efecto de la fuerza axial, fuerza cortante, flexión y/o torsión, se presentan condiciones de inestabilidad en las paredes del miembro. Esta inestabilidad es caracterizada por una distorsión de la sección transversal.

Desplazamiento  
en pulgadas.



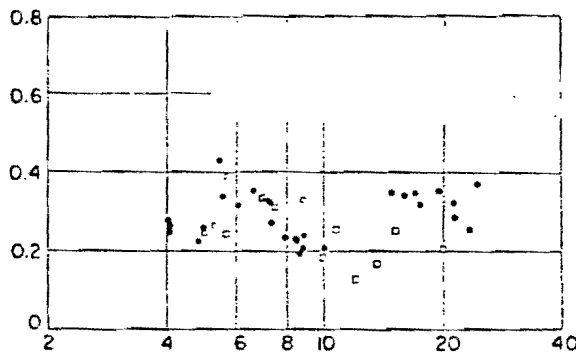
Pulgadas del centro.  
 $\lambda = 4.04$



Pulgadas del centro.  
 $\lambda = 5.45$

FIG. 2.5 DESPLAZAMIENTOS EXPERIMENTALES.

C



• Presión aceite.  
□ Presión aceite.  
◦ Presión aire.

FIG. 2.6 VALORES EXPERIMENTALES DE C.

Las secciones más convenientes en el diseño de cascarones reticulares al parecer son las tubulares, aunque se han construido este tipo de estructuras también con elementos de paredes planas, como podría ser un perfil I por ejemplo.

Normalmente en el diseño de cascarones reticulares, se revisa la acción de la fuerza axial sobre el miembro, lo que implica compresión en la placa plana o curva en estudio, aunque otros efectos también pueden ser de consideración.

Se presentan las expresiones existentes en la literatura para este tipo de inestabilidad, bajo las condiciones de soporte y configuraciones deformadas más desfavorables, que pueden presentarse en las paredes de los miembros. Se presentan también expresiones empíricas para valorar las condiciones críticas de acciones combinadas que puedan presentarse.

La idea de revisar la estabilidad de las placas planas o curvas, que componen a los miembros de un cascarón reticular es asegurarse de que no fallarán antes que la pieza en conjunto o, en caso contrario, para valorar la carga que ocasiona el pandeo local y adoptar un coeficiente de seguridad adecuado con respecto a este fenómeno.

Se estudian aquí exclusivamente secciones tubulares y placas rectangulares, ya que el problema de inestabilidad de placas, se investiga con el objeto de entender el comportamiento de las secciones que se usan en los miembros de cascarones reticulares.

### 3.- ESTRUCTURAS ESPACIALES DE UNA CAPA.

Se les llama estructuras espaciales de una capa a estructuras espaciales reticulares de varias formas como las mostradas en la fig. 3.1 .

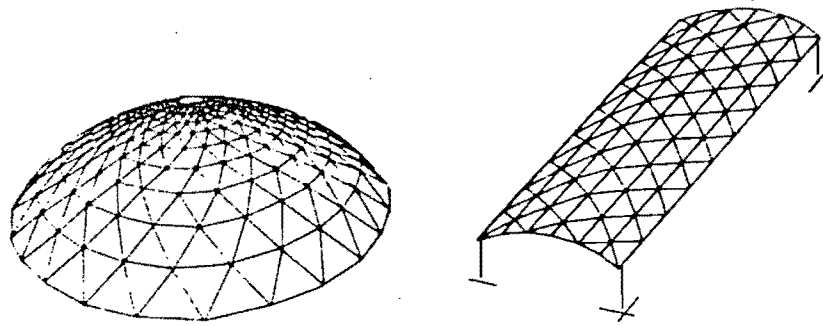
Se han construido este tipo de estructuras en un gran número de países, los domos y cubiertas cilíndricas se usan más comúnmente, aunque hyper y otras formas también son factibles de encontrar.

Los cascarones reticulares simples tienen una superficie curva compuesta por una "capa simple" de elementos reticulares prismáticos, cuyas posiciones coinciden con un patrón regular de divisiones de la superficie. Los ejemplos mostrados en la fig. 3.1 tienen divisiones que producen un patrón triangular en la superficie. Evidentemente se puede desarrollar fácilmente otros patrones y la fig. 3.2 muestra algunos que se han usado o propuesto. Todos estos patrones se pueden manejar sin problema sobre una superficie de curvatura Gaussiana cualquiera, como las mostradas en la fig. 3.1 .

Las primeras consideraciones en el establecimiento de un patrón reticular son usualmente el tipo de conexión y el tipo de miembro a ser usado. Las divisiones de la superficie se escogen para minimizar la variedad de miembros y conexiones requeridas. El domo de la fig. 3.1(a) por ejemplo, requiere únicamente dos miembros diferentes en cada "anillo" y todas las juntas pueden tener ángulos iguales. Los cascarones reticulares son generalmente estables y resistentes a carga, independientemente de cualquier revestimiento sobre la superficie que se pueda usar.

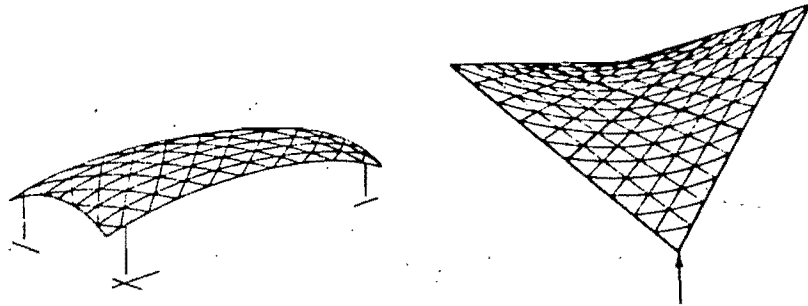
Desviaciones de tales patrones simples se han desarrollado al envolver adicionalmente miembros fuera de la superficie del cascarón. (ver fig. 3.3 (a)) o al colocar una capa doble de forma completa (ver fig. 3.3 (b) y (c)).

Se han construido estructuras híbridas, en las cuales hay una acción estructural compuesta, entre una superficie reticulada y, elementos que pueden o no coincidir con la superficie media del



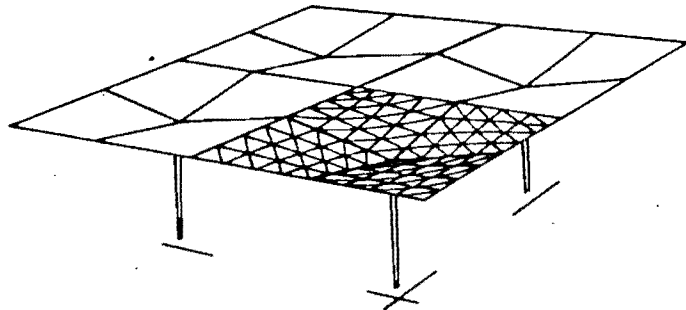
(a) Domo.

(b) Cilindro.



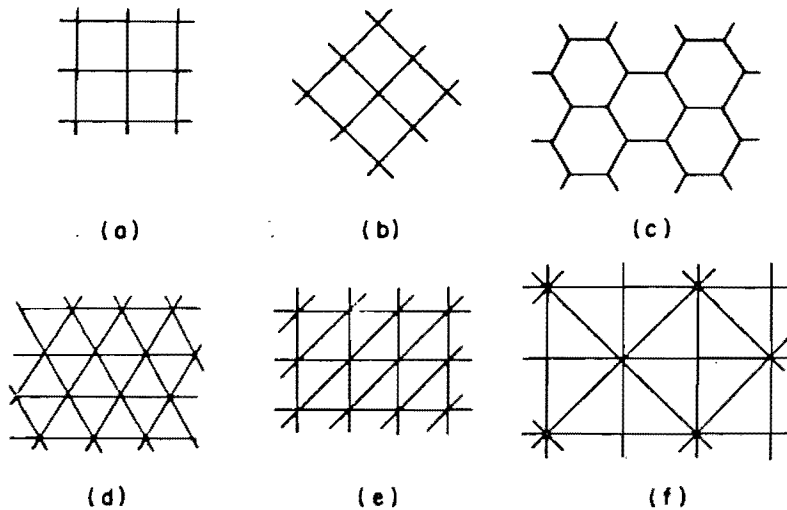
(c) Toroidal.

(d) Hypar.



(e) Hypar-Sombrilla.

FIG. 3.1 CASCARONES RETICULARES DE UNA CAPA.



(a)

(b)

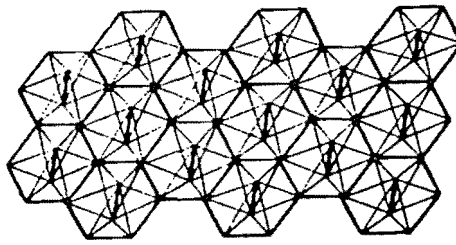
(c)

(d)

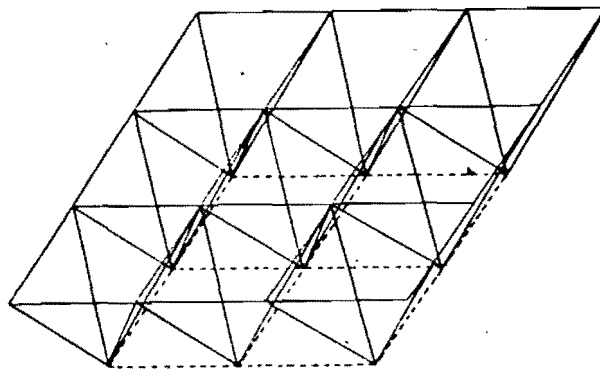
(e)

(f)

FIG. 3.2 PATRONES RETICULARES.



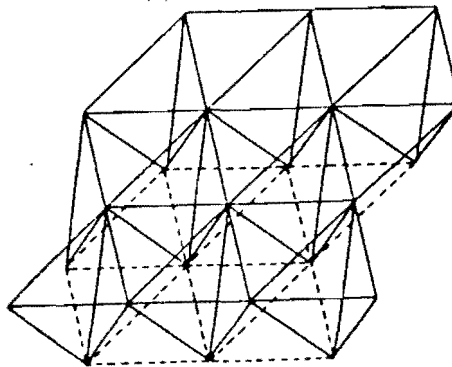
(a)



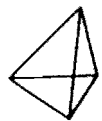
(b)



*Unidad básica.*



(c)



*Unidad básica*

FIG. 3.3 CASCARONES RETICULARES DE CAPA DOBLE.

cascarón.

El análisis sobre inestabilidad que se presenta en este trabajo, se refiere únicamente a estructuras espaciales de una capa, pero aunque es más complejo que la retícula estructural simple, el análisis para todos los tipos anteriores mencionados se puede formular con lo que se presenta en este trabajo.

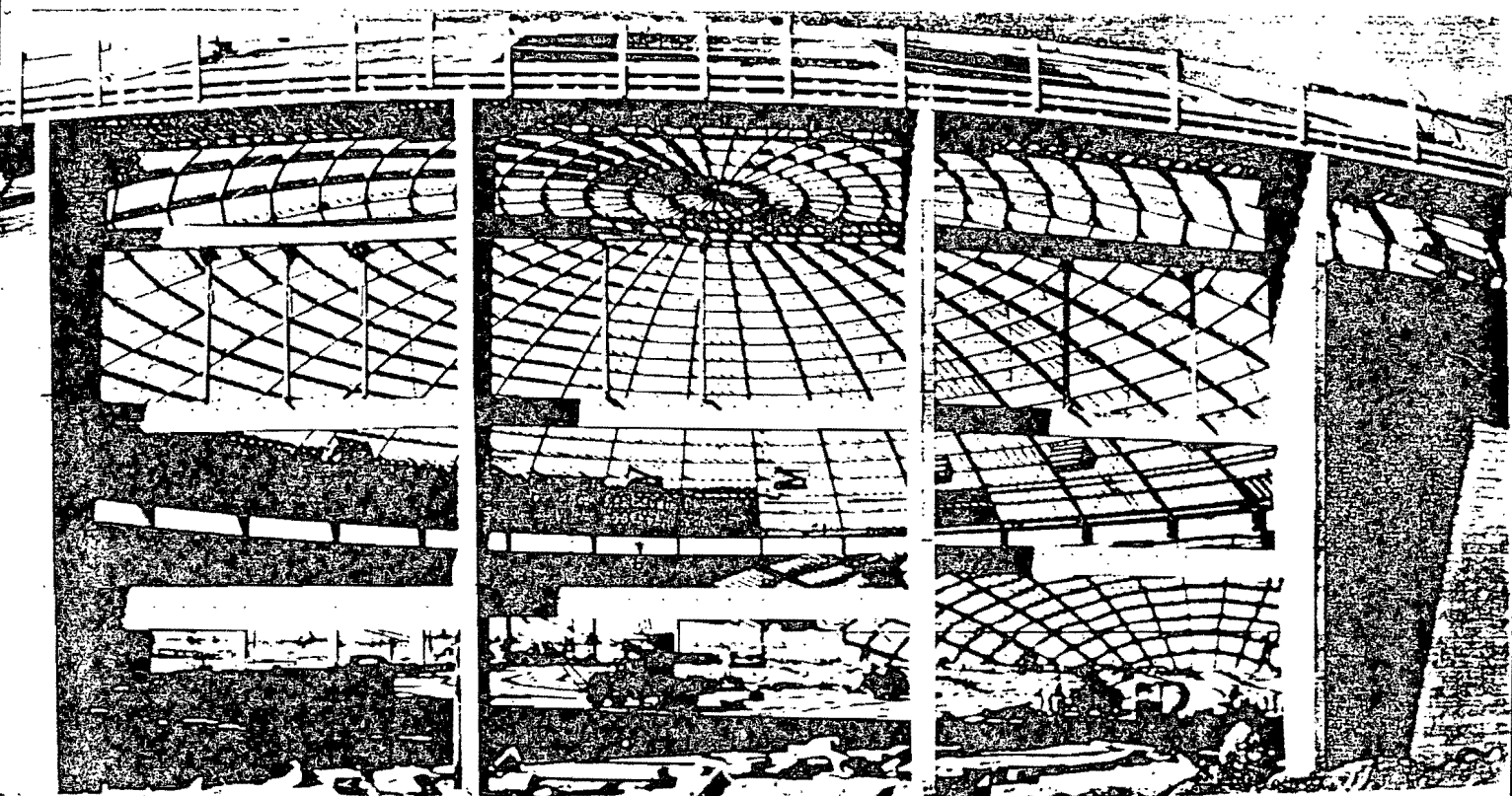
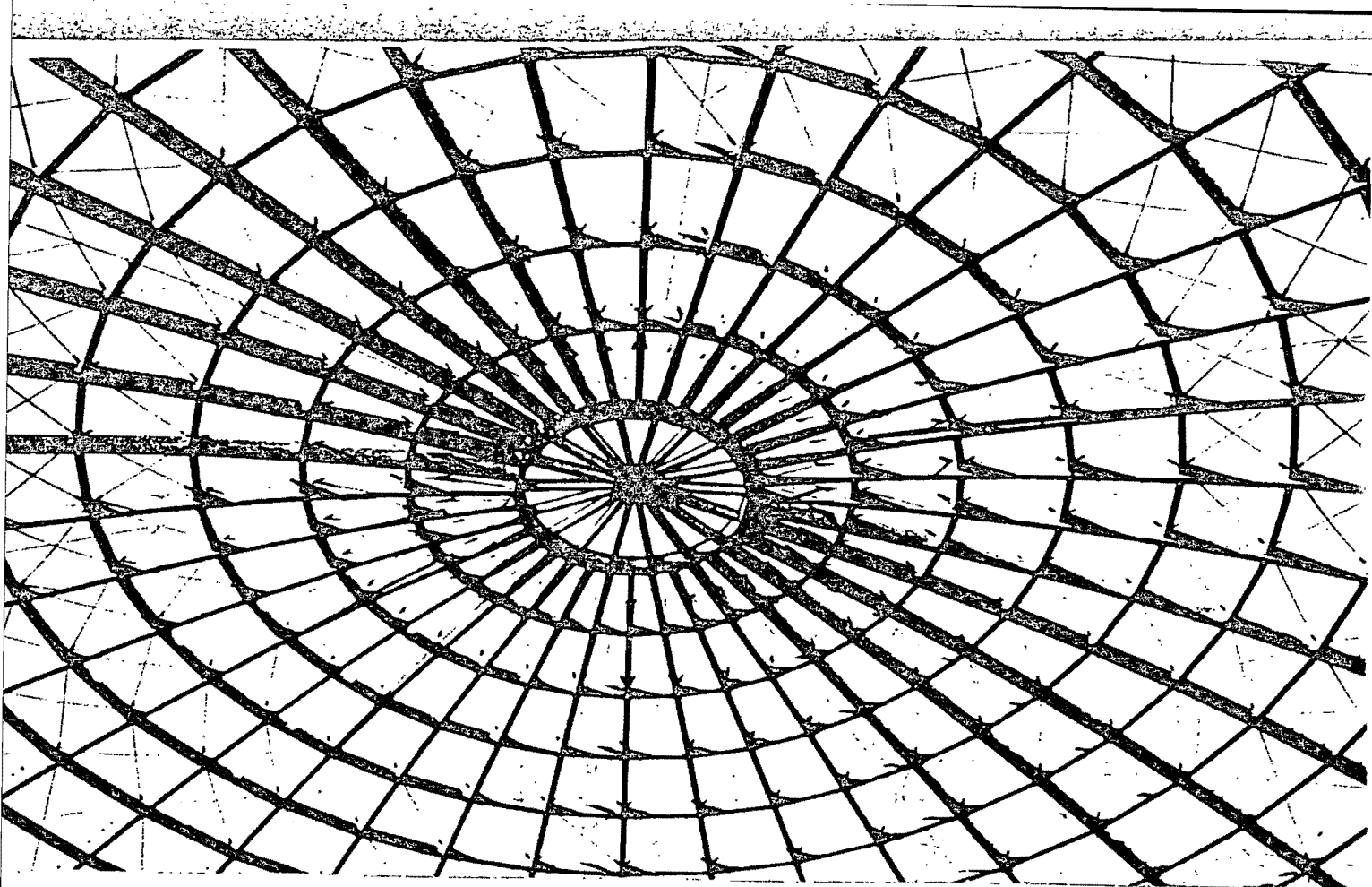


FIG. 3.4 ESTRUCTURA DE UNA CAPA, CONSTRUIDA DE MADERA EN BOZEMAN, MONT. (E. U. S.).



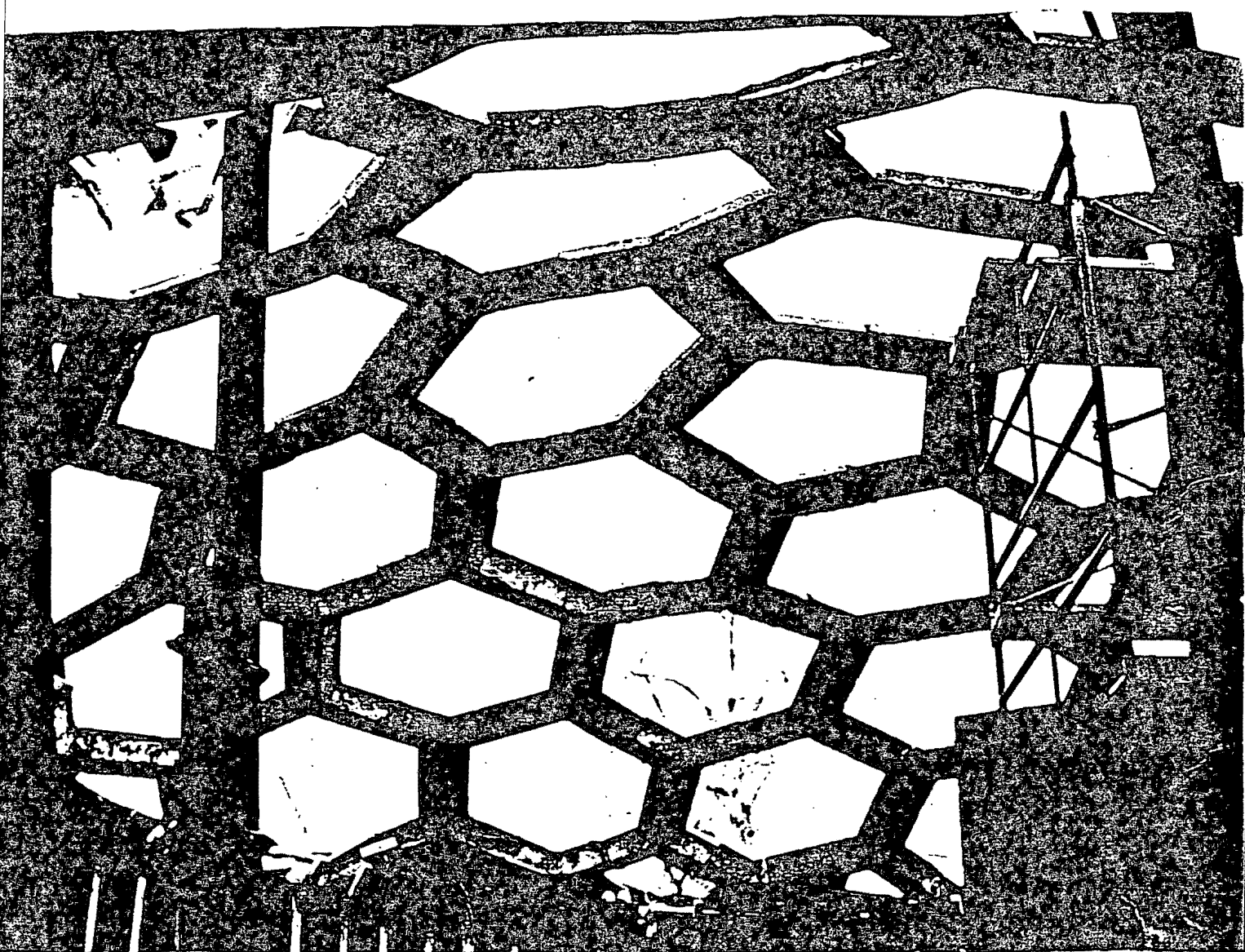


FIG. 3.5 CUPULA DE UNA CAPA. LA CUAL ESTA CONSTITUIDA POR ELEMENTOS PREFABRICADOS Y PRETENSADOS DE CONCRETO LIGERO (DENVER, E. U.).

## 4.- ANALISIS ESTRUCTURAL SIMPLIFICADO.

### 4.1 TRABAJOS PREVIOS.

Se han desarrollado métodos para analizar y diseñar cascarones reticulares como continuos por distintos investigadores. La mayoría de los trabajos se refiere a domos, los resultados difieren entre ellos.

Una comparación de las bases teóricas usadas por cada escritor es difícil, debido a la naturaleza general del análisis y la carencia de detalles en la mayoría de las publicaciones.

El trabajo publicado por Wright (1965) parece el más factible y completo sobre cascarones reticulares, aunque el desarrollo se refiere a un domo reticular; el estudio se puede extender para incluir otras formas de curvatura gaussiana positiva.

Según la teoría de Wright (ref 9.3) para una configuración de triángulo equilátero y miembros de igual tamaño, el continuo que sustituye a la estructura reticular es isótropo, tiene un módulo de Poisson de  $1/3$  y espesores de aproximadamente  $3.5 r_g$  donde  $r_g$  es el radio de giro de la sección transversal de los miembros de la retícula. Al usar secciones tubulares, el espesor es aproximadamente igual a el diámetro de los tubos; el módulo de elasticidad equivalente resulta ser una pequeña parte del que corresponde a los miembros. El continuo equivalente es un cascarón de espesor equivalente poroso.

Wright también trató el caso de 2 miembros de diferente tamaño en una estructura reticular, lo que conduce a un continuo equivalente anisótropo.

Mitchell (ref 9.19) presentó un cascarón equivalente para domos con resultados similares a los presentados por Wright; él trabajó con un cascarón compuesto de triángulos equiláteros y mostró que es equivalente a una placa para la cual se tiene módulo de Poisson de  $1/3$ , la rigidez por unidad de ancho  $E't' = 2 A E / (\sqrt{3} L)$  y la rigidez  $D' = 3\sqrt{3} E I / (4 L)$  los cuales coinciden exactamente con los resultados de Wright. Mitchell comparó sus resultados de este método

del cascarón equivalente con otros resultados provenientes del método de relajación, que se usó en el diseño del domo del banco del sur de Londres. De esta comparación, sugirió que el método del cascarón equivalente es suficientemente exacto para el análisis de tales domos e implica menos trabajo que el método de relajación.

Klöpel y Schardt (ref 9.20) también publicaron un análisis en un domo con un triángulo equilátero como patrón reticular, pero sus resultados son diferentes a los presentados por Wright y Mitchell. Sus aproximaciones dan valores para módulos de Poisson de  $1/3$ , un módulo de elasticidad igual que el de los miembros y un espesor equivalente de  $1.15 A/L$ , o sea, se trata de un continuo rígido delgado del mismo material de los miembros.

Pagano (ref 9.21) hizo algunos trabajos teóricos y pruebas en una bóveda de doble curvatura, hecha de miembros longitudinales y transversales para formar una retícula cuadrada; la forma de la retícula se mantiene por un pequeño miembro diagonal en cada esquina. Él sustituyó los miembros por una membrana y presentó relaciones entre miembros-membrana.

Domos reticulares formados al traslapar miembros se diseñaron como continuos por Lederer (ref 9.22) y más tarde por Soare (ref 9.10) y Badshaw (ref 9.23). El continuo usado por cada uno de ellos tiene un módulo de elasticidad igual al del miembro, y un espesor equivalente que depende de las propiedades del miembro enrejado. Cada quien usa un método equivalente, aunque Soare estableció que su diseño estuvo de acuerdo con resultados obtenidos al usar el método de Lederer.

Del Pozo (ref 9.24) resolvió cascarones cilíndricos reticulares mediante el método del continuo, con miembros de igual tamaño y una configuración de triángulo equilátero, uno de ellos longitudinal y los dos restantes diagonales. El continuo equivalente que simula la estructura reticular resultó anisótropo, con módulo de Poisson de  $1/3$  y  $3/5$  en las direcciones X y Y respectivamente. Al analizar estos valores, se observa que el valor de  $3/5$  es muy alto para un

material real y parece un error. Con el continuo anisótropo que obtuvo, resolvió las ecuaciones de compatibilidad para diferentes condiciones de carga, produjo expresiones para las fuerzas y momentos existentes. Estableció que la validez de su teoría había sido confirmada por pruebas sobre modelos a escala y techos ya construidos.

Algunos trabajos hechos en la Unión Soviética por Vlasov (ref 9.25) y Pshenichnov (ref 9.26 y 9.27), en cascarones cilíndricos reticulares, cuyos miembros forman diamantes reticulares, lo que requiere tratamiento diferente al de una retícula triangular.

#### 4.2 FUERZAS DE MEMBRANA.

Cuando en una placa se aplican fuerzas en el plano medio inicial, se producen esfuerzos en las secciones, cuya resultante por unidad de ancho recibe el nombre de fuerza de membrana.

Las ecuaciones de equilibrio para un elemento cascarón, según la teoría de la membrana, no contienen términos relacionados a desplazamientos, y en realidad representan simplemente los requerimientos para equilibrio estático en 2 direcciones principales en la superficie del cascarón, y entre fuerzas del cascarón y componentes normales de carga en la superficie.

Es de importancia que la teoría de la membrana simple, es adecuada para algunas formas de la superficie media del cascarón de curvatura positiva. Las fuerzas de membrana, se encuentran estáticamente determinadas; aparecen indeterminaciones únicamente en la vecindad de los soportes, como en el caso de vigas. La teoría de la membrana es inválida cuando los bordes se cargan por momentos o cortante, o cuando cargas concentradas significativas tienen componentes normales a la superficie del cascarón y se aplican dondequiera, debido a que el cambio de curvatura es alto. Aún en estos casos, sin embargo, es simple determinar perturbaciones locales y aplicar éstas como correcciones en la solución de membrana, que será válida en la mayor parte de la superficie del cascarón.

Para un cascarón reticular con patrón de divisiones de superficie que acepte 3 componentes del campo de fuerzas de membrana,  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$ , dado que las relaciones entre fuerzas de membrana y fuerzas en las barras se pueden establecer, entonces las soluciones de membrana, se pueden usar directamente en el diseño y análisis de cascarones reticulares.

#### 4.3 FLEXION.

Para establecer explícitamente las constantes elásticas del cascarón equivalente, después de aplicar el régimen de membrana. Es necesario considerar deformación por flexión, y así obtener el espesor equivalente y con este las constantes elásticas.

Para establecer los momentos unitarios en las direcciones X y Y, se definen curvaturas iniciales en ambas direcciones, con éstas, es posible determinar la contribución de cada barra, en el momento. Puede resultar que se tengan momentos unitarios iguales en ambas direcciones, con lo cual, se tendrá isotropía para deformación por flexión.

Para flexión en una placa o cascarón, en una dirección únicamente se tiene:

$$m = \frac{D}{R}$$

donde:

$m$  = momento unitario.

$R$  = radio de curvatura inicial.

$D$  = rigidez a flexión.

$$D = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

E = módulo de elasticidad.

t = espesor del cascarón.

$\nu$  = módulo de Poisson.

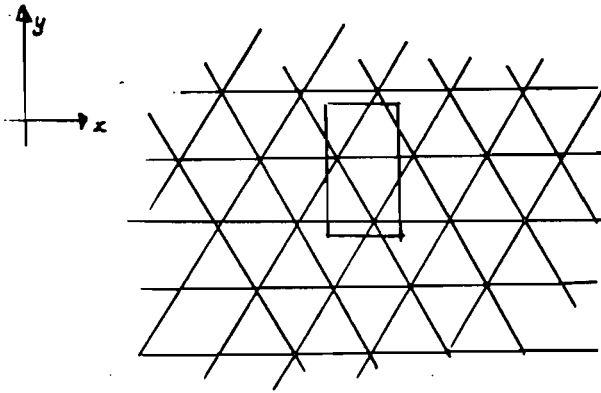
#### 4.4 FUERZAS EN LOS MIEMBROS.

Todos los patrones mostrados en la fig. 3.2, pueden y se han usado para estructuras espaciales de una capa (o alguna combinación de ellos). Los patrones de las figs. 3.2 (a), (b) y (c) evidentemente son dependientes de las restricciones frontera, o de la acción compuesta con el revestimiento del cascarón. Otras configuraciones, todas caracterizadas por triangulaciones, se comportan como simples membranas; en la fig. 3.2 (d) se muestra un triángulo equilátero que es la configuración de miembros más adecuada para la construcción de una estructura espacial de una capa. Los triángulos de ángulo recto de las figs. 3.2 (c) y (f) parecen igualmente manejables como el anterior.

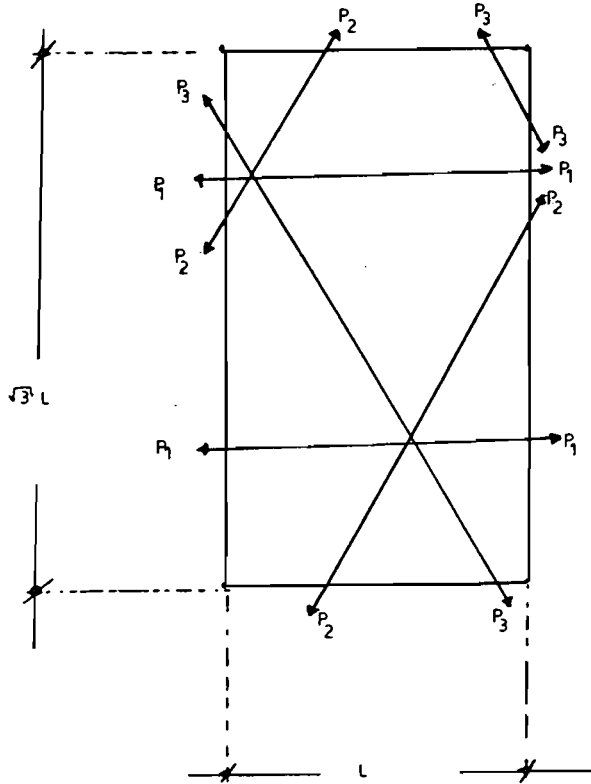
Al considerar el patrón de la fig. 4.1 en la cual los miembros y direcciones se identifican, el campo de fuerzas de membrana puede referirse a ejes transformados, uno de ellos paralelo a una de las líneas de la retícula. Al llamar a las fuerzas en las barras por  $P_1$ ,  $P_2$ , y  $P_3$ , como se muestra en la fig. 4.1 (b), se puede estudiar el equilibrio estático de fuerzas en dirección X. Sobre un corte vertical de longitud  $\sqrt{3} L$  de la fig. 4.1 (b) se tiene:

$$2P_1 + P_2 \cos 60^\circ + P_3 \cos 60^\circ = N_x \sqrt{3} L$$

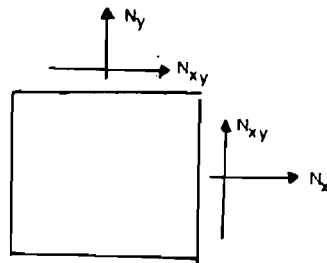
$$\Rightarrow N_x = \frac{4P_1 + P_2 + P_3}{2 \sqrt{3} L} \quad \dots\dots(1a)$$



(a) PATRON RETICULAR



(b) ELEMENTO DE RETICULA.



(c) FUERZAS DE MEMBRANA.

FIG. 4.1

De forma similar en dirección Y , sobre un corte horizontal de longitud L se tiene:

$$P_2 \text{sen } 60^\circ + P_3 \text{sen } 60^\circ = N_y L \quad \Rightarrow \quad N_y = \frac{\sqrt{3} (P_2 + P_3)}{2 L} \dots (1b)$$

además  $P_2 \text{sen } 60^\circ - P_3 \text{sen } 60^\circ = N_{xy} \sqrt{3} L$

$$\Rightarrow \quad N_{xy} = \frac{P_2 - P_3}{2 L} \dots (1c)$$

Al invertir estas expresiones, se obtiene:

$$P_1 = \frac{L (3N_x - N_y)}{2 \sqrt{3}} \dots (2a)$$

$$P_2 = \frac{L (N_y + \sqrt{3} N_{xy})}{\sqrt{3}} \dots (2b)$$

$$P_3 = \frac{L (N_y - \sqrt{3} N_{xy})}{\sqrt{3}} \dots (2c)$$

Estas relaciones se obtienen estáticamente y son independientes de las secciones de los miembros.

#### 4.5 PROPIEDADES ELASTICAS DEL CONTINUO.

Las propiedades elásticas del cascarón continuo equivalentes a un cascarón reticular, se conocen si la ley de Hooke se expresa para el "material" del cascaron equivalente.

Para algunos de los patrones de la fig. 3.2, es razonable asumir homogeneidad y elasticidad lineal, dado que los mismos miembros son



elásticos, pero al considerar que los miembros tienen diferentes direcciones, y diferentes secciones, resultan anisótropos.

Aunque las juntas pueden tener influencia, especialmente con respecto a la flexión, se asume en lo que sigue, que las juntas se comportan perfectamente y son de dimensión cero en la superficie del cascarón.

Al considerar que los miembros tienen idéntica sección deberá ser apropiado asumir isotropía; sin embargo, se parte de la idea de anisotropía, donde la ley de Hooke puede ser descrita como:

$$\epsilon_x = \sigma_x / E'_x - \nu'_x \sigma_y / E'_y \quad \dots\dots(3a)$$

$$\epsilon_y = \sigma_y / E'_y - \nu'_y \sigma_x / E'_x \quad \dots\dots(3b)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G' \quad \dots\dots(3c)$$

o bien:

$$\sigma_x = E'_x (\epsilon_x + \nu'_x \epsilon_y) / (1 - \nu'_x \nu'_y) \quad \dots\dots(4a)$$

$$\sigma_y = E'_y (\epsilon_y + \nu'_y \epsilon_x) / (1 - \nu'_x \nu'_y) \quad \dots\dots(4b)$$

$$\tau_{xy} = G' \gamma_{xy} \quad \dots\dots(4c)$$

Para esfuerzos planos en los cuales  $\nu$  representa el módulo de Poisson, y  $\sigma$  y  $\tau$ ,  $\epsilon$  y  $\gamma$  y  $E$  y  $G$  representan esfuerzo normal y cortante, deformaciones y módulos. Las cantidades primas indican las constantes elásticas para los cascarones continuos equivalentes:

Al aplicar el método de Williot-Mohr para las deformaciones, al considerar la deformación de un elemento de la reticula mostrado en la fig. 4.1 (b) donde las cargas en los miembros son  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  respectivamente, todas de tensión, con todos los elementos individuales de sección  $A$  y módulo  $E$ , cada miembro aumentará su

longitud en  $PL/AE$ .

Si el punto A y la dirección AB, se mantienen en posición en la construcción geométrica de la fig. 4.2, el punto B es desplazado a la derecha por  $P_1L/AE$  y el punto C es desplazado a la derecha de su posición original en  $(P_1 + 2P_2 - 2P_3)L/(2AE)$  y hacia arriba por la cantidad de  $(-P_1 + 2P_2 + 2P_3)L/(2\sqrt{3} AE)$ .

Las cargas impuestas producen las deformaciones:

$$\epsilon_x = P_1/AE \quad \dots\dots(5a)$$

$$\epsilon_y = (-P_1 + 2P_2 + 2P_3)/(3AE) \quad \dots\dots(5b)$$

$$\gamma_{xy} = (2P_2 - 2P_3)/(\sqrt{3} AE) \quad \dots\dots(5c)$$

De aquí las constantes elásticas en ecs. (3) y (4) se pueden determinar a partir de las ecs. (1), (3) y (5) si:

$$\sigma_x = N_x/t' \quad \dots\dots(6a)$$

$$\sigma_y = N_y/t' \quad \dots\dots(6b)$$

$$\tau_{xy} = N_{xy}/t' \quad \dots\dots(6c)$$

Donde  $t'$  es el espesor del cascarón equivalente. Primero, de la ec. 3(a), cuando  $\sigma_y=0$

$$\Rightarrow E'_x = \sigma_x/\epsilon_x \quad \dots\dots(7a)$$

Entonces, al sustituir (1a) en (6a) se tiene:

$$\sigma_x = \frac{4 P_1 + P_2 + P_3}{2 \sqrt{3} L t'} \quad \dots\dots(8a)$$

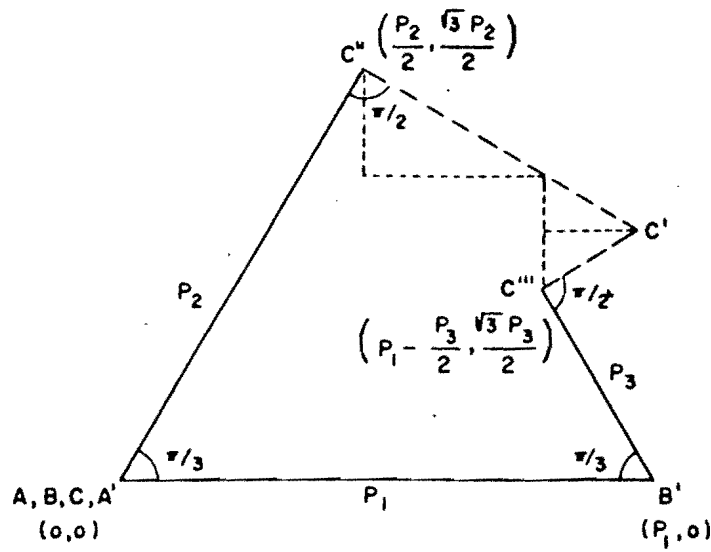
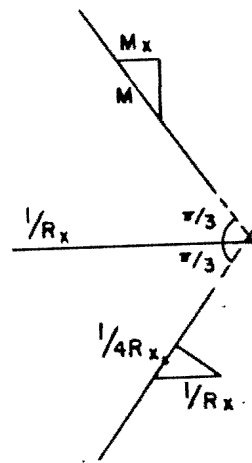


FIG. 4.2 CONSTRUCCION GEOMETRICA PARA DESPLAZAMIENTOS.

(a) Momentos debidos a  $R_x$ .



(b) Momentos debidos a  $R_y$ .

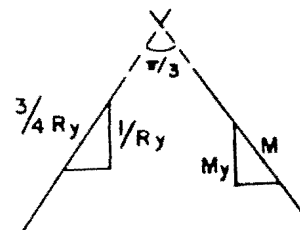


FIG. 4.3

Cuando  $\sigma_y=0$ , entonces  $N_y=0$  y de (1b)  $P_2 + P_3 = 0$  .....(9a)

Por lo tanto al sustituir (9a), (8a), (5a) en (7a) se tiene:

$$E'_x = \frac{2 A E}{\sqrt{3} L t'} \quad \text{.....(10a)}$$

$E'_y$  se obtiene de manera similar; cuando  $\sigma_x=0$ :

$$E'_y = \sigma_y / \epsilon_y \quad \text{.....(7b) de (1b) y (6b)} \quad \sigma_y = \frac{\sqrt{3} (P_2 + P_3)}{2 t' L} \quad \text{.....(8b)}$$

Además cuando  $\sigma_x=0$ ,  $N_x=0$  y de (1a)  $(P_2 + P_3) = -4P_1$  ... (9b)

Al sustituir (9b), (8b) y (5b) en (7b) se tiene:

$$E'_y = \frac{2 A E}{\sqrt{3} L t'} \quad \text{.....(10b)}$$

Por lo tanto  $E'_x = E'_y = E$

$$\text{Además de (6c) y (1c)} \quad \tau_{xy} = \frac{(P_2 - P_3)}{2 L t'} \quad \text{.....(8c)}$$

De (6c)  $G' = \tau_{xy} / \gamma_{xy}$  ... (7c). Al sustituir (8c) y (5c) en (7c) se obtiene:

$$G' = \frac{\sqrt{3} A E}{4 L t'} \quad \text{.....(10c)}$$

Para valuar el módulo de Poisson, la ec. (3a), indica:  $\nu'_x = (\sigma_x / E'_x - \epsilon_x) E'_y / \sigma_y$ ; cuando  $\epsilon_x = 0$ :

$$\nu'_x = \epsilon_x / \epsilon_y \quad \text{.....(11a)}$$

Al hacer las sustituciones apropiadas:  $\nu'_x = 1/3$  .....(12a)

Por un proceso similar, de (3b) cuando  $\epsilon_y = 0$ :

$$\nu'_{xy} = \epsilon_y / \epsilon_x \dots\dots(11b)$$

Con las sustituciones apropiadas:  $\nu'_{xy} = 1/3 \dots\dots(12b)$

Por lo que  $\nu'_{xy} = \nu'_{yx} = \nu' = 1/3$

Se obtiene así un cascarón equivalente isotrópico, en el que:

$$G' = \frac{E}{2(1+\nu')} \dots\dots(12c)$$

Al sustituir las constantes elásticas y sustituir en las ecs. (4) :

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{3} A E}{4 L t'} (3 \epsilon_x + \epsilon_y) \dots\dots(13a)$$

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{3} A E}{4 L t'} (3 \epsilon_y + \epsilon_x) \dots\dots(13b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sqrt{3} A E}{4 L t'} \gamma_{xy} \dots\dots(13c)$$

Desarrollos similares se pueden usar para encontrar constantes elásticas para otros patrones reticulares.

Con las propiedades elásticas determinadas para los cascarones equivalentes, es posible extender soluciones de las ecuaciones generales de cascarones, incluyendo flexión e influencia de torcedura, para los problemas de interés.

Sin embargo, aunque las constantes elásticas del cascarón equivalente se han obtenido para régimen de membrana, estas no son explícitas, es necesario considerar deformación por flexión, para obtener el espesor equivalente.

#### 4.6 ESPESOR EFECTIVO DEL CASCARON EQUIVALENTE.

Al considerar la reticula mostrada en la fig. 4.1 (b), sometida a flexión pura. Con un radio de curvatura inicial,  $R_x$ , en la dirección X (observe la fig. 4.3), entonces:

$$\cos 60^\circ = a/R_x \Rightarrow a = 1/(2R_x) \quad \text{además} \quad 1/R_{z,3} = a \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow M_{z,3} = EI/(4R_x) \Rightarrow M_{2x} = M_{3x} = M_{z,3} \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow M_{2x} = M_{3x} = EI/(8R_x) \dots\dots(14a)$$

Y para un radio de curvatura,  $R_y$  en la dirección Y, entonces:

$$\sin 60^\circ = b/R_y \Rightarrow b = \sqrt{3}/(2R_y) \quad \text{además} \quad 1/R_{z,3} = b \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow M_{z,3} = 3EI/(4R_y) \Rightarrow M_{2y} = M_{3y} = M_{z,3} \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow M_{2y} = M_{3y} = 3\sqrt{3} EI/(8R_y) \dots\dots(14b)$$

Al considerar el elemento reticular original de la fig. 4.1 (b):

$$\text{El momento unitario en X es:} \quad m_x = M_x / (\sqrt{3} L) \dots\dots(15a)$$

$$M_x = 2M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} = 9EI/(4 R_x) \Rightarrow m_x = 3\sqrt{3} EI/(4R_x L) \dots(16a)$$

$$\text{En Y:} \quad m_y = M_y/L \dots\dots(15b)$$

$$M_y = M_{2y} + M_{3y} = 3\sqrt{3} EI/(4 R_y) \Rightarrow m_y = 3\sqrt{3} EI/(4R_y L) \dots(16b)$$

Es evidente que con estos momentos iguales, la isotropía del sistema para deformaciones en la superficie, es válida para deformaciones generales, que consideren flexión.

Ahora para flexión de una placa o cascarón, en una dirección únicamente:

$$m = D/R \dots\dots(17) \text{ en la cual } D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \dots\dots(18)$$

$$\text{Así que: } t'^3 = 12 (1 - \nu'^2) m R/E' \dots\dots(19)$$

De las ecs. (10), (12), (16) y (19)

$$\Rightarrow t'^3 = t'_{x,y}{}^3 = 12 I t'/A \Rightarrow t' = 2\sqrt{3} \sqrt{I/A} \dots\dots(20)$$

$$\text{pero } r_g = \sqrt{I/A} = \text{radio de jiro} \Rightarrow t' = 2\sqrt{3} r_g \dots\dots(21)$$

Por lo tanto las constantes alásticas, previamente establecidas en términos de  $t'$ , pueden ahora ser escritas en forma explicita:

$$E' = \frac{A E}{3 L r_g} \dots\dots(22a)$$

$$G' = \frac{A E}{8 L r_g} \dots\dots(22b)$$

$$\nu' = 1 / 3 \dots\dots(22c)$$

$$D' = \frac{3 \sqrt{3} E I}{4 L} \dots\dots(22d)$$

Para un cascarón construido de miembros de diferente sección, las propiedades de un continuo equivalente han sido obtenidas en forma similar a lo que aquí se presenta, y se muestran a continuación:

$$E'_x = 2\sqrt{3} A_1 E / (3 L t'_x) \dots\dots(23a)$$

$$E'_y = 6\sqrt{3} A_2 E / (L t'_y (8 + A_2 / A_1)) \dots\dots(23b)$$

$$G' = \sqrt{3} A_2 E / (4 L t'_y) \dots\dots(23c)$$

$$\nu'_x = (1/3) (t'_y / t'_x) (9 A_2 / (8 A_1 + A_2)) \dots\dots(23d)$$

$$\nu'_y = 1/3 \dots\dots(23e)$$

Donde los subíndices 1,2 se refieren a los miembros en la dirección X y diagonales respectivamente. El espesor efectivo para el continuo equivalente resulta:

$$(t'_x)^2 = (3I_1/2A_1)(8 + I_2/I_1)(1 - \nu'_x \nu'_y) \dots\dots(23f)$$

$$(t'_y)^2 = (3I_2/2A_2)(8 + A_2/A_1)(1 - \nu'_x \nu'_y) \dots\dots(23g)$$

#### 4.7 MOMENTOS EN MIEMBROS.

Para describir el equilibrio en un techo de cascarón reticular, se tienen que considerar 8 fuerzas y momentos, los cuales actúan en direcciones ortogonales. Estas se muestran en la fig. 4.4 y son:

$N_x$  = fuerza en X

$N_y$  = fuerza en Y

$N_{xy}$  = fuerza cortante

$m_x$  = momento en una sección en X

$m_y$  = momento en una sección en Y

$m_{xy}$  = momento torsionante

$Q_x$  = cortante transversal en X

$Q_y$  = cortante transversal en Y

Un cascarón reticular representado por un continuo, debe de ser capaz de resistir estas fuerzas y momentos. Es necesario que las juntas de los miembros, o puntos nodales, proporcionen suficiente fijación para los extremos de los miembros. Sin esta continuidad, los miembros son incapaces de transmitir los momentos flexionantes y la estructura no podrá comportarse como un verdadero cascarón.

De las fuerzas y momentos encontrados para el continuo, es posible calcular fuerzas y momentos en los miembros individuales. Esto puede ser posible para un cascarón simple al relacionar fuerzas y momentos en un elemento del cascarón.

Estas relaciones se definen por consideraciones de



equilibrio estático, en un elemento de la estructura reticular, sometido a las fuerzas y momentos del cascarón. Puesto que las propiedades de la sección transversal de los miembros del cascarón reticular no influyen en estas relaciones, ellas serán válidas para todas las combinaciones de tamaños de miembros.

Las fuerzas axiales o directas en los miembros se han desarrollado previamente y aparecen en las ecuaciones (2).

Las expresiones para definir las fuerzas P se desarrollaron al considerar un sistema continuo. Esto no es verdad para los miembros localizados en el borde del cascarón reticular. Si el eje X es la dirección longitudinal del cascarón reticular y el eje Y es la dirección transversal del mismo, y se tiene un número total de puntos nodales en ambas direcciones. Así, los valores para las fuerzas P<sub>2</sub> y P<sub>3</sub> no serán afectadas. En la dirección transversal, el cascarón resultará con un borde longitudinal como el mostrado en la fig. 4.6 .

Al usar el mismo método que se usó para las ecs. (2), la fuerza el miembro del borde resulta:

$$P_1 = \left[ \frac{L}{4\sqrt{3}} \right] [ 3 N_x - N_y \pm \sqrt{3} N_{xy} ] \quad \dots\dots(24)$$

Asociada a una longitud L.

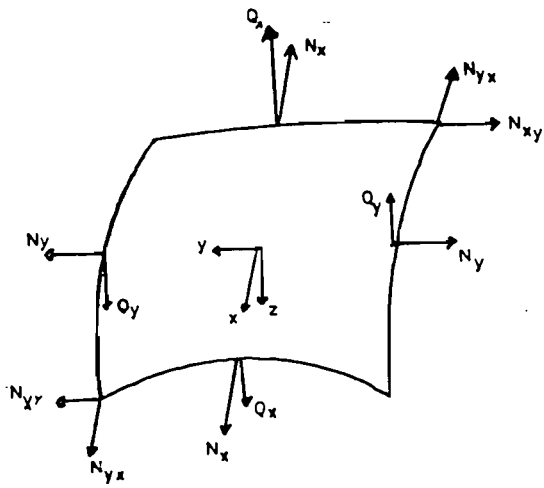
Al considerar un elemento del cascarón reticular, es posible relacionar los momentos m<sub>x</sub>, m<sub>y</sub> y m<sub>xy</sub> del cascarón equivalente con los momentos flexionantes y torsionantes (M y T) de cada uno de los miembros.

La acción de estos momentos se muestra en la fig. 4.8. La convención de signos adoptada para los momentos en los miembros es:

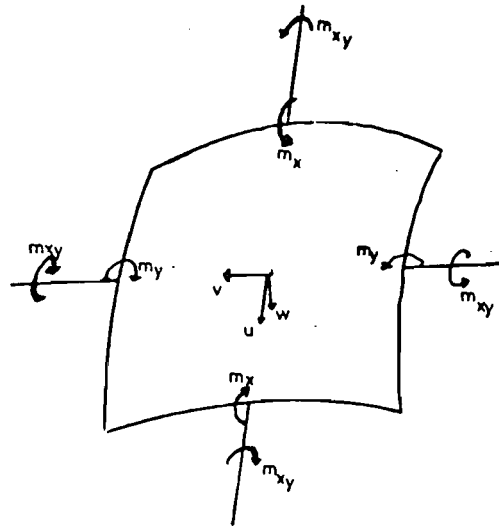
Momento de flexión positivo, causa compresión en la parte superior del miembro.

Momento torsionante positivo en dirección X sentido horario.

Momento torsionante positivo en dirección Y sentido antihorario.



(a) FUERZAS POSITIVAS



(b) MOMENTOS Y DESPLAZAMIENTOS POSITIVOS.

FIG. 4.4

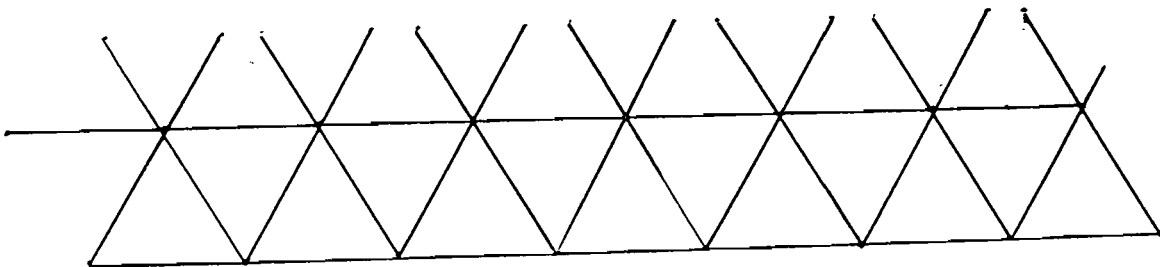
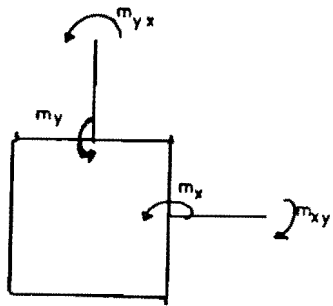
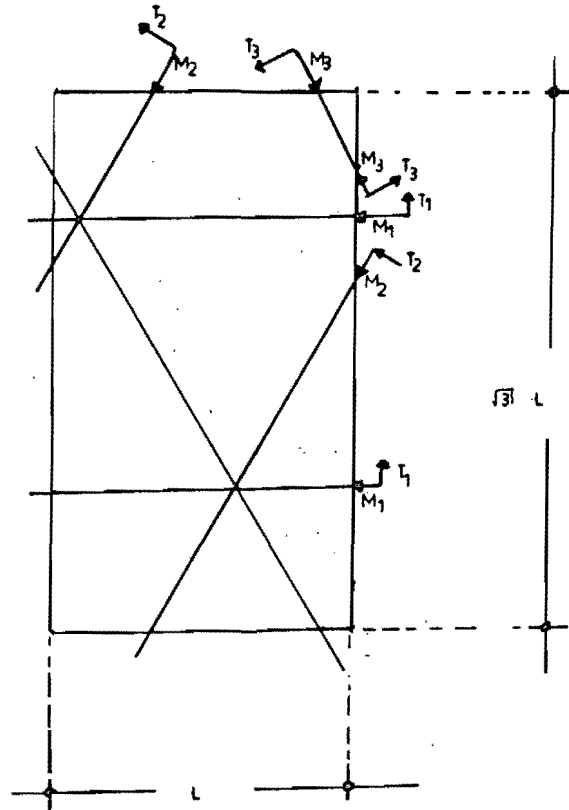


FIG. 4.6 BORDE LONGITUDINAL.

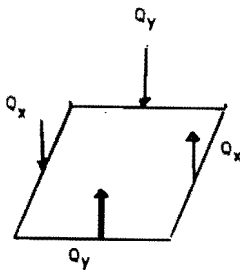


(a) Convención de signos.

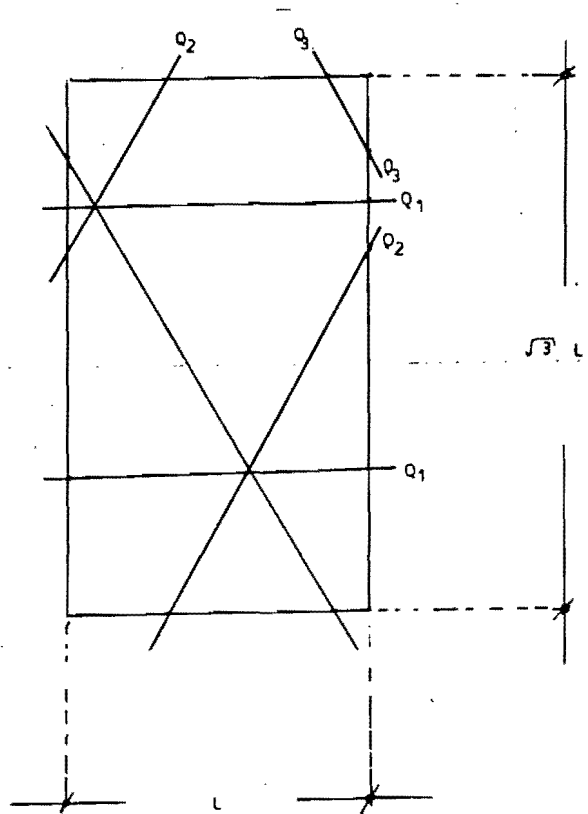


(b) Elemento.

FIG. 4.8



(a) Cortantes transversales.



(b) Elemento.

FIG. 4.10

Se puede demostrar que se obtienen los siguientes resultados:

$$M_3 = L (\sqrt{3} m_y - m_{xy}) / 4 \quad \dots\dots(29)$$

$$M_2 = L (\sqrt{3} m_y + m_{xy}) / 4 \quad \dots\dots(30)$$

$$T_3 = L (\sqrt{3} m_{xy} + m_y) / 4 \quad \dots\dots(31)$$

$$T_2 = L (\sqrt{3} m_{xy} - m_y) / 4 \quad \dots\dots(32)$$

$$M_1 = L (\sqrt{3} m_x + m_{xy}) / 2 \quad \dots\dots(33)$$

$$T_1 = -L (\sqrt{3} m_{xy} + m_y) / 2 \quad \dots\dots(34)$$

Para las expresiones (33) y (34), el signo negativo se aplica al extremo de la izquierda A y el signo positivo se aplica al extremo de la derecha B.

Las únicas fuerzas las cuales no se pueden relacionar a fuerzas en los miembros, son los cortantes transversales  $Q_x$  y  $Q_y$ . Estos actúan sobre un elemento del cascarón como se muestra en la fig. 4.10.

Al seleccionar una sección horizontal, el equilibrio estático indica que:

$$Q_y L = Q_2 + Q_3 \quad \dots\dots(35)$$

En forma similar, para una sección vertical:

$$\sqrt{3} L Q_x / 2 = Q_1 + Q_2 \quad \dots\dots(36) \quad \text{o} \quad \sqrt{3} L Q_x / 2 = Q_1 + Q_3 \quad \dots\dots(37)$$

Los cortantes transversales son relativamente pequeños comparados con otras fuerzas o momentos en el cascarón y no influyen en la resistencia del miembro. Por lo tanto los resultados de su omisión serán normalmente insignificantes.

## 5.- CONDICIONES GENERALES PARA LOGRAR LA ESTABILIDAD.

Se pueden sintetizar como factores importantes que influyen para lograr la estabilidad de un cascarón reticular los siguientes:

- a) Revestimiento.
- b) Sección del miembro, así como su longitud.
- c) Las juntas o métodos de conexión.
- d) La forma general del cascarón.
- e) Condiciones de apoyo.
- f) La división de la superficie del cascarón.
- g) Condiciones de carga.
- h) Paredes de la sección del miembro.
- i) El material a ser utilizado.
- j) Geometría general del cascarón.

### a) Revestimiento.

En el análisis simplificado, o método del continuo equivalente no se tiene en cuenta el revestimiento, que siempre recubre al cascarón reticular. Este revestimiento siempre es favorable a la estabilidad del cascarón, ya que proporciona mejores condiciones de esfuerzo en los miembros, disminuye los desplazamientos y aumenta la rigidez de la estructura.

Por lo tanto aunque los cascarones reticulares son generalmente estables y resistentes a carga, independientemente del revestimiento que se aplique, es necesario tenerlo presente como característica de aumento a la estabilidad. El revestimiento hace que el cascarón en su conjunto, se comporte de forma más aproximada a la de un continuo, que es la base del análisis aquí presentado.

### b) Sección del miembro, así como su longitud.

Se ha visto que un miembro de un cascarón reticular está sometido a una serie de acciones, como son fuerzas axiales, momentos flexionantes y torsión y, un miembro tubular es la sección más

eficiente para poder satisfacer estas necesidades.

La condición crítica de un elemento individual de un cascarón reticular por compresión, está en función de su longitud  $L$ . Además el cascarón equivalente tiene una curvatura, la cual no se puede cumplir tan aproximadamente si se proporciona demasiada longitud a los miembros individuales. También la longitud  $L$  interviene en la estabilidad de las paredes del miembro.

#### c) Las juntas o métodos de conexión.

Para lograr la estabilidad, las juntas de los miembros deben de tener dos características importantes, resistencia a flexión y rigidez. Sin esto, el cascarón no puede resistir los momentos internos, o bien no podrá resistir cargas, en particular las concentradas.

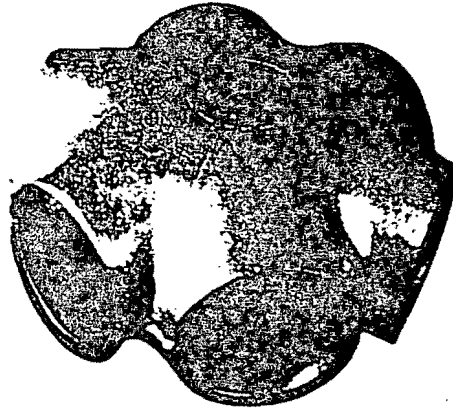
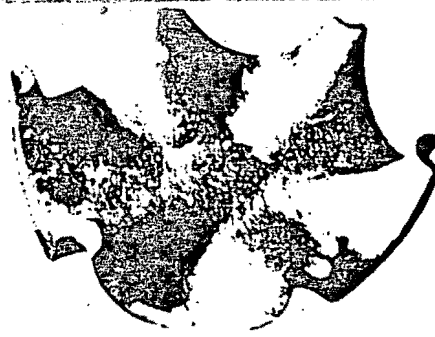
Aunque hoy en día existen métodos de conexión de gran simplicidad, es conveniente hacer notar que se deben de evitar juntas que introduzcan esfuerzos adicionales debidos a excentricidades. (En las figs. 5.1 y 5.2 se muestran algunas juntas.)

#### d) La forma general del cascarón.

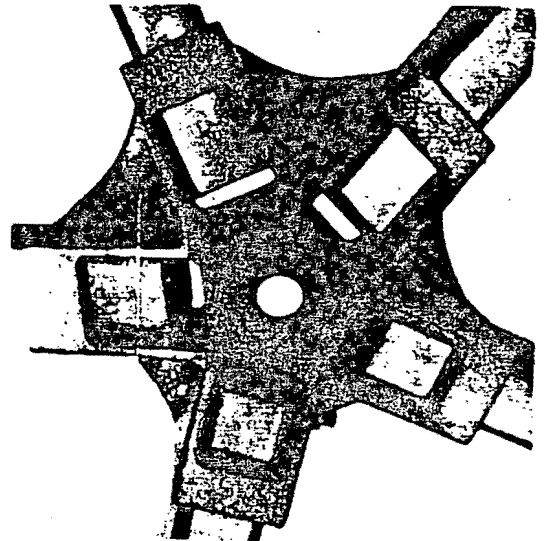
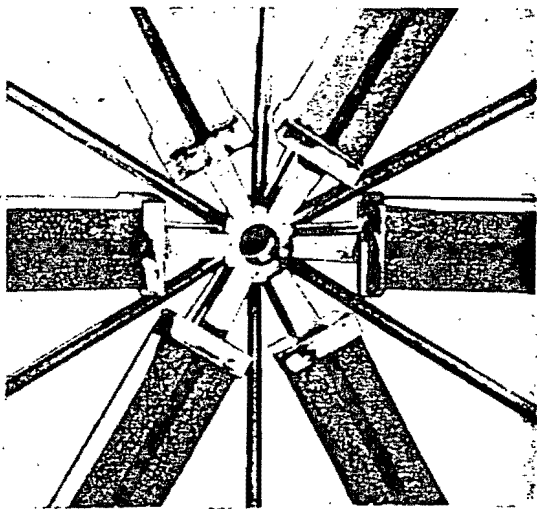
El método de análisis estudiado aquí, se recomienda para estructuras espaciales de una capa de curvatura positiva, especialmente domos y cilindros.

#### e) Condiciones de apoyo.

La condición de apoyo para la aplicación del método presentado aquí, es que los bordes del cascarón estén impedidos de desplazamiento y rotación. Este tipo de apoyo proporciona mejores condiciones de estabilidad que cualquier otro apoyo.

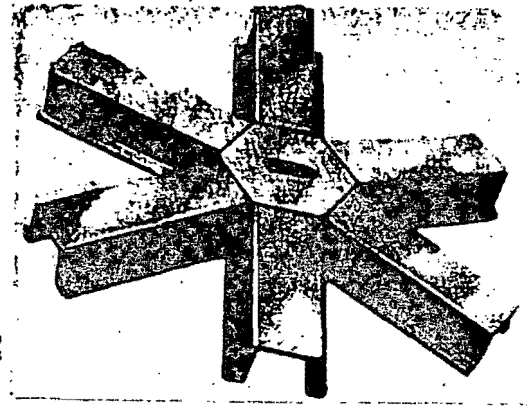
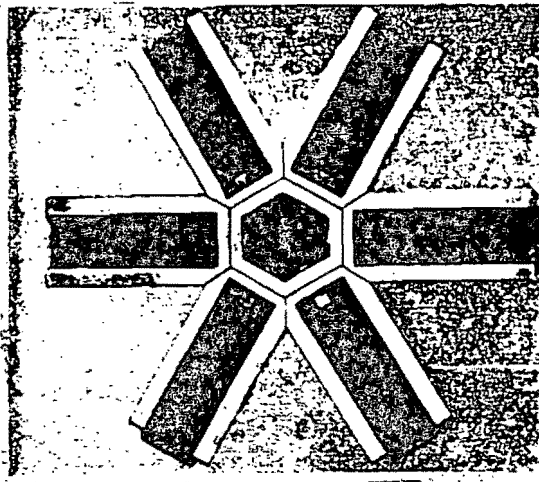


(a) Sistema S. D. C.



(b) Juntas para cúpulas prefabricadas.

FIG. 5.1 SISTEMAS PARA CONEXION DE ESTRUCTURAS ESPACIALES.



(a) Conector usado en la construcción de hangares te-zet.



(b) Conector para estructuras de aluminio.

FIG. 5.2 SISTEMAS PARA CONEXION DE ESTRUCTURAS ESPACIALES.



f) La división de la superficie del cascarón.

Las divisiones se deben de escoger para minimizar la variedad de miembros y conexiones requeridas. Se debe buscar que los patrones de división, no sean dependientes de las condiciones de apoyo y/o acción compuesta con el revestimiento.

En general se puede considerar como mejor condición de patrón de división aquel, con elementos iguales en sección y longitud para domos y, con elementos de diferente sección para cascarones cilíndricos, sobre todo para disminuir el costo de la estructura.

g) Condiciones de carga.

Se deben de evitar en lo posible concentraciones de carga, para evitar el pandeo súbito. Se prefiere carga uniformemente distribuida.

h) Paredes de la sección del miembro.

Como ya se mencionó, es más conveniente usar miembros tubulares, con este tipo de secciones, sólo se debe tener cuidado normalmente con la longitud  $L$  del miembro y la relación radio/espesor de la pared.

Resultados existentes en la literatura sobre este tipo de miembros, se alejan mucho de los experimentales, cuando se tienen una longitud grande y/o bien una relación radio/espesor grande, o sea de pared muy delgada.

Para paredes planas, la estabilidad depende de un factor que tiene como variable principal la configuración que se establece, para lo que el uso de atiesadores longitudinales y transversales aumentan la estabilidad.

i) El material a ser utilizado.

El acero y aluminio son los materiales más utilizados en construcciones de este tipo de estructuras. El uso de estos materiales es debido a sus propiedades; para sitios con bajas temperaturas el aluminio es más adecuado.

## j) Geometría general del cascarón.

Se mostró la importancia del parámetro  $\lambda$ , por medio de pruebas experimentales a cascarones continuos, en el inicio de pandeo súbito. Habrá pandeo súbito cuando  $\lambda \geq 5$ ; este parámetro depende básicamente de la geometría del cascarón, de  $a$ ,  $t$ ,  $R$  y  $\nu$ . Como  $\nu$  es prácticamente constante  $\lambda$  sólo depende de  $a$ ,  $t$  y  $R$ , que son variables geométricas.

Para obtener un valor de  $\lambda < 5$  se necesita valores pequeños del radio  $a$  para un espesor y radio dados; o bien, para una  $a$  y  $t$  dados se requiere un radio del domo  $R$  grande. Esto lleva a un casquete esférico muy pequeño.

Con las limitaciones anteriores, sólo sería posible tener valores de  $\lambda$  menores de 5, para cascarones que puedan cubrir pequeñas áreas, lo cual no es común. Por ello se deben buscar condiciones que eviten el problema de inestabilidad súbita.

Estas condiciones, como se verá más adelante, son dependientes de la geometría, la sección del miembro y un radio de curvatura. Con esto se evita el problema de la inestabilidad súbita.

Los cascarones reticulares de forma de domo, que se han construido al paso del tiempo, en general presentan valores de  $\lambda$  mayores de 5, por lo que puede pensarse en que las fallas de algunos de ellos, se deben al problema de la inestabilidad súbita.

La curvatura del cascarón como condición geométrica, también influye en la inestabilidad general y local, que son generalmente las condiciones más críticas, como quedará demostrado al analizar la falla de un domo en Bucarest.

## 6.-CRITERIOS GENERALES PARA ANALISIS DE INESTABILIDAD LOCAL, SUBITA, GENERAL ASI COMO PARA ESTUDIAR INESTABILIDAD DE LA SECCION.

### 6.1 CRITERIOS DE INESTABILIDAD.

En el diseño de un cascarón reticular hay necesidad de tener en cuenta: a) El pandeo de elementos individuales de la retícula resultado de las fuerzas directas en el cascarón (inestabilidad local), b) El pandeo súbito causado por concentraciones locales de carga, c) El pandeo general ocurrido más allá de una área  $\gg L^2$  y d) El pandeo de la sección transversal del miembro. Esto se estudia en un cascarón reticular esférico, con el patrón de división ya definido en la fig. 4.1. Algunas de las relaciones que se presentaran, se pueden utilizar para análisis de otros cascarones de curvatura gaussiana positiva.

### 6.2 INESTABILIDAD LOCAL.

Para una presión radial uniforme de intensidad  $q$ , sobre un domo esférico de radio  $R$ , las fuerzas de membrana resultan iguales a  $qR/2$  por lo que:

$P_1 = P_2 = P_3$  y de ecs. (1):

$$N_x = \frac{\sqrt{3} P}{L} \quad N_y = \frac{\sqrt{3} P}{L} \quad N_{xy} = 0$$

$$\text{Entonces, } N = \frac{\sqrt{3} P}{L} = q R/2 \Rightarrow P = qRL/(2 \sqrt{3})$$

Si el miembro esta articulado  $\Rightarrow P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$

$$\Rightarrow [q_{cr}]_a = \frac{2 \sqrt{3} \pi^2 E I}{R L^3} \dots\dots(40)$$

### 6.3 INESTABILIDAD SUBITA.

Es necesario considerar los efectos de una carga concentrada en un cascarón reticular. Cuando una carga a compresión es aplicada en una junta, puede suceder que:

- 1) Un miembro o junta puede fallar debido a los esfuerzos.
- 2) La junta puede desplazarse grandemente, cuando el angulo entre los miembros se aproxime a 180°. Si la carga es de suficiente magnitud, la junta llegará a ser inestable, formando una depresión, y produciendo así inestabilidad súbita.

La junta desplazada que se muestra en la fig. 6.1 representa calcular los desplazamientos exactos pero, como las cargas en los miembros disminuyen al incrementarse la distancia de la junta, entonces se obtiene suficiente exactitud estudiando únicamente una área limitada en la vecindad de la junta.

Cuando una carga normal  $W$  es aplicada en  $A$ , se mueve a  $A'$  y  $h$  se reduce a  $h'$  (ver fig. 6.1(b)).

Por lo tanto, por consideraciones geométricas, de la fig. 6.1 (b)

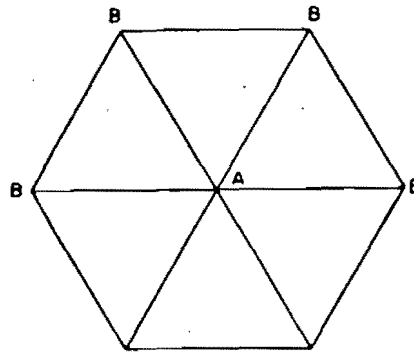
$$\epsilon_{AB} = \frac{h^2 - h'^2}{2L^2} \dots\dots(41a)$$

Ya que  $P = AE\epsilon$  :

$$W' = AE \left[ \frac{h^2 - h'^2}{2L^2} \right] \Rightarrow W_{T1} = 6 W' \text{ sen } \theta$$

Al existir curvatura en las dos direcciones aparecen 6 barras.

(a)



Elementos BB  
inextensibles.

(b)

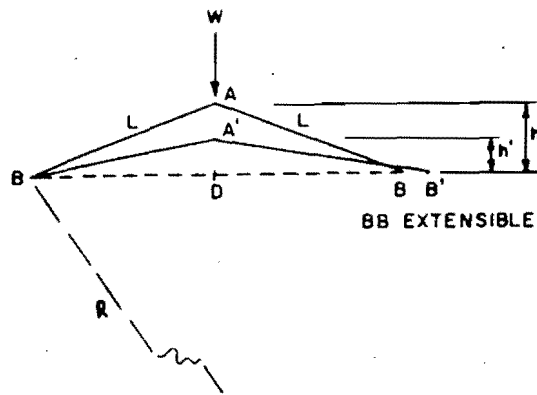


FIG. 6.1 •

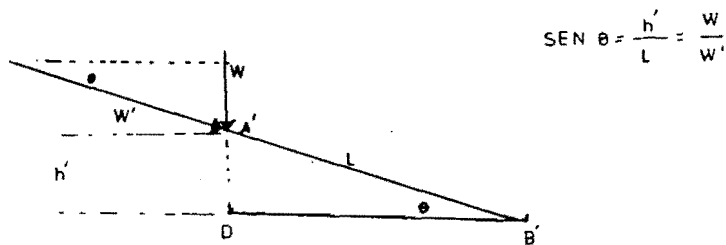


FIG. 6.2

$$\Rightarrow W_{T1} = \frac{3 A E h' (h^2 - h'^2)}{L^3} \dots\dots (42a)$$

Ahora, al maximizar  $W_{T1}$  con respecto a  $h'$   $\Rightarrow dW_{T1}/dh' = 0$

$$\Rightarrow [h']_{cr} = h/\sqrt{3} \quad \Rightarrow [W_{T1}]_{cr} = \frac{2AE h^3}{\sqrt{3} L^3} \dots\dots (43a)$$

La carga se puede expresar como una carga equivalente distribuida en el área tributaria del punto A. El área tributaria para las deducciones de las fuerzas de membrana es  $A_{tr} = \sqrt{3} L^2 / 2$ .

$$\Rightarrow [q_{cr}]_{b1} = \frac{4 A E h^3}{3L^5} \quad (44a)$$

Ahora si  $h = L^2/(2R) \dots (45)$

$$\Rightarrow [q_{cr}]_{b1} = \frac{A E L}{6 R^3} \quad \dots\dots (46a)$$

Cuando el punto B no se desplaza, lo que proporciona alto valor de la carga crítica.

Para considerar el limite inferior se permite que los miembros BB sean extensibles y soportan carga. Por equilibrio se requiere que  $P_{AB} = P_{BB}$  y de consideraciones geométricas se obtiene:

$$(\epsilon_{AB})_2 = \frac{h^2 - h'^2}{4 L^2} \quad \dots\dots (41b)$$

Entonces:

$$W_{T2} = \frac{3 A E h' (h^2 - h'^2)}{2 L^3} \dots (42b) \quad \text{donde } [h']_{cr} = h/\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow [W_{T2}]_{cr} = \frac{A E h^3}{\sqrt{3} L^3} \dots (43b) \quad \text{justamente } 1/\sqrt{2} \text{ del valor previo.}$$

Por tanto

$$\Rightarrow [q_{cr}]_{b2} = \frac{2 A E h^3}{3 L^5} \dots (44b) \quad \text{y de (45)}$$

$$\Rightarrow [q_{cr}]_{b2} = \frac{A E L}{12 R^3} \dots (46b)$$

Ya que las condiciones de apoyo están entre los límites estudiados, se puede concluir que :

$$\frac{A E L}{12 R^3} \leq [q_{cr}]_{b2} \leq \frac{A E L}{6 R^3} \dots (47)$$

Para determinar la resistencia a flexión cuando se genera un desplazamiento vertical de A, los 3 miembros enmarcados en B sirven para restringir cada miembro AB. Del argumento usado para determinar las ecs. (14), se muestra que los tres miembros son equivalentes a un simple miembro BC ( ver la fig. 6.3).

Los miembros a, b y c forman uno solo BC. Previamente se mostró que:

$$\frac{E I_a}{4 R_b}, \frac{E I_b}{R_b} \quad \text{y} \quad \frac{E I_c}{4 R_b} \quad \text{son los momentos inducidos en los}$$

los miembros a, b y c cuando se genera un radio de curvatura  $R_b$  en

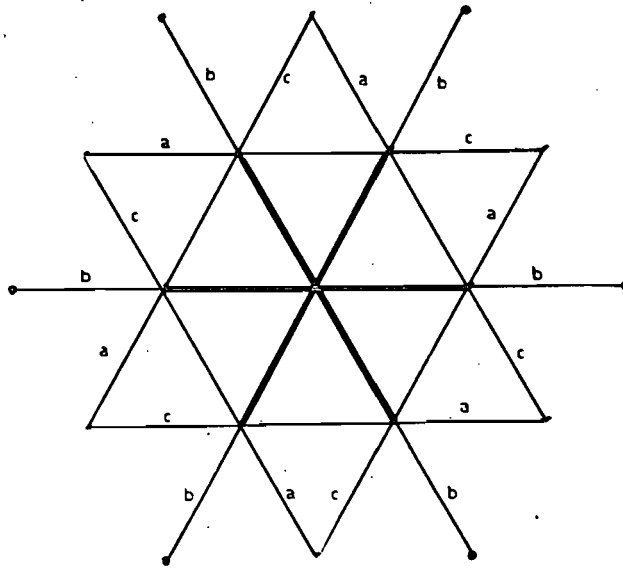


FIG. 6.3 ELEMENTO PARA ANALISIS DE FLEXION.

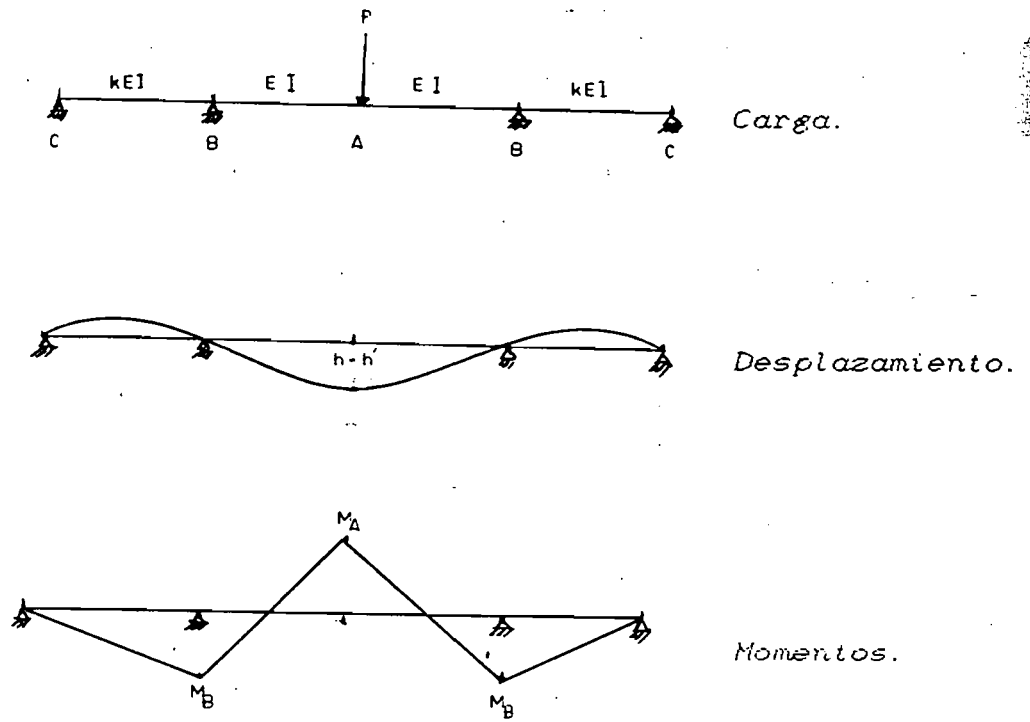


FIG. 6.4 FLEXION DE MIEMBROS.



la dirección b.

Por lo tanto, el momento en el miembro en dirección b, es:

$$M_{bc} = \frac{E}{R_b} [ I_a/8 + I_b + I_b/8 ] \dots (48a)$$

Si existen dos secciones, una para los miembros horizontales y otra para los miembros diagonales con subíndices 1 y 2, la rigidez equivalente del miembro BC será:

$$E [ 4 I_1 + I_2 ] / 4 \dots (48b)$$

$$\text{Para secciones iguales} \Rightarrow 5 E I / 4 \dots (48c)$$

De la fig. 6.4 es fácilmente demostrable que para un desplazamiento h-h' :

$$P = \frac{3 E I (h-h')}{L^3} \left[ \frac{24 k + 8}{3 k + 4} \right] \dots (49a)$$

y los momentos flexionantes serán:

$$M_B = - \frac{3 P L k}{4 (3k + 1)} \dots (49b) \quad \text{y} \quad M_A = \frac{P L (3k + 2)}{4 (3k + 1)} \dots (49c)$$

Para secciones y longitudes iguales, entonces  $k = 5/4 \dots (50)$  y así se obtiene:

$$P = \frac{14.71 E I (h - h')}{L^3} \dots (51a)$$

$$M_B = \frac{2.90 E I (h - h')}{L^2} \dots (51b)$$

$$M_A = \frac{4.45 E I (h - h')}{L^2} \dots (51c)$$

Al aceptar (45)

$$\Rightarrow [rg_1 a/L^2]_{cr} \leq 0.131 \dots\dots(54b)$$

$$[rg_2 a/L^2]_{cr} \leq 0.092 \dots\dots(55b)$$

Las ecs. (47), (54a) y (55b), indican que, con baja rigidez en los nudos, la inestabilidad súbita ocurrirá bajo cargas pequeñas, pero con juntas efectivas, el problema desaparece. Algunos cascarones reticulares han sido construidos con juntas que poseen baja rigidez a la flexión; para tener esto en cuenta, se puede estimar mediante desarrollos paralelos a éstos, en los cuales las ecs. (53) se modifican para reflejar el comportamiento de la junta.

Las expresiones que se obtuvieron para W fueron:

$$W_T \propto AE h'(h^2 - h'^2)/L^3 \quad \text{y} \quad W_f \propto EI (h - h')/L^3$$

Al sacar  $AE (h - h')/L^3$  como factor común, se muestra que:

$$W_T \propto h' (h + h') \quad \text{y} \quad W_f \propto rg^2$$

Esto es, la carga que soporta la geometría del cascarón depende de las dimensiones relativas del cascarón, mientras que la carga debida a flexión depende de la sección transversal de cada barra.

La inestabilidad súbita de un cascarón cilíndrico difiere de la obtenida para los domos, ya que hay curvatura únicamente en una dirección, pero se establecen expresiones similares.

## 6.4 INESTABILIDAD GENERAL.

La presión radial uniforme crítica para un cascarón esférico de radio  $R$ , se puede expresar como:

$$[q_{cr}]_c = C \frac{E' t'^2}{R^2} \dots\dots (56)$$

En la cual  $C$  es una constante. Según la gráfica presentada en la fig. 2.6, en donde el valor de  $C$  depende del parámetro  $\lambda$ , se observa que los valores de  $C$  varían de 0.2 a 0.4 aproximadamente.

Para continuar, se toma, para ejemplificar, un valor de  $C = 0.40$ .

=> Al Aplicar las expresiones para  $E'$  y  $t'$  se obtiene:

$$[q_{cr}]_c = 1.6 \frac{AE}{R^2} \frac{r_g}{L} \dots\dots (57)$$

## 6.5 INESTABILIDAD DE LA SECCION TRANSVERSAL DEL MIEMBRO.

### 6.5.1 PAREDES CURVAS.

Los casos más generales que pueden existir son:

- A) Presión externa.
- B) Torsión.
- C) Compresión.
- D) Momentos.

A) Presión externa.

De desarrollos existentes en la literatura, se establecen expresiones que proporcionan las condiciones de inestabilidad.

$$(\sigma_y)_{cr} = \left[ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} (e/L)^2 \right] K_p \dots (58)$$

Donde: e= espesor de la pared del miembro.  
 L= longitud del miembro.  
 K<sub>p</sub>=factor.

Para comparar resultados teóricos con resultados experimentales, se ha establecido un parámetro  $z=L^2(1-\nu^2)^{(1/2)}/(re) \dots (59)$ , que aparece en la gráfica de la fig. 6.5, donde los valores teóricos y experimentales coinciden en los tubos intermedios.

B) Torsión.

$$\tau_{cr} = \left[ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} (e/L)^2 \right] K_t \dots (60)$$

Donde K<sub>t</sub> resulta:

Para tubos cortos  $K_t \cong 5.6 \dots (61)$

Para tubos intermedios  $K_t \cong 0.85 z^{(3/4)} \dots (62)$

Para tubos largos  $K_t \cong 3.26 z (e/r)^{(1/2)} / (\pi^2(1-\nu^2)^{(1/4)}) \dots (63)$

Donde z es el parámetro ya definido anteriormente y r es el radio del tubo.

Los resultados teóricos y experimentales coinciden, como se ve en la gráfica de la fig. 6.6

C) Compresión.

En la mayor parte de la literatura es común encontrar que:

$$(\sigma_x)_{cr} = \left[ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} (e/L)^2 \right] K_c \dots (64)$$

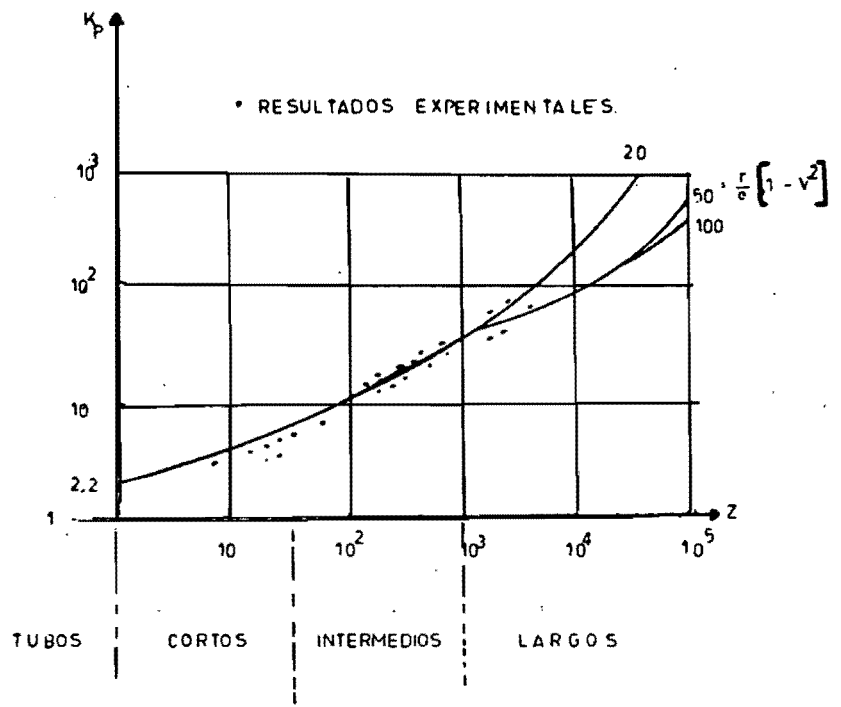
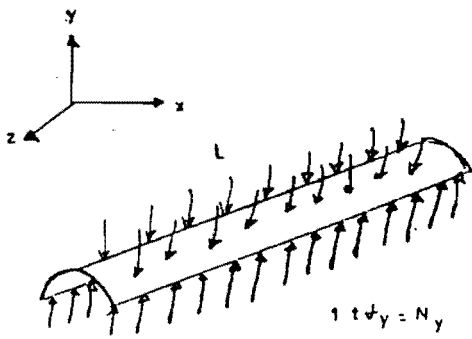


FIG. 6.5 PRESION EXTERNA

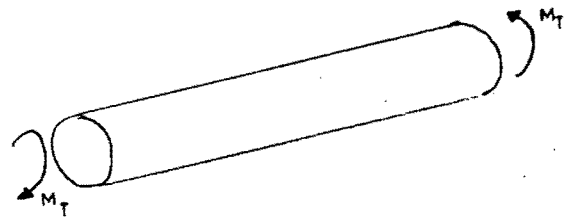
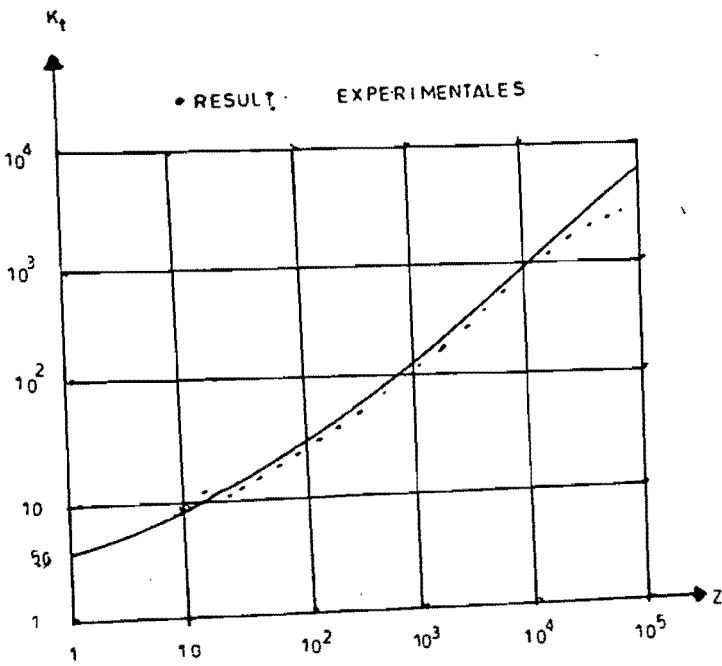


FIG. 6.6 TORSION.

Para  $z > 2.83$  hasta tubos intermedios,  $K_c = 0.7027 \dots (65)$

Y para tubos largos

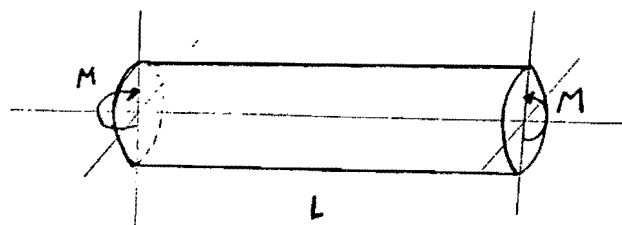
$$(\sigma_x)_{cr} = F E (e/r) \dots (66)$$

Donde  $F = [ 3 (1 - \nu^2) ]^{-1/2} \dots (67)$  para  $\nu = 0.3$   $F = 0.6052$

Experimentos muestran que el valor de  $F$  varía de acuerdo con la relación  $(r/e)$ , los cuales modifican el valor de  $F$ , como se observa en la tabla siguiente. La diferencia entre  $F$  y  $F$  experimental =  $F_e$  se debe a la configuración deformada; para valores pequeños de  $(r/e)$  es válido considerar que el valor de  $F$ , se obtiene de la ec. (67).

| $r/e$ | $F_e$ | $F_e/F$ |
|-------|-------|---------|
| 500   | 0.187 | 0.31    |
| 1000  | 0.157 | 0.26    |
| 1600  | 0.115 | 0.19    |
| 2000  | 0.101 | 0.17    |
| 3000  | 0.086 | 0.14    |

D) Momentos.



$$M_{cr} = \alpha \frac{E}{(1 - \nu^2)} r t^2 \dots (68)$$

Para tubos cortos e intermedios  $\alpha = 1.1400$   
 Para tubos largos  $\alpha = 2 \sqrt{2} \pi / 9 = 0.9873$

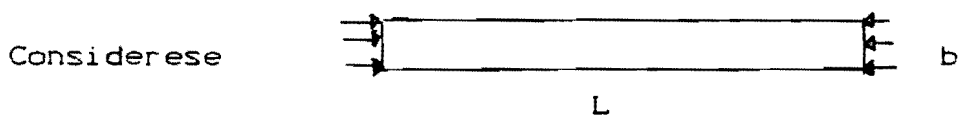
Para la combinación de dos o más acciones simultáneas existen desarrollos empíricos en la literatura, para relacionar lo teórico y lo experimental, particularmente cuando la compresión axial predomina.

6.5.2 PAREDES PLANAS.

Los casos mas generales que pueden existir son :

- A) Compresión.
- B) Cortante.
- C) Flexión.

A) Compresión.



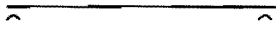


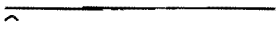

$$(\sigma_x)_{cr} = \left[ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} (e/b)^2 \right] Q_c \dots (69)$$

Donde : e = espesor de la placa.

$Q_c$  = Factor que depende de la relación e/b, el tipo de configuración que se formará, la relación de aspecto L/b y el tipo de apoyo en la placa.

Se han obtenido valores de  $Q_c$  como minimos, que corresponden a las condiciones más desfavorables que pudiesen existir en la placa, donde sus condiciones de apoyo son significativas, como se muestra en la siguiente tabla.

Valores de  $Q_c$  mínimos.

| caso | tipo de apoyo  | $Q_c$ |
|------|--|-------|
| 1    | Bordes libremente apoyados                     | 4.000 |
| 2    | Un borde libremente apoyado y otro empotrado.  | 5.420 |
| 3    | Dos bordes empotrados                          | 6.970 |
| 4    | Un borde libremente apoyado y otro libre.      | 0.425 |
| 5    | Un borde empotrado y otro libre               | 1.277 |

Aunque el esfuerzo crítico para la sección se puede encontrar por partes de la placa, también existen planteamientos para encontrar el valor de  $Q_c$  al considerar la sección completa. El valor de  $Q_c$  queda definido por  $\sqrt{Q_c} = a_1 + a_2 / (a_3 \zeta + a_4)$ , donde los valores "a" son ctes. que dependen de la forma del perfil y  $\zeta$  es un parámetro geométrico que depende de las dimensiones relativas de las placas que forman el perfil. En las tablas de las fig 6.8 y 6.9 (ref 9.9) se condensan resultados publicados.

El comportamiento de placas sometidas a compresión después de alcanzar el esfuerzo crítico, es diferente al que se presenta en columnas. Al iniciarse la inestabilidad, se provoca una redistribución de esfuerzos en la placa, que provoca la aparición de esfuerzos de membrana en direcciones ortogonales, que modifican las condiciones de equilibrio. Por lo tanto en general las placas puede aumentar su



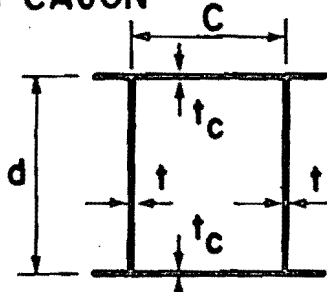
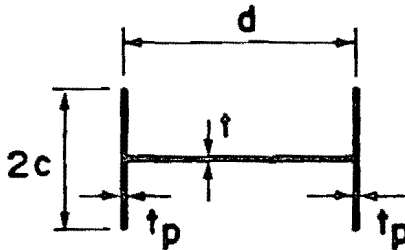
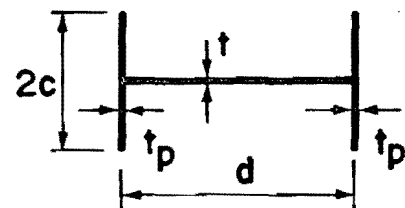
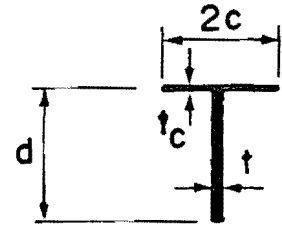
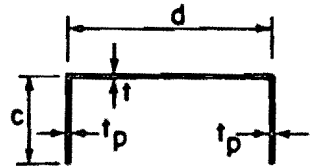
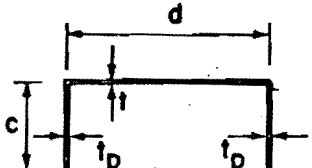
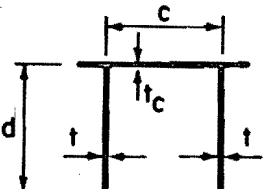
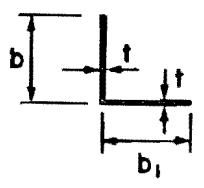
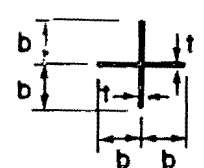
| Tipo de sección transversal   | Coeficiente de restricción $\zeta$  | $\sqrt{Q_c}$                  |
|---|---|-------------------------------|
| <p><b>ALMAS DE SECCIONES EN CAJON</b></p>  | $\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{0.38}{1 - \frac{t^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>válido para <math>\frac{t_c}{t_c d} \leq 1</math></p>                                 | $2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$   |
| <p><b>ALMAS DE SECCIONES I</b></p>         | $\zeta = \frac{t^3}{t_p^3} \frac{0.16 + 0.0056(d/c)^2}{1 - 9.4 \frac{t^2}{t_p^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>válido para <math>9.4 \frac{t^2 c^2}{t_p^2 d^2} \leq 1</math></p> | $2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$   |
| <p><b>PATINES DE SECCIONES I</b></p>     | $\zeta = 2 \frac{t_p^3 d}{t^3 c} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t_p^2}{t^2} \frac{d^2}{c^2}}$ <p>válido para <math>9.4 \frac{t^2 c^2}{t_p^2 d^2} \geq 1</math></p>            | $0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$ |
| <p><b>ALMAS DE SECCIONES T</b></p>       | $\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>válido para <math>0.106 \frac{t^2 c^2}{t_c^2 d^2} \leq 1</math></p>                | $0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$ |

FIG. 6.8 FORMULAS PARA DETERMINAR EL FACTOR  $Q_c$  EN PERFILES.

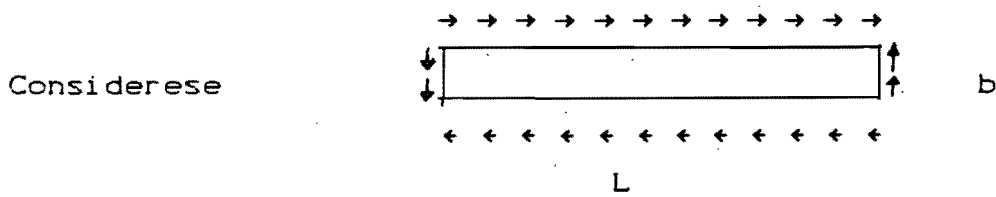
| Tipo de sección transversal   | Coeficiente de restricción $\zeta$  | $\sqrt{K}$   |
|---|---|--|
| <p>ALMAS DE CANALES</p>        | $\zeta = 2 \frac{t_p^3}{t_c^3} \frac{0.16 + 0.0056(d/c)^2}{1 - 9.4 \frac{t_p^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>válido para <math>9.4 \frac{t_p^2 c^2}{t_c^2 d^2} \leq 1</math></p> | $2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$  |
| <p>PATINES DE CANALES</p>      | $\zeta = \frac{t_p^3 d}{t_c^3 c} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t_p^2}{t_c^2} \frac{d^2}{c^2}}$ <p>válido para <math>9.4 \frac{t_p^2 c^2}{t_c^2 d^2} \geq 1</math></p>                | $0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$  |
| <p>ALMAS DE SECCIONES U*</p>  | $\zeta = \frac{t_c^3 c}{t_c^3 d} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t_c^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>válido para <math>9.4 \frac{t_c^2 d^2}{t_c^2 c^2} \geq 1</math></p>                | $0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$  |
| <p>ANGULOS</p>               |   | $b_1/b = 1: 0.652$ $b_1/b = \frac{2}{3}: 0.711$ $b_1/b = \frac{1}{2}: 0.754$ |
| <p>SECCIONES EN CRUZ</p>     |   | $0.652$  |

\* La fórmula no es aplicable si los bordes inferiores de las almas están unidos entre sí por diagonales o placas interrumpidas

FIG. 6.9 FORMULAS PARA DETERMINAR EL FACTOR  $Q_c$  EN PERFILES.

capacidad, por aparición de las fuerzas de membrana  $N_y$  y  $N_{xy}$ .

B) Cortante.



$$[\tau_{xy}]_{cr} = \left[ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} (e/b)^2 \right] Q_v \dots (70)$$

Donde  $e$  = espesor de la placa.

$Q_v$  es función de las condiciones de apoyo y de la relación de aspecto  $L/b$ .

Para placas libremente apoyadas, se puede calcular  $Q_v$  con las siguientes expresiones:

$$\text{si } \alpha \geq 1 \quad Q_v = 5.34 + 4 / \alpha^2 \dots (71)$$

$$\text{si } \alpha \leq 1 \quad Q_v = 4.00 + 5.34 / \alpha^2 \dots (72) \quad \text{donde } \alpha = L/b$$

Para placas empotradas en sus bordes, se puede calcular  $Q_v$  con la siguiente expresión:

$$Q_v = 8.98 + 5.60 / \alpha^2 \dots (73)$$

C) Flexión.

Se calcula con la expresión:

$$(\sigma_f)_{cr} = \left[ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} (e/b)^2 \right] Q_f \dots (74)$$

Donde el valor de  $Q_f$  se puede tomar igual a 24 para bordes libremente apoyados y  $Q_f = 42$  para bordes empotrados.

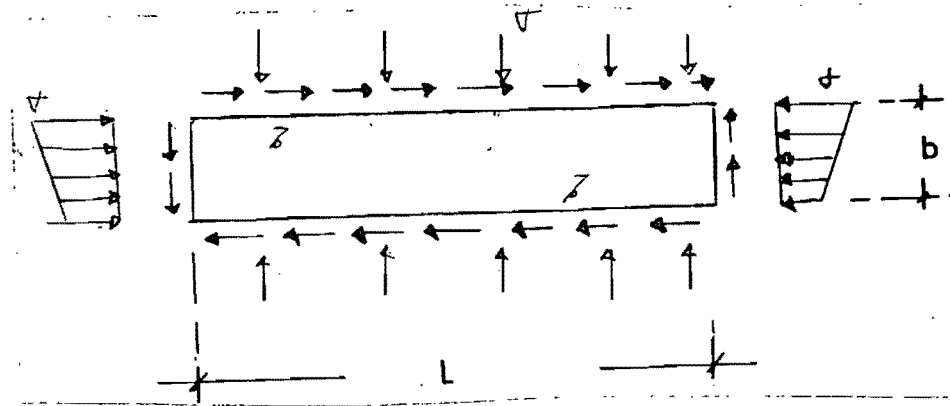
Para la inestabilidad de placas a esfuerzos combinados, se recurre a la fig. 6.10. El esfuerzo crítico en este tipo de placas se puede valorar en función de 3 parámetros:

$$N_f = \sigma_f / (\sigma_f)_{cr} \quad N_c = \sigma_c / (\sigma_c)_{cr} \quad \text{y} \quad N_v = \tau_{xy} / (\tau_{xy})_{cr}$$

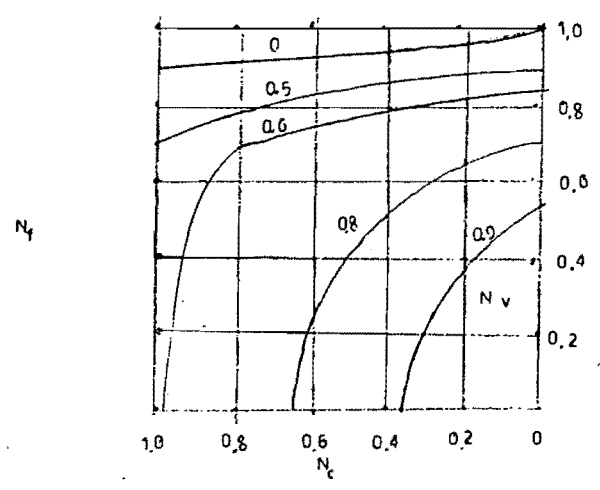
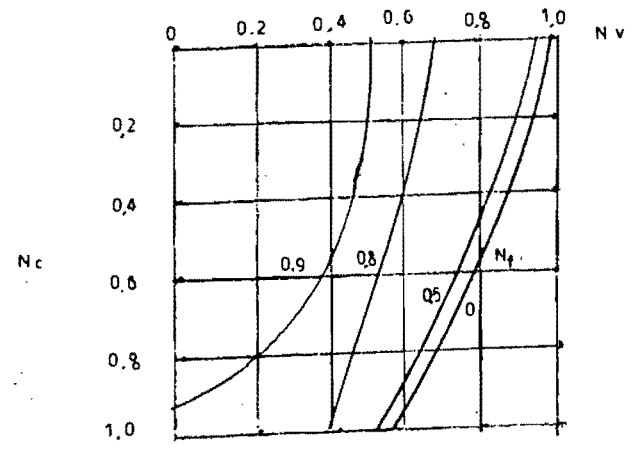
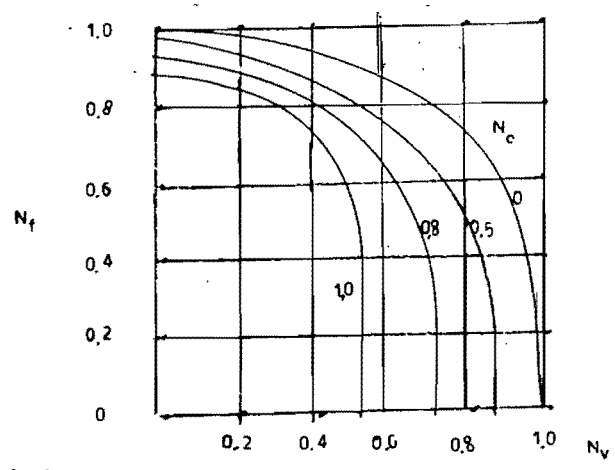
Cuando el estado de esfuerzos en una placa es tal que  $N_f = 0$ , la condición crítica se alcanza cuando  $N_c + N_v^2 = 1$  y cuando sólo existe simultáneamente  $N_f$  y  $N_v$  entonces la inestabilidad se alcanza, cuando  $N_f^2 + N_v^2 = 1$ .

En una placa, el esfuerzo crítico de inestabilidad  $\sigma_f$  depende de la intensidad del esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$  que actúa simultáneamente y, el cortante crítico es función de la magnitud del esfuerzo normal; cada uno de ellos disminuye cuando aumenta el otro, y crece en el caso contrario. Esto sucede para cualquier combinación de fuerzas de membrana.

Cuando existen simultáneamente las 3 fuerzas, la condición crítica se calcula mediante una relación no lineal, que aparece en nomogramas mostrados en la fig. 6.10.



(a) Esfuerzos combinados.



(b) Relación no lineal para los esfuerzos combinados.

FIG. 6.10

## 7.- APLICACION A ESTRUCTURAS PARTICULARES.

### 7.1 LA FALLA DEL DOMO DE BUCAREST EN 1963.

Se proporciona una breve descripción de una cúpula reticular metálica, de 93.50 m. de diámetro y 19.107 m. de altura; se describen datos de: geometría, cargas consideradas y verificación de la inestabilidad elástica.

#### 7.1.1 INTRODUCCION.

Durante 1961 se elaboró un proyecto, y se realizó su construcción en Bucarest. Era un grandioso pavellón, para las exhibiciones de la economía nacional de la gente de Rumania; sin embargo, posteriormente se utilizó como lugar para juntas y ejecuciones públicas, con una capacidad total de 12000 personas.

El pavellón presentó un aspecto imponente, propio a su volumen y elegancia, debido a las combinaciones de las líneas curvas y rectas de las cuales se formó.

La forma general del cascarón, en el plano horizontal fué circular, con dos partes principales vistosas: la estructura perimetral de concreto reforzado, con paredes de vidrio y el domo central, el cual consistió de una estructura reticular metálica, cubierta con hojas de aluminio. La estructura fue diseñada y calculada por el Prof. Dr. Eng. F. Lederer y realizada en Brno Checoslovaquia (ref 9.28).

En la etapa de diseño del proyecto general, se verificó el domo para prever las diferencias en condiciones climáticas; los cambios en las secciones transversales y en la calidad de los materiales entregados por los fabricantes; la operación y se dio valor a la solución de arquitectura general.

En este domo se consideraron las variaciones de las cargas, como acumulación de nieve y acciones sísmicas, se verificó la estabilidad

elástica, con criterios erróneos puesto que el domo falló. Además se hicieron pruebas experimentales. El montaje fue realizado en un tiempo relativamente corto. La estructura metálica del domo, con un diámetro de 93.5 m., presentó en la parte superior, un domo pequeño, en el nivel 18.95 m., con una estructura anular de concreto reforzado, en la base.

Ambos domos se construyeron con tubos de acero, de 38 - 102 mm. de diámetro, con curvatura a lo largo de círculos paralelos. El patrón de división de la retícula se hizo a base de triángulos equiláteros.

Además de su belleza arquitectónica, el domo requirió pequeñas cantidades de material. Los elementos resistentes representaron, en proyección horizontal,  $21.3 \text{ kg/m}^2$ , lo cual es comparable con la cantidad de acero usada para reforzar un cascarón cilíndrico de concreto con 21 - 24 m. de claro. El peso total del metal en el domo, fué de  $32 \text{ kg/m}^2$ .

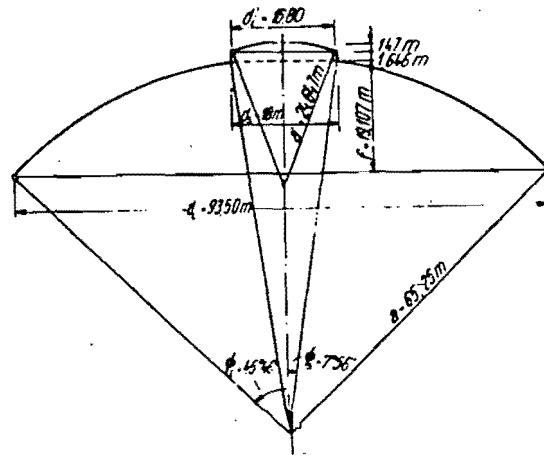
### 7.1.2 GEOMETRIA.

La geometría principal de los domos (vease la fig. 7.1) es la siguiente:

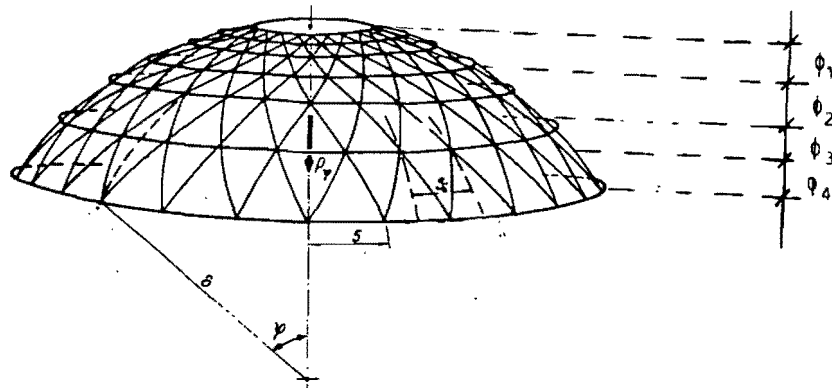
- Radio del domo esférico grande a = 65.250 m.
- Diámetro de la base del círculo d<sub>i</sub> = 93.500 m.
- Diámetro del círculo paralelo más alto d<sub>s</sub> = 18.000 m.
- Altura del domo f = 19.107 m.

$$\begin{aligned} \tan \phi_s &= 9\text{m.} / 65.25\text{m.} & \phi_s &= 7.85^\circ & \sin \phi_i &= 93.5\text{m.} / (2a) & \phi_i &= 45.76^\circ \\ \cos \phi_s &= H/a & \cos \phi_i &= H'/a & \Rightarrow & f = H - H' &= a (\cos \phi_s - \cos \phi_i) \\ f &= 19.107 \text{ m.} \end{aligned}$$

- Radio de los círculos diagonales r = 44.180 m.
- Radio del domo pequeño a' = 24.647 m.
- Diámetro del círculo base del domo pequeño d<sub>i</sub>' = 16.800 m.
- Altura del domo pequeño f' = 1.470 m.
- Area total en el plano horizontal A = 6866.0 m<sup>2</sup>.



(a) Geometría de los domos.

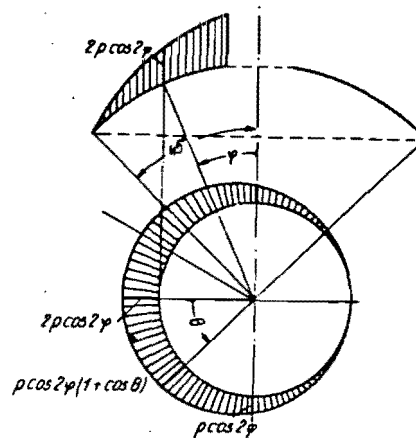


(b) Domo grande.

FIG. 7.1

(a) Variación a lo largo del meridiano.

(b) Variación en el plano.



Donde

$$\rho = 200 \text{ kg/cm}^2$$

FIG. 7.2 ACUMULACION DE NIEVE.



La fig. 7.1 (b) muestra que la longitud  $S_i$  resulta:

$$S_i = \frac{2 \pi r_i}{n}$$

donde:  $r_i$  = Radio de los círculos diagonales.

$n$  = número de intervalos = 128.

Se usaron 4 tipos de tubos en el domo grande, con diámetros,  $\phi_1$ (60/4 mm.),  $\phi_2$ (70/4 mm.),  $\phi_3$ (83/4 mm.) y  $\phi_4$ (102/4 mm.).  $\phi_1$  se usó desde el círculo paralelo inferior, de radio 18 m., hasta la parte superior.

### 7.1.3 CARGAS.

Las cargas que se usaron para verificar el domo fueron:

- a) El peso propio (elementos resistentes, recubrimiento y aislamiento)
- b) El peso de algunos elementos de exhibición, colgantes de la linternilla.
- c) La nieve uniformemente distribuida o
- d) La nieve acumulada.
- e) El viento, con presión y succión.
- f) La acción sísmica.

Fué posible investigar la siguiente información acerca de la evaluación y distribución de la carga.

a) El peso propio de los domos pequeño y grande incluyó el peso de los tubos de los diferentes diámetros; pestañas y mangas; la soldadura y pintura; el recubrimiento de la linternilla; la escalera del domo; resultó un peso total de 172 ton. Debido al pequeño tamaño de los triángulos, en comparación con el radio del domo ( $S_{max.} = 2.295$  m.), se puede aceptar que esta carga es transmitida como una carga

uniformemente distribuida sobre la superficie curva; se obtiene una intensidad de  $21.3 \text{ kg/m}^2$ . La cubierta y el aislamiento para el calor y el sonido suman una carga extra de  $31.9 \text{ kg/m}^2$ ; por lo que se consideró que  $q = 21.3 + 31.9 \cong 55 \text{ kg/m}^2$ .

El anillo de la linternilla, con su plataforma, pesaron 25.40 ton., mientras la base del anillo ( $\phi 307/20 \text{ mm.}$ ) representó un peso total de 54.9 ton.

b) El peso de los elementos de exhibición, se consideró igual a 10 ton.

c) La nieve se consideró como uniformemente distribuida, con intensidad  $P_s = 100 \text{ kg/m}^2$ .

d) Para considerar la acumulación de nieve, se aceptó que se acumula sobre un cara, como resultado de una tormenta de nieve. La variación se muestra en la fig. 7.2.

e) La acción del viento se consideró con presiones y succiones, con variación senoidal, a lo largo de los meridianos y a lo largo de los círculos paralelos.

$$P_v = P \sin \gamma \cos \theta \quad \text{donde } P = 70 \text{ kg/m}^2.$$

f) La acción sísmica se consideró como una carga de masa horizontal estáticamente aplicada igual a  $1/20$  de la carga permanente:

$$q_h = q/20 = 2.75 \text{ kg/m}^2.$$

Las consecuencias de las variaciones de temperatura no se tomaron en cuenta, ya que los elementos resistentes se aislaron contra el calor.

#### 7.1.4 VERIFICACION DE LA INESTABILIDAD ELASTICA.

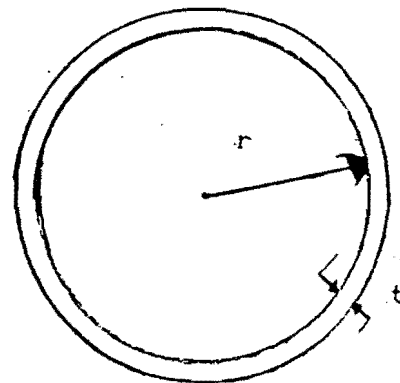
La estructura sufrió una falla catastrófica después de una tormenta de nieve que depositó hasta un metro de nieve.

El patrón de división que se utilizó fue con los tubos traslapados uno sobre otro en los nudos, con lo que la rigidez de la junta no fue adecuada.

Dado que la carga de nieve durante la falla pudo haber sido igual a  $100 \text{ kg/m}^2$ , así la carga total fué igual a  $155 \text{ kg/m}^2$ . Mediante el análisis aquí desarrollado, se demostrará porque falló el domo. Como ya se mencionó se utilizaron 4 tipos de tubos, por ello aquí se tomará el más desfavorable, que es el de  $\phi_1(60/4 \text{ mm.})$ .

$$\text{Entonces } S_i = \frac{2 \pi r_i}{n} = \frac{2 \pi (18\text{m.})}{128} = 88.36 \text{ cm.}$$

Datos:



Sección de las barras.

$$L = 88.36 \text{ cm.}$$

$$\phi_1 = 60/4 \text{ mm.} = 6/0.4 \text{ cm.}$$

$$A = \pi (D_e^2 - D_i^2) / 4 = 7.037168 \text{ cm}^2$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2.$$

$$I = \pi (R_e^4 - R_i^4) / 4 = 27.726440 \text{ cm}^4.$$

$$R = \text{radio del domo} = 6525 \text{ cm.}$$

## DETERMINACION DE PROPIEDADES ELASTICAS DEL CONTINUO EQUIVALENTE.

Al aplicar las ecuaciones (21), (22a) y (22c):

$$(21) \quad t' = 2 \sqrt{3} r_g \quad \text{donde} \quad r_g = \sqrt{I/A} = 1.984943 \text{ cm.}$$

$$t' = 6.876044 \text{ cm.}$$

$$(22a) \quad E' = \frac{A E}{3 L r_g} = 26751.741930 \text{ kg/cm}^2.$$

$$(22c) \quad \nu' = 1/3.$$

## CALCULO DE CARGAS CRITICAS.

### Inestabilidad Local.

$$\text{Al aplicar (40) } [q_{cr}]_a = \frac{2 \sqrt{3} \pi^2 E I}{R L^3} = 4213.22 \text{ kg/m}^2.$$

### Inestabilidad Súbita.

El parámetro  $\lambda$  definido en 2.3b), resulta:

$$\lambda = [12(1 - \nu'^2)]^{(1/4)} a / \sqrt{t' R} \quad a = d_i/2 = 4675 \text{ cm.}$$

$$\lambda = 39.8868 > 5$$

Como  $\lambda > 5$ , según las pruebas experimentales en continuos, puede existir inestabilidad súbita, como se observa en la fig. 2.4.

Según el desarrollo previamente presentado en este trabajo, la inestabilidad súbita se elimina, cuando se cumple la condición impuesta en (55a). Se considera que la junta tiene apoyos

desplazables:

$$r_g \leq 0.184 h \Rightarrow h \geq 5.42 r_g = 10.75 \text{ cm.}$$

Así  $h \geq 10.75$  cm. para que no se presente la inestabilidad súbita.

El valor de  $h$  del domo se desconoce, por la falta de detalles publicados, pero existe la posibilidad de que no tuvo la dimensión necesaria, además los tubos se sobreponían sobre cada nudo.

### Inestabilidad General.

Al aplicar (56)  $[q_{cr}]_c = C \frac{E' t^2}{R^2}$

De la gráfica de la fig. 2.6, para  $\lambda = 39.8868$  el valor de  $C$  será mayor que 0.2, y se considera 0.3 en lo que sigue:

$$\Rightarrow [q_{cr}]_c = 89.12 \text{ kg/m}^2$$

Este valor es más pequeño que la combinación de carga permanente + carga de nieve uniformemente distribuida:

$$88.12 \text{ kg/m}^2 < 155 \text{ kg/m}^2$$

Por lo anterior, es muy probable que el colapso del domo haya sido debido a una inestabilidad general de la estructura.

### Inestabilidad de la Sección Transversal del miembro.

A) Presión Externa.

Al aplicar (58)  $[\sigma_y]_{cr} = \left[ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} (e/L)^2 \right] K_p$

El valor del parámetro  $z$  resulta (ec. 59):

$$z = L^2 (1 - \nu^2)^{(1/2)} / (r_e) \quad \text{si } \nu = 1/3 \Rightarrow z = 7.077 * 10^3$$

Lo que corresponde como tubo largo, el valor que le corresponde de  $K_p$  de la gráfica de la fig. 6.5 es:

$$\Rightarrow K_p = 70 \quad \Rightarrow [\sigma_y]_{cr} = 2655.25 \text{ kg/cm}^2$$

B) Torsión.

$$\text{Al aplicar (60)} \quad [\tau]_{cr} = \left[ \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} (e/L)^2 \right] K_t$$

De la fig. 6.6  $K_t \cong 800$  o de (63)  $K_t \cong 800$ .

$$\Rightarrow [\tau]_{cr} = 30345.75026 \text{ kg/cm}^2$$

C) Compresión.

$$\text{Por ser un tubo largo } (\sigma_x)_{cr} = F E (e/r)$$

Ya que  $(r/e) = (2.6 \text{ cm.} / 0.4 \text{ cm.}) = 6.50$ , el valor de  $F_e$  debe ser próximo a  $F$ .

$$\Rightarrow (\sigma_x)_{cr} = 186215.38 \text{ kg/cm}^2$$

D) Momentos.

$$\text{Al aplicar (68)} \quad M_{cr} = \alpha \frac{E}{(1 - \nu^2)} r t^2$$

Donde  $\alpha = 0.9873$  por ser un tubo largo.

$$M_{cr} = 9\ 241.128\ \text{kg}\cdot\text{m}.$$

El cual es un valor grande que asegura estabilidad en las paredes de las barras de este cascarón debido a momentos.

Con estos valores obtenidos, se pueden obtener las cargas sobre el cascarón. Así el problema del colapso de este domo no fue por inestabilidad de las paredes de los miembros.

#### 7.1.5 Conclusión.

La inestabilidad general súbita parece ser la causa de la falla. El domo falló mientras fue cargado por aglomeraciones locales de nieve, en baja temperatura exterior y durante una tormenta de nieve; hubo altas acumulaciones cerca de la linternilla y en la base del domo. Se puede pensar que la falla se debió a comportamiento no lineal producido por desplazamientos, causados por la concentración de una gran cantidad de nieve en una área pequeña del domo, incrementado por el posible deslizamiento de las barras en sus juntas.

Como hubo grupos de barras pandeadas en varias zonas, no se puede definir una zona en particular donde se haya iniciado la falla.

El factor de seguridad resultó de 76 % del crítico bajo carga uniforme, por lo que los calculos indican que las cargas de diseño se excedieron, esta es la causa principal de la falla, que generó la inestabilidad.

## 7.2 DOMO ESFERICO 1

Se construyó un domo esférico, con barras de igual longitud y sección de aluminio, con subdivisión en triángulos esféricos. Se trata de determinar las cargas de inestabilidad.

### Datos.

$$R = 4421.115 \text{ cm.}$$

$$E = 0.7 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$S = \text{Longitud del semiarco del domo} = 4127.1321 \text{ cm.}$$

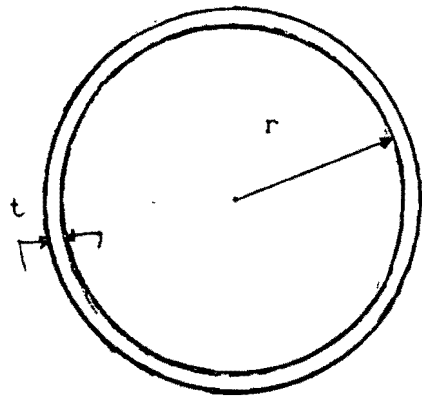
$$A = 10.4316 \text{ cm}^2$$

$$I = 39.0033 \text{ cm}^4$$

$$r = 2.4117 \text{ cm.}$$

$$t = 0.611 \text{ cm.}$$

$$L = 171.953 \text{ cm.}$$



Sección de las barras.

### DETERMINACION DE LAS PROPIEDADES ELASTICAS DEL CONTINUO EQUIVALENTE.

$$t' = 2 \sqrt{3} \quad r_g \quad r_g = 1.933638 \text{ cm.} \quad \Rightarrow \quad t' = 6.698319 \text{ cm.}$$

$$E' = \frac{A E}{3 L r_g}$$

$$E' = 7\,320.534328 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{y } \nu' = 1/3 .$$

### CALCULO DE CARGAS CRITICAS.

#### Inestabilidad Local.

$$\text{Al aplicar } 40) \quad [q_{cr}]_a = 415.27 \text{ kg/m}^2.$$



## Inestabilidad Súbita.

Se calcula el valor de  $\lambda$  :

$$\theta = .S * 360 / (2 \pi R) = 53.49^\circ \quad \text{sen}\theta = a/R \quad \Rightarrow \quad a = R \text{sen}\theta = 3553.48 \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow \lambda = 37.3174$$

Como  $\lambda > 5$ , existe la posibilidad de inestabilidad súbita, pero ésta se elimina si se satisface la condición  $h \geq 5.42 r_g = 10.48 \text{ cm.}$  (se considera que la junta tiene apoyos desplazables.).

Al cumplir con  $h = 10.48 \text{ cm.}$ , y aplicar la ec. (53b) se obtiene:

$$W_{b2} = 44.13 \frac{E I}{L^3} h = 2483.5067 \text{ kg.}$$

Por tanto

$$[q_{cr}]_b = \frac{W_{b2}}{A_{tr}} \quad \text{donde} \quad A_{tr} = \sqrt{3} L^2 / 2$$

$$A_{tr} = 25606.4956 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow [q_{cr}]_b = 969.87 \text{ kg/cm}^2$$

Si se cumple con una  $h > 10.48 \text{ cm.}$ , el valor de  $[q_{cr}]_b$  cambiara. Por ejemplo si  $h = 15 \text{ cm.}$  se tendrá:

Al aplicar la ec. (55)  $h' = 6.2001 \text{ cm.}$

De (53b) resulta:

$$W_{b2} = (2491.8695 + 2085.3636) \text{ kg.} = 4577.2331 \text{ kg.}$$

$$\Rightarrow [q_{cr}] = 1787.5281 \text{ kg/cm}^2.$$

### Inestabilidad General.

Al aplicar (56) con  $C = 0.35$  se tiene:

$$[ q_{cr} ]_c = 58.81 \text{ kg/m}^2.$$

La carga crítica uniformemente distribuida será igual a  $58.81 \text{ kg/m}^2$  y, se deberá cumplir con la condición de  $h > 10.48 \text{ cm}$ . para evitar el problema de la inestabilidad súbita.

### Inestabilidad de la Sección Transversal del miembro.

A) Presión Externa.

El valor del parámetro  $z$  resulta (ec. (59)):

$$z = 18\ 918.15$$

Lo que corresponde como tubo largo. El valor que le corresponde de  $K_p$  de la gráfica de la fig. 6.5 es:

$$K_p = 100$$

Al aplicar (58):

$$[ \sigma_y ]_{cr} = 817.7715 \text{ kg/cm}^2$$

B) Torsión.

De la fig. 6.6  $K_t \cong 3000$  o de (63)  $K_t \cong 3000$

Al aplicar (60):

$$[ \tau ]_{cr} = 24\ 533.14 \text{ kg/cm}^2$$

### C) Compresión.

Por ser tubo largo se aplica (66), ya que  $(r/e) = 3.95$ , el valor de  $F_e$  debe ser próximo a  $F$ .

$$\Rightarrow [\sigma_x]_{cr} = 107\,328.46 \text{ kg/cm}^2$$

### D) Momentos.

Al aplicar (68) con  $\alpha = 0.9873$

$$M_{cr} = 7\,000.11 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

El cual es un valor grande que asegura estabilidad en las paredes de las barras de este cascarón debido a momentos.

Con estos valores obtenidos, se puede obtener las cargas sobre el cascarón. Estas cargas resultan mayores que  $[q_{cr}]_c$ .

### CONCLUSION.

Los calculos indican que la carga uniforme de inestabilidad es igual a  $58.81 \text{ kg/cm}^2$ . Este valor puede aumentar considerablemente, si se cambia el material de las barras, por ejemplo si es acero, se obtiene una carga uniforme de inestabilidad igual a  $168.04 \text{ kg/cm}^2$ . La inestabilidad súbita desaparece al cumplir  $h \geq 10.48 \text{ cm}$ . y la inestabilidad de paredes de las barras, no ocurre bajo la carga uniforme crítica aplicada.

## 7.3 DOMO ESFERICO 2.

### 7.3.1 INTRODUCCION.

Se construyó un domo esférico en el Polo Sur, los trabajadores laboraron bajo grandes dificultades en este domo, que ahora es la parte central de la Nueva Estación Polar de Sur Amudsen-Scott. El domo, con dimensiones de 16.46 m. de altura y 50 m. de diámetro, sirve como una pantalla contra viento y nieve para un conjunto de tres edificios prefabricados de aluminio, que protegen a gente y equipo, y además, proporciona una atmósfera placentera de trabajo. Dos edificios sirven como cuartel general de ciencia, centro de comunicación, cuartel para la tripulación científica y mantenimiento de personal.

La nueva estación ofrece calefacción, agua fría y caliente, inodoros y pisos alfombrados. Por casi 20 años, las cabañas de la estación antigua sirvieron como albergue para cientos de científicos comprometidos al estudio de meteorología, sismología, geología, geo-magnetismo, física atmosférica, gravedad, fisiología y psicología humana. Al pasar los años, se acumuló nieve y hielo alrededor de las cabañas hasta que éstas quedaron completamente enterradas. Por esta razón, la fundación de la Ciencia Nacional encomendó al Comando de Ingeniería de Instalaciones Navales (NAVFAC) la tarea de diseñar una estación nueva y mejor.

### 7.3.2 DISEÑO.

Los arquitectos e ingenieros de la NAVFAC consideraron 6 posibles conceptos para el refugio ideal del Polo Sur, estos son:

- \* Ligero para su fácil transporte por avión y barco.
- \* De armado fácil.
- \* Formado de materiales que mantuvieran su resistencia a bajas temperaturas.
- \* Con suficiente espacio para acomodar las estructuras de dos pisos dentro de él, con espacio para construcciones futuras.
- \* Fácil en el montaje bajo climas adversos.

- \* Prevenir la pérdida de calor del interior de la estructura.

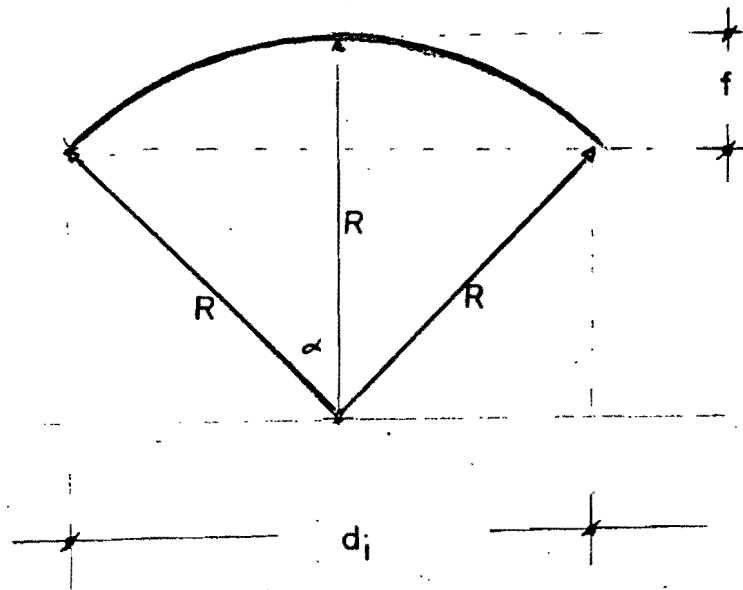
Se escogió un domo de aluminio extruido con geometría esférica. Este conto con los siguientes parámetros de diseño:

- \* Pesa unicamente  $12.22 \text{ kg/m}^2$ .
- \* fueron 6500 componentes.
- \* Se construyó de aluminio extruido, que, por el contrario del acero, se vuelve más resistente a bajas temperaturas.
- \* El domo puede soportar vientos de  $201 \text{ km/hr.}$  y cargas uniformes de  $586.5 \text{ kg/m}^2$ .
- \* Con su altura de  $16.46 \text{ m.}$  y diámetro de  $50 \text{ m.}$ , caben tres estructuras interiores.
- \* Se emplearon componentes clasificados por número y color, por lo que el montaje se hizo fácilmente.
- \* El domo resolvió el problema del escape de calor, ya que es ventilado a través de aberturas en la parte superior del domo, y bombas traen aire exterior para mantener la temperatura.
- \* Debido a su forma evita la acumulación de nieve.

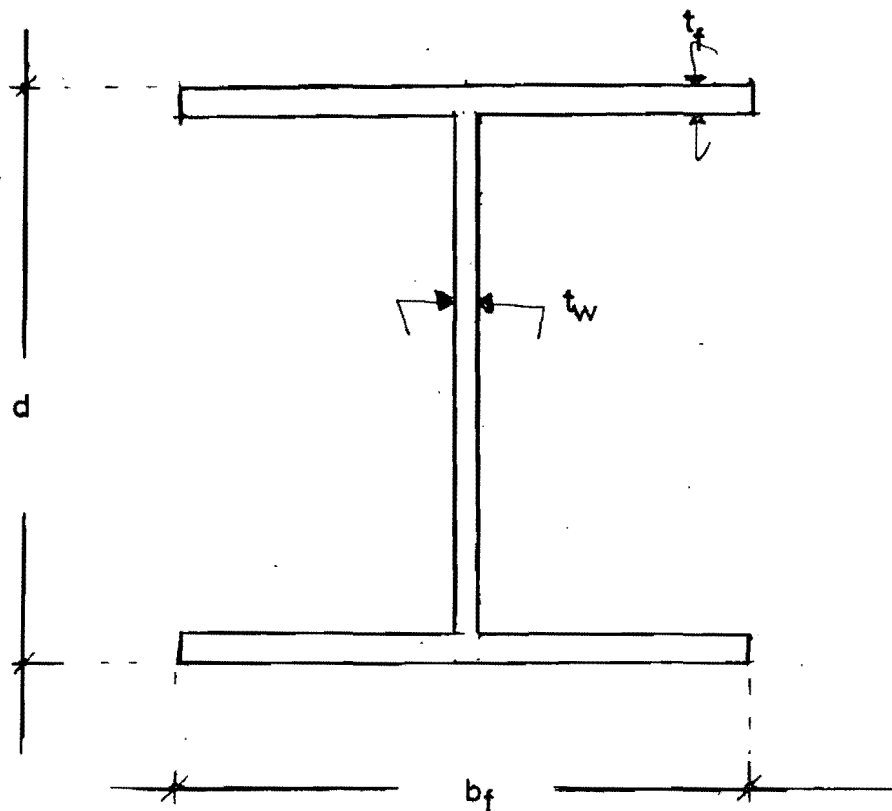
### 7.3.3 MONTAJE 1971-1972.

El domo fue diseñado y fabricado de acuerdo a especificaciones de el NAVFAC. La construcción preliminar empezó durante el verano Antártico (noviembre-enero) de 1971-1972, las cimentaciones para el domo fueron el problema más difícil de la construcción. Se usó una grúa suiza para nieve, con objeto de procesar la nieve y trabajarla a una consistencia parecida a la del concreto, necesaria para soportar las zapatas de madera del domo y para poder instalar las líneas de drenaje.

La construcción se paralizó debido a la descompostura de muchos equipos y a la nieve blanda. El mantenimiento fue un gran problema, cuando no existían refacciones, las reparaciones tenían que hacerse en Christchurch, Nueva Zelanda, que se localiza a  $3541 \text{ Km.}$  del lugar de la construcción. A pesar de todos estos obstáculos, la cimentación se realizó con 72 zapatas de madera de  $0.65 \text{ m}^2$ , que se nivelaron y



(a) Geometría general.



(b) Sección de los miembros.

FIG. 7.3 DOMO ESFERICO 2.

alinearon alrededor de la circunferencia del domo. Con las zapatas listas, la armadura circular, consistente de anillos internos y externos se conectó y alineó a las zapatas de madera. El 4 de febrero de 1972, se tomó la decisión de parar la construcción y empezar a montar material para la próxima temporada.

#### 7.3.4 MONTAJE FINAL 1972-1973.

Con los problemas de cimentación resueltos, se procedió rápido y eficientemente durante la temporada 1972-1973. En noviembre el anillo base se limpió de nieve acumulada, se alineó con una exactitud de una pulgada y se comenzó el montaje final del domo.

Primero se ensambló el marco inferior del domo, que fácilmente se trabajó con escaleras de aluminio. Los trabajadores montaron 3 niveles o anillos de apuntalamiento a 4.9 m. sobre el nivel del terreno. El resto del domo se ensambló con una torre que descansaba sobre zapatas de madera en el centro del domo.

Al usar este método de la torre central, el domo se ensambló en triángulos equiláteros de 3.048 m. de abajo hacia arriba, con vigas H como la que se muestra en la fig. 7.3. En forma muy general así fue el montaje de este domo.

Para el 10 de febrero, se realizó la última conexión del domo y se colocó el revestimiento, con paneles triangulares de 0.127 cm. de aleación 3003 H-16. Para completar la instalación contra el ambiente, cada panel se cubrió con un sello contra nieve, así la estación Amundsen- Scott del Polo Sur se inauguró el 20 de enero de 1975.

#### 7.3.5 DATOS DE GEOMETRIA Y DE LA SECCION DE LAS VIGAS.

GEOMETRIA.

R= 2721.6 cm.

di= 5000 cm.

f= 1646 cm.

PROPIEDADES DE LA SECCION DE LAS VIGAS Y SU LONGITUD.

- A= 29.419 cm<sup>2</sup>
- d= 15.24 cm.
- bf= 15.227 cm.
- tf= 0.683 cm.
- tv= 0.597 cm.
- I= 1252.857 cm<sup>4</sup>
- L= 304.8 cm.
- E= 0.7 \* 10<sup>6</sup> kg/cm<sup>2</sup>

7.3.6 VERIFICACION DE LA ESTABILIDAD ELASTICA.

DETERMINACION DE LAS PROPIEDADES ELASTICAS DEL CONTINUO EQUIVALENTE.

- rg = 6.526 cm.
- t' = 22.607 cm.
- E' = 3450.982 kg/cm<sup>2</sup>
- v = 1/3

CALCULO DE CARGAS CRITICAS.

Inestabilidad Local.

Al aplicar (40)  $[ q_{cr} ]_a = 3891 \text{ kg/m}^2$

Inestabilidad Súbita.

Para conocer  $\lambda$ :  $a = d/2 = 2500 \text{ cm.} \Rightarrow \lambda = 18.214$

Como  $\lambda > 5$  existe la posibilidad de inestabilidad súbita, pero ésta se elimina si se satisface la condición  $h \geq 5.42 r_g = 35.4 \text{ cm.}$  (se considera que la junta tiene apoyos desplazables).

Al cumplir con  $h=35.4 \text{ cm.}$ , al aplicar (53b) se obtiene:

$$W_{b2} = 44.13 \frac{E I}{L^3} = 48\ 382.89 \text{ kg.}$$



$$\text{Adem\u00e1s } A_{tr} = \sqrt{3} L^2 / 2 = 80\,456.39 \text{ cm}^2.$$

$$\Rightarrow [q_{cr}]_b = 6\,013.55 \text{ kg/m}^2.$$

Al cumplir con una  $h > 35.40 \text{ cm.}$ , el valor de  $[q_{cr}]_b$  cambiara.

### Inestabilidad General.

Al aplicar (56) y con  $C = 0.38 \Rightarrow [q_{cr}]_c = 904.8 \text{ kg/m}^2$ .

La carga cr\u00edtica uniformemente distribuida podr\u00e1 ser igual a  $904.8 \text{ kg/m}^2$  y, se deber\u00e1 cumplir con la condici\u00f3n de  $h > 35.4 \text{ cm.}$  para evitar el problema de inestabilidad s\u00fabita.

### Inestabilidad de la Secci\u00f3n Transversal del Miembro.

A) Compresi\u00f3n.

Al aplicar (69), el valor de  $Q_c$  para toda la secci\u00f3n se calcula a continuaci\u00f3n:

$$9.4 t_v^2 (bf/2)^2 / (t_f^2 d^2) = 1.79 > 1.0$$

Por lo tanto,  $(\sigma_x)_{cr}$  se obtendr\u00e1 de la siguiente manera:

$$(\sigma_x)_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} [ (t_v/d)^2 6.97 + 4 (2t_f/bf)^2 0.425 ] = 15788.7 \text{ kg/cm}^2$$

B) Cortante.

Al aplicar (70) en el alma de la secci\u00f3n:

$$\Rightarrow (73) \quad Q_v = 8.98 + 5.60 / \alpha^2 \quad \alpha = L / b = 20$$

$$\Rightarrow \quad Q_v = 8.994$$

$$\Rightarrow [\tau_{xyx}]_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} (t_v/d)^2 8.994 = 8939.24 \text{ kg/cm}^2$$

C) Flexión.

Al aplicar (74) en el alma de la sección:

$$\Rightarrow Q_f = 42'$$

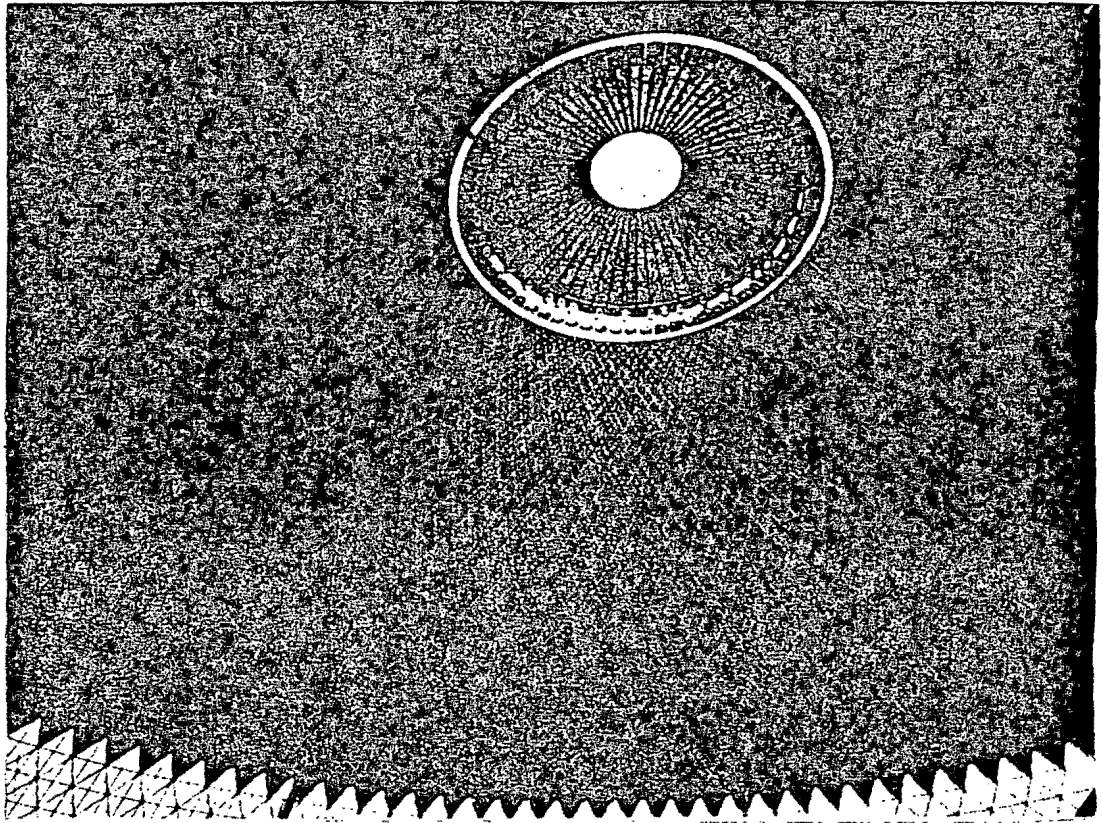
$$\Rightarrow (\sigma)_{cr} = 41744.3 \text{ kg/cm}^2$$

Estos valores obtenidos son muy grandes, por lo que no existe problema de inestabilidad de las paredes de los miembros antes que se presente la inestabilidad general. Además la acción combinada proporciona mejores condiciones de estabilidad, y lo que se presenta es la condición más desfavorable.

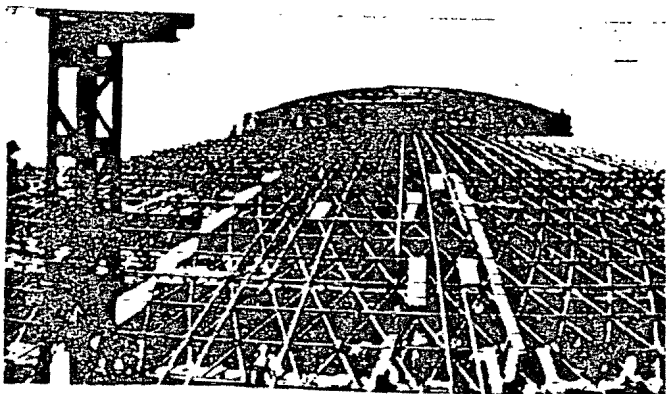
### 7.3.7 CONCLUSION.

Esta fue una aplicación única a un domo esférico, por las condiciones severas existentes, fue una buena prueba de capacidad de estructuras espaciales de este tipo. El uso del domo como cubierta espacial ha sido de gran beneficio, protege a la gente e instalaciones y proporciona una atmósfera placentera en la que la gente puede moverse con comodidad.

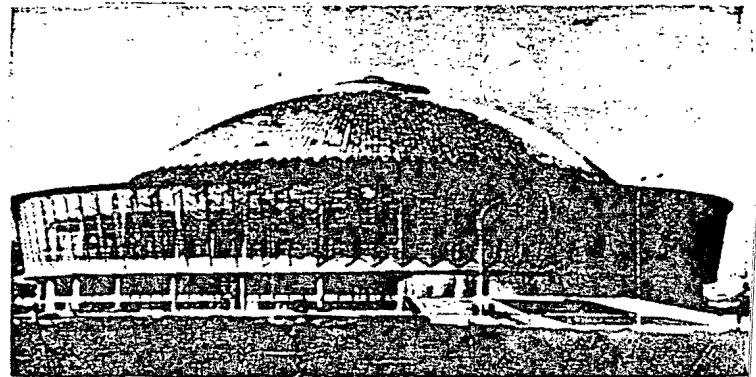
La menor carga de inestabilidad es proporcionada por la inestabilidad general, aquí se vuelve a mostrar que la inestabilidad de las paredes de los miembros es menos probable que ocurra, se calculó la condición para evitar la inestabilidad súbita. El factor de seguridad resultó 154 % del crítico bajo carga uniforme.



(a) Vista interior del domo.



(b) Vista general del domo.



(c) Vista general del pavellón.

FIG. 7.4 DOMO DE BUCAREST.

## 8.- COMENTARIOS FINALES.

Los cascarones reticulares son formas estructurales que se usan para cubrir grandes claros, por razón de economía y eficiencia estructural, pero se han generado algunos fracasos, como en el domo de Bucarest. El análisis que se presentó aquí, proporciona una base para conocer las fuerzas de membrana, y los momentos de flexión, y se establecen los criterios para estimar las presiones que producen inestabilidad.

En este estudio se examinaron los problemas de inestabilidad de cascarones reticulares, mediante el método del continuo equivalente desarrollado por Wright. Donde se muestra como deseable usar barras de igual sección, ya que, con diferentes secciones en las barras conduce al uso de un continuo equivalente anisótropo.

Para comportarse como un cascarón reticular, el sistema de construcción deberá asegurar capacidad a la flexión y tener rigidez en las juntas, para soportar fuerzas axiales, flexión y momentos torsionantes.

Se hizo notar la importancia de los trabajos experimentales, para determinar las verdaderas características de inestabilidad en un cascarón y, se mencionaron las condiciones para lograr la estabilidad. Dentro de los ejemplos tratados, se aplicaron los conceptos para explicar una falla sucedida en 1963, además se observó que la inestabilidad de este tipo de estructuras, tiene más posibilidades de existir como inestabilidad general o súbita; en segundo término la inestabilidad local y con menos posibilidades, la inestabilidad de la sección de las barras. Se deberá usar formas y patrón de división de la superficie, que ayuden a generar mejores condiciones de estabilidad, como se sugiere en este trabajo, cuando se subdivide en triángulos equiláteros como patrón de división.

## 9.- REFERENCIAS.

- 9.1 Rodríguez Cuevas, N: "Estructuras Para Grandes Claros", Instituto de Ingeniería de la UNAM.
- 9.2 Fung, YC y Sechler, EE: "Inestabilidad of Thin Elastic Shells". En "Structural Mechanics", Pergamon Press, Editado por Goodier, JN y Hoff, JN. 1960, pp. 115-168.
- 9.3 Wright, DT: "Membrane Forces and Buckling in Reticulated Shells". Journal Structural Division, ASCE, No 91, (8T1), Febrero 1965, pp. 173-201.
- 9.4 Tezcan, SS y Ovunc, B: "An Iteration Method For the Non-Linear Buckling of Frames Structures", Editado en "Space Structures" por RM Davies, Jonh Wiley y Sons Inc. 1967, pp. 491-501.
- 9.5 Renton, JD: "Stability of Space Frames by Computer Analysis", Journal Structural Division, ASCE No 88 (ST-4) 1962, pp. 81-103.
- 9.6 Edward Gordon Lang, B. Sc.: "The Analysis and Design of Reticulated Cylindrical Shells Roofs", Tesis presentada a la Faculty of Graduate Studies of the University of Waterloo, 1965.
- 9.7 Papadrakakis, Manolis: "Inelastic Post-Buckling Analysis of Space Frames", En "Civil Engineering Practice 1 Estructuras", Editado por Cheremisinoff, Paul, Cheremisinoff, Nicholas y Ling Cheng, Su, pp 537-576.
- 9.8 Popov P., Ignor: "Introducción a la Mecánica de Sólidos", Edit. Limusa.
- 9.9 De Buen L., Oscar: "Estructuras de Acero", Editorial Limusa.

- 9.10 Soare, Mircea: "The Metallic Lattice Dome of the National Economy Exhibition Pavilion at Bucharest", Editado en "Hanging Roofs" por Esquillan, N y Saillard, Y. 1962. pp. 276-287.
- 9.11 Manual of Steel Construction, Editado por American Institute of Steel Construction.
- 9.12 Benson Wilbur, John y Head Morris, Charles: "Elementary Structural Analysis", Ed. Mc Graw-Hill Book Company, INC, 1948, pp. 327-337.
- 9.13 Apuntes de la materia de "Inestabilidad Estructural" de la DEPMI de la UNAM. 1990.
- 9.14 Apuntes de la materia de "Temas Sobre Estructuras Espaciales" de la DEPMI de la UNAM. 1990.
- 9.15 Shu-t'ien, Li: "Metallic Dome - structure Systems". Journal Structural División, ASCE, No. 88, December 1962, pp. 201-226.
- 9.16 O. Crooker, James y P. Buchert, Kenneth: "Reticulated Space Structures". Journal Structural División, ASCE, No. 96, March 1970; pp. 687-700
- 9.17 Paduart, A: "Introduction to shell Roof Analysis". CR BOOKS Limited, 1966, pp. 91-92.
- 9.18 Joedicke, Jürgen: "Estructuras en Voladizos y Cubiertas". Ed. Hermes S. A. , 1967.
- 9.19 Mitchell, L.H. : " A Shell Analogy For Framed Domes", Engineering, V 185 (junio 1965), 1957, pp. 754-755.
- 9.20 Klöppel, K. y Schaltdt, R. : "Zur berechnung Von Actzkuppeln", Du Stahibau, V31, n5 (mayo 1962), 1962, pp. 129-136.



- 9.21 Pagano, M. : " Theoretical and Experimental Research on Triangulated Steel Vaults", Editado en Hanging Roofs por Esquillan, N. y Saillard, Y., 1962, pp. 265-295.
- 9.22 Lederer, F. : "Gitterschalen aus Stabrohren", Shell Research, Proc. IASS Symposium on Shell Research, 1961.
- 9.23 Bradshaw, R. R. : "General Electric Pavilion For the New York World's Fair 1964", Proc 31 st Annual Conv. Struct. Engrs. Assoc. of Calif. (1962), 1962, pp. 72-78.
- 9.24 Del Pozo, F. : " Voiles Minces Cylindriques Formes par un Maille Triangulaire", IABSE 5th Congress, Lisbon, Prelim. Pub (1956), 1956, pp. 405-421.
- 9.25 Vlasov, v. z. : "Cascarones Cilindricos y Formas Nuevas de Desarrollo de Sistemas Espaciales de Pared Delgada en Estructuras" (en ruso), En el segundo Simposio de construcción de un techo de cascarón, 1957, pp. 121-146.
- 9.26 Pshenichnov, G. I. : "El Análisis de Cascarones Cilindricos Reticulares" (en ruso), Inzhener Sbornik Akad. Nauk SSSR, 1958, pp. 171-178.
- 9.27 Pshenichnov, G. I. : "Análisis Estático de Cascarones Cilindricos Reticulares" (en ruso), Inzhener Sbornik Akad. Nauk SSSR, 1960, pp. 171-178.
- 9.28 Lederer, F. G. : Proceedings of the RILEM- IASS Symposium on Shell Research, Delft, 30 Aug - 2 sept. 1961, North- Holland, Amsterdam, 1962, pp. 137-144.
- 9.29 Siegel, C. : "Structure and Form in Modern Architecture", Reinhold, New York, 1962.
- 9.30 Torroja, E. : "The Structures of Eduardo Torroja", Dodge, New York, 1958.

9.31 Nervi, P. L. : "Structures", Dodge, New York, 1958.

9.32 Diversos: "Circular Cylindrical Shells", Editado en Handbook of Structural Stability por Column Research Committee of Japan, Corona Publishing Company, LTD Tokyo, 1971, pp. 4-5 -- 4-49.