

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

SINTESIS DE MECANISMOS PARA CONDUCCION DE CUERPO RIGIDO EN EL PLANO
Una Metodología para el Diseño Interactivo

J ISIDRO TORRES NAVARRO

Trabajo presentado como requisito
para obtener el grado de
Maestro en Ingeniería Mecánica
(Sistemas Mecánicos)

Asesor: Dr Ángel A Rojas Salgado

Marzo de 1993



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPA

T. UNAM

1 9 9 3

TOR

G. 2

CONTENIDO

RESUMEN	<i>iii</i>
NOMENCLATURA	<i>iv</i>
INTRODUCCIÓN	1
OBJETIVO	2
ANÁLISIS DEL MÉTODO DE POLINOMIOS	3
SOLUCIONES DEL POLINOMIO	4
METODOLOGÍA APLICADA: UN EJEMPLO	11
PROCEDIMIENTO	12
TRABAJOS DE INTERÉS RELACIONADOS CON EL TEMA	28
CONCLUSIONES	29
APÉNDICES	30
A. TEORÍA DE BURMESTER	31
INTRODUCCIÓN	31
CURVAS DE BURMESTER	31
PUNTOS DE BURMESTER	34
CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA DE CENTROS	37
B. MÉTODO Y SUS ECUACIONES	39
C. FUNCIONES DE PROGRAMACIÓN	47
D. SENSIBILIDAD DE LA SOLUCIÓN	54
NOTAS	64
REFERENCIAS	67

RESUMEN

Se presenta un análisis del método de polinomios para la síntesis de mecanismos planos empleados en la conducción de cuerpo rígido. El método se aplica para problemas de cuatro y cinco posiciones y el trabajo se basa en el primer caso. Las ecuaciones generadas, el método y sus resultados se relacionan con la teoría de Burmester. Se aplica el método en la obtención de las curvas y díadas de Burmester, que constituyen el espectro de posibilidades de solución para constituir un sistema 4R, conductor de un cuerpo.

A partir de la relación del método con la teoría de Burmester, se determinan las soluciones para la síntesis en cinco posiciones y se comprueban las ventajas que ofrece el método de polinomios para resolver este problema en particular.

Se emplean las ventajas del método para desarrollar una metodología aplicable al diseño interactivo de mecanismos para la conducción de cuerpo rígido

Se incluyen las ecuaciones y su programación en funciones operables en el paquete MATLAB.

Por último, se presenta un análisis de la sensibilidad de la solución para el ejemplo de aplicación, modificando el ángulo del cuerpo en las posiciones intermedias.

NOMENCLATURA

- A Punto circular. El par R del mecanismo que describe arcos circulares
- A_x, A_y Coordenadas del punto circular A
- a_x, a_y Variables para las coordenadas del punto circular A
- B Punto central. El par R del mecanismo que permanece fijo
- B_x, B_y Coordenadas del punto central B
- b_x, b_y Variables para las coordenadas del punto central B
- b_i Valor inicial del intervalo para el cálculo de b_s
- b_f Valor final del intervalo para el cálculo de b_s
- b_s Parámetro que representa a b_x o b_y en la función de síntesis
- CC Curva de puntos centrales
- CPC Curva de puntos circulares
- CR Cuerpo rígido
- D Matriz de configuración compuesta por las coordenadas de los puntos de precisión y por los ángulos que tiene el CR en cada punto
- E_i Eslabón i-ésimo
- PB Puntos de Burmester
- P_{ij} Polo (pivote) para llevar un CR de la posición i a la posición j
- R Par cinemático de tipo rotacional
- 4R Mecanismo de cuatro barras y cuatro pares rotacionales
- γ Ángulo de transmisión, formado por el acoplador y la barra de salida del mecanismo
- θ Ángulo del CR en su movimiento
- ϕ Ángulo entre la barra de entrada y el acoplador del mecanismo

INTRODUCCIÓN

La síntesis cinemática de mecanismos articulados tiene alguno de los siguientes casos: generación de función, generación de trayectoria y conducción de cuerpo rígido (CR). Para un mecanismo articulado de cuatro barras (4R), la generación de función consiste en acoplar los movimientos de la barra de salida con la de entrada, de manera que el movimiento a la salida corresponda a una función del movimiento de entrada. Los casos de trayectoria y de conducción de CR son similares en la medida en que se trata de aprovechar el movimiento de la barra acopladora del sistema 4R para hacer pasar ésta por una serie de puntos de interés. En el problema de conducción de CR se busca, además, que la barra tenga una orientación prescrita en cada uno de los puntos de precisión.

El problema de conducción de CR es de gran interés en el diseño mecánico para aquellos casos en los cuales se desea llevar un elemento de un sistema por una serie de puntos con una orientación dada. Este problema puede resolverse mediante métodos exactos o con procedimientos de aproximación. Los primeros son métodos que se aplican para un limitado número de puntos de precisión, no más de cinco; mientras que los segundos se aplican en mayor número de posiciones, pero no garantizan que el cuerpo pase por los puntos indicados. Estos métodos sirven de base para lo que se conoce como síntesis óptima.

Las diversas metodologías aplicables a la síntesis de conducción de CR

consisten en métodos gráficos, en procedimientos analíticos y en combinaciones de ambos. Los primeros son recomendables para problemas sencillos que impliquen pocas posiciones. Los métodos analíticos se emplean para aquellos casos del mayor número de puntos de precisión. Las combinaciones de ambos se aplican principalmente en paquetes de cómputo para la síntesis interactiva de mecanismos [1] y [2]*.

En este trabajo se aplica el método de polinomios para la síntesis de conducción de CR en el plano, se le trabaja en el contexto de la teoría de Burmester (ver apéndice A)** y, aprovechando estas bases teóricas, se bosqueja una metodología para trabajar el problema de conducción de CR mediante un proceso interactivo que permita al diseñador aplicar sus conocimientos y experiencias en el proceso de selección del mecanismo adecuado a sus necesidades.

El proceso se basa en la determinación de un espectro de díadas de Burmester [3] que eventualmente resuelvan el problema. Para el cálculo se emplea el método de polinomios (Rojas Salgado, 1988). Con los valores resultantes y en base a la teoría de Burmester, se establecen las curvas de puntos centrales (CC) [4] y de puntos circulares (CPC) [5]. Posteriormente y en un proceso interactivo, se restringe el espectro de posibilidades, de acuerdo con alguna especificación, hasta obtener un conjunto reducido de díadas que se combinan para dar lugar a un número manejable de posibilidades; al someterlas a una etapa de análisis se conoce el funcionamiento de cada sistema. De esta etapa surge el mecanismo que, a la luz de las necesidades de diseño, cumpla mejor con las condiciones impuestas. Se ilustra el proceso con un ejemplo que involucra restricciones de espacio.

OBJETIVO

Realizar un estudio sobre las soluciones que se obtienen de la ecuación de síntesis mediante polinomios, haciendo un cálculo para intervalos de las coordenadas del punto central de la díada. Explicar las implicaciones que tienen las curvas obtenidas para el diseño de mecanismos. Tomar como base el

* [] ver sección de notas.

** () referencias bibliográficas.

artículo: Síntesis exacta de conducción de cuerpo rígido mediante polinomios (Rojas Salgado, 1988).

ANÁLISIS DEL MÉTODO DE POLINOMIOS

El método de polinomios, se aplica en la síntesis exacta para conducción de cuerpo rígido. La esencia del método consiste en un polinomio cuyo grado es tá determinado por el número de posiciones que ha de recorrer el CR, (ver apéndice B). Las raíces del polinomio, permiten obtener varios mecanismos para el problema planteado.

Cuando se aplica el método a cinco posiciones, se obtiene un polinomio de cuarto orden. con las raíces de éste se obtienen, como máximo, seis mecanismos. Por otro lado, cuando se tiene un conjunto de cuatro configuraciones, se dispone de la elección de un parámetro. Éste puede ser cualquiera de las coordenadas del punto central b_x o b_y , que se pueden "combinar (en) diferentes soluciones, que se obtienen con dos parámetros no idénticos," (cit. ant.), formándose diversos mecanismos solución, todos diferentes, para el problema.

La parte del método que se refiere a cuatro posiciones, es el objetivo de este trabajo ya que, como se demuestra, es un método de gran aplicación en el diseño de un mecanismo conductor. Como se verá más adelante, el método aplicado a cuatro posiciones puede proporcionar las soluciones dadas por el polinomio generado para cinco. Pero como se puede demostrar, las bondades del método permiten que la solución de este último polinomio sea el camino directo para la situación extrema en la síntesis exacta para conducción de CR en el plano.

Aun cuando el método se propone como una alternativa a los métodos analíticos iterativos, que requieren valores de inicio cercanos a la solución para que se dé fácilmente la convergencia y que, por otro lado, se considere superior la técnica analítica a los métodos gráficos por el extremo cuidado que se requiere para los trazos de la curva de puntos circulares, ya que la técnica basada en Burmester, "aunque puede adaptarse numéricamente, resulta compleja", (cit. ant.); se puede establecer una relación entre ambas líneas

de solución, analítica y gráfica, y conjuntarlos en un método que cuente con las ventajas de ambos: La precisión y rapidez de cálculo, con la representación y apreciación inmediata de las características de una solución.

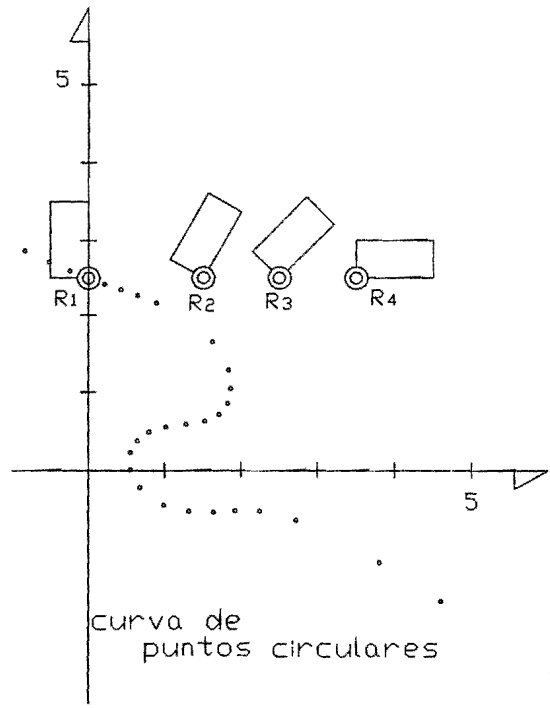
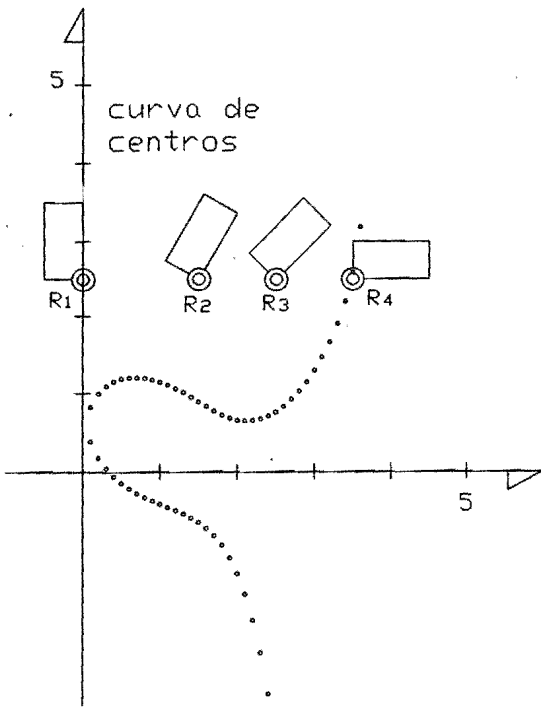
Esto es, en principio, la esencia de una metodología que surge de conjuntar la parte analítica: el método de polinomios, la parte gráfica: la teoría de Burmester, y las herramientas de cálculo y graficación de la computación.

SOLUCIONES DEL POLINOMIO

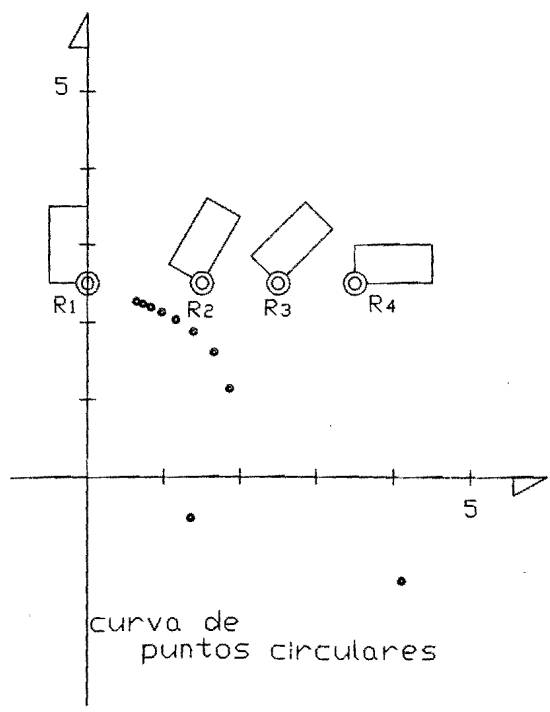
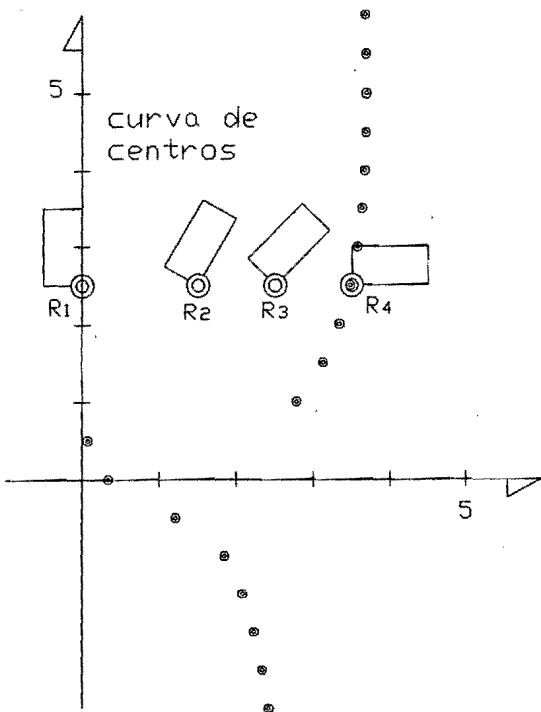
Como ya se estableció, el estudio se enfoca a las relaciones existentes en las soluciones del polinomio cúbico que surge en el problema de síntesis para cuatro posiciones. Como se puede ver en el apéndice B, incisos B.7 y B.13; se tiene un polinomio para cada parámetro según se elija como tal una u otra de las coordenadas del punto central (b_x o b_y).

Cuando se utiliza uno de los polinomios, por ejemplo para b_x , y se calculan las raíces del mismo para un intervalo: $b_1 \leq b_x \leq b_f$; se obtienen las coordenadas de los puntos central (b_x, b_y), y circular (a_x, a_y); que en su conjunto establecen el lugar geométrico de las curvas de centros y de puntos circulares, tal como lo prevé la teoría de Burmester. La determinación de tales curvas mediante una de las coordenadas no necesariamente dará una curva continua pero, según el caso particular, dará una buena aproximación de la curva en función de la resolución en el cálculo. Ver figura 1.

El hecho de que las raíces reales del polinomio sean una o tres, permitirá construir la cúbica con uno o tres puntos sobre la línea de referencia. Pero como ya se anotó, la curva obtenida en el primer proceso puede ser difusa, por la dispersión en los puntos y prestarse a interpretaciones erróneas. Es aquí donde se presenta la ventaja del método ya que se cuenta con otro polinomio que permite determinar las coordenadas de los puntos central y circular ahora en una forma ortogonal a la primera. Se 'plhba di poli^o-mio, en términos de b_y , para el intervalo: $b_1 \leq b_y \leq b_f$, tomando estos valores ya sea en función de los resultados extremos del primer cálculo, o de las restricciones de diseño; y se obtiene un conjunto de puntos con ubicaciones diferentes a la primera aplicación. Ver figura 2.



(a) (b)
 Figura 1. Gráficas de CC (a) y CPC (b) para intervalo en bx



(a) (b)
 Figura 2. Gráficas de CC (a) y CPC (b) para intervalo en by

La conjunción de ambas gráficas proporciona una curva "continua" que muestra con bastante nitidez la forma final de las curvas de Burmester para la situación en particular. Ver figura 3.

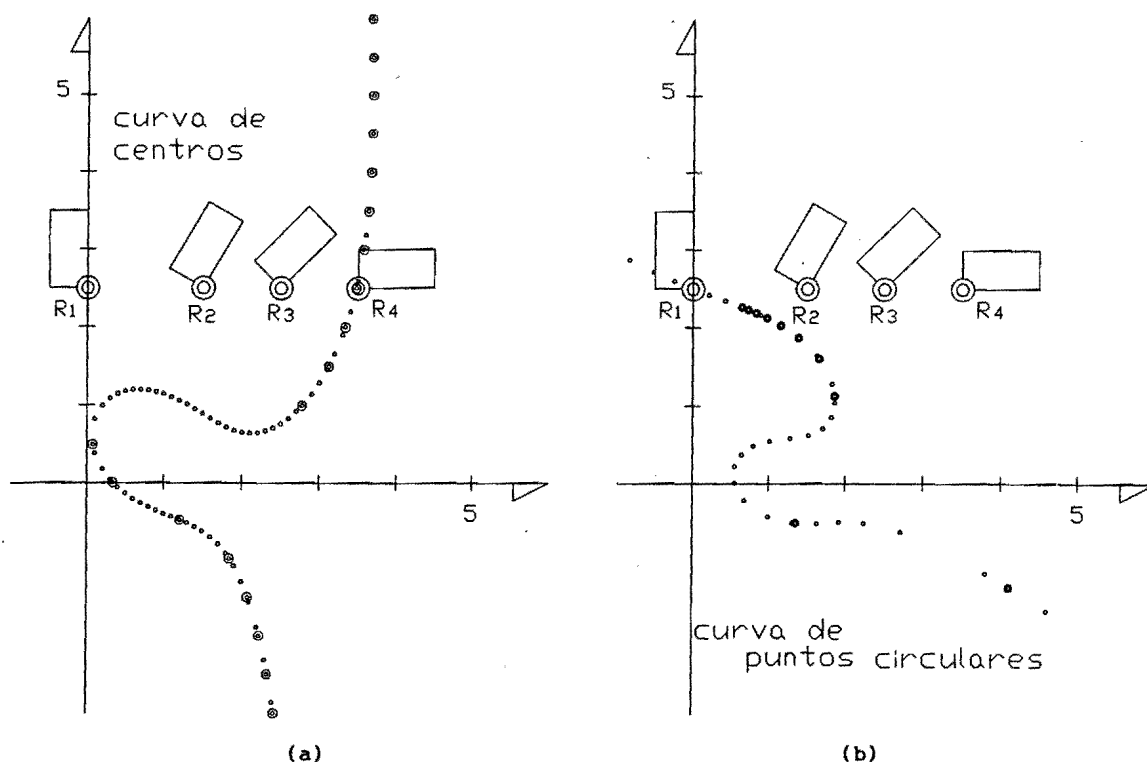


Figura 3. Gráficas de CC (a) y CPC (b) completas

Es en esta etapa en la cual el método analítico deja lugar a los métodos gráficos. A partir de que se obtienen las curvas, lugares geométricos de articulaciones del bastidor y del acoplador, se aplica el criterio de diseño para seleccionar puntos representativos en la curva de centros; de tal forma que, con el correspondiente punto circular, se represente la diáda de Burmester para cada uno de los puntos centrales, obteniéndose así un conjunto de diádas que, tomadas por pares, conformen una serie de mecanismos. En este sentido, el número de diádas puede ser amplio, por lo cual es recomendable dividir las curvas de centros en secciones para hacer una selección parcial en cada una de las mismas. Estas secciones corresponderán a subconjuntos de diádas; el número de éstos dependerá de la forma de la curva y de la elección del diseñador.

Al separar en un subconjunto de díadas, se analizan las posibilidades de éstas en la conformación de un mecanismo útil a las necesidades prescritas, descartando aquellas que tengan desventajas evidentes. Se depura el subconjunto para dejar las díadas con más posibilidades y se procede igual con los otros grupos de díadas.

Después de este análisis se conjuntan las díadas aprobadas y, si es un número adecuado, se elabora un cuadro de combinaciones que generarán los posibles mecanismos. Nuevamente se ha de efectuar una eliminación de aquellas combinaciones con evidentes desventajas cinemáticas, de tal forma que se obtenga un número manejable de mecanismos, para pasar a una etapa de análisis cinemático.

En la etapa de análisis se ha de efectuar un estudio en el ciclo de trabajo para revisar que no exista problema de bifurcación, puntos de retroceso, defecto de orden, ángulos de transmisión extremos; y que se cumpla con las restricciones de diseño. En caso de que algunos sistemas no cumplan con las condiciones, se eliminarán reduciendo el conjunto de sistemas probables.

Es posible que una misma díada esté representada en varios mecanismos viables, ya en la última etapa. Esto facilitará el proceso y, además, la solución. Al tener una barra única en varios mecanismos se puede analizar de que manera la calidad de los mismos va cambiando, de tal forma que se elija el mejor sistema.

Ahora, para todos aquellos sistemas que pasaron todo el proceso, se revisa el funcionamiento en su ciclo y se toma en cuenta otros aspectos de diseño: ¿Cuál será la barra de entrada? ¿Cómo se impulsará el sistema? ¿Qué longitudes resultan más convenientes? ¿Cuáles son los puntos fuertes del bastidor? ¿resultará en un mecanismo ligero? etcétera, de tal forma que se pueda optar por el mecanismo idóneo.

Por otro lado, la construcción exacta de la curva de centros mediante un procedimiento gráfico [6], resulta en un procedimiento tardado y frecuentemente se realiza una aproximación sobre la base de que la CC ha de pasar por un conjunto de puntos conocidos, entre ellos los seis polos. En este

sentido, el método de polinomios y su sencilla estructura analítica provee la forma para el cálculo de coordenadas y la posterior representación de la CC. Ver figura 4.

En base a la teoría de Burmester, el método de cuatro posiciones se puede aplicar para la síntesis en cinco puntos de precisión. Basta con efectuar el proceso para dos conjuntos diferentes de cuatro posiciones, de tal forma que se obtengan sendas curvas de Burmester. Ver figura 5. Al obtener las curvas se conjuntan y en la intersección de las CC se obtienen los puntos de Burmester [7]. En este caso el método del polinomio de cuarto grado, cinco posiciones, resulta más rápido en su aplicación y en su posible uso para el diseño cinemático (Rojas Salgado, 1991). Sin embargo, aunque más tardado, el proceso para cuatro posiciones permite demostrar cómo el método de polinomios está inserto en la teoría de Burmester y relacionado con los métodos de síntesis derivados de la misma.

Una ventaja más del método respecto a los procesos analíticos iterativos, lo constituye el hecho de que estos últimos no dan fácilmente una respuesta si los valores de inicio no están en el vecindario de la solución, pudiendo no haber solución e ignorarse. En cambio, el método de polinomios es útil para la determinación inmediata de la solución o su inexistencia.

La sencilla estructuración del método hace posible analizar otras soluciones dada la sensibilidad mostrada por las curvas de Burmester. Cuando se modifica ligeramente alguno de los ángulos del CR en sus posiciones, el resultado es la obtención de lugares geométricos diferentes, a los anteriores, con lo cual se abren otras posibilidades de solución (ver apéndice D).

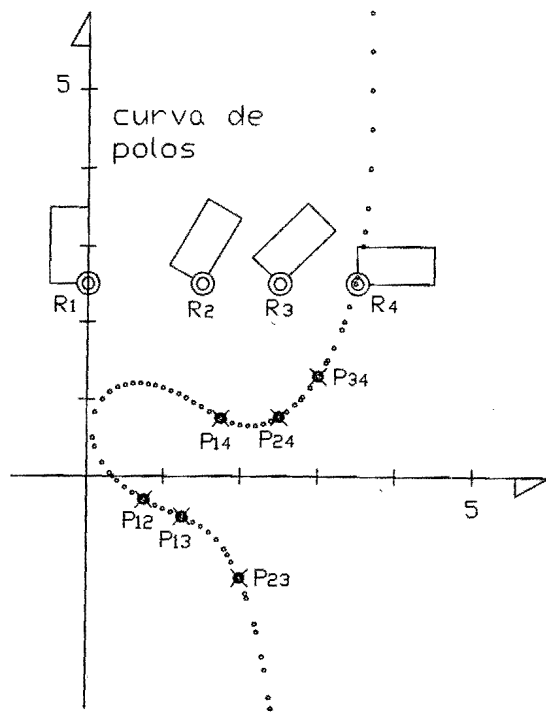
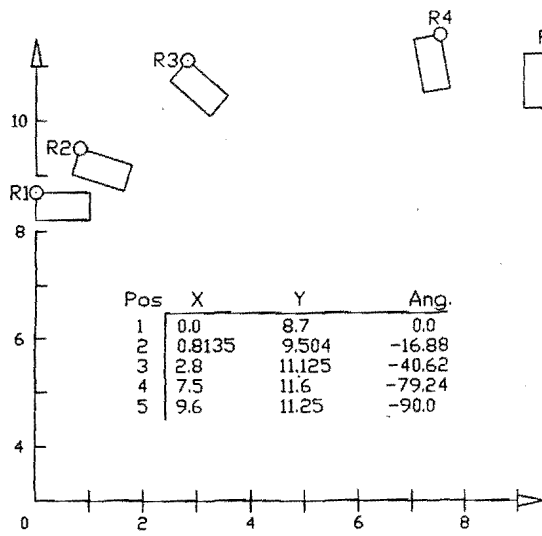
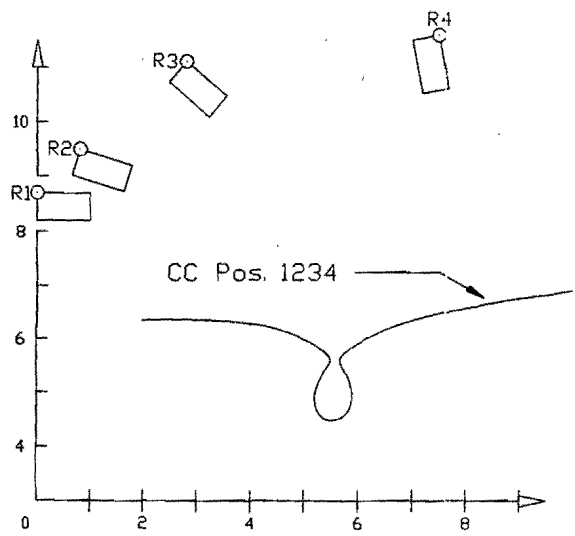


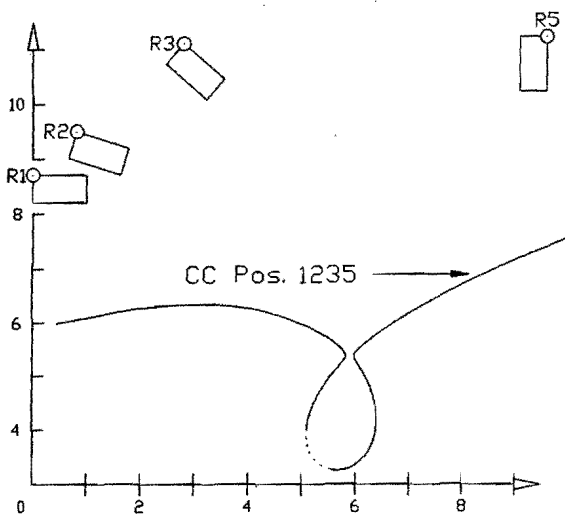
Figura 4. Curva de polos o CC



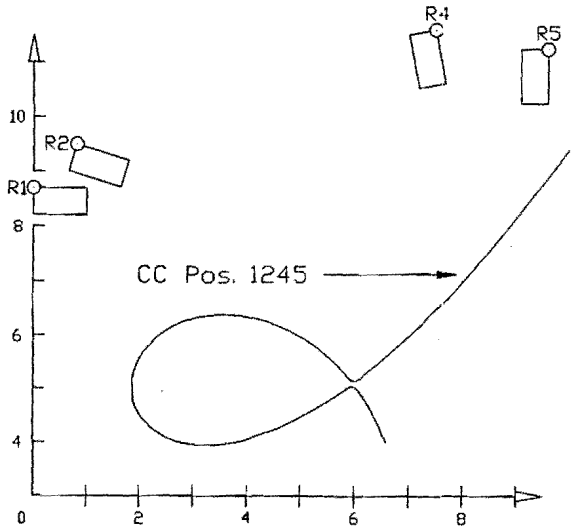
(a)



(b)



(c)



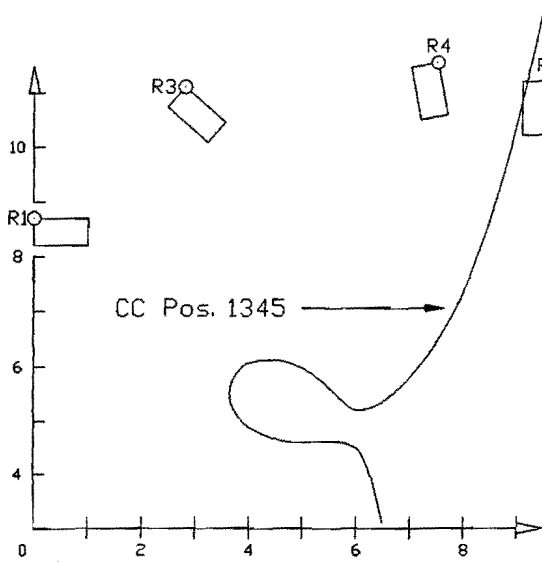
(d)

Figura 5. Conducción de un CR por cinco posiciones.

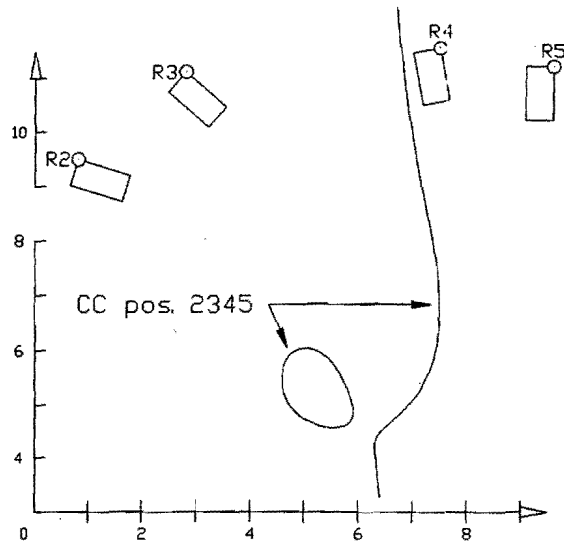
(a) configuración y puntos de precisión.

(b) a (f) CC para conjuntos de cuatro posiciones.

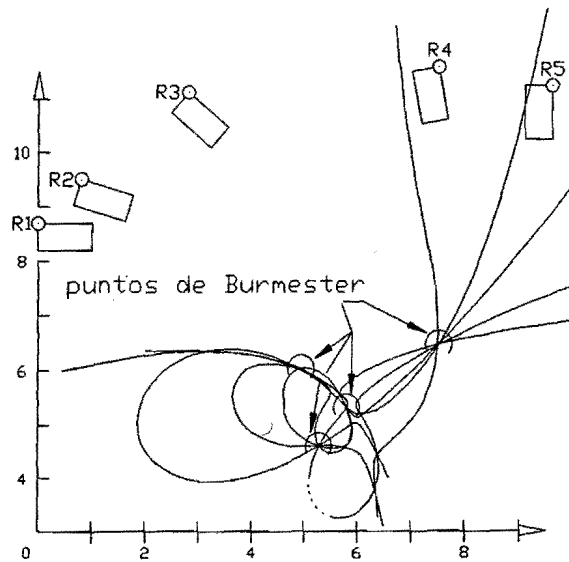
(g) puntos de Burmester.



(e)



(f)



(g)

Figura 5. Conducción de un CR por cinco posiciones.
 (a) configuración y puntos de precisión.
 (b) a (f) CC para conjuntos de cuatro posiciones.
 (g) puntos de Burmester.

METODOLOGÍA APLICADA: UN EJEMPLO

Se requiere un mecanismo de cuatro barras que pueda ser empleado para abrir la puerta de la cochera mostrada en la figura 6, se tienen los siguientes puntos de precisión y posiciones angulares para la puerta [8]:

Núm.	puntos de precisión		ángulo de la puerta
	x	y	
1	0	6	90°
2	0.5	6.5	60°
3	1	7	30°
4	1.5	7.5	0°

(Dimensiones en pies)

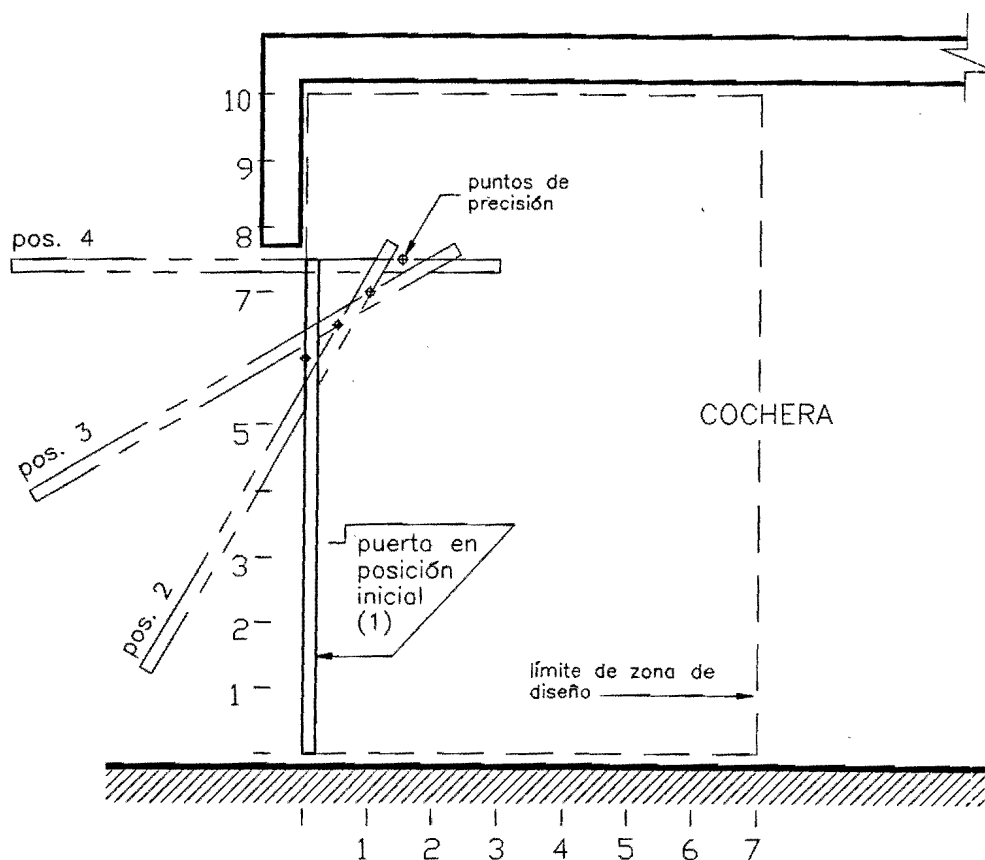


Figura 6. Cochera con puerta en posiciones requeridas y espacio de diseño

La puerta abrirá hacia afuera. Los puntos de precisión están sobre una recta y el problema se presenta con limitaciones de espacio, ya que se requiere que el mecanismo quede en la zona delimitada por la línea. Además, existe la restricción de que el mecanismo no tenga retrocesos al iniciar su movimiento, ya que esto podría llevar al bloqueo de la puerta con el suelo.

PROCEDIMIENTO

En primer término se calculan las coordenadas para las diadas de Burmester: puntos central y circular. Estos definirán los extremos de las barras que guiarán a la puerta en su movimiento. Se efectúa en primer término el cálculo sobre el eje x, con un intervalo: $0.2 \leq b_x \leq 5.0$. Se efectúan los cálculos mediante el paquete MATLAB (ver apéndice C). Se requiere el arreglo de los datos del problema dados en el cuadro anterior, con ellos se escribe la matriz de configuración D, cuyas columnas contienen las coordenadas en x, en y, así como los ángulos de la puerta en las posiciones dadas.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 6.0000 & 90.0000 \\ 0.5000 & 6.5000 & 60.0000 \\ 1.0000 & 7.0000 & 30.0000 \\ 1.5000 & 7.5000 & 0 \end{bmatrix}$$

Se inicia el cálculo [9] con la instrucción `interbx` (ver apéndice C), que proporciona los listados de coordenadas en función del dato B_x : B_y del punto central, y A_x , A_y del punto circular. Se establece el cálculo para un intervalo de b_x de 0.2 a 5, con un incremento de 0.2.

» `[Ax,Ay,Bx,By]=interbx(D,.2,5,.2);`

Esta etapa proporciona tres valores para cada una de las incógnitas: B_y , A_x y A_y ; para cada valor de B_x , debido al grado cúbico del polinomio de solución. Por lo tanto, se puede arreglar el resultado en tres listados de coordenadas, siempre en función de B_x .

B_x	B_y	A_x	A_y
0.2000	7.3000 ^{máx.}	0.5815	6.0000
0.4000	7.1000	0.6356	6.0000
0.6000	6.9000	0.7009	6.0000
0.8000	6.7000	0.7810	6.0000
1.0000	6.5000	0.8819	6.0000
1.2000	6.3000	1.0126	6.0000
1.4000	6.1000	1.1888	6.0000
1.6000	5.9112	1.4309	5.9959
1.8000	6.0856	1.4215	5.8589
2.0000	6.2206	1.3977	5.7362
2.2000	6.3248	1.3627	5.6249
2.4000	6.4031	1.3181	5.5230
2.6000	6.4586	1.2652	5.4295
2.8000	6.4930	1.2046	5.3437
3.0000	6.5076	1.1367	5.2652
3.2000	6.5026	1.0617	5.1938
3.4000	6.4780	0.9795	5.1296
3.6000	6.4330	0.8899	5.0729
3.8000	6.3662	0.7922	5.0241

Bx	By	Ax	Ay
4.0000	6.2752	0.6857	4.9842
4.2000	6.1560	0.5689	4.9546
4.4000	6.0024	0.4394	4.9377
4.6000	5.8024	0.2930	4.9376
4.8000	5.5309	0.1204	4.9638
* 5.0000	5.1035	-0.1092	5.0471

Bx	By	Ax	Ay
* 0.2000	4.4510 + 1.9710i	1.4088 + 0.7214i	7.0428 - 0.7214i
* 0.4000	4.4510 + 1.6689i	1.3356 + 0.6109i	6.9696 - 0.6109i
* 0.6000	4.4510 + 1.3288i	1.2624 + 0.4864i	6.8964 - 0.4864i
* 0.8000	4.4510 + 0.9089i	1.1892 + 0.3327i	6.8232 - 0.3327i
1.0000	4.6340	1.1830	6.6830
1.2000	5.3527	1.3729	6.3467
1.4000	5.6809	1.4198	6.1534
1.6000	5.9000	1.4394	6.0000
1.8000	5.7000	1.8237	6.0000
2.0000	5.5000	2.4880	6.0000
2.2000	5.3000	3.9137	6.0000
* 2.4000	5.1000	9.1656	6.0000
* 2.6000	4.9000	-26.8048	6.0000
* 2.8000	4.7000	-5.4432	6.0000
* 3.0000	4.5000	-3.0291	6.0000
* 3.2000	4.3000	-2.0985	6.0000
* 3.4000	4.1000	-1.6053	6.0000
* 3.6000	3.9000	-1.2998	6.0000
* 3.8000	3.7000	-1.0920	6.0000
* 4.0000	3.5000	-0.9415	6.0000
* 4.2000	3.3000	-0.8274	6.0000
* 4.4000	3.1000	-0.7380	6.0000
* 4.6000	3.0995	-0.6964	5.9270
* 4.8000	3.3711	-0.6701	5.7544
* 5.0000	3.7984	-0.5869	5.5247

En el siguiente listado sólo se indican los valores reales.

Bx	By	Ax	Ay
1.0000	4.2679	1.0490	6.8170
1.2000	3.5492	0.7128	7.0068
1.4000	3.2210	0.5194	7.0538
1.6000	2.9907	0.3619	7.0649
1.8000	2.8164	0.2249	7.0555
2.0000	2.6813mín.	0.1023	7.0317
* 2.2000	2.5771	-0.0091	6.9966
* 2.4000	2.4988	-0.1109	6.9521
* 2.6000	2.4434	-0.2044	6.8992
* 2.8000	2.4089	-0.2903	6.8386
* 3.0000	2.3944	-0.3688	6.7707
* 3.2000	2.3993	-0.4402	6.6957
* 3.4000	2.4239	-0.5044	6.6135

	Bx	By	Ax	Ay
*	3.6000	2.4689	-0.5611	6.5238
*	3.8000	2.5357	-0.6099	6.4262
*	4.0000	2.6268	-0.6498	6.3196
*	4.2000	2.7459	-0.6794	6.2028
*	4.4000	2.8995	-0.6963	6.0734
*	4.6000	2.9000	-0.6660	6.0000
*	4.8000	2.7000	-0.6069	6.0000
*	5.0000	2.5000	-0.5573	6.0000

Como se aprecia, se tiene una parte del intervalo donde dos raíces son imaginarias, esto hace que la cúbica tenga una sola línea en el subintervalo: $0 < b_x < 1.0$ (ver figura 7).

En los cuadros se indican (*) aquellas diadas que no son útiles para el diseño dado que, o son imaginarias, o rebasan, en la configuración inicial, la zona restringida. Esto permite obtener el primer conjunto de posibles diadas para el intervalo de b_x .

Observando los valores para By , se aprecia que su valor máximo es igual a 7.3, y que su valor mínimo, útil, es 2.6813, por lo cual ahora se realiza el cálculo sobre el eje vertical en el intervalo: $2.5 \leq b_y \leq 7.4$, y con un incremento de 0.2, mediante la instrucción:

» [Ax,Ay,Bx,By]=interby(D,.2,7.4,.2);

En este caso By es el dato y se obtienen listados semejantes al caso en b_x , esto es, resultan tres listados en función de los valores de By , para las coordenadas Bx , Ax y Ay .

Se ordenan los valores, se revisan, se descartan aquellas diadas que no cumplen con la restricción de espacio y, conjuntando estos valores con los obtenidos para el intervalo b_x , se obtiene la gráfica de la figura 7, que representa el lugar geométrico de los puntos centrales para las diadas solución al problema.

Como se indicó antes, los cálculos sobre b_x y sobre b_y , proporcionan gráficas semejantes y complementarias. Esto se aprecia en la figura 7 por la mayor densidad de puntos en algunas secciones de la curva.

A continuación se toman los valores para las coordenadas de los puntos cir-

culares, tanto para b_x como para b_y , y se representan en el conjunto de puntos mostrado en la figura 8, que es el lugar geométrico para los puntos circulares de las diádas. Como se aprecia, estos puntos quedan, para la configuración inicial, dentro de la zona de diseño.

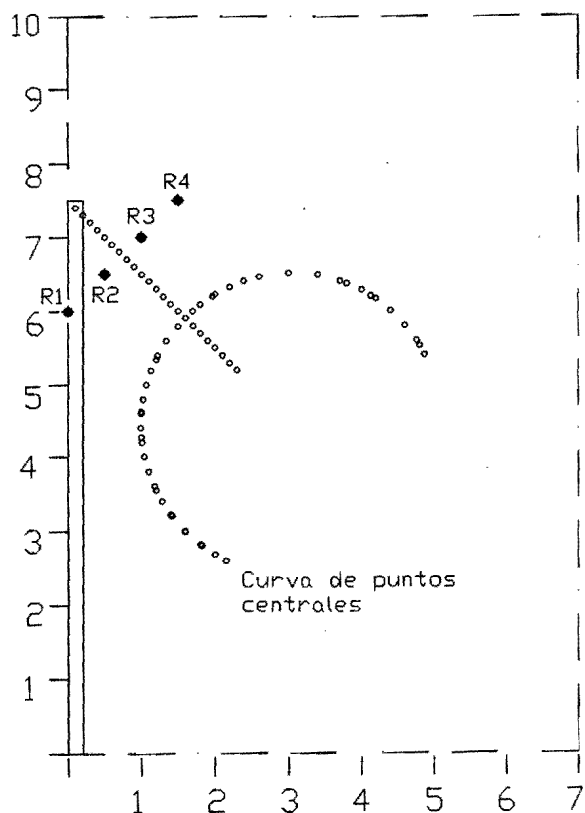


Figura 7. Gráfica de CC.

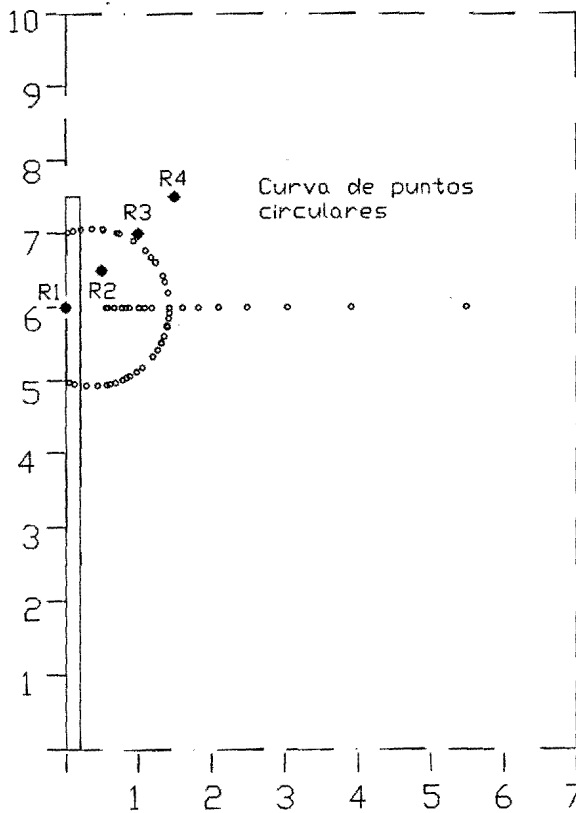


Figura 8. Gráfica de CPC.

En la figura 9 se muestran las curvas de puntos centrales y de puntos circulares y se puede apreciar la similitud existente entre ambas.

Si se revisan, para este caso particular, las figuras 7 y 8, se aprecia que las curvas están constituidas por un tramo recto y otro curvilíneo. No existen continuidad aparente dado que se eliminaron valores que quedan fuera de la zona de diseño. Volviendo a la forma de las curvas, si se toma por separado el tramo rectilíneo de la curva de centros del tramo curvilíneo de la misma, se puede establecer un conjunto de diádas que correspondan a cada tramo. Al representar un grupo de puntos seleccionados sobre la recta, se

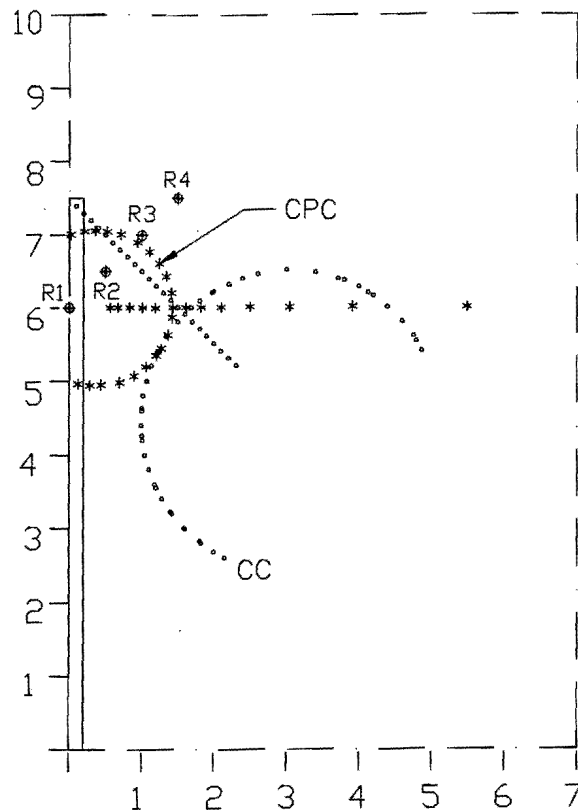


Figura 9. Curvas CC y CPC

obtiene el complemento de puntos circulares sobre la curva correspondiente. En la figura 10 se muestra con un anillo el punto central y con un círculo, el punto circular.

Al unir estos puntos obtenemos un conjunto de diádas de Burmester que son, todas ellas, solución al problema. Estas diádas se tienen en la figura 11.

Se hace ahora una selección de puntos representativos sobre el tramo curvilíneo de la curva de centros. Se representan estos puntos y sus correspondientes puntos circulares, resultando lo mostrado en la figura 12. Al unir los puntos central con circular, se obtiene el conjunto de diádas mostrado en la figura 13.

En la figura 14 se tiene la representación de puntos centrales que resultaron de la selección en ambos tramos de la curva. como se puede apreciar, de

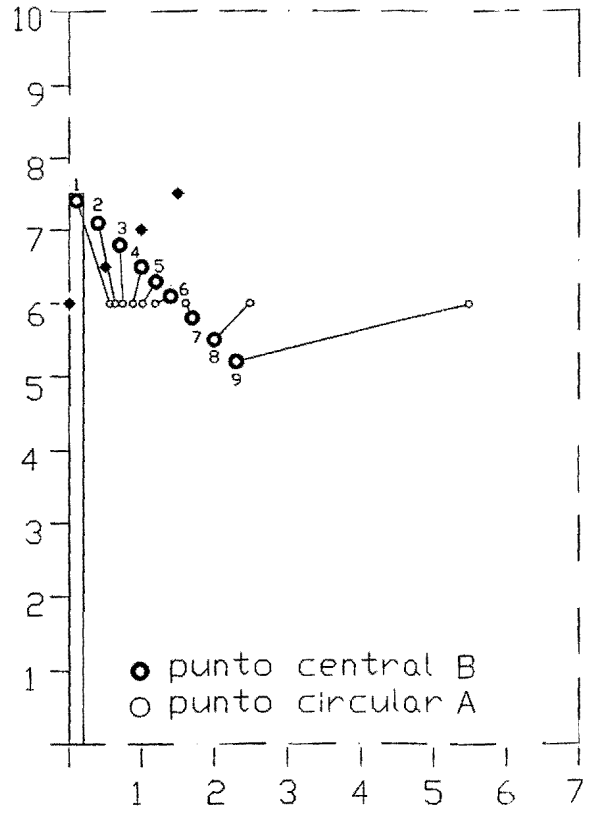
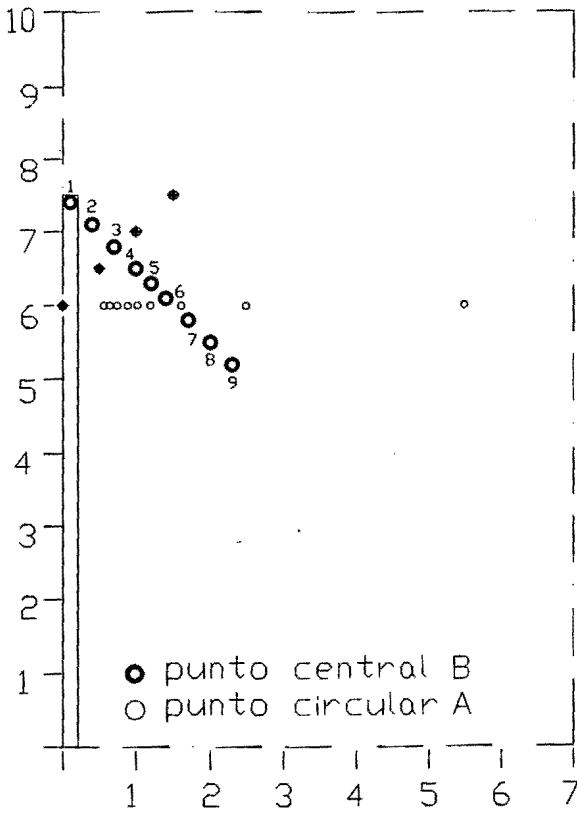


Figura 10. Puntos para el tramo recto Figura 11. Días para tramo recto

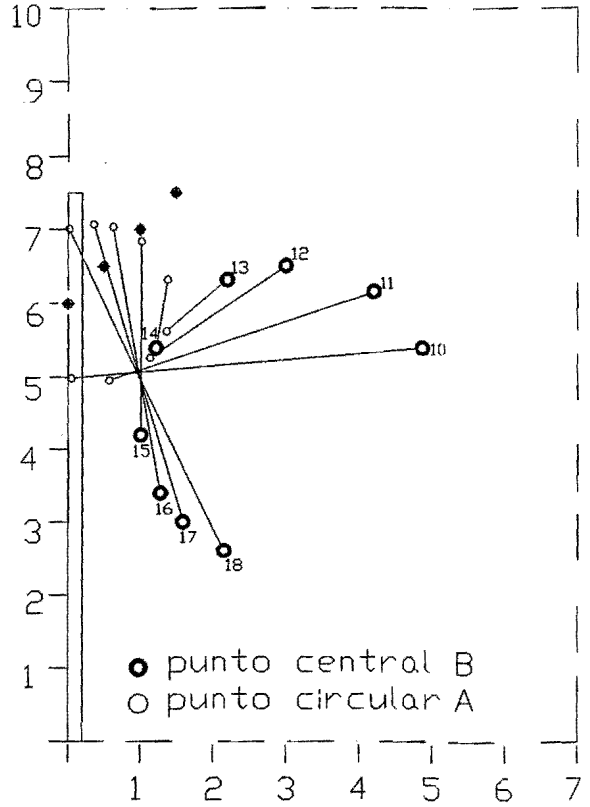
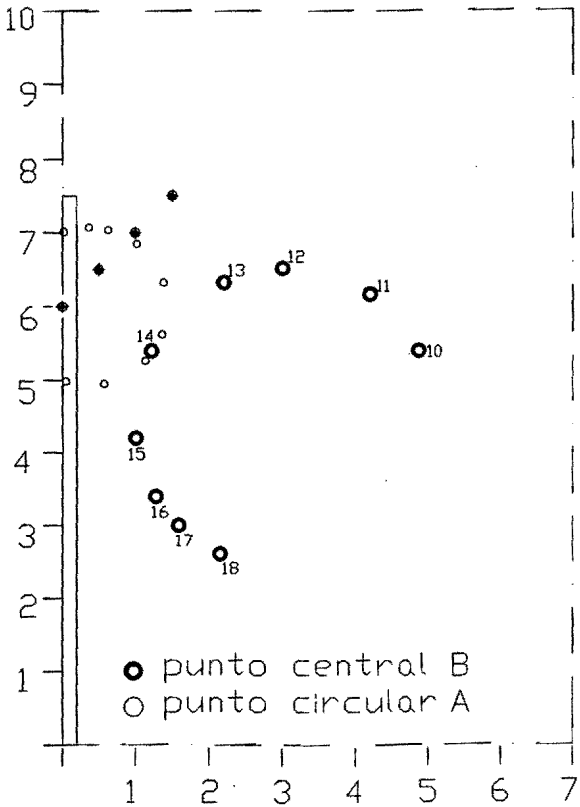


Figura 12. Puntos para el tramo curvo Figura 13. Días para tramo curvo

la ubicación de puntos centrales no se tiene suficiente información para determinar qué díadas componen un mecanismo eficaz. por ello, se analizan las díadas resultantes en las figuras 11 y 13, para hacer un proceso selectivo de aquellas barras con mejores posibilidades cinemáticas.

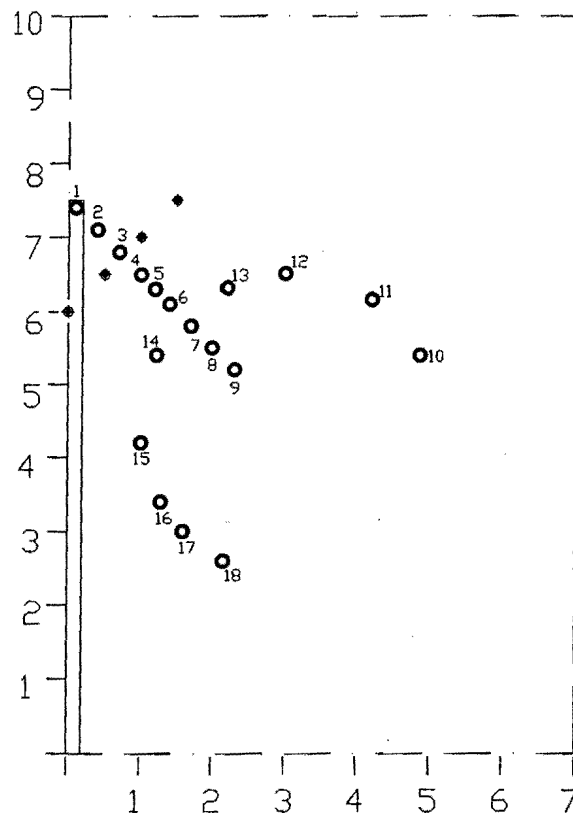


Figura 14. Puntos centrales elegidos

Como se busca conjuntar díadas para obtener mecanismos factibles, se deben tomar en cuenta factores tales como:

- no debe haber defectos de rama o de orden en el ciclo de trabajo [10],
- en el ciclo de trabajo el mecanismo debe funcionar sin pasar por un punto de retroceso que haga que el CR rebase la zona restringida; esto es, los eslabones siempre deben ir hacia "adelante" mientras cubren el ciclo de trabajo,
- sistemas con eslabón acoplador muy corto pueden producir situaciones como la indicada antes, generar ángulos de transmisión con valores extremos [11] debido a su gran oscilación,

- en general se debe analizar la inconveniencia cinemática de un sistema con un eslabón corto en su configuración; el ángulo de oscilación del eslabón corto puede generar ángulos de transmisión inaceptables,
- un mecanismo con eslabones cortos respecto a la longitud de la trayectoria de los puntos de precisión, puede generar ángulos de transmisión fuera de límites recomendables.

Por otro lado, para seleccionar eslabones útiles, se pueden tomar en consideración otros factores como son el contar con:

- un sistema con sus eslabones de dimensiones adecuadas en relación al desplazamiento del CR,
- un mecanismo que no tenga puntos de inversión del movimiento en el ciclo de trabajo,
- aquellas diadas cuyos puntos circulares estén lo más cerca posible del CR, esto hará que éste resulte más ligero.

Se toman en cuenta las recomendaciones anteriores y se efectúa el análisis de las diadas del tramo recto: eslabones números 1 al 9, en la figura 11. Es importante hacer notar que el procedimiento es realizado únicamente con fines ilustrativos.

Se observa que los eslabones 4 a 8 son muy cortos y que su punto A está cada vez más alejado. El eslabón 9 tiene una longitud adecuada pero su punto A está muy alejado, lo cual lo descarta también. De tal forma, de esta etapa se tienen los eslabones 1, 2 y 3; como eslabones para formar probables mecanismos.

Se efectúa un análisis similar sobre las diadas del tramo curvo, en base a los criterios expuestos, ver la figura 13:

- el eslabón 10 tiene el punto A en la frontera del espacio útil, se descarta;
- el eslabón 11 se selecciona por su dimensión y la ubicación de su punto A respecto a la puerta;
- el eslabón 12 tiene longitud adecuada y un punto A más alejado, se considera conveniente, se selecciona;
- el eslabón 13 resulta más corto, con el punto A más alejado y con posi-

bles valores de ángulo de transmisión fuera de rango, se toma como posibilidad límite;

- el eslabón 14 es semejante al 13, pero se encuentra más cerca de los eslabones seleccionados en la etapa anterior, se toma;
- el eslabón 15 tiene al punto A alejado, y presentaría ángulo de transmisión extremo al constituirse en mecanismo con los eslabones ya seleccionados, se descarta;
- los eslabones 16 y 17 tienen su punto A cercano a la puerta y son de gran tamaño, se toman;
- el eslabón 18 tiene al punto A en la frontera del espacio útil, se descarta.

En la figura 15 se muestra el conjunto de díadas seleccionadas en esta etapa.

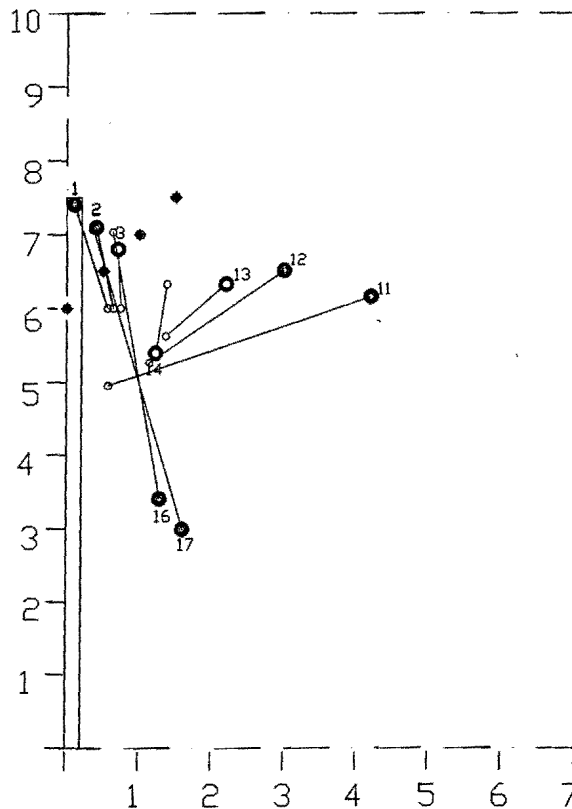


Figura 15. Díadas seleccionadas para formar mecanismos

En las dos etapas se ha hecho un análisis de las posibilidades de cada diáda, de acuerdo a la configuración inicial de cada barra y su relación con las demás. Sin embargo es necesario pasar a otra etapa de análisis en la cual se analicen pares de eslabones para apreciar sus desventajas y efectuar otra eliminación.

Durante el proceso estarán presentes otros factores, no necesariamente cinemáticos pero que influirán en el funcionamiento real del mecanismo. Dentro de estos aspectos se pueden mencionar: el peso del conjunto, la forma de accionamiento del sistema, la elección del eslabón motriz, la ventaja mecánica del mecanismo, la potencia demandada, etcétera.

Por ahora se realiza un análisis de los mecanismos formados por los pares de eslabones mediante un cuadro de combinaciones entre ellos.

Posibles mecanismos resultantes de la combinación de las diádas seleccionadas

Es1.→	17	16	14	13	12	11	3	2	1
↓									
1	r1	r1	PRO	r4	r2	PRO	r3	r3	x
2	r1	r1	PRO	r4	r2	PRO	r3	x	
3	r1	r1	PRO	r4	r4	r5	x		
11	PRO	PRO	r1	r1	r1	x			
12	r2	r2	r1	r3	x				
13	r2	r2	r2	x					
14	r6	r6	x						
16	r1	x							
17	x								

Notas:

- r1 mecanismo mal proporcionado, valores de ángulo de transmisión (γ), extremos. Ver figura 16(a).
- r2 una de las barras retrocede y esto va contra la restricción de espacio, se requeriría que la puerta "bajara" del nivel del piso.
- r3 acoplador muy corto respecto a los otros eslabones.
- r4 ϕ pasa de más de 180° a menos de 180° , lo cual implica que el eslabón 13 oscile hacia abajo en contra de la restricción mencionada en r2. Ver figura 16(b).
- r5 mecanismo mal proporcionado, posible retroceso.
- r6 mecanismo con retroceso, problema r2.
- PRO mecanismos probables.

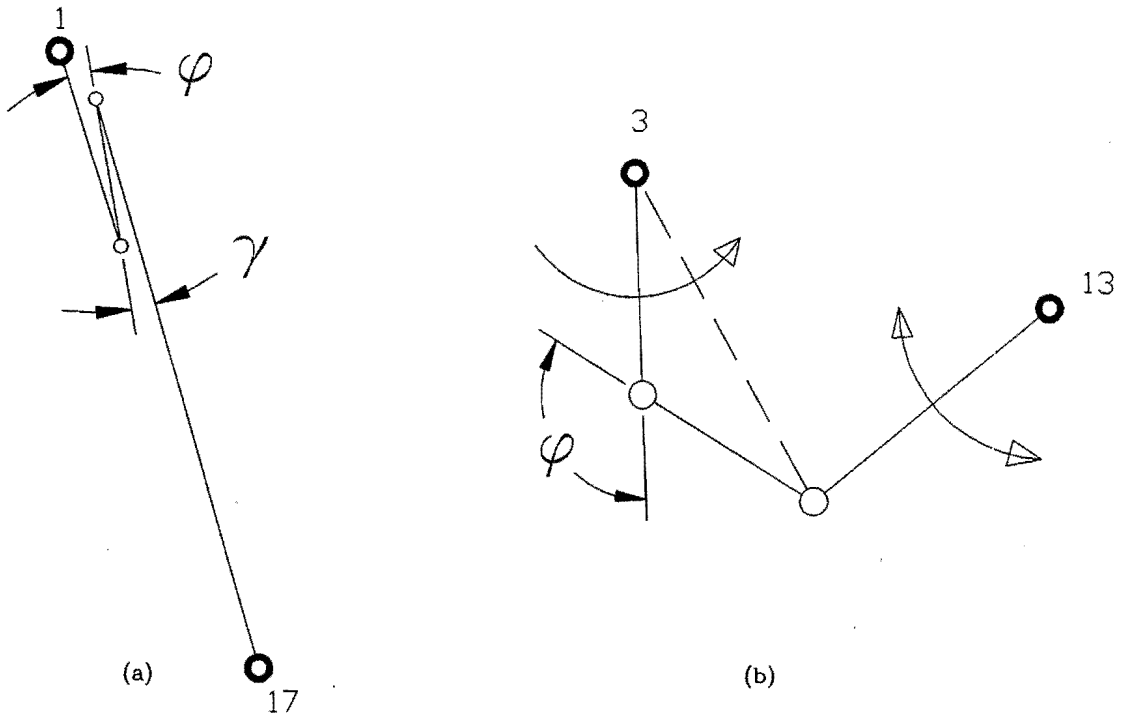


Figura 16. Ejemplos de mecanismos "defectuosos", (a) r_1 , (b) r_4

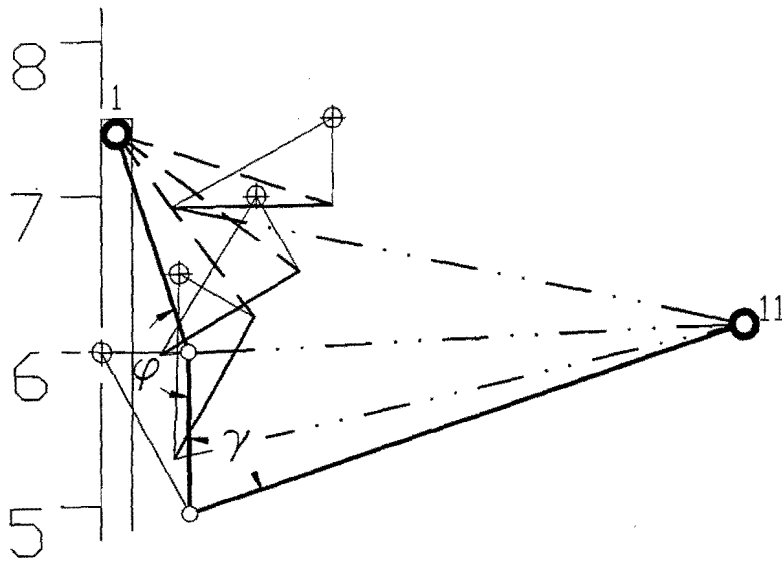
En el cuadro anterior se da una razón para la eliminación de las combinaciones, de manera que se obtienen siete pares de eslabones (PRO) que constituyen probables sistemas. Estos mecanismos son:

E1-E11; E2-E11; E3-E14; E16-E11; E17-E11
 E1-E14; E2-E14

Donde el primer eslabón E_i , es la barra motriz.

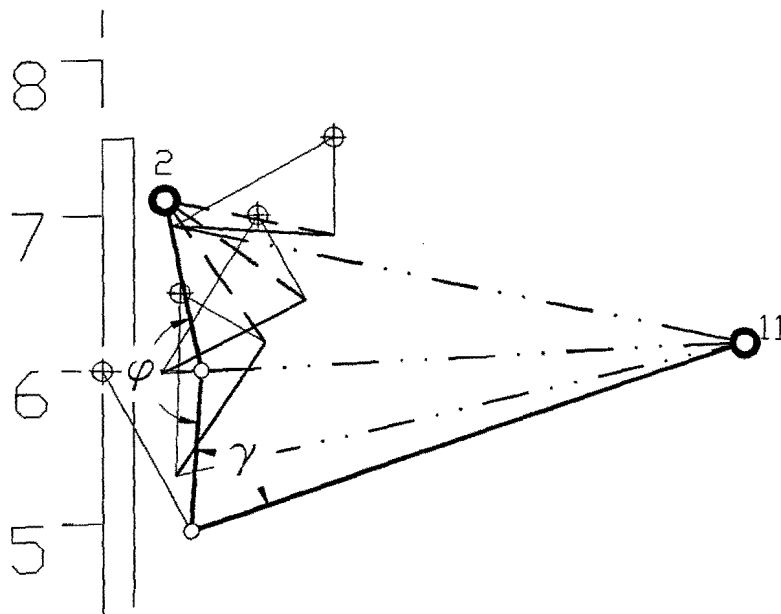
A continuación se hace un análisis del ángulo de transmisión de los mecanismos. Se muestra el sistema en sus cuatro fases y los ángulos que tiene la barra de entrada y la barra de salida con el acoplador.

En las figuras 17 a 23 se muestran los mecanismos resultantes y los cuadros de valores para los ángulos formados por la díada i y la barra acopladora. se marcan (*) aquellos valores que están fuera del rango recomendable.



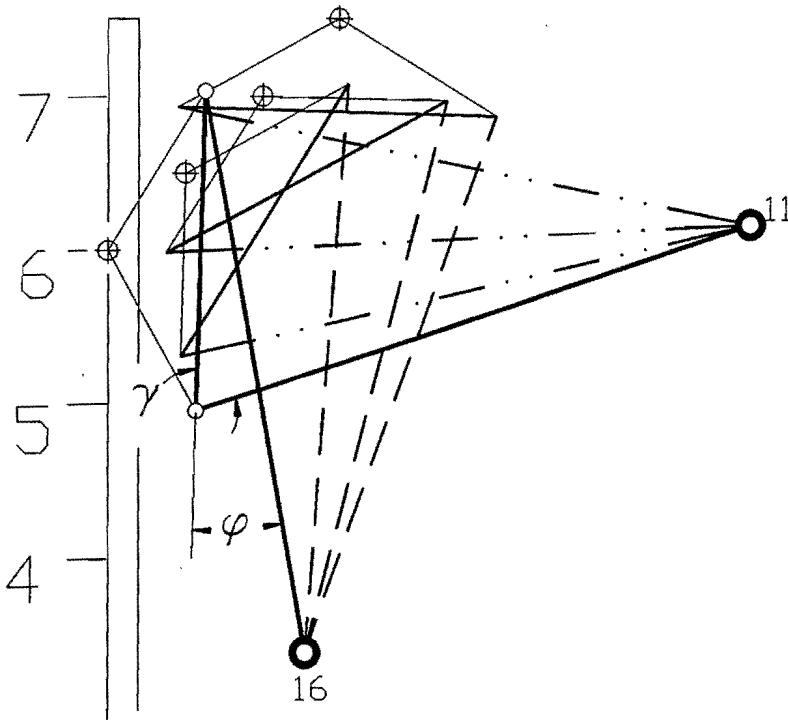
Pos.	ϕ_1	γ_{11}
1	163	72
2	114	48
3	67	28*
4	161	12*

Figura 17. mecanismo E1 con E11



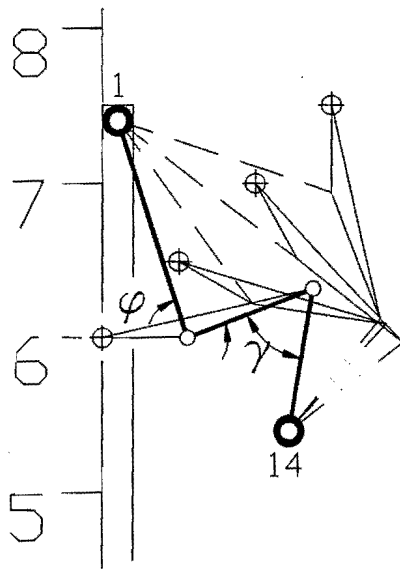
Pos.	ϕ_2	γ_{11}
1	164	68
2	111	44
3	62	24*
4	8	8*

Figura 18. mecanismo E2 con E11



Pos.	ϕ_{16}	γ_{11}
1	12	70
2	27	46
3	47	26*
4	72	10*

Figura 19. mecanismo E16 con E11



Pos.	ϕ_1	γ_{14}
1	87	59
2	136	56
3	178	76
4	129	119

Figura 20. Mecanismo E1 con E14

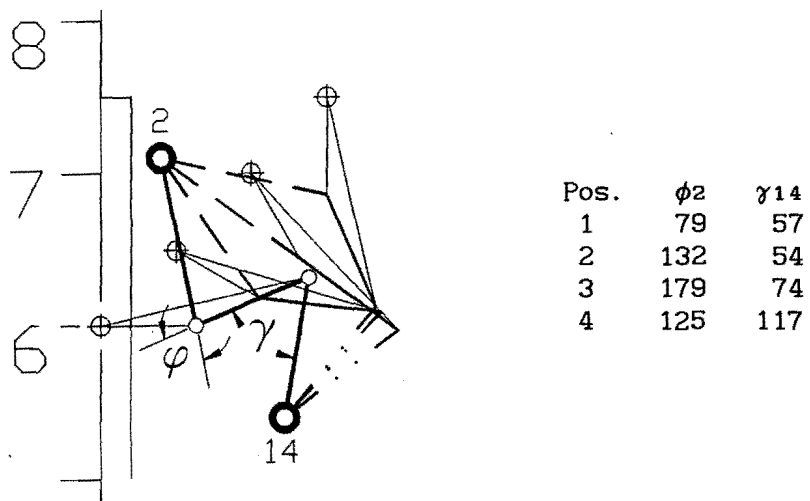


Figura 21. Mecanismo E2 con E14

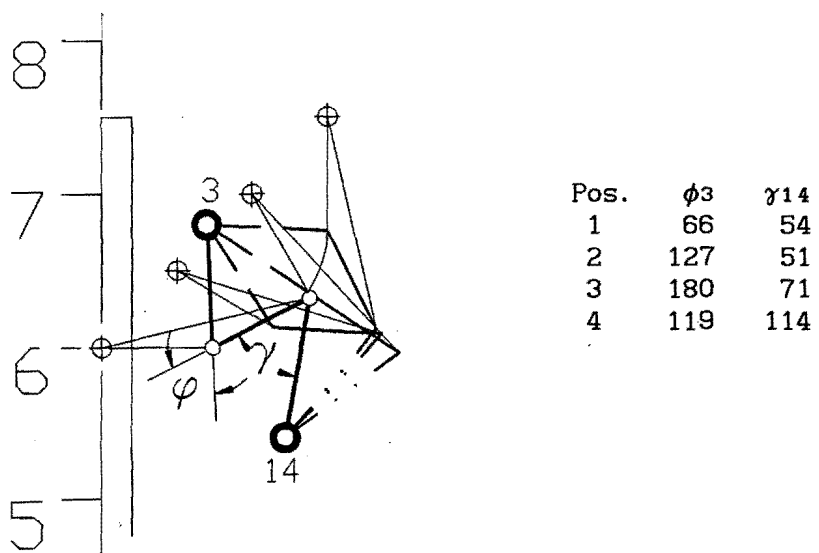
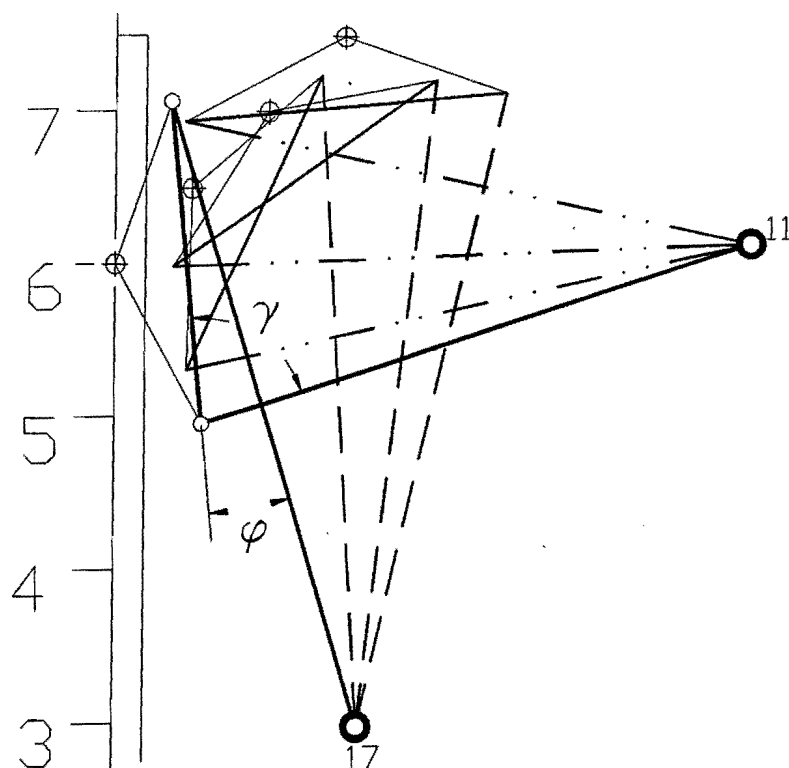


Figura 22. Mecanismo E3 con E14



Pos.	ϕ_{17}	γ_{11}
1	11	77
2	28	53
3	48	33*
4	71	17*

Figura 23. Mecanismo E17 con E11

Como se observa, cuatro mecanismos tienen el ángulo de transmisión fuera del rango recomendado [11]. Estos valores (*) en algunas de las fases hacen que esos sistemas queden descartados. Por lo tanto, de esta etapa, obtenemos los mecanismos: E1-E14; E2-E14 y E3-E14.

Como se puede apreciar, el eslabón E14 está presente en las tres combinaciones, por lo que la búsqueda del mejor mecanismo debe hacerse sobre la barra de entrada, eslabones: E1, E2 y E3.

Para establecer el mejor mecanismo para esta situación, se considera que la barra impulsada será E14, dejando al eslabón E_i ($i=1,2,3$), como barra motriz. Por lo tanto y analizando la ventaja mecánica del sistema, se debe buscar que el ángulo γ_{14} sea lo más cercano a 90° ; y que el ángulo ϕ_i sea lo más alejado a 90° .

En el siguiente cuadro se presentan los valores promedio de los ángulos de las barras de entrada y salida con el acoplador, así como la suma de los cosenos de γ_i , por un lado, y la suma de los senos de γ_{14} , por el otro; todo esto para los valores dados en los puntos de precisión.

Mecanismo	$\overline{\phi}_i$	$ \Sigma(\cos(\phi_i)) $	$\overline{\gamma}_{14}$	$ \Sigma(\sin(\gamma_{14})) $
E1-E14	132.5	2.30	77.5	3.53
E2-E14	128.8	2.05	75.5	3.50
E3-E14	123	1.68	72.5	3.45

El mejor mecanismo es aquel que tiene un valor promedio de ángulo de entrada más alejado de 90° , o una suma de cosenos, del ángulo ϕ de entrada, mayor; y que tiene un valor promedio del ángulo de salida más cercano a 90° , o una suma de senos, del ángulo γ_{14} , mayor. Todo esto en relación con la ventaja mecánica. Por lo tanto, el mejor mecanismo es el E1-E14, ya que exigirá un menor momento para impulsar la barra E1 y el eslabón E14 presentará una menor resistencia al movimiento. En la figura 24 se muestra el mecanismo seleccionado en las fases.

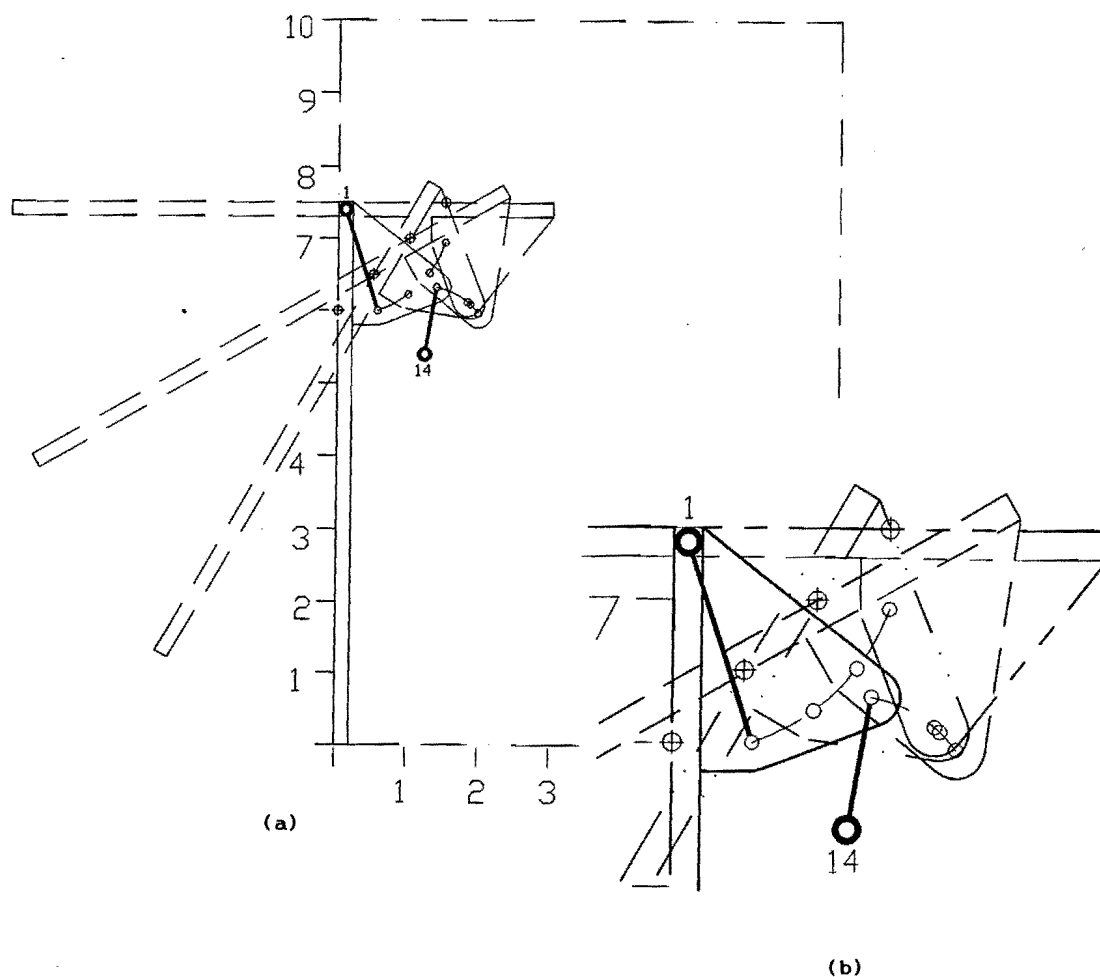


Figura 24. Mecanismo resultante (E1 con E14) en sus fases y detalle

La solución al problema ilustra el método y permite establecer en que región se tienen las díadas que cumplen mejor con los criterios cinemáticos. Claro está que el proceso de selección podría haberse enfocado en otra dirección, esto depende del problema y del criterio del diseñador. Por ello se insiste en que la metodología debe ser considerada como una herramienta que facilite al diseñador la determinación y visualización de las posibilidades de solución. Pero debe ser el diseñador quien conduzca el proceso y determine los elementos útiles a sus necesidades. De ahí que se insista en el alto valor del proceso interactivo.

Se hace el estudio de la sensibilidad de las curvas de Burmester, para este caso en particular. Los resultados se presentan en el apéndice D.

TRABAJOS DE INTERÉS RELACIONADOS CON EL TEMA

Existen en la literatura algunos trabajos que tratan el problema de síntesis para conducción de CR en el plano, basados en la teoría de Burmester, que constituye uno de los enfoques modernos de este tipo de síntesis. Mediante una consulta sobre el tema surgen los siguientes aspectos de interés que pudieran enriquecer la metodología y su estructuración.

Existe una propuesta basada en propiedades geométricas elementales y en operadores complejos para conducción en cuatro y cinco posiciones (Di Benedetto, 1985). Otra hace énfasis en ubicar el punto central de la díada en una zona específica del plano fijo, con el fin de garantizar que la barra motriz se ha de mover en la secuencia correcta. Se indica que es de fácil determinación la ubicación de tales áreas (Prentis, 1991. a). En extensión al trabajo anterior, surge un método para predecir el defecto de ramificación a partir de un análisis de ciertos aspectos de las CC y CPC (Prentis, 1991, b). En relación a esto, existe un trabajo que se enfoca a resolver el defecto de orden, mediante la identificación de secciones de las curvas de Burmester donde la díada motriz sigue el mismo sentido mientras pasa por las posiciones de precisión, en la secuencia prescrita. La solución describe estas regiones en base a procedimientos de rectificación de orden (Chase, 1991). Otro trabajo presenta un desarrollo sobre la sensibilidad de la configuración resultante para un mecanismo cuando se hacen ligeras variaciones en los valores de las posiciones de precisión. Se indica la utilidad

que tiene esto en el proceso interactivo del diseño de mecanismos (Mahableshwarkar, 1990). y por último, pero de gran interés, existe un trabajo que desarrolla una técnica de búsqueda aleatoria para determinar un conjunto de puntos de precisión, que estén en regiones especificadas por el diseñador, con el propósito de establecer las curvas que pasen por la región de interés (Lawley, 1987).

CONCLUSIONES

Aunque la teoría geométrica ha sido aplicada principalmente a una amplia variedad de trayectorias, puede aplicarse aún más en la conducción de CR y con sistemas articulados más complejos que el 4R. Existe en la literatura aplicaciones ilustrativas.

Es importante retomar los métodos geométricos y revisar su concepción y desarrollo con el fin de estructurar aplicaciones en computación que resuelvan problemas de síntesis, aprovechando la capacidad gráfica de los sistemas actuales.

Para el problema de síntesis de conducción de cuerpo rígido, el contar con una metodología con bases teóricas y aportaciones tomadas de trabajos existentes permitirá que, eventualmente, se tenga un marco para la estructuración de un proceso automático de diseño para esta aplicación.

En el trabajo se presenta una metodología que, operando analíticamente, presenta los resultados en forma gráfica permitiendo al diseñador las ventajas de los procedimientos geométricos con la rapidez y precisión de los analíticos. Mediante la estructuración y programación de la propuesta, es factible contar con una poderosa herramienta para el diseño de sistemas articulados para la conducción de CR.

APENDICES

APÉNDICE A

TEORÍA DE BURMESTER

INTRODUCCIÓN

La conducción de un cuerpo rígido (CR) por un plano depende del número de posiciones a las cuales se ha de conducir y del tipo de movimiento por generar. Para un movimiento generalizado, traslación y rotación, interesa resolver el problema de movimiento del CR mediante la conducción de puntos del plano móvil, que contiene al CR, por trayectorias circulares. La manera de lograr esto depende del número de posiciones que ha de ocupar el CR en su desplazamiento.

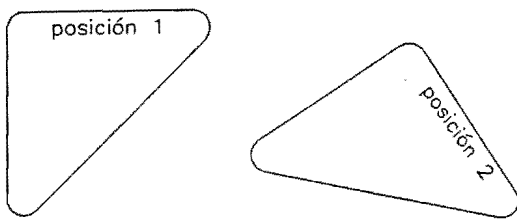
El movimiento del CR por dos posiciones se puede lograr mediante una rotación pura respecto a un punto del plano móvil conocido como polo [12]. En la figura A.1.a se muestra el desplazamiento de un CR, los puntos A y B representan al mismo en las dos posiciones, de tal forma que se establece el movimiento como el desplazamiento de la línea AB.

Con las líneas A_1B_1 y A_2B_2 , se dibujan sus mediatrices, ver figura A.1.b, el punto de intersección de ambas es el polo que representa el movimiento del CR de la posición 1 a la 2 como una rotación respecto al punto P_{12} . Esto se muestra en la figura A.1.c, donde se puede apreciar que el desplazamiento es factible mediante la elección de un punto del plano móvil que contiene al CR, como pivote para una rotación que produzca el movimiento requerido.

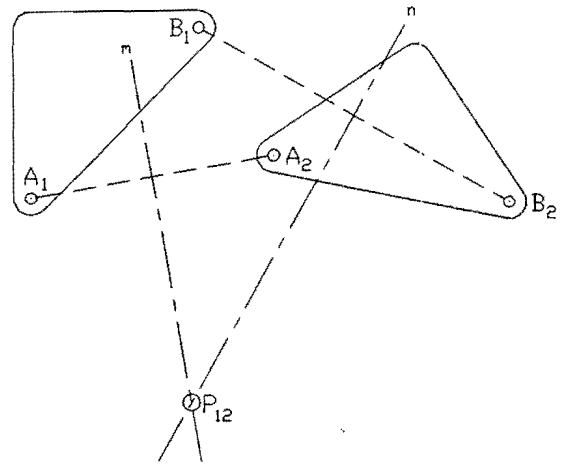
Si se desea efectuar el movimiento mediante la conducción de dos puntos del CR por trayectorias circulares, se aprovecha el hecho de que los puntos pertenecientes a las mediatrices m y n , son equidistantes a los puntos A_1 y A_2 y a B_1 y B_2 , respectivamente, para elegir dos puntos sobre ambas líneas que sirvan como pivotes fijos, Q_1 y Q_2 , de dos manivelas QA que conduzcan al CR en el movimiento deseado. Ver figura A.1.d.

CURVAS DE BURMESTER

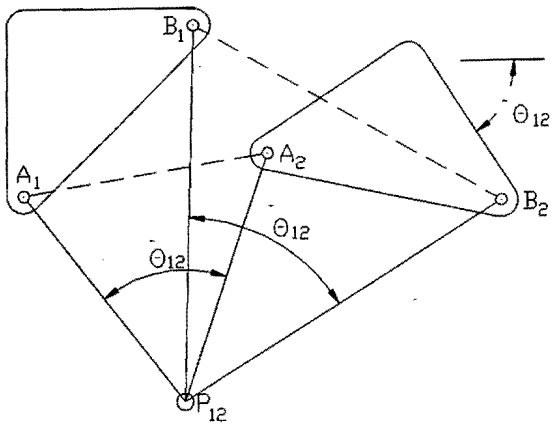
Ahora considérese el desplazamiento de un cuerpo rígido (CR) por tres posiciones, ver figura A.2. Para cualquiera de sus puntos, A por ejemplo, es po



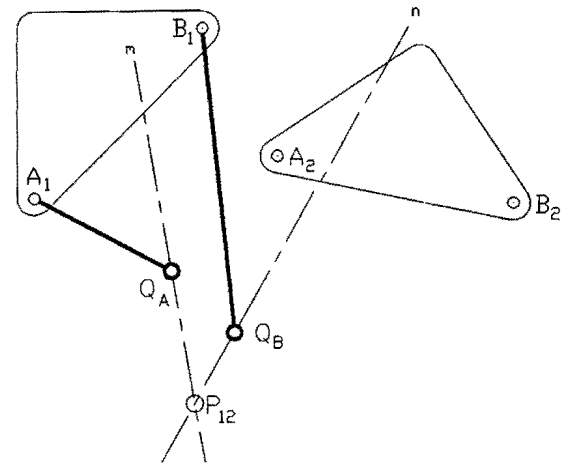
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura A.1. Movimiento de un cuerpo rígido por dos posiciones

sible establecer un arco circular que pase por las tres posiciones: A_1 , A_2 y A_3 , correspondientes; dado que por tres puntos se puede hacer pasar un y sólo un, arco de circunferencia. Cuando se consideran cuatro posiciones para el desplazamiento del CR, ver figura A.3, ya no es fácil establecer qué punto A es útil para describir un movimiento circular que lleve al CR por las cuatro posiciones, dado que no existe, en general, una circunferencia que pase por las cuatro ubicaciones A_i que caracterizan al movimiento. Sin embargo existe un conjunto de puntos, sobre el plano móvil que contiene al CR, que cumplen con la propiedad de estar sobre un arco circular cuando el CR pasa por las cuatro posiciones. En la figura A.3 el punto D sería un elemento de tal conjunto. Estos puntos especiales pueden ser utilizados, en una extensión sobre el plano móvil, como articulaciones del movimiento mediante barras articuladas en el centro del arco circular mencionado.

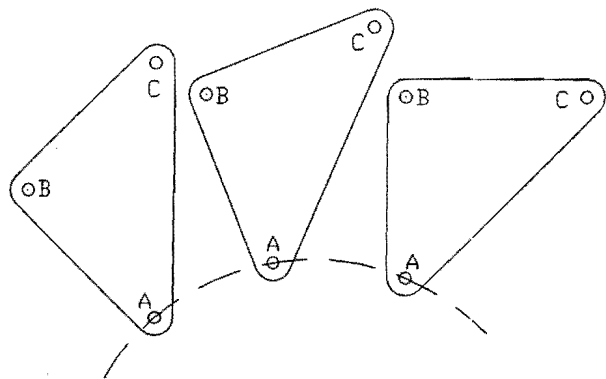


Figura A.2. Movimiento de un CR por tres posiciones

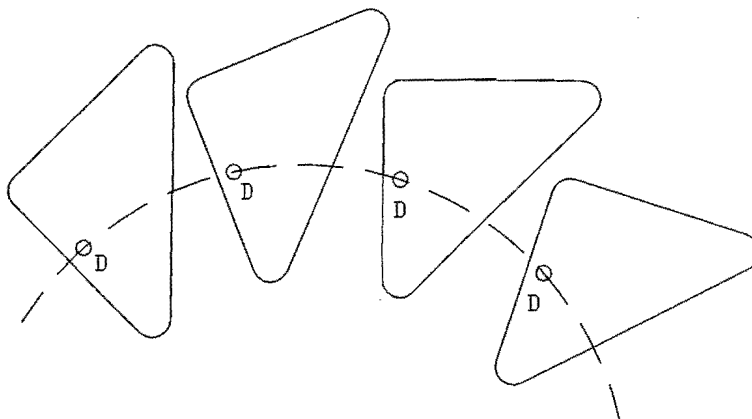


Figura A.3. Movimiento de un CR por cuatro posiciones

Al lugar geométrico de los puntos sobre el plano móvil que cumplen con la condición de estar sobre un arco circular para el movimiento por cuatro posiciones, se le conoce como **curva de puntos circulares (CPC)**. Estos puntos caracterizan distintas circunferencias, distintos radios y, en consecuencia, distintos centros de las mismas. Al lugar geométrico de los centros de tales circunferencias se le conoce como **curva de centros (CC)**.

Entonces, se tiene una curva de puntos circulares, que está asociada al plano móvil y una curva de centros sobre el plano fijo. Para cuatro posiciones del plano móvil ambas curvas son únicas y se les conoce como **curvas de Burmester**. Ludwig Burmester desarrolló la solución al problema de conducción por cuatro posiciones mientras trabajaba en la generación de trayectorias rectilíneas aproximadas. El estudio de las curvas de puntos circulares y de centros, así como su aplicación se engloban en la conocida como **teoría de Burmester**. La curva de centros o curva de Burmester, también es conocida como curva de polos.

El grado de las curvas de Burmester es cúbico [13] y, de acuerdo a Bézout [14], el número máximo de puntos de intersección es de nueve. Por otro lado, la CC pasa por el total de seis polos de la configuración cinemática, mientras que la CPC pasa por los tres polos P_{1j} , P_{1k} y P_{1l} , donde el subíndice i corresponde a la posición del CR que sirve como referencia para el trazo de la curva de puntos circulares.

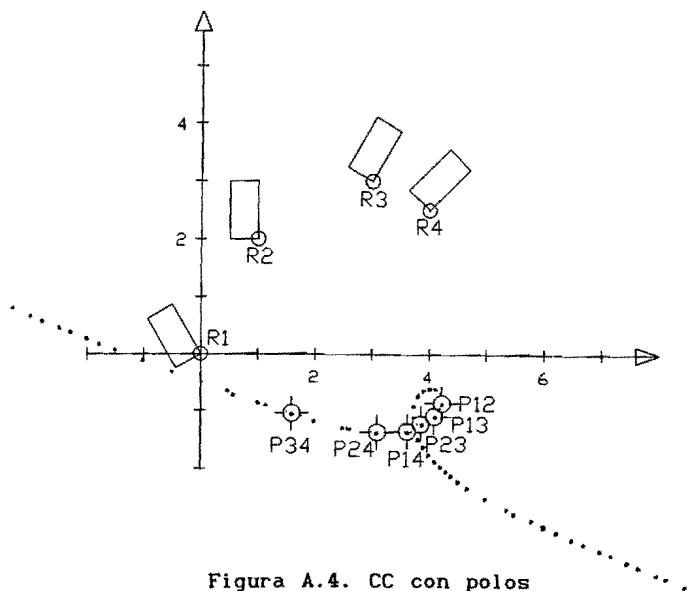


Figura A.4. CC con polos

PUNTOS DE BURMESTER

Si ahora el plano móvil va a ocupar cinco posiciones y se busca algún punto del mismo que quede sobre un arco circular al pasar el CR por las cinco ubicaciones, el problema tiene solución, pero el número de posibilidades se re

duce a un número finito. En base a lo expuesto en párrafos anteriores, para el movimiento de un CR por tres posiciones, se tiene ω^2 [15] posibles puntos y circunferencias que cumplen con la condición. Si el movimiento es a través de cuatro posiciones, se tiene ω^1 puntos sobre el plano que cumplen con la condición de estar sobre una circunferencia en las cuatro posiciones; esto significa que aun cuando existe un conjunto infinito de puntos, su lugar geométrico es una curva. Pues bien, cuando el problema de conducción se extiende a cinco posiciones, la circunferencia que pasa por D_i ($i=1,4$), no fácilmente pasará por D_5 , ver figura A.5; pero existen ω^0 puntos, esto es, un número finito, que pertenecen a la CPC y que están sobre una circunferencia para las cinco posiciones.

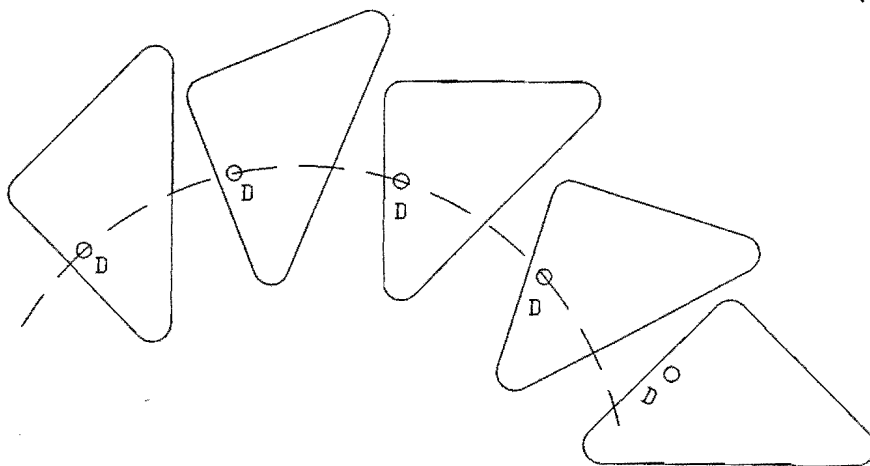


Figura A.5. Movimiento del CR por cinco posiciones

Estos puntos tan especiales son cuatro y pueden ser reales o imaginarios en pares. Estos puntos son conocidos como **puntos de Burmester (PB)**, y son de importancia para determinar los puntos del plano móvil que se mueven en forma circular al pasar por las cinco configuraciones que es, ahora sí, el número máximo de posiciones por el cual se puede llevar a un CR y tener algún punto del mismo describiendo un arco circular respecto al plano fijo.

Para cada PB real existe un punto central real y los puntos centrales se convierten a su vez en PB en una inversión cinemática. Analíticamente los PB corresponden a las cuatro raíces de una ecuación de cuarto grado [16],

que resultan reales o imaginarias a pares.

En consecuencia, para resolver el problema de conducir un CR por cinco posiciones, se establece el problema en dos partes: primero se obtienen las CC para dos conjuntos diferentes de cuatro posiciones [17], y posteriormente, se ubican los puntos centrales mediante la intersección de ambas curvas [18]. Ésta puede resultar en dos o cuatro puntos reales que, a su vez, se constituirán en un conjunto de uno o de seis sistemas, respectivamente, de conducción del CR. Ver Figura A.6.

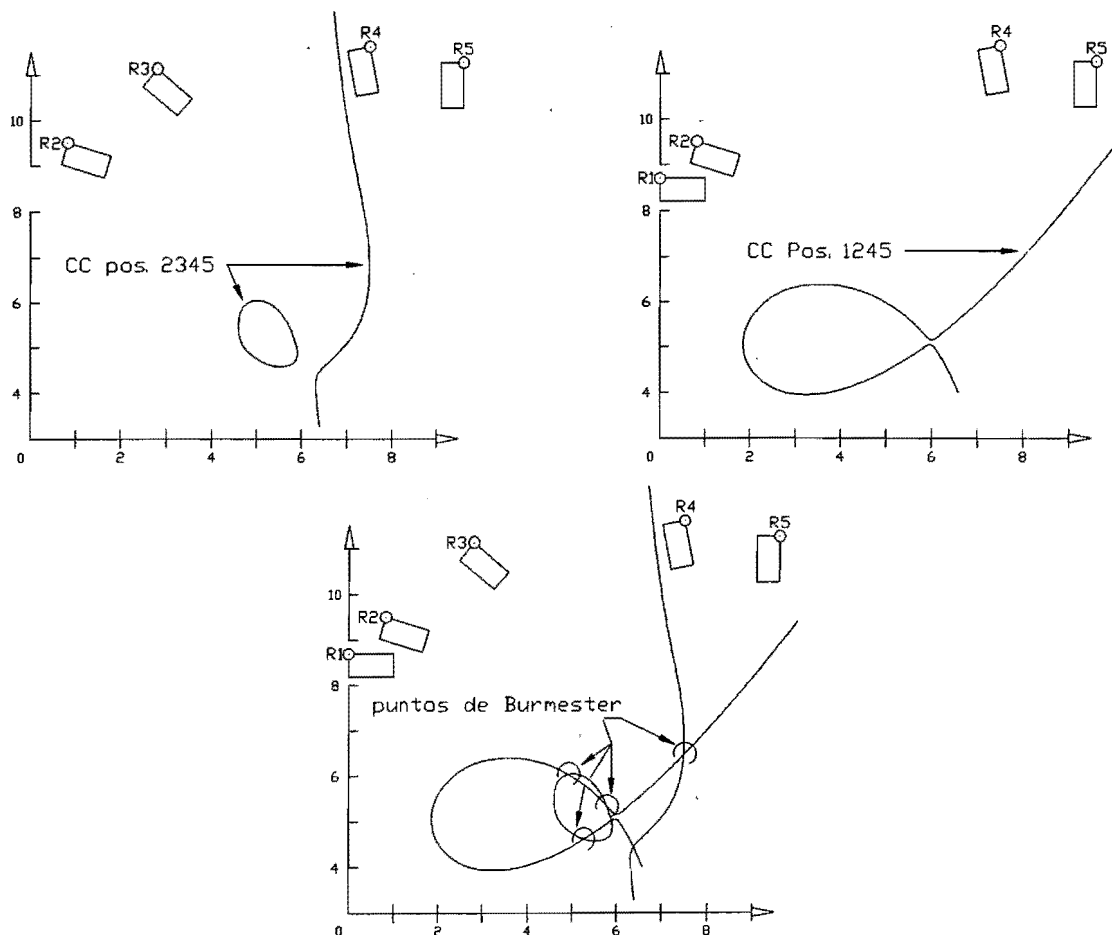


Figura A.6. Puntos de Burmester
(para el problema expuesto en la figura 5, pág. 9.)

CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA DE CENTROS

Para la construcción de la curva de puntos centrales Burmester elaboró el siguiente método gráfico (Nieto, 1978). En la figura A.7 se muestran cuatro polos de los seis correspondientes al movimiento de un Cr por cuatro posiciones. Los cuatro polos mostrados constituyen lo que se conoce como cuadrilátero polos opuestos. En este caso existen tres y se constituyen por polos con ambos subíndices diferentes y colocados en vértices opuestos del cuadrilátero, como se aprecia en la figura.

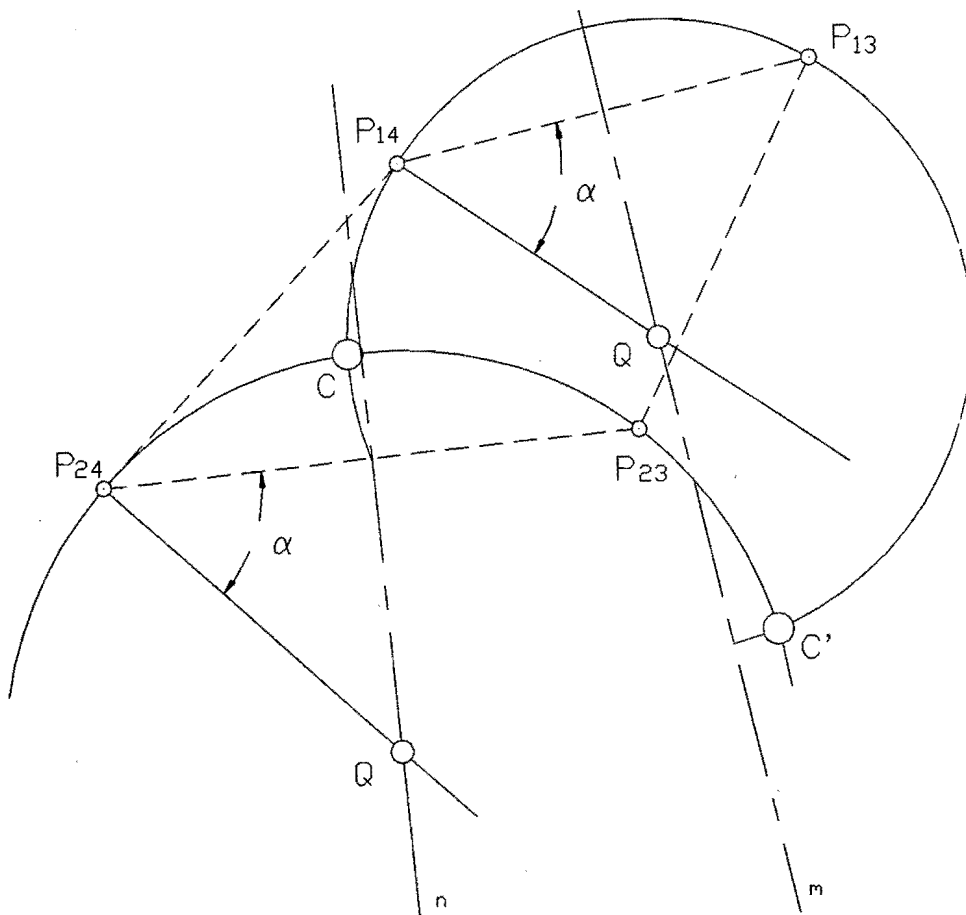


Figura A.7. Construcción de la curva de centros

Como ya se mencionó antes, la curva de centros pasará por los seis polos, por lo tanto ya se conoce la ubicación de estos puntos de la curva y se deben determinar puntos adicionales para construir una aproximación de la misma. Esto se realiza de la siguiente manera:

1) Se dibujan las mediatrices a dos de los lados del cuadrilátero, por ejem

plo los lados $P_{14}P_{13}$ y $P_{24}P_{23}$, obteniéndose las líneas m y n .

- 2) Sobre los lados mencionados se dibuja una línea a un ángulo α que interseque a la mediatriz en punto Q .
- 3) Con centro en Q y con radio QP_{14} , se trazan arcos de circunferencia que se intersecten.
- 4) Los dos puntos resultantes de la intersección, C y C' , constituyen los puntos buscados para el trazo de la curva de centros.
- 5) El ángulo α se toma como variable con un intervalo $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$, de manera que se tracen circunferencias con centros a lo largo de toda la mediatriz y se logre así un conjunto amplio de puntos para el trazo de la curva.

Normalmente se buscaría un conjunto representativo de los puntos de la curva que permitan, adicionalmente a los polos, construir una aproximación de dicha curva.

La construcción de la curva de puntos circulares respondería a un tratamiento similar en el aspecto gráfico pero con variantes en los polos a emplear, se utilizan además los conocidos como polos imagen.

APÉNDICE B

MÉTODO Y SUS ECUACIONES

la obtención de la función de síntesis del sistema 4R para conducir el cuerpo rígido, se basa en la obtención de las díadas conductoras (AB) y conducida (A^*B^*) (Ángeles Álvarez, 1978). En la figura B.1 se muestra el CR en las posiciones 0, 1 y j -ésima, así como la barra que lo ha de conducir. Ambos referidos a un sistema fijo xy.

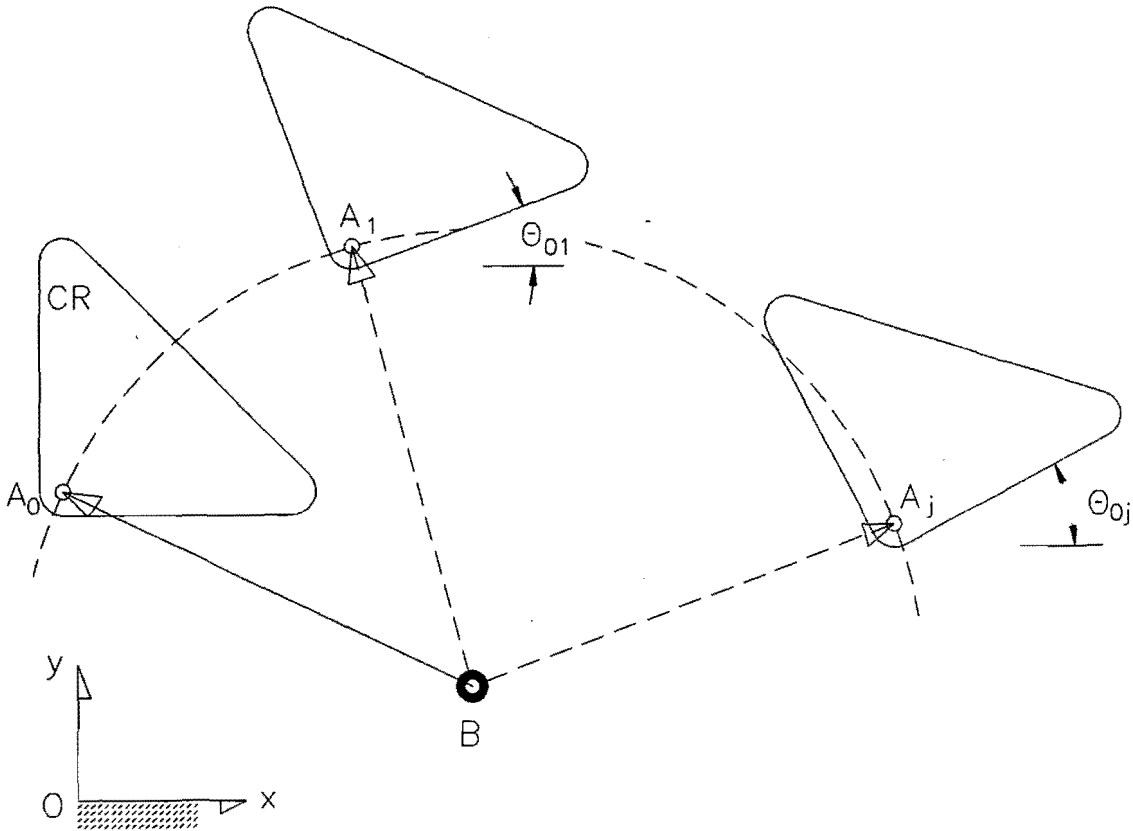


Figura B.1. trayectoria de un punto del CR

Como la barra AB es también un CR, en el movimiento de la misma el vector que la represente tendrá magnitud constante. Esto permite plantear la ecuación de restricción para el desplazamiento del manivela:

$$(\mathbf{a}_j - \mathbf{b})^T(\mathbf{a}_j - \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_0 - \mathbf{b})^T(\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}) \quad i=1, \dots, n \quad (1)$$

donde \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_j y \mathbf{b} , representan a los puntos en el sistema de referencia. Con esta ecuación se construye el modelo para la solución del problema.

En la figura B.2 se muestra al CR y a una barra AB que ha conducido al punto A del mismo por una trayectoria circular. ambos cuerpos están referidos al origen O. Dado que el punto B es un punto central (sirve de pivote a la diáda AB), el vector \mathbf{b} es invariante; además los vectores \mathbf{BA} y \mathbf{z} son constantes en magnitud. El CR tiene un desplazamiento angular dado por $\theta_j - \theta_0$.

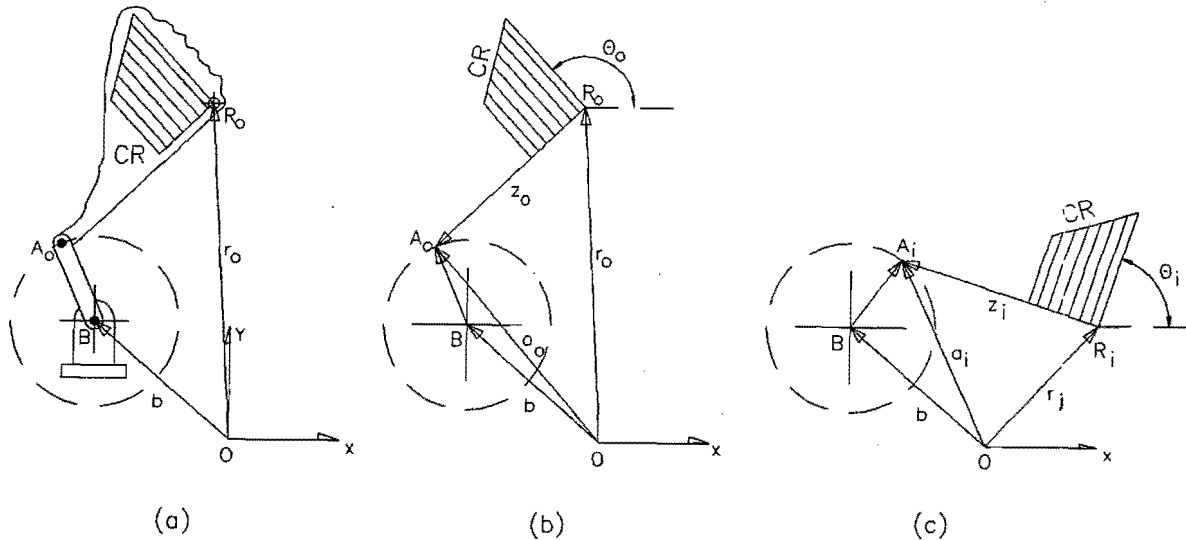


Figura B.2.

(a) Eslabones y CR, (b) posición inicial, (c) posición j -ésima

De la ecuación (1) que establece la restricción cinemática al movimiento de la barra AB y considerando la norma de los vectores, se tiene:

$$\|\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}_j - \mathbf{b}\| \quad (2)$$

Como se aprecia en la figura B.2.c,

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{r}_j + \mathbf{z}_j$$

por lo tanto:

$$\|\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{z}_j + \mathbf{r}_j - \mathbf{b}\| \quad (4)$$

Por otro lado, el CR se somete a una rotación: $\beta_j = \theta_j - \theta_0$, que se puede expresar como:

$$\mathbf{z}_j = [\mathbf{Q}]\mathbf{z}_0$$

donde:

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} C\beta_j & -S\beta_j \\ S\beta_j & C\beta_j \end{bmatrix}$$

$$C\beta = \cos(\beta)$$

$$S\beta = \sin(\beta)$$

z_0 vector sobre el CR

Como $z_0 = a_0 - r_0$, se tiene:

$$z_j = [Q](a_0 - r_0)$$

Por lo tanto la ecuación (4) queda como:

$$\|a_0 - b\| = \|[Q](a_0 - r_0) + r_j - b\| \quad (5)$$

donde r representa a un punto del CR.

Para el problema $\{r_0, r_j, \theta_j, \theta_j\}$ son los datos de la configuración del CR en su movimiento, mientras que $\{a_j, a_j, b_j, b_j\}$ son las variables por determinar y representan las coordenadas de los puntos circular y central, respectivamente.

Para el problema de conducción de CR por cuatro posiciones, se tiene una posición inicial y tres adicionales, por lo tanto se puede escribir la ecuación (5) para tres conjuntos de parámetros. De tal forma la ecuación se resulta en la siguiente:

$$\left\| \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \right\| = \left\| [Q] \left[\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \right\| \quad (6)$$

Efectuando las operaciones indicadas, resulta:

$$\left\| \begin{bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} (a_x - x_0)C\beta_j - (a_y - y_0)S\beta_j + x_j - b_x \\ (a_x - x_0)S\beta_j - (a_y - y_0)C\beta_j + y_j - b_y \end{bmatrix} \right\| \quad (7)$$

Elevando al cuadrado la ecuación para eliminar el radical en la norma:

$$\left\| \begin{bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} (a_x - x_0)C\beta_j - (a_y - y_0)S\beta_j + x_j - b_x \\ (a_x - x_0)S\beta_j - (a_y - y_0)C\beta_j + y_j - b_y \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (7')$$

Obteniendo el cuadrado de la norma indicado en la ecuación anterior:

$$(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = [(a_x - x_0)C\beta_j - (a_y - y_0)S\beta_j + x_j - b_x]^2 + [(a_x - x_0)S\beta_j - (a_y - y_0)C\beta_j + y_j - b_y]^2 \quad (8)$$

Ahora se introduce una de las coordenadas del punto central como parámetro de la ecuación, dado que sólo se tiene tres posiciones adicionales y cuatro incógnitas. Esto es, la ecuación (8) se planteará para $j=1,,3$, resultando en un sistema de tres ecuaciones. por lo tanto tomando como

$$\text{parámetro } bs = bx$$

y desarrollando la ecuación (8), agrupando términos en factores de las variables a_x , a_y y b_y , se obtiene la función de síntesis para la posición j .

$$f_j = a_{j1} a_x + a_{j2} a_y + a_{j3} b_y + g'_j a_x b_y + h'_j a_y b_y + k'_j = 0; \text{ para } j=1,,3 \quad (9)$$

donde:

a_x y a_y : coordenadas del punto circular A

b_x y b_y : coordenadas del punto central B

a_{j1} , g'_j , h'_j , k'_j : coeficientes (ver B.3 y B.4)

Esta función relaciona los datos de los puntos de precisión para el CR con las coordenadas incógnitas de los puntos A y B.

Haciendo la representación para $j=1,,3$, se tiene la siguiente ecuación no lineal:

$$f = [A]x + g'_x a_x b_y + h'_y a_y b_y + k' = 0 \quad (10)$$

donde:

$$[A] = [a_{j1} \quad a_{j2} \quad a_{j3}] \quad \text{para } j=1,,3$$

$$x = (a_x, a_y, b_y)^T = (x_1, x_2, x_3)^T$$

$$g' = (g'_j)$$

$$h' = (h'_j)$$

$$k' = (k'_j)$$

De la ecuación (10) resulta:

$$x = -[A]^{-1} g'_x a_x b_y - [A]^{-1} h'_y a_y b_y - [A]^{-1} k' \quad (11)$$

Sustituyendo:

$$g = [A]^{-1} g'$$

$$h = [A]^{-1} h'$$

$$k = [A]^{-1} k'$$

La ecuación queda:

$$x = g(a_x b_y) + h(a_y b_x) + k \quad (12)$$

Al considerar las tres posiciones adicionales, resulta el sistema no lineal de ecuaciones:

$$x_1 = g_1 x_1 x_3 + h_1 x_2 x_3 + k_1 \quad (a)$$

$$x_2 = g_2 x_1 x_3 + h_2 x_2 x_3 + k_2 \quad (b) \quad (13)$$

$$x_3 = g_3 x_1 x_3 + h_3 x_2 x_3 + k_3 \quad (c)$$

De las ecuaciones (a) y (c) resulta:

$$x_1 = \frac{h_1 x_3 - k_3 h_1 + k_1 h_3}{(g_3 h_1 - g_1 h_3) x_3 + h_3} \quad (14)$$

De las ecuaciones (b) y (c) resulta:

$$x_2 = \frac{g_2 x_3 - g_2 k_3 + g_3 k_2}{(h_3 g_2 - h_2 g_3) x_3 + g_3} \quad (15)$$

Sustituyendo x_1 y x_2 en la ecuación (14.c), se llega al polinomio cúbico:

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} x_3^3 - \left[\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} + (g_1 + h_2) \right] x_3^2 + \left[1 + \begin{vmatrix} g_1 & g_3 \\ k_1 & k_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_2 & h_3 \\ k_2 & k_3 \end{vmatrix} \right] x_3 - k_3 = 0 \quad (16)$$

La ecuación (16) representa el polinomio que proporciona la coordenada complementaria del punto central B. con las ecuaciones (14) y (15) se obtienen las coordenadas del punto circular A. A continuación se proporcionan los elementos que intervienen en las ecuaciones así como la secuencia del cálculo para las coordenadas.

B.1 Coordenadas de los puntos de precisión: (x_i, y_i) ; para $i=0,,3$

B.2 Desplazamiento angular relativo del CR: $\beta_j = \theta_j - \theta_0$ para $j=1,,3$

B.3 Coeficientes de la matriz A:

$$a_{j1} = b_s - x_0 + (x_j - b_s) \cos \beta_j + y_j \sin \beta_j$$

$$a_{j2} = -y_0 + (b_s - x_j) \sin \beta_j + y_j \cos \beta_j$$

$$a_{j3} = x_0 \sin \beta_j + y_0 \cos \beta_j - y_j \quad \text{para } j=1,,3$$

B.4 Elementos de los vectores g' , h' y k' :

$$g'_j = -\text{sen}\beta_j$$

$$h'_j = 1 - \text{cos}\beta_j \quad \text{para } j=1,,3$$

$$k'_j = \frac{x_o^2 + y_o^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} + [(x_j - b_s)y_o - x_o y_j] \text{sen}\beta_j + \\ - [(x_j - b_s)x_o + y_o y_j] \text{cos}\beta_j - b_s x_j; \quad \text{para } j=1,,3$$

B.5 Con lo anterior se obtienen los vectores g , h y k :

$$g = -A^{-1} g'$$

$$h = -A^{-1} h'$$

$$k = -A^{-1} k'$$

B.6 A partir de la función de síntesis resulta el siguiente sistema:

$$x = g \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} a & b \\ y & y \end{pmatrix} + k; \quad \text{donde: } x = [a_x, a_y, b_y]^T \\ = [x_1, x_2, x_3]^T$$

B.7 Expresando lo anterior en términos de una sola variable, se obtiene el siguiente polinomio cúbico:

$$\alpha_3 x_3^3 + \alpha_2 x_3^2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_0 = 0$$

donde:

$$\alpha_3 = \det(M_{33})$$

$$\alpha_2 = -(\det(C) + g_1 + h_2)$$

$$\alpha_1 = 1 + \det(M_{22}) + \det(M_{11})$$

$$\alpha_0 = -k_3$$

$$C = [g, h, k]^T$$

$$M_{ij} = \text{menor } ij \text{ de la matriz } C$$

$$a_i = \text{elemento } i \text{ del vector } v \text{ para } i=1,,3$$

B.8 Los otros valores de x son:

$$x_1 = \frac{h_1 x_3 - k_3 h_1 + k_1 h_3}{(g_3 h_1 - g_1 h_3) x_3 + h_3}$$

$$x_2 = \frac{g_2 x_3 - g_2 k_3 + g_3 k_2}{(h_3 g_2 - h_2 g_3) x_3 + g_3}$$

Como b_x es dato, $a_x = x_1$, $a_y = x_2$ y $b_y = x_3$, completan las coordenadas de los puntos A y B.

Por otro lado, La función de síntesis, para la configuración j y para el parámetro $b_s = b_y$

resulta:

$$f_j = a_{j1} a_x + a_{j2} a_y + a_{j3} b_x + h'_j a_x b_x + g'_j a_y b_x + k'_j = 0, \quad \text{para } j=1,,3$$

con la nomenclatura ya descrita antes.

Los elementos de las ecuaciones, así como la secuencia para el cálculo de las coordenadas, se dan a continuación.

B.9 Coeficientes de la matriz A:

$$a_{j1} = x_j \cos \beta_j + (y_j - b_s) \operatorname{sen} \beta_j - x_o$$

$$a_{j2} = -x_j \operatorname{sen} \beta_j + (y_j - b_s) \cos \beta_j - y_o + b_s$$

$$a_{j3} = -x_j + x_o \cos \beta_j - y_o \operatorname{sen} \beta_j \quad \text{para } j=1,,3$$

B.10 Los elementos de los vectores g' , h' y k , son:

$$g'_j = \operatorname{sen} \beta_j$$

$$h'_j = 1 - \cos \beta_j$$

$$k'_j = \frac{x_o^2 + y_o^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} + [y_o x_j - x_o (y_j - b_s)] \operatorname{sen} \beta_j + \\ - [x_o x_j + y_o (y_j - b_s)] \cos \beta_j - y_j b_s \quad \text{para } j=1,,3$$

B.11 Con lo anterior se obtienen los vectores g , h y k :

$$g = -A^{-1} g'$$

$$h = -A^{-1} h'$$

$$k = -A^{-1} k'$$

B.12 A partir de la función de síntesis, resulta el siguiente sistema:

$$\mathbf{x} = \mathbf{h} \begin{pmatrix} a_x \\ b_x \end{pmatrix} + \mathbf{g} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} + \mathbf{k}; \quad \text{donde: } \mathbf{x} = [a_x, a_y, b_x]^T \\ = [x_1, x_2, x_3]^T$$

B.13 Expresado lo anterior en términos de una sola variable, se obtiene el polinomio cúbico:

$$\alpha_3 x_3^3 + \alpha_2 x_3^2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_0 = 0$$

donde:

$$\alpha_3 = \det(M_{33})$$

$$\alpha_2 = -(\det(\mathbf{C}) - g_2 - h_1)$$

$$\alpha_1 = -(1 + \det(M_{12}) + \det(M_{21}))$$

$$\alpha_0 = k_3$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{k}]^T$$

$$M_{ij} = \text{menor } ij \text{ de la matriz } \mathbf{C}$$

$$v_i = \text{elemento } i \text{ del vector } \mathbf{v} \text{ para } i=1,,3$$

B.14 Los otros valores son:

$$x_1 = \frac{g_1 x_3 + g_3 k_1 - g_1 k_3}{(g_1 h_3 - g_3 h_1) x_3 + g_3}$$

$$x_2 = \frac{h_2 x_3 + h_3 k_2 - h_2 k_3}{(h_2 g_3 - h_3 g_2) x_3 + h_3}$$

En este caso b_y es dato y $a_x = x_1$, $a_y = x_2$, $b_x = x_3$, completan las coordenadas de los puntos A y B.

APÉNDICE C

FUNCIONES DE PROGRAMACIÓN

Con el fin de efectuar el cálculo mediante las ecuaciones descritas en el a péndice B, se ha empleado el paquete de computación MATLAB, que consiste en un programa de cálculo que permite utilizar tanto las funciones internas del mismo, como funciones o rutinas creadas por el usuario. De tal forma, se listan las funciones que proporcionan los valores de las coordenadas de los puntos centrales y circulares. Cada función hace uso de otras que ya existen en MATLAB, o de funciones nuevas que se listan secuencialmente.

Se da primero el listado para efectuar los cálculos en un intervalo de b_x , después se listan las funciones para el intervalo b_y . Conviene aclarar que el cálculo se puede efectuar tanto para todo un intervalo, como para un valor individual de b_x o b_y .

Las funciones han sido editadas para su presentación pero, en los aspectos esenciales, mantienen su relación con las ecuaciones y notación de lo expuesto en el apéndice B.

Las funciones van insertadas en el paquete como archivos: *función.m*, de manera que puedan ser reconocidas y operadas por MATLAB.

C.1 Funciones necesarias para el cálculo de las coordenadas de los puntos central y circular teniendo como parámetro b_x . El procedimiento comienza por definir el intervalo de b_s , se calculan las coordenadas b_y , a_x y a_y , que pueden tener hasta tres valores reales para cada valor de b_x .

```
function [ax,ay,bx,by] = interbx(D,bx1,bx2,in)
%   INTERbx: Se calculan los vectores ax, ay, bx y by; a partir
%           del intervalo de valores dado para bs (bx).
%           [ax, ay, bx, by]=INTERbx(D, bx1, bx2, in)
%           donde: bx1 límite inferior del intervalo de bs,
%                  bx2  "      superior
%                  in  incremento entre puntos del intervalo.

%                                     920423   s/c.
k=0;
for i=bx1:in:bx2,
    bs=i;
    vaenbx=i
```

```

    k=k+1;
    M=coorbx(D, bs);
    for j=1:3,
        ax(k, j)=M(j, 1);
        ay(k, j)=M(j, 2);
        by(k, j)=M(j, 3);
    end
    bx(k, 1)=i;
end

```

```

function Coord = coorbx(D, bs)
%   COOR_bx: Cálculo de las coordenadas del punto circular A y
%           by del punto central de una diada, dada la coorde-
%           nada bx como parámetro del diseño para llevar un CR
%           por tres posiciones adicionales a la de referencia.
%   COORbx(D, bs)
%           D es la matriz de posiciones:
%           x0  y0  θ0
%           x1  y1  θ1
%           x2  y2  θ2
%           x3  y3  θ3
%           bs es el valor de bx.
%           escribese la matriz D=[] y bs=(bx).

```

```

%
%                               920417 s/c.
[w, B, X, Y]=datos(D);
[A, gp, hp, kp]=matvecbx(bs, B, X, Y, w);
[g, h, k]=vectores(A, gp, hp, kp);
p=coefbx(g, h, k);
[ax, ay, by]=valorbx(p, g, h, k);
bx=bs;
Coord=[ax, ay, by];

```

```

function [w, B, X, Y] = datos(D)
%   DATOS: Se recibe la matriz de datos compuesta de los vectores de
%           posición y dirección del CR requeridos:  $D=[x, y, \theta]$ . Se de-
%           terminan los vectores que se emplearán en los cálculos.
%   DATOS(D)

```

```

%
%                               920417 s/c.
for i=1:3,
    w(i, 1)=D(1, i);
end
for j=1:3,
    B(j, 1)=(D(j+1, 3)-w(3))*pi/180;
    X(j, 1)=D(j+1, 1);
    Y(j, 1)=D(j+1, 2);
end
end

```

```

function [A, gp, hp, kp] = matvecbx(bs, B, X, Y, w)
%   MAT_VEC_bx: Se calculan la matriz A y los vectores g', h' y k' con
%           los datos proporcionados.

```

```

%           MATVEcbx(bs,B,X,Y,w): bs= parámetro del punto central
%           B = valores de  $\beta_1$ 
%           X,Y= coordenadas de puntos 1,2,3
%           w = coordenadas del pto. de ref.

%
%
%           920417 s/c.
x=w(1);
y=w(2);
v=bs-x;
z=x*x+y*y;
for i=1:3,
    u=X(i)-bs;
    c=cos(B(i));
    s=sin(B(i));
    A(i,1)=v+u*c+Y(i)*s;
    A(i,2)=-y-u*s+Y(i)*c;
    A(i,3)=x*s+y*c-Y(i);
    gp(i,1)=-s;
    hp(i,1)=1-c;
    kp(i,1)=(z+X(i)*X(i)+Y(i)*Y(i))/2+(u*y-x*Y(i))*s-(u*x+y*Y(i))*c
        -bs*X(i);
end

function [g,h,k] = vectores(A,gp,hp,kp)
%   VECTORES: Cálculo de los vectores g, h y k, requeridos para la
%   la determinación de los coeficientes del polinomio.
%   VECTORES(A, g', h', k')

%
%           920417 s/c.
Ai=inv(A);
g=-Ai*gp;
h=-Ai*hp;
k=-Ai*kp;

function pol = coefbx(g,h,k)
%   COEFbx: Se calculan los coeficientes a0, a1, a2 y a3 del
%   polinomio p(x3).
%   COEFbx(g,h,k)

%
%           920417 s/c.
Gt=[g,h,k];
G=Gt';
for i=1:2,
    for j=1:2,
        m11(i,j)=G(i+1,j+1);
        m22(i,j)=G(2*i-1,2*j-1);
        m33(i,j)=G(i,j);
    end
end
a0=det(m33);
a1=-(det(G)+g(1)+h(2));
a2=1+det(m22)+det(m11);

```

```
a3=-k(3);
pol=[a0,a1,a2,a3];
```

```
function [x1,x2,x3] = valorbx(pol,g,h,k)
```

```
% VALOR_bx: Se calculan las raíces del polinomio p(x3) y con los
% valores se determinan los vectores x1 y x2. En total
% se obtienen tres conjuntos de valores.
```

```
% VALORbx(pol,g,h,k)
```

```
% 920417 s/c.
```

```
x3=raiz3(pol);
c1=-k(3)*h(1)+k(1)*h(3);
c2=g(3)*h(1)-g(1)*h(3);
c3=-g(2)*k(3)+g(3)*k(2);
c4=h(3)*g(2)-h(2)*g(3);
for i=1:3,
    x1(i,1)=(h(1)*x3(i)+c1)/(c2*x3(i)+h(3));
    x2(i,1)=(g(2)*x3(i)+c3)/(c4*x3(i)+g(3));
end
```

```
function r = raiz3(p)[19]
```

```
% RAIZ_3: Resuelve un polinomio de grado 3. Se emplea el método
% de Bairstow para factores cuadráticos (Gerald, C F y
% Wheatley, P O. Applied Numerical Analysis. Third ed.
% Addison Wesley. 1984).
```

```
% RAIZ3(p)
```

```
% 920506 s/c.
```

```
n1=max(size(p));
if n1~=4,
    error('El polinomio debe ser de tercer grado')
end
n=n1-1;
n3=n+3;
for i=3:n3,
    a(i)=p(i-2);
end
for i=1:n3,
    B(i)=0;
    C(i)=0;
end
R=0; S=0; k=0; E=1;
while E>0.0001,
    k=k+1;
    if k>80,
        error('El polinomio presenta problemas. Los coeficientes son:')
        pol=p
    end
    for j=3:n3,
        B(j)=a(j)+R*B(j-1)+S*B(j-2);
        C(j)=B(j)+R*C(j-1)+S*C(j-2);
    end
```



```

den=C(n+1)*C(n+1)-C(n+2)*C(n);
if den==0,
    R=R+1;
    S=S+1;
end
if den~=0,
    incR=(-B(n+2)*C(n+1)+B(n+3)*C(n))/den;
    incS=(-C(n+1)*B(n+3)+C(n+2)*B(n+2))/den;
    R=R+incR;
    S=S+incS;
    E=abs(incR)+abs(incS);
end
end
r(1,1)=-B(n+1)/B(n);
disc=R*R+4*S;
if disc<0,
    di=abs(disc);
    rd=sqrt(di);
    r(2,1)=0.5*(R+rd*sqrt(-1));
    r(3,1)=conj(r(2));
end
if disc>=0,
    r(2,1)=.5*(R+sqrt(disc));
    r(3,1)=.5*(R-sqrt(disc));
end
end
end

```

C.2 Funciones necesarias para el cálculo de las coordenadas de los puntos central y circular teniendo como parámetro b_y . Para el cálculo sobre un intervalo: $b_i < b_y < b_f$, se desarrollaron las siguientes funciones que, en principio, realizan el mismo procedimiento expuesto para b_x . Se emplean algunas funciones en común.

```

function [ax, ay, bx, by] = interby(D, by1, by2, in)
% INTER_by: Se calculan los vectores ax, ay, bx y by; a partir
% del intervalo de valores dado para bs (by).
% [ax, ay, bx, by]=INTERby(D, by1, by2, in)
% donde: by1 límite inferior del intervalo de bs,
% by2 " superior
% in incremento entre puntos del intervalo.

% 920423 s/c.
k=0;
for i=by1:in:by2,
    bs=i;
    vaenby=i
    k=k+1;
    M=coorby(D, bs);

```

```

    for j=1:3,
        ax(k,j)=M(j,1);
        ay(k,j)=M(j,2);
        bx(k,j)=M(j,3);
    end
    by(k,1)=i;
end

```

```

function Coord = coorby(D,bs)
%     COOR_by: Cálculo de las coordenadas del punto circular A y
%     bx del punto central de una diada, dada la coordena
%     da by como parámetro del diseño para llevar un CR
%     por tres posiciones adicionales a la de referencia.
%     COORby(D,bs)
%     D es la matriz de posiciones:  x0   y0   θ0
%                                     x1   y1   θ1
%                                     x2   y2   θ2
%                                     x3   y3   θ3
%     bs es el valor de by.
%     escribase la matriz D=[] y bs=(by).

%                                                     920417 s/c.
[w,B,X,Y]=datos(D);
[A,gp,hp,kp]=matvecby(bs,B,X,Y,w);
[g,h,k]=vectores(A,gp,hp,kp);
p=coefby(g,h,k);
[ax,ay,bx]=valorby(p,g,h,k);
by=bs;
Coord=[ax,ay,bx];

```

```

function [A,gp,hp,kp] = matvecby(bs,B,X,Y,w)
% MAT_VEC_by: Se calculan la matriz A y los vectores g', h' y k' con
%     los datos proporcionados. by es el parámetro.
%     MATVECby(bs,B,X,Y,w): bs= parámetro del punto central
%     B = valores de βi
%     X,Y= coordenadas de puntos 1,2,3
%     w = coordenadas del pto. de ref.

%                                                     920417 s/c.
x=w(1);
y=w(2);
z=(x*x+y*y)/2;
for i=1:3,
    u=Y(i)-bs;
    c=cos(B(i));
    s=sin(B(i));
    A(i,1)=X(i)*c+u*s-x;
    A(i,2)=-X(i)*s+u*c-y+bs;
    A(i,3)=-X(i)+x*c-y*s;
    gp(i,1)=s;
    hp(i,1)=1-c;
    kp(i,1)=z+(X(i)*X(i)+Y(i)*Y(i))/2+(y*X(i)-x*u)*s-(x*X(i)+y*u)*c

```

```
-bs*Y(i);  
end  
  
function [pol] = coefby(g,h,k)  
%   COEF_by: Se calculan los coeficientes a0, a1, a2 y a3 del  
%           polinomio p(x3). by es el parámetro.  
%           COEFby(g,h,k)  
  
%                                           920417 s/c.  
Gt=[g,h,k];  
G=Gt';  
for i=1:2,  
    for j=1:2,  
        m12(i,j)=G(i+1,2*j-1);  
        m21(i,j)=G(2*i-1,j+1);  
        m33(i,j)=G(i,j);  
    end  
end  
a0=det(m33);  
a1=-(det(G)-g(2)-h(1));  
a2=-(1+det(m12)+det(m21));  
a3=k(3);  
pol=[a0,a1,a2,a3];  
  
function [x1,x2,x3] = valorby(pol,g,h,k)  
%   valor_by: Se calculan las raíces del polinomio p(x3) y con los  
%           valores se determinan los vectores x1 y x2. En total  
%           se obtienen tres conjuntos de valores. by es paráme-  
%           tro.  
%           VALORby(pol,g,h,k)  
  
%                                           920417 s/c.  
x3=raiz3(pol);  
c1=g(3)*k(1)-g(1)*k(3);  
c2=g(1)*h(3)-g(3)*h(1);  
c3=h(3)*k(2)-h(2)*k(3);  
c4=h(2)*g(3)-h(3)*g(2);  
for i=1:3,  
    x1(i,1)=(g(1)*x3(i)+c1)/(c2*x3(i)+g(3));  
    x2(i,1)=(h(2)*x3(i)+c3)/(c4*x3(i)+h(3));  
end
```

APÉNDICE D

SENSIBILIDAD DE LA SOLUCIÓN

Como ya se comentó en el trabajo, se establece que las curvas de Burmester son susceptibles de sufrir sensibles modificaciones ante el cambio de los parámetros de posición del cuerpo rígido, específicamente ante la modificación del ángulo requerido para el CR. Con el fin de proporcionar elementos concretos sobre el tema, se presentan a continuación los resultados del estudio de sensibilidad de la solución del ejemplo de aplicación (pág. 11). Para el análisis se modifica el ángulo de la puerta en las posiciones 2 y 3 de los puntos de precisión. Se hace la variación por separado para θ_2 y θ_3 .

Para ambos casos, se modifica el ángulo en un intervalo cuyo centro es θ_1 . Se presentan las curvas CC y CPC para analizar la forma y el grado en que cambian.

D.1 Análisis para θ_2 . Se obtienen los resultados de las siguientes figuras haciendo un cálculo para θ_2 en el intervalo:

{ $58^\circ, 59^\circ, 59.5^\circ, 59.75^\circ, 59.9^\circ, 60.1^\circ, 60.25^\circ, 60.5^\circ, 61^\circ, 62^\circ$ }

manteniendo $\theta_3 = 30^\circ$. En las figuras se muestran con línea continua las curvas CC y CPC correspondientes a $\theta_2 = 60^\circ$.

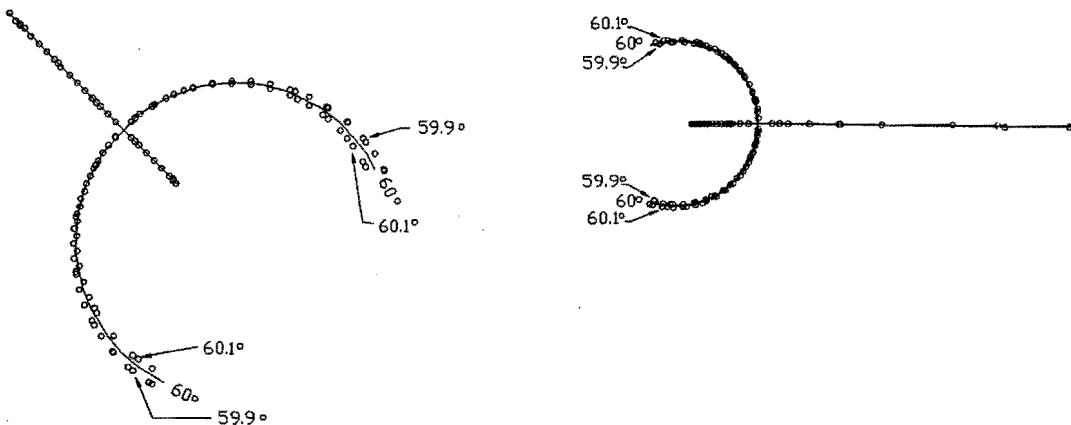


Figura D.1. CC y CPC para $\theta_2 = 59.9^\circ$ y 60.1°

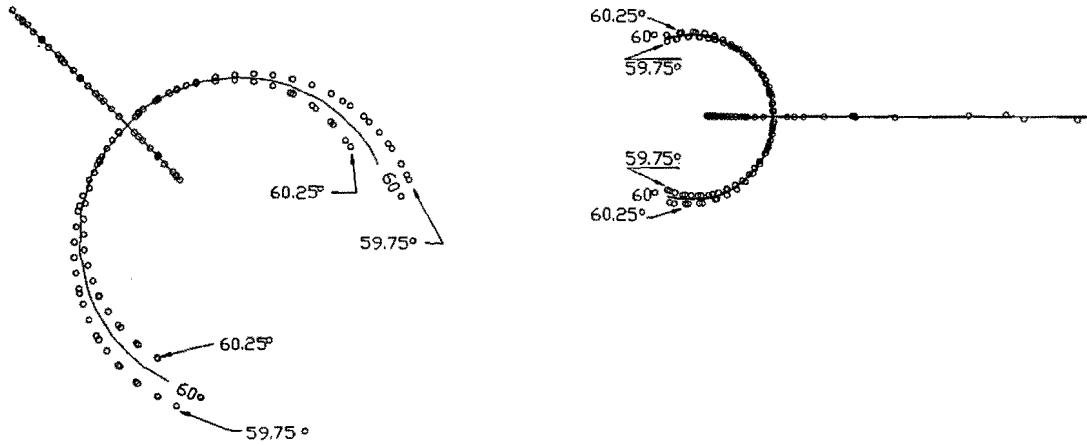


Figura D.2. CC y CPC para $\theta_2 = 59.75^\circ$ y 60.25°

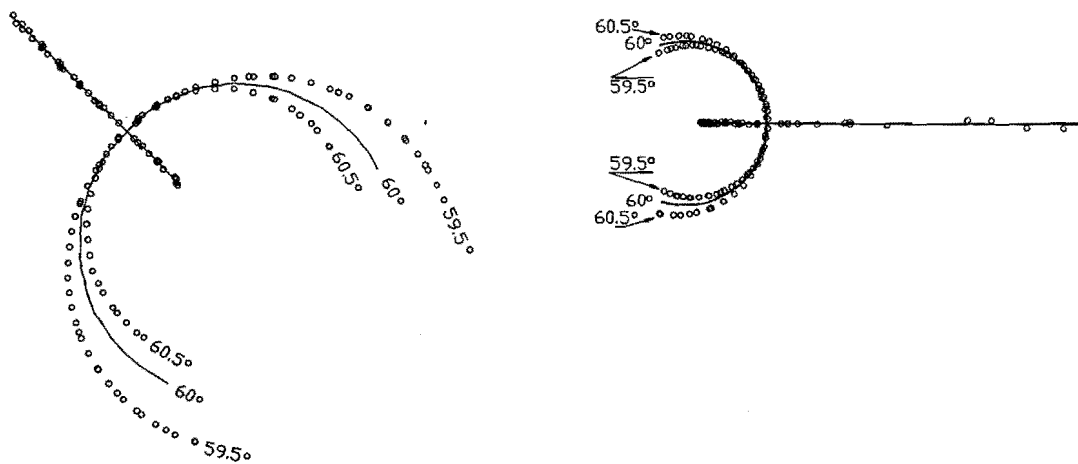


Figura D.3. CC y CPC para $\theta_2 = 59.5^\circ$ y 60.5°

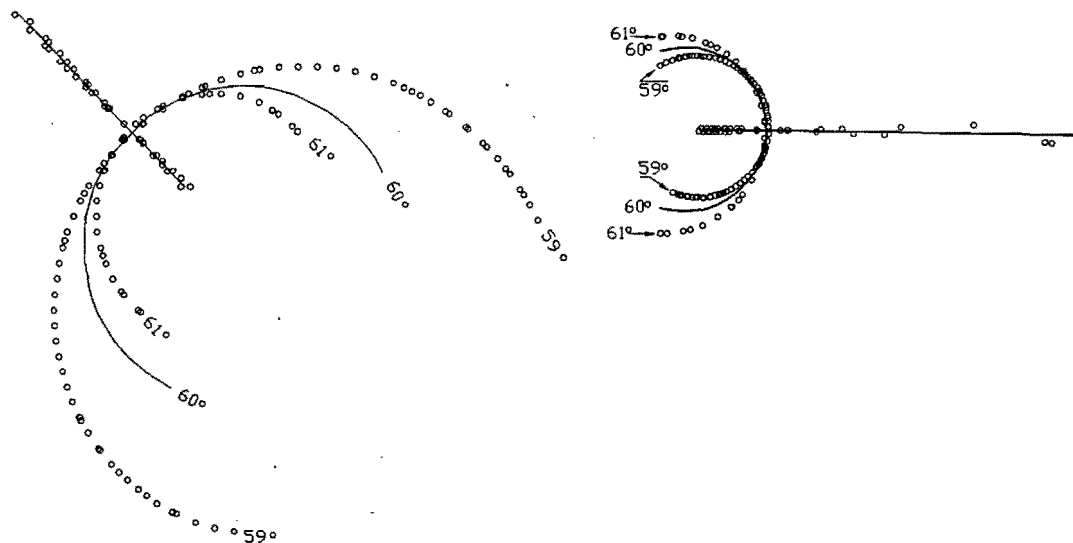


Figura D.4. CC y CPC para $\theta_2 = 59^\circ$ y 61°

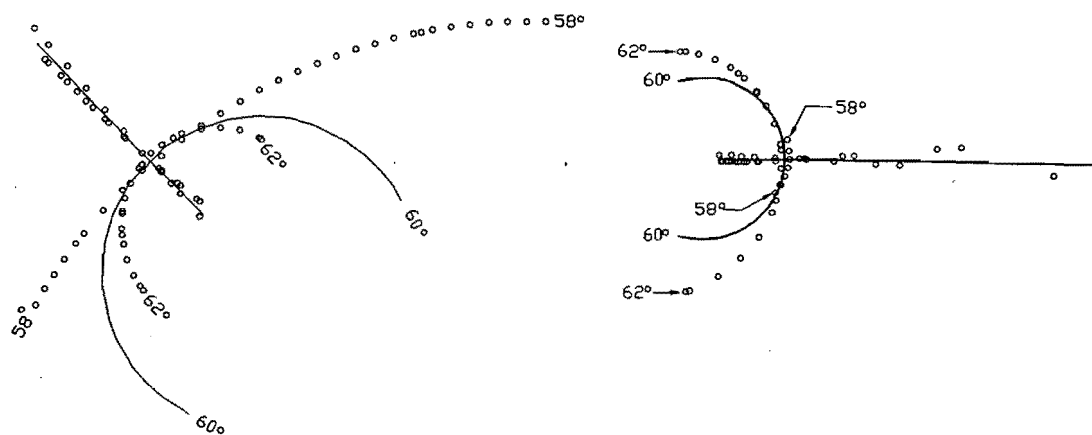


Figura D.5. CC y CPC para $\theta_2 = 58^\circ$ y 62°

Se aprecia en las figuras que en la medida en que θ_2 tiende a los extremos del intervalo, las respectivas gráficas se van alejando de la curva original para $\theta_2=60^\circ$. También se observa que, para cualquier valor de θ_2 la CC y la CPC quedan en lados opuestos de la curva de referencia. Esto es, una queda al interior, mientras la otra al exterior, de la curva original.

D.3 Análisis para θ_3 . manteniendo ahora $\theta_2=60^\circ$, se hace el estudio para θ_3 en el intervalo:

{ $28^\circ, 29^\circ, 29.5^\circ, 29.75^\circ, 29.9^\circ, 30.1^\circ, 30.25^\circ, 30.5^\circ, 31^\circ, 32^\circ$ }

Los resultados se presentan en las siguientes figuras. Como en el primer caso, se presenta con línea continua a las curvas CC y CPC para $\theta_3=30^\circ$.

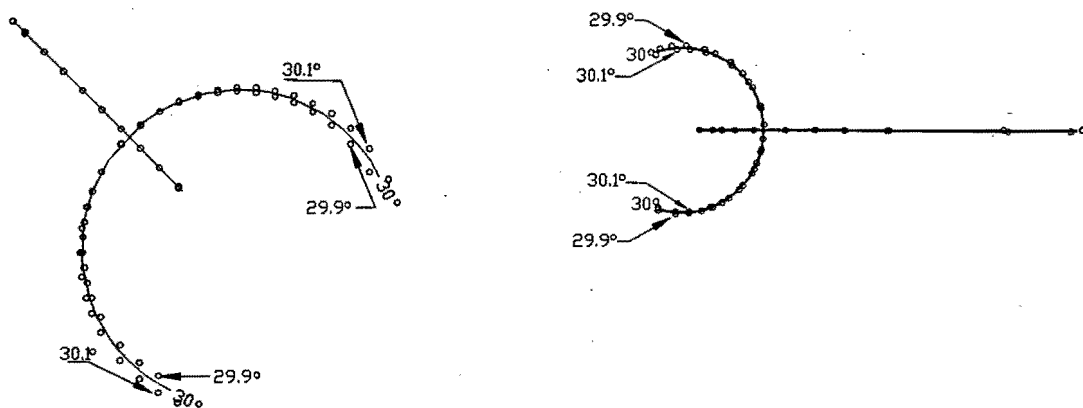


Figura D.6. CC y CPC para $\theta_3 = 29.9^\circ$ y 30.1°

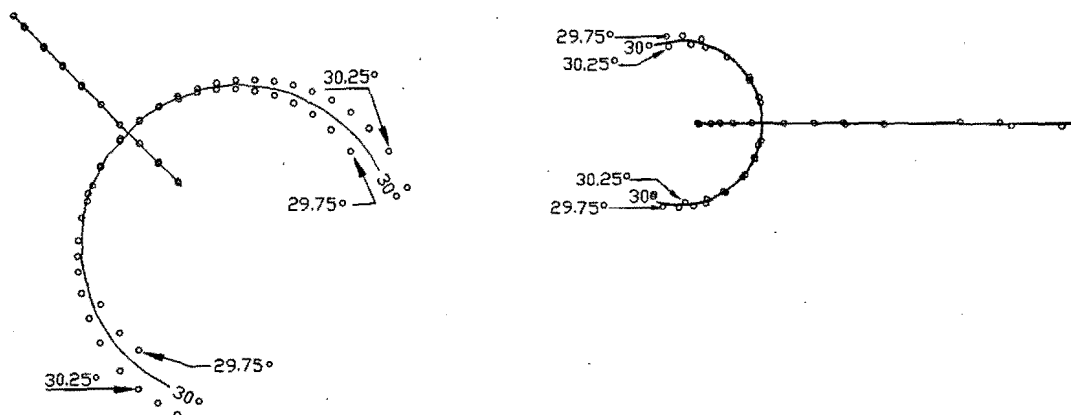


Figura D.7. CC y CPC para $\theta_3 = 29.75^\circ$ y 30.25°

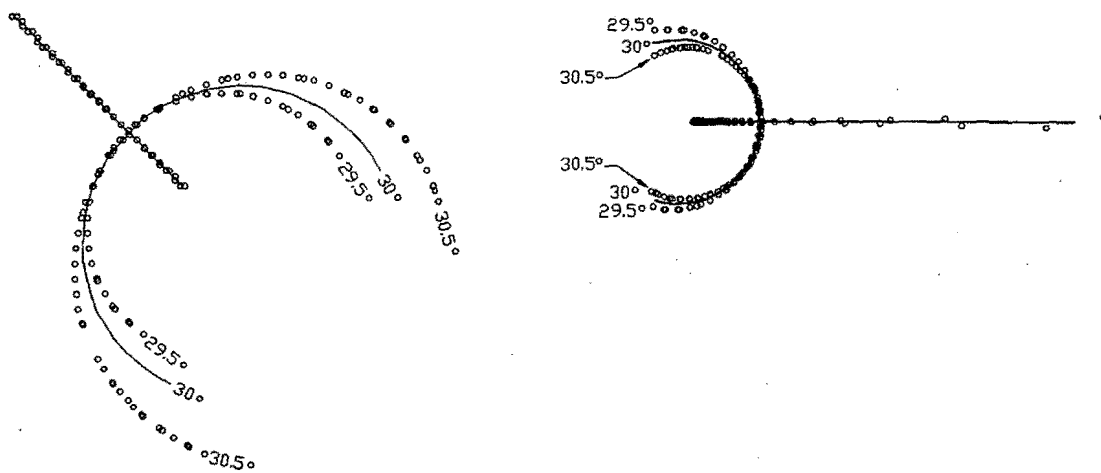


Figura D.8. CC y CPC para $\theta_3 = 29.5^\circ$ y 30.5°

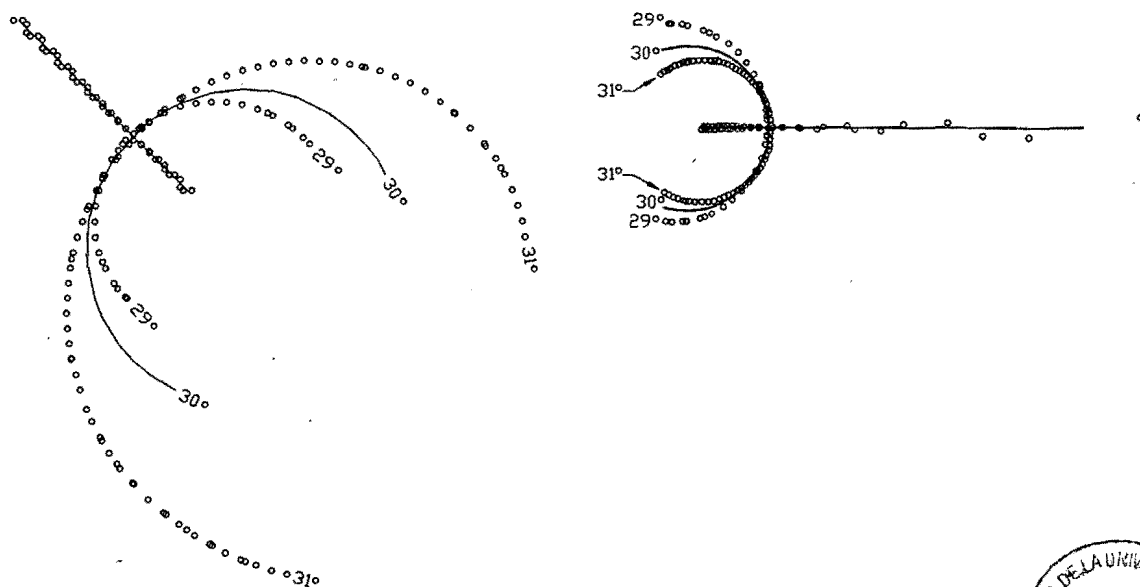


Figura D.9. CC y CPC para $\theta_3 = 29^\circ$ y 31°

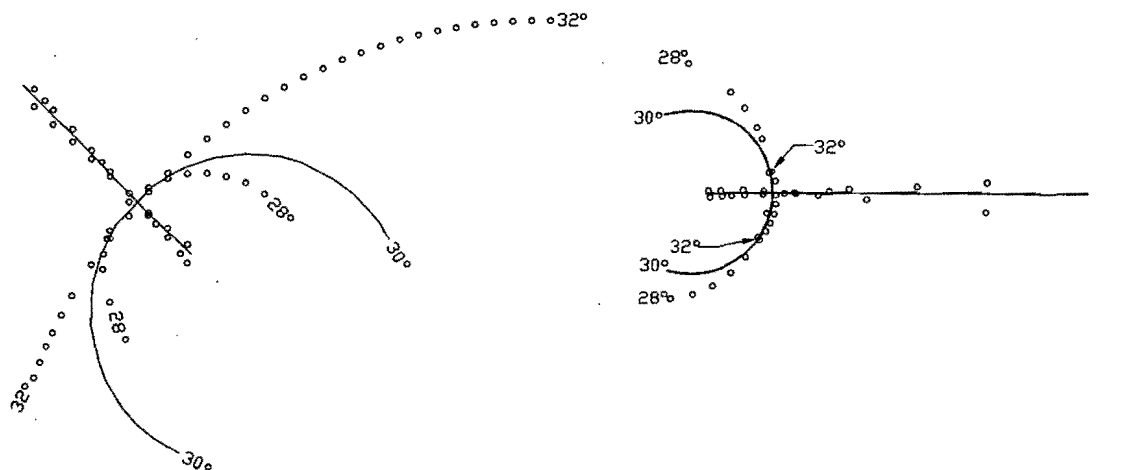


Figura D.10. CC y CPC para $\theta_3 = 28^\circ$ y 32°

Los resultados de las últimas figuras muestran semejanza con lo expuesto en la sección D.1; por lo tanto se propone la comparación entre las curvas resultantes para analizar el grado de similitud existente en los resultados en θ_2 y θ_3 . Se construyen las siguientes figuras con curvas equivalentes.

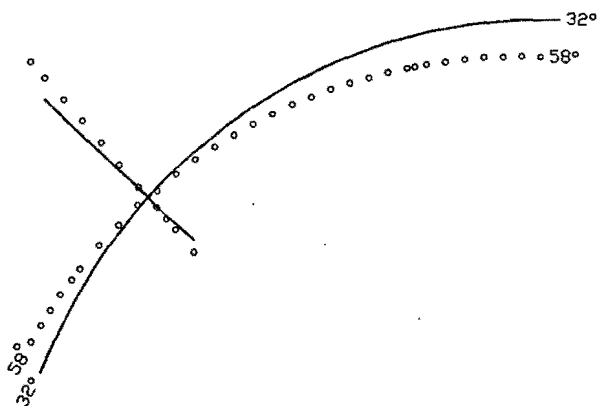


Figura D.11. CC para $\theta_2 = 58^\circ$ y $\theta_3 = 32^\circ$

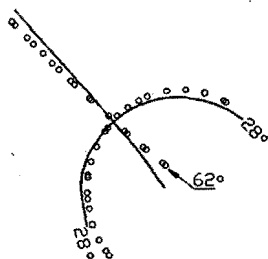


Figura D.12. CC para $\theta_2 = 62^\circ$ y $\theta_3 = 28^\circ$

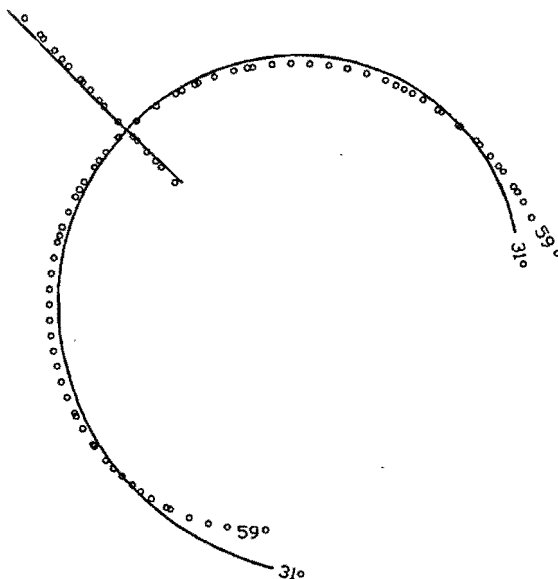


Figura D.13. CC para $\theta_2 = 59^\circ$ y $\theta_3 = 31^\circ$

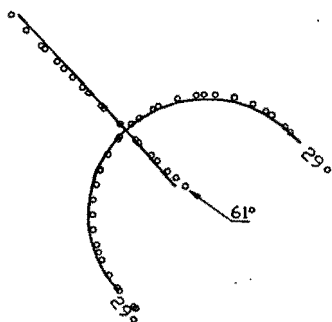


Figura D.14. CC para $\theta_2 = 61^\circ$ y $\theta_3 = 29^\circ$

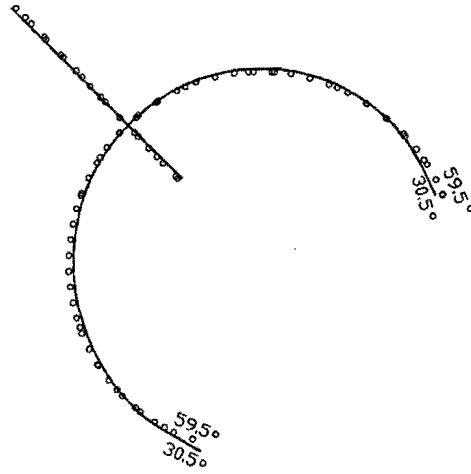


Figura D.15. CC para $\theta_2 = 59.5^\circ$ y $\theta_3 = 30.5^\circ$

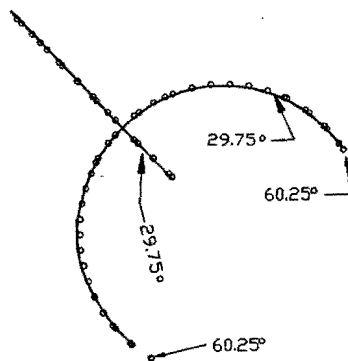


Figura D.16. CC para $\theta_2 = 60.25^\circ$ y $\theta_3 = 29.75^\circ$

Resulta evidente, de la comparación de las curvas CC, que la similitud entre curvas para los dos ángulos es mayor conforme el ángulo θ_i tiende al valor original; de tal forma que las curvas de la figura D.16 son prácticamente equivalentes.

Este análisis muestra que:

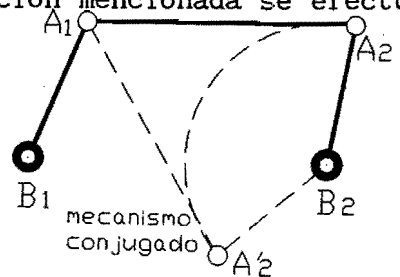
- 1) para este caso, las curvas CC y CPC son inversamente crecientes para un ángulo θ_i dado,
- 2) si se toma el ángulo θ_2 para modificar la solución, la curva CC se expande para valores de $\theta_2 < 60^\circ$, y se contrae para valores de $\theta_2 > 60^\circ$.
- 3) por el contrario, si se considera el ángulo θ_3 , la curva CC se expande para valores de $\theta_3 > 30^\circ$ y se contrae para valores de $\theta_3 < 30^\circ$.
- 4) en términos generales y tomando en cuenta los puntos anteriores, resulta equivalente en este caso el buscar una modificación a la solución por cualquiera de las dos posiciones: 2 o 3; dado que las curvas son similares como se ilustra en las figuras D.11 a D.16.
- 5) para este caso, se aprecia que la modificación de las curvas es gradual.

Es importante resaltar que estos resultados se dan en un problema que tiene una distribución regular tanto en los puntos como en los ángulos de precisión.

Este tratamiento es útil para explorar la solución al problema que ubique los puntos centrales en posiciones específicas y que conduzca al CR por un conjunto equivalente de puntos de precisión. De igual forma, se abre el campo para desarrollar la solución de síntesis óptima.

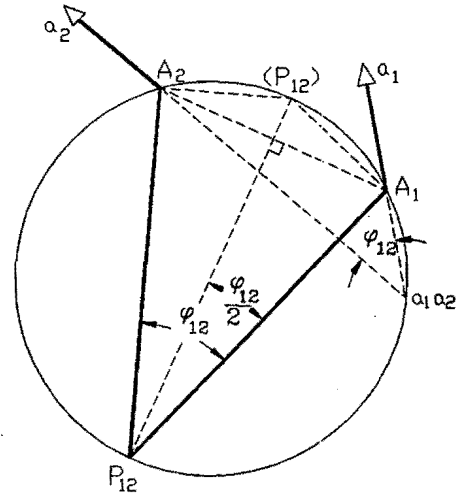
NOTAS

1. Denavit y Hartenberg, en 1961, comentaban que ambos métodos de síntesis en el plano: algebraicos y geométricos, habían trabajado a lo largo de trayectorias paralelas, formando, por lo tanto, escuelas separadas de pensamiento que no permitían el enriquecimiento por cruce. Aun cuando un problema era susceptible de ser resuelto por cualquier método, raramente se podía **facilitar la visualización** del método geométrico y combinarse con la precisión del método algebraico. (Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics). Vol 83E, p 474, septiembre de 1961, Comentario sobre el artículo de Freudenstein (1961), mismo volumen.
2. Se puede ver un ejemplo de aplicación con el programa LINCAGES, en Sandor (1984), p 251.
3. Como a cada punto circular [5] corresponde un único punto central [4], se denomina **díada de Burmester** a la conjunción en un eslabón de un punto central y su conjugado cinemático, el correspondiente punto circular.
4. Punto central: se le llama así al centro de la circunferencia sobre la cual quedan los puntos circulares en el desplazamiento de un plano móvil por varias posiciones.
5. Punto circular: un punto del plano móvil que al pasar éste por varias posiciones, su ubicación en cada una corresponde a puntos de una circunferencia.
6. Para la construcción de las curvas, se tiene una variedad de métodos. Por un lado los geométricos: ver Rosenauer (p 369), y Hunt (p 176), Nieto (p 162) o Denavit (p 262); por otro los analíticos: ver los métodos de Hackmueller, Artobolevskii, o Kaufman, citados por Nieto (p 157-159).
7. Los puntos de Burmester representan el reducido conjunto (cuatro a lo más), de puntos circulares y, por ende de puntos centrales, que corresponden al plano móvil. Al recorrer el CR las cinco posiciones, los PB hacen el recorrido quedando en un arco circular en sus cinco posiciones. Los PB resultan de la intersección de las CC o de las CPC, para dos subconjuntos de cuatro posiciones tomados de un problema de cinco posiciones.
8. Basado en el problema 3-18 de Sandor y Erdman (1984), p 274.
9. Como se presentan ciertos problemas en la compilación de las funciones, específicamente con la función que determina las raíces del polinomio, cuando se inicia con la instrucción `interb_`, es conveniente iniciar la compilación con la instrucción `coorb_`, para D y algún valor de b_s , esto permite que la compilación de la primera función mencionada se efectúe sin problemas.
10. El defecto de rama se produce porque alguna posición es conseguida por el mecanismo conjugado. El defecto de orden se produce cuando las posiciones se logran pero no en la secuencia requerida.



11. Se recomienda que el ángulo de transmisión, γ , esté en el rango de 40° a 140° .

12. Polo. Sea el desplazamiento de un cuerpo rígido por dos posiciones, caracterizado por el desplazamiento de un punto A y la rotación de un eje o vector sobre el cuerpo. Cuando el cuerpo pasa de la posición 1 a la 2, ver figura, se tiene el desplazamiento A_1A_2 y el ángulo ϕ_{12} entre la posición de los vectores a_1 y a_2 ; se puede decir que el movimiento es equivalente a una rotación pura alrededor de un punto del plano fijo, que coincide con otro sobre el plano móvil, que es equidistante tanto de A_1 como de A_2 y que está sobre la mediatriz de la línea A_1A_2 . Asimismo, el $\angle A_1P_{12}A_2$ debe ser igual a ϕ_{12} , desplazamiento angular del CR. A este punto de rotación equivalente para llevar al CR de la posición 1 a la 2, P_{12} , se le conoce como polo para el desplazamiento de 1 a 2.



De acuerdo a lo anterior, para el movimiento de un CR por tres posiciones, existirán tres polos: P_{12} , P_{13} y P_{23} . Para cuatro posiciones existirán seis polos, etc.

Obtención del polo. Uno de los métodos empleados para la obtención del polo P_{ij} , se muestra en la figura. Se prolongan las líneas de a_1 y a_2 y su cruce determina el punto a_1a_2 . Con los puntos A_1 , A_2 y a_1a_2 , se traza una circunferencia. Se traza la mediatriz de la línea A_1A_2 y el lugar donde corta a la circunferencia define al polo P_{ij} . Dado que existen dos posibilidades, se elige la que lleva al CR por un desplazamiento ϕ_{ij} , la otra, (P_{ij}) , lleva al CR por un desplazamiento de $\pi + \phi_{ij}$ e invierte la orientación del vector a .

13. El hecho de que las curvas sean cúbicas significa que una línea recta cortará, como máximo, en tres puntos a dichas curvas. Esto tiene implicaciones en el diseño del mecanismo, ya que se tendrán hasta tres posibilidades para ubicar el punto central de una barra. Esto es, si se define una línea sobre la cual se ha de ubicar la articulación del bastidor, puede obtenerse un conjunto de tres puntos que resuelvan el problema.
14. El teorema de Bézout establece que dos curvas algebraicas coplanares de orden n y m se intersectan, en general, entre sí en $n \cdot m$ puntos. Sin embargo, en casos especiales, las dos curvas pueden coincidir una con la otra o, quizás, poseer porciones comunes.
15. ω^2 equivale a decir que, en un plano, un punto tiene dos variables independientes para ubicar su posición. ω_1 : los puntos sobre una línea requieren una sola variable para ubicar su posición. ω^0 : existe un número finito de puntos con ubicación prescrita.
16. Dijkstra (1969), desarrolla una ecuación para los PB a partir de dos curvas: m_{ijki} y m_{ijkr} , que se intersectan, de acuerdo a la nota anterior, en los PB. Obtiene una ecuación de cuarto grado, donde cada raíz corresponde a uno de los cuatro PB. Rojas Salgado (1988), establece un resultado similar por un método diferente. Además, se tiene en el trabajo

jo de Freudenstein (1961), se desarrolla un método para determinar los PB mediante una ecuación de quinto grado en la cual, entre las cinco soluciones se incluyen los cuatro PB y también un polo común a las dos curvas de polos. Cuando las raíces de la ecuación son complejas, así también lo son los PB. Es decir, si existen PB reales lo son por pares.

17. Debido a que existen cinco formas de seleccionar cuatro posiciones de un conjunto de cinco, existirán cinco curvas de puntos centrales (ver figura 5, pág 9), intersectándose todas ellas en los cuatro puntos de Burmester, sean o no reales. De igual forma se pueden tomar diez combinaciones de curvas para la localización de dichos puntos.
18. De acuerdo a Bézout [14], para dos cúbicas, existirán nueve puntos de intersección. Estos corresponden a puntos imaginarios de intersección (puntos isotrópicos), a los tres polos comunes a ambos conjuntos de cuatro posiciones seleccionados y a los cuatro puntos de Burmester.
19. El paquete MATLAB tiene una función para calcular las raíces de un poli nomio, sólo que ante los problemas dados en la compilación [9], se optó por elaborar esta función de cualquier manera el problema persistió.

REFERENCIAS

- ÁNGELES Álvarez, Jorge. (1978). Análisis y síntesis cinemáticos de sistemas mecánicos. Ed. Limusa. México.
- CHASE, T R y Fang, W E. (1991). "Order rectification for complex number based Burmester curves". Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. Vol 113, Núm 3, septiembre de 1991. p 239 a 247.
- DI BENEDETTO, A y Pennestri, E. (1985). "On the calculation of Burmester's point pairs for five finite positions of a moving plane". Proceedings - OSU Applied Mechanism Conference. (Oklahoma State University). 9th, Vol 1. (OSU) Stillwater, OK, EUA. 11 p.
- DIJKSMAN, E A. (1969). "Calculation and construction of the Burmester points for five positions of a moving plane". Transactions of the ASME (Journal of Engineering for Industry). Vol 91B, Núm 1, febrero de 1969. p 66 a 74.
- FREUDENSTEIN, Ferdinand y Sandor, George N. (1961). "On the Burmester points of a plane". Transactions of the ASME. 83E (Journal of Applied Mechanics 28E). Núm 1, marzo de 1961, p 41 a 49.
- GERALD, Curtis y Wheatly, Patrick O. (1984). Applied numerical analysis. Addison-Wesley Publishing Co. E U A.
- HARTENBERG, R S y Denavit, J. (1964). Kinematics synthesis of linkages. McGraw-Hill. E U A.
- HUNT, K H. (1978). Kinematic geometry of mechanisms. Clarendon Press Oxford. Gran Bretaña.
- LAWLEY, T J; Nambiar, R V; Nisbett, J K; Prince, S y Zarefar, H. (1987). "Constrained search technique for motion generator pivot location". ASME, Design Engineering Division Publication DE. Vol 10-2. p 443 a 446. ASME, New York, N Y, EUA.
- MAHABLESHWARKAR, H S y Kramer, S N. (1990). "Sensitivity analysis of the Burmester equations of planar motion". Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. Vol 112, Núm 3, septiembre de 1990. p 299 a 306.
- NIETO, Justo. (1978). Síntesis de mecanismos. Editorial AC. Madrid.
- PRENTIS, J M. (1991 a). "Pole triangle, Burmester theory and order and branching problems. I. The order problem". Mechanism & Machine Theory. Vol 26, Núm 1, p 19 a 30. Pergamon Press. Gran Bretaña.
- . (1991 b). "Pole triangle, Burmester Theory and order and branching problems. II. The branching problem". Mechanism & Machine Theory. Vol 26, Núm 1, p 31 a 39. Pergamon Press. Gran Bretaña.

ROJAS Salgado, Angel A. (1988). "Síntesis exacta de conducción de cuerpo rígido mediante polinomios". Memoria del XIV Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, A C. Guanajuato, Gto. Septiembre de 1988. p 44 a 48.

_____ y Torres Navarro, J Isidro. (1991). "Diseño interactivo de mecanismos para conducción de cuerpo rígido". Memoria del XVII Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería A C. Monterrey, N L. Septiembre de 1991. p 218 a 222.

ROSENAUER, N y Willis, A H. (1967). Kinematics of mechanisms. Dover Publications, Inc. New York. E U A.

SANDOR, George N y Erdman, Arthur G. (1984). Advanced mechanism design: Analysis and synthesis. Vol 2. prentice-Hall, Inc. E U A.

Este trabajo se realizó utilizando los siguientes programas de computación:

Autodesk, Inc. 1988. AUTOCAD. Release 10 c2. IBM PC

Horstmann Software Design Corporation. 1988. CHI WRITER - The Scientific/Multifont Word Processor. Version 3.02.

The Mathworks, Inc. 1987. PC-MATLAB. Version 3.13.