0923

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

DISTRIBUCION DE CONCENTRACIONES Y TRANSPORTE DE SEDIMENTOS DE FONDO EN SUSPENSION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA HIDRÁULICA

P R E S E N T A

LEONARDO ENRIQUE TAMAYO TAMAYO

MÉXICO, D.F. 1984

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA
SUBJEFATURA DE INGENIERIA HIDRAULICA

TESIS QUE PRESENTA

LEONARDO ENRIQUE TAMAYO TAMAYO

para obtener el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA HIDRAULICA

Créditos asignados a la tesis 10

JURADO:

M. en I. José Antonio Maza Alvarez

M. en I. Felipe I. Arreguín Cortés

M. en I. Oscar Fuentes Mariles

M. en I. Moisés Berezowsky Verduzco

M. en I. Polioptro Martínez Austria

Coordinador de la Sección

M. en I. Felipe I. Arreguín C.

Secretaria Académica

M. en I. Gabriela Moeller de J.

Ciudad Universitaria, 7 de noviembre de 1984.

A mis padres:

Marco Lino en su memoria y

Soledad con cariño y gratitud

A mis hermanos

Con especial afecto

I N D I C E

1. INTRODUCCION

El estudio de la cantidad y características de los sedimentos que son transportados por escurrimientos a superficie libre reviste gran importancia, cada vez que se quiera construir una obra de control o aprovechamiento de estas aguas, tales como canales de irrigación o drenaje, presas de almacenamiento o derivación, aprovechamientos con usos industriales o domésticos etc. Por ejemplo, el depósito de sedimentos en un vaso de almacenamiento, limita la vida útil del mismo; en el caso de aprovechamientos hidroeléctricos, los sedimentos dañan las turbinas, especialmente en operaciones con alta carga; si el uso del agua con sedimentos suspendidos es con fines industriales o domésticos, es necesario removerlos; así podrían enunciarse muchos casos más.

Para estudiar los sedimentos que son transportados por el flu jo se han clasificado teniendo en cuenta tanto su origen como el mecanismo por el que son transportados (ver fig 1.1).

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">SISTEMA DE CLASIFICACION</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>BASADO EN EL MECANISMO DE TRANSPORTE</td><td>BASADO EN EL ORIGEN</td></tr>
<tr><td rowspan="3">TRANSPORTE TOTAL g_T</td><td>TRANSPORTE DE LAVADO g_L</td><td rowspan="2">TRANSPORTE EN SUSPENSION g_S
g_L $g_{S\,BS}$</td><td>TRANSPORTE DE LAVADO g_L</td></tr>
<tr><td>TRANSPORTE DE FONDO EN SUSPENSION $g_{S\,BS}$</td><td rowspan="2">TRANSPORTE TOTAL DEL FONDO g_{BT}</td></tr>
<tr><td>TRANSPORTE EN LA CAPA DE FONDO g_B</td><td>TRANSPORTE EN LA CAPA DE FONDO g_B</td></tr>
</table>

Fig. 1.1 CLASIFICACION DEL TRANSPORTE DE SEDIMENTOS

De acuerdo con el mecanismo de transporte, se pueden distinguir dos formas principales:

a) Transporte en la capa de fondo.

Donde los sedimentos se mueven rodando o deslizándose sobre la superficie del fondo,o bien saltando y volviendo a caer en el fondo.

Este transporte se representa por g_B si se expresa en unidades de peso/s/m,o por q_B si sus unidades son de volúmen/s/m.

En forma análoga, el transporte total de sedimentos en la capa de fondo en todo el ancho del cauce se representa por G_B o Q_B si está expresado en unidades de peso/s o volumen/s respectivamente.

Esta misma simbología se mantendrá para los otros tipos de formas de transporte y para diferenciarlos entre sí, el subíndice que en este caso es B irá cambiando; esto es, "g" indicará que es el gasto unitario en peso, "q" indicará que es el gasto unitario en volumen, "G" indicará que es el gasto total en peso, "Q" indicará que es el gasto total en volumen y el subíndice que cada uno de estos símbolos lleve, señalará el tipo de transporte de sedimentos que se está expresando. En adelante sólo se mostrará la nomenclatura correspondiente al transporte unitario en peso, aclarando que todos los tipos de transporte se pueden expresar en las formas antes señaladas.

b) Transporte en suspensión.

Donde el sedimento se mueve suspendido y soportado por la masa fluida y mantenido arriba del fondo por el componente ascendente de la corriente turbulenta. Se representa por g_S.

De acuerdo con el origen del material transportado se distinguen:

a) Transporte total del fondo.

Está constituido por los sedimentos que provienen del material del fondo y se representa por g_{BT}. La cantidad de este material que puede ser transportado depende de sus característica físicas y de las condiciones hidráulicas del flujo.

El transporte total del fondo se divide en transporte en la capa de fondo "g_B" al cual se hizo mención anteriormente y en transporte de fondo en suspensión "g_{BS}" formado por los sedimentos que, proviniendo del fondo del cauce, viajan en suspensión en la masa fluida.

b) Transporte de lavado

Se representa por g_L y está formado por sedimento muy fino que en general no se encuentra representado en el material del fondo del cauce, aunque algunos investigadores sugieren que se tome como transporte de lavado todos aquellos sedimentos que viajan en suspensión con diámetros menores o iguales al D_{10} de la curva granulométrica o si no todos los sedimentos con diámetro menor de 0.062mm que viajen en suspensión.

Estos sedimentos provienen de fuentes externas del cauce, principalmente del material erosionado en su cuenca y, por tanto, no tienen relación directa con las condiciones hidráulicas prevalecientes en el cauce.

Este material viaja en suspensión y junto con el transporte de fondo en suspensión g_{BS} forman el transporte en suspensión

g_S del que se hizo mención anteriormente.

Por otro lado, el transporte en la capa de fondo g_B más el transporte en suspensión g_S forman el transporte total de sedimentos g_T.

De acuerdo con lo expuesto se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$g_{BT} = g_B + g_{BS}$$

$$g_S = g_{BS} + g_L$$

$$g_T = g_{BT} + g_L = g_B + g_{BS} + g_L = g_B + g_S$$

Este trabajo estará enfocado al estudio del transporte de fondo en suspensión "g_{BS}" que como se dijo antes está formado por aquel material que proviene del fondo del cauce y viaja en suspensión dentro de la masa fluida soportado por el componente ascendente de la corriente turbulenta.

Dentro de este estudio se revisarán y clasificarán lo más ampliamente posible las teorías y métodos existentes para determinar la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión y el transporte de sedimentos de fondo en suspensión, se unificarán variables y sistemas de unidades, se precisarán cada una de las teorías y se determinará el rango de aplicacación de cada una de ellas, para de esta manera tener al alcance en forma clara y precisa elementos teóricos que permitan resolver los problemas relacionados con este tema.

El fenómeno por el cual las partículas del fondo son levantadas y mantenidas en suspensión dentro del flujo se explica, según Bogordi, aproximadamente de la siguiente manera:

En primer lugar, la fuerza de la corriente que actúa sobre las partículas del fondo se incrementa debido a movimientos circulatorios por el vórtice que se forma alrededor de ellas, haciendo que algunas sean levantadas del fondo y desplazadas hacia arriba debido a las fluctuaciones de la velocidad vertical del flujo por efectos de la turbulencia.

En segundo lugar, existen otras fuerzas que ayudan a promover el movimiento ascendente de las partículas, entre las cuales está la diferencia de presiones dentro del vórtice que se forma alrededor de ellas y el intercambio de movimiento que se genera por colisión entre partículas adyacentes.

Un criterio general para saber si hay inicio de transporte de fondo en suspensión está basado en la relación U_*/ω, siendo U_* la velocidad al cortante y ω la velocidad de caída de las partículas. Cuando esta relación es aproximadamente igual a dos, se estima que empieza a haber transporte de fondo en suspensión.

En la capa inferior del flujo, cerca del fondo, el sedimento puede viajar saltando sobre la superficie del fondo,el cual es cuantificado como parte del transporte de la capa de fondo g_B, o también puede viajar en suspensión formando parte del transporte de fondo en suspensión g_{BS}. Establecer un nivel exacto que separe los dos procesos, el de saltación y el de suspensión es importante pero muy difícil, ya que cada uno de estos fenómenos está gobernado por leyes diferentes.

El sedimento que es transportado en el fondo por saltación, de repente puede ser atrapado por el flujo turbulento y ser transportado en suspensión, o el caso contrario, el sedimento que viaja en suspensión puede caer y viajar por el fondo.

El gasto de sedimento en suspensión por unidad de ancho en un flujo bidimensional a superficie libre,está dado por la relación

$$g_{BS} = \int_0^d u\ C\ dY \qquad (1.1)$$

Donde g_{BS} representa el transporte de sedimentos del fondo en suspensión en peso por unidad de tiempo y ancho entre el nivel y=0 y y=d, siendo "d" el tirante del flujo; "C" es la concentración de sedimentos en peso a cualquier nivel "y"; "u" es la velocidad del flujo al nivel "y". Si la concentración de sedimentos está dada en volúmen, la descarga de sedimentos evaluada mediante la ec(1.1) resultará en volumen por unidad de tiempo y ancho.

La experiencia ha demostrado que la distribución vertical de la velocidad "u" varía con la energía del flujo y con las rugosidades del fondo, mientras que la distribución de la concentración de sedimentos "C" además de los factores que intervienen en la velocidad depende del diámetro y peso de las partículas.

En general la concentración es máxima cerca del fondo y va disminuyendo hacia la superficie, mientras que la velocidad es máxima cerca de la superficie del agua y decrece a cero en la vecindad del fondo.

Para integrar la ec(1.1) es necesario conocer la distribución tanto de la velocidad del flujo como de la concentración de sedimentos.

Respecto a las distribuciones de la velocidad del flujo se aceptará la que presente cada autor en el desarrollo de su método sin hacer revisión de su deducción, aunque sí se tendrá en cuenta la ingerencia de cada una de las variables que intervengan en ella respecto a la distribución de la concentración de sedimentos y a la cuantificación del transporte en suspensión, tal como se verá en los capítulos tres y cinco.

La distribución de la concentración de sedimentos en suspensión es entonces el aspecto fundamental a estudiar, tema que será abarcado en el capítulo dos, en donde se presentan 14 métodos que permiten conocer la concentración de sedimentos en cualquier punto sobre la profundidad del flujo, entre los cuales los más conocidos y usados son el de Rouse, Lane y Kalinske, Hunt, Chang-Richard y Simons y Toffaleti.

Para cubrir más ampliamente el tema de la distribución de la concentración de sedimentos, el capítulo tres se ha dedicado a comentarios y conclusiones de los métodos expuestos en el capítulo dos, en donde entre otros casos se discutirá en forma general y para los métodos que se estime necesario en particular, los aspectos teóricos empleados en las deducciones, los inconvenientes y limitaciones que presentan algunos de ellos, y las ventajas que ofrecen otros.

Con base en el capítulo dos se desarrolla el capítulo cuatro, el cual está dedicado a la deducción y aplicación de los diferentes métodos que permiten cuantificar el transporte de sedimentos de fondo en suspensión y como complemento de este tema, en el capítulo cinco se señalarán los comentarios y conclusiones pertinentes. Finalmente, en el capítulo seis se harán algunos comentarios y conclusiones generales de los temas abarcados en los otros capítulos.

Para darle agilidad al texto, las variables serán definidas cuando aparezcan por primera vez en el desarrollo y al final del trabajo se presenta una lista completa de la simbología empleada con su respectivo significado; además, las figuras de cada capítulo irán al final del mismo excepto aquellas que sean empleadas con fines explicativos en el desarrollo del trabajo.

2. DISTRIBUCION DE LA CONCENTRACION DE SEDIMENTOS DE FONDO EN SUSPENSION EN FLUJOS A SUPERFICIE LIBRE.

Los sedimentos en suspensión que son transportados por el flujo están distribuidos dentro de él siguiendo una cierta ley, la cual además de depender de las características de los sedimentos y de las condiciones hidráulicas, es función de la distancia vertical, medida a partir del fondo del cauce "y".

Este aspecto ha sido objeto de investigación desde hace varias décadas y durante todo ese tiempo se han presentado diferentes relaciones que permiten determinar la concentración de sedimentos en cualquier punto del flujo a partir del conocimiento de las características hidráulicas de la corriente y de la concentración y características de los sedimentos en algún punto determinado del flujo.

La exactitud con que se evalue el gasto de sedimentos en suspensión en una corriente depende en gran medida del conocimiento de la distribución de la concentración de sedimentos en el flujo; dado que éste es un fenómeno muy complejo y debido a que los resultados teóricos obtenidos con expresiones que se han presentado para determinarla no siempre concuerda con los resultados medidos, es importante revisar y analizar las teorías y métodos existentes.

2.1 Teoría de difusión

La difusión es el proceso mediante el cual una substancia o propiedad se transporte y expande en otro medio diferente, lo cual se produce por el movimiento molecular del elemento que se está difundiendo. Este proceso generalmente es ayudado por factores como los gradientes de temperatura, presión y los campos de fuerzas externas.

Un ejemplo de un proceso de difusión es el que se observa al inyectar un colorante en un flujo turbulento. En el instante $t = 0$, es decir cuando se hace la inyección, el volúmen ocupado por el colorante es relativamente pequeño, tal como en el punto (a) de la fig 2.1; después de un tiempo Δt, es decir $t = \Delta t$, el colorante se ha movido hacia aguas abajo una distancia aproximada $\bar{u}\Delta t$ y el volúmen ocupado por este aumenta y cambia de forma, como en el punto (b) de la fig 2.1. El aumento en tamaño y cambio de forma se debe a la acción de el componente turbulento de la velocidad.

En hidráulica se presentan fenómenos similares a los de difusión molecular que se maneja como procesos de difusión, de tal forma que se habla de

a) Difusión molecular
b) Difusión por diferencia de velocidades, que es la que se presenta en la vertical de un flujo a superficie libre, dado que la velocidad cambia con la profundidad del flujo.
c) Difusión por sinuosidades, que es la que se presenta en flujos en medios porosos por el continuo cambio de conducto y bifurcación del flujo.
d) Difusión por turbulencia, a la cual se le atribuye la suspensión y distribución de los sedimentos en el flujo y será explicada a continuación.

De acuerdo a esta teoría la suspensión de sedimentos se explica por las fuerzas internas del flujo turbulento, es decir, al presentarse turbulencias en la frontera del fondo del canal se producen fuerzas que mueven parte del sedimento hacia arriba (Sutherland, ref. 14), cuya cantidad depende del número de partículas moviéndose en el fondo, del tamaño de cada partícula y de la velocidad del flujo (Laursen, ref. 14).

La velocidad en un punto tiene en general 3 componentes u, v, w, en las direcciones x, y, z. Si u', v', w' son las fluctuaciones de la velocidad por turbulencia, entonces los componentes de la velocidad en un instante de tiempo se pueden expresar como:

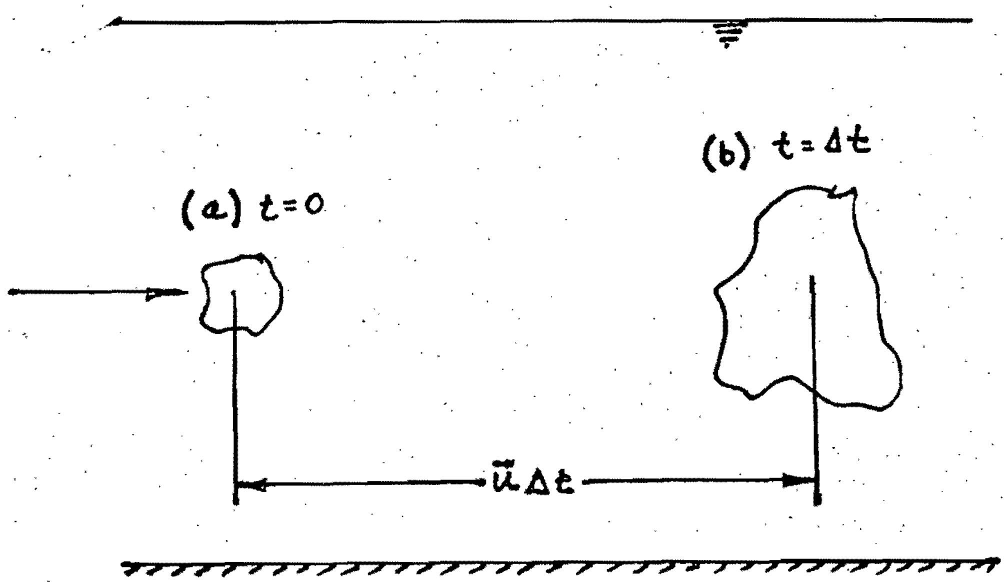

Fig. 2.1 DIFUSION EN FLUJO TURBULENTO

$$u = \overline{u} + u' \qquad (2.1.1a)$$

$$v = \overline{v} + v' \qquad (2.1.1b)$$

$$w = \overline{w} + w' \qquad (2.1.1c)$$

Siendo $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$ los valores medios de u, v y w respectivamente.

Es de anotar que las fluctuaciones de la velocidad promedio en el tiempo valen cero, esto es

$$\overline{u'},\ \overline{v'},\ \overline{w'} = 0 \qquad (2.1.1d)$$

Supóngase un área horizontal dx dz, Fig. (2.1.1); si se considera que el flujo es turbulento, bidimensional y uniforme, la difusión sólo podrá ocurrir en la dirección "y" y, por tanto, la concentración promedio de sedimentos en el flujo no cambiará en la dirección x ni z.

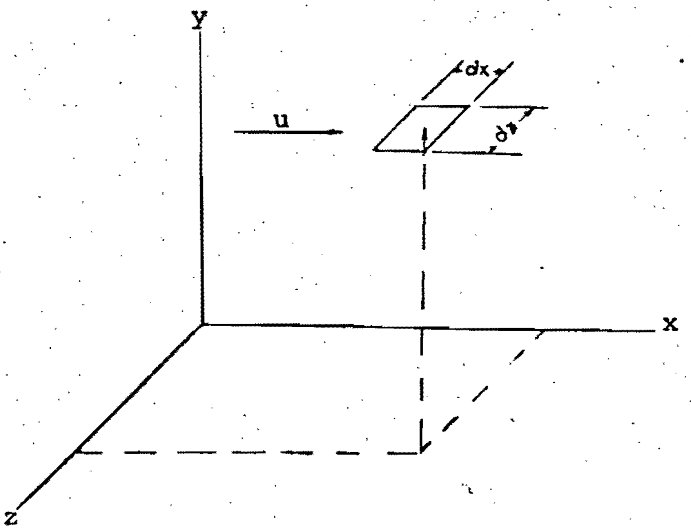

Fig. 2.1.1 TRANSPORTE ASCENDENTE DE SEDIMENTOS POR DIFUSION

Si en un instante la velocidad ascendente es v', la cual puede fluctuar en magnitud y signo, entonces el gasto instantáneo de flujo pasando por el área es v' dx dz.

Si C es el valor instantáneo de la concentración de sedimentos en suspensión en un punto cualquiera del flujo, la cual también puede fluctuar con el tiempo igual que la velocidad, entonces el gasto instantáneo de sedimentos atravesando la misma área es v'C dx dz; dividiendo por dx dz se obtiene el gasto instantáneo de sedimentos por unidad de área, el cual en el promedio de tiempo queda expresado como

$$g_1 = \overline{v'C} \qquad (2.1.2)$$

La concentración instantánea de sedimentos en un punto cualquiera del flujo "C" se puede plantear como

$$C = \overline{C} + C' \qquad (2.1.3)$$

donde $\overline{C}$ representa el valor medio de "C" y C' la fluctuación de $\overline{C}$.

Sustituyendo la ec.(2.1.3) en la ec. (2.1.2)

$$g_1 = \overline{v'(\overline{C} + C')} = \overline{v'\overline{C}} + \overline{v'C'} \qquad (2.1.4)$$

Como $\overline{C}$ es constante, el término $\overline{v'\overline{C}}$ es igual a $\overline{v'}\overline{C}$ y de acuerdo a la ec (2.1.1d) $\overline{v'}$ vale cero, por tanto, la ec (2.1.4) queda

$$g_1 = \overline{v'C'} \qquad (2.1.5)$$

Conviene aclarar que el valor medio de v' y C' es cero, pero esto no significa que el producto medio $\overline{C'v'}$ sea cero.

El grado de correlación entre v' y C' se puede expresar mediante el coeficiente de correlación β_1, siendo

$$\beta_1 = \frac{\overline{C'v'}}{\sqrt{\overline{C'^2}}\ \sqrt{\overline{v'^2}}} \qquad (2.1.6)$$

En forma similar a como Prandtl definió la longitud de mezcla para el flujo "ℓ", es posible introducir este concepto para la transferencia de partículas de una capa a otra en el flujo, definiendo una longitud de mezcla para los sedimentos "ℓ_1" tal como se observa en la Fig. (2.1.2)

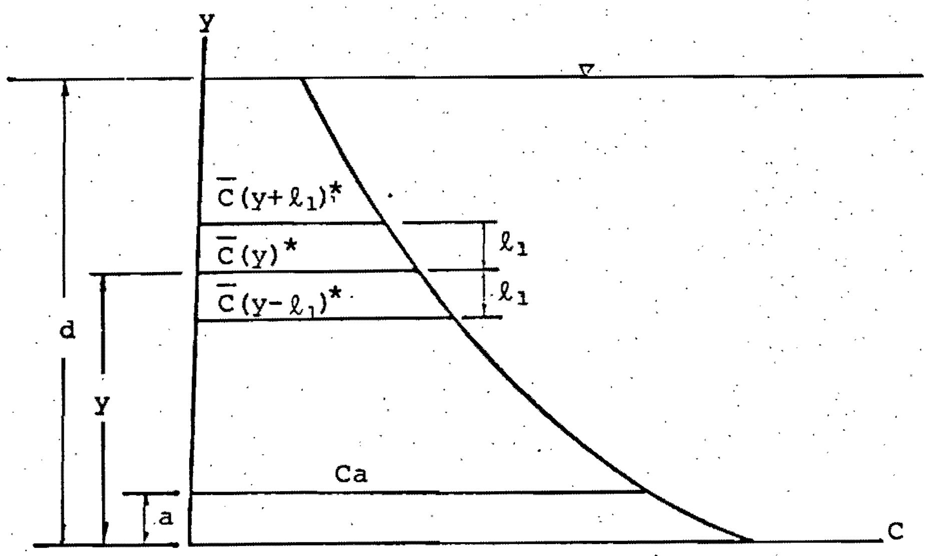

Fig. 2.1.2 PULSACIONES DE LA CONCENTRACION DE SEDIMENTOS DEFINIDA EN TERMINOS DE LA LONGITUD DE MEZCLA

Si se considera una partícula de sedimento a la altura $(y-\ell_1)$ donde la concentración vale $\overline{C}(y-\ell_1)$*, al transferirse al nivel

*Los términos $(y+\ell_1)$, (y) y $(y-\ell_1)$ son subíndices.

"y" donde la concentración vale $\overline{C}(y)$, existe una diferencia de la concentración ΔC_1 donde

$$\Delta C_1 = \overline{C}(y - \ell_i) - \overline{C}(y) \qquad (2.1.7)$$

El término $\overline{C}(y-\ell_1)$ expresado en serie de Taylor queda

$$\overline{C}(y-\ell_1) = \overline{C}(y) - \ell_1 \frac{d\overline{C}}{dy} + \frac{\ell_1^2}{2!}\frac{d^2\overline{C}}{dy^2} - \frac{\ell_1^3}{3!}\frac{d^3\overline{C}}{dy^3} + \ldots\ldots \qquad (2.1.8)$$

Despreciando términos de segundo orden en adelante

$$\overline{C}(y - \ell_1) = \overline{C}(y) - \ell_1 \frac{d\overline{C}}{dy} \qquad (2.1.9)$$

Sustituyendo la ec. (2.1.9) en la ec. (2.1.7) se llega

$$\Delta C_1 = - \ell_1 \frac{d\overline{C}}{dy} \qquad (2.1.10)$$

Haciendo las mismas consideraciones para una partícula que pasa del plano $(y + \ell_1)$ al plano "y", la diferencia de la concentración de sedimentos por turbulencia $\Delta\overline{C}_2$ vale

$$\Delta C_2 = \overline{C}(y) - \overline{C}(y + \ell_1) \qquad (2.1.11)$$

El término $\overline{C}(y + \ell_1)$ expresado en serie de Taylor queda

$$\overline{C}(y + \ell_1) = \overline{C}(y) + \ell_1 \frac{d\overline{C}}{dy} + \frac{\ell_1^2}{2!}\frac{d^2\overline{C}}{dy^2} + \frac{\ell_1^3}{3!}\frac{d^3\overline{C}}{dy^3} + \ldots \qquad (2.1.12)$$

Despreciando términos de segundo orden en adelante

$$\overline{C}(y + \ell_1) = \overline{C}(y) + \ell_1 \frac{d\overline{C}}{dy} \tag{2.1.13}$$

Sustituyendo la ec.(2.1.13) en la ec.(2.1.11) se llega

$$\Delta C_2 = - \ell_1 \frac{d\overline{C}}{dy} \tag{2.1.14}$$

El valor medio de la fluctuación de la concentración de sedimentos es entonces

$$\sqrt{\overline{c'^2}} = \frac{1}{2}(|\Delta C_1| + |\Delta C_2|) = \ell_1 \left| \left(\frac{d\overline{C}}{dy}\right) \right| \tag{2.1.15}$$

Sustituyendo las ecs.(2.1.15) y (2.1.6) en la ec.(2.1.5) resulta

$$g_1 = -|\beta_1| \sqrt{\overline{v'^2}}\ \ell_1 \frac{d\overline{C}}{dy} \tag{2.1.16}$$

Donde el signo menos se introduce al considerar que el transporte se está realizando en el sentido en que decrece la concentración.

El producto $\beta_1 (\overline{v'^2})^{1/2}\ \ell_1$, es conocido como el coeficiente de difusión para sedimentos "ε_s", así

$$\varepsilon_s = \beta_1 (\overline{v'^2})^{1/2}\ \ell_1 \tag{2.1.17}$$

de esta manera, el gasto de sedimentos ascendente por unidad de área "g_1", finalmente queda expresado como

$$g_1 = -\varepsilon_s \frac{dC}{dy} \tag{2.1.18}$$

Debido a que la concentración de sedimentos promedio en un punto es constante y el flujo neto de sedimentos a través del área horizontal es cero, el flujo ascendente de sedimentos es balanceado por la caída de sedimentos a causa de su propio peso. Si "ω" es la velocidad final de caída de los sedimentos, entonces el transporte de sedimentos descendente por unidad de área vale $C\omega$ y, por tanto, se cumple que

$$C\omega + \varepsilon_s \frac{dC}{dy} = 0 \qquad (2.1.19)$$

Esta ecuación fue desarrollada primero por Willtelm Schmidt en 1925 haciendo estudios en la atmósfera y luego por M.P. O'Brien en 1933 en estudios de sedimentos suspendidos en corrientes.

Separando variables en la ec.(2.1.19) queda

$$\frac{dC}{C} = -\omega \frac{dy}{\varepsilon_s} \qquad (2.1.20)$$

Integrando esta ecuación entre un punto a una altura "a" sobre el fondo,donde la concentración de sedimentos en suspensión "Ca" es conocida y un punto "y" cualquiera arriba del fondo donde se desea conocer la concentración de sedimento C, se obtiene la siguiente solución

$$\frac{C}{Ca} = \exp\left(-\omega \int_a^y \frac{dy}{\varepsilon_s}\right) \qquad (2.1.21)$$

Se ha encontrado que el coeficiente de difusión para sedimentos "ε_s" no es constante y que varía con la altura sobre el fondo del cauce, por tanto, es necesario conocer la función que describe este coeficiente, para así resolver la ec. (2.1.21).

Dado que no se conoce la variación de "ε_s" en la vertical y a la similitud que existe entre el coeficiente de difusión para sedimentos y el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento, se hace la siguiente analogía: según Prandtl, el esfuerzo cortante local τ en un flujo bidimensional turbulento con velocidad media local $\overline{u}$ en la dirección x está dado por

$$\tau = -\rho\overline{u'v'} \qquad (2.1.22)$$

donde ρ es la densidad del flujo.

El grado de correlación entre u' y v' se define por el coeficiente de correlación β_2, donde

$$\beta_2 = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\ \sqrt{\overline{v'^2}}} \qquad (2.1.23)$$

Para obtener la fluctuación de la velocidad se hace uso de la teoría de la longitud de mezclado de Prandtl. Dicha longitud "ℓ" es la distancia vertical que viaja una partícula antes de cambiar su cantidad de movimiento; en forma gráfica se puede representar como en la Fig (2.1.3) y mediante un procedimiento similar al desarrollado para obtener la ec (2.1.15), se llega a que el valor medio de las fluctuaciones de la velocidad vale

$$\sqrt{\overline{u'^2}} = \frac{1}{2}(|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = \ell\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \qquad (2.1.24)$$

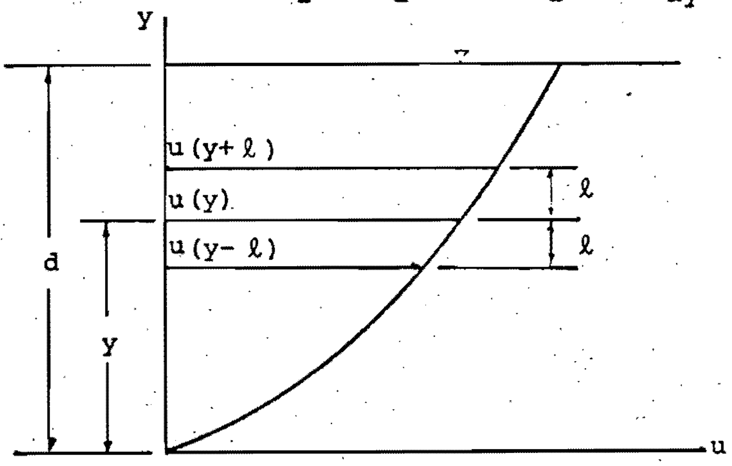

Fig. 2.1.3 DEFINICION DE LA LONGITUD DE MEZCLA SOBRE LA BASE DEL PERFIL DE VELOCIDADES.

Sustituyendo en la ec(2.1.22) las ecs(2.1.23) y (2.1.24) se llega a que

$$\tau = -\rho\ |\beta_2|\sqrt{\overline{v'^2}}\,\ell\ \frac{d\bar{u}}{dy} \qquad (2.1.25)$$

El producto $|\beta_2|\sqrt{\overline{v'^2}}\,\ell$ se conoce como coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento del elemento fluido "ε_m" y representa la viscosidad cinemática del flujo turbulento, así

$$\varepsilon_m = |\beta_2|\sqrt{\overline{v'^2}}\,\ell \qquad (2.1.26)$$

y por tanto

$$\tau = \varepsilon_m \frac{du}{dy} \qquad (2.1.27)$$

Por la similitud que existe entre las ecs (2.1.17 y 2.1.26) y como, no se conoce específicamente la variación del coeficiente de difusión para sedimentos "ε_s", mientras que el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento "ε_m" ya ha sido amplia mente estudiado, se ha optado por considerar

$$\varepsilon_s = \varepsilon_m \tag{2.1.28}$$

Para un flujo bidimensional estable, uniforme, en un canal abierto, la distribución del esfuerzo cortante es como aparece en la Fig. 2.1.4.

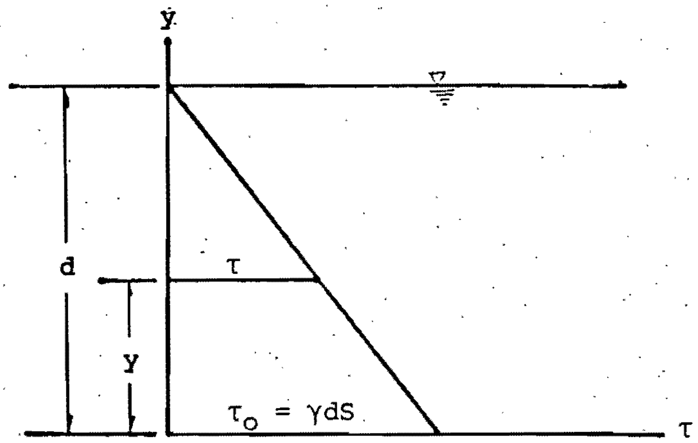

Fig. 2.1.4 DISTRIBUCION DEL ESFUERZO CORTANTE

de donde

$$\tau = \tau_o \frac{(d-y)}{d} \tag{2.1.29}$$

Siendo τ_o el esfuerzo cortante en el fondo del canal y vale

$$\tau_o = \gamma dS \tag{2.1.30}$$

γ = peso específico del líquido

S = pendiente hidráulica

d = profundidad del flujo

Sustituyendo las ecs.(2.1.29) y (2.1.30) en la ec.(2.1.27)

$$\varepsilon_m = U_*^2 \frac{(\frac{d-y}{y})}{du/dy} \tag{2.1.31}$$

donde

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = \sqrt{gdS} \tag{2.1.32}$$

llamada la velocidad al cortante.

Reemplazando la ec. (2.1.31) en la ec. (2.1.28)

$$\varepsilon_s = U_*^2 \frac{(\frac{d-y}{y})}{du/dy} \tag{2.1.33}$$

Si la distribución de velocidades es conocida, "ε_s" puede expresarse como una función de "y".

Utilizando la distribución de velocidades de Prandtl-Von Karman, en la vertical, expresada como

$$\frac{u-u_{máx}}{U_*} = \frac{2.3}{\kappa} \log \frac{y}{d} \tag{2.1.34}$$

donde κ es la constante universal de Von Karman, y $u_{máx}$ es la velocidad máxima en el sentido del flujo.

Derivando la ec. (2.1.34)

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{\kappa y} \tag{2.1.35}$$

sustituyendo en la ec. (2.1.33)

$$\varepsilon_s = \kappa U_* \frac{y}{d}(d-y) \tag{2.1.36}$$

reemplazando "ε_s" en la ec. (2.1.21) e integrando

$$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{d-y}{y}\,\frac{a}{d-a}\right)^{\omega/\kappa U_*} \tag{2.1.37}$$

llamando

$$Z = \omega/\kappa U_* \tag{2.1.38}$$

la ec.(2.1.36) finalmente queda

$$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{d-y}{y}\ \frac{a}{d-a}\right)^{z} \qquad (2.1.39)$$

Quien primero desarrolló y presentó está ecuación fue Rouse en 1937 y por esta razón se conoce como la Ecuación de Rouse. Con la ec.(2.1.39) es posible conocer la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en la vertical del flujo si se conoce la concentración de sedimentos a una distancia del fondo "a".

2.2 Otros métodos basados en la teoría de difusión

2.2.1 Método de Lane y Kalinske

En un intento por obtener un método más práctico y sencillo para calcular el transporte de sedimentos que viaja en suspensión en un río o canal, Lane y Kalinske en 1941 presentaron una nueva aproximación para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión considerando que el coeficiente de difusión para sedimentos "ε_s" es constante en la vertical del flujo y toma un valor medio $\overline{\varepsilon_s}$, lo cual a pesar de que no es completamente cierto, según Lane y Kalinske, genera resultados de la distribución de la concentración de sedimentos que concuerdan con los resultados medidos en ríos anchos. Su método fue probado con mediciones hechas en el río Mississippi.

El valor medio del coeficiente de difusión para sedimentos sobre la vertical del flujo se expresa por

$$\overline{\varepsilon_s} = \frac{1}{d} \int_o^d \varepsilon_s \, dy \qquad (2.2.1.1)$$

Sustituyendo "ε_s" por la ec. (2.1.36)

$$\overline{\varepsilon_s} = \frac{\kappa U_*}{d^2} \int_o^d (yd-y^2)dy \qquad (2.2.1.2)$$

Integrando y reemplazando los límites

$$\overline{\varepsilon_s} = \frac{\kappa U_*}{d^2} \left(\frac{d^3}{2} - \frac{d^3}{3}\right) \qquad (2.2.1.3)$$

Considerando que la constante universal de Von Karman "κ" vale 0.4, la ec(2.2.1.3) finalmente queda

$$\overline{\varepsilon_s} = \frac{1}{15} U_* d \qquad (2.2.1.4)$$

La distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, de acuerdo a la ec(2.1.21) está dado por

$$\frac{C}{Ca} = \exp \left\{-\omega \int_a^y \frac{dy}{\varepsilon_s}\right\} \qquad (2.2.1.5)$$

Como Lane y Kalinske consideran "ε_s" constante igual a $\overline{\varepsilon_s}$, al sustituir queda

$$C = Ca \exp \left\{- \frac{15\omega}{U_* d} \int_a^y dy\right\} \qquad (2.2.1.6)$$

Integrando y reemplazando límites

$$C = Ca \exp \{- \frac{15\omega}{U_*}(\frac{y-a}{d})\} \qquad (2.2.1.7)$$

Para poder aplicar este método, es necesario conocer las características tanto hidráulicas como de los sedimentos y también la concentración Ca, medida a una distancia "a" del fondo.

2.2.2 Método de Einstein y Chien

En un intento por corregir las discrepancias entre los datos de ríos y la teoría, Einstein y Chien en 1952 proponen algunas modificaciones a la teoría sobre la cual se basa la ec. (2.1.39) y entre las principales hipótesis se tienen.

1. El flujo ascendente de sedimentos atravesando un área unitaria horizontal en un nivel "y", proviene de un nivel $y-A_1\ell$ mientras que el flujo descendente atravesando la misma área proviene de un nivel $y+(1-A_1)\ell$, en donde ℓ es la longitud de mezclado del flujo propuesta por

Prandtl y A_1 es un factor numérico con un valor menor de 1.

Gráficamente se vería como en la Fig. (2.2.2.1).

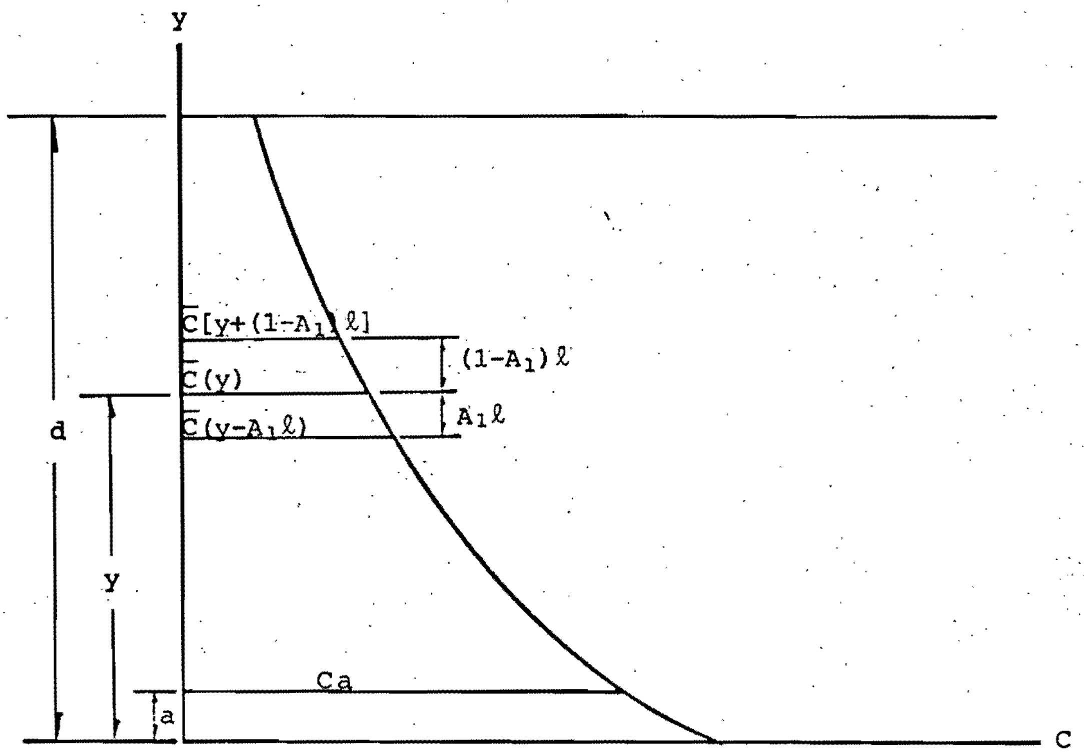

Fig. 2.2.2.1 PULSACIONES DE LA CONCENTRACION DE SEDIMENTOS DEFINIDA EN TERMINOS DE LA LONGITUD DE MEZCLA, SEGUN EINSTEIN Y CHIEN.

2. La velocidad media del flujo de sedimentos en suspensión ascendiendo y descendiendo es respectivamente $v'-\omega$ y $v'+\omega$.

3. La concentración promedio de sedimentos en el flujo ascendente es $C-A_1\ell(\frac{dc}{dy})$ y en el flujo descendente $C+(1-A_1)\,\ell(\frac{dc}{dy})$ donde "C" es la concentración al nivel "y"

Dado que el gasto de sedimentos por unidad de área es igual al producto de la concentración por la velocidad, entonces el gasto de sedimentos ascendiendo por unidad de área vale

$$\left[C - A_1 \ell \left(\frac{dC}{dy}\right)\right](v' - \omega) \qquad (2.2.2.1)$$

y el gasto de sedimentos descendiendo por unidad de área

$$\left[C + (1 - A_1) \ell \left(\frac{dC}{dy}\right)\right](v' + \omega) \qquad (2.2.2.2)$$

Para que haya equilibrio entre el flujo de sedimentos ascendente y descendente, la ec(2.2.2.1) debe ser igual a la ec. (2.2.2.2), por tanto

$$\left[C - A_1 \ell \left(\frac{dC}{dy}\right)\right](v' - \omega) = \left[C + (1 - A_1) \ell \left(\frac{dC}{dy}\right)\right](v' + \omega) \qquad (2.2.2.3)$$

Desarrolando

$$Cv' - \omega C - A_1 \ell v' \frac{dC}{dy} + A_1 \ell \omega \frac{dC}{dy} = v'C + C\omega + \ell v' \frac{dC}{dy} - A_1 \ell v' \frac{dC}{dy} + \ell \omega \frac{dC}{dy} - A_1 \ell \omega \frac{dC}{dy} \qquad (2.2.2.4)$$

Simplificando resulta

$$2\omega C - 2A_1 \ell \omega \frac{dC}{dy} + \ell v' \frac{dC}{dy} + \ell \omega \frac{dC}{dy} = 0 \qquad (2.2.2.5)$$

Según Einstein, $\ell v'$ es igual a dos veces el coeficiente de difusión para sedimentos "εs", el cual está dado por la ec. (2.1.36), por tanto,

$$\ell v' = 2\kappa U_* \left(\frac{d-y}{d}\right) y \qquad (2.2.2.6)$$

Por otro lado, de acuerdo a la teoría de turbulencia de Prandtl se sabe que

$$\tau = \rho \ell^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \qquad (2.2.2.7)$$

y según la ec. (2.1.2.9)

$$\tau = \tau_o \left(\frac{d-y}{d}\right) \qquad (2.2.2.8)$$

El gradiente de velocidades de acuerdo a la distribución de velocidades de Prandtl-Von Karman, está dado por la ec. (2.1.35).

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{\kappa y} \qquad (2.2.2.9)$$

De donde la ec. (2.2.2.7) queda

$$\tau = \rho \ell^2 \left(\frac{U_*}{\kappa y}\right)^2 \qquad (2.2.2.10)$$

Sustituyendo la ec. (2.2.2.10) en la ec. (2.2.2.8), teniendo en cuenta que $\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}$ es igual a U_*, resulta

$$\ell = B_1 \kappa y \sqrt{\frac{d-y}{d}} \qquad (2.2.2.11)$$

Donde B_1 es un factor dimensional dado por Einstein y Chien.

Reemplazando las ecs. (2.2.2.11) y (2.2.2.6) en la ec(2.2.2.5) y dividiendo entre 2 queda

$$\omega C + \kappa U_* y \left(\frac{d-y}{d}\right)\frac{dC}{dy} + \kappa y \omega \sqrt{\frac{d-y}{d}}\, B_1 \left(\frac{1}{2} - A_1\right)\frac{dC}{dy} = 0 \qquad (2.2.2.12)$$

Separando variables

$$\frac{dC}{C} = \frac{\omega dy}{\kappa y U_* \left(\frac{d-y}{d}\right) + N\omega \kappa y \left(\frac{d-y}{d}\right)^{1/2}} \qquad (2.2.2.13)$$

Donde

$$N = B_1(\frac{1}{2} - A_1) \qquad (2.2.2.14)$$

Integrando la ec.(2.2.2.13) entre un nivel "a" donde la concentración "Ca" es conocida y otro nivel "y" cualquiera sobre la profundidad del flujo, donde se desea conocer la concentración de sedimentos "C" se obtiene la siguiente solución

$$\frac{C}{Ca} = \left[\frac{1-\sqrt{\frac{d-a}{d}}}{1-\sqrt{\frac{d-y}{d}}}\right]^{\frac{Z}{1+N\kappa Z}} \left[\frac{1+\sqrt{\frac{d-a}{d}}}{1+\sqrt{\frac{d-y}{d}}}\right]^{\frac{Z}{1-N\kappa Z}}$$

$$\left[\frac{\sqrt{\frac{d-a}{d}} + N\kappa Z}{\sqrt{\frac{d-y}{d}} + N\kappa Z}\right]^{\frac{2Z}{N^2\kappa^2 Z^2 - 1}} \qquad (2.2.2.15)$$

Para utilizar esta ecuación es necesario conocer por medio de mediciones directas, en el sitio donde se va a aplicar el método, el valor de las constantes N y κ lo que hace complicado su aplicación. Según Vanoni aún falta hacer más estudios para probar la validez de este método.

2.2.3 Método de J. N. Hunt

En 1954 Hunt publica una expresión para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en un flujo a superficie libre, tomando en cuenta en su deducción el volumen ocupado por los sedimentos dentro del flujo. Utilizó la distribución de velocidades obtenida por Von Karman, la cual a diferencia de otras distribuciones de velocidades no genera un valor infinito para el gradiente de la velocidad en el fondo del cauce.

Su método fué comparado con los resultados experimentales de Vanoni, mostrando muy buena concordancia.

De acuerdo al principio de transferencia de cantidad de movimiento, la longitud de mezcla para el intercambio de la cantidad de movimiento está dada por la relación de Prandtl, donde:

$$\tau = \rho \ell^2 \left(\frac{du}{dy}\right) \left|\frac{du}{dy}\right| \qquad (2.2.3.1)$$

Von Karman similarmente define la longitud de mezclado como:

$$\ell = \kappa \frac{du}{dy} \Big/ \frac{d^2u}{dy^2} \qquad (2.2.3.2)$$

Por otra parte, τ de acuerdo a la ec.(2.1.29) vale

$$\tau = \tau_o \left(\frac{d-y}{d}\right) \qquad (2.2.3.3)$$

y

$$\tau_o = \gamma d S \qquad (2.2.3.4)$$

Sustituyendo las ecs.(2.2.3.2),(2.2.3.3) y (2.2.3.4) en la ec.(2.2.3.1) resulta

$$gS(d-y) = \kappa^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^4 \Big/ \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^2 \qquad (2.2.3.5)$$

Efectuando la primera integración

$$\frac{du}{dy} = \frac{(gdS)^{1/2}}{2\kappa d\left[B_2-(1-y/d)^{1/2}\right]} = \frac{U_*}{2\kappa d\left[B_2-(1-y/d)^{1/2}\right]} .$$

$$\ldots \quad (2.2.3.6)$$

donde B_2 es una constante de integración

Al integrar la ec. (2.2.3.6) se obtiene la siguiente distribución de velocidades para el flujo

$$u = \frac{U_*}{\kappa}\{(1-y/d)^{1/2}+B_2 \ln\left[\frac{B_2-(1-y/d)^{1/2}}{B_2}\right]\}+ \text{Constante}$$

$$\ldots \quad (2.2.3.7)$$

Dado que la velocidad máxima "$u_{máx}$" ocurre en la superficie del flujo (y=d), la distribución de velocidades queda

$$\frac{u_{máx}-u}{U_*} = -\frac{1}{\kappa}\{(1-y/d)^{1/2}+B_2 \ln\left[\frac{B_2-(1-y/d)^{1/2}}{B_2}\right]\} \quad (2.2.3.8)$$

Si se expresa por $\vec{P}(x,y,z,t)$ el vector flujo de sedimentos y por $\vec{u}_s(x,y,z)$ el campo establecido de velocidad de los sedimentos, entonces el flujo de sedimentos está dado por la siguiente expresión:

$$\vec{P} = \vec{u}_s C_v - \varepsilon_s \text{ grad } C_v \quad (2.2.3.9)$$

Donde "C_v" es la concentración de sedimentos en volúmen.
Si "$\vec{q}_1$" representa el vector de flujo de agua y "$\vec{u}_w$" el vector velocidad del agua, teniendo en cuenta el volumen ocupado por los sedimentos, el flujo de agua tiene la siguiente expre

sión

$$\vec{q}_1 = \vec{u}_w(1-C_v)-\varepsilon_m \text{ grad } (1-C_v) \qquad (2.2.3.10)$$

Donde "ε_m" es el coeficiente de difusión del agua.

Para que se cumpla la ecuación de continuidad, debe también cumplirse que

$$\text{div}(\vec{p} + \vec{q}_1) = 0 \qquad (2.2.3.11)$$

El cambio en el tiempo de la concentración de sedimentos en un punto partícular está dado por

$$\frac{\partial C_v}{\partial t} = - \text{div } \vec{p} \qquad (2.2.3.12)$$

Sustituyendo a "$\vec{p}$" por la ec.(2.2.3.9)

$$\frac{\partial C_v}{\partial t} = \text{div}(\varepsilon_s \text{ grad } C_v) -\text{div}(\vec{u}_s C_v) \qquad (2.2.3.13)$$

De la ec.(2.2.3.11) teniendo en cuenta la ec.(2.2.3.12) también resulta que

$$\frac{\partial C_v}{\partial t} = \text{div}(\varepsilon_m \text{ grad } C_v)+\text{div}\left[\vec{u}_w(1-C_v)\right] \qquad (2.2.3.14)$$

Desarrollando la ec.(2.2.3.13) queda :

$$\frac{\partial C_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{sx} \frac{\partial C_v}{\partial x})+ \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_{sy} \frac{\partial C_v}{\partial y})+ \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_{sz} \frac{\partial C_v}{\partial z}) -$$

$$-C_v(\frac{\partial u_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{sy}}{\partial y} + \frac{\partial u_{sz}}{\partial z})-u_{sx} \frac{\partial C_v}{\partial x} - u_{sy} \frac{\partial C_v}{\partial y} - u_{sz} \frac{\partial C_v}{\partial z}$$

$$\ldots \qquad (2.2.3.15)$$

donde $\varepsilon_{sx}, \varepsilon_{sy}, \varepsilon_{sz}$ son los componentes del coeficiente de difusión de sedimentos "ε_s" en las direcciones x,y,z respectivamente y u_{sx}, u_{sy}, u_{sz} son los componentes de la velocidad de los sedimentos en un punto "u_s", en las direcciones x,y,z respectivamente.

Similarmente, si se desarrolla la ec.(2.2.3.14) resulta

$$\frac{\partial C_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{mx} \frac{\partial C_v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_{my} \frac{\partial C_v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_{mz} \frac{\partial C_v}{\partial z}) +$$

$$+(1-C_v)(\frac{\partial u_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{wy}}{\partial y} + \frac{\partial u_{wz}}{\partial z}) - u_{wx} \frac{\partial C_v}{\partial x} -$$

$$- u_{wy} \frac{\partial C_v}{\partial y} - u_{wz} \frac{\partial C_v}{\partial z} \qquad (2.2.3.16)$$

donde ε_{mx}, ε_{my}, ε_{mz} son los componentes del coeficiente de difusión del agua en las direcciones x,y,z respectivamente y u_{wx}, u_{wy}, u_{wz} son los componentes de la velocidad del agua en un punto "u_w",en las direcciones x,y,z respectivamente.

Si se considera que el flujo es uniforme, donde la concentración de sedimentos en cada punto es constante en el tiempo y varía sólo en la dirección vertical del flujo, las ecs. (2.2.3.15) y (2.2.3.16) se reducen a

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_s \frac{\partial C_v}{\partial y}) - C_v \frac{\partial u_{sy}}{\partial y} - u_{sy} \frac{\partial C_v}{\partial y} = 0 \qquad (2.2.3.17)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_m \frac{\partial C_v}{\partial y}) + (1-C_v)\frac{\partial u_{wy}}{\partial y} - u_{wy} \frac{\partial C_v}{\partial y} = 0 \qquad (2.2.3.18)$$

La velocidad ascendente de los sedimentos dentro del flujo "u_{sy}" es igual a la velocidad ascendente del agua "u_{wy}" menos la velocidad de caída de los sedimentos "ω", esto es

$$u_{sy} = u_{wy} - \omega \qquad (2.2.3.19)$$

Entre las ecs.(2.2.3.17) y (2.2.3.18) es posible eliminar u_{sy} y u_{wy} si en cualquiera de ellas se introduce la ec.(2.2.3.19) resultando que

$$\varepsilon_s \frac{\partial C_v}{\partial y} + C_v \frac{\partial C_v}{\partial y}(\varepsilon_m - \varepsilon_s) + (1-C_v)C_v\omega = 0 \qquad (2.2.3.20)$$

Esta es la ecuación diferencial general que describe la distribución vertical de sedimentos en suspensión en el flujo según Hunt. Esta expresión se simplifica si se considera que el coeficiente de difusión de sedimentos "ε_s" es igual al coeficiente de difusión del agua "ε_m", lo cual a pesar de no ser estrictamente cierto, según Hunt no introduce error cuando los sedimentos son finos.

Teniendo en cuenta lo anterior, la ec.(2.2.3.20) se reduce a

$$\varepsilon_s \frac{\partial C_v}{\partial Y} + (1-C_v)C_v\omega = 0 \qquad (2.2.3.21)$$

Separando variables queda

$$\frac{\partial C_v}{(1-C_v)C_v} = -\omega \frac{\partial y}{\varepsilon_s} \qquad (2.2.3.22)$$

Al integrar esta ecuación entre un nivel "y" igual a "a" donde la concentración C_{va} es conocida y un nivel "y" cualquiera donde se desea conocer la concentración de sedimentos "C_v", entonces

$$\ell n \left. \frac{C_v}{1-C_v} \right]_a^y = -\omega \int_a^y \frac{dy}{\varepsilon_s} \qquad (2.2.3.23)$$

El coeficiente de difusión del agua, de acuerdo a la ec. (2.1.31) está dado por la expresión

$$\varepsilon_m = \frac{U_*^2(\frac{d-y}{d})}{du/dy} \qquad (2.2.3.24)$$

Donde du/dy es el gradiente de velocidad para el agua.

A pesar de que para simplificar la ec.(2.2.3.20) se toma a "ε_s" igual a "ε_m", Hunt considera que los dos procesos son similares pero no siempre iguales, ya que la distribución de velocidades del agua puede ser diferente a la de los sedimentos en suspensión, por tanto, el coeficiente de difusión de sedimentos se expresa por

$$\varepsilon_s = \frac{U_*^2(\frac{d-y}{d})}{du_s/dy} \qquad (2.2.3.25)$$

Donde du_s/dy es el gradiente de velocidades de los sedimentos suspendidos. El gradiente de velocidades del flujo expresado por la ec.(2.2.3.6) es el mismo que para los sedimentos, solamente que en este caso las constantes que en ella aparecen (κ y B_2) deben determinarse para los sedimentos y se denotarán por (κ_s y B_{2s}), por tanto, el gradiente de velocidades de los sedimentos está dado por

$$\frac{du_s}{dy} = \frac{U_*}{2\kappa_s d\left[B_{2s}-(1-y/d)^{1/2}\right]} \qquad (2.2.3.26)$$

donde "κ_s" es la constante universal de Von Karman para los sedimentos y "B_{2s}" es una constante a evaluarse con la distribución de velocidades de los sedimentos.

Sustituyendo la ec.(2.2.3.26) en la ec.(2.2.3.25)

$$\varepsilon_s = 2\,\kappa_s U_*(1-\frac{y}{d})\left[B_{2s}-(1-\frac{y}{d})^{1/2}\right] \qquad (2.2.3.27)$$

Reemplazando esta última expresión en la ec.(2.2.3.23) resulta

$$\ell n\frac{C_v}{1-C_v}\Big]_a^y = -\frac{\omega}{2\kappa_s U_*}\int_a^y \frac{dy}{(1-\frac{y}{d})\left[B_{2s}-(1-\frac{y}{d})^{1/2}\right]} \qquad (2.2.3.28)$$

Al integrar y reemplazar los límites, finalmente se llega a que

$$(\frac{C_v}{1-C_v})(\frac{1-C_{va}}{C_{va}}) = \{(\frac{1-\frac{y}{d}}{1-\frac{a}{d}})^{1/2}\left[\frac{B_{2s}-(1-\frac{a}{d})^{1/2}}{B_{2s}-(1-\frac{y}{d})^{1/2}}\right]\}^{q_2} \qquad (2.2.3.29)$$

donde

$$q_2 = \frac{\omega}{\kappa_s\, B_{2s}\, U_*} \qquad (2.2.3.30)$$

Cuando la concentración volumétrica de sedimentos es muy pequeña, los términos $(1-C_v)$ y $(1-C_{va})$ se consideran igual a uno, y la ec.(2.2.3.30) se reduce a

$$\frac{C_v}{C_{va}} = \{(\frac{1-\frac{y}{d}}{1-\frac{a}{d}})^{1/2}\left[\frac{B_{2s}-(1-\frac{a}{d})^{1/2}}{B_{2s}-(1-\frac{y}{d})^{1/2}}\right]\}^{q_2} \qquad (2.2.3.31)$$

B_{2s} y κ_s como se dijo, son constantes, las cuales se determinan mediante mediciones de la distribución de la concentración de sedimentos. Según Vanoni, lo anterior hace difícil y dispendioso aplicar este método, a pesar de que los fundamentos teóricos y sus resultados son buenos.

2.2.4 Método de Velikanov

Basándose en la teoría de difusión turbulenta y utilizando la distribución de velocidades propuesta por Nikuradze, en 1955 Velikanov desarrolla una nueva expresión para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en un flujo a superficie libre.

La distribución de velocidades del flujo según Nikuradze está dada por la expresión

$$u = \frac{U_*}{\kappa} \ln\left(1+ \frac{E}{\alpha}\right) \qquad (2.2.4.1)$$

donde

$$E = \frac{y}{d} \qquad (2.2.4.2)$$

y α es la rugosidad relativa de Nikuradze, expresada como

$$\alpha = \frac{D}{30d} \qquad (2.2.4.3)$$

Siendo D el diámetro de las partículas del fondo.

Como se ha dicho, k es la constante universal de Von Karman cuyo valor se considera igual a 0.4. La distribución de la concentración de sedimentos de acuerdo a la ec.(2.1.21) está dada por la relación

$$\frac{C}{Ca} = \exp -\omega \int_a^y \frac{dy}{\varepsilon_s} \qquad (2.2.4.4)$$

El coeficiente de difusión de sedimentos "ε_s" según la ec.

(2.1.33) tiene la siguiente expresión

$$\varepsilon_s = \frac{U_*^2 (\frac{d-y}{d})}{du/dy} \qquad (2.2.4.5)$$

Haciendo el cambio de variables de "y" por "E"

$$\varepsilon_s = \frac{U_*^2 d(1-E)}{du/dE} \qquad (2.2.4.6)$$

Derivando la ec.(2.2.4.1) con respecto a "E" queda

$$\frac{du}{dE} = \frac{U_*}{\kappa} \frac{1}{\alpha+E} \qquad (2.2.4.7)$$

Sustituyendo esta última expresión en la ec.(2.2.4.6)

$$\varepsilon_s = U_* \kappa d(1-E)(\alpha+E) \qquad (2.2.4.8)$$

La ec.(2.2.4.4) al cambiar la variable de integración de "y" por "E" queda

$$\frac{C}{Ca} = \exp\left(-\omega d \int_{\frac{a}{d}}^{E} \frac{dE}{\varepsilon_s}\right) \qquad (2.2.4.9)$$

Reemplazando la ec.(2.2.4.8) en la ec.(2.2.4.9)

$$\frac{C}{Ca} = \exp\left(\frac{-\omega}{U_* \kappa} \int_{\frac{a}{d}}^{E} \frac{dE}{(1-E)(\alpha+E)}\right) \qquad (2.2.4.10)$$

integrando

$$\frac{C}{Ca} = \exp \frac{-\omega}{\kappa U_*} \frac{1}{1+\alpha} \Big[\ell n(\alpha+E) - \ell n(1-E)\Big]_{\frac{a}{d}}^{E} \qquad (2.2.4.11)$$

agrupando

$$\frac{C}{Ca} = \exp \frac{-\omega}{\kappa U_*} \frac{1}{1+\alpha} \Big[\ell n(\frac{\alpha+E}{1-E})\Big]_{\frac{a}{d}}^{E} \qquad (2.2.4.12)$$

Reemplazando límites

$$\frac{C}{Ca} = \exp \frac{-\omega}{\kappa U_*} \frac{1}{1+\alpha} \left[\ell n \left(\frac{\alpha+E}{1-E}\right) - \ell n \left(\frac{\alpha + \frac{a}{d}}{1+ \frac{a}{d}} \right) \right] \tag{2.2.4.13}$$

Desarrollando

$$\frac{C}{Ca} = \exp \frac{-\omega}{\kappa U_*} \frac{1}{1+\alpha} \left[\ell n \left(\frac{(1-E)\,(\alpha + \frac{a}{d})}{(\alpha+E)\,(1+ \frac{a}{d})} \right) \right] \tag{2.2.4.14}$$

la cual finalmente queda

$$\frac{C}{Ca} = \left[\frac{(1-E)\,(\alpha+a/d)}{(\alpha+E)\,(1-a/d)} \right]^{\frac{-\omega}{\kappa U_* (1+\alpha)}} \tag{2.2.4.15}$$

Con esta ecuación es posible conocer la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión sobre la vertical del flujo si de antemano se conoce la concentración de sedimentos en el nivel "y" igual a "a".

Velikanov sugiere que la distancia del fondo "a" a la cual se deba medir Ca, sea igual a 0.002d.

2.2.5 Método de Chang - Simons y Richardson

En 1967 Chang obtiene una nueva expresión para el coeficiente de difusión de sedimentos en un flujo turbulento y por tanto una nueva aproximación para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en el flujo.

Con base en la teoría turbulenta de Prandtl, de acuerdo a la ec.(2.2.2.7), el esfuerzo cortante está dado por la expresión

$$\tau = \rho \ell^2 (\frac{du}{dy})^2 \qquad (2.2.5.1)$$

También es sabido que el esfuerzo cortante para un flujo uniforme según la ec.(2.1.29) se expresa por la relación

$$\tau = \tau_o (\frac{d-y}{d}) \qquad (2.2.5.2)$$

Donde τ_o es el esfuerzo cortante en el fondo del cauce y vale

$$\tau_o = \gamma dS \qquad (2.2.5.3)$$

Sustituyendo la ec.(2.2.5.2) en la ec.(2.2.5.1) y agrupando se llega a que

$$\frac{du}{dy} = U_* \sqrt{\frac{d-y}{d}} \, \frac{1}{\ell} \qquad (2.2.5.4)$$

donde

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \qquad (2.2.5.5)$$

Según Von Karman

$$\ell = \kappa y \qquad (2.2.5.6)$$

Por tanto

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{\kappa y} \sqrt{\frac{d-y}{d}} \qquad (2.2.5.7)$$

Teniendo en cuenta las observaciones de Vanoni, Brooks, Elata e Ippen, quienes encontraron que la constante universal de Von Karman (κ) es una constante con valor de 0.4 para flujo con agua clara, pero varía para flujo de agua mezclada con sedimentos, Chang Simons y Richardson elaboraron una gráfica para ajustar el valor de κ en función del número de

Reynolds (Fig.2.2.5.1).

Chang considera que el coeficiente de difusión para sedimentos ε_s y el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento, ε_m, son similares pero no iguales como se planteó en la ec.(2.1.28) y según él están relacionados de la siguiente manera

$$\varepsilon_s = \beta\varepsilon_m \tag{2.2.5.8}$$

Donde β es una constante de proporcionalidad, la cual es considerada por los autores de este método igual a 1.5.

Sustituyendo ε_m de la ec.(2.1.3.1), entonces

$$\varepsilon_s = \frac{\beta U_*^2 (\frac{d-y}{d})}{du/dy} \tag{2.2.5.9}$$

si se reemplaza el gradiente de velocidad dado por la ec. (2.2.5.7), resulta

$$\varepsilon_s = \beta U_* \kappa y \sqrt{\frac{d-y}{d}} \tag{2.2.5.10}$$

llamando a "E" igual a $\frac{y}{d}$, entonces

$$\varepsilon_s = \beta\kappa d E U_* \sqrt{1-E} \tag{2.2.5.11}$$

la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión de acuerdo a la teoría de difusión, está dada por la ec. (2.1.21), donde

$$\frac{C}{Ca} = \exp -\omega \int_a^y \frac{dy}{\varepsilon_s} \tag{2.2.5.12}$$

Si "E" es igual a y/d, entonces

$$dy = d \cdot dE \tag{2.2.5.13}$$

Por tanto, la ec.(2.2.5.12) queda

$$\frac{C}{Ca} = \exp -\omega d \int_{E_a}^{E} \frac{dE}{\varepsilon_s} \tag{2.2.5.14}$$

donde "E_a" es el valor de "E" para "y" igual a "a", es decir, E_a es igual a a/d.

Sustituyendo ε_s por la ec.(2.2.5.11)

$$\frac{C}{Ca} = \exp \frac{-\omega}{\beta\kappa U_*} \int_{E_a}^{E} \frac{dE}{E\sqrt{1-E}} \tag{2.2.5.15}$$

Al integrar esta última ecuación y reemplazar sus límites, finalmente se llega a que

$$\frac{C}{Ca} = \left[(1-\sqrt{1-E_a})/\sqrt{E_a}\right]^{\frac{2\omega}{\beta\kappa U_*}} \left(\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}}\right)^{\frac{2\omega}{\beta\kappa U_*}} \tag{2.2.5.16}$$

ó

$$\frac{C}{Ca} = A_2 \left(\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}}\right)^{Z_2} \tag{2.2.5.17}$$

donde

$$Z_2 = \frac{2\omega}{\beta\kappa U_*} \tag{2.2.5.18}$$

y

$$A_2 = \left[(1-\sqrt{1-E_a})/\sqrt{E_a}\right]^{Z_2} \tag{2.2.5.19}$$

El espesor de la capa del fondo "a", altura a la cual debe medirse la concentración de referencia "Ca", se evaluará con la siguiente expresión

$$a = j \frac{\tau_o - \tau_c}{(1-\lambda)(\gamma_s-\gamma) \tan\phi} \tag{2.2.5.20}$$

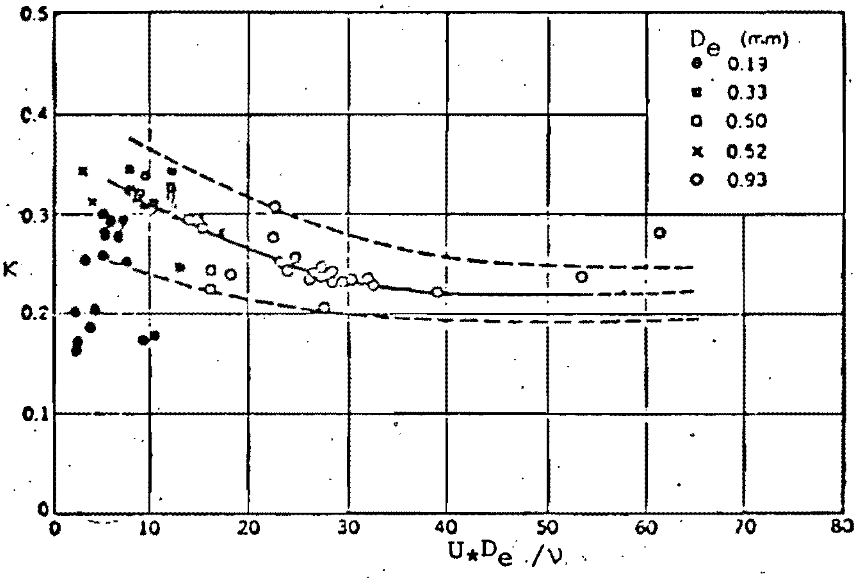

Fig. 2.2.5.1 VARIACION DE LA CONSTANTE DE VON KARMAN (κ) , (SEGUN CHANG-SIMONS Y RICHARDSON)

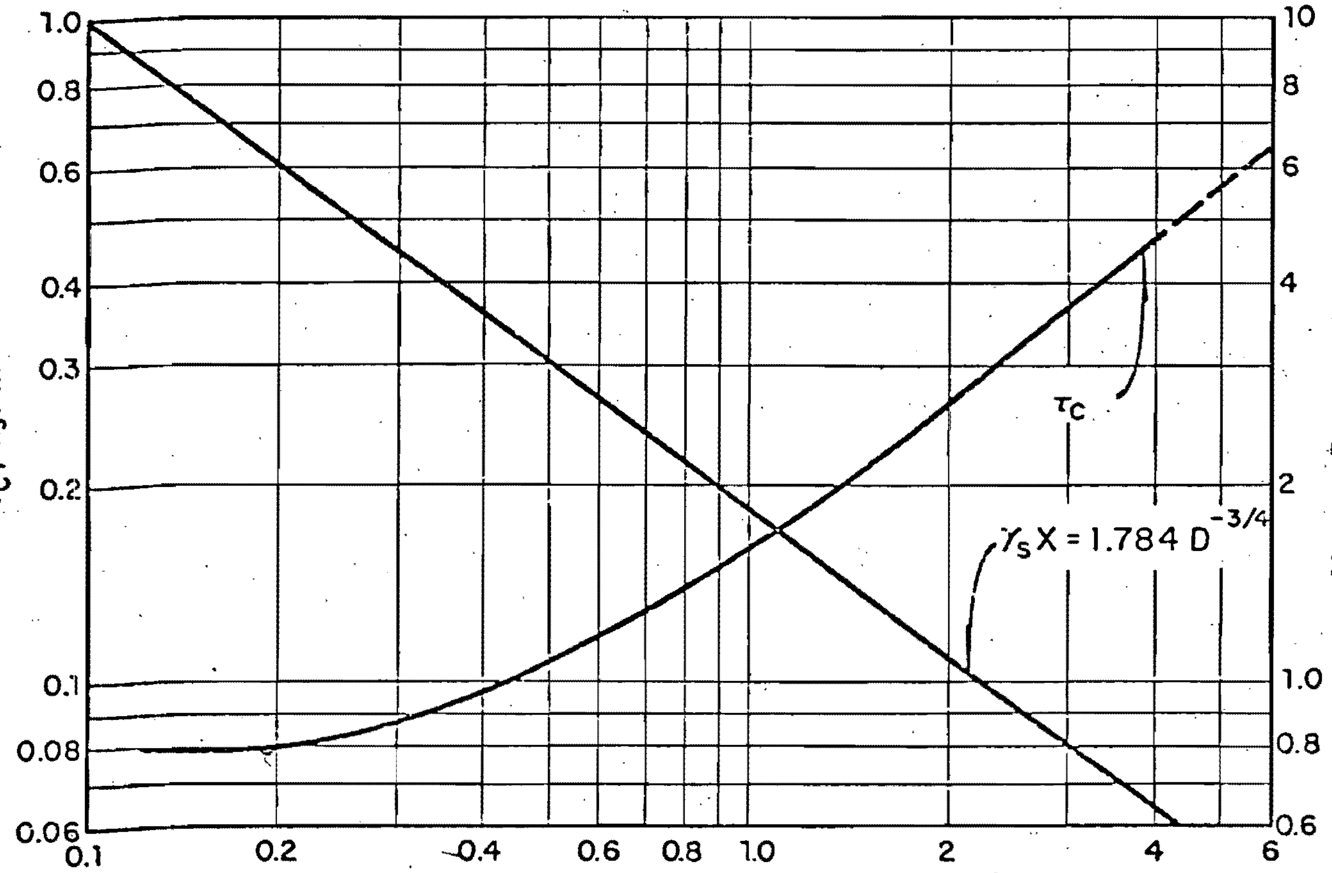

Fig. 2.2.5.2 COEFICIENTE CARACTERISTICO DE LOS SEDIMENTOS χ Y ESFUERZO CORTANTE CRITICO τ_c PARA SER UTILIZADOS EN LA ECUACION DE DUBOYS, SEGUN STRAUB (1935)

Donde j es una constante la cual experimentalmente se encontró que vale 10; λ es la porosidad del material del fondo; ϕ es el ángulo de reposo del material del fondo, sumergido, y τ_c es el esfuerzo cortante crítico el cual debe evaluarse mediante la Fig. (2.2.5.2) desarrollada por Straub para el método propuesto por DuBoys.

2.2.6 Método de Zagustín

Este método fue propuesto en 1969, y los resultados teóricos de su expresión final fueron verificados con los datos experimentales reportados por Taggart y Debol'skiy, mostrando buena concordancia sobre todo en la parte superior del flujo, arriba del nivel $y = 0.2d$.

La distribución de velocidades del flujo que él utilizó está expresada por

$$\frac{u_{máx}-u}{U_*} = \frac{2}{\kappa} \arctan\left(\frac{d-y}{d}\right)^{3/2} \qquad (2.2.6.1)$$

donde $u_{máx}$ es la velocidad máxima; κ es la constante universal de Von Karman con un valor aproximado de 0.4 y U_* es la velocidad al cortante.

El coeficiente de difusión de sedimentos "ε_s" considerando que es igual a "ε_m", está expresado por la ec. (2.1.33) donde

$$\varepsilon_s = \frac{U_*^2 (\frac{d-y}{d})}{du/dy} \qquad (2.2.6.2)$$

Al derivar la ecuación de distribución de velocidades queda

$$\frac{du}{dy} = - \frac{3U_*}{\kappa d} \frac{(\frac{d-y}{d})^{1/2}}{1+(\frac{d-y}{d})^3} \qquad (2.2.6.3)$$

Si se sustituye esta ecuación en la ec.(2.2.6.2), entonces

$$\varepsilon_s = - \frac{U_*^2 (\frac{d-y}{d})}{\frac{3U_*}{\kappa d} \frac{(\frac{d-y}{d})^{1/2}}{1+(\frac{d-y}{d})^3}} \qquad (2.2.6.4)$$

Desarrollando

$$\varepsilon_s = - \frac{U_* \kappa d}{3} (\frac{d-y}{d})^{1/2} \left[1+(\frac{d-y}{d})^3\right] \qquad (2.2.6.5)$$

Por otro lado, la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en la vertical del flujo, de acuerdo a la ec.(2.1.21) está expresada por

$$\frac{C}{Ca} = \exp -\omega \int_a^y \frac{dy}{\varepsilon_s} \qquad (2.2.6.6)$$

Sustituyendo en esta expresión la ec.(2.2.6.5)

$$\frac{C}{Ca} = \exp -\frac{3\omega}{\kappa U_* d} \int_a^y \frac{dy}{(\frac{d-y}{d})^{1/2} \left[1+(\frac{d-y}{d})^3\right]} \qquad (2.2.6.7)$$

Integrando y reemplazando sus límites, finalmente se llega a

$$\frac{C}{Ca} = \exp(-Z\phi_2) \qquad (2.2.6.8)$$

donde

$$Z = \frac{\omega}{\kappa U_*} \qquad (2.2.6.9)$$

y

$$\phi_2 = 1/2\ell n \left[\frac{(\frac{d-y}{d})^{3/2}+1}{(\frac{d-y}{d})^{3/2}-1}\right]\left[\frac{(\frac{d-y}{d})^{1/2}-1}{(\frac{d-y}{d})^{1/2}+1}\right]^3 +$$

$$+\sqrt{3}\ \arctan\left[\frac{\sqrt{3}\ (\frac{d-y}{d})}{(\frac{d-y}{d})-1}\right] \qquad (2.2.6.10)$$

2.2.7 Método de Toffaleti

Toffaleti en 1969 presentó un método para calcular el transporte de sedimentos total de fondo, separando el que viaja en la capa de fondo y el de fondo que viaja en suspensión, cuyos estudios están basados en el método de Einstein (1950) y Einstein y Chien (1953).

El método fue aplicado y comparado con 339 mediciones en ríos y con 282 mediciones en canales de laboratorio, mostrando gran concordancia entre los resultados teóricos y los medidos en el flujo.

De las observaciones efectuadas, Toffaleti notó que la distribución de la concentración de sedimentos en la vertical del flujo seguía una ley logarítmica de la forma

$$C = Ca\left(\frac{d}{y}\right)^{bz} \qquad (2.2.7.1)$$

Manteniendo la forma de la ecuación presentada por Rouse, sólo que "b" tomaba diferentes valores dependiendo de la relación d/y.

De acuerdo a los resultados de sus experiencias dividió la profundidad del flujo en 4 zonas, dado que en cada una de ellas el valor de "b" mantenía un valor aproximadamente constante, limitándolas como aparece en la Fig. (2.2.7.1).

Como se observa el transporte de sedimentos en suspensión se realiza a partir del nivel $2D_i$ hasta la superficie.

En la ec.(2.2.7.1), Z es el mismo exponente de la expresión para la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión dada por Rouse, donde

$$Z = \frac{\omega}{\kappa U_*} \qquad (2.2.7.2)$$

La constante universal de Von Karman "κ" según Vanoni y Brooks vale

$$\kappa = \frac{2.303\ U_*}{m} \qquad (2.2.7.3)$$

Siendo "m" el número de unidades de velocidad por ciclo logarítmico de y/d.

Sustituyendo la ec.(2.2.7.3) en la ec.(2.2.7.2)

$$Z = \frac{\omega m}{2.303\ U_*^2} = \frac{\omega m}{2.303\ gdS} \qquad (2.2.7.4)$$

Dado que

$$m = U\ C_m \tag{2.2.7.5}$$

y

$$C_z = 2.303\ g/C_m \tag{2.2.7.6}$$

la ec.(2.2.7.4) en sistema métrico queda

$$Z = \frac{0.3048\omega U}{C_z\ Sd} \tag{2.2.7.7}$$

donde U es la velocidad media del flujo, "d" es el tirante, "S" es la pendiente hidráulica y "C_m" y "C_z" son parámetros que toman en cuenta la temperatura del agua.

C_z en sistema métrico, puede evaluarse mediante la ecuación empírica

$$C_z = 239.329 - 1.2006T \tag{2.2.7.8}$$

Donde T es la temperatura del agua en grados centígrados

Los valores de "b" encontrados experimentalmente para las diferentes zonas fueron: Para la zona inferior b= 0.756, para la zona media b = 1.0 y para la zona superior b= 1.50.

Dado que la distribución granulométrica del material del fondo no es uniforme, ésta se deberá dividir en fracciones y los cálculos se harán tomando como diámetro representativo de cada fracción "i" el diámetro medio Di.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, las ecuaciones para la distribución de concentraciones de sedimentos para cada fracción de tamaño "i",siguiendo la forma de la ec.(2.2.7.1) quedan:

ZONA INFERIOR comprendida entre los niveles "y" igual a 2Di y "y" igual a 1/11.64d

$$C_i = C_{Li}\left(\frac{d}{y}\right)^{0.756\ Z_i} \qquad (2.2.7.9)$$

Donde C_{Li} es la concentración de partida para partículas de diámetro medio D_i a la elevación "y" sobre el fondo igual a $2D_i$.

ZONA MEDIA para valores de y/d comprendidos entre 1/11.64 y 1/2.5

$$C_i = C_{mi}\left(\frac{d}{y}\right)^{Z_i} \qquad (2.2.7.10)$$

Domo C_{mi} es la concentración de referencia de cada fracción granulométrica "i" al nivel "y" igual a 1/11.64d.

ZONA SUPERIOR para valores de y/d mayores de 1/2.5

$$C_i = C_{Ui}\left(\frac{d}{y}\right)^{1.50\ Z_i} \qquad (2.2.7.11)$$

Donde C_{Ui} es la concentración de referencia de cada fracción granulométrica "i" al nivel "y" igual a 1/2.5d.

Por otro lado,Toffaleti dice que el perfil de velocidades se debe evaluar con la expresión

$$u = (1 + \eta_v)U\left(\frac{y}{d}\right)^{\eta_v} \qquad (2.2.7.12)$$

Donde η_v es un parámetro empírico que toma en cuenta los efectos de la temperatura sobre la velocidad del flujo.

$$\eta_v = 0.13516+0.000864T \qquad (2.2.7.13)$$

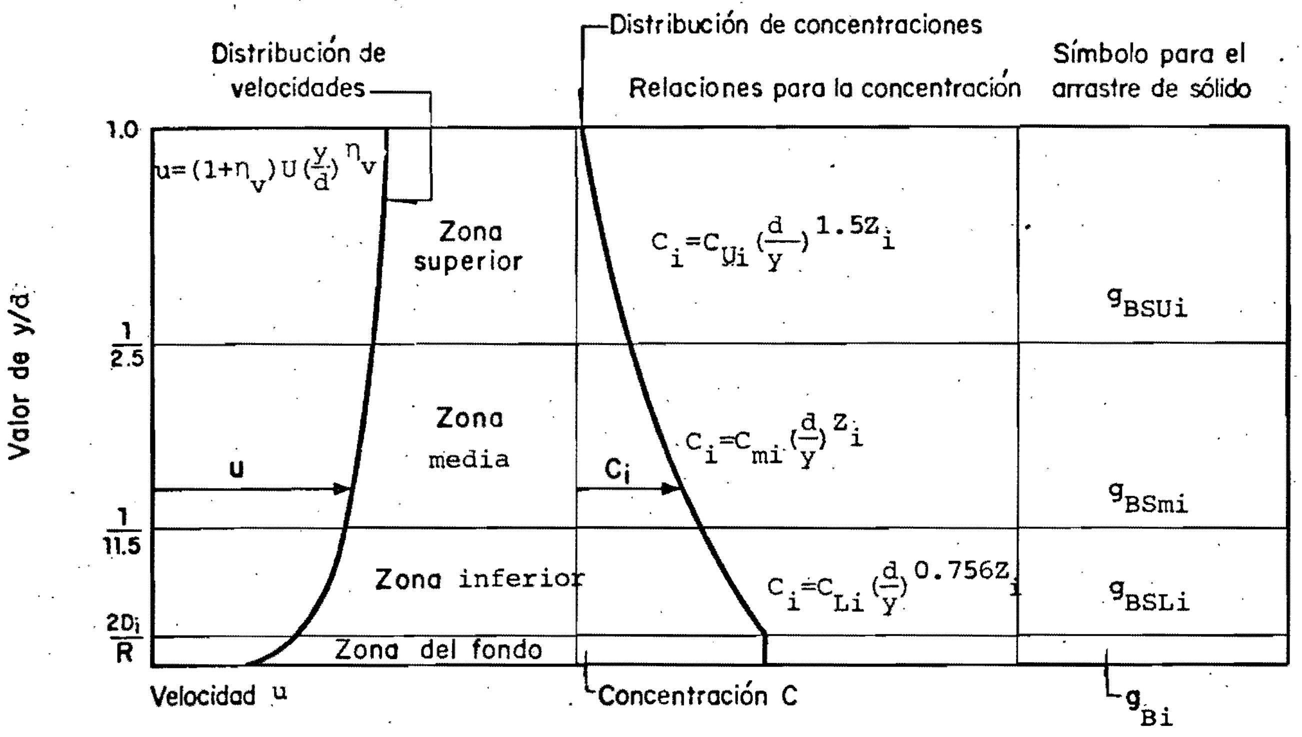

Fig. 2.2.7.1 Zonas propuestas por Toffaleti y relaciones para la velocidad y concentraciones

Si Z_i resultase más pequeño que η_v, éste arbitrariamente toma el valor de 1.5 η_v.

C_{Ui} y C_{mi} se pueden expresar en función de C_{Li} como se verá en el capítulo cuatro.

Conviene recordar que como la distribución granulométrica del material del fondo se divide en fracciones, la concentración de sedimentos total "C" en un determinado nivel "y", es igual a la suma de las concentraciones "C_i" calculadas a ese nivel "y", de todas las fracciones granulométricas, esto es

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad (2.2.7.14)$$

donde n es el número de fracciones en que se ha dividido la distribución granulométrica del fondo.

2.2.8 Método de Antsyferov y Debol'skiy

Utilizando la distribución empírica de velocidades desarrollada por Nikitin en 1963, la cual tiene en cuenta los efectos del fondo del cauce sobre el flujo, en 1969 publican un método para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, la cual fue comparada con los métodos desarrollados por Hunt y Rouse utilizando datos experimentales de Toggaurt y del propio Antsyferov mostrando un mayor ajuste tal como se observa en la Fig. (3.2.8.).

La distribución de velocidades encontrada por Nikitin tiene la siguiente expresión

$$u = 6.45U_* \log\frac{U_* y}{\nu} + 3.55U_* - \frac{15.7\nu}{y} \qquad (2.2.8.1)$$

Al derivar esta ecuación respecto a "y" se encuentra que el gradiente de la velocidad es

$$\frac{du}{dy} = \frac{2.8U_*}{y^2} + \frac{15.7\nu}{y^2} \qquad (2.2.8.2)$$

De acuerdo a la teoría de difusión, el coeficiente de difusión para sedimentos "ε_s" está dado por la ec.(2.1.33) donde

$$\varepsilon_s = U_*^2 \frac{(\frac{d-y}{d})}{du/dy} \qquad (2.2.8.3)$$

Sustituyendo aquí el gradiente de velocidades expresado en la ec.(2.2.8.2)

$$\varepsilon_s = \frac{U_*^2 y^2 (\frac{d-y}{d})}{2.8U_*+15.7\nu} \qquad (2.2.8.4)$$

Por otro lado, la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en la vertical del flujo, está expresado por la ec.(2.1.21), donde

$$\frac{C}{Ca} = \exp(-\omega \int_a^y \frac{dy}{\varepsilon_s}) \qquad (2.2.8.5)$$

Sustituyendo "ε_s" por la ec.(2.2.8.4)

$$\frac{C}{Ca} = \exp\left[-\omega d\left(\frac{2.8U_*+15.7\nu}{U_*^2}\right) \int_a^y \frac{dy}{y^2(d-y)}\right] \qquad (2.2.8.6)$$

Efectuando la integral y reemplazando los límites, finalmente se obtiene que

$$\frac{C}{Ca} = \exp(-\phi_1) \qquad (2.2.8.7)$$

donde

$$\phi_1 = \left[\left(\frac{2.8\omega}{U_*} + \frac{15.7\nu\omega}{dU_*^2}\right) \ell n\left(\frac{y}{d-y} \; \frac{d-a}{a}\right) - \frac{15.7\nu\omega}{dU_*^2}\left(\frac{d}{y} - \frac{d}{a}\right) \right] \qquad \ldots \quad (2.2.8.8)$$

Si se desprecia el efecto de la viscosidad en la distribución de la concentración de sedimentos, la ec.(2.2.8.7) se reduce a

$$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{d-y}{y} \; \frac{a}{d-a}\right)^{\frac{2.8\omega}{U_*}} \qquad (2.2.8.9)$$

La cual es casi idéntica a la ec.(2.1.37) propuesta por Rouse, con la diferencia de que Rouse toma la constante de Von Karman "κ" igual a 0.4 mientras que en la ec.(2.2.8.9) "κ" equivaldría a 1/2.8 lo cual es igual a 0.36. Sin embargo, la expresión que se debe usar es la ec.(2.2.8.7) que sí toma en cuenta el efecto viscoso del flujo.

Los autores garantizan buenos resultados para la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, mediante el uso de la ec.(2.2.8.7) para niveles del flujo arriba de 0.1d, ya que consideran que en la capa inferior del flujo se presentan fenómenos diferentes a los de difusión que no han sido tomados en cuenta, los cuales se describen más ampliamente en el subcapítulo (2.4).

2.2.9 Método de A.T. Ippen.

En 1971 Ippen publicó una ecuación para calcular la distribución de concentraciones de sedimentos en la profundidad del flujo, la cual tiene un desarrollo similar al utilizado por Rouse, con la diferencia de que Ippen utilizó la distribución de velocidades presentada por Krey en 1927, expresada como

$$\frac{u}{u_{máx}} = \frac{\ell n\,(1+\frac{y}{a})}{\ell n\,(1+\frac{d}{a})} \qquad (2.2.9.1)$$

donde "a" es una distancia arriba del fondo que cumple con la ecuación

$$\frac{u_{máx}}{U_*} = \frac{U_* a}{\nu}\,\ell n(1+\frac{d}{a}) \qquad (2.2.9.2)$$

y ν es la viscosidad cinemática del fluido.

Reemplazando $u_{máx}$ en la ec.(2.2.9.1), se llega a que

$$u = \frac{U_*^2 a}{\nu}\,\ell n(1+\frac{y}{a}) \qquad (2.2.9.3)$$

Derivando

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*^2 a}{\nu}\,\frac{1}{(y+a)} \qquad (2.2.9.4)$$

Ippen, al igual que Chang, considera que el coeficiente de difusión para sedimentos "ε_s" no es igual al coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento sino que guardan la siguiente relación

$$\varepsilon_s = \beta\varepsilon_m \qquad (2.2.9.5)$$

donde β es una constante

De acuerdo a la teoría de difusión, ε_m está expresado por la ec.(2.1.31) como

$$\varepsilon_m = U_*^2 \frac{(\frac{d-y}{d})}{du/dy} \qquad (2.2.9.6)$$

por tanto

$$\varepsilon_s = \beta U_*^2 \frac{(\frac{d-y}{d})}{du/dy} \qquad (2.2.9.7)$$

Sustituyendo en esta ecuación el gradiente de velocidades dado por la ec.(2.2.9.4)

$$\varepsilon_s = \frac{\beta \nu}{a} (\frac{d-y}{a})(y+a) \qquad (2.2.9.8)$$

la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión sobre la vertical del flujo, de acuerdo a la ec.(2.1.21) está expresado por

$$\frac{C}{Ca} = \exp\{-\omega \int_a^y \frac{dy}{\varepsilon_s}\} \qquad (2.2.9.9)$$

Reemplazando ε_s dado por la ec.(2.2.9.8)

$$\frac{C}{Ca} = \exp\{-\frac{\omega a}{\beta \nu} \int_a^y \frac{dy}{(\frac{d-y}{d})(y+a)}\} \qquad (2.2.9.10)$$

Integrando esta ecuación y reemplazando los límites se llega a la siguiente solución

$$\frac{C}{Ca} = (\frac{d-y}{y+a} \frac{2a}{d})^{z_3} \qquad (2.2.9.11)$$

donde

$$z_3 = \frac{\omega a}{\beta \nu} \qquad (2.2.9.12)$$

El valor de "a" se calcula de tal manera que cumpla con la ec. (2.2.9.2) y al nivel donde "y" sea igual a "a" se deberá medir la concentración de referencia "Ca". Conocido lo anterior, se podrá aplicar la ec.(2.2.9.11) y de esta manera cono cer la concentración de sedimentos en los diferentes niveles de "y".

2.2.10 Método de Itakura y Kishi.

Basados en los estudios hechos por Monin-Obukhov en la capa superficial atmosférica, en 1980 estos autores encuentran una nueva función para calcular el perfil de velocidades del flujo con sedimentos en suspensión, con lo que deducen una ecuación diferente para la distribución del coeficiente de difusión para sedimentos y, por tanto, una nueva relación que permite calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión. Además, en este método, a diferencia de los demás, se presenta una relación que permite calcular la concentración de referencia "Ca" para a = 0.05d, en función de las características del flujo, lo que evita hacer mediciones para determinarla.

De acuerdo a sus estudios encuentran que la energía por unidad de masa para flujo con sedimentos en suspensión está dada por

$$\tau \frac{du}{dy} = \alpha_1 \frac{\bar{\rho} U_*^3}{\kappa L} + \frac{\bar{\rho} U_*^3}{\kappa y} \qquad (2.2.10.1)$$

Donde α_1 es llamado el coeficiente de Monin-Obuklov y tiene un valor de 7 y L es una longitud característica de Monin-Obuklov, definida por

$$\frac{1}{L} = \frac{\rho_s - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \frac{\kappa g \omega C_{med}}{U_*^3} \qquad (2.2.10.2)$$

En las ecuaciones anteriores

$\bar{\rho}$ es la densidad de la mezcla agua-sedimento

ρ_s es la densidad de los sedimentos

C_{med} es la concentración media de sedimentos en suspensión.

κ es la constante universal de Von Karman, la cual según Itakura y Kishi conserva el valor de 0.4 para agua mezclada con sedimentos

Como

$$\tau = \bar{\rho} g d S \qquad (2.2.10.3)$$

y

$$U_*^2 = gdS \qquad (2.2.10.4)$$

entonces la ec.(2.2.10.1) queda

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{\kappa y}\left(1+\alpha_1 \frac{y}{L}\right) \qquad (2.2.10.5)$$

El coeficiente de difusión para sedimentos, de acuerdo a la ec.(2.1.33) tiene la siguiente expresión

$$\varepsilon_s = U_*^2 \frac{\left(\frac{d-y}{d}\right)}{du/dy} \qquad (2.2.10.6)$$

Al sustituir el gradiente de velocidades dado por la ec. (2.2.10.5) resulta

$$\varepsilon_s = \kappa y U_* \left(\frac{d-y}{d}\right)\left(1+\alpha_1 \frac{y}{L}\right)^{-1} \qquad (2.2.10.7)$$

La distribución de la concentración de sedimentos de acuerdo a la teoría de difusión está dada por la ec.(2.1.21), donde

$$\frac{C}{Ca} = \exp(-\omega \int_a^y \frac{dy}{\varepsilon_s}) \qquad (2.2.10.8)$$

Reemplazando "ε_s" de la ec.(2.2.10.7)

$$\frac{C}{Ca} = \exp\{\frac{-\omega}{\kappa U_*} \int_a^y \left[\frac{(1+\alpha_1 \frac{y}{L})}{(\frac{d-y}{d})}\right] dy\} \qquad (2.2.10.9)$$

Efectuando la integración y reemplazando los límites resulta

$$\frac{C}{Ca} = \left[(\frac{d-y}{d-a})^{1+\phi_*} (\frac{a}{y})\right]^Z \qquad (2.2.10.10)$$

donde

$$\phi_* = \alpha_1 \frac{d}{L} \qquad (2.2.10.11)$$

y

$$Z = \frac{\omega}{\kappa U_*} \qquad (2.2.10.12)$$

La ec.(2.2.10.10) fue probada con datos experimentales suministrados por Vanoni y Nomicos mostrando bastante concordancia.

Basados en los estudios de Lane y Kalinske, Kishi y Yalín dedujeron una expresión para calcular la concentración de referencia Ca, en función de las características del flujo, para lo cual se consideró que el fondo está formado por partículas de diámetro uniforme.

Se puede definir un tiempo característico (t_2) en el cual un grano del fondo del cauce es levantado y reemplazado por un grano que se deposita, tal que

$$t_2 = K_2 \frac{D}{v_s} \qquad (2.2.10.13)$$

donde v_s denota la componente vertical ascendente de la velocidad relativa del grano y K_2 es un coeficiente.

Si v_o es la componente vertical ascendente de la velocidad absoluta del grano, se cumple

$$v_s = v_o - \omega \qquad (2.2.10.14)$$

El gasto de granos levantados del fondo por unidad de área y tiempo es

$$q_{S1} = \frac{\pi D^3}{6} \frac{K_1}{\pi/4D^2} \frac{1}{\frac{K_2 D}{v_s}} = Kv_s \qquad (2.2.10.15)$$

Donde K_1 es un coeficiente

Por otro lado, la ecuación de impulso para un grano individual está dada por la expresión

$$(F-G)t_* = (\rho_s \frac{\pi D^3}{6})v_o \qquad (2.2.10.16)$$

Donde "F" es la fuerza hidrodinámica o de sustentación definida como

$$F = \phi_s \bar{\rho} D^2 U_*^2 \qquad (2.2.10.17)$$

"G" es la fuerza gravitacional o peso sumergido, el cual vale

$$G = (\rho_s - \bar{\rho}) g \frac{\pi D^3}{6} \qquad (2.2.10.18)$$

t_* es un tiempo característico tal que

$$t_* = \alpha_* \frac{D}{U_*} \qquad (2.2.10.19)$$

y ϕ_s y α_* son coeficientes

Despejando de la ec.(2.2.10.16) v_o resulta

$$v_o = t_* \frac{\rho_s - \bar{\rho}}{\rho_s} g\left(\frac{F}{G} - 1\right) \qquad (2.2.10.20)$$

La fuerza hidrodinámica "F" se puede expresar como

$$F = \bar{F} + F' \qquad (2.2.10.21)$$

Donde "$\bar{F}$" es la fuerza hidrodinámica media y F' es la fluctuación de $\bar{F}$.

Relacionando las ecs.(2.2.10.17 y 2.2.10.18)

$$\frac{F}{G} = \frac{F}{\bar{F}}\,\frac{\bar{F}}{G} = r\,\frac{\phi_s}{\pi/6}\,\overline{\tau_*} \qquad (2.2.10.22)$$

donde $\bar{\tau}_*$ es un esfuerzo cortante adimensional el cual vale

$$\bar{\tau}_* = \frac{U_*^2}{\left(\frac{\rho_s - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}\right) gD} = \frac{\bar{\gamma} dS}{(\gamma_s - \bar{\gamma}) D} \qquad (2.2.10.23)$$

donde $\bar{\gamma}$ es el peso específico del agua mezclada con sedimentos igual a $\bar{\rho}g$ y γ_s es el peso específico de los sedimentos, igual a $\rho_s g$. "r" es la fuerza hidrodinámica normalizada, es decir,

$$r = \frac{F}{\bar{F}} = \frac{\bar{F} + F'}{\bar{F}} = 1 + r' \qquad (2.2.10.24)$$

Siendo r' la fluctuación de la fuerza hidrodinámica normalizada o la fluctuación de "r" y equivale a

$$r' = \frac{F'}{\bar{F}} \qquad (2.2.10.25)$$

Para que el grano sea levantado del fondo del cauce, "F" debe ser mayor que "G", por tanto, en la condición crítica se debe cumplir que

$$r = 1 + r' = \frac{F}{\bar{F}} > \frac{G}{\bar{F}} = \frac{\pi/6}{\phi_s \bar{\tau}_*} = b_1 \qquad (2.2.10.26)$$

o sea que

$$r' = r-1 > b_1-1 \qquad (2.2.10.27)$$

Itakura y Kishi encontraron que la fluctuación de la fuerza hidrodinámica normalizada "r'" tenía una distribución gaussiana con media cero y varianza σ^2. La velocidad media del grano en el fluido $\bar{v}_o$, será entonces

$$\bar{v}_o = \frac{\int_{b_1-1}^{\infty} v_o \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{r'^2}{2\sigma^2})\, dr'}{\int_{b_1-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{r'^2}{2\sigma^2})\, dr'} \qquad (2.2.10.28)$$

De las ecs.(2.2.10.20),(2.2.10.22) y (2.2.10.23)

$$v_o = t_* \frac{\rho_s-\bar{\rho}}{\rho_s} g \left[(1-r')\frac{\bar{\tau}_*}{B_*\eta_o} -1\right] \qquad (2.2.10.29)$$

donde

$$\eta_o = \sqrt{2}\ \sigma \qquad (2.2.10.30)$$

y

$$B_* = \frac{\pi/6}{\eta_o \phi_s} \qquad (2.2.10.31)$$

Por otro lado, el gasto de granos suspendidos que caen al fondo, por unidad de área y tiempo es

$$q_{s2} = Ca\omega \qquad (2.2.10.32)$$

Para que haya equilibrio entre la cantidad de granos que son levantados del fondo y la cantidad de granos que son depositados en él, las ecs.(2.2.10.15)y (2.2.10.32) deben ser iguales, por tanto

$$Kv_s = Ca\omega \qquad (2.2.10.33)$$

Sustituyendo v_s por la ec. (2.2.10.14)

$$Ca = K(\frac{v_o}{\omega} - 1) \qquad (2.2.10.34)$$

Considerando en este caso que v_o es igual a $\bar{v}_o$

$$Ca = K\left[\frac{\int_{b_1-1}^{\infty} \nu_o \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{r'^2}{2\sigma^2})\, dr'}{\omega\int_{b_1-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{r'^2}{2\sigma^2})\, dr'} - 1\right] \qquad (2.2.10.35)$$

Al reemplazar v_o por la ec. (2.2.10.29), donde t_* está dado por la ec. (2.2.10.19), resulta

$$Ca = K\left[\alpha_* \frac{\rho_s - \bar{\rho}}{\rho_s} \frac{gD}{U_*\omega} \frac{\int_{b_1-1}^{\infty}\left[(1-r')\frac{\bar{\tau}_*}{B_*\eta_o} - 1\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{r'^2}{2\sigma^2})\, dr'}{\int_{b_1-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{r'^2}{2\sigma^2})\, dr'}\right] \qquad ..... (2.2.10.36)$$

Para normalizar la distribución de probabilidades, se cambia la variable de integración por ξ, donde

$$\xi = \frac{r'}{\sqrt{2}\,\sigma} = \frac{r'}{\eta_o} \qquad (2.2.10.37)$$

Por tanto, los límites de integración serán ahora: para límite inferior

$$b_2 = \frac{b_1-1}{\sqrt{2}\,\sigma} = \frac{b_1-1}{\eta_o} \qquad (2.2.10.38)$$

y para el superior seguirá siendo ∞ .

Haciendo los cambios pertinentes en la ec.(2.2.10.35) y después de un largo desarrollo con algunas simplificaciones, Itakura y Kishi finalmente llegan a la siguiente solución para "Ca"

$$Ca = K(\alpha_* \frac{\rho_s - \bar{\rho}}{\rho_s} \frac{gD}{U_* \omega} \Omega - 1) \qquad (2.2.10.39)$$

donde

$$\Omega = \frac{\bar{\tau}_*}{B_*} \frac{\int_{b_2}^{\infty} \xi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2)\, d\xi}{\int_{b_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2)\, d\xi} + \frac{\bar{\tau}_*}{B_* \eta_o} - 1 \qquad (2.2.10.40)$$

la cual es válida para "a" igual a 0.05d.

La ec.(2.2.10.9) contiene cuatro constantes (K, α_*, B_* y η_o) las cuales se pudieron evaluar experimentalmente.

Según Einstein, B_* es igual a 0.143 y η_o es igual a 0.50; de acuerdo a los datos reportados por Kishi, α_* vale 0.14 y K vale 0.008.

Las integrales que aparecen en la ec.(2.2.10.40) se resuelven de la siguiente manera:

La integral en el denominador, es la ecuación de una distribución de probabilidades normal con media cero y desviación estándar igual a $\sqrt{2}$; para resolverla se pueden utilizar las tablas que existen para este tipo de distribución suponiendo que la desviación estándar es igual a uno; al valor que resulte se multiplica por $1/\sqrt{2}$.

La integral que aparece en el numerador tiene solución directa, así

$$\int_{b_2}^{\infty} \xi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2)\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{b_2}^{\infty} \exp\xi' d\xi' \qquad (2.2.9.41)$$

donde

$$\xi' = -\xi^2 \qquad (2.2.9.42)$$

por tanto

$$\int_{b_2}^{\infty} \xi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2)\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{b_3 \to \infty} \int_{b_2}^{b_3} \exp\xi'\, d\xi \qquad (2.2.9.43)$$

Integrando, sustituyendo nuevamente ξ' por $(-\xi^2)$ y reemplazando límites

$$\int_{b_2}^{\infty} \xi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2)\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{b_3 \to \infty} \left[e^{-b_3^2} - e^{-b_2^2} \right] \qquad (2.2.10.44)$$

como $\lim_{b_3 \to \infty} (e^{-b_3^2})$ vale cero, entonces

$$\int_{b_2}^{\infty} \xi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2)\, d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-b_2^2} = - \frac{1}{2\sqrt{\pi} e^{b_2^2}} \qquad (2.2.10.45)$$

de tal manera que la ec. (2.2.10.40) queda finalmente,

$$\Omega = -\frac{\overline{\tau}_*}{B_* 2\sqrt{\pi}\, e^{b_2^2}} \; \frac{1}{\displaystyle\int_{b_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2)\, d\xi} + \frac{\overline{\tau}_*}{B_* \eta_o} - 1 \qquad (2.2.10.46)$$

Para concluir, se puede señalar entonces que para conocer la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión se emplea la ec.(2.2.10.10) en donde "Ca" evaluada a 0.05d, se puede calcular mediante la ec.(2.2.10.39) la cual es fácil de solucionar si se tiene en cuenta la ec.(2.2.10.46).

2.3 TEORIA GRAVITACIONAL

Fue desarrollada por M.A. Velikanov entre 1944 y 1956, está basada en el balance de energía de transporte de sedimentos, considerando por separado la fase fluida y la fase sólida.

La fase fluida es la componente activa de dispersión, la cual desarrolla trabajo por levantamiento y transporte de partículas sólidas. La fase sólida es la componente pasiva la cual es transportada en suspensión haciendo decrecer la energía del fluido.

Velikanov considera que en un flujo establecido actúan dos fuerzas: las de gravedad que hacen mover el fluido bajo una pendiente dada y las de resistencia que tienden a retardar el movimiento.

La densidad de la mezcla agua-sedimento, se expresa como:

$$\bar{\rho} = \rho_s C_v + \rho(1-C_v) = \rho(1+\Delta C_v) \qquad (2.3.1)$$

donde ρ_s es la densidad o masa específica de los sedimentos, ρ es la densidad del agua, C_v es la concentración de sedimentos en volúmen en un punto "y" y

$$\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} = \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \qquad (2.3.2)$$

Por otro lado, Velikanov considera que el flujo es bidimensional, permanente y uniforme, donde la velocidad principal de la fase fluida en un punto "y" es u, el componente vertical es "v" y las respectivas velocidades de la fase sólida son u_h y v_h. Lo anterior implica que las ecuaciones de balance de la fase fluida y sólida resulten respectivamente

$$\text{div}\left[u\,\rho(1 - C_v)\right] = 0 \qquad (2.3.3)$$

y

$$\text{div}\,(u_h \rho_s C_v) = 0 \qquad (2.3.4)$$

Si se considera que la distribución de la concentración de sedimentos en un punto es constante, entonces la corriente media de masa vertical con respecto al tiempo es cero; esto es

$$\rho\,\overline{v(1-C_v)} = 0 \qquad (2.3.5)$$

$$\rho_s v_h C_v = 0 \qquad (2.3.6)$$

Recordando que:

$v = \bar{v} + v'$, $C_v = \overline{C_v} + C_v'$ y $v_h = v - \omega$, las ecs.(2.3.5) y (2.3.6), pueden escribirse como

$$\overline{v} - \overline{vC_v} - \overline{v'C_v'} = 0 \quad (2.3.7)$$

$$\overline{v}\,\overline{C_v} + \overline{vC_v'} - \omega\,\overline{C_v} = 0 \quad (2.3.8)$$

con base en las ecs.(2.3.7) y (2.3.8) se pueden encontrar las siguientes relaciones: Si se sustituye $\overline{v'C_v'}$ de la ec.(2.3.8) en la ec.(2.3.7) resulta

$$\overline{v} = \omega\,\overline{C_v} \quad (2.3.9)$$

Además, si se sustituye la ec.(2.3.9) en la ec.(2.3.8)

$$\overline{v'C_v'} = \omega\,\overline{C_v}(1-\overline{C_v}) \quad (2.3.10)$$

y por último

$$\overline{v_h} = -\omega(1-\overline{C_v}) \quad (2.3.11)$$

La ec.(2.3.9) muestra que en contraste con otras teorías, el valor medio de la componente vertical de la velocidad del flujo es diferente de cero. La ec.(2.3.11) dice que el valor medio de la velocidad vertical de los sedimentos v_h es menor que la velocidad de caída de los mismos "ω".

En la ec.(2.3.10) el término $\overline{v'C_v'}$ representa una característica estática del promedio de transporte de sedimentos de una capa a otra. Se observa que si C_v=0, o C_v=1, el producto $\overline{v'C_v'}$ es igual a cero, lo que significa que no hay transporte de sedimentos; al incrementar C_v, el producto $\overline{v'C_v'}$ crece hasta un cierto valor y luego decrece.

Este valor máximo se puede encontrar al derivar la ec.(2.3.10) e igualarla a cero, o sea

$$\frac{d(\overline{C_v}(1-\overline{C_v}))}{dC_v} = 0 \tag{2.3.12}$$

de donde $\overline{C_v} = 0.5$, que correspondería teóricamente a la máxima capacidad de transferencia de flujo turbulento. Según los experimentos de Velikanov los máximos valores de la concentración volumétrica están entre 0.40 y 0.42.

Las ecs.(2.3.9),(2.3.10) y (2.3.11) para bajas concentraciones de sedimentos se reducen aproximadamente a

$$\overline{v} = 0 \tag{2.3.13}$$

$$\overline{v_h} = -\omega \tag{2.3.14}$$

$$\overline{v'C_v'} = \omega\overline{C_v} \tag{2.3.15}$$

Por otro lado, en un volumen elemental $(\delta_x \cdot \delta_y \cdot 1)$, el peso de la parte fluida contenida es:

$$(1-C_v)\rho g\delta_x\delta_y \tag{2.3.16}$$

El peso sumergido de la parte sólida contenida en el mismo volumen es

$$C_v(\rho_s-\rho)g\delta_x\delta_y \tag{2.3.17}$$

Mientras que el peso real de la parte sólida contenida en dicho volumen elemental vale

$$C_v\rho_s g\delta_x\delta_y \tag{2.3.18}$$

Si h es la pendiente absoluta y es igual a uS, siendo S la pendiente hidráulica, el trabajo que desarrolla la parte fluida por unidad de tiempo es igual al producto del peso de la parte fluida por la pendiente absoluta, es decir:

$$(1-C_v)\rho guS\delta_x\delta_y \qquad (2.3.19)$$

Como C_v y u están sujetas a fluctuaciones, Velikanov prefiere expresar el trabajo desarrollado por la parte fluida en unidad de tiempo,con los valores medios de estas variables; por tanto, la ec.(2.3.19) queda

$$\rho gS(1-\overline{C}_v)\overline{u}\delta_x\delta_y \qquad (2.3.20)$$

Ahora, el trabajo desarrollado en unidad de tiempo por la parte sólida será el producto del peso total de la parte sólida por la pendiente absoluta uS, así

$$\rho_s gSC_v u\delta_x\delta_y \qquad (2.3.21)$$

Tomando el valor medio en el tiempo de C_v y u, la ec.(2.3.21) queda:

$$\rho_s gS\overline{C_v u}\delta_x\delta_y \qquad (2.3.22)$$

El trabajo desarrollado por la parte sólida en el proceso de sedimentación dentro del volumen elemental, es el producto del peso sumergido de los sólidos dado por la ec.(2.3.17) y la velocidad vertical de los sedimentos dentro del fluido expresada por la ec.(2.3.11), resultando igual a

$$(\rho_s-\rho)g\omega C_v(1-\overline{C_v})\delta_x\delta_y \qquad (2.3.23)$$

Tomando el valor medio de la concentración $\overline{C_v}$, para así contemplar el efecto de las variaciones en el tiempo, la ec. (2.3.23) queda

$$(\rho_s-\rho)g\omega C_v(1-\overline{C_v})\delta_x\delta_y \qquad (2.3.24)$$

Para tener en cuenta el trabajo desarrollado por la resistencia, es decir las fuerzas de fricción, Velikanov se apoya en la teoría de turbulencia de Prandtl, y analiza en forma separada tanto la parte fluida como la parte sólida.

Como se vió, el esfuerzo cortante producido por el fluido al atravesar un área horizontal elemental $\delta_x \cdot 1$ es igual a

$$\tau = \rho\overline{u'v'}\delta_x \qquad (2.3.25)$$

La densidad de la parte fluida de acuerdo a la ec.(2.3.1) vale

$$\rho(1-C_v) \qquad (2.3.26)$$

por tanto, la ec.(2.3.25) queda

$$\tau = \rho(1-C_v)\overline{u'v'}\delta_x \qquad (2.3.27)$$

El trabajo es el producto del esfuerzo cortante por la velocidad media en el sentido del flujo. Tomando en consideración el esfuerzo cortante en una distancia vertical elemental δ_y, el trabajo desarrollado en unidad de tiempo por las fuerzas de fricción de la parte fluida, queda expresado finalmente como

$$\rho \frac{d}{dy}\left[(1-\overline{C_v})\,\overline{u'v'}\right]\bar{u}\,\delta_x\delta_y \qquad (2.3.28)$$

donde se tomó el valor medio de la concentración volumétrica para tener en cuenta el efecto de las fluctuaciones en el tiempo.

La densidad de la parte sólida es $\rho_s C_v$. Mediante un análisis igual al efectuado para obtener la ec.(2.3.28) se llega a que el trabajo desarrollado por unidad de tiempo por las fuerzas de fricción de la parte sólida que viaja en suspensión vale

$$\rho_s \frac{d}{dy}\left[\overline{C_v u'v'}\right]\bar{u}\,\delta_x\delta_y \qquad (2.3.29)$$

El trabajo necesario para mantener los sedimentos en suspensión es igual al trabajo desarrollado por los sólidos durante la sedimentación o caída y por tanto también queda expresado por la ec.(2.3.24), es decir

$$(\rho_s-\rho)g\omega\overline{C_v}(1-\overline{C_v})\,\delta_x\delta_y \qquad (2.3.30)$$

La deducción de Velikanov implica que el trabajo desarrollado por la parte fluida, ec.(2.3.20), debe cubrir el trabajo producido por las fuerzas de fricción en el fluido, ec.(2.3.28), más el trabajo necesario para mantener los sólidos en suspensión, ec.(2.3.30), por tanto resulta

$$\rho g S(1-\overline{\overline{C_v}})\,\overline{\overline{u}}=\rho\frac{d}{dy}\left[(1-\overline{C_v})\,\overline{u'v'}\right]\overline{u}+(\rho_s-\rho)\,g\omega\overline{C_v}(1-\overline{C_v}) \qquad (2.3.31)$$

Por otro lado, el trabajo desarrollado por la fase sólida por efecto de pendiente, ec.(2.3.22), más el trabajo desarrollado por la fase sólida en el proceso de sedimentación, ec.(2.3.24), es igual al trabajo producido por las fuerzas de fricción de la fase sólida, ec.(2.3.29); de esta manera la segunda ecuación básica deducida por Velikanov queda

$$\rho_s g S\overline{\overline{C_v}}\,\overline{\overline{u}}+(\rho_s-\rho)\,g\omega\overline{\overline{C_v}}(1-\overline{\overline{C_v}})=\rho_s\,\frac{d}{dy}(\overline{\overline{C_v}}\,\overline{\overline{v'u'}})\,\overline{\overline{u}} \qquad (2.3.32)$$

Combinando las ecs.(2.3.31) y (2.3.32), Velikanov obtiene la tercera ecuación básica

$$gS\left[\rho(1-\overline{\overline{C_v}})+\rho_s\overline{\overline{C_v}}\right] = \frac{d}{dy}\{\rho\left[(1-\overline{\overline{C_v}})+\rho_s\overline{\overline{C_v}}\right]\overline{\overline{u'v'}}\} \qquad (2.3.33)$$

Introduciendo la notación dada por la ec.(2.3.2), la ec. (2.3.33) se reduce a

$$gS(1+\Delta\overline{\overline{C_v}}) = \frac{d}{dy}\left[(1+\Delta\overline{\overline{C_v}})\,\overline{\overline{u'v'}}\right] \qquad (2.3.34)$$

Si se observa,el término de la izquierda de las ecs.(2.3.33) ó (2.3.34) representan el esfuerzo desarrollado por el flujo (mezcla agua-sedimento) por efecto de la pendiente, el cual está igualado a la variación en la profundidad del esfuerzo producido por fricción de la mezcla líquido-sólido.

Si se integra la ec.(2.3.34) se obtiene que

$$-\overline{u'v'} = gS \frac{\int_y^d (1+\Delta\overline{C_v})\,dy}{1+\Delta\overline{C_v}} \qquad (2.3.35)$$

El signo negativo se debe a que según Velikanov las pulsaciones simultáneas de la velocidad vertical y horizontal son de signo contrario.

Multiplicando y dividiendo la ec.(2.3.35) por $(1+\Delta C_v)$, al derivar la expresión resultante respecto a "y" se obtiene:

$$\frac{d}{dy}(\overline{v'u'}) = gS\left[1+\Delta\frac{dC_v}{dy}\,\frac{\int_y^d (1+\Delta C_v)\,dy}{(1+\Delta\overline{C_v})^2}\right] \qquad (2.3.36)$$

A pesar de que la mayoría de las expresiones que existen para calcular la distribución de velocidades en la profundidad del flujo son deducidas y aplicables para agua clara, Velikanov adopta la relación dada por Nikuradze para fondo rugoso, la cual se expresa como

$$u = \frac{\sqrt{gdS}}{\kappa}\,\ell n(1+\frac{E}{\alpha}) = \frac{U_*}{\kappa}\,\ell n(1+\frac{E}{\alpha}) \qquad (2.3.37)$$

donde

$$E = \frac{y}{d} \quad y \quad \alpha = \frac{\delta}{d} = \frac{D}{30d}$$

Siendo δ la altura de las protuberancias del fondo del canal.

Sustituyendo las ecs.(2.3.35), (2.3.36) y (2.3.37) en la ec.

(2.3.32) y cambiando la variable de integración "y" por la de profundidad relativa "E", se llega a que

$$\frac{dC_v}{dE}\ \frac{1}{C_v(1+\Delta C_v)^2(1-C_v)} \int_E^1 (1+\Delta C_v)\,dE + \frac{1}{\ell n(1+\frac{E}{\alpha})}\ \frac{\kappa\Delta\omega}{(1+\Delta)S\sqrt{gdS}} = 0 \quad \ldots \quad (2.3.38)$$

Para integrar la ec.(2.3.38) es necesario hacer algunas simplificaciones, entre las cuales la más importante es la de reemplazar en esta ecuación el término $\ell n(1+\frac{E}{\alpha})$ por $\ell n\,\frac{1}{\alpha}-1$, lo que equivale a haber tomado la velocidad media del flujo a cambio de la distribución de velocidades dada por la ec. (2.3.37), en donde el término variable es precisamente $\ell n(1+\frac{E}{\alpha})$, el cual, al momento de integrar para obtener la velocidad media se transforma aproximadamente en $\ell n\,\frac{1}{\alpha}-1$, esto es

$$\int_0^1 \ell n(1+\frac{E}{\alpha})\,dE \approx \ell n\,\frac{1}{\alpha} - 1 \qquad (2.3.39)$$

por simplicidad

$$\zeta = \frac{1}{\ell n\,\frac{1}{\alpha}-1} \qquad (2.3.40)$$

Para baja concentración de sedimentos, Velikanov dice que de acuerdo a su experiencia, los términos $(1-C_v)$ y $(1+C_v)$ pueden ser iguales a la unidad, ya que el error introducido representa diferencias sólo del tercer decimal en adelante.

Llamando

$$P_2 = \frac{\kappa \Delta\omega}{(1+\Delta) S \sqrt{gdS}} \qquad (2.3.41)$$

Con las simplificaciones anteriores, la ec.(2.3.38) puede escribirse en la siguiente forma:

$$\frac{dC_v}{dE} = \frac{1-E}{C_v} + \zeta P_2 \qquad (2.3.42)$$

Separando variables

$$\frac{dC_v}{C_v} = \frac{\zeta P_2}{E-1}\, dE \qquad (2.3.43)$$

Integrando esta ecuación entre un nivel cero donde $C_v = C_{v_o}$ y otro nivel cualquiera E, queda

$$\ell n \frac{C_v}{C_{v_o}} = \zeta P_2 \Big[\ell n(1-E) \Big]_0^E \qquad (2.3.44)$$

Reemplazando límites

$$\ell n \frac{C_v}{C_{v_o}} = \zeta P_2 \, \ell n(1-E) \qquad (2.3.45)$$

de donde

$$C_v = C_{v_o} (1-E)^{\zeta P_2} \qquad (2.3.46)$$

Esta ecuación permite calcular la distribución de la concentración de sedimentos cuando dicha concentración es baja.

Cuando la concentración de sedimentos es alta, para integrar la ec.(2.3.38) se hace la siguiente simplificación:

$$\frac{\int_E^1 (1+\Delta C_v)\, dE}{1+\Delta C_v} \approx (1-E) \qquad (2.3.47)$$

de esta manera la ec.(2.3.38) queda

$$\frac{dC_v}{C_v(1-C_v)(1+\Delta C_v)} = \frac{\zeta P_2}{1-E}\, dE \qquad (2.3.48)$$

Cuya integral tiene la forma

$$\psi = \psi_o (1-E)^{\zeta P_2} \qquad (2.3.49)$$

donde $\psi = f(C_v)$ y ψ_o corresponde al valor de la función $\psi(C_{v_o})$

El valor de ψ se encuentra en la Fig.(2.3.1) en función de C_v, la cual se puede calcular con la ec.(2.3.46). Nótese en la gráfica que para concentraciones volumétricas C_v menores de 0.30, $\psi = C_v$.

En resumen, mediante el uso de la ec.(2.3.46) y la ec.(2.3.49) se puede calcular la concentración volumétrica de sedimentos en suspensión en cualquier punto arriba del fondo del cauce, tanto para baja como para alta concentración de sedimentos.

Velikanov resolviendo la ec.(2.3.38) hizo gráficas para 4 diferentes valores de rugosidad relativa. Las relaciones de C_v/C_{v_o} contra E, han sido determinadas para 11 diferentes valores del parámetro P_2, tal como se observa en las Figs. (2.3.2) y (2.3.3).

Dado que no es posible hacer mediciones para E=0, ya que en este nivel el material que viaja en suspensión está mezclado con el material que viaja en la capa de fondo, Velikanov considera conveniente que E_o correspondiente a C_{v_o} sea 0.002.

Con estas curvas es posible directamente conocer la distribución de la concentración de sedimentos para los casos en que la rugosidad relativa del problema coincida con los valores para los cuales fueron hechas las gráficas, o en caso de no ser así, se puede interpolar para obtener una solución aproximada.

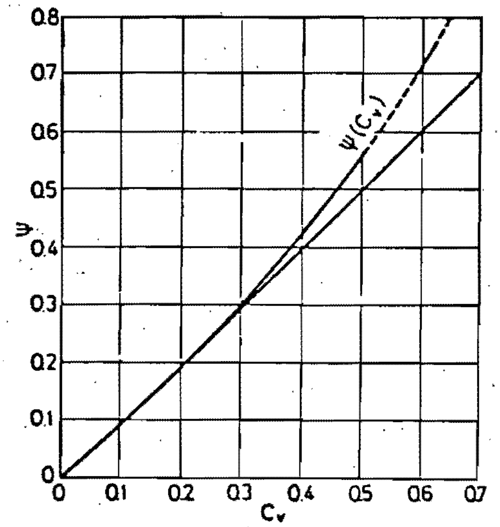

Fig. 2.3.1 FUNCION ψ CONTRA LA CONCENTRACION VOLUMETRICA C_v (SEGUN VELIKANOV)

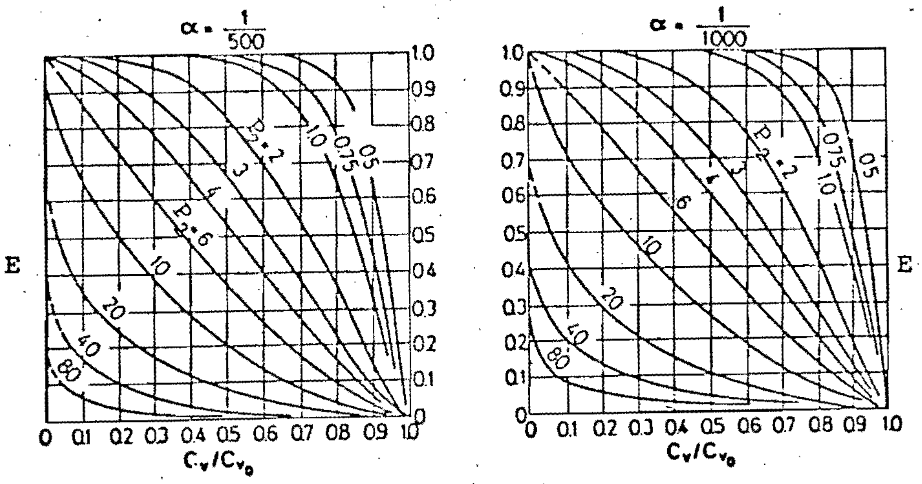

Fig. 2.3.2 VARIACION DE LA CONCENTRACION VOLUMETRICA RELATIVA (C_v/C_{vo}), PARA DISTINTOS VALORES DE E y P_2, Y PARA RUGOSIDADES RELATIVAS $\alpha = 1/500$ Y $\alpha = 1/1000$

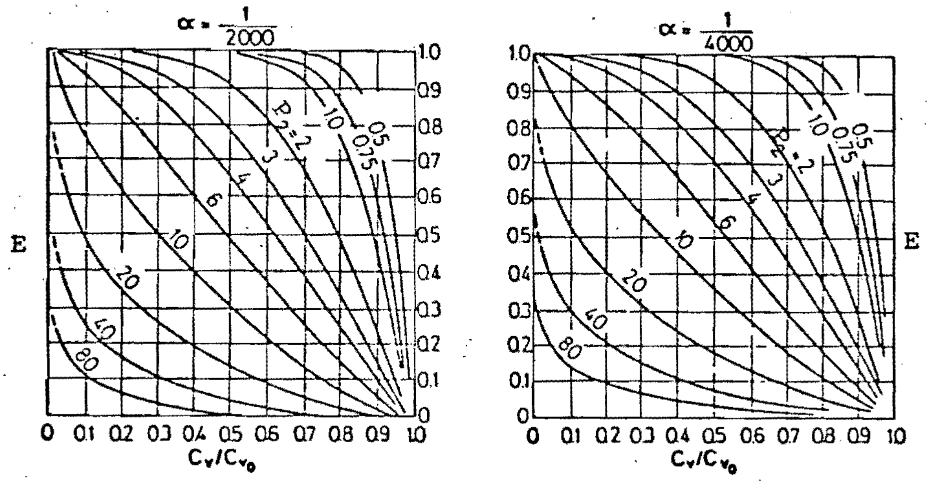

Fig. 2.3.3 VARIACION DE LA CONCENTRACION VOLUMETRICA RELATIVA (C_v/C_{vo}), PARA DISTINTOS VALORES DE E y P_2, Y PARA RUGOSIDADES RELATIVAS $\alpha = 1/2000$ Y $\alpha = 1/4000$

2.4 TEORIA DE DOS CAPAS

Investigadores como Shulyak, Antsyferov y Kos'yan han comparado los resultados teóricos de algunos métodos basados en la teoría de difusión que permiten calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión,con resultados experimentales reportados por diferentes autores como Toggart, Debol'skly y el propio Antsyferov, encontrando en general que, arriba de un cierto nivel del fondo (0.1d ó 0.2d), los resultados teóricos concuerdan con los resultados experimentales, mientras que abajo de este nivel los resultados experimentales son mayores que los que predice la teoría.

La discrepancia encontrada en la capa cercana al fondo se atribuye a que en esta zona el mecanismo de interacción entre las partículas sólidas y el líquido involucra otros aspectos que no contempla la teoría convensional de difusión, tales como el choque entre partículas adyacentes debido a la mayor concentración de sedimentos y a que las propiedades inerciales de las partículas en esta zona son mayores que en el resto del flujo; por estas razones se han propuesto otras soluciones que se verán a continuación.

2.4.1 Método de Shulyak y Antsyferov

Para involucrar en la solución teórica de la distribución de la concentración de sedimentos los fenómenos adicionales que se presentan en la capa próxima al fondo y que no son tomados en cuenta en los métodos basados en la teoría de difusión, estos autores,en 1971, propusieron un modelo de dos capas tal como se observa en la Fig. (2.4.1.1), en donde la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión está en función de dos términos, así

$$C = C^{I} + C^{II} \qquad (2.4.1.1)$$

Donde C^{I} representa la distribución de la concentración de sedimentos en la capa cercana al fondo, adicional a la evaluada mediante las ecuaciones tradicionales basadas en la teoría de difusión y C^{II} es la distribución de la concentración de sedimentos en el resto del flujo.

Experimentalmente encontraron que C^{I} y C^{II} se podían representar mediante funciones exponenciales. Para la zona comprendi da entre la capa cercana al fondo y la superficie establecieron que la ecuación que mejor describe la distribución de la concentración de sedimentos es la desarrollada por Antsyferov y Debol'skly, ec.(2.2.8.7), de tal manera que

$$C^{II} = C^{II}_{y_2} \exp(-\phi_1) \qquad (2.4.1.2)$$

En la cual $C^{II}_{y_2}$ es el valor de la función C^{II} en el nivel "y" igual a "y_2", donde y_2 debe cumplir con la desigualdad $\delta_* < y_2 d$, siendo δ_* el espesor de la capa cercana al fondo; para determinar $C^{II}_{y_2}$ se considera apropiado que "y" sea igual a 0.3d, ya que arriba de este nivel el efecto de C^I es despreciable. Por comodidad en la nomenclatura se llamará $C^{II}_{y_2}$ igual a C_{y_2}.

ϕ_1 está expresado por la ec.(2.2.8.8) con la diferencia de que ahora "a" vale "y_2",así:

$$\phi_1 = \left(\frac{2.8\omega}{U_*} + \frac{15.7\sigma\omega}{dU_*^2}\right)\ell n\left(\frac{y}{d-y}\,\frac{d-y_2}{y_2}\right) - \frac{15.7\sigma\omega}{dU_*^2}\left(\frac{d}{y} - \frac{d}{y_2}\right) \qquad \ldots \quad (2.4.1.3)$$

Empíricamente encontraron una función para C^I, la cual sigue la forma de la ec.(2.4.1.2), así

$$C^I = C^I_{y_1} \exp(-\psi_1) \qquad (2.4.1.4)$$

En la cual $C^I_{y_1}$, es el valor de la función C^I al nivel "y" igual a "y_1", donde y_1 es un nivel fijado que debe estar dentro de la capa cercana al fondo δ_* y por tanto es menor que "y_2".

Por comodidad en la nomenclatura se llamará a $C^I_{y_1}$ igual a C_{y_1}.

ψ_1 lo definieron como

$$\psi_1 = K_b(y-y_1) \tag{2.4.1.5}$$

Siendo K_b el coeficiente de concentración logarítmica cerca del fondo, el cual se encontró que era función de los siguientes parámetros.

$$K_b = B(\rho,\rho_s,\nu,g)\left(\frac{\omega}{u_o-\omega}\right)^{n_4} \tag{2.4.1.6}$$

Donde ρ y ρ_s son la densidad del agua y de los sedimentos respectivamente, B y n_4 son constantes; g es la aceleración de la gravedad y u_o es la velocidad del flujo cerca del fondo al nivel de la frontera superior de subcapa viscosa, la cual se puede evaluar con la fórmula de Goncharov, donde

$$u_o = 1.25\,\frac{U}{\log(8.8\,\frac{d}{D})} \tag{2.4.1.7}$$

Mediante un análisis dimensional y usando datos experimentales reportados por Debol'skly, Toggart y Antsyferov, finalmente encontraron que

$$K_b = 0.14\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\,\frac{\omega}{u_o-\omega}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3} \tag{2.4.1.8}$$

sustituyendo en la ec.(2.4.1.5)

$$\psi_1 = 0.14\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\,\frac{\omega}{u_o-\omega}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3}(y-y_1) \tag{2.4.1.9}$$

Con lo cual queda completamente definida C^I.

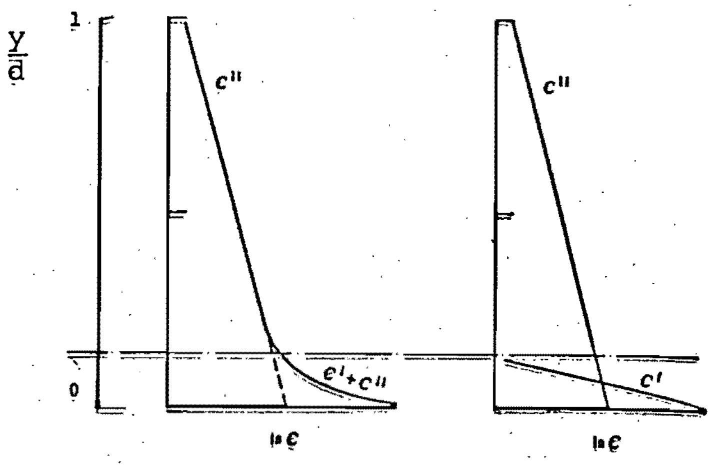

Fig. 2.4.1.1. DISTRIBUCION DE CONCENTRACIONES DE ACUERDO AL MODELO DE DOS CAPAS (SEGUN SHULYAK Y ANTSYFEROV)

De acuerdo al desarrollo presentado, la solución general para evaluar la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión sobre la vertical del flujo, teniendo en cuenta la ec.(2.4.1.1), queda finalmente

$$C = C_{y_1} \exp(-\psi_1) + C_{y_2} \exp(-\phi_1) \qquad (2.4.1.10)$$

donde ϕ_1 está definido por la ec.(2.4.1.3) y ψ_1 por la ec. (2.4.1.9).

Como se observa, para aplicar este método es necesario conocer la concentración en dos puntos (y_1 y y_2), lo que hace difícil su empleo.

La ec.(2.4.1.10) fué verificada con los resultados experimentales de Mikhaylova, encontrando muy buena concordancia.

2.4.2 Método de Antsyferov y Kosyan

La expresión final encontrada por Shulyak, ec.(2.4.1.9), a pesar de que da muy buenos resultados, presenta dificultades en su aplicación ya que se necesita hacer mediciones de la concentración de sedimentos en dos puntos diferentes lo que genera mayor trabajo y además puede inducir a error por la dificultad que existe al medir la concentración en un punto fijo. Por esta razón en 1980 Antsyferov y Kosyan desarrollan un nuevo método para calcular la distribución vertical de la concentración de sedimentos en suspensión basados en el modelo de dos capas.

La diferencia cerca del fondo del flujo entre el coeficiente de difusión para sedimentos "ε_s" y el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento "ε_m" se corrige a través de un factor β_*, el cual es obviamente igual a la unidad en el rango donde la solución para la distribución de la concentración de sedimentos basada en la teoría de difusión es acertada (arriba de 0.1d ó 0.2d del fondo) y va tendiendo a cero al acercarse al fondo.

Se ha encontrado que β_* es función de los siguientes parámetros

$$\beta_* = \beta_*(\omega, U_*, y) \qquad (2.4.2.1)$$

lo que equivale en forma adimensional a

$$\beta_* = \beta_*\left(\frac{\omega}{U_*}, \frac{y}{d}\right) \qquad (2.4.2.2)$$

Por otro lado, las rugosidades del fondo causan turbulencia adicional que influye en la suspensión y mezcla de las partículas. Este coeficiente adicional de mezcla ε_T depende de las propiedades físicas de las partículas y del líquido, de las rugosidades del fondo y de la velocidad del flujo cerca del fondo, así

$$\varepsilon_T = \varepsilon_T(\rho, \rho_s, \nu, \omega, u_o, y, \delta) \qquad (2.4.2.3)$$

donde δ es la altura de las protuberancias del fondo y las demás variables ya fueron definidas.

Para "y" igual a cero, ε_T es igual a ε_{TO}. Teniendo en cuenta el análisis dimensional hecho para obtener la ec.(2.4.1.7), se encontró que

$$\varepsilon_{TO} = \frac{\rho}{0.14(\rho_s-\rho)}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3}(u_o-\omega) \qquad (2.4.2.4)$$

considerando en la ec.(2.4.2.3) a "y" y "δ" como variables independientes, entonces ε_T queda definida como

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{TO}f(y,\delta) = \varepsilon_{TO}f\left(\frac{y}{\delta}\right) \qquad (2.4.2.5)$$

De acuerdo con lo señalado, el coeficiente de difusión para sedimentos "ε_s" está formado por la suma del coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento afectado por un factor β_* y el coeficiente adicional de mezcla ε_T, el cual es producido por la rugosidad del fondo; esto es

$$\varepsilon_s = \beta_*\varepsilon_m+\varepsilon_T \qquad (2.4.2.6)$$

Para el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento "ε_m", se tomó la expresión correspondiente a la ec. (2.2.8.4), la cual fue desarrollada considerando que ε_s era igual a ε_m; es decir

$$\varepsilon_m = \frac{U_*^2y^2\left(\frac{d-y}{d}\right)}{2.8U_*+15.7\nu} \qquad (2.4.2.7)$$

Sustituyendo en la ec.(2.4.2.6) β_* definido por la ec.(2.4.2.2), ε_m definido por la ec.(2.4.2.7) y ε_T definida por la ec. (2.4.2.5) en donde ε_{TO} está dado por la ec.(2.4.2.4), resulta para ε_s la siguiente expresión

$$\varepsilon_s = \frac{U_*^2 y^2 (\frac{d-y}{d})}{2.8U_* y+15.7\nu}\,\beta_*(\frac{\omega}{U_*},\frac{y}{d}) + \frac{\rho}{0.14(\rho_s-\rho)}(\frac{\nu^2}{g})^{1/3}(u_o-\omega)\,f(\frac{y}{\delta}) \qquad (2.4.2.8)$$

Utilizando datos experimentales reportados por Antsyferov y Toggart, se encontró que

$$\beta_*(\frac{\omega}{U_*},\frac{y}{d}) = \text{tangh}(\frac{U_*}{\omega}\,\frac{y}{d}) \qquad (2.4.2.9)$$

y

$$f(\frac{y}{\delta}) = \exp(-\frac{y}{\delta}) \qquad (2.4.2.10)$$

por tanto, la ec.(2.4.2.8) queda finalmente

$$\varepsilon_s = \frac{U_*^2 y^2 (1-\frac{y}{d})}{2.8U_* y+15.7\nu}\,\text{tangh}(\frac{U_*}{\omega}\,\frac{y}{d}) + \frac{\rho}{0.14(\rho_s-\rho)}(\frac{\nu^2}{g})^{1/3}(u_o-\omega)\exp(-\frac{y}{\delta}) \qquad (2.4.2.11)$$

La distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, de acuerdo a la teoría de difusión está dada por la ec. (2.1.21), donde

$$\frac{C}{Ca} = \exp(-\omega\int_a^y \frac{dy}{\varepsilon_s}) \qquad (2.4.2.12)$$

Sustituyendo ε_s por la ec.(2.4.2.11)

$$\frac{C}{Ca}=\exp\left[-\omega\int_a^y \frac{dy}{\frac{y\,U_*^2(1-\frac{y}{d})}{2.8U_*y+15.7\nu}\tanh\left(\frac{U_*}{\omega}\frac{y}{d}\right)+\frac{\rho}{0.14(\rho_s-\rho)}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3}(u_o-\omega)\exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)}\right]$$

(2.4.2.13)

u_o se puede evaluar mediante la fórmula de Goncharov, correspondiente a la ec.(2.4.1.7), donde

$$u_o = 1.25\,\frac{U}{\log(8.8\frac{d}{D})} \qquad (2.4.2.14)$$

La integral que aparece en la ec.(2.4.2.13) puede ser resuelta fácilmente con métodos numéricos, utilizando por ejemplo el método de la regla trapezoidal o el de la regla rectangular. Como se observa en la ec.(2.4.2.13), al igual que en la mayoría de los métodos desarrollados, para calcular la distribución vertical de la concentración de sedimentos en suspensión, es necesario conocer la concentración "Ca" a un nivel "y" igual a "a".

Este método fue comparado con los datos de Vanoni, Vinagradova, Mikhaylova y otros, mostrando muy buena concordancia en toda la vertical del flujo.

2.5 Resumen de métodos de distribución de concentración de sedimentos

En la tabla 2.5 se presenta un resumen de los métodos de distribución de concentración de sedimento que han sido estudios. En esta tabla se relaciona el nombre del autor del método y el año en que fué publicado; la ecuación final; la teoría en que se fundamentó; condiciones en que fué probado, para los que se dispuso de esta información; y finalmente, algunos comentarios sobre los variables que aparecen en el método o sobre la forma de aplicar el mismo.

TABLA 2.5 METODOS DE DISTRIBUCION DE LA CONCENTRACION DE SEDIMENTOS

METODO	ECUACION FINAL	TEORIA EN LA QUE SE FUNDAMENTA	CONDICIONES EN QUE FUERON PROBADAS	COMENTARIOS
Rouse (1937)	$C = Ca\left(\frac{d-y}{y}\,\frac{a}{d-a}\right)^{Z}$	Difusión	No fueron reportadas	$\kappa = 0.4$
Lane y Kalinske (1941)	$C = Ca\exp\left(-\frac{15\omega}{U_*}\,\frac{y-a}{d}\right)$	Difusión	Río Mississipi $0.005mm \leq D \leq 0.85mm$ $S = 0.000071$ $d = 10.30m$	
Einstein y Chien (1952)	$C = Ca\left[\frac{1-\sqrt{\frac{d-a}{d}}}{1-\sqrt{\frac{d-y}{d}}}\right]^{\frac{Z}{1+N\kappa Z}}\left[\frac{1+\sqrt{\frac{d-a}{d}}}{1+\sqrt{\frac{d-y}{d}}}\right]^{\frac{Z}{1-N\kappa Z}}\left[\frac{\sqrt{\frac{d-a}{d}}+N\kappa Z}{\sqrt{\frac{d-y}{d}}+N\kappa Z}\right]^{\frac{2Z}{N^2\kappa^2Z^2-1}}$	Difusión		N y κ deben valuarse en el lugar donde se aplique el método
Hunt (1954)	$\left(\frac{C_v}{1-C_v}\right)\left(\frac{1-C_{va}}{C_{va}}\right) = \left(\frac{1-\frac{y}{d}}{1-\frac{a}{d}}\right)^{1/2}\left[\frac{B_{2s}-\left(1-\frac{a}{d}\right)^{1/2}}{B_{2s}-\left(1-\frac{y}{d}\right)^{1/2}}\right]^{\frac{\omega}{\kappa_s B_{2s} U_*}}$ $C_v = C_{va}\left(\frac{1-\frac{y}{d}}{1-\frac{a}{d}}\right)^{1/2}\left[\frac{B_{2s}-\left(1-\frac{a}{d}\right)^{1/2}}{B_{2s}-\left(1-\frac{y}{d}\right)^{1/2}}\right]^{\frac{\omega}{\kappa_s B_{2s} U_*}}$	Difusión	$0.103mm \leq D \leq 0.16$ $0.00125 \leq S \leq 0.0025$ $0.071m \leq d \leq 0.17m$	-Para altas concentraciones de sedimentos B_{2s} y κ_s deben valuarse en el lugar donde -se aplique el método $0.99 < B_{2s} < 1.0$; $0.31 < \kappa_s < 0.44$ -Para bajas concentraciones de sedimentos -Tener cuidado en la evaluación de B_{2s}
Velikanov (1955)	$C = Ca\left(\frac{(1-E)(\alpha+a/d)}{(\alpha+E)(1-a/d)}\right)^{\frac{\omega}{\kappa U_*(1+\alpha)}}$	Difusión		$\kappa = 0.4$ -La rugosidad relativa α practicamente No influye

Chang-Simons y Richardson (1967)	$C = Ca\ A_2 \left[\frac{\sqrt{E}}{1 - \sqrt{1-E}} \right]^{\frac{2\omega}{\beta\kappa U_*}}$	Difusión	184 datos de canales de lab. $0.19mm \leq D_{50} \leq 0.93mm$ 57 med en 3 ríos	$\beta = 1.5$ κ varía en función de U_* D_e/D
Zagustin (1969)	$C = Ca \exp(-Z\ \phi_2)$	Difusión		$\kappa = 0.4$
Toffaleti (1969)	$C_i = C_{L_i} \left(\frac{d}{y} \right)^{\frac{0.3048\ \omega_i\ U}{C_Z\ S\ d}}$	Difusión	339 mediciones en ríos 282 med. en canales de lab. donde $0.3mm \leq D \leq 0.93mm$ $0.05m \leq d \leq 0.61m$ $0.267m \leq$ Ancho $\leq 2.40m$	-Zona inferior $2D_i \leq y \leq d/11.64$
	$C_i = C_{m_i} \left(\frac{d}{y} \right)^{0.756 \left(\frac{0.3048\ \omega_i\ U}{C_Z\ S\ d} \right)}$			-Zona media $\frac{d}{11.64} \leq y \leq \frac{d}{2.5}$
	$C_i = C_{v_i} \left(\frac{d}{y} \right)^{1.50 \left(\frac{0.3048\ \omega_i\ U}{C_Z\ S\ d} \right)}$			-Zona superior $\frac{d}{2.5} \leq y \leq d$
Antsyferov y Debol'skiy (1969)	$C = Ca \exp(-\phi_1)$	Difusión	Bakelita: $d = 0.153m$ $\omega = 0.0085m/s$ $U = 0.62m/s$ Arena: $d = 0.577m$ $\omega = 0.027m/s$ $U = 1.34m/s$	$-\phi_1$ (ver ec 2.2.8.8)
Ippen 1971)	$C = Ca \left[\frac{d-y}{y+a}\ \frac{2a}{d} \right]^{\frac{\omega\ a}{\beta\ \nu}}$	Difusión		-β debe valuarse en el lugar donde se se aplique el método
Sakura y Kishi (1980)	$C = Ca \left[\left(\frac{d-y}{d-a} \right)^{1+\phi_*} \left(\frac{a}{y} \right) \right]^{Z}$	Difusión	Mediciones propias $0.08mm \leq D \leq 0.35mm$ También utilizó Datos de Vanoni y Nomicos, Krishnappan y otros	$-\phi_*$ (ver ec 2.2.10.11), tiene un valor aproximado de 0.5 $-\kappa = 0.4$ Ca puede valuarse sin medición directa con la ec 2.2.10.36
Velikanov (1944 1956)	$C_v = C_{vo}\ (1 - E)^{\zeta \frac{\kappa\ \omega\ \Delta}{(1+\ )S\ U_*}}$	Gravitacional		-Para baja concentración de sedimentos $-\zeta$ (ver ec 2.3.40)
	$\psi = \psi_o\ (1 - E)^{\zeta \frac{\kappa\ \omega\ \Delta}{(1+\Delta)S\ U_*}}$			-Para alta concentración de sedimentos $-\psi$ equivale a C_v (fig 2.3.1) $-\psi_o = \psi(C_{vo})$
Shulyak y Antsyferov (1971)	$C = C_{y_1} \exp(-\psi_1) + C_{y_2}\ (-\phi_1)$	De dos capas	$0.11m/s \leq \omega \leq 0.143m/s$ $0.263m \leq d \leq 2.72m$ $0.694m/s \leq U \leq 0.947m/s$	$-\psi_1$ (ver ec 2.4.1.9) $-\phi_1$ (ver ec 2.4.1.3)
Antsyferov y Kosyan (1980)	$C = Ca \exp \left[-\omega \int_a^y \frac{dy}{\frac{y\ U_*^2 \left(1 - \frac{y}{d}\right)}{2.8\ U_* y + 15.7\nu} \tanh \frac{U_*\ y}{\omega d} + \frac{\rho}{0.14(\rho_s - \rho) \left(\frac{D^2}{g} \right)^{1/3} (u_o - \omega) \exp\left[-\frac{y}{\delta} \right]}} \right]$	De dos capas	$0.019m/s \leq \omega \leq 0.0305m/s$ $0.029m \leq d \leq 0.164m$ $0.56m/s \leq U \leq 1.20m/s$	$-u_o$ -(ver ec 2.4.2.14)

3. DISCUSION Y COMENTARIOS A LOS METODOS DE DISTRIBUCION DE LA CONCENTRACION DE SEDIMENTOS DE FONDO EN SUSPENSION EN FLUJOS A SUPERFICIE LIBRE.

El conocimiento real de la distribución de la concentración de sedimentos de fondo en suspensión, en un flujo o superficie libre, es muy importante en el cálculo del transporte de sedimentos de fondo en suspensión, pues como se verá en el Cap. 4, g_{BS} y C se encuentran en relación directa, lo que hace pensar que una mejor aproximación de la función teórica que define a C respecto a la distribución real de la concentración de sedimentos en el flujo, permitirá también una mejor aproximación en el cálculo de la cantidad de sedimentos que son transportados por el flujo.

En el capítulo 2 se presentaron 14 métodos diferentes que fueron desarrollados para determinar la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en una vertical, en los cuales cada autor reporta su propio método como la mejor solución al problema, sin que esto signifique que los resultados generados por cada uno de ellos bajo las mismas condiciones hidráulicas sean iguales, lo que quiere decir que habrán algunas soluciones más cerca de la realidad que otras. Decir cuál es la mejor es un poco difícil pero muy importante.

Con este propósito primero se expondrán algunas conclusiones generales a las que han llegado estudiosos de este tema y luego se revisará cada método por separado.

3.1 Conclusiones y comentarios generales:

Debido a la importancia del conocimiento de la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, a la discrepancia que existe entre los resultados teóricos de los métodos entre sí y a su vez de dichos resultados con los datos experimentales, varios investigadores han tratado de encontrar los factores que inciden en el fenómeno y que no han sido contemplados en los desarrollos teóricos de los diferentes métodos.

Una de las primeras conclusiones a los que llegaron investigadores como Vanoni (ref 42 , 43), Ismail (ref 21), Einstein y Chien (ref 10), fue de que a pesar de que efectivamen te el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento ε_m y el coeficiente de difusión para sedimentos ε_s siguen la misma tendencia, los dos fenómenos no son iguales, proponiendo una solución de la forma:

$$\varepsilon_s = \beta \, \varepsilon_m \tag{3.1.1}$$

Donde β en un factor que está en función del tamaño de las partículas, el cual se ha encontrado que toma un valor mayor que uno.

Esto parece razonable, ya que los coeficientes de correlación β_1 para "u'" y "c'" en la ec. (2.1.6) y "β_2" para "u'" y "v'" en la ec. (2.1.23) no necesariamente deben ser iguales, ya que las variables que se están relacionando son similares pero no necesariamente iguales. Análogamente se puede pensar que la longitud de mezclado de los sedimentos "ℓ_1" y la longitud de mezclado de flujo "ℓ" no siempre serán iguales, por tanto al igualar "ε_s" definida por la ec. (2.1.7) en la cual aparecen las variables β_1 y ℓ_1, con ε_m definido por la ec. (2.1.26) en la cual aparecen las variables β_2 y ℓ, (esto sin afectar a ε_s ó a ε_m por algún factor de corrección), se obtiene un error en el desarrollo teórico de la ec. (2.1.33) que define finalmente a ε_s. Revisando los métodos presentados en el cap. 2, se observa que los siguientes autores consideraron en sus deducciones ε_s igual a ε_m: Rouse, Lane y Kalinske, Velikanov, Zagustin, Antsyferov y Debol'skiy e Itakura y Kishi, mientras que Hunt, Chang-Simons y Richardson e Ippen, consideran que la ec. (3.1.1) es correcta y la introducen en su desarrollo.

Por otro lado, Vanoni (ref 43), Hino (ref 17), Wang(ref 44) , Einstein y Chien (ref 10), Ippen (ref 41) e Ismail (ref 21) entre otros, concluyeron que la presencia de sedimentos en suspensión en el flujo hace decrecer el valor de la constante universal de Von Karman "κ", la cual caracteriza la efectividad de la turbulencia en la transferencia de cantidad de movimiento, lo que significa que al mezclarse el sedimento con el agua amortigua la turbulencia y por tanto, la longitud de mezcla de los sedimentos en el flujo "ℓ_1" es menor. Este decremento es el valor de "κ", se atribuye fundamentalmente a que una parte de la energía que lleva el flujo es consumida para mantener los sedimentos en suspensión.

Ismail encontró que el valor de "κ" podía decrecer hasta 0.20, lo que fué constatado por Ippen, tal como se observa en la fig. 3.1.1; según Ippen, el valor de κ para flujo mezclado con sedimento, depende de la concentración media de sedimentos en suspensión C_{med} y de la concentración de sedimentos en el fondo del cauce Co, y la ecuación que encontró para evaluarla, la cual es la misma que describe a la curva de la fig. 3.1.1 es la siguiente:

$$\kappa_1 = \kappa \left(\frac{1 + C_{med}\,\Delta}{1 + 2{,}5\ Co}\right) \qquad (3.1.2)$$

donde κ_1' es el valor que toma la constante de Von Karman para flujo con sedimento, κ es el valor de la constante universal de Von Karman para flujo con agua clara y tiene un valor de 0,4.

En forma similar, Einstein y Chien en 1955 ajustaron una curva a diferentes valores de κ_1 reportados por varios investigadores (fig. 3.1.2), en la que κ_1 resultó ser función de $C_{med}\ \omega\Delta/(\gamma US)$.

Wang, de estudios en un modelo de fondo móvil, desarrolló una expresión para valuar κ en flujo con sedimento en suspensión, la cual establece

$$\frac{1}{\kappa_1} = \frac{1}{\kappa_\omega} + 0{,}14\Delta\ \frac{(\omega - US)}{U_*\ \ S}\ C_{vm} \qquad (3.1.3)$$

donde κ_ω es la constante de Von Karman para un canal de fondo móvil pero sin sedimento en suspensión, cuyo valor se puede encontrar en la fig. 3.1.3, en función de U/U_*.

En la ec. 3.1.3, el primer término del lado derecho representa la influencia de las características del fondo sobre κ, y el segundo término representa la influencia de los sedimentos en suspensión sobre κ. Es de notar que si en esta misma expresión el término (ω - US) es mayor que cero, κ_1 decrece con el incremento de C_{vm}; si (ω - US) es menor de cero, κ_1 crece con el incremento de C_{vm} y si (ω - US) es igual a cero, κ_1 no tiene relación directa con C_{vm}.

Hino, interpretando los resultados experimentales de Elata e Ippen, desarrolló una expresión para calcular κ_1, la cual indica que

$$\frac{\kappa}{\kappa_1} = \frac{(1 + \beta_5\ C_{vm})}{2} \left[1 + 4\ \beta_5\ \kappa\ (1 + \beta_5\ C_{vm})\ M_1 \right]^{1/2} \qquad (3.1.4)$$

donde κ es igual a 0.4, β_5 y β_5 son constantes.

Experimentalmente se ha encontrado que el término ($1 + \beta_5\ C_{vm}$) es igual a la unidad y M_1 se evalúa con la siguiente expresión:

$$M_1 = \frac{g\ \Delta\ \omega\ C_{vm}\ (d - \delta)}{U_*^3\ \ln\ (\frac{d}{\delta})} \qquad (3.1.5)$$

Como se observa, para poder encontrar el valor de κ_1 en la ec. (3.1.4), falta conocer el valor de la constante β_5, para lo cual sugiere hacer mediciones directas en el cauce.

Zagustín (ref 2), también propuso una expresión para calcular κ_1, en donde

$$\kappa_1 = \kappa \frac{1}{1 + A_4 \; \overline{\gamma} \; \xi_*} \qquad (3.1.6)$$

donde ξ_* vale $C_{vm}\ U\omega/U_*^2$, es el peso específico de la mezcla agua sedimento, y A_4 es un factor cuyo valor debe obtenerse experimentalmente.

Si se revisan los métodos presentados en el Cap. 2, sólamente Hunt, Chang-Simons y Richardson y Antsyferov y Debol'skiy consideran que toma un valor diferente a 0.4, mientras que Rouse, Lane y Kalinske, Einstein y Chien, Velikanov, Zagustín e Itakura y Kishí no toman en cuenta ningún cambio en la constante universal de Von Karman con la presencia de sedimentos en suspensión, y consideran un valor constante e igual a 0.4. Como se verá en el subcapítulo 3.2, esto hace que el valor de C calculado sea un poco mayor del real.

Otra conclusión muy importante a la que han llegado la mayoría de los investigadores es que la presencia de sedimentos en suspensión en el flujo hace que su velocidad se incremente. Según Vanoni, lo anterior aparentemente depende de la cantidad y tamaño de los sedimentos en suspensión. Si la velocidad del flujo aumenta con la presencia de sedimentos en suspensión, es fácil deducir que también se reduce la resistencia al flujo.

El incremento de la velocidad es consecuencia de la disminución del valor de la constante universal de Von Karman o viceversa, pues si se observa en las ecuaciones que describen la distribución de la velocidad en el flujo, u y κ son inversamente proporcionales y por tanto una disminución en κ produce un aumento en u.

Era de suponer que la presencia de sedimentos en suspensión haría cambiar su comportamiento; por ello utilizar sin ningún ajuste una distribución de velocidades desarrollada para flujo con agua en la deducción de los métodos para calcular la distribución de la concentración de sedimentos, puede inducir a error. En los métodos presentados en el capítulo dos, Rouse, Einstein y Chien, Velikanov, Chang-Simons y Richardson, Toffaleti, Antsyferov y Dsebol'skiy, Antsyferov y Kasyan, Ippen y Zagustín utilizaron distribuciones de velocidades desarrolladas para flujo con agua clara sin hacerles ningún ajuste; sólo Hunt e Itakura y Kishi utilizaron distribuciones de velocidades desarrolladas para flujo de agua mezclada con sedimentos. Este aspecto ha sido muy criticado a algunos métodos de distribución de la concentración de sedimentos y parece ser que una corrección a dichas expresiones se podría lograr ajustando el valor de κ, utilizando alguna de las curvas o fórmulas señaladas anteriormente.

Coleman estudió la variación del coeficiente de difusión para sedimentos, concluyendo que ε_s en un canal abierto se incrementa con la distancia del fondo, alcanzando un valor máximo aproximadamente a 0.20 d ó 0.30 d a partir del fondo del cauce y de ahí en adelante hasta la superficie conservará un valor prácticamente constante, sin nunca llegar a un valor de cero, lo que desmiente los resultados de la ec. (2.1.33), en la cual E_s máximo corresponde para "y" igual a 0.5 d, mientras que E_s vale cero para "y" igual a cero y "y" igual a "d".

Con los comentarios anteriores se ha tratado de esclarecer en buena parte como se comportan los principales factores que intervienen en el fenómeno de la distribución de la concentración de sedimentos. Lógicamente esto aún no permite decidir completamente cuales métodos son más precisos, puesto que por ejemplo un método puede tomar el valor de κ igual a 0.4, pero por otro lado incluir una distribución de velocidades conveniente para flujo de agua mezclada con sedimentos. Por tanto se hace necesario revisar cada método en particular tratando de ver su comportamiento frente a los resultados de los demás métodos, y de ser posible frente a resultados experimentales.

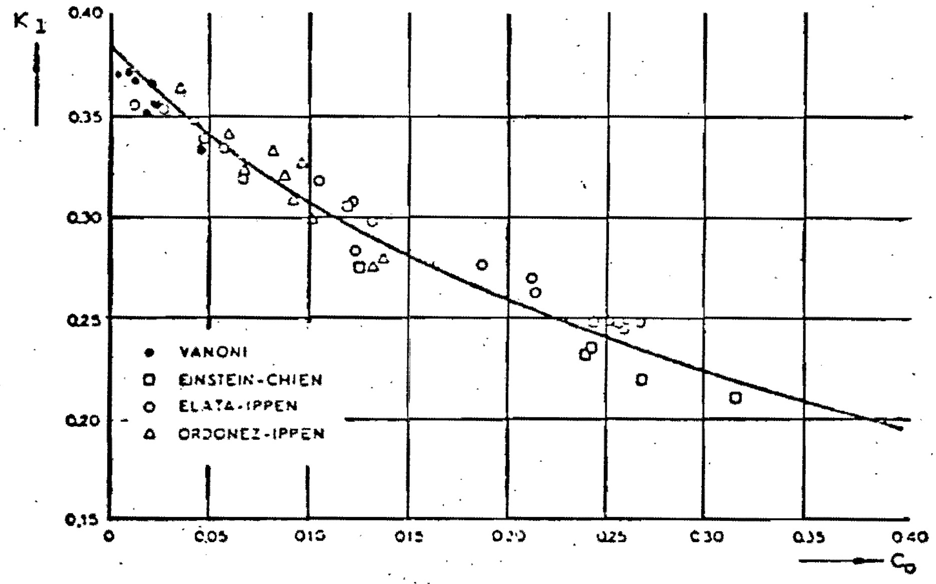

Fig. 3.1.1. VARIACION DE κ (SEGUN IPPEN, 1971)

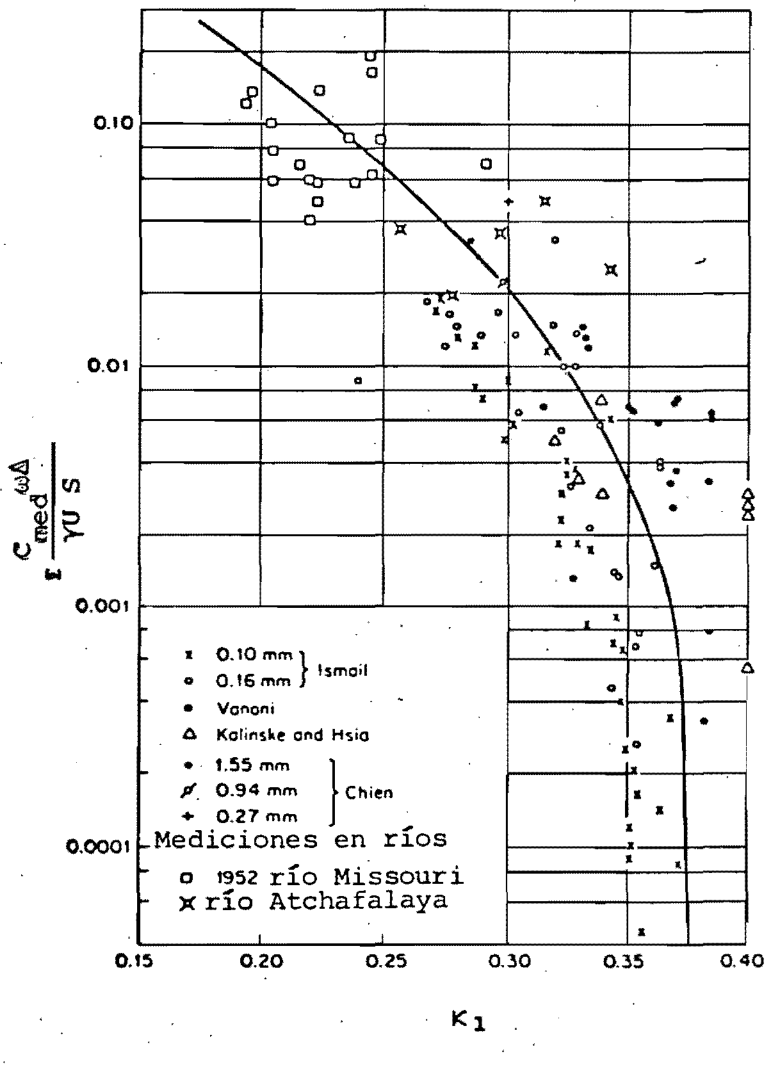

Fig. 3.1.2 VARIACION DE κ (SEGUN EINSTEIN Y CHIEN, 1954)

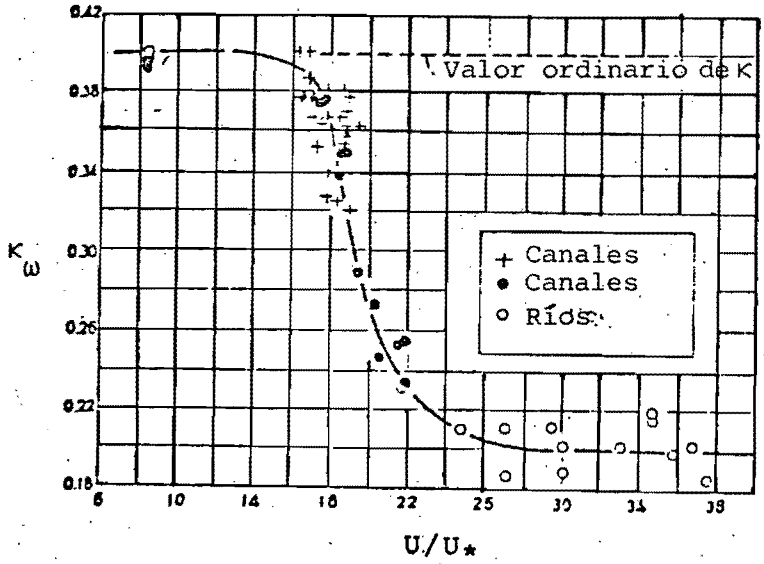

Fig. 3.1.3 VARIACION DE κ_ω EN FUNCION DE U/U_* (SEGUN WANG)

3.2 Métodos de distribución de la concentración

Para cubrir el tema de la distribución de la concentración de sedimentos, en este subcapítulo se hará una revisión de cada uno de los métodos presentados en el capítulo 2, para lo cual en la primera parte de la discusión de cada uno de ellos se presentarán sus características más sobresalientes, lo mismo que los comentarios y conclusiones pertinentes, y en la segunda parte, para los métodos que fué posible comparar, se discutirán los resultados procurando dar una explicación objetiva a ellos.

Para comparar los métodos se eligieron tres números adimensionales, en función de los cuales se pretendió representar el mayor número de métodos. Estos números adimensionales fueron y/d, C/Ca y Z, siendo Z igual a $\omega/\kappa\, U_*$ con κ igual a 0.4, y debido a que sobraba un cuarto número adimensional $(\frac{a}{d})$, a este en todos los casos se le dió un valor de 0.05, con lo cual no se alternaría el resultado de los diferentes métodos en el plano adimensional.

Para hacer más objetiva esta comparación se buscaron datos reales con los cuales, bajo las mismas condiciones hidráulicas, se pudieran comparar los resultados teóricos de los diferentes métodos, y así, de esta manera conocer con mayor certeza cual o cuales métodos se ajustan mejor a la realidad.

Para los datos experimentales obtenidos, se conoce la concentración relativa C/Ca para diferentes valores de y/d, donde Ca es la concentración medida al nivel "y" igual a 0.05 d; también se conocen las características hidráulicas y de los sedimentos con lo que fue posible calcular el tercer parámetro adimensional Z.

Los resultados experimentales correspondientes a las figs. 3.2.1 a 3.2.4, fueron presentados por Vanoni y publicados en 1946, ref. (43). Dichos experimentos se hicieron en un canal de pendiente variable con 84.5 cm de ancho por 18.3 m de largo.

La fig. 3.2.1 corresponde a su experimento No. 17, para el cual la pendiente hidráulica fue de 0.00125, el tirante de 8.2 cm y la velocidad de caída del sedimento de 1.734 cm/seg. Con estos datos y para κ igual a 0.4, el valor de Z es de 1.368.

La fig. 3.2.2 se obtuvo al dibujar los resultados de sus experimentos 15 y 16. Para el experimento 15, la pendiente hidráulica fué de 0.0025, el tirante de 8.35 cm y velocidad de caída del sedimento de 1.759 cm/s, mientras que para el experimento 16, la pendiente hidráulica fué de 0.00125, el tirante de 16.37 cm y velocidad de caída del sedimento de 1.759 cm/s. Aunque los dos experimentos se efectuaron para condiciones diferentes, el valor resultante para Z en cada uno de ellos es prácticamente idéntico, lo que permitió agrupar en una misma gráfica los resultados de los dos experimentos; para estas condiciones el valor de Z resultó ser de 0.978.

La fig. 3.2.3 se obtuvo al dibujar los resultados encontrados por Vanoni en sus experimentos 19 y 22. En la prueba 19, la pendiente hidráulica fué de 0.00125, el tirante de 7.193 cm y la velocidad de caída del sedimento de 0.853 cm/s, mientras que para la prueba 22 la pendiente hidráulica fué de 0.0025, el tirante de 8.99 cm y la velocidad de caída del sedimento de 1.24 cm/s. Al evaluar Z de la prueba 19 y compararla con Z de la prueba 22, resultaron ser prácticamente iguales, lo que permitió agrupar en una misma gráfica los resultados de los dos experimentos.

La fig. 3.2.4 resultó de los datos obtenidos por Vanoni en sus experimentos 20 y 21. Para la prueba 20, la pendiente hidráulica fué de 0.0025, el tirante de 14.05 cm y la velocidad de caída del sedimento de 0.868 cm/s, mientras que para la prueba 21, la pendiente hidráulica fué de 0.0025, el tirante de 7.132 cm y la velocidad de caída del sedimento de 0.38 cm/s; para estas condiciones el valor promedio de Z es de 0.369.

Las otras figuras, es decir la 3.2.5, 3.2.6 y 3.2.7 corresponden a datos experimentales de pruebas hechas por Vanoni en 1954 en canales de laboratorio y también a mediciones hechas por la United States Army Corps of Engineers en 1951, según ref (41).

En la fig. 3.2.5 aparecen dibujados 2 experimentos diferentes, el que corresponde a un valor de Z igual a 1.716 fué hecho por Vanoni en un canal de laboratorio, en el cual la pendiente hidráulica fué de 0.00125, el tirante de 18.3 cm y el tamaño de los sedimentos utilizados fluctuó entre 0.208 y 0.205 mm. La gráfica que corresponde a un Z de 0.0966 resultó de mediciones efectuadas en el Río Missouri el 18 de octubre de 1951 por la United States Army Corps of Engineers, donde la pendiente hidráulica resultó ser de 0.000125, el tirante de 3.018 m y el diámetro de los sedimentos en suspensión fluctuó entre 0.044 a 0.062 mm. Para esta prueba, dado que no reportaron el diámetro medio de los sedimentos en suspensión, para valuar la velocidad de caída se tomó el diámetro medio logarítmico de los dos tamaños extremos reportados igual a 0.052 mm.

La fig. 3.2.6 corresponde a resultados de laboratorio reportados por Vanoni. En esta prueba se tuvo una pendiente hidráulica de 0.00125, un tirante de 8.99 cm y se utilizaron sedimentos con diámetro de 0.1 mm; para estas condiciones el valor de Z encontrado fué de 0.524.

Finalmente, la fig. 3.2.7 se obtuvo de mediciones hechas en el río Missouri por la United States Army Corps of Engineers el

17 de octubre de 1951. Para esta prueba la pendiente hidráulica fué de 0.000121, el tirante de 2.35 m y el tamaño de los sedimentos en suspensión fluctuaba entre 0.149 y 0.21 mm. En este caso también se consideró el diámetro medio logarítmico, igual a 0.1769 mm.

En cada una de las figuras, en forma resumida se señalaran las características más importantes del experimento correspondiente.

De los métodos presentados en el capítulo dos, siete pudieron ser transformados a los parámetros adimensionales escogidos. Estos fueron:

Rouse
Lane y Kalinske
Einstein y Chien
Hunt
Velikanov
Chang - Simons y Richardson
Itakura y Kishi

Los otros métodos no fué posible transformar a los parámetros adimensionales seleccionados, debido principalmente a que las ecuaciones que plantean para calcular la distribución de la concentración de sedimentos contienen variables que no están incluídas en los números adimensionales que se escogieron, tales como la rugosidad relativa del fondo, la viscosidad cinemática y otras, y cuyos valores no fueron reportados en los datos de los experimentos utilizados.

Tanto los resultados experimentales como los de los diferentes métodos que pudieron expresarse en forma adimensional, se dibujaron en un plano, donde en el eje de las ordenadas va el parámetro y/d, en el eje de las abscisas el parámetro C/Ca e interiormente el valor de Z tal como se observa en las figs. 3.2.1 a 3.2.7.

3.2.1 Método de Rouse

Como se mencionó en el subcapítulo 2.1, este método se publicó en 1937 y prácticamente fué el primer método desarrollado para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en un flujo a superficie libre. Está basado en la teoría de difusión para flujo turbulento, y debido a que fué el primer método publicado con buenos argumentos teóricos, ha sido ampliamente difundido y estudiado.

Investigadores como Vanoni, Ismail, Einstein y Chien, Nomicos, Anderson e Ippen, al comparar sus resultados experimentales con los predichos con el método de Rouse, concluyeron lo siguiente:

Los resultados de la ec. (2.1.39) propuesto por Rouse sigue la forma de la distribución de la concentración de sedimentos medidos, pero los valores no siempre concuerdan para sedimentos finos, los resultados de la ec. (2.1.39) se ajustan bien con la realidad, pero a medida que los sedimentos van creciendo de tamaño, la ecuación de Rouse tiende a dar concentraciones mayores que las reales.

Esta discrepancia se atribuyó fundamentalmente a los siguientes factores que Rouse no tuvo en cuenta en su deducción.

a) Rouse consideró que el coeficiente de difusión para sedimentos E_s y el coeficiente de transferencia de cantidad de movimientos eran iguales, y como se discutió en el subcapítulo 3.1, tanto Vanoni como Ismail y Einstein y Chien concluyeron que a pesar de que los dos fenómenos son similares, los valores de E_s y E_m no son idénticos y propusieron una modificación tal como se planteó en la ec. (3.1.1), de manera que la ec. (2.1.33) queda

$$E_s = \frac{\beta\ U_*^2\ (\frac{d-y}{d})}{du/dy} \qquad (3.2.1.1)$$

Y por consiguiente, la ecuación final propuesta por Rouse para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, ec. (2.1.37), se transforma en:

$$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{d-y}{y} \; \frac{a}{d-a}\right)^{\frac{\omega}{\beta \kappa U_*}} \qquad (3.2.1.2)$$

Donde β es un factor que está en función del tamaño de las partículas, el cual toma un valor mayor que uno.

b) Otra conclusión muy importante a la que se llegó, es que la constante universal de Von Karman "κ" para flujo mezclado con sedimento no toma el valor de 0.4 que inicialmente se había encontrado para flujo de agua clara, sino que a medida que aumenta la concentración de sedimentos en el flujo, κ decrece hacia un valor de 0.2.

Al considerar Rouse en su método que κ es constante con valor de 0.4, en la ec. (2.1.37) el exponente $\omega/\kappa U_*$ a medida que el tamaño de las partículas en suspensión crece tenderá a ser un poco menor del valor que se ajusta a la distribución real de sedimentos, lo que efectivamente hace que los resultados de la concentración a diferentes niveles arriba del fondo del cauce resulte ser mayor con la ecuación de Rouse que en la realidad; esto hace pensar que un ajuste en el valor de esta constante mejoraría substancialmente los resultados de la ec. (2.1.37).

c) Otra crítica hecha al método de Rouse, fué el haber utilizado la distribución de velocidades de Prandtl-Von Karman sin hacer ningún ajuste, la cual fué desarrollada pa ra flujo con agua clara, y como se discutió en el subcapítulo 3.1, la velocidad del flujo aumenta por la presencia de sedimentos en suspensión, lo cual fundamentalmente se debe a la disminución que sufre la constante κ.

En los experimentos hechos por Vanoni, Ismail y Laursen, entre otros, un detalle importante por resaltar es el siguiente:

Ellos calcularon un valor de κ de tal manera que los resultados de la distribución de velocidades de la ec. (2.1.34) empleada por Rouse se ajustará a la distribución de velocidades medida experimentalmente. Con este valor de κ encontrado valuaron el exponente Z de la ec. (2.1.39) y luego para los resultados de la distribución de la concentración de sedimentos medida en la misma prueba, buscaron el valor de Z que mejor ajustara los resultados de la ec. (2.1.39), encontrando que el Z teórico correspondiente al valor de κ evaluado con la distribución de velocidades no era igual al Z real que se ajustaba a la distribución de la concentración de sedimentos, cuya discrepancia alcanzaba a ser hasta de un 20%, lo que indica que existe algo mal en la deducción teórica de la ec. (2.1.39) que no solo radica en el hecho de haber considerado a κ constante ya que si este fuera el único factor a corregir, el Z teórico y el Z real serían iguales.

Este análisis induce a pensar en la necesidad de incluir en la ec. (2.1.39), aparte del ajuste en el valor de κ, otro factor de corrección en el exponente Z, lo que justifica una vez más la inclusión del término β tal como aparece en la ec. (3.2.1.2).

Como se dijo antes, en las figs. 3.2.1 a 3.2.7 aparecen graficados resultados experimentales de la concentración relativa C/Ca, para diferentes distancias relativas del fondo y/d obtenidos para determinados sedimentos bajo ciertas condiciones hidráulicas, factores que determinan el valor de Z que aparece en cada gráfica.

Los resultados obtenidos con el método de Rouse, ec. (2.1.39), para cada Z, están marcados con raya contínua (————).

La ec. (2.1.39) al transformarla a los parámetros adimensionales escogidos, teniendo en cuenta que y/d es igual a 0.05, quedó:

$$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{1 - E}{19E}\right)^{Z} \qquad (3.2.1.3)$$

donde

$$E = \frac{y}{d} \qquad (3.2.1.4)$$

$$Z = \frac{\omega}{\kappa U_*} \qquad (3.2.1.5)$$

y

$$U_* = \sqrt{gdS} = \sqrt{\tau_o/\rho} \qquad (3.2.1.6)$$

Siendo κ igual a 0.4, tal como lo sugiere Rouse en su método.

De acuerdo al reporte de las condiciones en que se efectuó cada experimento se valuó Z y para diferentes valores de E se encontró el correspondiente resultado de C/Ca, los cuales se dibujaron tal como se observa en las figs. 3.2.1 a 3.2.7.

En estas figuras, para los resultados obtenidos con la ecuación de Rouse, (ec. 3.2.1.3), frente a los datos reales encontrados experimentalmente y frente al comportamiento de los demás métodos, se puede concluir lo siguiente:

1) En general los resultados de la distribución de la concentración de sedimentos descrita con la ecuación de Rouse se sigue la forma de la distribución de la concentración de sedimentos real en el flujo, pero sus valores no son iguales.

2) En todas las figuras, excepto en la 3.2.4, los valores de C/Ca correspondientes a diferentes distancias relativas del fondo y/d, resultaron ser un poco mayores que

los obtenidos experimentalmente, lo cual se debe especialmente al hecho de haber dado en todos los casos un valor de 0.4 para κ. Esto confirma las conclusiones a que llegaron investigadores como Vanoni, Einstein y Chien, Laursen o Ippen, quienes encontraron que el valor de la constante de Von Karman disminuía a medida que aumentaba la concentración de sedimentos en el flujo, la cual haría que el exponente Z definido por la ec. (3.2.1.5) aumentara conforme κ decreciera y de esta manera los resultados de C/Ca generados por la ec. (3.2.1.3) resultarían un poco menores y por tanto se lograría un mejor ajuste para los datos experimentales.

Esto se puede ver también en la siguiente tabla, en donde se muestra para cada experimento el valor de Z correspondiente a κ igual a 0.4 y el valor de Z que da el mejor ajuste de la ec. (3.2.1.3) respecto a los resultados experimentales, incluyendo el valor que tomaría κ para el Z que mejor se ajusta.

Fig. No.	Z Para κ = 0.4	Z Mejor ajuste	κ Para Z que mejor se ajusta
3.2.1	1.368	1.47	0.372
3.2.2	0.978	1.03	0.3796
3.2.3	0.598	0.66	0.3626
3.2.4	0.369	0.34	0.4344
3.2.5	1.716	1.93	0.3554
3.2.5	0.0966	0.16	0.2413
3.2.6	0.524	0.56	0.3764
3.2.7	0.9473	1.12	0.3383

Si se observa en la tabla anterior, el único experimento en donde el Z valuado para κ igual a 0.4 resultó ser más grande que el Z que mejor se ajusta a los datos experimentales, es el correspondiente a la fig. 3.2.4, lo cual se debe al hecho de haber agrupado para esta figura resultados experimentales de dos pruebas hechas en condiciones diferentes, ya que como se dijo antes al explicar esta figura, las dos pruebas se hicieron para una pendiente igual y diámetro de sedimentos prácticamente igual, pero el tirante en el primer experimento fué de 14.05 cm, mientras que para el segundo fué de 7.13 cm, es decir casi la mitad, y al promediar estos valores para encontrar un Z promedio hizo que resultara mayor que la que se ajusta a los resultados. Este comentario en general es válido para todos los otros métodos que se están comparando.

En la fig. 3.2.5a, es decir la correspondiente a Z igual a 0.0966, se puede apreciar de que aunque efectivamente se mantiene la tendencia de dar valores más altos que los reales de C/Ca, en este caso resultaron ser demasiado altos, lo cual se atribuye al hecho de haber considerado en los cálculos como diámetro representativo al diámetro medio logarítmico igual a 0.052 mm, cuando posiblemente dichos sedimentos no tienen esta distribución. Los resultados de esta figura hacen pensar de que a pesar de que los tamaños de los sedimentos fluctuaban entre 0.44 mm y 0.062 mm seguramente casi todos los sedimentos correspondian a 0.062 mm, por lo que el diámetro con el que se trabajó (0.052 mm) es más pequeño que el medio de la muestra y como consecuencia la velocidad de caída resultó ser menor que la real; esto hace que el Z de 0.0966 haya resultado muchísimo más pequeño que el Z que da el mejor ajuste.

De acuerdo a la tendencia que muestra la ecuación de Rouse en los otros experimentos, el diámetro que posiblemente correspondió al medio de los sedimentos en suspensión fué uno tal que produjera un valor para Z aproximadamente de 0.145 ó 0.15, pero como no se tienen información suficiente para constatarlo, se acepta la explicación dada. Este comentario también en general es válido para los otros métodos que se están comparando.

Para completar ésta discusión se sugiere ver el cap. 6.

3.2.2 Método de Lane y Kalinske

En el desarrollo de este método, dado que la intención de Lane y Kalinske fué encontrar una forma práctica y fácil para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, se hicieron algunas suposiciones, entre las cuales la más importante consistió en el hecho de considerar que el coeficiente de difusión para sedimentos se mantenía constante en toda la vertical del flujo, tomando un valor igual al del coeficiente medio de difusión para sedimentos $\bar{\varepsilon}_s$. Si se compara esta suposición con las conclusiones encontradas por Coleman referentes a la variación de ε_s respecto a "y", las cuales fueron comentadas al final del subcapítulo 3.1, se observa que para la parte inferior del flujo, abajo de 0.3 d aproximadamente, $\bar{\varepsilon}_s$ es más grande que ε_s y debido a que en la ec. (2.2.1.5) ε_s está dividiendo al exponente, en la región donde el coeficiente de difusión para sedimentos es más pequeño que el coeficiente medio de difusión para sedimentos, se generan resultados más altos de C/Ca que los valores reales.

Por otro lado, Lane y Kalinske también consideraron que la constante de Von Karman mantenía un valor de 0.4 para flujo mezclado con sedimentos, lo cual como se discutió anteriormente no es correcto y contribuye a que el resultado de la distribución de la concentración relativa C/Ca tienda a ser mayor que el valor real.

Al transformar la ec. 2.2.1.7 a los parámetros adimensionales seleccionados, teniendo en cuenta que "a" es igual a 0.05 d, se obtiene:

$$\frac{C}{Ca} = \exp\,(0.3\ Z - 6\ EZ) \qquad (3.2.2.1)$$

Los resultados obtenidos con esta ecuación, utilizando los datos de los experimentos que se están comparando, se dibujaron en las figs. 3.2.1 a 3.2.7, los cuales están identificados con la línea (-·-·-·-).

Al comparar el comportamiento de la ec. (3.2.2.1) frente a los resultados experimentales y frente al comportamiento de los demás métodos que se dibujaron en las figs. 3.2.1 a 3.2.7, se observa lo siguiente:

1. Los resultados de C/Ca encontrados con la ec. (3.2.2.1), en todos los casos fueron mucho mayores que los valores reales para la región del flujo comprendida entre "y" igual a 0.05 d y "y" igual a 0.6 d, alcanzando a generar valores hasta de un 200% mayores que los experimentales, como se observa por ejemplo en la fig. 3.2.1, en donde para y/d igual a 0.2, C/Ca experimental vale 0.1, mientras que con la ecuación de Lane y Kalinske se obtiene 0.3.

   Los resultados tan altos de la concentración encontrados con el método de Lane y Kalinske se deben fundamentalmente al hecho de haber considerado constante el coeficiente de difusión para sedimentos y en segundo lugar, al no haber corregido el valor de 0.4 para κ, aspectos que como se indicó al comienzo de la discusión de este método, hacen que se sobre estime el valor de la concentración de sedimentos, especialmente en la región inferior del flujo.

2. Arriba del nivel "y" igual a 0.6 d, el método de Lane y

Kalinske genera resultados para C/Ca que en general se ajustan a los reales, siguiendo la tendencia mostrada por los otros métodos que se están comparando. La concordancia en esta región se debe por un lado a la baja concentración de sedimentos en la parte superior del flujo, cuya influencia sobre κ es mínima y por tanto se puede acertar κ igual a 0.4, y por otro el haber considerado $\bar{\varepsilon}_s$ en lugar de ε_s, de acuerdo a las conclusiones a que llegó Coleman sobre este coeficiente, parece ser que para la parte superior del flujo el valor de ε_s puede estar muy cerca de $\bar{\varepsilon}_s$.

Para completar ésta discusión, se sugiere ver el capítulo seis.

3.2.3 Método de Einstein y Chien

3.2.3 Método de Einstein y Chien

La principal variación de este método respecto al de Rouse, radica en la forma de considerar la longitud de mezclado para los sedimentos, puesto que suponen que el flujo ascendente de sedimentos atravezando un área unitaria horizontal en un nivel "y", proviene de un nivel $y - A_1\,\ell$, mientras que el flujo descente atravezando la misma área proviene de un nivel $y + (1 - A_1)\ell$, en donde ℓ es la longitud de mezclado del flujo propuesto por Prandtl y A_1 es un factor numérico con un valor menor que uno. Esto implica, que según Einstein y Chien la longitud de mezclado para los sedimentos que ascienden es diferente a la longitud de mezclado para los sedimentos que descienden, excepto si A_1 vale 0.5.

Al transformar la ec. (2.2.2.15) a los parámetros adimensionales C/Ca, E igual a y/d y Z igual a $\omega/\kappa U_*$, y teniendo en cuenta que a/d vale 0.05 resulta:

$$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{0.02532}{1-\sqrt{1-E}}\right)^{\frac{Z}{1+\kappa NZ}} \left(\frac{1.97468}{1+\sqrt{1-E}}\right)^{\frac{Z}{1-\kappa NZ}} \left(\frac{0.95+\kappa NZ}{\sqrt{1-E}+\kappa NZ}\right)^{\frac{2Z}{\kappa^2 N^2 Z^2-1}} \tag{3.2.3.1}$$

En la ec. (3.2.3.1) aparecen dos constantes (N y κ), las cuales deben ser valuadas directamente en el lugar en donde se va a aplicar el método. Para efectos de esta discusión se hicieron diferentes combinaciones de N y κ tratando de encontrar una que ajustara mejor los resultados de la ec. (3.2.3.1) frente a los datos experimentales de que se dispone en este trabajo. Al hacer esto se observó lo siguiente:

1) El mejor ajuste en casi toda la profundidad del flujo se logra cuando N toma un valor de (-0.1), con el inconveniente de que para cuando este coeficiente toma un valor negativo, la ec. (3.2.3.1) es inconsistente si E es igual a 1. Cuando esto sucede el argumento del último término se vuelve negativo, el cual está elevado a un ex-

ponente fraccionario, que cambia cada vez que el Z sea diferente, por tanto la solución cae en el campo complejo, la cual no tiene significado físico en la solución que se pretende encontrar.

Teniendo en cuenta lo anterior y analizando la ec. (2.2.2.14) que define a N, se puede concluir entonces que el factor A_1 deberá ser menor de 0.5 y no de uno como inicialmente lo plantearon Einstein y Chien, puesto que si es mayor de 0.5 el término $(\frac{1}{2} - A_1)$ se volvería negativo, para que N finalmente resultara positivo se necesitaría que el factor B_1 fuera negativo, lo cual no puede ocurrir, dado que si se revisa, en la ec. (2.2.2.11) que define a la longitud de mezclado "ℓ", el término $\kappa y \frac{d-y}{d}$, siempre será positivo, y como "ℓ" no puede ser menor de cero, entonces B_1 para todos los casos será positivo.

2) Cuando N vale cero, la ec. (3.2.3.1) también se vuelve inconsistente, puesto que en el argumento de su último término y si ξ es igual a 1, resulta una división por cero.

3) Cuando N es mayor que cero, a medida que su valor crece, la solución de la ec(3.2.3.1) se aleja de las mediciones aquí presentadas generando valores de $\frac{C}{Ca}$ cada vez mayores, por lo que el mayor ajuste dentro del rango de aplicación de este méto

do se logra cuando N sin llegar a ser cero, está muy próximo a él. Para efecto de comparar este método en el presente trabajo se aceptó un valor de N = 0.00001. Como N prácticamente vale cero, significa, de acuerdo a la ec. (2.2.2.14), que A_1 vale aproximadamente 0.5, lo que quiere decir, de acuerdo al comentario hecho en la primera parte de la discusión de este método, que la longitud de mezclado para los sedimentos que ascienden es igual a la longitud de mezclado para los sedimentos que descienden, lo cual no está de acuerdo con la primera hipótesis en que basaron su método Einstein y Chien.

Al dibujar los resultados de la ec. (3.2.3.1) en las figs. 3.2.1 a 3.2.7 se encontró, como ya se esperaba, que los valores de C/Ca predichos por este método son prácticamente idénticos con los obtenidos por el método de Rouse, por ello los comentarios adicionales que se deban hacer a este método respecto a su comportamiento frente a los datos experimentales, son los mismos que se hicieron al método de Rouse.

Como complemento a esta discusión se sugiere ver el capítulo seis.

3.2.4 Método de Hunt

Fué publicado en 1954 y su desarrollo teórico está detallado en el subcapítulo 2.2.3. Este método, a diferencia de casi todos los demás, toma en cuenta el volúmen ocupado por los sedimentos dentro del flujo, por lo que se considera más ajustado a la realidad, tal como lo señala Vanoni ref. (41), Chien ref. (10) y Antsyferou y Kos'yan ref. (2).

Otro aspecto importante en el desarrollo de Hunt, es el haber considerado que la velocidad de la fase sólida en suspensión es diferente a la velocidad de la fase líquida, ya que aunque utilizó una distribución de velocidades desarrollada para agua clara ec. (2.2.3.8), en la cual κ vale 0.4, considera que la distribución de velocidad de los sedimentos es semejante a la del agua pero encuentra que las constantes κ y B_2 toman otros valores κ_s y B_{2s}, los cuales deberán obtenerse mediante mediciones directas en el lugar en donde se aplique el método.

Hunt encontró, basado en los experimentos de Vanoni ref. (41) que B_{2s} fluctuaba entre 0.99 y 1.00 y κ_s entre 0.31 y 0.44. Tengase en cuenta que los resultados de este método son muy sensibles al valor de B_{2s}.

Dado que la ecuación general desarrollada por Hunt (ec. 2.2.3.29) no fué posible transformar a los parámetros adimensionales seleccionados en este trabajo, es decir, C/Ca, y/d y Z, la comparación se hizo con la ec. (2.2.3.31), la cual si fué posible adimensionalizar, quedando de la siguiente manera:

$$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{1 - E}{0.95}\right)^{1/2} \left(\frac{B_{2s} - (0.95)^{1/2}}{B_{2s} - (1-E)^{1/2}}\right)^{\frac{0.4Z}{B_{2s}\kappa_s}} \qquad (3.2.4.1)$$

Dentro del rango de valores encontrado por Hunt para B_{2s} y κ_s, en este trabajo se escogieron varias parejas de esas variables, y se observo, para cada una de ellas, el comportamiento de la ec. (3.2.4.1) frente a los datos experimentales que se están comparando. El resultado fue finalmente que para B_{2s} igual a uno y para κ_s igual a 0.36 se alcanzaba un ajuste casi perfecto, como se puede observar en las figs. 3.2.1 a 3.2.7; solamente en los experimentos correspondientes a las figs. 3.2.4 y 2.3.5a se observa discrepancia respecto a los datos experimentales, pero esto al igual que sucede con los demás métodos se debe a las razones anteriormente expuestas en la discusión del método de Rouse (subcap. 3.2.1, numeral 2).

En el proceso de calibración de B_{2s} y κ_s se encontró que en la ec. (3.2.4.1) el valor de la concentración relativa C/Ca aumenta cuando B_{2s} aumenta, mientras que si κ_s aumenta, C/Ca disminuye. El aumento del valor C/Ca por efectos del incremento de B_{2s} es bastante significativo, ya que por ejemplo para la zona baja (y/d igual a 0.1 ó 0.2) un aumento en B_{2s} de 10% se tradu ce apróximadamente en un aumento de C/Ca de 100 ó 150%, lo que significa que la ec. 3.2.4.1 es muy sensible a la variación de B_{2s} y por ende se concluye la necesidad de calibrar cuidadosamente esta constante en el momento de aplicar este método.

La disminución en el valor de C/Ca por efecto del incremento de κ_s resultó ser poco significativo, pues una variación de κ_s de un 10% no altera el valor de C/Ca en más de un 5%; por tanto una diferencia en la determinación de esta constante no cambia substancialmente los resultados.

En general, observando las figs. 3.2.1 a 3.2.7, se puede concluir que este es un método que se ajusta en muy buena forma a la mayoría de datos experimentales, sin embargo, se sugiere ver el capítulo seis, en donde en forma cuantitativa se analiza la calidad del método.

Como desventaja del método de Hunt hay que señalar el hecho de tener que calibrar el valor de dos constantes cada vez que cambien las condiciones en donde se vaya a aplicar el método, y como recomendación, se sugiere tener mucho cuidado en la evaluación de B_{2s}.

3.2.5 Método de Velikanov

Fue desarrollado con base en la teoría de difusión, y la única diferencia con el método de Rouse radica en la distribución de velocidades que cada uno empleó.

Velikanov utilizó la distribución de velocidades desarrollada por Nikuradze para flujo con agua clara (ec 2.2.4.1), la cual incluye la rugosidad relativa, parámetro no empleado en otras distribuciones.

La ecuación final encontrada por Velikanov está dada por la ec (2.2.4.15), la cual al transformarla con los parámetros adimensionales seleccionados, teniendo en cuenta que a/d vale 0.05, queda

$$\frac{C}{Ca} = \left[\frac{1-E}{\alpha+E} \quad \frac{\alpha+0.05}{0.95}\right]^{\frac{Z}{1+\alpha}} \qquad (3.2.5.1)$$

En esta ecuación, α es la rugosidad relativa de Nikuradze y vale

$$\alpha = \frac{D}{30\ d} \qquad (3.2.5.2)$$

Al dibujar en las figs (3.2.1) a (2.3.7), los resultados de la ec (3.2.5.1) para cada una de las condiciones en que fueron hechas las mediciones de los experimentos que se están comparando, se encontró que los valores de C/Ca predichos por la ec (3.2.1.3) propuesta por Rouse y la ec (3.2.5.1) propuesta por Velikanov son iguales, lo cual permite concluir a primera vista, que si la única diferencia en el desarrollo entre el método de Rouse y el de Velikanov es la distribución de velocidades empleada por cada uno de ellos, entonces éstas deben ser iguales. Se trató de ver la influencia de α sobre el valor de C/Ca en la ec (3.2.5.1), para lo cual manteniendo un Z constante se valuó C/Ca para diferentes valores de α, encontrando que este término es prácticamente despreciable ya que una alteración en el valor de α hasta de un 1000% produce diferencias en el valor de C/Ca del tercer decimal en adelante, lo que sugiere que para fines prácticos se podría suprimir sin que se altere la precisión del método. Si se suprime α en la ec (3.2.5.1), ésta se transforma en

$$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{1-E}{19E}\right)^{Z} \qquad (3.2.5.3)$$

la cual es idéntica a la ec (3.2.1.3) propuesta por Rouse.

Los comentarios que se hicieron para el método de Rouse respecto a la predicción de la concentración relativa C/Ca frente a los resultados experimentales que se están comparando, son los mismos que se debieran hacer para este método, ya que los resultados de uno y otro son iguales. Las causas de las discrepancias entre los resultados teóricos y experimentales son también los mismos que se señalaron para el método de Rouse, es decir:

a) El no corregir el valor de la constante de Von Karman por efecto de la presencia de sedimento en el flujo y considerar que su valor es de 0.4, tal como si el flujo fuera de agua clara

b) El considerar que el coeficiente de difusión para sedimentos ε_s y el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento ε_m son iguales

c) El haber utilizado en el desarrollo teórico, sin hacer ningún ajuste, una distribución de velocidades propuesta para flujo de agua sin sedimentos.

En general se puede decir que es un método con aceptable aproximación, ya que sus resultados frente a los experimentales no se separan más de un 10%. Como sus resultados son iguales a los de Rouse, el cual es más fácil de aplicar, se sugiere usar de preferencia ese método, para cuando se desee una aproximación como la que ofrece cualquiera de los dos.

3.2.6 Método de Chang - Simons y Richardson

En este método, a diferencia de casi todos los métodos antes discutidos, se introducen dos modificaciones importantes. La primera es haber considerado que el coeficiente de difusión para sedimentos ε_s y el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento ε_m son semejantes pero no iguales, relacionandolos mediante un coeficiente de proporcionalidad β, para el cual los autores, encontraron un valor de 1.5, así:

$$\varepsilon_s = \beta\varepsilon_m \simeq 1.5\ \varepsilon_m \qquad (3.2.6.1)$$

Esto parece acertado, ya que está de acuerdo con las conclusiones encontradas tanto por Vanoni como por Ismail y Einstein y Chien, tal como se señaló en el subcapítulo 3.1.

La segunda consideración importante hecha por Chang, Simons y Richardson fue la de tener en cuenta que la constante universal de Von Karman cambia en función de la concentración de sedimentos en suspensión y para valuarla desarrollaron una gráfica (fig 2.2.5.1), en la cual se observa que κ fluctua entre 0.4 y 0.2. Esto también parece tener sentido, pues concuerda con las conclusiones de Ismail, Ippen, Chien y Hino entre otros (ver subcapítulo 3.1).

La ecuación final desarrollada por Chang-Simons y Richardson para predecir la distribución de la concentración de sedimentos, está expresada por la ec (2.2.5.16), la cual al transformarla a los parámetros adimensionales que se seleccionaron para la comparación de métodos queda

$$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{0.11324\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}}\right)^{1.333Z\,\frac{0.4}{\kappa}} \qquad (3.2.6.2)$$

El valor de Z utilizado en la comparación de todos los métodos está calculado para κ constante igual a 0.4. Para tener en cuenta la variación propuesta en este método en el valor de esta constante, se introdujo en el exponente el factor $0.4/\kappa$; de esta manera se valua C/Ca con el κ que le corresponda a la fig (2.2.5.1).

Para las condiciones en que fueron hechos los experimentos que se están comparando, se trató de valuar el coeficiente κ con el uso de la fig (2.2.5.1), pero se encontró que en general los resultados para C/Ca predichos de esta manera con la ec (3.2.6.2) resultaron ser más grandes que los reales. Esto se puede atribuir al hecho de haberle dado a β un valor de 1.5, ya que aunque otros investigadores han encontrado que este coeficiente fluctua entre 1 y 1.5, Chang-Simons y Richardson le atribuyen el valor más alto, lo cual hace que en la ec (2.2.5.16) el exponente se disminuya en un 50%.

El valor de 1.5 para β, en cierta forma está contrarrestado con la corrección introducida a la constante de Von Karman, pues se encontró que entre más grande es κ valuada con la fig (2.2.5.1), más altos resultan los valores de C/Ca predichos con la ec (3.2.6.2) y mayor es la diferencia entre los valores reales y los teóricos obtenidos con este método; esto permite concluir que posiblemente la variación de κ para β igual a 1.5, no es la que sugiere Chang-Simons y Richardson en la fig (2.2.5.1). Una solución a este problema podría ser probar otros valores de β (1.2 ó 1.0); si se acepta β=1, se cae en el método de Rouse y κ toma un valor de 0.4. No se probaron otros valores de β ya que los autores del método aceptan β=1.5.

Debido a la discrepancia entre C/Ca medido y C/Ca calculado con la ec (3.2.6.2), se trató de probar otros valores de κ

diferentes a los valuados con la fig (2.2.5.1) y se encontró que, para todos los experimentos que se están comparando, un valor de κ igual a 0.23 produce el mejor ajuste de este método con los datos experimentales, lo que sugiere que la fig (2.2.5.1) no describe adecuadamente la variación de κ y además que un valor para esta constante de 0.23 o cercano a él, sería el más conveniente para utilizar en este caso.

Otra característica que se observa en este método al ver las figs (3.2.1) a (3.2.7), es la tendencia de dar valores muy altos para C/Ca, en la parte superior del flujo.

Para concluir la discusión de este método se puede señalar:

1) Es un método que da resultados muy irregulares dependiendo del valor que tome κ de acuerdo a la fig (2.2.5.1)
2) Un valor para κ igual a 0.23 parece ser que ajusta en mejor forma los resultados de la ec (3.2.6.2) frente a los datos reales, al menos para los datos con que fue comparado en este trabajo
3) Especialmente por la incertidumbre en la predicción, se sugiere no utilizar este método en el cálculo de la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión.

3.2.8 Método de Toffaleti

A pesar de que este método está basado en el método de Einstein (1950) y en el de Einstein y Chien (1953), se puede decir que es un método casi totalmente empírico, ya que las gráficas, ecuaciones y coeficientes que utiliza fueron encontrados mediante ajustes de resultados experimentales. La base del método está dada por la ec (2.2.7.1), la cual efectivamente sigue la forma de la ecuación encontrada por Rouse (ec 2.1.39), la misma que utilizó Einstein en su método de transporte de sedimentos de fondo en suspensión. En síntesis, lo que hizo Toffaleti fue encontrar la función o el valor que deberían tomar los parámetros que intervienen en dicha ecuación, para que la predicción mediante el uso de ésta se ajustara de la mejor manera a sus resultados experimentales.

Toffaleti considera en la vertical del flujo 4 zonas, de las cuales, la inferior corresponde al transporte en la capa de fondo, y las otras tres al transporte de fondo en suspensión. Estas últimas resultaron de ajustar la predicción de la concentración de sedimentos mediante la ec (2.2.7.1) con los datos encontrados experimentalmente, para lo cual se encontró con que el factor que afecta a Z en el exponente de esta ecuación tomaba diferentes valores a diferentes profundidades del flujo. Después de comparar los resultados teóricos con muchos datos, Toffaleti encontró conveniente dividir en tres zonas el flujo, manteniendo en cada una un valor constante de b, ec (2.2.7.1). Este hecho permite concluir que:

o el proceso de distribución de la concentración de sedimentos es diferente en cada una de las zonas en que Toffaleti dividió el flujo, o que la ec (2.2.7.1) no es una función adecuada para describir este proceso.

Shulyak y Antsyferov, encontraron que los métodos basados en la teoría de difusión, en general dan una predicción aceptable de la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en la parte superior del flujo, arriba de 0.2d ó 0.3d, mientras que en la parte inferior del flujo se involucran otros aspectos que no contempla la teoría convencional de difusión, tales como la colisión entre partículas adyacentes debido a la mayor concentración de sedimentos, o el mayor efecto de las propiedades inerciales de los sedimentos. Si lo anterior es cierto, el que Toffaleti haya dividido el flujo en tres zonas para contemplar estos efectos parece tener sentido.

Este método no fue posible transformarlo a los parámetros adimensionales seleccionados, es decir, C/Ca, y/d y Z, ya que si se observan las ecs (2.2.7.9), (2.2.7.10) y (2.2.7.11) que son las tres ecuaciones con las cuales se describe, en toda la profundidad del flujo, la distribución de la concentración de sedimentos, en ellas aparecen tres concentraciones de referencia (C_{Li}, C_{Mi} y C_{Ui}) que deberán ser determinadas mediante mediciones directas, las cuales no fueron suministradas en los datos experimentales que se están comparando. Otro dato del cual tampoco se dispuso es la temperatura a la que se hizo cada experimento, la cual se requiere para valuar Z.

A pesar de no haber comparado este método hay que recordar que fue probado con 339 mediciones en ríos y 282 mediciones en canales de laboratorio, dando, según Toffaleti, muy buenos resultados.

3.2.9 Método de Antsyferov y Debol'skiy

La diferencia de este método con la mayoría de los ya discutidos radica en la distribución de velocidades empleadas, ya que si se observa la expresión del coeficiente de difusión para sedimentos, ec. 2.2.8.3 y la expresión de la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, ec. 2.2.8.5, son las mismas desarrolladas en la teoría de difusión y corresponden a las ecs. 2.1.33 y 2.1.21 respectivamente, y como se puede ver en otros métodos como Rouse, Lane y Kalinske y Velikanov también los utilizan.

Tal como se demostró en el desarrollo del método, la expresión final para la distribución de la concentración de sedimentos, ec. 2.2.8.8, tiene mucha similitud con la ec. 2.1.37 propuesta por Rouse, solamente que en este caso se tiene en cuenta el efecto de la temperatura del agua al involucrar la viscosidad dinámica de la misma.

Si se desprecia el efecto de la viscosidad en el comportamiento del flujo, la ec. 2.2.8.8 se transforma en la ec. 2.2.8.9, la cual es prácticamente igual a la encontrada por Rouse, con la única diferencia de que el factor 2.8 que aparece en el exponente equivale a haberle dado a la constante de Von Karman un valor de 0.36, mientras que Rouse considera que vale 0.4. Esto es un indicador de que el método de Antsyferov y Debol'skiy puede dar una buena predicción de la distribución de la concentración de sedimentos, pues como se observa en las figs. 3.2.1 a 3.2.7 el método de Rouse predice valores de la concentración un poco mayores que los reales y como se discutió en el subcapítulo 3.2.1 una corrección a este hecho se lograría disminuyendo el valor de K; falta ver el efecto de la viscosidad dinámica sobre la distribución de la concentración de sedimentos, pero como se sabe, la variación de esta característica del flujo es mínima para pequeños cambios de la temperatura del agua. El hecho de tenerla en cuenta a pesar de que no modifique en forma apreciable los cálculos, ayuda a predecir más adecuadamente la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión. Este raciocinio permite pensar entonces que la ec. 2.2.8.8 es una buena función para describir la distribución de la concentración de sedimentos en el flujo.

La expresión final propuesta en este método, (ec. 2.2.8.8), no fué posible transformar a los parámetros adimensionales que se seleccionaron para la comparación debido a que aunque la función es dimensionalmente homogénea, en ella aparece involucrada la viscosidad dinámica y al momento de formar los parámetros, para compensar las unidades de esta queda una velocidad al cortante y un tirante, las cuales impiden representar la función en las figs. 3.2.1 a 3.2.7. Además, de la mayoría de los experimentos que se estan comparando no se tiene el dato de la temperatura y por lo mismo no se puede conocer la viscosidad dinámica correspondiente. A cambio de la comparación que se ha hecho de los otros métodos, en la fig. 3.2.8 se presentan resultados experimentales encontrados por Taggart y por Antsyferov y Debol'skiy, en la cual, para las condiciones hidráulicas de cada experimento se graficaron los valores que tomaba C/Ca a diferentes profundidades relativas y/d, de acuerdo al método de Rouse (ec. 2.1.39), del método de Hunt (ec. 2.2.3.2a) y del método de Antsyferov y Debol'skiy (ec. 2.2.8.7). En este caso, a diferencia de la comparación efectuada en las figs. 3.2.1 a 3.2.7, la concentración de referencia Ca se tomó al nivel "y" igual a 0.5d. En esta figura se puede observar que efectivamente el método de Antsyferov y Debol'skiy se ajusta bastante bien a los resultados experimentales arriba del nivel "y" igual a 0.1 d, mientras que abajo de ese nivel, tanto para este método como para los demás que aparecen graficados, la distribución de la concentración de sedimentos real es un poco mayor que la predicha por la teoría, cuya causa se atribuye al hecho de que en esta zona, debido a la mayor concentración de sedimentos, se presentan otros fenómenos tales como el choque entre partículas adyacentes, los cuales no se contemplan en la teoría convencional de difusión.

En la fig. 3.2.8, arriba del nivel de referencia "y" igual a 0.5d, se puede constatar una vez más las conclusiones encontradas respecto al comportamiento del método de Rouse y Hunt en las figs. 3.2.1 a 3.2.7. Como se puede observar, aquí nuevamente el método de Rouse sigue la forma de la distribución real de la concentración de sedimentos, manteniendo la tendencia a dar valores un poco mayores, mientras que las predicciones del método de Hunt prácticamente se ajustan con los resultados experimentales.

3.2.10 Método de Ippen

Fue publicado en 1971, utilizando en su desarrollo teórico una distribución de velocidades presentado por Krey en 1927 y además considerando que el coeficiente de difusión para sedimentos ϵ_s y el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento ϵ_m están relacionados mediante un factor β, tal como aparece en la ec. (3.1.1).

En este método se puede observar, que la influencia de la constante universal de Von Karman κ no es tomado en cuenta, ya que la distribución de velocidades empleada no involucra esta constante.

La expresión final encontrada por Ippen para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, corresponde a la ec. 2.2.9.11, en la cual aparece involucrada la viscosidad dinámica, razón por la cual no fue posible transformarla a los parámetros adimensionales que se seleccionaron para la comparación de métodos, pues al intentar formar dichos parámetros se presentaron inconvenientes como los ya comentados en el método de Antsyferov y Debol'skiy (subcapítulo 3.2.9).

Aunque no fué posible constatar el comportamiento del método frente a los datos experimentales que se estan comparando en las figs. 3.2.1 a 3.2.7, es de esperarse que por la inclusión del factor β, tal como se discutió en la primera parte del subcapítulo 3.1, el análisis teórico se aproxima más a la realidad, y por tanto, la predicción de la distribución de la concentración de sedimentos por este método puede llegar a ser buena. Para confirmar esto falta aplicar el método a datos reales.

3.1.11 Método de Itakura y Kishi

Este método esta basado en la teoría de difusión y en él, un aspecto importante de señalar es que utiliza una distribución de velocidades adecuada para flujo de agua mezclada con sedimentos, lo cual seguramente llevará a mejores resultados.

Otro aspecto importante de resaltar es el hecho de que Itakura y Kishi aseguran que el valor de 0.4 para la constante universal de Von Karman no es afectado por la presencia de sedimentos en el flujo, lo cual es contradictorio con las conclusiones a las que llegaron investigadores como Vanoni, Einstein y Chien, Laurse, Ismail, tal como se señaló en el subcapítulo 3.1. La diferencia radica fundamentalmente en la distribución de velocidades con que cada uno de ellos quiso simular un flujo mezclado con sedimentos.

En el caso de Itakura y Kishi desarrollaron una función para describir la distribución de velocidades en el flujo, en la cual se involucran las características de la mezcla agua sedimento, y además se introducen otros coeficientes y variables que no son tenidos en cuenta en los métodos de distribución de velocidades en los cuales se basaron quienes aseguran que la constante κ decrece al aumentar la concentración de sedimentos; esos coeficientes y variables adicionales, tales como el coeficiente de Momin-Obuklov α_1 o la longitud característica de Momin-Obukov L, definida por la ec. 2.2.10.2, seguramente influyen en la función de distribución de velocidades en una forma tal que manteniendo constante κ, igual a 0.4, se describa adecuadamente la velocidad del flujo de agua mezclada con sedimento a cualquier distancia del fondo "y". Quienes aseguran que la constante universal de Von Karman decrece con la presencia de sedimentos en suspensión, utilizaron una función de distribución de velocidades desarrollada para flujo de agua clara, en la cual no se tuvo en cuenta las características de la mezcla agua sedimento y tampoco adicionaron un factor de corrección; por tanto, para que la predicción de dicha función concordará con la verdadera distribución de velocidades del flujo mezclado con sedimentos tuvieron que ajustarla, lo cual se hizo a través de una corrección en el valor de κ, encontrando que efectivamente κ decrecía al aumentar la concentración de sedimentos en el flujo.

Otro aspecto importante de resaltar en el método de Itakura y Kishi es el hecho de haber desarrollado una expresión para valuar la concentración de referencia Ca en función de las características del flujo y de los sedimentos del fondo del cauce, (ec. 2.2.10.39), lo cual simplifica en gran medida el cálculo de la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, dado que normalmente para poder aplicar cualquiera de los métodos desarrollados con este fin, se hace necesario primero medir directamente la concentración Ca y luego valuar la distribución de la concentración en el resto del flujo.

La expresión final encontrada por Itakura y Kishi para calcular la distribución de la concentración de sedimentos está dada por la ec. 2.2.10.10, la cual al transformarla a los parámetros adimensionales con los que se está haciendo la comparación en las figs. 3.2.1 a 3.2.7, quedó:

$$\frac{C}{Ca} = \left[\left(\frac{1 - E}{0.95}\right)^{1+\phi_*} \left(\frac{1}{20\ E}\right)\right]^{Z} \qquad (3.2.11.1)$$

Donde

$$\phi_* = \alpha_1 \frac{d}{L} \qquad (3.2.11.2)$$

Con los datos disponibles referentes a los experimentos que se están comparando no es posible valuar ϕ_* mediante la ec. 3.2.11.2, por lo que para tratar de hacer la comparación, en primer lugar, se revisó la influencia de este término en la ec. 3.2.11.1 para la predicción de C/Ca, lo cual se logró dando diferentes valores a ϕ_* para un mismo Z y luego comparando la diferencia en los resultados de la distribución de la concentración relativa. De acuerdo a esto se encontró que la influencia de ϕ_* es mínima; así por ejemplo, cuando el valor de este factor se cambiaba de 0.5 a 1, lo que corresponde a una variación de un 100%, los cambios en el resultado de C/Ca no llegaban a ser mayores del 2%, lo que permite hacer la comparación de este método con los datos experimentales, sin que la predicción dada por la ec. 3.2.11.1 cambie apreciablemente al no asignarle el valor que exactamente le correspondería a ϕ_*.

Después de probar con varios valores de ϕ_*, se encontró que el que mejor ajustaba los resultados de la ec. 3.2.11.1 frente a los datos experimentales, correspondía a ϕ_* igual a 0.5.

Al dibujar los resultados de este método en las figs. 3.2.1 a 3.2.7, para cada una de las condiciones en que fueron obtenidos los resultados experimentales que se están comparando, se observó:

1. La predicción de C/Ca hecha por este método se ajusta muy bien a los resultados experimentales, especialmente para valores de Z grandes, los cuales corresponden casi siempre a tamaños de sedimentos también grandes como se puede observar especialmente en las figs. 3.2.1, 3.2.2, 3.2.5b y 3.2.7, en donde prácticamente en toda la vertical del flujo hay un ajuste perfecto.

2. Cuando Z disminuye, lo cual casi siempre ocurre por disminución del tamaño de las partículas en suspensión, a pesar de que la predicción hecha por la ec. 3.2.11 sigue siendo buena, se observa que a partir aproximadamente de 0.5 d hacia la superficie, este método tiene tendencia a dar valores de C/Ca un poco menores que los reales, mientras que abajo de este nivel el ajuste sigue siendo casi perfecto, tal como se puede ver en las figs. 3.2.3 y 3.2.6.

3. En general se puede decir que es un buen método para predecir la distribución de la concentración de sedimentos de fondo en suspensión en flujos a superficie libre.

3.2.12 Teoría gravitacional de Velikanov.

Como se señaló en el subcapítulo 2.3, donde se hizo el desarrollo teórico de este método, Velikanov fundamenta su teoría en el balance de energía a el transporte de sedimentos, considerando por separado la fase fluida y la fase sólida.

Varios investigadores han estudiado la teoría gravitacional y en general han encontrado que sus fundamentos teóricos son buenos; sin embargo, han señalado algunas críticas concernientes tanto al desarrollo teórico como a la forma general de la expresión final propuesta por Velikanov para valuar la concentración de sedimentos a cualquier distancia del fondo del cauce "y". Dentro de estas críticas, las más importantes son las siguientes: Greshev sugiere que la simplificación hecha en la ec. 2.3.38, al considerar que $(1-C_v)$ y $(1 + \Delta C_v)$ son iguales a uno, no está justificada, ya que C_v es precisamente la variable no conocida, y aún es más grave la simplificación hecha en la ec. 2.3.47 al considerar C_v constante para poder efectuar la integral.

Makkaveev y Greshaev le objetan a la teoría gravitacional, el hecho de predecir para todos los casos una concentración igual a cero cuando "y" es igual a "d", lo cual no es cierto siempre, pues en el caso de alta concentración de sedimentos y tamaños pequeños de partículas, las observaciones de campo indican que la concentración de sedimentos en la superficie del flujo es diferente de cero.

Por otro lado, Levi y Karaushev consideran que la distribución de velocidades empleada (ec. 2.3.37) fué desarrollada por Nikuradze para flujo de agua clara, y que por tanto no es una función adecuada para predecir la distribución de velocidades en un flujo mezclado con sedimentos, lo cual concuerda con los comentarios ya hechos en otros métodos.

Finalmente Ivanov le critica a Velikanov el no haber considerado el efecto rotacional y de colisión entre partículas, lo cual según el, puede alterar considerablemente el cálculo de la distribución de la concentración de sedimentos.

Este método no fué posible compararlo como se está haciendo con los demás en las figs. 3.2.1 a 3.2.7, debido a que no se tiene la información necesaria para valuar las variables que quedan fuera de los parámetros adimensionales, tales como la rugosidad relativa del fondo o la densidad sumergida relativa Δ.

3.2.13 Teoría de dos capas, método de Shulyak Antsyferov.

Esta teoría resultó especialmente de las observaciones y conclusiones a las que llegaron Antsyferov y Debol'skiy al comparar el comportamiento de su método (ec. 2.2.9.11) junto con otros métodos también fundamentados en la teoría de difusión como el de Rouse y Hunt, frente a resultados experimentales, Véase en la figura 3.2.8. De acuerdo a sus observaciones, como se señaló en el subcapítulo 3.2.9, encontraron que la mayoría de los métodos basados en la teoría de difusión, en general predicen la distribución de la concentración de sedimentos de fondo en suspensión con buena aproximación en la parte superior del flujo, arriba de 0.1d ó 0.2d, mientras que abajo de este nivel, debido a que intervienen otros aspectos como el choque entre partículas adyacentes producidos por la mayor concentración de sedimentos en esta zona, los cuales no están contemplados en la teoría convensional de difusión, los resultados predichos por los métodos tradicionales son diferentes a lo que ocurre con los sedimentos en un cauce.

Para resolver este inconveniente, los autores de este método consideraron que para la parte superior del flujo, arriba de 0.1d ó 0.2d, la distribución de la concentración de sedimentos de fondo en suspensión podría seguir siendo representada por una función basada en la teoría de difusión, para lo cual seleccionaron la ec. 2.2.8.7 correspondiente al método de Antsyferov y Debol'skiy por considerar que es el que mejor se ajusta a la realidad, y para la zona inferior le adicionaron otra función, (ec. 2.4.1.4), encontrada empíricamente, la cual describe la concentración de sedimentos adicional generada en esta región del flujo y que no era predicha por la ec. 2.2.8.7.

Aunque los fundamentos teóricos de este método parecen tener bastante lógica, su aplicación a problemas prácticos es un poco difícil, debido principalmente a que requiere del conocimiento previo del valor de la concentración de sedimentos en dos puntos diferentes (Y_1 y Y_2), lo cual genera mayor trabajo y además puede inducir a error por la dificultad que existe para medir la concentración en dos puntos fijos.

La expresión final encontrada por Shulyak y Antsyferov, (ec. 2.4.1.10), no fué posible transformarla a los parámetros adimensionales con los que se está haciendo la comparación en las figs. 3.2.1 a 3.2.7, debido a que este caso aparecen dos concentraciones de referencia C_{y1} y C_{y2} medidas a diferentes distancias del fondo, con las cuales no se puede formar el parámetro adimensional C/Ca que se está utilizando en la comparación y además los parámetros ψ_1 y ψ_2, están en función de variables tales como la viscosidad dinamica o la velocidad del flujo cerca del fondo, de las cuales no se tienen los valores para los experimentos que se están comparando.

3.2.14 Teoría de dos capas, método de Antsyferov y Kosyan

Fué aplicado en 1980, y su objetivo principal era encontrar una expresión para calcular la distribución de la concentración de sedimentos de más fácil aplicación que la ec. 2.4.1.10, a partir de los fundamentos teóricos utilizados en el método de Shulyak y Antsyferov. La expresión final planteada en este método, (ec. 2.4.2.13), no fué posible integrarse analíticamente debido a su forma tan complicada, por lo que Antsyferov y Kosyan sugieren que se haga utilizando métodos numéricos, para lo cual existen técnicas como la de la regla trapezoidal o la de la regla rectangular.

Como se oobserva en la ec. 2.4.2.13, para aplicar este método solo es necesario conocer la concentración a una distancia "a" del fondo donde C vale Ca, lo cual ciertamente es una ventaja sobre el método de Shulyak y Antsyferov, donde se hace necesario conocer previamente la concentración C_{y1} y C_{y2} medidos a las distancias del fondo Y_1 y Y_2 respectivamente.

Este método tampoco fué posible comparar con datos experimentales, tal como se presentó en las figs. 3.2.1 a 3.2.7, debido a que para las condiciones en que se hizo cada experimento falta información de algunas variables que no estan contenidas en ninguno de los números adimensionales que se han utilizado en la comparación y que intervienen en la ec. 2.4.2.13, tales como la velocidad del flujo cerca del fondo ó la viscosidad dinámica.

A pesar de que no fué posible comparar el método para ver su comportamiento frente a los resultados experimentales, es de pensarse por sus fundamentos teóricos que sus predicciones de la distribución de la concentración de sedimentos, deben ajustarse en una forma bastante aceptable con la realidad.

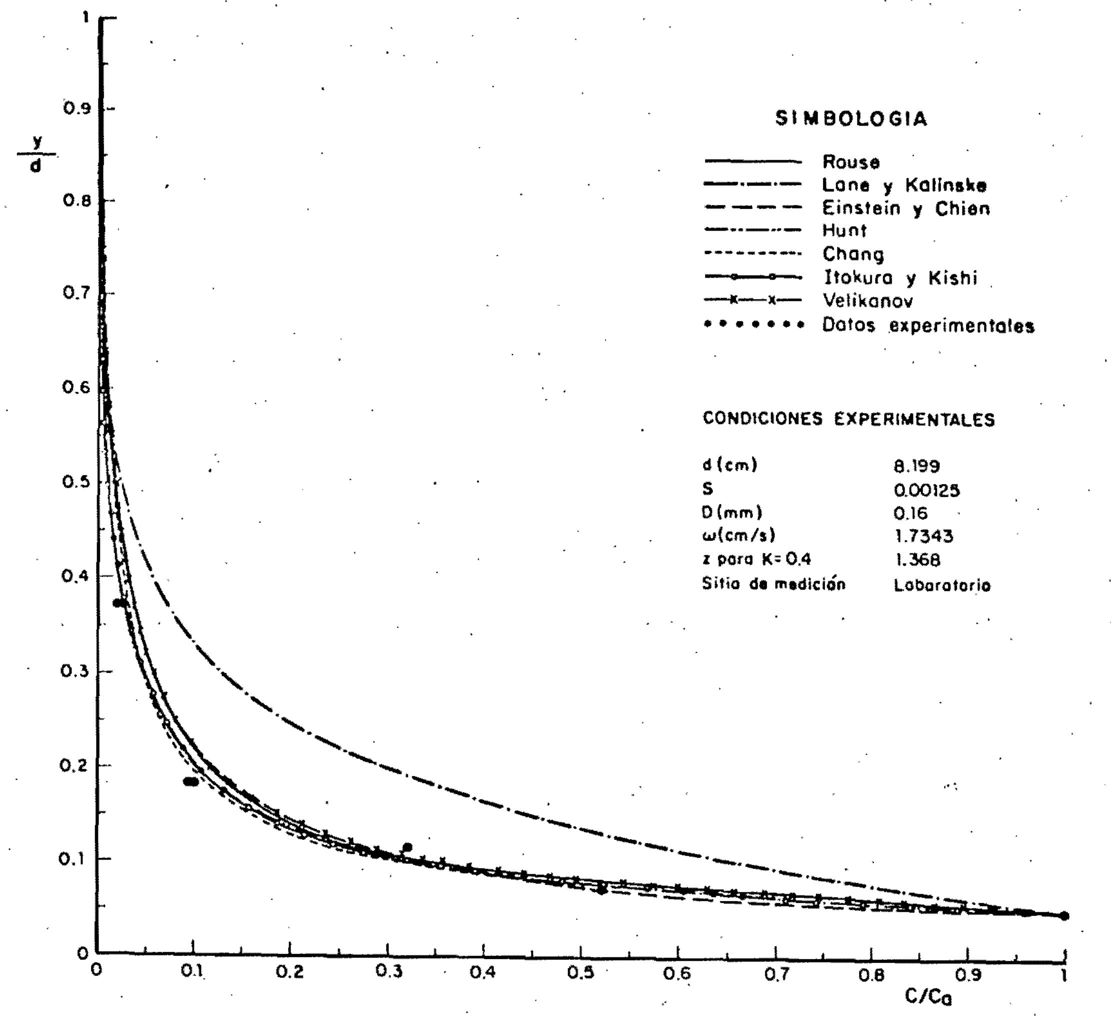

Fig 3.2.1 Distribución de concentraciones. Comparación de métodos para z = 1.368

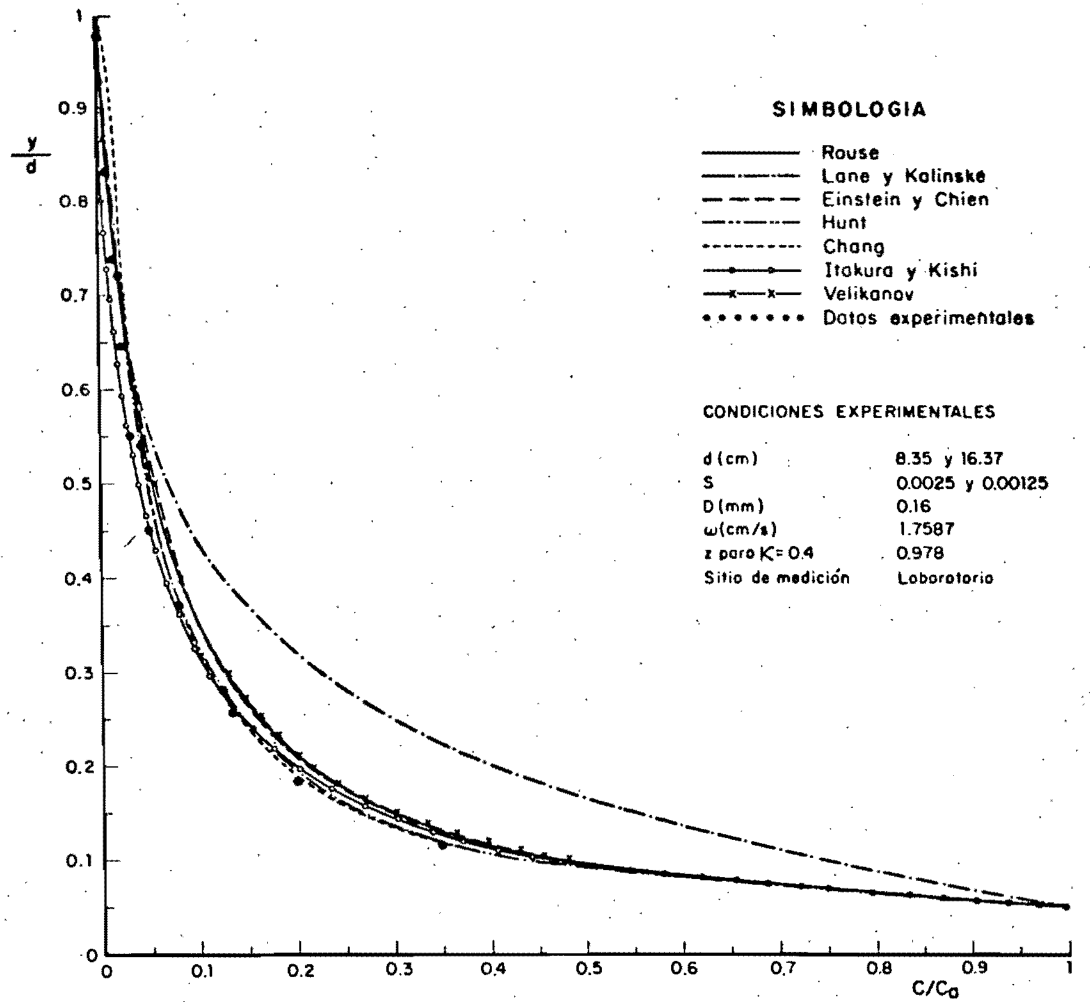

Fig 3.2.2 Distribución de concentraciones. Comparación de métodos para z = 0.978

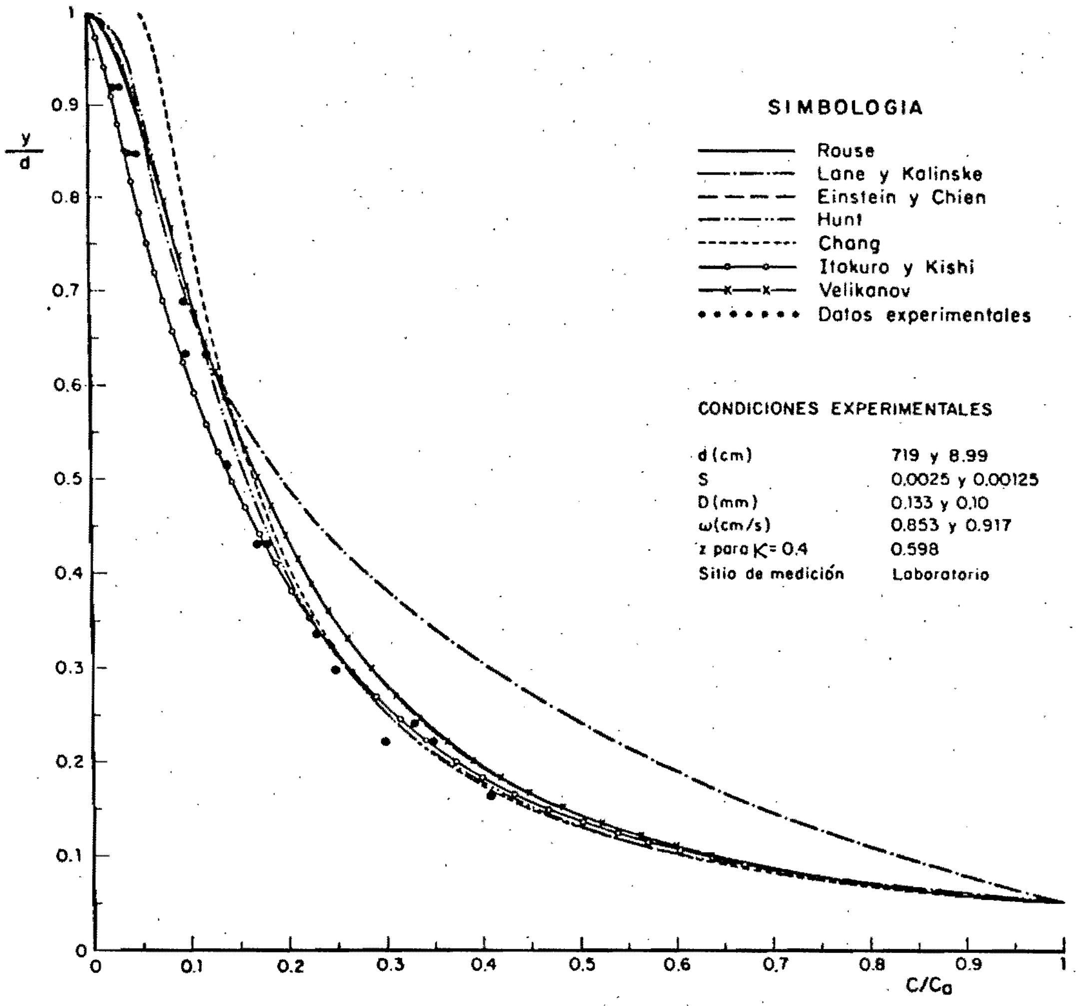

Fig 3.2.3 Distribución de concentraciones. Comparación de métodos para z = 0.598

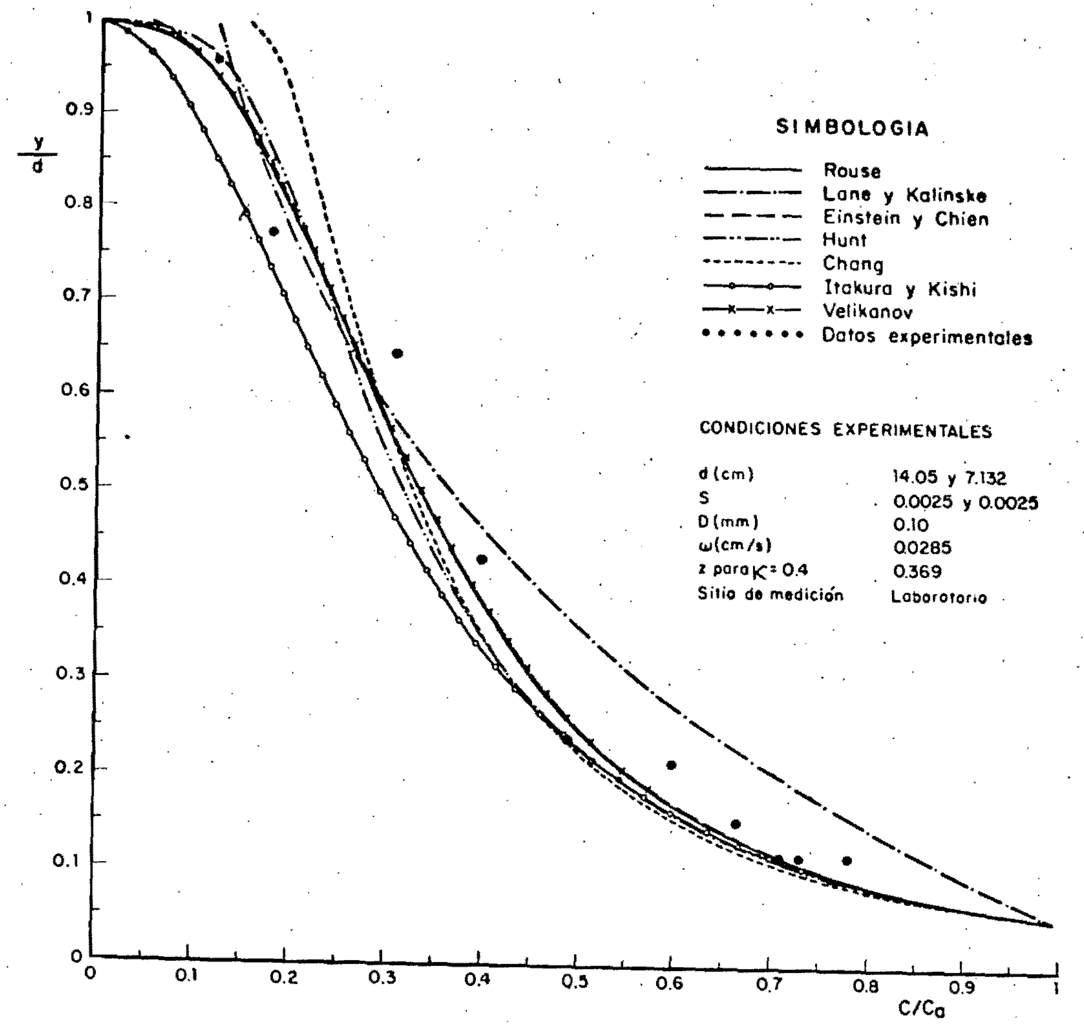

Fig 3.24 Distribución de concentraciones. Comparación de métodos para z = 0.369

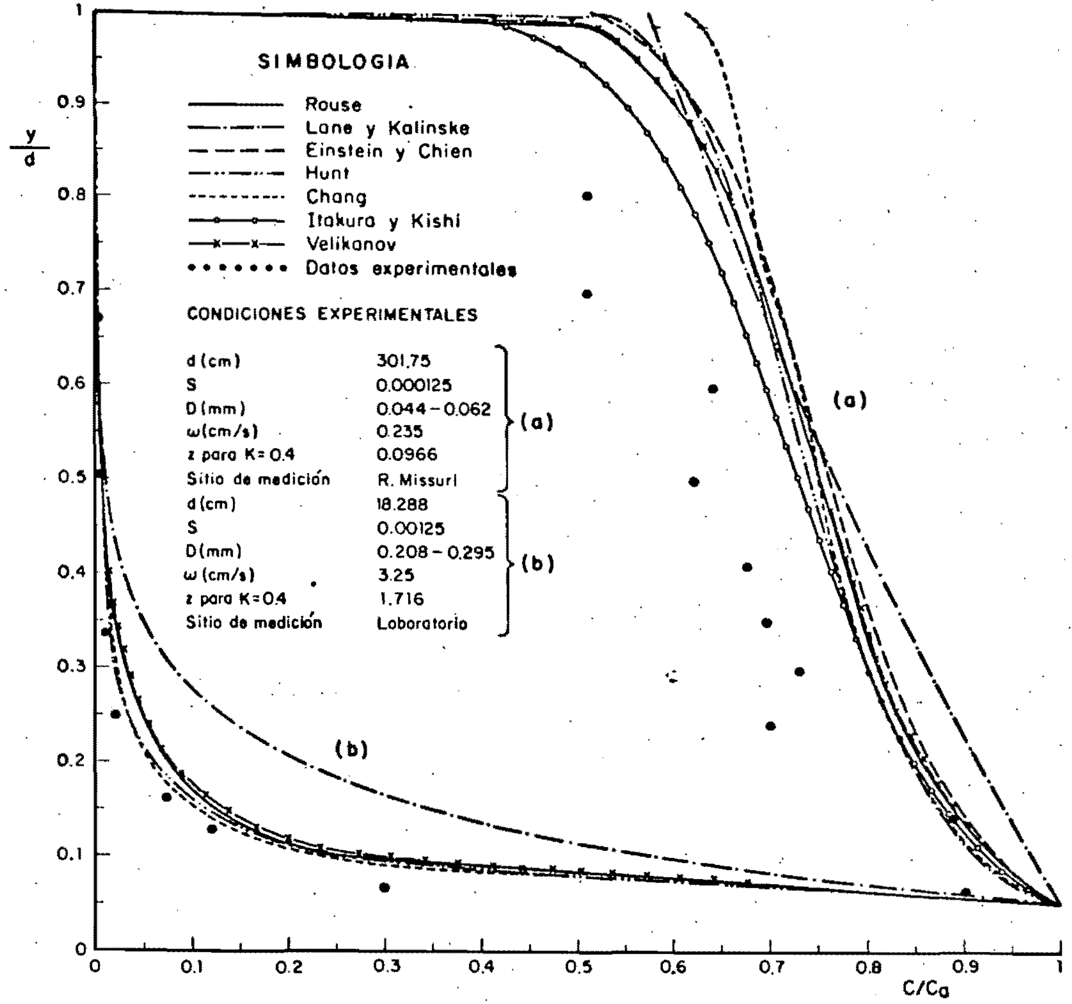

Fig 3.2.5 Distribución de concentraciones. Comparación de métodos para (a) z = 0.096 (b) z = 1.716

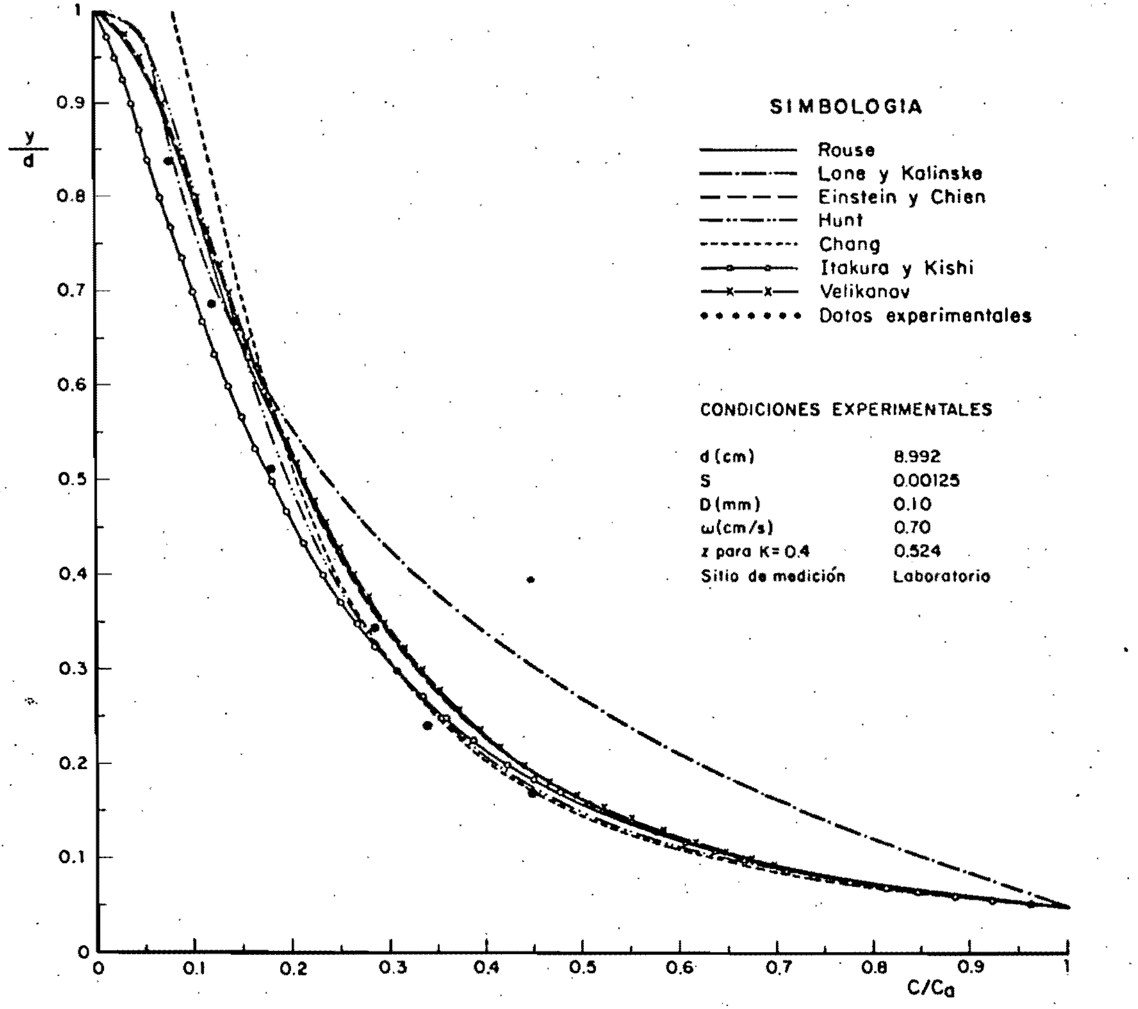

Fig 3.2.6 Distribución de concentraciones. Comparación de métodos para z = 0.524

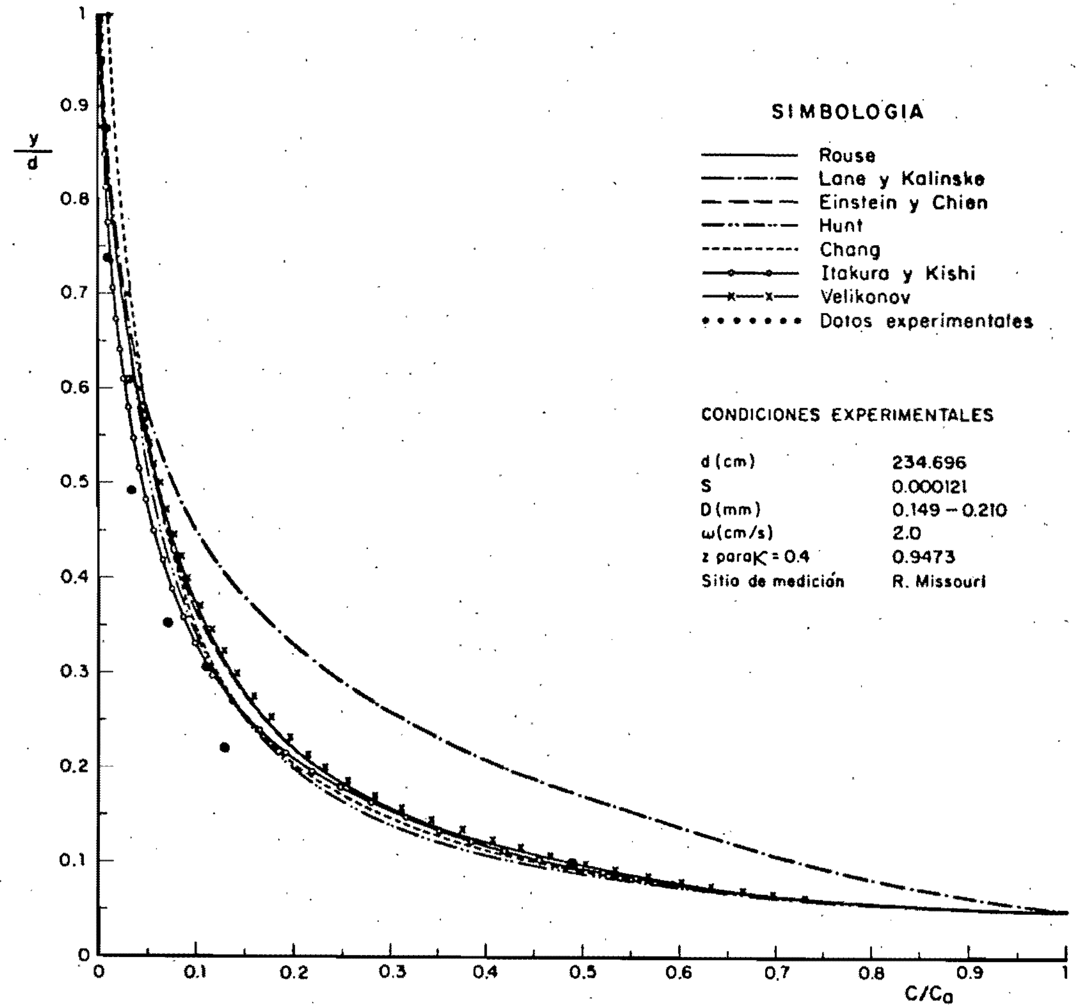

Fig 3.2.7 Distribución de concentraciones. Comparación de métodos para z = 0.9473

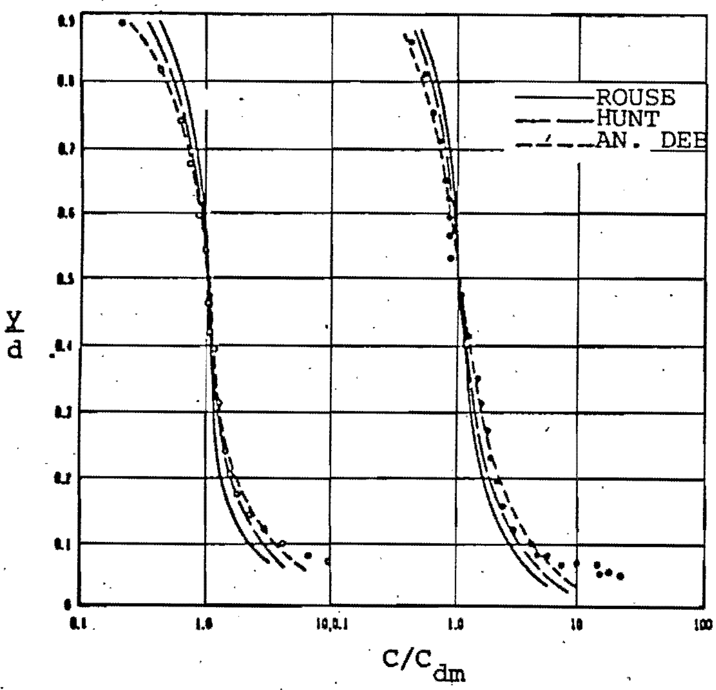

Fig. 3.2.8 COMPARACION DE LOS METODOS DE ROUSE, HUNT Y ANTSY FEROV Y DEBOL'SKIY, CON LOS DATOS EXPERIMENTALES DE TAGGART.

4. TRANSPORTE DE SEDIMENTOS DE FONDO EN SUSPENSION EN FLUJO A SUPERFICIE LIBRE

Como se puntualizó en el capítulo uno, el transporte de sedimentos en suspensión por unidad de ancho en un flujo bidimensional a superficie libre,está dado por la relación

$$g_{BS} = \int_0^d uC \, dy \tag{4.1}$$

donde g_{BS} representa el transporte de sedimentos del fondo en suspensión en peso por unidad de tiempo y ancho entre los niveles "y" igual a cero y "y" igual a "d", siendo "d" el tirante del flujo, "C" la concentración de sedimentos en peso a un nivel "y" y "u" la velocidad del flujo al mismo nivel.

Si la concentración de sedimentos está dada en volúmen, la descarga de sedimentos evaluada mediante la ec. (4.1) resulta rá en volumen por unidad de tiempo y ancho.

Existen algunos métodos para cuantificar el transporte de sedimentos en suspensión que sigue un procedimiento diferente al indicado por la ec. (4.1), lo cual se debe a que los fundamentos teóricos empleados no se basan en el principio de difusión, como se verá más adelante, o porque la expresión para evaluar g_{BS} es empírica.

La ec. (4.1) ha sido integrada por diferentes investigadores, utilizando una distribución de la velocidad del flujo casi siempre conocida y una distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en la mayoría de los casos desarrollada por el autor de cada método.

Quien primero presentó una expresión para calcular el transporte de sedimentos en suspensión fue Forchheimer en 1930, el cual se basó en la ecuación desarrollada por Schoklitsch para evaluar el transporte en la capa de fondo.

La relación presentada por Forchheimer es la siguiente:

$$g_{BS} = K_F \frac{\gamma^2}{\gamma_s - \gamma} \frac{US}{q}$$

donde "K_F" es una constante a ser evaluada, "γ" es el peso específico del agua, "γ_s" es el peso específico de los sedimentos, "U" es la velocidad media del flujo, "S" la pendiente hidráulica y "q" la descarga unitaria del agua. En reali dad esta aproximación no tuvo aceptación por la falta de fundamentos teóricos en su deducción y por su discrepancia con los resultados experimentales.

Entre los métodos más importantes que se han desarrollado para evaluar el transporte de sedimentos del fondo en suspensión y que se explican en este trabajo, están los siguientes:

- Método de Lane y Kalinske
- Método de Einstein
- Método de Velikanov
- Método de Bagnold
- Método de Brooks
- Método de Chang-Simons y Richardson
- Método de Toffaleti
- Método de Einstein y Abdel-Aal
- Método de Itakura y Kishi.

4.1 Método de Lane y Kalinske

Fue desarrollado en 1941, utilizando la distribución de velocidades encontrada por Prandtl-Von Karman y la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión desarrollada por él mismo, dada por la ec (2.2.1.7).

De acuerdo a la ec (4.1), el gasto de sedimentos del fondo en suspensión en peso por unidad de tiempo y ancho está expresado por

$$g_{BS} = \int_o^d C\ u\ dy \qquad (4.1.1)$$

La distribución de la concentración de sedimentos según Lane y Kalinske está dada por la ec (2.2.1.7) donde:

$$C = C_a \exp\left[-\frac{15\omega}{U_*}\left(\frac{y-a}{d}\right)\right] \qquad (4.1.2)$$

y según Prandtl-Von Karman, la distribución de velocidades de flujo tiene la siguiente expresión:

$$\frac{u}{U} = 1 + \left(\frac{U_*}{KU}\right)\left[1+\log\left(\frac{y}{d}\right)\right] \qquad (4.1.3)$$

Sustituyendo las ecs (4.1.2) y (4.1.3) en la ec (4.1.1) queda:

$$g_{BS} = \int_o^d C_a \exp\left[-\frac{15\omega}{U_*}\left(\frac{y-a}{d}\right)\right] U\{1+\left(\frac{U_*}{KU}\right)\left[1+\log\left(\frac{y}{d}\right)\right]\}dy \qquad (4.1.4)$$

si

$$E = \frac{y}{d} \qquad (4.1.5)$$

entonces

$$dy = d\ dE \qquad (4.1.6)$$

y la ec (4.1.4) queda

$$g_{BS} = C_a\ d\ U \int_o^1 \exp\left[-\frac{15\omega}{U_*}(E-a)\right]\left[1+\left(\frac{U_*}{KU}\right)(1+\log E)\right]dE \qquad (4.1.7)$$

como el producto "Ud" representa el gasto unitario del flujo "q" y extrayendo de la integral el término constante $e^{\frac{15\omega a}{U_*}}$, la ec (4.1.7) queda

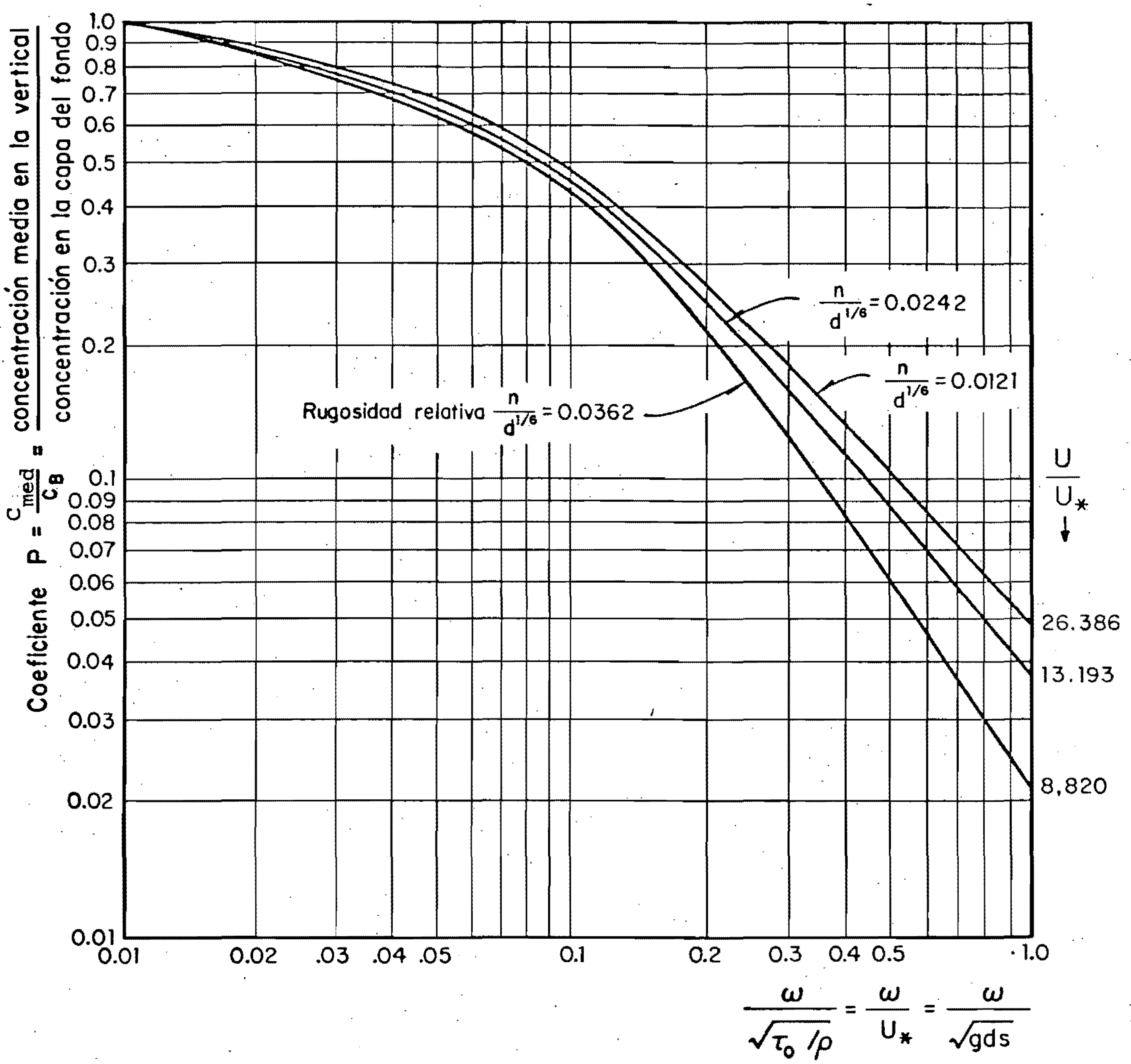

Fig 4.1.1 Valores del coeficiente P en función del parámetro ω / U_*, para distintos valores de rugosidad relativa $\frac{n}{d^{1/6}}$ (según Lane - Kalinske)

$$g_{BS} = qC_a \, e^{\frac{15\omega a}{U_*}} \int_0^1 e^{-\frac{15\omega E}{U_*}} \left(1+ \frac{U_*}{KU}\right)(1+\log E)\, dE \qquad (4.1.8)$$

ó

$$g_{BS} = qC_a \, e^{\frac{15\ a}{U_*}} \, P_1 \qquad (4.1.9)$$

Donde P_1 es el valor de la integral, el cual se ha encontrado que aproximadamente vale $1.70\sqrt{g}\ n/d^{1/6}$, siendo "n" el factor de fricción de Manning.Lane y Kalinske construyeron una gráfica para encontrar el valor de P_1, el cual está en función de los parámetros ω/U_* y $n/d^{1/6}$ (ver fig 4.1.4).

Este método se comparó con mediciones en el río Mississippi, mostrando buena concordancia. Su uso se recomienda para ríos anchos con material arenoso.

Si el material de la muestra de concentración medida "C_a" no es uniforme, ésta se puede dividir en fracciones y para cada una de ellas se aplica la ec (4.1.9), utilizando las características del diámetro medio de cada fracción, en cuyo caso, el transporte total de sedimento de fondo en suspensión es la suma de todos los g_{BSi} correspondientes a todas las fracciones granulométricas "i".

4.2 Método de Einstein

Fue presentado en 1950. Para integrar la ec (4.1) desarrolló una expresión para la distribución de la concentración de sedimentos que resultó ser idéntica a la de Rouse, ec (2.1.39), donde

$$C = Ca\left(\frac{d-y}{y}\ \frac{a}{d-a}\right)^{Z} \tag{4.2.1}$$

La distribución de velocidades del flujo que utiliza es la de Keulegan para pared hidráulicamente rugosa, modificándola al considerar que la velocidad al cortante "U_*" que aparece en su ecuación, debe cambiarse por la velocidad al cortante asociada al grano de las partículas "U_*'", quedando la expresión como

$$u = 5.75\ U_*'\ \log\left(30.2\ \frac{yx}{K_s}\right) \tag{4.2.2}$$

donde K_s es la altura de la rugosidad del fondo y x es un factor que se encuentra en la fig (4.2.1) en función de K_s/δ', siendo δ' el espesor de la subcapa laminar pero asociada a U_*' y vale

$$\delta' = \frac{11.64\nu}{U_*'} \tag{4.2.3}$$

donde ν es la viscosidad cinemática del flujo y U_*' está definida como $\sqrt{gR'S}$.

Para encontrar el valor de R', se procede de acuerdo al método desarrollado por Einstein para resistencia al flujo en cauces con arrastre, cuya secuencia es la siguiente:

1) Se calcula el radio hidráulico R
2) Se supone un valor de R' (radio hidráulico asociado a las partículas) menor que R
3) Se calcula $U_*' = \sqrt{gR'S}$
4) Se estima el valor de x, fig (4.2.1)

5) Se determina $U = 5.75U'_* \log(12.27 \frac{R'x}{D_{65}})$

6) Calcular $\psi' = \frac{\Delta D_{35}}{R'S}$

7) Se estima el valor del parámetro U/U''_* de la fig (4.2.2) y se obtiene el valor de U''_* correspondiente a la velocidad al constante asociada a las ondulaciones del cauce

8) Determinar $R'' = \frac{U''_*}{gS}$, corresponde al radio hidráulico asociado a las ondulaciones del fondo del cauce

9) $R = R'+R''$; si esta suma resulta diferente que R calculado en el paso 1, se repite el procedimiento hasta encontrar que R en el paso 9 sea igual a R del paso 1. Cuando esto se cumpla, entonces el valor de R' será el supuesto en el paso 2.

Sustituyendo las ecs (4.2.1) y (4.2.2) en la ec (4.1) queda

$$g_{BS} = \int_a^d Ca\left(\frac{d-y}{y}\ \frac{a}{d-a}\right)^Z 5.75U'_* \log\left(\frac{30.2yx}{K_s}\right)dy \qquad (4.2.4)$$

Introduciendo un cambio de variables tal que

$$A = \frac{a}{d} \qquad (4.2.5)$$

y

$$E = \frac{y}{d} \qquad (4.2.6)$$

de donde

$$dy = d \cdot dE \qquad (4.2.7)$$

Entonces la ec (4.2.4) se transforma en

$$g_{BS} = \int_A^1 Ca\left(\frac{A}{1-A}\right)^Z \left(\frac{1-E}{E}\right)^Z 5.75U'_* \log\left(\frac{30.2yx}{K_s/d}\right)dE \qquad (4.2.8)$$

Extrayendo las constantes fuera de la integral

$$g_{BS} = 5.75\ Ca\ U'_*\ d\left(\frac{A}{1-A}\right)^Z \int_A^1 \left(\frac{1-E}{E}\right)^Z \log\left(\frac{30.2yx}{K_s/d}\right)dE \qquad (4.2.9)$$

Desarrollando

$$g_{BS} = 5.75 \text{ Ca } U'_{*} \text{ d} (\frac{A}{1-A})^{Z} \left[\log (\frac{30.2dx}{K_S}) \int_A^1 (\frac{1-E}{E})^Z dE + \right.$$

$$\left. + 0.43429 \int_A^1 (\frac{1-E}{E})^Z \ln E \, dE \right] \qquad (4.2.10)$$

ó

$$g_{BS} = 11.6U'_{*} \text{ Ca a} \left[2.303 \log (\frac{30.2dx}{K_S}) I_1 + I_2 \right] \qquad (4.2.11)$$

donde

$$I_1 = 0.216 \frac{A^{Z-1}}{(1-A)^Z} \int_A^1 (\frac{1-E}{E})^Z dE \qquad (4.2.12)$$

y

$$I_2 = 0.216 \frac{A^{Z-1}}{(1-A)^Z} \int_A^1 (\frac{1-E}{E})^Z \ln E \, dE \qquad (4.2.13)$$

Einstein efectuó las integrales que aparecen en las ecs (4.2.12 y 4.2.13) para diferentes valores de A y Z, lo que le permitió construir dos gráficas adimensionales, una para I_1 y otra para I_2 (ver figs 4.2.3 y 4.2.4), las cuales están en función de A y Z.

La ec (4.2.11) permite cuantificar el transporte de sedimentos de fondo en suspensión desde una altura "a" hasta la superficie del flujo; por tanto, si se desea conocer el transporte de fondo en suspensión en toda la profundidad del cauce es necesario conocer la concentración "Ca" a la altura "a" del fondo donde comienza la suspensión de sedimentos. Einstein estimó que esta distancia es 2D, siendo "D" el diámetro representativo de las partículas.

4.2.1 Estimación de la concentración Ca a partir del conocimiento de la concentración en algún punto del flujo

Debido a que es muy difícil medir la concentración de sedimentos Ca exactamente en el nivel "y" igual a "a" igual a 2D, se puede hacer la medición un poco más arriba del fondo ("y" igual a "a_1") donde la concentración de sedimentos vale "Ca_1" y luego mediante la ec (4.2.1) se puede conocer la concentración al nivel "y" igual a "a" igual a 2D, esto es

$$C_{2D} = Ca_1 \left(\frac{d-2D}{2D}\,\frac{a_1}{d-a_1}\right)^{Z} \tag{4.2.1.1}$$

Dado que normalmente el tamaño de los sedimentos que viajan en suspensión no es uniforme, para obtener un resultado más exacto en el cálculo del transporte conviene dividir la curva granulométrica del material de fondo que viaja en suspensión en fracciones, en cuyo caso se puede proceder de la siguiente manera:

Con la muestra de la concentración de sedimentos tomada a la altura "y" igual a "a_1" se construye la curva granulométrica del material que viaja en suspensión, la cual se divide en fracciones; de esta manera es posible conocer la concentración de sedimentos a ese nivel para cada fracción granulométrica (Ca_{1i}) y luego mediante la ec (4.2.1) se puede determinar cuál es la concentración de sedimentos en suspensión de las partículas con diámetro medio Di al nivel "y" igual a "ai" igual a 2Di, donde Di es el diámetro medio de cada fracción granulométrica. Esto es:

$$Cai = C_{2Di} = Ca_{1i}\left(\frac{d-2Di}{2Di}\;\frac{a_1}{d-a_1}\right)^{z_i} \qquad (4.2.1.2)$$

con cada Cai calculado, se evalúa mediante la ec (4.2.11) el transporte de sedimentos de fondo en suspensión con diámetro medio Di que son transportadas por el flujo desde el nivel "y" igual a 2Di hasta la superficie (g_{BSi}), con ello, la ec (4.2.11) toma la forma

$$g_{BSi} = 11.6U'_{*}\; Cai\; 2Di\left[2.303\;\log\left(\frac{30.2dx}{K_s}\right)I_1+I_2\right] \qquad (4.2.1.3)$$

De esta manera el transporte total de sedimentos de fondo en suspensión en peso por unidad de tiempo y ancho (g_{BS}) será igual a la suma de todos los g_{BSi} correspondientes a las diferentes fracciones en que se haya dividido la curva granulométrica de los sedimentos que son transportados en suspensión.

4.2.2 Estimación de la concentración Ca a partir del conocimiento del transporte en la capa de fondo

También es posible evaluar el transporte de fondo en suspensión sin tener que medir la concentración "Ca" sino a partir del conocimiento del transporte en la capa de fondo "g_B".

De la teoría del transporte en la capa de fondo se sabe que el gasto de sedimentos transportados por unidad de ancho con un determinado diámetro Di es igual a $P_{Bi}\; g_{Bi}$, donde P_{Bi} es el porcentaje en peso de la fracción granulométrica del material del fondo con diámetro medio Di y g_{Bi} es el transporte de sedimentos en la capa de fondo por unidad de tiempo y ancho de partículas con diámetro medio Di. Si la velocidad media de la capa de fondo es U_B, entonces el peso de las partículas de un tamaño dado por unidad de área es $P_{Bi}g_{Bi}/U_B$. Si se acepta que el espesor de la capa de fondo es 2Di, el volúmen que ocupa esta capa por unidad de área es 2Di, por tanto, la concentración promedio en la capa del fondo de la fracción granulométrica "i" vale $P_{Bi}g_{Bi}/U_B$ 2Di, lo que significa considerar que la concentración en la capa de fondo de cada fracción granulométrica es constante en todo el espesor 2Di, y para corregir el error que se pueda cometer con esta suposición, se utiliza un factor de corrección A_5, quedando entonces que

$$Cai = C_{2Di} = \frac{A_5 P_{Bi} g_{Bi}}{2Di\ U_B} \qquad (4.2.2.1)$$

La velocidad U_B no se conoce pero se sabe que depende de U'_*, por tanto la ec (4.2.1.2) se puede expresar como

$$Cai = A_6 \frac{P_{Bi} g_{Bi}}{2Di\ U'_*} \qquad (4.2.2.2)$$

donde A_6 es un factor de corrección.

Einstein de acuerdo a sus experimentos encontró que A_6 es igual a 11.6, de donde

$$Cai = \frac{1}{11.6} \frac{P_{Bi} g_{Bi}}{2Di\ U'_*} \qquad (4.2.2.3)$$

Con esta ecuación se calcula entonces la concentración de sedimentos al nivel "y" igual a 2Di de cada fracción granulométrica en que se haya dividido la muestra del material del fon

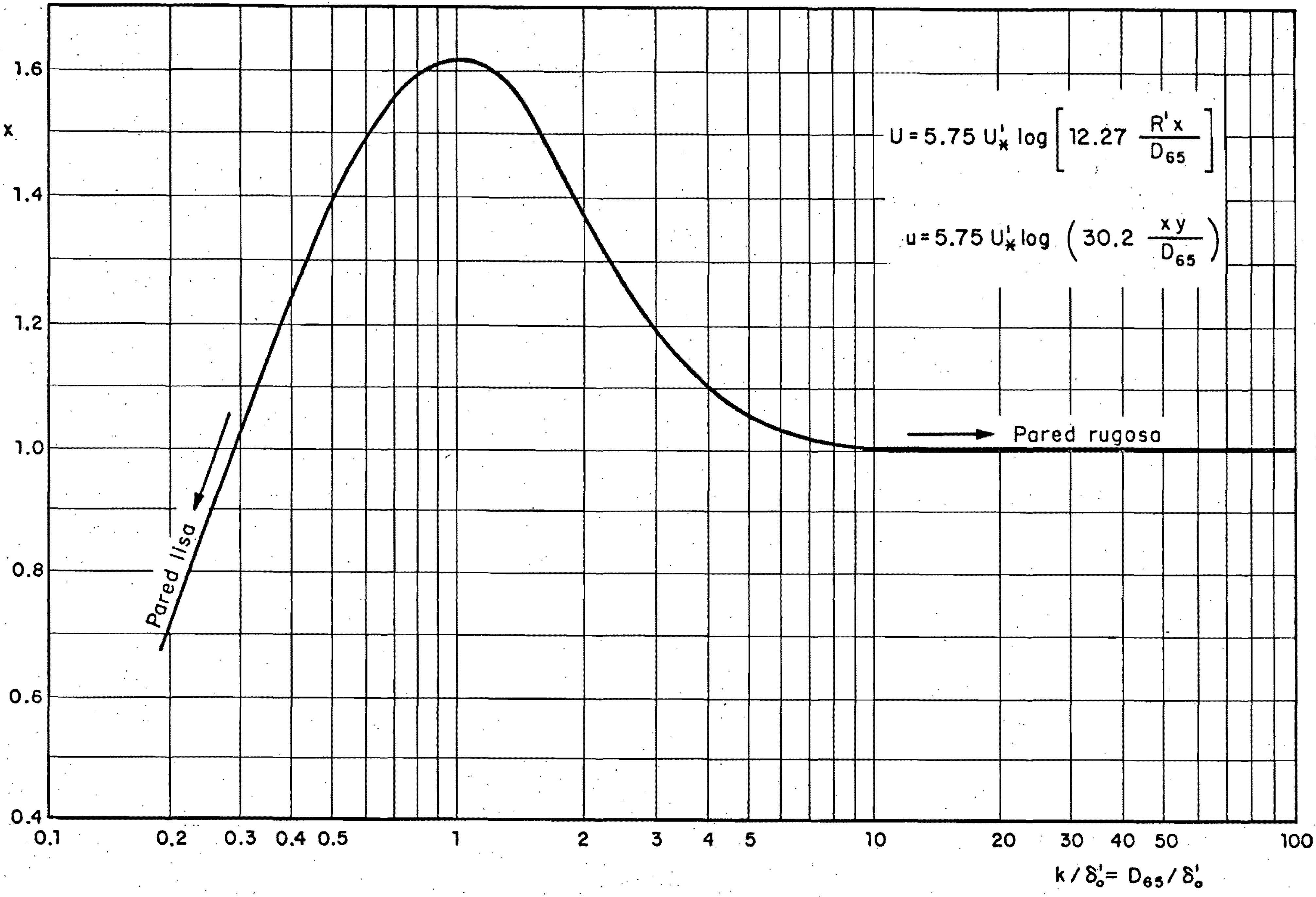

Fig 4.2.1 Corrección x en la fórmula de fricción logarítmica en función de k / δ'_o. Método de Einstein

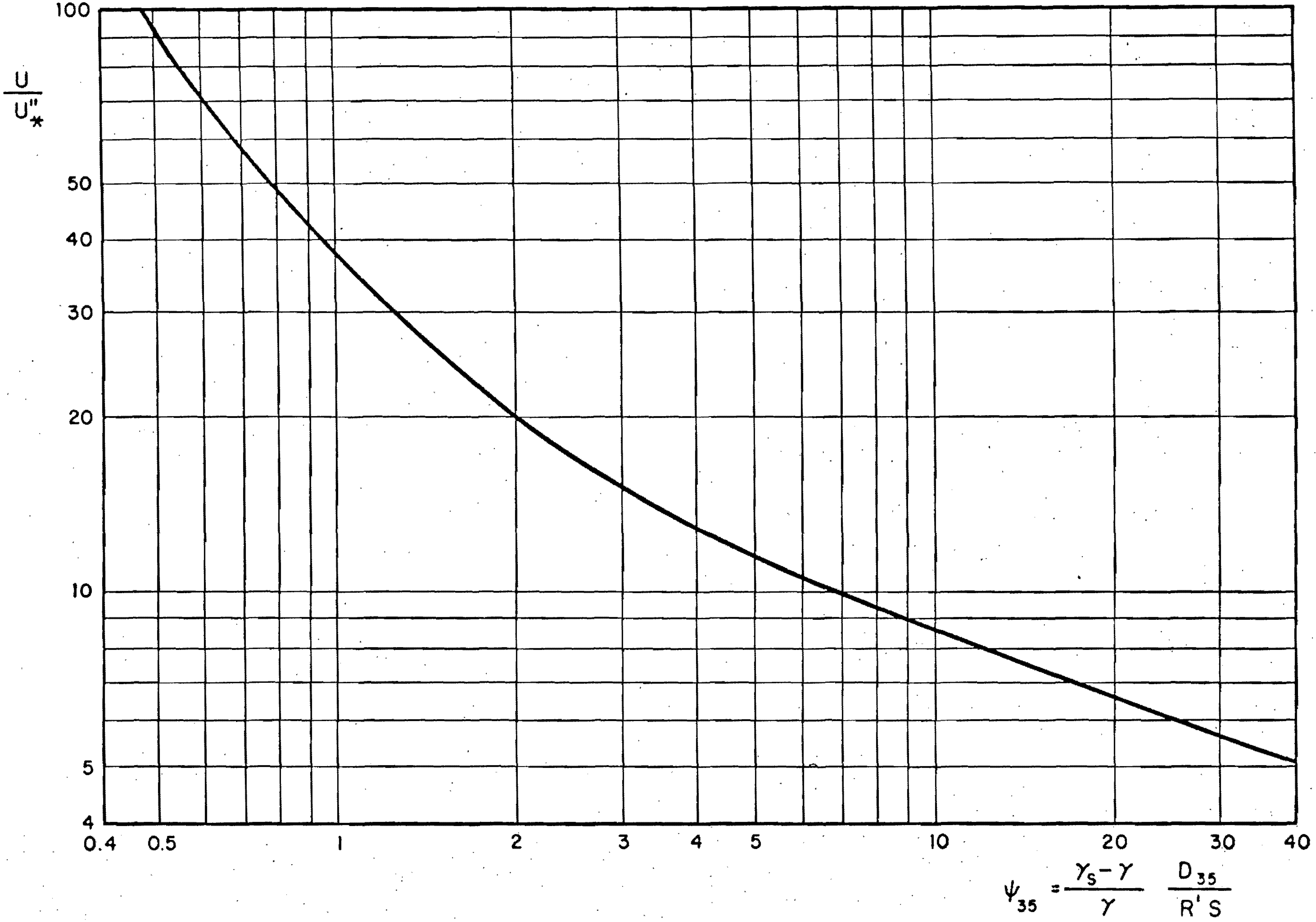

Fig.4.2.2 Velocidad U''_*, debida a las ondulaciones en el fondo. Método de Einstein

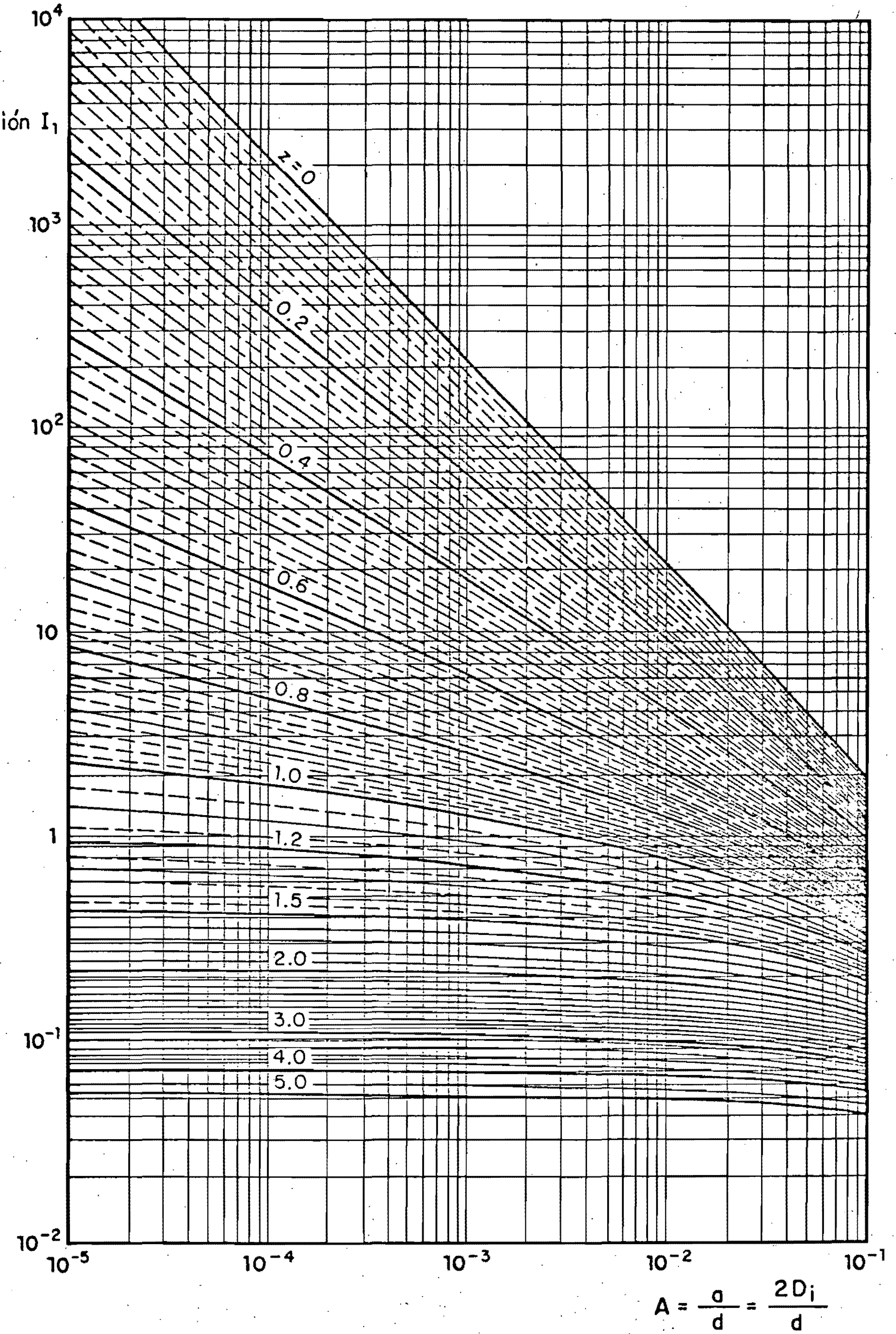

Fig 4.2.3 Función I_1 en términos del parámetro A para distintos valores de Z, según Einstein (1950)

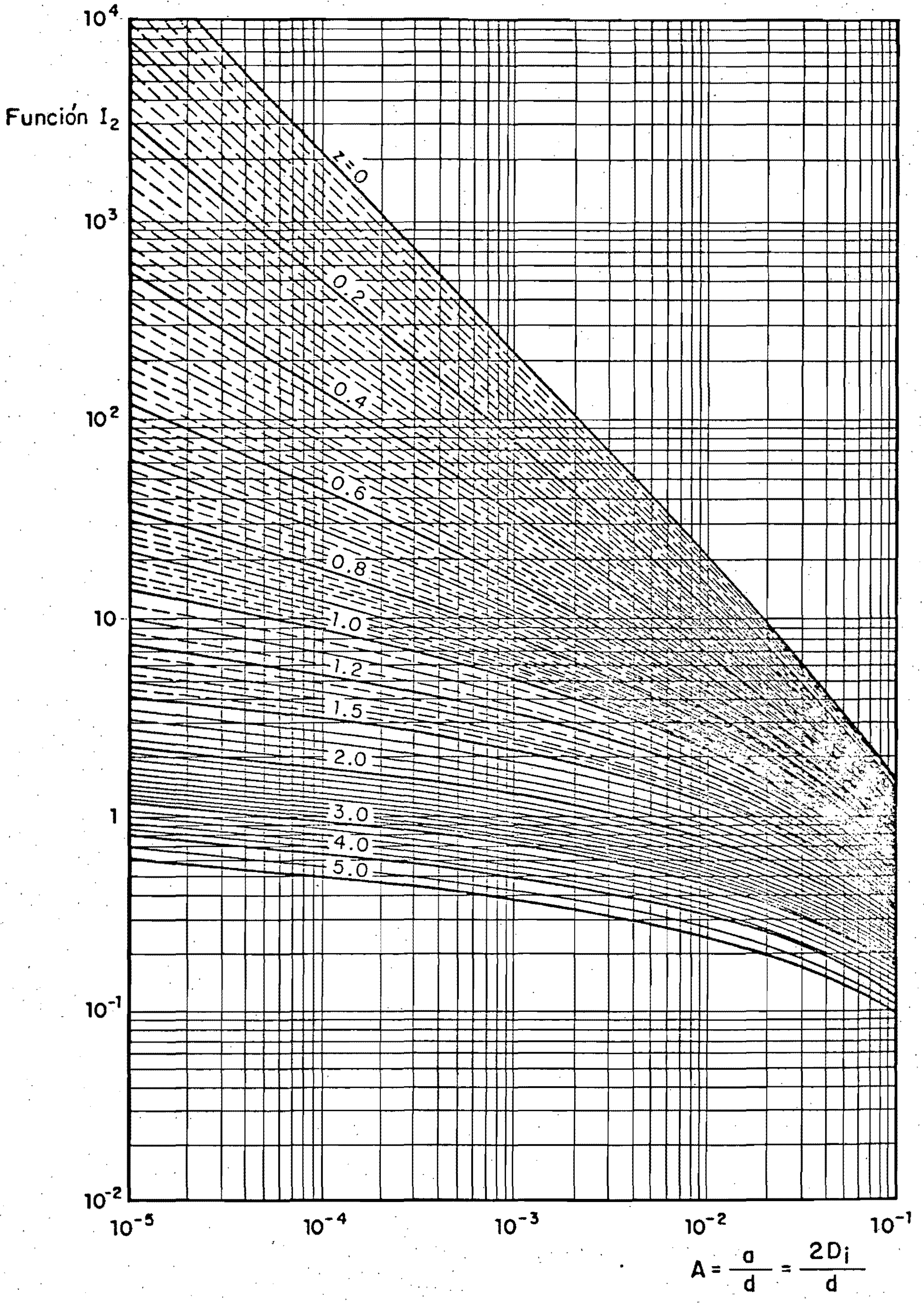

Fig4.2.4Función I_2 en términos del parámetro A para distintos valores de Z, según Einstein (1950)

do.

Sustituyendo Cai de la ec (4.2.2.3) en la ec (4.2.1.3) queda

$$g_{BSi} = P_{Bi} g_{Bi} \left[2.303 \log \left(\frac{30.2xd}{K_s} \right) I_1 + I_2 \right] \qquad (4.2.2.4)$$

ó

$$g_{BSi} = P_{Bi} g_{Bi} \left[P \; I_1 + I_2 \right] \qquad (4.2.2.5)$$

donde

$$P = 2.303 \log \left(\frac{30.2xd}{K_s} \right) \qquad (4.2.2.6)$$

El transporte total de sedimentos de fondo en suspensión en peso por unidad de tiempo y ancho (g_{BS}) será igual a la suma de todos los g_{BSi} correspondientes a las diferentes fracciones en que se haya dividido la curva granulométrica de la muestra del material del fondo.

4.3 METODO DE VELIKANOV (TEORIA GRAVITACIONAL)

Tal como se señaló en el subcapítulo 2.3, en el período comprendido entre 1944 y 1956 Velikanov desarrolló la teoría gravitacional, considerando en su desarrollo que el flujo es uniforme y bidimensional. Esta teoría se basa en el balance de energía en el transporte de sedimentos, considerando por separado la fase fluida y la fase sólida, en donde la fase fluida es el componente activo de dispersión, la cual desarrolla trabajo por levantamiento y transporte de partículas sólidas y la fase sólida es el componente pasivo, la cual es transportada en suspensión (haciendo decrecer la energía del fluido).

La primera ecuación fundamental desarrollada por Velikanov está dada por la ec (2.3.31), la cual se obtuvo al igualar el trabajo desarrollado por la fase fluida con el trabajo producido por las fuerzas de fricción en el flujo más el trabajo necesario para mantener los sólidos en suspensión. Dicha ecuación tiene la siguiente expresión

$$\rho g S(1-\bar{C}_v)\bar{u}=\rho\bar{u}\frac{d}{dy}\left[(1-\bar{C}_v)\overline{u'v'}\right]+(\rho_s-\rho)g\omega\bar{C}_v(1-\bar{C}_v) \qquad (4.3.1)$$

Al aplicar la ec (4.3.1) en ríos, se encontró que el término $(1-\bar{C}_v)$ vale aproximadamente uno y por tanto la ecuación queda

$$\rho g S\bar{u} = \rho\bar{u}\ \frac{d}{dy}(\overline{u'v'})+(\rho_s-\rho)g\omega\bar{C}_v \qquad (4.3.2)$$

Separando variables y ordenando

$$\rho g S\bar{u}dy - (\rho_s-\rho)g\omega\bar{C}_v dy = \rho\bar{u}\ d(\overline{u'v'}) \qquad (4.3.3)$$

Integrando los dos primeros términos de la ec (4.3.3) entre los límites "y" igual a cero y "y" igual a "d" resulta

$$\rho g S U d-(\rho_s-\rho)g\omega C_{vm}d = \int_o^d \rho\bar{u}\ d(\overline{u'v'}) \qquad (4.3.4)$$

En la cual C_{vm} representa la concentración volumétrica media de sedimentos en suspensión.

El último término de esta ecuación no fue integrado sino que se encontró que podría representarse por la relación $\rho P_3 U^3$, donde "P_3" es un coeficiente a ser determinado experimentalmente, así, la ec (4.3.3) queda

$$\rho gSUd - (\rho_s-\rho)g\omega C_{vm}d = \rho P_3U^3 \qquad (4.3.5)$$

multiplicando por "U" resulta

$$\rho gSU^2d-(\rho_s-\rho)g\omega C_{vm}Ud = \rho P_3U^4 \qquad (4.3.6)$$

Por otro lado

$$q_{BS} = C_{vm}\ U\ d \qquad (4.3.7)$$

Donde q_{BS} es el transporte de sedimentos de fondo en suspensión en volumen por unidad de tiempo y ancho; de esta manera la ec (4.3.6) queda

$$\rho gSU^2d - (\rho_s-\rho)g\omega q_{BS} = \rho P_3U^4 \qquad (4.3.8)$$

Despejando q_{BS} y recordando que ρgSd es igual a τ_o, resulta

$$q_{BS} = \frac{1}{(\rho_s-\rho)g}\frac{\tau_oU^2}{\omega} - \frac{\rho}{(\rho_s-\rho)}\frac{P_3U^4}{g\omega} \qquad (4.3.9)$$

A pesar de la simplicidad para aplicar este método, Velikanov ha sido severamente atacado especialmente por considerar en su desarrollo la fase líquida y la fase sólida en forma separada.

4.4 METODO DE BROOKS

En 1963 Brooks propuso su método para determinar el transporte de sedimentos de fondo en suspensión, en función del conocimiento de la concentración al nivel "y" igual a d/2.

Para su desarrollo utilizó una distribución de velocidades logarítmica, la cual es la misma desarrollada por Prandtl-Von Karman pero presentada en forma diferente. Esta distribución es válida para escurrimiento turbulento, cualquiera que sea la condición hidráulica de la pared, y está dada por la relación

$$u = U + \frac{U_*}{\kappa}\left(1 + \ln\frac{y}{d}\right) \qquad (4.4.1)$$

La distribución de la concentración de sedimentos que utilizó Brooks es prácticamente la misma que desarrolló Rouse (ec 2.1.39), con la diferencia de que en este caso Ca deberá conocerse a d/2 y por tanto "a" vale ahora d/2, de tal forma que dicha ecuación se transforma en

$$C = C_{dm}\left(\frac{d-y}{y}\right)^{Z} \qquad (4.4.2)$$

donde C_{dm} es la concentración correspondiente al nivel "y" igual a d/2, la cual puede valuarse por medición directa a dicha distancia del fondo, o bien a partir del conocimiento de la concentración de sedimentos a cualquier distancia del fondo y luego, mediante una fórmula de distribución de concentraciones (ejemplo: la de Rouse), se valua la concentración a d/2.Sustituyendo en la ec (4.1) a "u" por la ec (4.4.1) y a "C" por la ec (4.4.2) resulta

$$g_{BS} = \int_a^d C_{dm} \left(\frac{d-y}{y}\right)^Z \left[U + \frac{U_*}{\kappa} \left(1 + \ln \frac{y}{d}\right) \right] dy \qquad (4.4.3)$$

llamando $A = a/d$ (4.4.4)

y, $E = y/d$ (4.4.5)

de donde

$$dy = d\, dE \qquad (4.4.6)$$

Entonces la ec (4.4.3) se transforma en

$$g_{BS} = \int_A^1 C_{dm} d \left(\frac{1-E}{E}\right)^Z \left[U + \frac{U_*}{\kappa} (1 + \ln E) \right] dE \qquad (4.4.7)$$

Extrayendo los términos constantes de la integral resulta

$$g_{BS} = Ud\, C_{dm} \int_A^1 \left(\frac{1-E}{E}\right)^Z \left[1 + \frac{U_*}{\kappa U} (1 + \ln E) \right] dE \qquad (4.4.8)$$

Desarrollando

$$g_{BS} = q\, C_{dm} \left[\int_A^1 \left(\frac{1-E}{E}\right)^Z dE + \frac{U_*}{\kappa U} \int_A^1 \left(\frac{1-E}{E}\right)^Z (1+\ln E)\, dE \right] \qquad (4.4.9)$$

donde q es igual a Ud

Brooks considera que el transporte de fondo en suspensión se realiza a partir del nivel donde "u" es igual a cero hacia la superficie. Igualando la ec (4.4.1) a cero resulta

$$0 = U + \frac{U_*}{\kappa}\left[1 + \ln\left(\frac{a}{d}\right)\right] \qquad (4.4.10)$$

de donde

$$a = d\, e^{-\left(\frac{\kappa U}{U_*} + 1\right)} \qquad (4.4.11)$$

por tanto

$$A = a/d = e^{-\left(\frac{\kappa U}{U_*} + 1\right)} \qquad (4.4.12)$$

de tal forma que la ec (4.4.9) se transforma en

$$\frac{g_{BS}}{qC_{dm}} = \int_{e^{-\left(\frac{\kappa U}{U_*}+1\right)}}^{1} \left(\frac{1-E}{E}\right)^{Z} dE + \frac{U_*}{\kappa U}\int_{e^{-\left(\frac{\kappa U}{U_*}+1\right)}}^{1} \left(\frac{1-E}{E}\right)^{Z}(1+\ln E)\,dE \qquad (4.4.13)$$

Si se efectuan las integrales y se reemplazan los límites, lo que resulta es una función de Z y de $\kappa U/U_*$, así:

$$g_{BS}/qC_{dm} = f\left(Z, \frac{\kappa U}{U_*}\right) \qquad (4.4.14)$$

Brooks dibujó esta relación, la cual se muestra en la fig (4.4.1).

Lo hasta aquí mencionado es válido para un material uniforme, pero dado que normalmente el material que viaja en suspensión no es uniforme, para aplicar el método se tendrá que dividir la curva granulométrica en varias fracciones, cada una con un diámetro medio representativo Di, y con un porcentaje en peso respecto al total.

De la aplicación de la ec (4.4.14) se obtendrá un g_{BSi} correspondiente a cada fracción granulométrica, y la suma de todos dará el total del material del fondo transportado en suspensión.

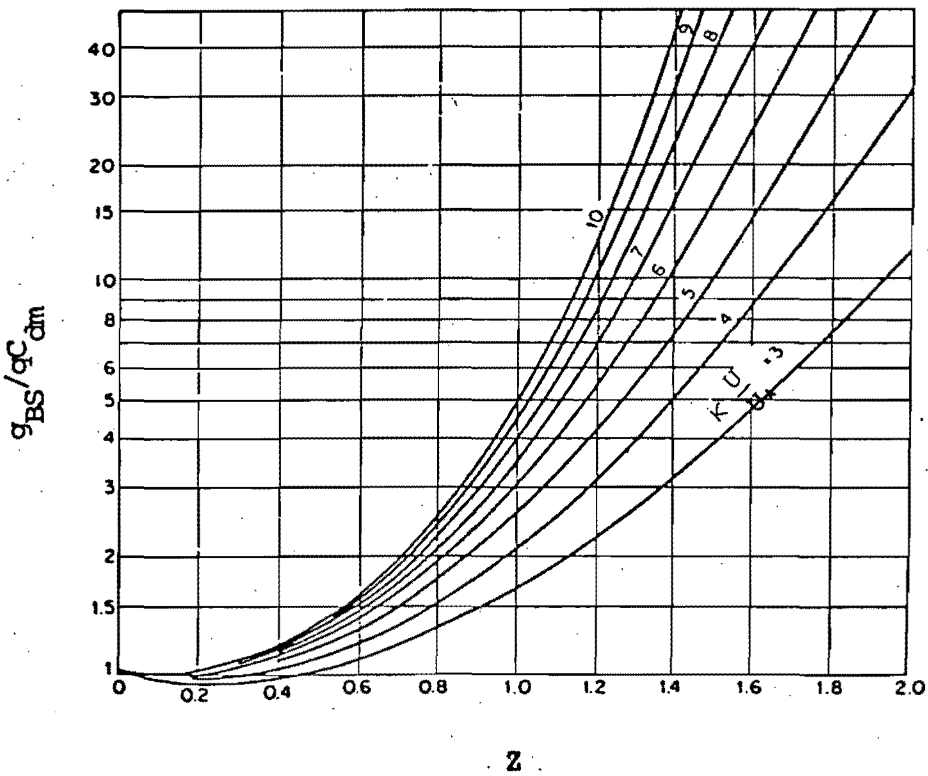

Fig. 4.4.1 FUNCION $g_{BS}/q\ C_{dm}$ EN TERMINOS DE $\kappa\ \frac{U}{U_*}$ Y Z (SEGUN BROOKS 1963)

4.5 METODO DE BAGNOLD

Fué publicado en 1966; en este método se establece una relación entre el trabajo o energía producida por la corriente y la cantidad de sedimentos transportados por el flujo.

El peso sumergido de los sedimentos que viaja en suspensión por unidad de área del fondo (W'_s) se puede expresar como:

$$W'_s = M'_s \, g \tag{4.5.1}$$

Donde "M'_s" es la masa sumergida de los sólidos que viajan en suspensión por unidad de área del fondo

$$M'_s = (\rho_s - \rho) V_s \tag{4.5.2}$$

y "V_s" es el volumen de los sólidos en suspensión por unidad de área del fondo.

El gasto de sedimentos en suspensión transportados por el flujo,en peso, por unidad de tiempo y ancho es igual a

$$g_{BS} = W'_s \, U_s = M'_s \, gU_s \tag{4.5.3}$$

En la cual "U_s" es la velocidad media con que viajan los sedimentos en suspensión.

Como se observa, la ec (4.5.3) tiene las características y las dimensiones de una relación de trabajo, puesto que se trata del producto de un peso por unidad del área multiplicado por una velocidad; pero tal como está planteada no es estrictamente una relación de trabajo ya que la acción del peso no actúa en la misma dirección que el sentido que lleva la velocidad, por tanto, para convertirla en una relación de trabajo dicha ecuación se debe multiplicar por un factor de conversión A_s definido como

$$A_s = \frac{\omega}{U_s} \qquad (4.5.4)$$

Por otro lado, la energía disponible en el flujo o generada por la corriente, por unidad de ancho del cauce, es igual al producto del esfuerzo cortante por la velocidad media del flujo, esto es

$$\Omega_* = \rho gdSU = \tau_o U \qquad (4.5.5)$$

donde Ω_* es la energía disponible o suministrada por una columna de fluido sobre un área unitaria del fondo.

Si e_b representa el factor de eficiencia de Ω_* en el transporte de sedimentos en la capa de fondo, entonces la energía disponible para el transporte de sedimentos de fondo en suspensión será

$$\Omega_{*s} = \tau_o U(1-e_b) \qquad (4.5.6)$$

Si "e_s" representa la eficiencia de la energía disponible para el transporte de sedimentos de fondo en suspensión Ω_{*s}, entonces se puede establecer que g_{BS} expresado por la ec (4.5.3) multiplicado por A_s es igual a Ω_{*s} dado por la ec (4. .6) multiplicado por e_s, esto es

$$A_s\, g_{BS} = \frac{\omega}{U_s}\, g_{BS} = \tau_o U(1-e_b)e_s \qquad (4.5.7)$$

ordenando

$$g_{BS} = (1-e_b)e_s\tau_o \frac{U\, U_s}{\omega} \qquad (4.5.8)$$

A partir de mediciones, tanto en canales de laboratorio como en ríos, Bagnold encontró que $(1-e_b)e_s$ era igual a 0.01 y que para este valor se puede considerar que son iguales la velocidad media del flujo "U" y la velocidad media de los sedimentos en suspensión U_s, por tanto, la ec (4.5.8) queda

$$g_{BS} = 0.01\, \tau_o \frac{U^2}{\bar{\omega}} \qquad (4.5.9)$$

donde $\bar{\omega}$ es la velocidad de caída media de todos los tamaños que viaja en suspensión, la cual se calcula como

$$\bar{\omega} = \Sigma P_i \omega_i \qquad (4.5.10)$$

donde "P_i" es la fracción en peso de los sedimentos en suspensión con velocidad de caída ω_i. Para aplicar el método se puede trabajar con facilidad con la distribución granulométrica del material de fondo, aunque si se dispone de una muestra del material en suspensión, se deberá trabajar con ella.

Este método fue probado con resultados experimentales obtenidos en canales de laboratorio suministrados por Gilbert, los cuales fueron efectuados para un amplio rango de tamaños de arena, así como con los experimentos de Simons-Richardson y Albertson, y Laursen, para los cuales los resultados teóricos de este método se ajustan con la mayor parte de los resultados experimentales.

También fue comparado el método con mediciones en los ríos Colorado, Elkhorn, Grande y otros, en los que también en la mayoría de los casos se observó buena concordancia entre la teoría y la práctica.

4.6 METODO DE CHANG, SIMONS Y RICHARDSON

Este método fue publicado en 1967, en el cual, además de los autores que aquí se mencionan, colaboraron la U.S. Geodogical Survey y los miembros de la facultad del departamento de ingeniería civil de la universidad de Colorado.

En el desarrollo del método utilizaron un canal de 2.44 m de ancho, 45.72 m de largo y 0.61 m de produndidad, con pendiente variable entre 0 y 1.5%, el cual podía descargar un gasto líquido entre 0 y 0.62 m^3/s. En los experimentos se utilizaron partículas con diámetro medio entre 0.19 mm y 0.93 mm.

En este método, a diferencia de otros, para obtener una buena evaluación del transporte de sedimentos de fondo en suspensión, no es necesario dividir en fracciones la curva granulométrica del material que viaja en suspensión, sino que se trabaja con el diámetro medio de toda la muestra, lo que simplifica el cálculo.

La distribución de la concentración de sedimentos en suspensión utilizados por estos investigadores es la desarrollada en el subcapítulo 2.2.5,ec (2.2.5.17) donde

$$\frac{C}{Ca} = A_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{1-E}}\right)^{Z_2} \qquad (4.6.1)$$

siendo

$$A_2 = \left[(1-\sqrt{1-E_a}\ )/\sqrt{E_a}\right]^{Z_2} \tag{4.6.2}$$

y

$$Z_2 = \frac{2\omega}{\beta\kappa U_*} \tag{4.6.3}$$

En la cual "β" es igual a 1.5 y la constante universal de Von Karman κ para este método se encuentra utilizando la fig 2.2. 5.1. Además

$$E = \frac{y}{d} \tag{4.6.4}$$

y

$$E_a = \frac{a}{d} \tag{4.6.5}$$

De acuerdo a Chang, Simons y Richardson, el gradiente de velocidades del flujo está dado por la ec (2.2.5.7), donde

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{\kappa y}\sqrt{\frac{d-y}{d}} \tag{4.6.6}$$

Si se hace el cambio de variable de "y" por "E" de acuerdo a la ec (4.6.4), la ec (4.6.5) queda

$$\frac{du}{dE} = \frac{U_*}{\kappa E}\sqrt{1-E} \tag{4.6.7}$$

Para obtener la distribución de velocidades del flujo, se integra la ec (4.6.7), para lo cual se considera la siguiente condición de frontera: si "E" es igual a uno, entonces "u" es igual a $u_{máx}$, donde $u_{máx}$ es la velocidad máxima del flujo. Al integrar, teniendo en cuenta la condición de frontera indicada, resulta

$$\frac{u_{máx}-u}{2U_*/\kappa} = \ln\left(\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}}\right)-\sqrt{1-E} \tag{4.6.8}$$

como

$$U = \int_0^1 u\, dE \qquad (4.6.9)$$

al sustituir "u" de la ec (4.6.8) y efectuar la integral se obtiene que

$$U = u_{máx} - \frac{2}{3}\frac{U_*}{\kappa} \qquad (4.6.10)$$

de donde

$$u_{máx} = U + \frac{2}{3}\frac{U_*}{\kappa} \qquad (4.6.11)$$

Sustituyendo $u_{máx}$ en la ec (4.6.8) resulta

$$\frac{U-u}{2U_*/\kappa} = \ln\left(\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}}\right) - \frac{1}{3} \qquad (4.6.12)$$

El transporte de fondo en suspensión en peso por unidad de ancho entre un punto "a" arriba del fondo del cauce y la superficie del mismo, está dado por la relación

$$g_{BS} = \int_a^d uC dy = d\int_{E_a}^1 CudE \qquad (4.6.13)$$

Sustituyendo "C" dado por la ec (4.6.1) y "u" dada por la ec (4.6.12) en la ec (4.6.13) se tiene

$$g_{BS} = \int_{E_a}^1 dA_2 Ca\left(\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}}\right)^{Z_2}\left\{U - \frac{2U_*}{\kappa}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}}\right) - \frac{1}{3}\right]\right\}dE \qquad (4.6.14)$$

Extrayendo los términos constantes de la integral resulta

$$g_{BS} = dA_2 Ca\int_{E_a}^1 \left(\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}}\right)^{Z_2}\left\{U - \frac{2U_*}{\kappa}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}}\right) - \frac{1}{3}\right]\right\}dE \qquad (4.6.15)$$

ó

$$g_{BS} = dCa(UI_3 - \frac{2U_*}{\kappa} I_4) \quad (4.6.16)$$

donde

$$I_3 = A_2 \int_{E_a}^{1} (\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}})\, dE \quad (4.6.17)$$

y

$$I_4 = A_2 \int_{E_a}^{1} (\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}})^{Z_2} \left[\ln(\frac{\sqrt{E}}{1-\sqrt{1-E}}) - \sqrt{1-E} - \frac{1}{3}\right] dE \quad (4.6.18)$$

I_3 e I_4 fueron calculadas numéricamente para diferentes valores de Ea y de Z_2, y sus resultados aparecen graficados en las figs 4.6.1 y 4.6.2 respectivamente.

Como se mencionó en el subcapítulo 2.2.5, según Chang-Simons y Richardson la distancia vertical arriba del fondo "a" a la cual se estima que se inicia el transporte de fondo en suspensión debe evaluarse con la ec (2.2.5.20), expresada por

$$a = j\frac{\tau_o - \tau_c}{(1-\lambda)(\gamma_s - \gamma)\tan\phi} \quad (4.6.18)$$

donde "j" es una constante con un valor de 10; λ es la porosidad del material del fondo; ϕ es el ángulo de reposo del material del fondo sumergido; τ_o es el esfuerzo cortante en el fondo del cauce y τ_c es el esfuerzo cortante crítico, el cual debe valuarse mediante la fig 2.2.5.2.

Como se dijo antes, la ec (4.6.16) valúa el transporte de sedimentos de fondo en suspensión por unidad de ancho, desde una altura "a" arriba del fondo hasta la superficie. Si C es conocida a la altura "a" dada por la ec (4.6.18), donde "C" vale "Ca", entonces el transporte calculado con la ec (4.6.16) es el transporte total de sedimentos de fondo en suspensión por unidad de tiempo y ancho.

Para evaluar con precisión la concentración "Ca" a la altura del fondo donde comienza el transporte en suspensión, Chang-Simons y Richardson desarrollaron una expresión en función del transporte de sedimentos en la capa de fondo g_B, para lo cual siguieron el criterio que Einstein aplicó al desarrollar la ec (4.2.2.3).

Si g_B es el transporte de sedimentos en la capa de fondo por unidad de ancho en una capa de espesor "a", entonces el transporte de sedimentos en la capa de fondo por unidad de área será

$$g'_B = \frac{g_B}{a} \qquad (4.6.19)$$

de donde la concentración de sedimentos a la altura del fondo "a" vale

$$Ca = \frac{g'_B}{u_a} \qquad (4.6.20)$$

siendo u_a la velocidad del flujo cuando "y" es igual a "a".

u_a se puede calcular con la ec (4.6.12) pero se ha encontrado que guarda cierta proporcionalidad con la velocidad media, esto es

$$u_a = r_1 \; U \qquad (4.6.21)$$

donde r_1 es el factor de proporcionalidad, el que experimentalmente se encontró que vale 0.8, por tanto

$$u_a = 0.8U \tag{4.6.22}$$

Sustituyendo en la ec (4.6.20) las ecs (4.6.19) y (4.6.22) resulta

$$Ca = \frac{g_B}{0.8aU} \tag{4.6.23}$$

de donde la ec (4.6.16) queda

$$g_{BS} = \frac{dg_B}{0.8aU}(UI_3 - \frac{2U*}{\kappa} I_4) \tag{4.6.24}$$

ó

$$g_{BS} = R_s \, g_B \tag{4.6.25}$$

donde

$$R_s = \frac{d}{0.8aU} (UI_3 - \frac{2U*}{\kappa} I_4) \tag{4.6.26}$$

Para aplicar el método se requieren los siguientes datos:

1) Tirante, pendiente y velocidad media del flujo
2) Diámetro de la partícula representativa del material del fondo, así como la densidad de las partículas y la porosidad del material del fondo. El diámetro representativo es aquel que tiene una velocidad de caída igual a $\overline{\omega}$
3) Temperatura y densidad del fluido

Con estos datos, el transporte de sedimentos de fondo en suspensión se calcula mediante el siguiente procedimiento.

1) Calcular τ_c con la fig 2.2.5.2, lo mismo que τ_o y U_*, recordando que $\tau_o = \gamma dS$ y $U_* = \sqrt{\tau_o/\rho}$
2) Obtener el valor del coeficiente de Von Karman de la fig 2.2.5.1

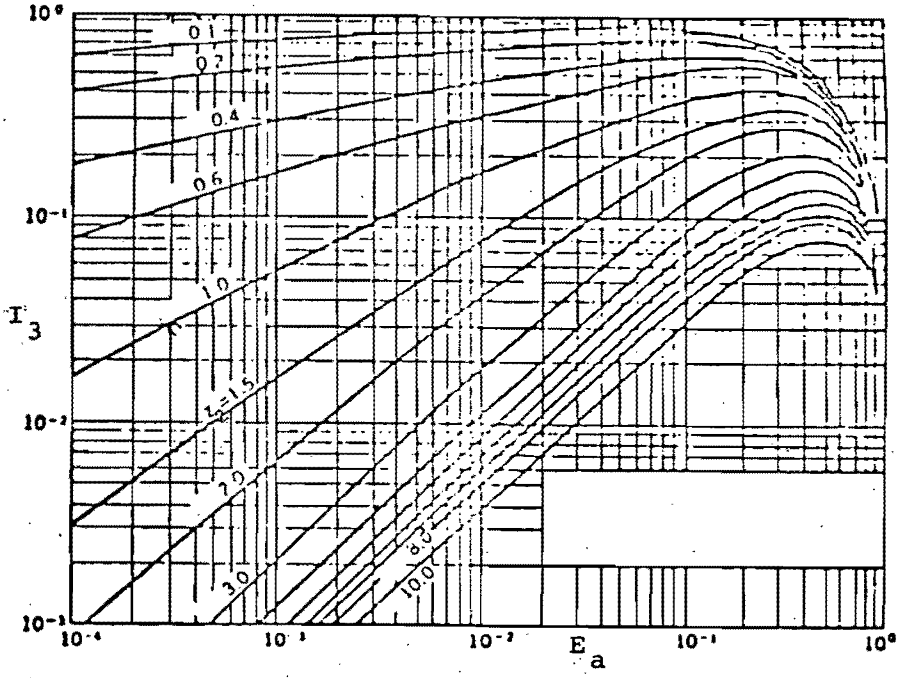

Fig. 4.6.1 FUNCION I_3 EN TERMINOS DE E_a Y Z_2

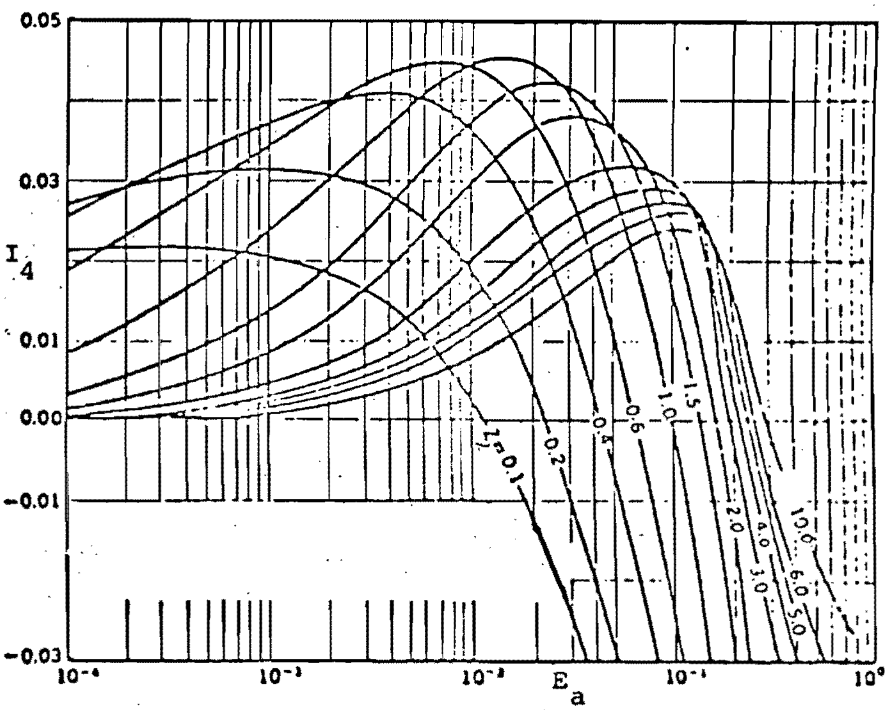

Fig. 4.6.2 FUNCION I_4 EN TERMINOS DE E_a Y Z_2

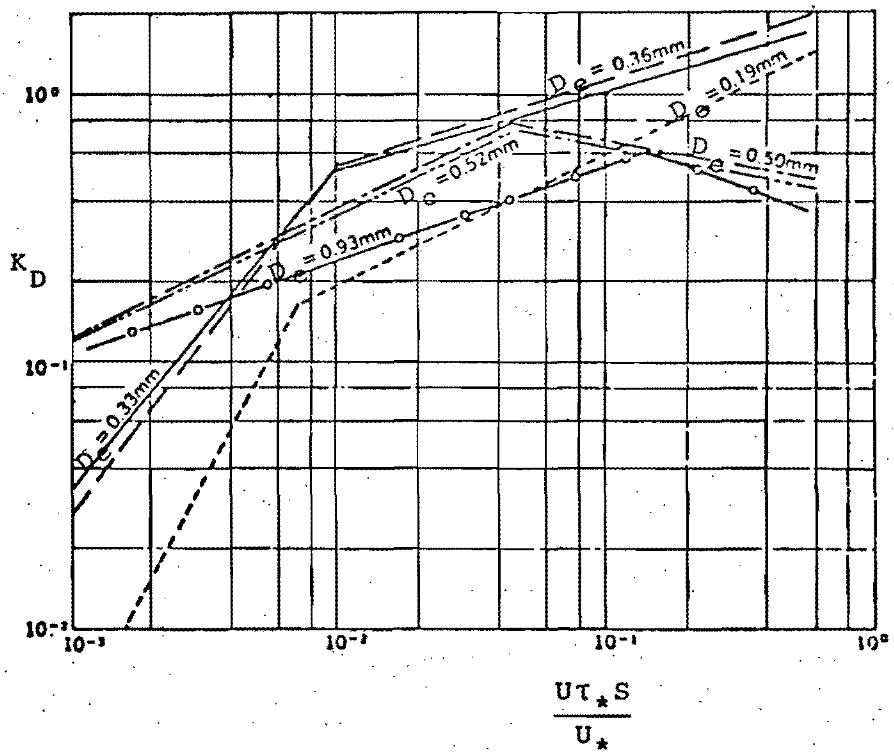

Fig. 4.6.3 COEFICIENTE K_D EN FUNCION DE $\frac{U\tau_* S}{U_*}$ (SEGUN CHANG-SIMONS Y RICHARDSON)

3) Determinar el valor del exponente Z_2 con la ec (4.6.3)

4) Calcular el espesor de la capa de fondo "a" con la ec (4.6.18) y luego la relación $E_a = a/d$

5) Leer I_3 e I_4 de las figs 4.6.1 y 4.6.2 respectivamente, para los correspondientes valores de Z_2 y E_a

6) Valuar R_s con la ec (4.6.26)

7) Calcular g_B con la ecuación $g_B = K_D U(\tau_o - \tau_c)$ donde K_D es un coeficiente encontrado experimentalmente, el cual es una función del parámetro adimensional $\frac{U}{U_*} \tau_* S$ y el diámetro del sedimento, en donde τ_* es el parámetro de Shilds definido como $\tau_* = \frac{RS}{\Delta D}$; K_D se lee en la fig 4.6.3

8) Determinar el transporte de sedimentos de fondo en suspensión en peso por unidad de tiempo y ancho, con la ec (4.6.25)

4.7 METODO DE TOFFALETI

Fue publicado en enero de 1969 y está basado en los conceptos utilizados en el método de Einstein en 1950 y en el de Einstein y Chien en 1953.

Para aplicar este método se debe dividir la curva granulométrica del material de fondo en fracciones, tomando como diámetro representativo de cada una de ellas el diámetro medio "Di", procurando que el diámetro medio de una fracción no sobrepase en dos veces al diámetro medio de la fracción inmediatamente anterior.

Como se mencionó en el subcapítulo(2.2.6), Toffaleti dividió la distancia del fondo del cauce hasta la superficie del flujo en 4 zonas, limitadas como aparece en la fig(2.2.7.1), donde la zona de fondo corresponde al transporte en la capa de fondo y a partir del nivel "y" igual a 2Di hasta la superficie se realiza el transporte de fondo en suspensión.

La distribución de velocidades del flujo debe evaluarse con la relación desarrollada por Toffaleti (ec 2.2.7.13), expresada en sistema métrico como

$$u = (1+\eta_v)U\left(\frac{y}{d}\right)^{\eta_v} \qquad (4.7.1)$$

Donde η_v es un parámetro empírico que toma en cuenta el efecto de la temperatura sobre la velocidad y vale en sistema métrico

$$\eta_v = 0.13516 + 0.000864\ T \qquad (4.7.2)$$

Siendo "T" la temperatura en grados centígrados.

La distribución de la concentración de sedimentos en suspensión de acuerdo a Toffaleti, está representada por las ecs (2.2.7.9, 2.2.7.10 y 2.2.7.11).

Como las expresiones que permiten determinar la distribución de la concentración de sedimentos en cada una de las zonas en que Toffaleti dividió el flujo son diferentes, el transporte de sedimentos de fondo en suspensión se evalúa por separado para cada zona, así:

1) ZONA INFERIOR

$$g_{BSLi} = \int_{2Di}^{\frac{d}{11.24}} Ci\ u\ dy \qquad (4.7.3)$$

Donde g_{BSLi} es el transporte de sedimentos de fondo en suspensión de la fracción granulométrica con diámetro medio Di entre los niveles "y" igual a 2Di y "y" igual a d/11.24, que como se dijo son los límites inferior y superior respectivamente que separan la zona inferior.

Sustituyendo en la ec (4.7.3) Ci expresado por la ec(2.2.7.10) y "u" dado por la ec (4.7.1) resulta

$$g_{BSLi} = \int_{2Di}^{\frac{d}{11.24}} P_{Bi}C_{Li}\left(\frac{d}{y}\right)^{0.756Zi}\left[(1+\eta_v)U\left(\frac{y}{d}\right)^{\eta_v}\right]dy \qquad (4.7.4)$$

donde P_{Bi} es el porcetaje en peso de la fracción de arena del fondo con diámetro medio Di.

Extrayendo de la integral en la ec (4.7.4) todos los términos constantes, resulta:

$$g_{BSLi} = P_{Bi}C_{Li}(1-\eta_v)Ud^{0.756Zi-\eta_v}\int_{2Di}^{\frac{d}{11.24}} y^{\eta_v-0.756Zi}\ dy \quad \ldots \qquad (4.7.5)$$

Efectuando la integral y reemplazando sus límites queda

$$g_{BSLi} = Mi\,\frac{\left(\frac{d}{11.24}\right)^{\eta_3} - (2Di)^{\eta_3}}{\eta_3} \qquad (4.7.6)$$

donde

$$M_i = P_{Bi}\ C_{Li}(1+\eta_v)U\ d^{0.756Zi-\eta_v} \qquad (4.7.7)$$

y

$$\eta_3 = 1+\eta_v-0.756Zi \qquad (4.7.8)$$

2) ZONA MEDIA

$$g_{BSmi} = \int_{d/11.24}^{d/2.5} Ci\ u\ dy \qquad (4.7.9)$$

En la cual g_{BSmi} es el transporte de sedimentos de fondo en suspensión de la fracción granulométrica con diámetro medio Di entre los niveles "y" igual a d/11.24 y "y" igual a d/2.5, que como se dijo son los límites inferior y superior respectivamente que separan la zona media.

Sustituyendo en la ec (4.7.9) Ci expresado por la ec(2.2.7.10)y "u" dado por la ec (4.7.1) resulta

$$g_{BSmi} = \int_{d/11.24}^{d/2.5} C_{mi}\left(\frac{d}{y}\right)^{Zi}\left[(1+\eta_v)U\left(\frac{y}{d}\right)^{\eta_v}\right]dy \qquad (4.7.10)$$

Cuando d/y es igual a 11.24, la concentración para la zona inferior (ec 2.2.7.9) es igual a la concentración para la zona media (ec 2.2.7.10), ya que es un nivel común para las dos zonas, por tanto

$$C_{mi}\left(\frac{d}{y}\right)^{Zi} = C_{Li}\left(\frac{d}{y}\right)^{0.756Zi} \qquad (4.7.11)$$

Sustituyendo "y" por d/11.24 y despejando C_{mi} resulta

$$C_{mi} = C_{LI}\left\{\left[\frac{d^{0.756Zi}}{(d/11.24)^{0.756Zi}}\right]\Big/\left[\frac{d^{Zi}}{(d/11.24)^{Zi}}\right]\right\} \qquad (4.7.12)$$

de donde

$$C_{mi} = C_{Li} \left[\frac{d^{0.756Zi} (\frac{d}{11.24})^{0.244Zi}}{d^{Zi}} \right] \quad (4.7.13)$$

Sustituyendo C_{mi} en la ec (4.7.10) y teniendo en cuenta que C_{Li} se debe multiplicar por P_{Bi} para que quede expresada en % de un 100% de la muestra total del material del fondo, resulta:

$$g_{BSmi} = \int_{d/11.24}^{d/2.5} P_{Bi} C_{Li} d^{0.756Zi} (\frac{d}{11.24})^{0.244Zi} (\frac{1}{y})^{Zi} \ldots$$

$$\left[(1+\eta_v) U (\frac{y}{d})^{\eta_v} \right] dy \quad (4.7.14)$$

Extrayendo los términos constantes de la integral, queda

$$g_{BSmi} = P_{Bi} C_{Li} (1+\eta_v) U d^{0.756Zi-\eta_v} (\frac{d}{11.24})^{0.244Zi} \ldots$$

$$\int_{d/11.24}^{d/2.5} y^{(\eta_v - Zi)} \, dy \quad (4.7.15)$$

integrando y tomando límites resulta

$$g_{BSmi} = M_i (\frac{d}{11.24})^{11.24} \frac{\left[(\frac{d}{2.5})^{\eta_2} - (\frac{d}{11.24})^{\eta_2} \right]}{\eta_2} \quad (4.7.16)$$

donde M_i está dada por la ec (4.7.7) y η_2 vale

$$\eta_2 = 1+\eta_v - Zi \quad (4.7.17)$$

3) ZONA SUPERIOR

$$g_{BSUi} = \int_{d/2.5}^{d} Ci \, u \, dy \quad (4.7.18)$$

En la cual g_{BSUi} corresponde al transporte de sedimentos de fondo en suspensión de la fracción granulométrica de material de fondo con diámetro medio Di, entre los niveles "y" igual a d/11.24 y "y" igual a "d", que como se dijo antes son los límites inferior y superior respectivamente, que separan la zona superior.

Sustituyendo en la ec (4.7.18) Ci expresado por la ec (2.2.7.11) y "u" dado por la ec (4.7.1), resulta:

$$g_{BSUi} = \int_{d/2.5}^{d} C_{Ui}\left(\frac{d}{y}\right)^{1.5Zi}\left[(1+\eta_v)\,U\left(\frac{y}{d}\right)^{\eta_v}\right]dy \qquad (4.7.19)$$

Cuando d/y es igual a 2.5, la concentración de sedimentos para la zona media (ec2.2.7.10) es igual a la concentración de sedimentos para la zona superior (ec2.2.7.11), ya que es un nivel común para las dos zonas; por tanto

$$C_{Ui}\left(\frac{d}{y}\right)^{1.5Zi} = C_{mi}\left(\frac{d}{y}\right)^{Zi} \qquad (4.7.20)$$

Despejando C_{Ui}, teniendo en cuenta que "y" vale d/2.5 resulta

$$C_{Ui} = C_{mi}\left(\frac{d}{d/2.5}\right)^{Zi} \Big/ \left(\frac{d}{d/2.5}\right)^{1.5Zi} \qquad (4.7.21)$$

Sustituyendo C_{mi} por la ec (4.7.13) queda:

$$C_{Ui} = C_{Li}\,d^{0.756Zi}\left(\frac{d}{11.24}\right)^{0.244Zi}\left(\frac{d}{2.5}\right)^{0.5Zi}\left(\frac{1}{d}\right)^{1.5Zi} \qquad (4.7.22)$$

Reemplazando C_{Ui} en la ec (4.7.19) por la ec (4.7.22), tenien do en cuenta que C_{Li} queda multiplicada por P_{Bi} para expresarla en porcentaje en peso de un 100% de la muestra total del material del fondo, queda:

$$g_{BSUi}=P_{Bi}C_{Li}d^{0.756Zi}\left(\frac{d}{11.24}\right)^{0.244Zi}\left(\frac{d}{2.5}\right)^{0.5Zi}\left(\frac{1}{y}\right)^{1.5Zi} \ldots$$

$$\left[(1+\eta_v)U\left(\frac{y}{d}\right)^{\eta_v}\right]dy \qquad (4.7.23)$$

Extrayendo los términos constantes de la integral resulta:

$$g_{BSUi} = M_i\left(\frac{d}{11.24}\right)^{0.244Zi}\left(\frac{d}{2.5}\right)^{0.5Zi}\int_{d/2.5}^{d} y^{\eta_v-1.5Zi}\,dy \ldots \qquad (4.7.24)$$

donde M_i equiavale a la ec (4.7.7).

Integrando y tomando límites, se obtiene:

$$g_{BSUi} = M_i\left(\frac{d}{11.24}\right)^{0.244Zi}\left(\frac{d}{2.5}\right)^{0.5Zi}\frac{d^{\eta_1}-(d/2.5)^{\eta_1}}{\eta_1} \qquad (4.7.25)$$

en la cual

$$\eta_1 = 1 + \eta_v - 1.5Zi \qquad (4.7.26)$$

Toffaleti presenta una ecuación empírica para calcular el transporte de sedimentos de fondo en suspensión en la zona inferior, para cada fracción granulométrica con diámetro medio Di, la cual, al igualarse con la ec (4.7.6), permite determinar el valor de C_{Li} que es el único término desconocido en las ecs (4.7.16) y (4.7.25). Esta ecuación empírica dice que

$$g_{BSLi} = \frac{0.14963\ P_i}{\left(\frac{T_t A_t K_t}{U^2}\right)^{5/3} \left(\frac{Di}{0.00058}\right)^{5/3}} \qquad (4.7.27)$$

Si Di es menor o igual a 0.08839 mm, la ec (4.7.27) se reduce a

$$g_{BSLi} = \frac{1.978}{\left(\frac{T_t A_t K_t}{U^2}\right)^{5/3}} \qquad (4.7.28)$$

En las ecuaciones anteriores

$$T_t = 0.059268 + 0.0001782T \qquad (4.7.29)$$

A_t es un factor el cual es función de $0.67298(10^5\nu)^{1/3}/10U_*'$ y su valor se obtiene con la fig 4.7.1.

K_t es un factor de corrección, el cual también se obtiene con el uso de la fig 4.7.1

Si el producto A_tK_t resultase menor de 16, arbitrariamente se toma A_tK_t igual a 16.

La concentración C_{Li} obtenida al igualar la ec (4.7.27) con la ec (4.7.6) debe verificarse, con objeto de asegurar que no resulte demasiado alta. Para ello, se calcula la concentración Ci en la zona inferior, mediante la ec(2.2.7.9), para "y" igual a 2Di, con el valor de C_{Li} encontrado, esto es

$$Ci = C_{Li}\left(\frac{d}{2Di}\right)^{0.756Zi} \qquad (4.7.30)$$

Si la concentración Ci calculada con la ec (4.7.30) excede a 1601.87 kg/m^3, arbitrariamente C_{Li} toma el valor de 1601.87.

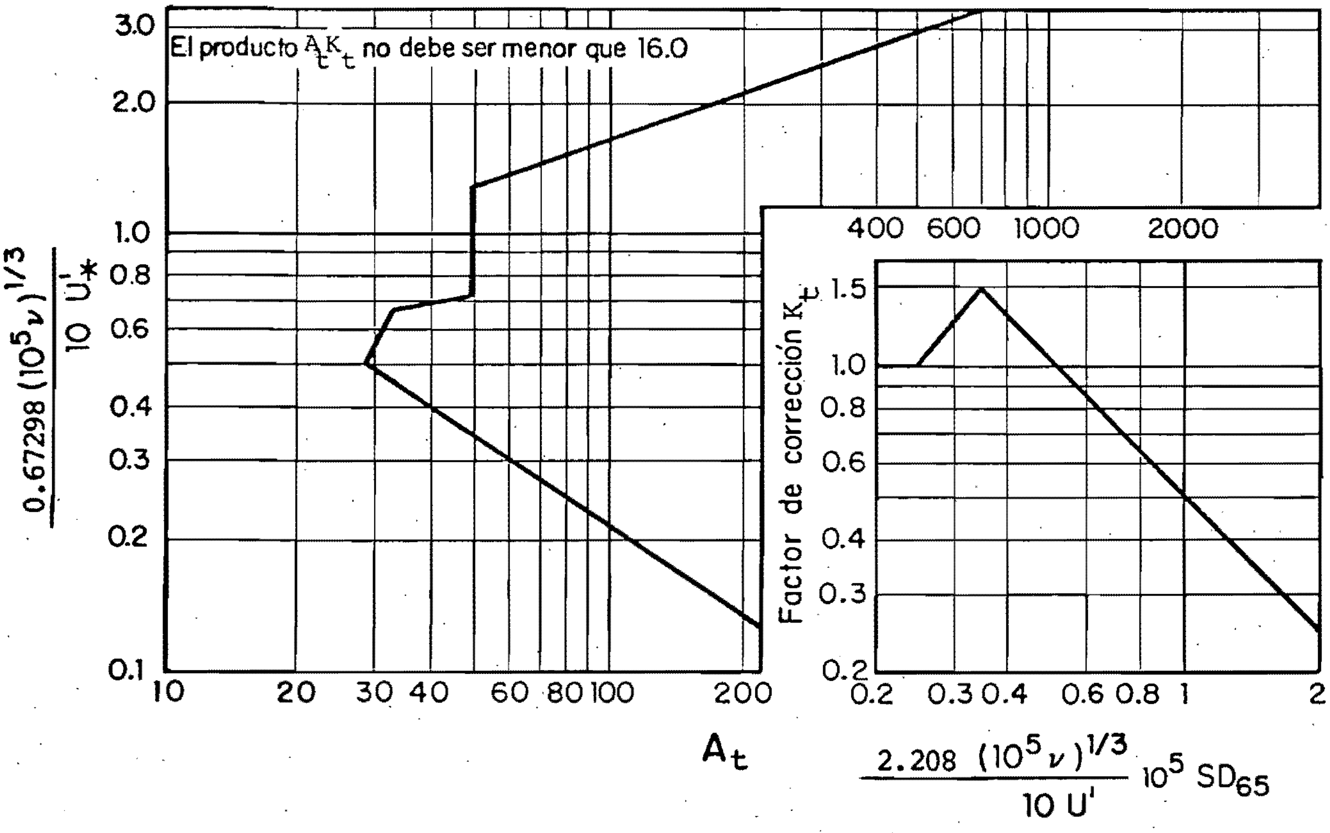

Fig. 4.7.1 Coeficiente A_t y factor de corrección K_t propuestos por Toffaleti

Si Ci evaluada con la ec (4.7.30) resulta menor de 1601.87 kg/m^3, entonces C_{Li} sigue conservando el valor ya calculado.

De acuerdo a este método, el transporte total de sedimentos de fondo en suspensión de las partículas con diámetro medio Di es igual a

$$g_{BSi} = g_{BSLi} + g_{BSmi} + g_{BSUi} \tag{4.7.31}$$

Y el transporte total de sedimentos de fondo en suspensión g_{BS} es igual a la suma de todos los g_{BSi} que resultan, dependiendo del número de fracciones en que se haya dividido la curva granulométrica del material del fondo.

Los resultados de este método fueron probados por Toffaleti con 339 mediciones en ríos y 282 mediciones en canales de laboratorio, y encontró que su método es aplicable en un amplio rango de condiciones.

4.8 METODO DE EINSTEIN Y ABDEL-AAL

En el método publicado por Einstein en 1950, este autor supuso que el coeficiente de Von Karman "κ" mantenía un valor constante igual a 0.4, para flujo con sedimentos en suspensión. Lo anterior condujo a que en muchos casos, los resultados no concordaran con la realidad. En los experimentos hechos en canales de laboratorio por Einstein y Chien, en 1955, se demostró que para concentraciones de sedimentos cerca del fondo mayores de 0.1 en peso, el coeficiente de Von Karman se reducía, por tanto, las distribuciones empleadas por Einstein en su método, tanto de velocidades del flujo (ec 4.2.2), como de la concentración de sedimentos en suspensión (ec 4.2.1) sistemáticamente varían y, por consiguiente, el resultado de la ec 4.2.11 que permite cuantificar el transporte de sedimentos de fondo en suspensión, bajo las mismas condiciones hidráulicas, será diferente.

Para analizar los parámetros de los cuales dependía "κ", se hicieron muchas pruebas en un canal rectangular de 18.3 m de largo, 0.305 m de ancho y 0.46 m de profundidad, perfectamente equipado. Se usó como sedimento, arena de 0.1 mm de diámetro medio, con D_{35} igual a 0.095 mm, D_{50} igual a 0.105 mm, D_{65} igual a 0.12 mm y con peso específico de 2.65. La concentración de sedimentos a diferentes distancias arriba del fondo, se midió cuidadosamente, y el coeficiente de Von Karman "κ" se determinó de la distribución de velocidades. Los resultados de estos experimentos se compararon con los de otros investigadores como Kalinske, Laursen, Vanoni, y además, también se analizaron mediciones hechas en ríos como el Mississippi y San Louis.

Con los resultados obtenidos se dibujaron varias gráficas de "κ" contra diferentes parámetros adimensionales formados con las variables de las que se suponía dependía "κ". Finalmente, se encontró el parámetro $\omega_{35}D_{65}/(q^{1/2}S^{1/2}\nu^{1/2})$, el cual describe el comportamiento de "κ" en forma acertada, tal como se observa en la fig 4.8.1. Las ecuaciones para valuar el transporte de sedimentos de fondo en suspensión a las que llegan Einstein y Abdel-Aal son las mismas propuestas por Einstein en 1950, sólamente que el valor del coeficiente de Von Karman "κ" deberá ahora valuarse con el uso de la fig 4.8.1 cuando la concentración de sedimentos es alta. Si el material en suspensión es uniforme, para valuar g_{BS} se puede emplear la ec (4.2.11), donde

$$g_{BS} = \frac{0.4}{\kappa}\, 11.6U'_{*}\ Ca\ a\left[2.303\log\left(\frac{30.2xd}{K_s}\right)I_1+I_2\right] \qquad (4.8.1)$$

En cambio, si el material en suspensión no es uniforme, para valuar g_{BS} se puede usar la ec (4.2.16) ó (4.2.20), es decir,

$$g_{BSi} = \frac{0.4}{\kappa}\, 11.6U'_{*}\ Cai\ 2Di\left[2.303\log\left(\frac{30.2xd}{K_s}\right)I_1+I_2\right] \qquad (4.8.2)$$

ó

$$g_{BSi} = \frac{0.4}{\kappa}\, P_{Bi}g_{Bi}\left[2.303\ \log\ \left(\frac{30.2dx}{K_s}\right)I_1+I_2\right] \qquad (4.8.3)$$

Las variables que intervienen en las ecuaciones anteriores ya han sido definidas en el subcapítulo 4.2. Si se observa, las ecuaciones originales de Einstein se han multiplicado por el factor 0.4/κ, lo cual se hace para corregir el haber considerado en la distribución de velocidades "κ" igual a 0.4. Por otro lado, el haber tomado en la fórmula de distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, "κ" igual a

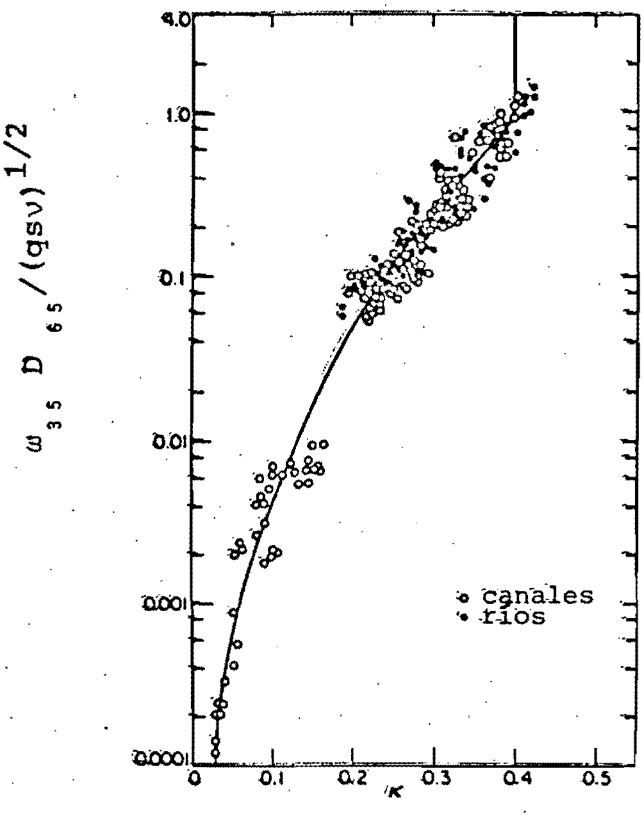

Fig 4.8.1 VARIACION DEL COEFICIENTE κ EN TERMINOS DE $\omega_{35}\ D_{65}/(qs\nu)^{1/2}$

0.4, se corrige calculando "Z" para evaluar "I_1" e "I_2", figs 4.2.3 y 4.2.4, con el factor "κ" que resulte en la fig 4.8.1, de acuerdo con las condiciones hidráulicas del flujo.

4.9 METODO DE ITAKURA Y KISHI

Este método fue publicado en agosto de 1980 y tal como se mencionó en el subcapítulo 2.2.10, estos autores basaron parte de su trabajo en los avances logrados por Monin-Obukhov al hacer estudios en la capa superficial atmosférica.

A partir de la ec (2.2.10.5) que describe el gradiente de velocidades del flujo, Itakura y Kishi encontraron una expresión para evaluar la distribución de la velocidad del flujo cargado con sedimentos, la cual queda expresada como

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa}\left[\ln\left(\frac{U_* y}{\bar{\nu}}\right) + \phi' \frac{U_* y}{\bar{\nu}}\right] + \left[B'\left(\frac{U_* y}{\bar{\nu}}\right) - \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{U_* K_s}{\bar{\nu}}\right)\right] \qquad (4.9.1)$$

En la cual $\bar{\nu}$ es la viscosidad cinemática del flujo con sedimento en suspensión y ϕ' es un factor definido como

$$\phi' = \alpha_1 \frac{\bar{\nu}}{U_* L} \qquad (4.9.2)$$

donde α_1 se conoce como coeficiente de Monin-Obukhov y tiene un valor aproximado de 7, B' es una constante y L es la longitud característica de Monin-Obukhov definida por

$$\frac{1}{L} = \frac{\rho_s - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \frac{\kappa g \omega C_{med}}{U_*^3} \qquad (4.9.3)$$

Según Itakura y Kishi, la constante universal de Von Karman "κ", conserva el valor de 0.4 para flujo con sedimento en suspensión. Todos los otros términos de la ec (4.9.1) ya han sido definidos, en el subcapítulo 2.2.10.

Por otro lado, la distribución de la concentración de sedimentos de fondo en suspensión desarrollada por estos autores, está dada por la ec (2.2.10.20) donde

$$\frac{C}{Ca} = \left[\left(\frac{d-y}{d-a}\right)^{1+\phi_*} \left(\frac{a}{y}\right) \right]^{Z} \qquad (4.9.4)$$

en la cual

$$\phi_* = \alpha_1 \frac{d}{L} \qquad (4.9.5)$$

y

$$Z = \frac{\omega}{\kappa U_*} \qquad (4.9.6)$$

y Ca para a/d igual a 0.05 se puede evaluar con la ec (2.2. 10,39) expresada como

$$Ca = K \left(\alpha_* \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} \frac{gD}{U_* \omega} \Omega - 1\right) \qquad (4.9.7)$$

en la cual K vale 0.0008, α_* vale 0.14 y Ω está dada por la ec (2.2.10,46), así

$$\Omega = - \frac{\overline{\tau}_*}{B_* 2\sqrt{\pi} e^{b_2^2}} \frac{1}{\int_{b_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) d\xi} + \frac{\overline{\tau}_*}{B_* \eta_o} - 1 \qquad (4.9.8)$$

Donde B_* es igual a 0.143, η_o es igual a 0.50, y b_2 es igual a G/F, siendo G el peso sumergido de las partículas y F la fuerza hidrodinámica o de sustentación. Para mayor claridad sobre las variables que intervienen en la ec (4.9.4), se sugiere ver el subcapítulo 2.2.10.

Como se ha mencionado en los anteriores métodos, el transporte de sedimentos de fondo en suspensión entre un nivel "a" cualquiera arriba del fondo del cauce y la superficie del mismo, está dado por la expresión

$$g_{BS} = \int_a^d Cu\ dy \tag{4.9.9}$$

Sustituyendo a "C" por la ec (4.9.4) y a "u" por la ec (4.9.1) resulta

$$g_{BS} = \int_a^d U_*\{\frac{1}{\kappa}\left[\ln(\frac{U_* y}{\overline{\nu}}) + \phi'\frac{U_* y}{\overline{\nu}}\right] + \left[B'(\frac{U_* y}{\overline{\nu}}) - \frac{1}{\kappa}\ln(\frac{U_* K_s}{\overline{\nu}})\right]\}$$

$$\{Ca\left[(\frac{d-y}{d-a})^{1+\phi *}(\frac{a}{y})\right]^Z\}dy \tag{4.9.10}$$

Cambiando la variable de integración de "y" por "E" donde "E" es igual a y/d, la ec (4.9.10) se transforma en

$$g_{BS} = \frac{U_* Ca(\frac{a}{d})^Z (d-a)}{\left[(1-\frac{a}{d})^{1+\phi *}\right]^Z}\{\frac{\phi *}{\kappa}I_5 + \frac{1}{\kappa}I_6 + \left[B'(\frac{U_* K_s}{\overline{\nu}}) - \frac{1}{\kappa}\ln\frac{K_s}{d}\right]I_7\} \quad \ldots \tag{4.9.11}$$

en la cual

$$I_5 = \int_{a/d}^{1}\left[\frac{(1-E)^{1+\phi *}}{E}\right]E\ dE \tag{4.9.12}$$

$$I_6 = \int_{a/d}^{1}\left[\frac{(1-E)^{1+\phi *}}{E}\right]^Z \ln E\ dE \tag{4.9.13}$$

$$I_7 = \int_{a/g}^{1} \left[\frac{(1-E)^{1+\phi_*}}{E} \right]^Z dE \qquad (4.9.14)$$

Cuando la relación a/d es mucho más pequeñas que la unidad, la ec (4.9.11) se transforma aproximadamente en

$$g_{BS} = U_* \; Ca \; d (\frac{a}{d})^Z \; P_* \qquad (4.9.15)$$

donde

$$P_* = \frac{\phi_*}{\kappa} I_5 + \frac{1}{\kappa} I_6 + \left[B'(\frac{U_* K_s}{\overline{\nu}}) - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{K_s}{d} \right] I_7 \qquad (4.9.16)$$

Itakura y Kishi calcularon numéricamente la función "P_*" dada por la ec (4.9.16) para a/d igual a 0.05 y para $B'(U_* K_s/\overline{\nu})$ igual a 8.5. Los resultados fueron graficados tal como se observa en la fig 4.9.1.

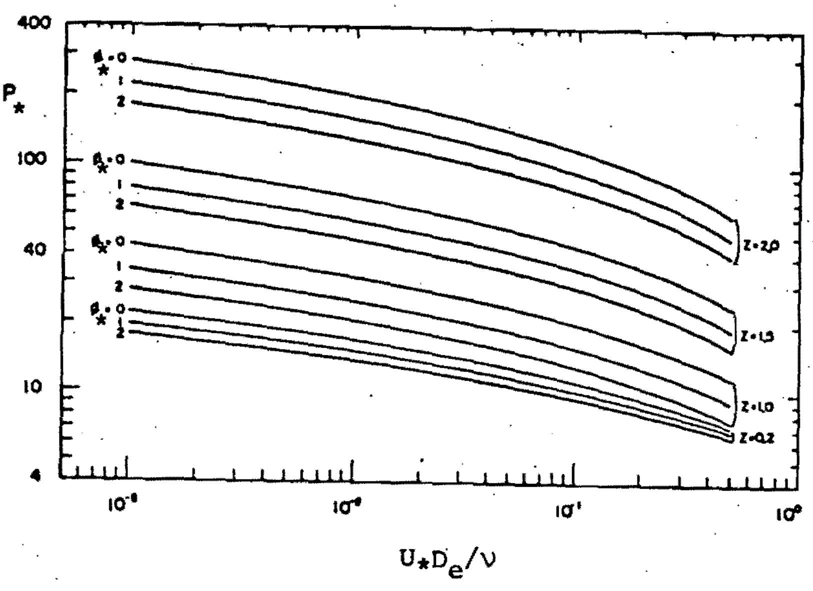

Fig. 4.9.1. FUNCION P_* EN TERMINOS DE K_s/d Y Z, PARA a/d = 0.05 Y $B'(U_* K_s/\overline{\nu})$ = 8.5

4.10 Resumen de métodos de transporte de sedimentos de fondo en suspensión

En la tabla 4.10 se presenta un resumen de los métodos de transporte de sedimentos de fondo en suspensión que han sido estudiados. En esta tabla se relaciona el nombre del autor del método y el año en que fué publicado; la ecuación o ecuaciones finales; la teoría en que se fundamentó; condiciones en que fué probado, para los que se dispuso de esta información; el número de figuras que se necesita utilizar para aplicar cada método, y finalmente, algunos comentarios pertinentes al método.

TABLA 4.10 METODOS DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS DE FONDO EN SUSPENSION

METODO	ECUACION FINAL	TEORIA EN QUE SE FUNDAMENTA	CONDICIONES EN QUE FUERON PROBADOS	N° FIGS. A UTILIZAR PARA APLICAR EL METODO	COMENTARIOS
Lane y Kalinske (1941)	$g_{BS} = q\ Ca \exp\left(\frac{15\ a}{U_*}\right) P_1$	Difusión	Río Mississippi $0.005mm \leq D \leq 0.85mm$ $S = 0.000071$ $d = 10.3m$	1	P_1 se encuentra en la fig 4.1.1
Einstein (1950)	$g_{BS} = 11.6\ U'_*\ Ca\ a \left[2.303 \log\left(\frac{30.2 \times d}{K_s}\right) I_1 + I_2\right]$	Difusión		4	Para sedimento uniforme I_1 e I_2 se valuan en las figs 4.2.3 y 4.2.4
	$g_{BS_i} = 11.6\ U'_*\ Ca_i\ 2\ D_i \left[2.303 \log\left(\frac{30.2 \times d}{K_s}\right) I_1 + I_2\right]$				Para sedimento no uniforme, cuando se conoce Ca_i
	$g_{BS_i} = P_{B_i}\ g_{B_i} \left[2.303 \log\left(\frac{30.2 \times d}{K_s}\right) I_1 + I_2\right]$				Para sedimento no uniforme, cuando se conoce g_{B_i}
Velikanov (1944-1956)	$g_{BS} = \frac{1}{(\rho_s - \rho)\ g}\ \frac{\tau_0\ U^2}{\omega} - \frac{\rho}{(\rho_s - \rho)}\ \frac{P_3\ U^4}{g\ \omega}$	Gravitacional (balance de energía)		0	P_3 debe valuarse en el lugar donde se aplique el método
Brooks (1963)	$g_{BS} = q\ C_{dm}\ f\left(Z, \frac{\kappa\ U}{U_*}\right)$	Difusión		1	$f\left(Z, \frac{\kappa\ U}{U_*}\right)$ se valua con la fig 4.4.1 $\kappa = 0.4$
Bagnold (1966)	$g_{BS} = 0.01\ \tau_o\ \frac{U^2}{\bar{\omega}}$	Balance de energía	146 mediciones en ríos $0.13mm \leq D \leq 5mm$ $4.4 \times 10^{-3} \leq S \leq 1.03 \times 10^{-4}$ $0.235m \leq d \leq 2.62m$ También en canales de laboratorio	0	

continuación tabla 4.10

Chang-Simons y Richardson (1967)	$g_{BS} = d\ Ca \left[U\ I_3 - \frac{2\ U_*}{\kappa} I_4 \right]$	Difusión	184 datos de canales de laboratorio $0.19mm \leq D_{50} \leq 0.93mm$ 57 mediciones en 3 ríos	5	Cuando se conoce la concentración Ca No es necesario dividir en fracciones la distrib.granulométrica κ varía en función de U_* De/D
	$g_{BS} = \frac{d\ g_B}{0.8\ a\ U} \left[U\ I_3 - \frac{2\ U_*}{\kappa}\ I_4 \right]$				Cuando se conoce el transporte en la capa de fondo g_B I_3 y I_4 se valúan en las figs 4.6.1 y 4.6.2
Toffaleti (1969)	$g_{BSL_i} = M_i \frac{\left(\frac{d}{11.24}\right)^{n_3} - \left(2D_i\right)^{n_3}}{n_3}\ \ 6$ [illegible]$_{SL_i} = \frac{0.14963\ P_i}{\left(\frac{T_t A_t K_t}{U^2}\right)^{5/3} \left(\frac{D_i}{0.00058}\right)^{5/3}}$	Difusión	339 mediciones en ríos	3	Zona inferior $2\ D_i < y < d/11.64$ Con la segunda ecuación se obtiene g_{BSL} y luego con la primera se obtiene C_{Li}
	$g_{BSm_i} = M_i \left[\frac{d}{11.24}\right]\ 11.24\ \frac{\left[\left(\frac{d}{2.5}\right)^{n_2} - \left(\frac{d}{11.24}\right)^{n_2}\right]}{n_2}$		282 mediciones en canales de laboratorio donde		Zona media $\frac{d}{11.64} < y < \frac{d}{2.5}$
	$g_{BSU_i} = M_i \left(\frac{d}{11.24}\right)^{0.244\ Z_i} \left(\frac{d}{2.5}\right)^{0.5\ Z_i} \frac{d^{n_1} - (d/2.5)^{n_1}}{n_1}$		$0.3mm \leq D \leq 0.93mm$ $0.05m \leq d \leq 0.61m$ $0.267m \leq$ ancho $\leq 2.40m$		Zona superior $\frac{d}{2.5} < y < d$
Einstein y Abdel-Aal (1972)	$g_{BS} = \frac{0.4}{\kappa}\ 11.6\ U_*'\ Ca\ a \left[2.303 \log \left(\frac{30.2 \times d}{K_s}\right) I_1 + I_2\right]$	Difusión	$0.011mm \leq D_{50} \leq 0.23mm$ $0.0018 \leq S \leq 0.0025$ $0.09m \leq d \leq 0.14m$	4	Para sedimento uniforme κ es variable
	$g_{BS_i} = \frac{0.4}{\kappa}\ 11.6\ U_*'\ Ca_i\ 2\ D_i \left[2.303 \log \left(\frac{30.2xd}{K_s}\right) I_1 + I_2\right]$				Para sedimento no uniforme, cuando se conoce Ca_i
	$g_{BS_i} = \frac{0.4}{\kappa}\ P_{B_i}\ g_{B_i} \left[2.303 \log \left(\frac{30.2xd}{K_s}\right)\ I_1 + I_2\right]$				Para sedimento no uniforme, cuando se conoce g_{B_i}
Itakura y Kishi (1980)	$g_{BS} = U_*\ Ca\ d \left(\frac{a}{d}\right)^Z P_*$	Difusión	Mediciones propias $0.08mm \leq D \leq 0.35mm$ También utilizó datos de Vanoni y Nomicos, Krishnappan y otros	1	P_* se valúa la fig 4.9.1 Ca puede obtenerse con la ec 2.2.10.39 en función de las características del flujo y de los sedimentos

5. DISCUSION Y COMENTARIOS A LOS METODOS DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS DE FONDO EN SUSPENSION.

Las bases teóricas usadas en los métodos desarrollados para valuar el transporte de sedimentos de fondo en suspensión, principalmente son la teoría de difusión y el balance de energía.

Entre los métodos que se fundamentan en la teoría de difusión y que fueron analizados en el capítulo 4, se tienen:

- Lane y Kalinske
- Einstein
- Brooks
- Chan-Simons y Richardson
- Toffaleti
- Einstein y Abdel-aal

- Itakura y Kishi

Los métodos del capítulo 4 que se fundamentan en el balance de energía son:

- Velikanov (Teoría Gravitacional)
- Bagnold

Los métodos basados en la teoría de difusión en general fundamentan su desarrollo en la integración de la ec. (4.1), y la diferencia entre ellos radica fundamentalmente en las funciones que utilizaron para describir tanto la distribución de velocidades como la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión.

Al efectuar el producto de u por C, señalado en la ec. 4.1, generalmente resultan funciones muy difíciles de integrar directamente, por lo que la mayoría de los autores resolvieron dicha integral para diferentes condiciones hidráulicas y sus resultados fueron dibujados en gráficas; debido a esto y a que cada uno de los métodos normalmente aparecen variables diferentes, no fué posible hacer una comparación en un plano adimensional entre ellos, como se pretendía.

A continuación se hará una revisión de los aspectos más importantes tenidos en cuenta en el desarrollo de cada uno de los métodos presentados en el cap. 4

5.1 Método de Lane y Kalinske

La distribución de la concentración de sedimentos utilizada en este método fue desarrollada por el mismo y corresponde a la ec. (2.2.1.7), la cual ya fué ampliamente discutida en el subcapítulo 3.2.2. Las conclusiones a las que se llegó en dicha discusión, en forma resumida fueron: La predicción de la concentración, abajo del nivel "y" igual a 0.6d, es mucho mayor que los valores reales, alcanzando diferencias hasta de un 200%, mientras que arriba de este nivel se ajusta prácticamente a la distribución real de la concentración de sedimentos.

Esta sobrevaluación de "C" lógicamente repercute también en una predicción del transporte de fondo en suspensión mayor que el real, pues como se observa en la ec. (4.1), g_{BS} y C están en relación directa.

Por otro lado, tal como se señaló en el cap. 3, muchos investigadores llegaron a la conclusión de que una distribución de velocidades desarrollada para flujo con agua clara, no es apropiada en el caso de que el agua esté mezclada con sedimentos, aspecto que no fué tenido en cuenta por Lane y Kalinske al utilizar la distribución de velocidades desarrollada por Prandtl-Von Karman, (ec. 4.1.3), la cual está indicada para flujo sin sedimentos. A pesar de no haber tenido en cuenta este aspecto, es posible que contribuya a que el valor de g_{BS} predicho por la ec. (4.1.9) se acerque un poco más a la realidad, dado que como se discutió antes, la presencia de sedimentos disminuye el valor de κ, lo que aumenta la velocidad del flujo. Por tanto el considerar una distribución de velocidades menor que la real, cuando la distribución de la concentración de sedimentos que se utiliza predice valores muy altos, en cierta forma se compensa. Otro aspecto de señalar en el desarrollo de Lane y Kalinske es el haber tomado como límite inferior de integración el nivel "y" igual a cero, lo cual significa considerar que en el espesor donde se realiza el transporte de la capa de fondo g_B, también se produce transporte de fondo en suspensión. Esto está en desacuerdo con los otros metodos discutidos, quienes tomaron en cuenta una distancia arriba del fondo a partir de la cual consideraron que se realiza el transporte de fondo en suspensión y por tanto, este sería el límite inferior de la integral correspondiente a la ec. 4.1, lo cual parece muy lógico; como ejemplos se puede citar a Einstein y Toffaleti, quienes sugieren que esta distancia es 2Di, o Chang - Simons y Richardson quienes establecen una función para valuarla (ec. 4.6.18).

5.2 Método de Einstein

Es tal vez el método más conocido, aunque sus predicciones no son muy precisas. La distribución de velocidades utilizada por Einstein, ec. 4.2.2, no fué desarrollada para flujo mezclado con sedimentos, lo cual como se discutió en el subcapítulo 3.1 generó que sus predicciones den valores menores que los medidos; por otro lado el hecho de considerar en dicha distribución solamente la velocidad al cortante asociada a las partículas hace que los valores que tome "u" sean aún más pequeños, puesto que u y U_* son directamente proporcionales, y U_*' es menor que U_*.

De acuerdo a la ec. 4.1, el hecho de que u sea más pequeña que el valor real hace que las predicciones de g_{BS} sean subestimadas.

La función de distribución de la concentración de sedimentos utilizada por Einstein, es la desarrollada por Rouse y corresponde a la ec. 2.1.39 en la cual, como se señaló en el subcapítulo 3.2.1, debe notarse que cuando el sedimento en suspensión es fino describe muy bien la distribución de la concentración de sedimentos pero a medida que el sedimento va creciendo de tamaño la tendencia de esta función es a predecir valores de C más grandes que los medidos sin que esa diferencia llegue a ser muy significativa para fines prácticos.

Para aplicar este método se puede usar la ec. 4.2.11 en el caso de que el material en suspensión sea más o menos uniforme; cuando este no sea uniforme, se puede usar las ecs. 4.2.1.3 ó 4.2.2.5, según si se conoce la concentración al nivel 2Di ó el transporte en la capa de fondo respectivamente. Como se observa, en estas ecuaciones aparecen muchas variables a determinar, lo que hace complicada la aplicación del método.

5.3 Método de Velikanov (Teoría Gravitacional)

Este método se basa en el balance de energía en el transporte de sedimentos, considerando por separado la fase fluida y la fase sólida, lo cual ha sido muy criticado.

Velikanov desarrolla su método de transporte a partir de la función que relaciona la energía generada por la fase fluida con el trabajo producido por las fuerzas de fricción en el flujo y el trabajo necesario para mantener los sólidos de suspensión, (ec. 4.3.1).

La simplificación hecha a la ec. (4.3.1), al considerar que el término $(1-\overline{C}_v)$ vale uno, parece no estar justificada, ya que esto significa que $\overline{C}$ valga cero, en cuyo caso no habría transporte de sedimentos en suspensión, lo cual no es cierto.

Independientemente de estos comentarios, habría que aplicar el método en condiciones en donde se conozca, mediante mediciones, cual es el transporte de sedimentos en suspensión, para poder apreciar que tan buenas son las predicciones respecto a dichas mediciones.

5.4 Método de Brooks

Los fundamentos teóricos utilizados por Brooks, prácticamente son los mismos que los de Einsten, solo que con algunas variantes que hacen más fácil la aplicación del método, pero que no alterarán los resultados. Entre las simplificaciones hechas se destaca el haber utilizado la función de distribución de concentraciones desarrollada por Rouse a partir del conocimiento de la concentración de sedimentos a d/2, la cual experimentalmente es más fácil de determinar que a 2D, tal como lo propone Einstein.

Por otro lado, las integrales que aparecen en las ecs. (4.4.9 ó 4.4.13), prácticamente son las mismas que resultaron en el desarrollo del método de Einstein (ec. 4.2.10). Brooks resolvió estas dos integrales y sus resultados los dibujos en una sola gráfica, mientras que Einstein hizo una gráfica para cada integral, lo cual muestra una ventaja más para aplicar el método de Brooks que el de Einstein.

Los comentarios pertinentes en cuanto a la distribución de la concentración de sedimentos utilizado por Brooks, ya fueron hechos, tanto en el subcapítulo 3.2.1 como en el 5.2.

Finalmente, al igual como se ha dicho para los otros métodos discutidos, es necesario comparar los resultados predichos por este método, con datos medidos, para así poder decir algo más respecto a su confiabilidad.

5.5 Método de Bagnold

Este método no ha sido muy aceptado debido a que la cantidad de energía requerida para transportar sedimentos, es un pequeño porcentaje de la energía total expedida por la corriente, y consecuentemente, estimar los parámetros en la ecuación de energía induce a cometer grandes errores, tal como lo señala Shen, ref. (33).

Las predicciones de este método fueron comparadas con resultados experimentales reportados por Gilbert, Laursen, Simons-Richardson y Albertson, observándose en la mayoría de los casos buena concordancia. También se hicieron comparaciones con mediciones hechas en los ríos Colorado, Elkhorn y Grande, en los que también según Bagnold, los resultados del método son bastante acertados.

5.6 Método de Chang - Simons y Richardson

De acuerdo con la comparación de métodos de distribución de concentración realizada en este trabajo, la cual fué discutida en el subcapítulo 3.2.6 y concluida en el capítulo

6, se encontró que el valor de 1.5 dado para β por Chang - Simon y Richardson es muy alto, puesto que para estas condiciones, la predicción de la distribución de concentraciones con κ valuado mediante la fig. 2.2.5.1 es mucho mayor que la real; además se encontró que si β vale 1.5, con κ aproximadamente igual a 0.23 se logra el mejor ajuste entre la teoría, de acuerdo a este método, y las mediciones.

Según estas conclusiones, es de esperarse entonces que las predicciones de transporte de sedimentos de fondo en suspensión hechas por este método, (con β = 1.5 y κ valuado con la fig. 2.2.5.1), resulten mucho más grandes que el arrastre medido en el cauce.

Otro aspecto desfavorable de este método es la dificultad relativa para su aplicación, dado que aparte de necesitarse conocer las características hidráulicas y de los sedimentos, es necesario utilizar 5 figuras.

5.7 Método de Toffaleti

Este método, a pesar de valuar el transporte de sedimentos de fondo en suspensión siguiendo la formulación teórica general dada por la ec. (4.1), no deja de ser empírico, dado que tanto la distribución de velocidades, ec. (4.7.1), como las distribuciones de concentración de sedimentos, ecs. (4.7.3, 4.7.5 y 4.7.6), fueron desarrolladas en forma empírica.

Independientemente de la exactitud, hay que decir que es un método un poco complicado de aplicar, especialmente porqué para valuar el transporte total de sedimentos de fondo en suspensión de cada fracción granulométrica, es necesario aplicar tres fórmulas diferentes, correspondientes a las tres zonas en que Toffaleti dividió la profundidad del flujo, y esto multiplicado por todas las fracciones en que se haya dividido la curva granulométrica, implica gran trabajo. Además, para cada cálculo hay que utilizar 3 gráficas, lo que aún dificulta más el cálculo.

Los resultados de este método fueron provados por Toffaleti con 339 mediciones en ríos y 282 mediciones en canales de laboratorio, y encontró que su método es aplicable en un amplio rango de condiciones.

5.8 Método de Einstein y Abdel - Aal

La única diferencia de este método con el de Einstein publicado en 1950, radica en la corrección que se le hace al valor de la constante universal de Von Karman (κ), para lo cual se utiliza la fig. 4.8.1.

De acuerdo a la discusión hecha en el subcapítulo 3.1, la corrección hecha por Einstein y Abdel - Aal a la constante κ, seguramente conlleva a una mejor predicción del transporte de sedimentos de fondo en suspensión, pues como allí se dijo, mu-

muchos investigadores han demostrado que la presencia de sedimentos en el flujo hace decrecer el valor de κ.

Si se observa la fig. 4.8.1, la cual según Einstein y Abdel - Aal debe usarse para encontrar κ, se aprecia que el valor de esta constante puede fluctuar entre 0.03 y 0.4, lo cual en cierta forma esta en desacuerdo con Ismail e Ippen, quienes encontraron que el decrecimiento máximo de κ llega hasta 0.20, aunque como se puede ver en la misma figura, el mayor número de datos experimentales utilizados para construir la gráfica, especialmente los correspondientes a pruebas en ríos, se encuentran en el rango para κ de 0.2 a 0.4.

A pesar de que no se cuenta en esta discusión con datos reales de transporte de sedimento en suspensión, con seguridad se puede decir que este método da mejores predicciones que el original de Einstein publicado en 1950.

5.9 Método de Itakura y Kishi

En cuanto a la función de distribución de la concentración de sedimentos, utilizada en el desarrollo de este método, de acuerdo a la comparación de métodos que se hizo en este trabajo, hay que decir que es muy buena, tal como se señala en el subcapítulo 3.1.11 y en el cap. 6.

Por otro lado, hay que resaltar el hecho de que a diferencia de la mayoría de los otros métodos ya discutidos, Itakura y Kishi utiliza una función de distribución de velocidades desarrollada para flujo mezclado con sedimentos, lo cual garantiza mejores resultados.

Una ventaja adicional de este método, es la posibilidad de valuar la concentración de referencia Ca, a partir del conocimiento de las características hidráulicas y de los sedimentos, lo cual evita tener que tomar muestras de concentración.

Como se observa, los fundamentos teóricos utilizados por Itakura y Kishi son muy buenos, por lo que se espera que su método para valuar el transporte de sedimentos de fondo en suspensión también lo sea; sin embargo, habrá necesidad de comparar los resultados predichos por el método con datos conocidos, para hacer una mejor evaluación.

6. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES GENERALES

6.1 Métodos de distribución de la concentración de sedimentos

En el capítulo 3 se discutieron y comentaron todos los métodos de distribución de concentraciones de sedimentos en suspensión presentados en el cap. 2. En dicha discusión se analizó el comportamiento de las variables que intervienen en el fenómeno de suspensión de sedimentos, así como los fundamentos teóricos utilizados en el desarrollo de cada uno de los métodos. También se incluyó una comparación cualitativa del comportamiento de 7 métodos de distribución de concentraciones que fueron posible transformar a los parámetros adimensionales y/d, C/Ca y Z, frente a 8 juegos de datos experimentales.

En la tabla 6.1.1, se presentan los métodos comparados, junto con sus ecuaciones transformadas a los parámetros dimensionales.

En las figuras 3.2.1 a 3.2.7 aparecen dibujados tanto los datos experimentales utilizados en la comparación como los resultados predichos por cada uno de los métodos que se pudieran adimensionalizar, en donde cada Z está determinada por las condiciones tanto hidráulicas como de los sedimentos correspondientes a cada experimento.

Con el propósito de establecer parámetros más prácticos e ingenieriles, respecto a los métodos que fué posible comparar, en este capítulo se hará un análisis estadístico, cualitativo y cuantitativo, del error con que cada uno de ellos predice frente a los datos experimentales.

Para el análisis estadístico, hubo necesidad de determinar algunos parámetros, los cuales están agrupados en las tablas 6.1.2 a 6.1.7, que a continuación se explican.

En cada uno de los experimentos, para todos los valores de y/d en los cuales se disponía de los valores de C/Ca experimentales, se aplicaron los métodos que aparecen en la tabla 6.1.1 y los resultados se agruparon como se observa en la tabla 6.1.2 a 6.1.5, en las cuales también aparece la diferencia entre C/Ca calculado con todos los métodos y C/Ca medido, denotada por $\dot{\nabla}$, es decir

$$\nabla = \left(\frac{C}{Ca}\right)_{Calculado} - \left(\frac{C}{Ca}\right)_{Medido} \tag{6.1.1}$$

Dado que la comparación se establece entre valores medidos y calculados de C/Ca, el error valuado en este estudio es relativo con respecto a Ca.

Para cada uno de los experimentos, el intervalo de error en porcentaje de Ca, obtenido de cada método y para cada Z, se valuó como:

$$\bar{e} = (\bar{\nabla} \pm \sigma)\ 100 \tag{6.1.2}$$

donde $\bar{\nabla}$ es el valor medio de los errores para cada Z, igual a

$$\bar{\nabla} = \frac{1}{n}\ \Sigma\ \nabla \tag{6.1.3}$$

y σ es la desviación estandar de los valores de $\frac{C}{Ca}$ medidos, alrededor de la media de los errores, para cada Z, expresada como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\ \Sigma\ (\nabla - \bar{\nabla})^2} \tag{6.1.4}$$

En la tabla 6.1.6a se presenta un resúmen de los valores resultantes de $\bar{\nabla}$ y σ para todos los métodos presentados en la tabla 6.1.1 y para los 8 juegos de datos experimentales con los que se estableció la comparación. En la tabla 6.1.6b se sintetizan los intervalos de error en porcentaje de Ca, ec. (6.1.2), predichos por cada uno de los métodos respecto a los datos experimentales. En la tabla 6.1.7 se muestra el intervalo de error promedio en porcentaje de Ca, obtenido con cada método respecto a los 8 juegos de datos experimentales.

En las tablas 6.1.2 a 6.1.7, el signo menos que aparece tanto para ∇ como para los límites del porcentaje de error, significa que el valor de C/Ca calculado es menor que C/Ca medido, y el signo positivo representa el caso contrario.

En función de la media de los errores $\overline{\nabla}$ y de la desviación estandar de los valores de C/Ca medidos alrededor de $\overline{\nabla}$, se puede estimar la bondad de cada uno de los métodos para predecir la distribución de la concentración de sedimentos.

Así, la media de los errores permite determinar si un método sobrestima o no la concentración de sedimentos; si esta resulta positiva significa que las predicciones en promedio son mayores que los valores medidos de concentración, o lo contrario si resulta negativa. A pesar de que $\overline{\nabla}$ no es el mejor parámetro que permita establecer que tan bueno o malo es un ajuste (debido a que los errores positivos pueden llegar a anular los errores negativos) para el caso particular de la comparación que aquí se reporta, la magnitud de $\overline{\nabla}$ si da una idea de que tan desviadas están las predicciones de los valores reales, especialmente para algunos métodos como el de Lane y Kalinske, Rouse, Einstein y Chien y Velikanov, en los cuales, como se puede ver en las figs. 3.2.1 y 3.2.7, sus curvas casi en todos los casos están por encima de los valores reales, lo cual también se puede constatar en las tablas 6.1.2 a 6.1.5, en donde ∇ es prácticamente mayor que cero en todos los casos.

Por otro lado, la desviación estandar permite establecer que tan apropiada es la función desarrollada por cada uno de los métodos para predecir la distribución de la concentración de sedimentos; una desviación estandar pequeña significa que las predicciones del método siguen la forma de la distribución real de la concentración de sedimentos, mientras que una desviación estandar grande indica lo contrario.

Aunque los dos parámetros, $\overline{\nabla}$ y σ caracterizan a cada método en aspectos diferentes, ambos son necesarios para determinar su calidad.

En general cuando $\overline{\nabla}$ y σ son pequeños se dice que el método es muy bueno; si $\overline{\nabla}$ resulta grande pero σ pequeño, significa que las predicciones del método siguen la forma de la distribución real, pero que sobrestima o subestima la concentración.

Si este fuese el caso, el método facilmente podría mejorarse, incluyendo un factor de corrección.

Cuando $\overline{V}$ es pequeño pero σ grande, prácticamente se puede decir que el método no es adecuado para predecir la distribución de la concentración de sedimentos.

El caso más extremo se da si $\overline{V}$ y σ resultan grandes, en cuyo caso prácticamente hay que desechar el método.

En la tabla 6.1.6a se encuentran resumidos los valores de $\overline{V}$ y σ correspondientes a los 7 métodos que se están comparando, y para los 8 juegos de datos experimentales de que se dispuso para esta comparación. Teniendo en cuenta la incidencia de cada uno de estos parámetros antes señalada, se puede concluir lo siguiente:

1. En general todos los métodos tienen tendencia a sobrestimar la concentración de sedimentos, dado que $\overline{V}$ en casi todos los casos resultó positiva.

2. En el método de Lane y Kalinske, los valores de $\overline{V}$, además de resultar positivos en todas las pruebas, son aproximadamente 5 veces más grandes que los correspondientes a los métodos de Rouse, Einstein y Chien y Velikanov; 10 veces más grandes que los correspondientes a los métodos de Chang - Richard y Simons y Hunt y 20 veces mayor que los correspondientes al método de Itakura y Kishi, lo cual en cierta forma nos indica que sus predicciones están más alejadas de los valores medidos, respecto a las predicciones hechas por los demás métodos.

Por otro lado, para este mismo método, los valores correspondientes a la desviación estandar, resultaron ser entre 6 y 8 veces más grandes que los correspondientes a los demás métodos, lo cual muestra que sus predicciones están muy dispersas alrededor de la curva que mejor ajusta a los datos experimentales y por tanto, la función desarrollada por este método no es adecuada para predecir la distribución de la concentración de sedimentos.

3. Los métodos de Rouse, Einstein y Chien y Velikanov, para todos los experimentos predicen los mismos resultados, y por tanto los valores de $\bar{\nabla}$ y σ son iguales para los tres métodos.

Estos métodos, también tienen tendencia a sobrestimar la concentración de sedimentos, puesto que para todos los experimentos tenidos en cuenta en este análisis, $\bar{\nabla}$ resultó positiva; sin embargo, hay que observar que a pesar de ello, el valor medio de sus errores resultó ser aproximadamente una quinta parte de las encontradas para el método de Lane y Kaliske.

Por otro lado, el valor de su desviación estandar está alrededor de 0.018 y es aproximadamente una sexta parte de la encontrada para el método de Lane y Kalinske. Como se observa, el valor de σ es muy pequeño, lo que significa que la forma de la distribución de la concentración de sedimentos descrita por estos métodos es muy semejante a la distribución real.

Las causas por las cuales estos métodos sobrestiman la concentración, ya fueron analizadas en el cap. 3, en la sección correspondiente a la discusión de cada método.

4. Los tres métodos restantes, es decir, el de Hunt, Chang - Simons y Richardson e Itakura y Kishi, son los que presentan mejores características estadísticas, notándose cierta ventaja en el método de Itakura y Kishi respecto a $\overline{\nabla}$, pero con una menor desviación estandar en el método de Hunt, lo cual confirma que los fundamentos teóricos utilizados en la deducción de este método son excelentes, tal como se señaló en el subcapítulo 3.2.4

Para ver más claramente el error con que cada uno de los métodos predijo respecto a los datos experimentales, en función tanto de $\overline{\nabla}$ como de σ, en la tabla 6.1.6b se presentan los intervalos de error en porcentaje de Ca, calculados mediante la ec. 6.1.2, y como síntesis de esta comparación de métodos de distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, en la tabla 6.1.7 se presentan los intervalos de error en porcentaje de Ca promedios, con que cada método predijo la concentración respecto a todos los datos experimentales utilizados en esta comparación.

Los resultados que aquí se observan, confirman las conclusiones hechas en función de $\overline{V}$ y σ, esto es: a) El Método de Lane y Kalinske es el más desviado de la realidad y sus predicciones en promedio llegan a ser, de un 21 porciento de Ca mayores que los valores medidos, lo que da muestra de su poca exactitud, por lo que no se recomienda su uso.

b) Los métodos de Rouse, Einstein y Chien y Velikanov a pesar de que su intervalo de error es positivo, su sobrestimación solo llega a ser de un 4 por ciento de Ca, lo cual para fines prácticos se puede decir que es excelente. Dado que estos tres métodos conducen a los mismos valores de la distribución de la concentración de sedimentos, se recomienda usar el método de Rouse por ser de más fácil aplicación.

c) Los métodos de Hunt, Chang - Simons y Richardson e Itakura y Kishi son los que mejor se ajustan a los datos experimentales, y su intervalo de error en sus predicciones es prácticamente el mismo, con una sobrestimación máxima del orden de 2.7%. Aunque se observa una mayor precisión en el método de Hunt, este tiene el inconveniente de que su fórmula contiene 2 constantes (B_{2S} y κ), las cuales deben ser valuadas mediante mediciones directas al momento de aplicar el método, por lo que para fines prácticos tanto por la precisión en la predicción de la concentración de sedimentos, como por la facilidad para aplicar el método, de acuerdo a este estudio se recomienda usar el de Itakura y Kishi.

FIGURA 6.1.1 METODOS DE DISTRIBUCION DE LA CONCENTRACION DE SEDIMENTO DE FONDO EN SUSPENSION

METODO	ECUACION TRANSFORMADA A LOS PARAMETROS ADIMENSIONALES	OBSERVACIONES
ROUSE (1937)	$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{1 - E}{19\ E}\right)^{Z}$	
LANE Y KALISKE (1941)	$\frac{C}{Ca} = \exp\ (0.3Z - 6EZ)$	
EINSTEIN Y CHIEN (1952)	$\frac{C}{Ca} = \left[\frac{0.02532}{1 - \sqrt{1 - E}}\right]^{\frac{Z}{1 - \kappa NZ}} \left[\frac{1.97468}{1 + \sqrt{1 - E}}\right]^{\frac{Z}{1 - \kappa NZ}} \left[\frac{\sqrt{0.95} + \kappa NZ}{\sqrt{1 - E} + \kappa NZ}\right]^{\frac{2Z}{\kappa^2 N^2 Z^2 - 1}}$	N y κ son constantes que deben ser valuadas directamente en el lugar donde se va a aplicar el método. De acuerdo a este estudio el mejor ajuste se logra Para N = 0.00001 y κ = 0.40
HUNT (1954)	$\frac{C}{Ca} = \left[\left(\frac{1 - E}{0.95}\right)^{1/2} \left[\frac{B_{2S} - (0.95)^{1/2}}{B_{2S} - (1 - E)^{1/2}}\right]\right]^{\frac{0.47}{B_{2S}\kappa_S}}$	B_{2S} y κ_S son constantes y que se deben valuar mediante mediciones directas en el lugar donde se aplique el método. De acuerdo a los datos reales disponibles en este estudio, el mejor ajuste se logra para B_{2S} = 1.0 y κ_S = 0.36
VELIKANOV (1954)	$\frac{C}{Ca} = \left[\frac{1 - E}{\alpha + E} \ \frac{\alpha + 0.05}{0.95}\right]^{\frac{Z}{1 + \alpha}}$	α es la rugosidad relativa de Nikuradze para pared hidraulicamente rugosa, y es igual a D/30 d
CHANG - SIMON y RICHARDSON (1967)	$\frac{C}{Ca} = \left(\frac{0.11324\sqrt{E}}{1 - \sqrt{1 - E}}\right)^{1.333\ Z\ \frac{04}{\kappa}}$	κ es la constante de Von Karman, que según este método, su valor fluctua entre 0.2 y 0.4
ITAKURA Y KISHI (1980)	$\frac{C}{Ca} = \left[\left(\frac{1 - E}{0.95}\right)^{1 + \phi_*} \left(\frac{1}{20E}\right)\right]^{Z}$	ϕ_* es un factor, el cual de acuerdo a este estudio toma un valor aproximadamente igual a 0.5

TABLA 6.1.2 DIFERENCIAS ∇ ENTRE C/Ca MEDIDOS Y ESTIMADOS CON LOS DIFERENTES METODOS

y/d	C/Ca Medido	Rouse	∇	Lane y Kalinske	∇	Einstein y Chien	∇	Hunt	∇	Veli-kanov	∇	Chang-Simons y Richard-son	∇	Itaku-ra y Kishi	∇
0.8760	0.0080	0.0096	0.0016	0.0092	0.0011	0.0096	0.0016	0.0113	0.0033	0.0097	0.0016	0.0188	0.0108	0.0037	0.0043
0.7390	0.0074	0.0229	0.0155	0.0199	0.0125	0.0229	0.0155	0.0225	0.0151	0.0229	0.0155	0.0289	0.0215	0.0124	0.0050
0.6105	0.0310	0.0402	0.0092	0.0414	0.0104	0.0402	0.0092	0.0366	0.0056	0.0402	0.0092	0.0417	0.0107	0.0263	0.0047
0.4920	0.0350	0.0634	0.0284	0.0811	0.0461	0.0634	0.0284	0.0558	0.0208	0.0634	0.0284	0.0594	0.0244	0.0471	0.0121
0.3520	0.0720	0.1096	0.0376	0.1797	0.1077	0.1096	0.0376	0.0954	0.0234	0.1096	0.0376	0.0963	0.0243	0.0914	0.0194
0.3065	0.1100	0.1332	0.0232	0.2327	0.1227	0.1332	0.0232	0.1162	0.0062	0.1332	0.0232	0.1159	0.0059	0.1148	0.0048
0.2210	0.1300	0.2027	0.0727	0.3784	0.2484	0.2027	0.0727	0.1793	0.0493	0.2028	0.0728	0.1761	0.0461	0.1846	0.0546
0.0880	0.5200	0.5632	0.0432	0.8057	0.2857	0.5631	0.0431	0.5342	0.0142	0.5632	0.0432	0.5259	0.0059	0.5524	0.0324
			$\bar{\nabla}$=0.0289		$\bar{\nabla}$=0.1043		$\bar{\nabla}$=0.0289		$\bar{\nabla}$=0.0172		$\bar{\nabla}$=0.0289		$\bar{\nabla}$=0.0137		$\bar{\nabla}$=0.0149
			σ=0.0210		σ=0.1033		σ=0.0210		σ=0.0139		σ=0.0210		σ=0.0126		σ=0.0189

(a) Prueba correspondiente a z = 0.9473

y/d	C/Ca Medido	Rouse	∇	Lane y Kalinske	∇	Einstein y Chien	∇	Hunt	∇	Veli-kanov	∇	Chang-Simons y Ri-chardson	∇	Itaku-ra y Kishi	∇
0.6675	0.0012	0.0019	0.0007	0.0017	0.0005	0.0019	0.0007	0.0017	0.0005	0.0019	0.0007	0.0024	0.0012	0.0008	0.0004
0.5013	0.0040	0.0063	0.0023	0.0095	0.0056	0.0063	0.0023	0.0051	0.0011	0.0063	0.0023	0.0057	0.0017	0.0036	0.0004
0.3350	0.0090	0.0207	0.0117	0.0532	0.0442	0.0207	0.0117	0.0161	0.0071	0.0207	0.0117	0.0163	0.0073	0.0153	0.0063
0.2495	0.0200	0.0423	0.0223	0.1282	0.1082	0.0423	0.0223	0.0335	0.0135	0.0423	0.0223	0.0327	0.0127	0.0346	0.0146
0.1640	0.0730	0.1046	0.0316	0.3092	0.2362	0.1046	0.0316	0.0867	0.0137	0.1046	0.0316	0.0832	0.0102	0.0937	0.0207
0.1260	0.1200	0.1774	0.1574	0.4573	0.3373	0.1774	0.0574	0.1525	0.0325	0.1775	0.0575	0.1467	0.0267	0.1652	0.0452
			$\bar{\nabla}$=0.0210		$\bar{\nabla}$=0.1220		$\bar{\nabla}$=0.0210		$\bar{\nabla}$=0.0114		$\bar{\nabla}$=0.0210		$\bar{\nabla}$=0.0100		$\bar{\nabla}$=0.0143
			σ=0.0196		σ=0.1251		σ=0.0196		σ=0.0108		σ=0.0196		σ=0.0086		σ=0.0158

(b) Prueba correspondiente a z = 1.716

TABLA 6.1.3 DIFERENCIAS ∇ ENTRE C/C_a MEDIDOS Y ESTIMADOS CON LOS DIFERENTES METODOS

y/d	C/C_a Medido	Rouse	∇	Lane y Kalinske	∇	Einstein y Chien	∇	Hunt	∇	Veli-kanov	∇	Chang-Simons y Richard-son	∇	Itakura y Kishi	∇
0.92	0.026	0.0399	0.0139	0.0441	0.0181	0.0399	0.0139	0.0477	0.0217	0.0399	0.0139	0.0730	0.0470	0.0190	$\bar{0}.0070$
0.92	0.03	0.0399	0.0099	0.0441	0.0141	0.0399	0.0099	0.0477	0.0177	0.0399	0.0099	0.0730	0.0430	0.0190	$\bar{0}.0110$
0.848	0.04	0.0615	0.0215	0.0571	0.0171	0.0615	0.0215	0.0657	0.0257	0.0615	0.0215	0.0864	0.0464	0.0356	$\bar{0}.0044$
0.848	0.048	0.0615	0.0135	0.0571	0.0091	0.0615	0.0135	0.0657	0.0177	0.0615	0.0135	0.0864	0.0384	0.0356	$\bar{0}.0124$
0.687	0.097	0.1074	0.0104	0.1017	0.0047	0.1074	0.0104	0.1036	0.0066	0.1074	0.0104	0.1172	0.0202	0.0771	$\bar{0}.0199$
0.634	0.097	0.1238	0.0268	0.1230	0.0260	0.1238	0.0268	0.1174	0.0204	0.1238	0.0268	0.1290	0.0320	0.0931	$\bar{0}.0039$
0.634	0.12	0.1238	0.0038	0.1230	0.0030	0.1238	0.0038	0.1174	$\bar{0}.0026$	0.1238	0.0038	0.1290	0.0090	0.0931	$\bar{0}.0269$
0.515	0.14	0.1659	0.0259	0.1885	0.0485	0.1658	0.0258	0.1535	0.0135	0.1659	0.0259	0.1609	0.0209	0.1356	$\bar{0}.0044$
0.43	0.17	0.2035	0.0335	0.2558	0.0858	0.2035	0.0335	0.1868	0.0168	0.2035	0.0335	0.1911	0.0211	0.1747	0.0047
0.43	0.18	0.2035	0.0235	0.2558	0.0758	0.2035	0.0235	0.1868	0.0068	0.2035	0.0235	0.1911	0.0111	0.1747	$\bar{0}.0053$
0.335	0.23	0.2590	0.0290	0.3597	0.1297	0.2590	0.0290	0.2374	0.0074	0.2591	0.0291	0.2381	0.0081	0.2328	0.0028
0.297	0.25	0.2878	0.0378	0.4122	0.1622	0.2878	0.0378	0.2641	0.0141	0.2878	0.0378	0.2634	0.0134	0.2630	0.0130
0.297	0.26	0.2878	0.0278	0.4122	0.1522	0.2878	0.0278	0.2641	0.0041	0.2878	0.0278	0.2634	0.0034	0.2630	0.0030
0.297	0.28	0.2878	0.0078	0.4122	0.1322	0.2878	0.0078	0.2641	$\bar{0}.0159$	0.2878	0.0078	0.2634	$\bar{0}.0166$	0.2630	0.0170
0.24	0.33	0.3425	0.0125	0.5057	0.1757	0.3425	0.0125	0.3160	$\bar{0}.0140$	0.3425	0.0125	0.3130	$\bar{0}.0170$	0.3204	$\bar{0}.0096$
0.22	0.30	0.3664	0.0664	0.5434	0.2434	0.3664	0.0664	0.3391	0.0391	0.3665	0.0665	0.3353	0.0353	0.3455	0.0455
0.22	0.35	0.3664	0.0164	0.5434	0.1934	0.3664	0.0164	0.3391	$\bar{0}.0109$	0.3665	0.0165	0.3353	$\bar{0}.0147$	0.3455	$\bar{0}.0045$
0.164	0.41	0.4553	0.0453	0.6643	0.2543	0.4553	0.0453	0.4264	0.0164	0.4554	0.0454	0.4205	0.0105	0.4382	0.0232
			$\bar{\nabla}$=0.0237		$\bar{\nabla}$=0.0970		$\bar{\nabla}$=0.0237		$\bar{\nabla}$=0.0103		$\bar{\nabla}$=0.0237		$\bar{\nabla}$=0.0173		$\bar{\nabla}$=$\bar{0}.0013$
			σ=0.0150		σ=0.0829		σ=0.0150		σ=0.0139		σ=0.0150		σ=0.0200		σ=0.0165

(a) Prueba correspondiente a z = 0.598 z = 0.369

y/d	C/C_a Medido	Rouse	∇	Lane y Kalinske	∇	Einstein y Chien	∇	Hunt	∇	Veli-kanov	∇	Chang-Simons y Richard-son	∇	Itakura y Kishi	∇
0.960	0.12	0.1044	$\bar{0}.0156$	0.1334	0.0134	0.1044	$\bar{0}.0156$	0.1268	0.0068	0.1044	$\bar{0}.0156$	0.1845	0.0645	0.0582	$\bar{0}.0618$
0.776	0.18	0.2133	0.0333	0.2004	0.0204	0.2133	0.0333	0.2143	0.0343	0.2133	0.0333	0.2409	0.0609	0.1634	$\bar{0}.0166$
0.648	0.31	0.2694	$\bar{0}.0406$	0.2661	$\bar{0}.0439$	0.2694	$\bar{0}.0406$	0.2614	$\bar{0}.0486$	0.2694	$\bar{0}.0406$	0.2782	$\bar{0}.0318$	0.2243	$\bar{0}.0357$
0.430	0.40	0.3744	$\bar{0}.0256$	0.4311	0.0311	0.3744	$\bar{0}.0256$	0.3551	$\bar{0}.0449$	0.3744	$\bar{0}.0256$	0.3602	$\bar{0}.0398$	0.3407	$\bar{0}.0593$
0.240	0.49	0.5163	0.0263	0.6566	0.1666	0.5163	0.0262	0.4912	0.0012	0.5163	0.0263	0.4884	$\bar{0}.0016$	0.4954	0.0054
0.216	0.60	0.5429	$\bar{0}.0571$	0.6924	0.0924	0.5429	$\bar{0}.0571$	0.5177	$\bar{0}.0823$	0.5429	$\bar{0}.0571$	0.5141	$\bar{0}.0859$	0.5240	$\bar{0}.0760$
0.297	0.730	0.8177	0.0877	0.8666	0.1366	0.8177	0.0877	0.8065	0.0765	0.8178	0.0878	0.8061	0.0761	0.8059	0.0759
0.240	0.70	0.8411	0.1411	0.8957	0.1957	0.8411	0.1411	0.8302	0.1302	0.8411	0.1411	0.8289	0.1289	0.8321	0.1321
0.145	0.880	0.8931	0.0131	0.9464	0.0664	0.8931	0.0131	0.8845	0.0045	0.8931	0.0131	0.8825	0.0025	0.8886	0.0086
0.062	0.900	0.9782	0.0782	0.9931	0.0931	0.9782	0.0782	0.9762	0.0762	0.9782	0.0782	0.9755	0.0755	0.9776	0.0776
			$\bar{\nabla}$=0.1079		$\bar{\nabla}$=0.1330		$\bar{\nabla}$=0.1079		$\bar{\nabla}$=0.1006		$\bar{\nabla}$=0.1079		$\bar{\nabla}$=0.1057		$\bar{\nabla}$=0.0884
			σ=0.0448		σ=0.0380		σ=0.0448		σ=0.0463		σ=0.0448		σ=0.0518		σ=0.0371

(b) Prueba correspondiente a z = 0.0966

TABLA 6.1.4 DIFERENCIAS ∇, ENTRE C/Ca MEDIDOS Y ESTIMADOS CON LOS DIFERENTES MÉTODOS

y/d	C/Ca Medido	Rouse	∇	Lane y Kalinske	∇	Einstein y Chien	∇	Hunt	∇	Veli-kanov	∇	Chang-Si-mons y Richard-son	∇	Itakura y Kishi	∇
0.9150	0.0600	0.0615	0.0015	0.0659	0.0059	0.0615	0.0015	0.0712	0.0112	0.0615	0.0015	0.1021	0.0421	0.0327	$\bar{0}.0273$
0.8390	0.0700	0.0900	0.0200	0.0837	0.0137	0.0900	0.0200	0.0946	0.0246	0.0900	0.0200	0.1189	0.0484	0.0565	$\bar{0}.0135$
0.6870	0.1200	0.1416	0.0216	0.1350	0.0150	0.1416	0.0216	0.1372	0.0172	0.1416	0.0216	0.1529	0.0329	0.1059	$\bar{0}.0141$
0.5110	0.1800	0.2089	0.0289	0.2347	0.0547	0.2089	0.0289	0.1951	0.0151	0.2098	0.0289	0.2031	0.0231	0.1755	$\bar{0}.0045$
0.3440	0.2850	0.2998	0.0148	0.3968	0.1118	0.2998	0.0148	0.2776	$\bar{0}.0074$	0.2998	0.0148	0.2788	$\bar{0}.0062$	0.2721	$\bar{0}.0129$
0.2400	0.3400	0.3911	0.0511	0.5503	0.2103	0.3911	0.0511	0.3644	0.0244	0.3911	0.0511	0.3614	0.0214	0.3689	0.0289
0.1680	0.4500	0.4943	0.0443	0.6900	0.2400	0.4943	0.0443	0.4663	0.0163	0.4944	0.0444	0.4606	0.0106	0.4774	0.0274
			$\bar{\nabla}$=0.0260		$\bar{\nabla}$=0.0931		$\bar{\nabla}$ 0.0260		$\bar{\nabla}$=0.0145		$\bar{\nabla}$=0.0260		$\bar{\nabla}$=0.0246		$\bar{\nabla}=\bar{0}.0023$
			σ=0.0158		σ=0.0904		σ=0.0158		σ=0.0100		σ=0.0158		σ=0.0173		σ=0.0202

(a) Prueba correspondiente a z = 0.524

y/d	C/Ca Medido	Rouse	∇	Kalinske	∇	Einstein y Chien	∇	Hunt	∇	Veli-kanov	∇	Chang-Si-mons y Richard-son	∇	Itakura y Kishi	∇
0.7390	0.0034	0.0043	0.0009	0.0035	0.0001	0.0043	0.0009	0.0042	0.0008	0.0043	0.0009	0.0060	0.0026	0.0018	$\bar{0}.0016$
0.5580	0.0100	0.0129	0.0029	0.0155	0.0055	0.0129	0.0029	0.0110	0.0010	0.0130	0.0030	0.0127	0.0027	0.0077	$\bar{0}.0023$
0.3730	0.0250	0.0362	0.0112	0.0706	0.0456	0.0362	0.0112	0.0297	0.0047	0.0363	0.0113	0.0304	0.0054	0.0273	0.0023
0.3730	0.0290	0.0362	0.0072	0.3357	0.0416	0.0362	0.0072	0.0297	0.0007	0.0363	0.0073	0.0304	0.0014	0.0273	$\bar{0}.0017$
0.1830	0.0950	0.1379	0.0429	0.3357	0.2407	0.1379	0.0429	0.1174	0.0224	0.1379	0.0429	0.1138	0.0188	0.1244	0.0294
0.1830	0.1000	0.1379	0.0379	0.5794	0.2357	0.1379	0.0379	0.1174	0.0174	0.1379	0.0379	0.1138	0.0138	0.1244	0.0244
0.1165	0.2700	0.2847	0.0147	0.5794	0.3094	0.2847	0.0147	0.2547	$\bar{0}.0153$	0.2847	0.0147	0.2472	$\bar{0}.0228$	0.2709	0.0009
0.1165	0.3200	0.2847	$\bar{0}.0353$	0.8212	0.2594	0.2847	$\bar{0}.0353$	0.2547	$\bar{0}.0653$	0.2847	$\bar{0}.0353$	0.2472	0.0728	0.2709	$\bar{0}.0491$
0.0740	0.5200	0.5648	0.0448	1.0000	0.3012	0.5648	0.0448	0.5353	0.0153	0.5646	0.0448	0.5265	0.0065	0.5550	0.0350
0.0500	1.0000	1.0000	0.0000		0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0000
			$\bar{\nabla}$=0.0127		$\bar{\nabla}$=0.1439		$\bar{\nabla}$ 0.0127		$\bar{\nabla}=\bar{0}.0018$		$\bar{\nabla}$=0.0127		$\bar{\nabla}=\bar{0}.0044$		$\bar{\nabla}$=0.0037
			σ=0.0231		σ=0.1280		σ=0.0231		σ=0.0235		σ=0.0231		σ=0.0250		σ=0.0223

(b) Prueba correspondiente a z = 1.368

TABLA 6.1.5 DIFERENCIAS ∇ ENTRE C/C_a MEDIDOS Y ESTIMADOS CON LOS DIFERENTES METODOS

y/d	C/C_a Medido	Rouse	∇	Lane y Kalinske	∇	Einstein y Chien	∇	Hunt	∇	Velikanov	∇	Chang-Simons y Richardson	∇	Itakura y Kishi	∇
0.98	0.0013	0.0012	$\bar{0}.0001$	0.0043	0.0030	0.0012	$\bar{0}.0001$	0.0037	0.0014	0.0012	0.0001	0.0099	0.0086	0.0002	$\bar{0}.0011$
0.933	0.0033	0.0043	0.0010	0.0056	0.0023	0.0043	0.0010	0.0060	0.0027	0.0043	0.0010	0.0131	0.0098	0.0012	$\bar{0}.0021$
0.834	0.009	0.0112	0.0022	0.0098	0.0008	0.0112	0.0022	0.0123	0.0033	0.0112	0.0022	0.0188	0.0098	0.0047	$\bar{0}.0043$
0.739	0.012	0.0203	0.0083	0.0175	0.0055	0.0203	0.0083	0.0198	0.0078	0.0203	0.0083	0.0257	0.0137	0.0103	$\bar{0}.0012$
0.724	0.019	0.0219	0.0029	0.0192	0.0002	0.0219	0.0029	0.0211	0.0021	0.0219	0.0029	0.0269	0.0079	0.0119	$\bar{0}.0071$
0.648	0.022	0.0309	0.0089	0.0299	0.0079	0.0309	0.0089	0.0285	0.0065	0.0309	0.0089	0.0337	0.0117	0.0190	$\bar{0}.0030$
0.558	0.03	0.0447	0.0147	0.0507	0.0207	0.0447	0.0147	0.0399	0.0099	0.0447	0.0147	0.0441	0.0141	0.0306	0.0008
0.544	0.041	0.0473	0.0063	0.0551	0.0141	0.0473	0.0063	0.0420	0.0010	0.0473	0.0063	0.0460	0.0050	0.0330	$\bar{0}.0080$
0.458	0.050	0.0662	0.0162	0.0913	0.0413	0.0662	0.0162	0.0578	0.0078	0.0662	0.0162	0.0607	0.0107	0.0503	0.0003
0.373	0.08	0.0933	0.0133	0.1503	0.0703	0.0933	0.0133	0.0809	0.0009	0.0933	0.0133	0.0822	0.0022	0.0762	$\bar{0}.0038$
0.283	0.13	0.1394	0.0094	0.2548	0.1248	0.1394	0.0094	0.1213	$\bar{0}.0087$	0.1394	0.0094	0.1204	$\bar{0}.0096$	0.1215	$\bar{0}.0085$
0.259	0.14	0.1570	0.0170	0.2933	0.1533	0.1570	0.0170	0.1371	$\bar{0}.0029$	0.1570	0.0170	0.1354	$\bar{0}.0046$	0.1390	$\bar{0}.0010$
0.183	0.20	0.2426	0.0426	0.4582	0.2582	0.2426	0.0426	0.2162	0.0162	0.2426	0.0426	0.2115	0.0115	0.2253	0.0253
0.1165	0.35	0.4073	0.0573	0.6769	0.3269	0.4973	0.0573	0.3761	0.0261	0.4073	0.0573	0.3682	0.0182	0.3931	0.0431
			$\bar{\nabla}$=0.0143		$\bar{\nabla}$=0.0735		$\bar{\nabla}$=0.0143		$\bar{\nabla}$=0.0053		$\bar{\nabla}$=0.0143		$\bar{\nabla}$=0.0078		$\bar{\nabla}$=0.0021
			σ=0.0158		σ=0.1015		σ=0.0158		σ=0.0081		σ=0.0158		σ=0.0072		σ=0.0138

(a) Prueba correspondiente a z = 0.978

y/d	C/C_a Medido	Rouse	∇	Lane y Kalinske	∇	Einstein y Chien	∇	Hunt	∇	Velikanov	∇	Chang-Simons y Richardson	∇	Itakura y Kishi	∇
0.800	0.510	0.6581	0.1481	0.6475	0.1375	0.6581	0.1481	0.6606	0.1506	0.6581	0.1481	0.6838	0.1738	0.6104	0.1004
0.696	0.510	0.6946	0.1846	0.6877	0.1777	0.6946	0.1846	0.6909	0.1809	0.6946	0.1846	0.7055	0.1955	0.6574	0.1474
0.596	0.640	0.7247	0.0847	0.7287	0.0837	0.7247	0.0847	0.7174	0.0774	0.7247	0.0847	0.7264	0.0864	0.6954	0.0554
0.497	0.620	0.7533	0.1333	0.7718	0.1518	0.7533	0.1333	0.7437	0.1237	0.7533	0.1333	0.7487	0.1287	0.7305	0.1105
0.406	0.675	0.7806	0.1056	0.8136	0.1386	0.7806	0.1056	0.7697	0.0947	0.7806	0.1056	0.7719	0.0969	0.7631	0.0881
0.350	0.696	0.7988	0.1028	0.8404	0.1444	0.7988	0.1028	0.7876	0.0916	0.7988	0.1088	0.7883	0.0923	0.7843	0.0883
0.154	0.68	0.6326	$\bar{0}.0474$	0.7943	0.1143	0.6326	$\bar{0}.0474$	0.6086	$\bar{0}.0714$	0.6327	$\bar{0}.0473$	0.6034	$\bar{0}.0766$	0.6192	$\bar{0}.0608$
0.116	0.71	0.7138	0.0038	0.8641	0.1541	0.7138	0.0038	0.6928	$\bar{0}.0172$	0.7139	0.0039	0.6873	$\bar{0}.0227$	0.7044	$\bar{0}.0056$
0.116	0.73	0.7138	$\bar{0}.0162$	0.8641	0.1341	0.7138	$\bar{0}.0162$	0.6928	$\bar{0}.0372$	0.7139	$\bar{0}.0161$	0.6873	$\bar{0}.0427$	0.7044	$\bar{0}.0256$
0.116	0.78	0.7138	$\bar{0}.0662$	0.8641	0.0841	0.7138	$\bar{0}.0662$	0.6928	$\bar{0}.0872$	0.7139	$\bar{0}.0661$	0.6873	$\bar{0}.0927$	0.7044	$\bar{0}.0756$
			$\bar{\nabla}$=0.0205		$\bar{\nabla}$=0.0766		$\bar{\nabla}$=0.0205		$\bar{\nabla}$=0.0347		$\bar{\nabla}$=0.0205		$\bar{\nabla}$=0.0268		$\bar{\nabla}$=$\bar{0}$.046
			σ=0.0321		σ=0.0655		σ=0.0321		σ=0.0384		σ=0.0321		σ=0.0524		σ=0.0309

(b) Prueba correspondiente a z = 0.369

TABLA 6.1.6 ANALISIS ESTADISTICO DE LOS ERRORES PARA LAS DIFERENTES PRUEBAS

METODO	z = 0.9473		z = 1.716		z = 0.598		z = 0.369		z = 1.368		z = 0.978		z = 0.524		z = 0.0966	
	$\bar{V}$	σ	$\bar{V}$	σ	$\bar{V}$	σ	$\bar{V}$	σ	$\bar{V}$	σ	$\bar{V}$	σ	$\bar{V}$	σ	$\bar{V}$	σ
Rouse	0.0289	0.0210	0.0210	0.0196	0.0237	0.0150	$\bar{0}$.0205	0.0321	0.0127	0.0231	0.0143	0.0158	0.0260	0.0158	0.1079	0.0448
Lane y Kalinske	0.1043	0.1033	0.1220	0.1251	0.0910	0.0829	0.0766	0.0655	0.1439	0.1280	0.0735	0.1015	0.0931	0.0904	0.1330	0.0380
Einstein y Chien	0.0289	0.0210	0.0210	0.0196	0.0237	0.0150	$\bar{0}$.0205	0.0321	0.0127	0.0231	0.0143	0.0158	0.0260	0.0158	0.1079	0.0448
Hunt	0.0172	0.0139	0.0114	0.0108	0.0103	0.0139	$\bar{0}$.0346	0.0334	$\bar{0}$.0018	0.0235	0.0053	0.0081	0.0145	0.0100	0.1006	0.0463
Velikanov	0.0289	0.0210	0.0210	0.0196	0.0237	0.0150	$\bar{0}$.0204	0.0321	0.0127	0.0231	0.0143	0.0158	0.0260	0.0158	0.1079	0.0448
Chang-Simons y Richardson	0.0187	0.0126	0.0100	0.0086	0.0173	0.0200	$\bar{0}$.0268	0.0524	$\bar{0}$.0045	0.0250	0.0078	0.0072	0.0246	0.0173	0.1057	0.0518
Itakura y Kishi	0.0149	0.0189	0.0143	0.0158	$\bar{0}$.0013	0.0165	$\bar{0}$.0462	0.0309	0.0037	0.0223	0.0021	0.0138	$\bar{0}$.0023	0.0203	0.0884	0.0371

(a) Valores de $\bar{V}$ y σ de cada método.

METODO	z = 0.9743	z = 1.716	z = 0.598	z = 0.369	z = 1.3608	z = 0.978	z = 0.524	z = 0.0966
Rouse	0.79 y 5.00	0.14 y 4.06	0.87 y 3.86	-5.26 y 1.16	-1.03 y 3.58	-0.15 y 3.01	1.02 y 4.18	6.31 y 15.27
Lane y Kalinske	0.10 y 20.76	-0.31 y 24.71	1.40 y 17.99	-1.11 y 14.21	-1.59 y 27.19	-2.80 y 17.50	0.27 y 18.34	9.50 y 17.1
Einstein y Chien	0.79 y 5.00	0.14 y 4.06	0.87 y 3.86	-5.26 y 1.16	-1.03 y 3.58	0.15 3.01	1.02 y 4.18	6.31 y 15.27
Hunt	0.33 y 3.11	0.06 y 2.22	-0.36 y 2.42	-7.31 y 0.36	-2.53 y 2.17	-0.28 y 1.34	0.45 y 2.45	5.43 y 14.69
Velikanov	0.79 y 5.00	0.14 y 4.06	0.87 y 3.86	-5.33 y 1.16	-1.03 y 3.58	-0.15 y 3.01	1.02 y 4.18	6.31 y 15.27
Chang-Simons y Richardson	0.61 y 3.13	0.14 y 1.85	-0.27 y 3.73	-7.92 y 2.55	-2.945 y 2.06	0.06 y 1.50	0.73 y 4.19	5.39 y 15.75
Itakura y Kishi	-0.40 y 3.38	-0.15 y 3.01	-1.79 y 1.52	-7.71 y -1.53	-1.86 y 2.60	-1.17 y 1.59	-2.25 y 1.79	5.13 y 12.55

(b) Intervalos de error en porcentaje de C_a, de cada método.

TABLA 6.1.7 Intervalo promedio de error en porcentaje de C_a, para todos los métodos

Método	Intervalo promedio de error en porcentaje de C_a		
Rouse	0.26	y	3.94
Lane y Kalinske	0.04	y	21.08
Einstein y Chien	0.26	y	3.94
Hunt	-0.39	y	2.29
Velikanov	0.26	y	3.94
Chang-Simons y Richardson	-0.278	y	2.742
Itakura y Kichi	-1.266	y	2.314

6.2 Métodos de transporte de sedimentos de fondo en suspensión.

No fué posible comparar los métodos de transporte presentados en el capítulo 4, tal como se hizo con los de distribución de concentraciones, por lo que en este caso no se tiene elementos para determinar que tan buenos son las predicciones de cada uno de los métodos.

La razón por la cual no se efectuó una comparación de los métodos entre sí o con resultados experimentales, se debió a que normalmente en cada uno de ellos aparecen variables diferentes y además, en la mayoría de los métodos la función final de transporte está expresada en términos de integrales que fueron resueltas en forma gráfica, lo que impidió formar números adimensionales. Por otro lado tampoco se dispuso de datos reales suficientes para aplicar los métodos.

En el capítulo 5 se comentó cada uno de los métodos de transporte por separado, y se hizo un análisis tanto de la distribución de concentraciones de sedimentos como de la distribución de velocidades utilizados en cada uno, viendo la incidencia de estos factores sobre la predicción final de transporte g_{BS}. Independientemente de estos comentarios y de la dificultad que presente cada método para ser aplicado, es necesario comparar sus predicciones con datos reales obtenidos mediante mediciones, para de esta manera tener un criterio más amplio respecto al comportamiento y calidad de cada método.

Como se observa la ec. 4.1, el transporte de fondo en suspensión g_{BS} está en función de la distribución de la concentración de sedimentos y de la distribución de velocidades del flujo, un camino a seguir para encontrar un mejor método que value g_{BS} y como continuación de este trabajo, es el de tratar de integrar dicha ecuación, utilizando la C y u que resultaron ser mas adecuados de acuerdo al estudio hechos.

Desde este punto de vista, la ecuación 4.1 podría resolverse, combinando la distribución de concentraciones de Rouse, Hunt o Itakura y Kishi con las distribuciones de velocidades desarrolladas bien por Hunt o Itakura y Kishi, las cuales parecen ser más apropiadas para flujo con sedimentos.

También sería interesante resolver la ec. 4.9.10 propuesta por Itakura y Kishi, para condiciones diferentes a las resueltas mediante la figura 4.9.1, dado que tanto la distribución de concentraciones como la de velocidades utilizadas en este método parecen ser muy buenas.

S I M B O L O G I A

A	Relación a/d, método de Einstein (Adimensional)
A_s	Factor de conversión, método de Bagnold, ec.4.5.4 (adimensional).
A_t	Parámetro a evaluarse en la fig. 4.7.1, método de Toffaleti (adimensional)
A_1	Factor numérico, definido por Einstein y Chien (adimensional).
A_2	Factor, método de Chang-Simons y Richardson, ec. 2.2.5.19 (adimensional).
A_4	Factor definido por Zagustín, el cual se obtiene experimentalmente (m^3/Kgf).
A_5	Factor de corrección definido por Einstein (adimencional).
A_6	Factor de corrección definido por Einstein (adimencional).
a	Distancia del fondo a la cual se conoce la concentración Ca (m)
a_1	Cualquier distancia arriba del fondo del Cauce, a la cual se puede medir la concentración de sedimentos Ca_1(m).
B	Constante, método de Shulyak y Antsyferov (adimensional).
B_1	Factor adimensional definido por Einstein y Chien (adimensional).
B_2	Constante de integración, método de Hunt (adimensional).

B_{2s} Constante definida por Hunt (adimensional).

B_5 Constante definida por Hino (adimensional).

B' Constante definida por Itakura y Kishi (adimensional).

B_* Relación método de Itakura y Kishi, ec. 2.2.10.31 (adimensional).

b Factor, método de Toffaleti (adimensional)

b_1 Relación $G/\bar{F}$, método de Itakura y Kishi (adimensional).

b_2 Límite de integración, método de Itakura y Kishi, ec. 2.2.10.38 (adimensional)

C Concentración de sedimentos en suspensión, en peso, a una distancia "y" del fondo del cauce (Kgf/m^3).

Ca Concentración de Sedimentos en Suspensión, en peso, a una distancia "a" del fondo (Kgf/m^3).

C_B Concentración de sedimentos en la capa de fondo.

Ci Concentración de sedimentos en suspensión, en peso, a una distancia "y" del fondo, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di (Kgf/m^3).

C_m Parámetro que toma en cuenta la temperatura del agua, método de Toffaleti (adimensional).

C_v Concentración de Sedimentos en Suspensión, en volúmen, a una distancia "y" del fondo (m^3/m^3).

C_z Parámetro que toma en cuenta la temperatura del agua ec. 2.2.7.8

Cai — Concentración de Sedimentos en Suspensión, en peso, a una distancia "a" del fondo, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di (Kgf/m^3)

C_{Li} — Concentración de Sedimentos en Suspensión, en peso, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di, en algún punto de la zona inferior, método de Toffaleti (Kgf/m^3).

C_{mi} — Concentración de Sedimentos en Suspensión, en peso, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di, al nivel y = d/11.64 (Kgf/m^3).

C_{ui} — Concentración de sedimentosen Suspensión, en peso, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di, al nivel y = d/2.5 (Kgf/m^3)

C_{va} — Concentración de Sedimentos en Suspensión, en volúmen a una distancia "a" del fondo (m^3/m^3).

C_{vm} — Concentración media de sedimentos en Suspensión en una sección del flujo, en volúmen (m^3/m^3)

C_{med} — Concentración media de Sedimentos en Suspensión en una sección del flujo, en peso (Kgf/m^3)

Ca_1 — Concentración de Sedimentos en Suspensión, en peso a una distancia "a_1" del fondo (Kgf/m^3).

C_{vo} — Concentración de Sedimentos en Suspensión, en volúmen , en el fondo del cauce (m^3/m^3).

C_{Y1} — Valor de la concentración C^I a una distancia "y_1" del fondo del cauce (Kgf/m^3).

C_{y2} — Valor de la concentración C^{II} a una distancia "y_2" del fondo del cauce (Kgf/m^3).

Ca_{1i}	Concentración de Sedimentos en Suspensión, en peso, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di, a una distancia "a_1" del fondo del cauce (Kgf/m^3).
Co	Concentración de Sedimentos en Suspensión, en peso, en el fondo del cauce (Kgf/m^3).
$\overline{C}$	Concentración media de Sedimentos, en peso, a una distancia "y" del fondo del cauce (Kgf/m^3)
$\overline{C}_v$	Concentración media de Sedimentos, en volúmen, a una distancia "y" del fondo del cauce (Kgf/m^3)
C	Fluctuación de $\overline{C}$ (Kgf/m^3)
C'_v	Fluctuación de $\overline{C}_v$ (m^3/m^3)
C^I	Concentración de Sedimentos en Suspensión, en peso, a una distancia "y" del fondo, adicional a C^{II}, para la zona cercana al fondo del cauce (Kgf/m^3)
C^{II}	Concentración de Sedimentos en Suspensión, en peso, a una distancia "y" arriba de la capa cercana al fondo, método de Shulyak y Antsyferov (Kgf/m^3)
C^I_{y1}	Concentración equivalente a C_{y1}
C^{II}_{y2}	Concentración equivalente a C_{y2}
D	Diámetro de los Sedimentos (m)
D_e	Diámetro equivalente, correspondiente a $\overline{\omega}$
Di	Diámetro medio de los Sedimentos de la fracción granulométrica i (m).
D_{65}	Diámetro de la partícula por debajo del cual queda el 65% de la muestra del suelo en peso (m)

D_{35} Diámetro de la partícula por debajo del cual queda el 35% de la muestra del suelo espeso (m).

d Tirante del flujo (m).

E Relación y/d (adimensional).

E_a Relación a/d, método de Chang-Simons y Richardson, equivale a "A" (adimensional).

e_b Factor de eficiencia para el transporte de la capa de fondo, definido por Bagnold (adimensional).

e_s Factor de eficiencia para el transporte de sedimentos en suspensión, definido por Bagnold (adimensional).

F Fuerza hidrodinámica o de sustentación, ec.2.2.10.17 (Kgf).

$\overline{F}$ Valor medio de F (Kgf)

F' Valor de las fluctuaciones de $\overline{F}$ (Kgf).

G Peso sumergido o fuerza gravitacional (Kgf).

G_B Transporte total de sedimentos en la capa de fondo, en peso (Kgf/s)

g Aceleración debida a la gravedad (m/s^2)

g_B Transporte de sedimentos en la capa de fondo, en peso, por unidad de ancho (Kgf/m-s).

g_L Transporte de Lavado, en peso por unidad de ancho (Kgf/m-s)

g_S Transporte en suspensión, en peso, por unidad de ancho (Kgf/m-s)

g_{Bi}	Transporte de Sedimentos en la capa de fondo, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di, en peso, por unidad de ancho (Kgf/m-s).
g_{BS}	Transporte de Sedimentos de fondo en Suspensión, en peso, por unidad de ancho (Kgf/m-s).
g_{BT}	Transporte de Sedimentos total de fondo, en peso, por unidad de ancho (Kgf/m-s).
g_{BSi}	Transporte de Sedimentos de fondo en suspensión, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di, en peso por unidad de ancho (Kgf/m-s).
g_{BSLi}	Transporte de Sedimentos de fondo en suspensión, en la zona inferior, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di, en peso por unidad de ancho, método de Toffaleti (Kgf/m-s).
g_{BSmi}	Transporte de Sedimentos de fondo en Suspensión en la zona media, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di, en peso por unidad de ancho, método de Toffaleti (Kgf/m-s).
g_{BSUi}	Transporte de Sedimentos de fondo en Suspensión en la zona superior, de la fracción granulométrica con diámetro medio Di, en peso por unidad de ancho, método de Toffaleti (Kgf/m-s).
g'_B	Transporte de Sedimentos en la capa de fondo por unidad de área, en peso por unidad de ancho, ec. 4.6.19 (Kgf/m^2-s)

g_1	Gasto medio de Sedimentos ascendiendo en un nivel "y", en peso por unidad de área (Kgf/m^2-s).
I_1	Integral, definida por la ec. 4.2.12, se obtiene en la fig. 4.2.3 (adimensional).
I_2	Integral, definida por la ec. 4.2.13, se obtiene en la fig. 4.2.4 (adimensional).
I_3	Integral, definida por la ec. 4.6.17, se obtiene en la fig. 4.6.1 (adimensional).
I_4	Integral, definida por la ec. 4.6.18, se obtiene en la fig. 4.6.2 (adimensional).
I_5	Integral, definida por la ec. 4.9.12 (adimensional).
I_6	Integral, definida por la ec. 4.9.13 (adimensional).
I_7	Integral, definida por la ec. 4.9.14 (adimensional).
j	Constante definida por Chang-Simons y Richardson, con valor de 10 (Adimensional).
K	Coeficiente definido por Itakura y Kishi (adimensional).
K_b	Coeficiente de Concentración logaritmica cerca del fondo, ec. 2.4.1.8 (1/m).
K_D	Coeficiente definido por Chang-Simons y Richardson (adimensional).
K_F	Constante definida por Forchheimer (adimensional).
K_S	Altura de la rugosidad del fondo del cauce (m).

K_t Factor de corrección; método de Toffaleti (adimensional).

K_2 Coeficiente, definido por Itakura y Kishi (adimensional).

L Longitud característica de Monin-Obukhov (m).

ℓ Longitud de mezclado del agua (m).

ℓ_i Longitud de mezclado de los Sedimentos en Suspensión (m).

Mi Factor, método de Toffaleti, ec. 4.7.11 (adimensional).

M_1 Factor definido por Hino (adimensional).

M_S' Masa sumergida de los sólidos que viajan en suspensión por unidad de área del fondo ($Kgf/S^2/m^3$).

m Número de unidades de velocidad por ciclo logorítmico de y/d (m/s)

N Parámetro definido por Einstein y Chien, ec. 2.2.2.14 (adimensional).

n Coeficiente de fricción de Maning ($m^{1/6}$).

n_4 Constante, método de Shulyak y Antsyferov (adimensional).

P Factor, método de Einstein, ec. 4.2.2.6 (adimensional).

P_i Porcentaje en peso de la fracción granulométrica del material que viaja en suspensión con diámetro medio Di (adimensional).

P_{Bi} Porcentaje en peso de la fracción granulométrica del material del fondo con diámetro medio Di (adimensional).

P_1	Factor, método de Lane y Kalinske, se busca en la fig. 4.1.1 (adimensional).
P_2	Relación, método de Velikanov, ec. 2.3.41 (adimensional).
P_3	Coeficiente, definido por Velikanov (adimensional)
P_*	Factor definido por Itakura y Kishi, ec. 4.8.16 (adimensional).
$\vec{P}$	Vector de flujo de Sedimentos, ec. 2.2.3.9 (m^3/m-s)
Q_B	Transporte total de Sedimentos en la capa de fondo en volúmen (m^3/s).
q	Gasto unitario de agua (m^3/m-s).
q_{BS}	Transporte de Sedimentos de fondo en Suspensión, en volúmen por unidad de ancho (m^3/m-s)
q_{S1}	Gasto de granos levantados del fondo por unidad de área y tiempo, ec. 2.2.10.15 (m^3/m^2-s)
q_{S2}	Gasto de granos Suspendidos que con el fondo por unidad de área y tiempo, ec. 2.2.10.32 (m^3/m^2-s)
q_2	Exponente de la distribución de concentraciones de Hunt, ec. 2.2.3.30 (adimensional).
$\vec{q}_1$	Vector de flujo de agua, ec. 2.2.3.10 (m^3/m-s).
R	Radio hidráulico (m).
R_s	Factor, método de Chang-Simons y Richardson, ec. 4.6.26 (adimensional).
r	Fuerza hidrodinámica normalizada ec. 2.2.10.24 (adimensional).

r_1 Factor de proporcionalidad, definido por Chang-Simons y Richardson (adimensional).

R' Radio hidráulico asociado a las partículas (m).

R'' Radio hidráulico asociado a las ondulaciones del fondo del Cauce (m).

r' Fluctuaciones de r (adimensional).

S Pendiente hidráulica (adimensional).

T Temperatura en grados centígrados (°C).

T_t Parámetro que toma en cuenta la temperatura del agua ec. 4.7.33 (adimensional).

t_2 Tiempo característico en el que un grano del fondo del canal es levantado y remplazado por otro que se deposita (s).

t_* Tiempo característico, ec. 2.2.10.19 (s).

U Velocidad media del flujo en una sección (m/s)

U_B Velocidad promedio de los Sedimentos en la capa de fondo (m/s).

U_S Velocidad media con que viajan los Sedimentos en Suspensión (m/s).

U_* Velocidad al cortante (m/s).

U_*' Velocidad al cortante asociada a las partículas (m/s)

U_*'' Velocidad al cortante asociada a las ondulaciones del cauce (m/s).

u Velocidad del flujo a una distancia "y" del fondo (m/s).

u_a Velocidad del flujo a una distancia "a" del fondo (m/s).

u_h	Velocidad de la fase sólida en el sentido del flujo, a una distancia "y" del fondo, Velikanov (m/s).
u_{sx}	Componente de la Velocidad de los Sedimentos a una distancia "y" del fondo, en la dirección "x"(m/s).
u_{sy}	Componente de la velocidad de los sedimentos a una distancia "y" del fondo, en la dirección "y"(m/s).
u_{sZ}	Componente de la Velocidad de los Sedimentos a una distancia "y" del fondo, en la dirección "Z"(m/s).
u_{wx}	Componente de la velocidad del agua a una distancia "y" del fondo, en la dirección "x" (m/s).
u_{wy}	Componente de la Velocidad del agua, a una distancia "y" del fondo, en la dirección "y" (m/s).
u_{wZ}	Componente de la Velocidad del agua, a una distancia "y" del fondo, en la dirección "Z" (m/s).
u_{max}	Velocidad máxima del flujo (m/s).
u_o	Velocidad del flujo al nivel superior de la subcapa viscosa, ec. 2.4.1.7 (m/s).
u'	Fluctuación de $\overline{u}$ (m/s).
$\overline{u}$	Velocidad media del flujo, en el sentido de la corriente, a una distancia "y" del fondo (m/s).
$\vec{u}_s$	Campo de Velocidades de los Sedimentos, a una distancia "y" del fondo (m/s).
$\vec{u}_w$	Campo de Velocidades del agua, a una distancia "y" del fondo (m/s).
V_s	Volúmen de los sólidos en suspensión por unidad de área del fondo (m^3/m^2)

v	Velocidad del flujo en la dirección vertical, a una distancia "y" del fondo (m/s).
v_h	Velocidad vertical de la fase sólida, a una distancia "y" del fondo (m/s).
v_s	Componente vertical ascendente de la velocidad relativa al grano, ec. 2.2.10.14 (m/s).
v_o	Componente ascendente de la velocidad absoluta del grano (m/s).
v'	Fluctuación de $\bar{v}$ (m/s).
$\bar{v}$	Valor medio de la velocidad vertical del flujo, a una distancia "y" del fondo (m/s).
$\bar{v}_o$	Valor medio de v_o (m/s).
w	Velocidad transversal del flujo a una distancia "y" del fondo (m/s).
w'	Fluctuación de $\bar{w}$ (m/s).
W'_s	Peso sumergido de los Sedimentos que viajan en Suspensión, por unidad de área del fondo (Kgf/m^2).
$\bar{w}$	Valor medio de w (m/s).
x	Factor definido por Einstein, se obtiene en la fig. 4.2.1 (adimensional).
y	Coordenada Vertical del flujo a partir del fondo del cauce (m).
y_1	Pequeña distancia arriba del fondo, que debe estar dentro de la capa δ_* (m).
y_2	Distancia arriba del fondo que debe cumplir con la desigualdad $\delta_* < y_2 d$ (m).

Z	Número adimensional, ec. 2.1.38 (adimensional).
Z_i	Valor de Z para la fracción granulométrica con diámetro medio Di (adimensional).
Z_2	Exponente de la distribución de concentraciones de Chang-Simon y Richardson, ec. 2.2.5.18 (adimensional).
Z_3	Exponente de la distribución de concentraciones de Ippen, ec. 2.2.9.12 (adimensional).
α'	Rugosidad relativa de Nikuradze (adimensional).
α_1	Coeficiente de Monin-Oburklov, con valor de 7 (adimensional).
α_*	Coeficiente definido por Itakura y Kishi, con valor de 0.14 (adimensional).
β	Factor de proporcionalidad entre ε_s y ε_m (adimensional).
β_1	Coeficiente de Correlación entre v' y C' (adimensional).
β_2	Coeficiente de correlación entre v' y u' (adimensional.
β_5	Constante definida por Hino (adimensional).
β_*	Factor que relaciona a ε_s y ε_m, método de Antsyferov y Kosyan (adimensional).
γ	Peso específico del agua (Kgf/m^3).
γ_s	Peso específico de los Sedimentos (Kgf/m^3).
$\bar{\gamma}$	Peso específico de la mezcla agua sedimento (Kgf/m^3).

Δ	Peso específico sumergido relativo ó densidad específica relativa ec. 2.3.2 (adimensional).
ΔC_1	Fluctuación de la concentración de sedimentos por turbulencia al pasar una partícula de un nivel $(y-\ell_1)$ a uno "y" (Kgf/m^3).
ΔC_2	Fluctuación de la concentración de sedimentos por turbulencia, al pasar una partícula de un nivel $(y+\ell_1)$ a otro "y" (Kgf/m^3).
δ	Altura de las rugosidades del fondo del cauce ó espesor de la subcapa viscosa (m).
δ_x	Longitud elemental en la dirección "x" (m)
δ_y	Longitud elemental en la dirección "y" (m).
δ'	Espesor de la subcapa laminar asociada a U'_*, ec. 4.2.3 (m).
δ_*	Espesor de la capa cercana al fondo, definida por Shulyak y Antsyferov (m).
ε_m	Coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento a una distancia "y" del fondo $(Kgf.s/m^2)$.
ε_s	Coeficiente de difusión para Sedimentos a una distancia "y" del fondo $(Kgf.s/m^2)$.
ε_T	Coeficiente de difusión para Sedimentos adicional a ε_s, producido por las rugosidades del fondo del cauce $(Kgf.s/m^2)$.
ε_{mx}	Componente del coeficiente de difusión para el agua, a una distancia "y" del fondo, en la dirección "x" $(Kgf.s/m^2)$.

ε_{my} Componente del coeficiente de difusión para el agua, a una distancia "y" del fondo, en la dirección "y" (Kgf.s/m^2).

ε_{mZ} Componente del coeficiente de difusión para el agua, a una distancia "y" del fondo, en la dirección "Z" (Kgf.s/m^2).

ε_{sx} Componente de ε_s en la dirección "x" (Kgf.s/m^2).

ε_{sy} Componente de ε_s en la dirección "y" (Kgf.s/m^2)

ε_{sz} Componente de ε_s en la dirección "Z" (Kgf.s/m^2)

ε_{To} Valor de ε_T para y = 0 (Kgf.s/m^2).

$\bar{\varepsilon}_s$ Valor medio ε_s (Kgf.s/m^2).

ζ Relación, método de Velikanov, ec. 2.3.40 (adimensional).

η_v Parámetro empírico que toma en cuenta el efecto de la temperatura sobre la Velocidad del flujo, ec. 2.2.7.13 (adimensional).

η_o Parámetro definido por Itakura y Kishi, ec. 2.2.10 30 (adimensional).

η_1 Relación, método de Tofflaeti, ec. 4.7.30 (adimensional).

η_2 Relación, método de Tofflaeti, ec. 4.7.21 (adimensional).

η_3 Relación, método de Toffaleti, ec. 4.7.12 (adimensional).

κ	Constante universal de Von Karman (adimensional).
κ_s	Constante universal de Von Karman para flujo de sedimentos en suspensión (adimensional).
κ_ω	Constante de Von Karman para un canal de fondo movil pero sin sedimento en suspensión (adimensional).
κ_1	Constante de Von Karman para flujo cargado con sedimento (adimensional).
λ	Porosidad del material del fondo.
ν	Viscosidad cinemática del agua (m^2/s).
$\bar{\nu}$	Viscosidad cinemática del agua mezclada con sedimentos (m^2/s).
ξ	Relación, método de Itakura y Kishi, ec. 2.2.10.37 (adimensional).
ξ_*	Factor definido por Zagustín (adimensional).
ξ'	Variable equivalente a $-\xi^2$ (adimensional).
ρ	Densidad del agua (Kg/m^3).
ρ_s	Densidad de los Sedimentos (Kg/m^3).
$\bar{\rho}$	Densidad de la mezcla agua-sedimento (Kg/m^3).
σ	Desviación estandar
σ^2	Variancia (adimensional)
τ	Esfuerzo cortante en el flujo a una distancia "y" del fondo (Kgf/m^2)
τ_c	Esfuerzo cortante crítico (Kgf/m^2)
τ_o	Esfuerzo cortante en el fondo del cauce (Kgf/m^2)

τ_*	Parámetro de Shilds (adimensional).
$\bar{\tau}_*$	Esfuerzo cortante dimensional, ec. 2.2.10.23 (adimensional).
ϕ	Angulo de reposo del material del fondo sumergido (adimensional).
ϕ_s	Coeficiente, definido por Itakura y Kishi (adimensional).
ϕ_1	Relación, método de Antsyferov y Debol'skiy, ec. 2.2.8.8 (adimensional).
ϕ_2	Relación, método de Zagustín, ec. 2.2.6.10 (adimensional).
ϕ'	Factor definido por Itakura y Kishi, ec. 4.8.2 (adimensional).
ϕ_*	Relación, método de Itakura y Kishi, ec. 2.2.10.11 (adimensional).
ψ	Valor de C_v para alta concentración de sedimentos, método de Velikanov (ec. 2.3.49) (m^3/m^3).
ψ_o	Valor de ψ, correspondiente a C_{vo} (m^3/m^3).
ψ_1	Exponente de la función C^I, ec. 2.4.19 (adimensional).
ψ'	Factor, definido por Einstein (adimensional)
Ω	Relación, método de Itakura y Kishi, ec. 2.2.10.46 (adimensional).
Ω_*	Energía disponible o suministrada por una columna de fluido sobre una área unitaria del fondo, ec. 4.5.5 (Kg/m.s).

ψ_{*_s}	Energía disponible para el transporte de Sedimentos de fondo en suspensión, ec. 4.5.6 (Kg/m.s).
ω	Velocidad de caida de las partículas dentro del agua (m/s).
ω_i	Velocidad de caida de las partículas con diámetro medio Di, dentro del agua (m/s).
$\bar{\omega}$	Velocidad media de caida del material que viaja en suspensión (m/s).

A G R A D E C I M I E N T O S

Al M. en I. José Antonio Maza Alvarez por su excelente dirección, valiosos comentarios así como su paciencia y dedicación durante la realización de esta tesis.

Al Instituto de Ingeniería, UNAM, por el apoyo y facilidades proporcionadas durante el desarrollo del presente trabajo.

Al Ingeniero Gustavo Eladio Díaz Lozano por sus aportaciones y comentarios.

A Lidia Delgado Hernández por su constante apoyo y colaboración, especialmente en la corrección e impresión de este trabajo.

A todos los maestros de la Dirección de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, que participaron en la realización de mis estudios de maestría en Hidráulica.

B I B L I O G R A F I A

1. Anderson, A.G., "Distribution of suspended sediment in a natural stream", Transactions of American Geophysical Union, Vol. 33, Pte 2, 1942, 678-683

2. Antsyferov, S.M. y Kos'yan, R.D., "Sediments suspended in stream flow", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol 106, No. H Y2, EUA, Feb. 1980, 313-331.

3. Bagnold, R.A., "An approach to the sediment transport problem from general physics ", U.S. Geological Survey Professional, Paper 422-I, 1966.

4. Barfield B.J., "Prediction of sediment profiles in open channel flow by turbulent diffusion teory", water Resources Research, Vol. 5, No. 1, 1969, 291-299.

5. Bogardi, J., "Sediment transport in alluvial streams", Académiai Kiadó, Budapest, 1974.

6. Breusers, H.N., "Lecture notes on sediment transport I", International Course in Hydraulics Engineering Delft, 1974-1975.

7. Coleman, N.L., "Flume studies of the sediment transfer coefficient", Water Resources Research, Vol.6, No. 3, Jun. 1970, 801-809.

8. Comisión Federal de Electricidad, "Manual de diseño de obras civiles-hidráulica aluvial", Tomo A.2.11, México, 1981.

9. Chang, F.M. - Simons, D.B. y Richardson, E.V., "Total bed - material discharge in alluvial channels", Geological Survey Water - Supply, paper 1498-I, 1964.

10. Chien, N., "The present status of research on sediment transport" Transactions, ASCE, Vol. 121, paper No. 2824, 1956, 833 - 868.

11. Engiazaroff, I.V., "Calculation fo nonuni form sediment concentrations", journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 91, No. H Y 4, Jul 1965, 225 - 247.

12. Einstein, H.A., "The bed-load function for sediment transportation in open channel flows", Technical bulletin No. 1026, U.S. Dept. of Agriculture, Washington, D.C., 1950

13. Einstein, H.A. y Abdel-Aal, F.M., "Einstein bed-load function at high sediment rates", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 98, No. H Y 1, EUA, Enero 1980, 137-151.

14. Garde, R.J. y Ranga Raju, K.G., "Mechanics of sediment transportarion and alluvial stream problems", John Wiley and sons, New York, 1977.

15. Graf, W.H., "Hydraulics of sediment transport", Mc Graw Hill Book Company, New York, N.Y., 1971.

16. Herbertson, J.G., "Similitude theory applied to correla tion of flume sediment transport data "Water Resources Research, Vol. 4, Abr. 1968, 307-316

17. Hino, M., "Turbulent flow with suspended particles", Journal of The Hydraulics Division, ASCE, Vol 89, No. H Y 4, EUA, Jul 1963, 161-185.

18. Hjelmfelt, A.T. y Lenan, C.W., "Effect of concentration on sediment distribution", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, H Y 5, EUA, Sep 1969 1775-1779.

19. Hunt, J.N., "On turbulent transport of a heterogeneous sediment" Quartely Journal of Mechanics and Aplied Mathematics, Vol 22, No 2, 1969, 235-246.

20. Hunt J.N., "The turbulent transport of suspended sediment in open channels", Proceeding Royal Society fo London, Serie A, Vol. 224, No. 1158, 1954, 1325-1343.

21. Ismail, H.M., "Turbulent transfer mechanism and suspended sediment in closed channels", Transactions, ASCE, Vol. 117, paper No 2500, 1952, 409-446.

22. Itakura, T.Y Kishi, T., "Open channel flow with suspended sediments", Journal of the Hydraulics Divi sion, ASCE, Vol 106, No H Y 8, EUA, AG. 1980, 1325-1343.

23. Kalinske, A.A., "Criteria for determining sand-transport by surface creep and Saltation", Transactions, American Geophysical Union, Vol 23, 1942, 639-643.

24. Kalinske, A.A., "Suspended material transportation under no-equilibrion conditions", Transaction of Ame rican Geophysical Union, Vol 21, pte 2, 1940, 613-617.

25. Kalinske, A.A. y Pien, C.L., "Experiments on eddy-diffusion and suspended-material transportation in open Channels", American Geophysical Union, parte II, 1943, 530-536.

26. Lane, E. y Kalinske, A.A., "Engineering calculations of suspended sediment", Transaction of American Geo Physical Union, Vol. 22, pte 3, 1941 603-607.

27. Lane, E. y Kalinske, A.A., "Relation of suspended to bed materials in rivers", Transaction of American Geophysical Union, P 637, 1939.

28. Maza, J.A. y García, M., "Hidrodinámica-bases para hidráulica fluvial", Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No. D-20, México, Mayo de 1984.

29. Partheniades, E., "Unified view of wash load and bed material load" Journal of The Hydraulics Division ASCE, Vol. 103, EUA, Sep 1977.

30. Raudkivi, A.J., "Loose boundary hidraulics", pergamon Press, EUA, 1ª edición, 1967.

31. Richardson, E.G., "Suspensión of solids in a turbulent stream", Proceeding Royal Society of London, 1937.

32. Rouse, H., "Engineering hydraulics", Edited by Rouse, Iowa USA, 1950.

33. Shen, H.W., "River mechanics" H.W. Shen, P.O. Box 606, Fort Collins, Colorado, USA, 1971.

34. Shen, H.W', "Sedimentation", Symposium to honor professor H.A. Einstein, edited and published by Hsieh Wen Shen, Fort Collins Colorado, USA, 1972.

35. Simons, D.B. y Sentürk, F., "Sediment transport technology", Water Resources Publications, Fort Collins Colorado 80522, USA, 1977.

36. Task Committee on preparation of sedimentation manual, "Sediment transportation mechanics: Suspensión of sediment", Journal of the Hydraulics División, ASCE, Progress report, Comite on Sedimentation, Hydraulics Division, Vol 89, No. H Y 5, EUA, Sep 1963, 45-76.

37. Taylor, B.D. y Vanoni, V. A., "Temperature effects in low transport, flat-bed flows", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol 98, No H Y 8, EUA, Ag 1972, 1427-1445.

38. Toffaleti, F.B., "Definitive computations of sand discharge in rivers" Journal of the Hydraulics Division ASCE, Vol. 95, No 8 H Y 1, EUA, Ene 1969, 225-249.

39. Trask, D.D., "Aplied sedimentation", edited by Parker D. Trask, USA, 1950.

40. Tywoniuk, N., "Sediment dischange computation procedures" Journal of the Hydraulics Division, ASCE, H Y 3 Mar 1972, 521-541.

41. Vanoni, V.A., "Sedimentation engineering", Headquarters of the Society, New York, N.Y., 1975.

42. Vanoni, U.A., "Some experiments on the transportation of suspended load", Transactions of American Geophysical Union, Vol 20, pte 3, 1941, 608-621.

43. Vanoni, U.A., "Transportarion of suspended sediment by water", Transactions, ASCE, Vol III, paper 2267, 1946, 67-133.

44. Wang, S., "Variation of Karman constant in sediment-laden flow", Journal of the Hydraulics Division, ASCE Vol 107, No. H Y 4, EUA, Abr 1981, 407-417.

45. Willis, J.C., Coleman, N.L. y Ellis, W.M., "Laboratory study of transport of fine sand", Journal of The Hydraulics Division, ASCE, No H Y 3, Mar 1972, 489-501.

46. Yalin, M.S., "Mechanics of sediment transport", Pergamon Press, EUA, 2ª edición, 1977.

47. Yalin, M.S. y Finlayson, G.D., "On the velocity distribution of the flow carry in sediment in suspension.

48. García, M.,"Fricción en cauces arenosos, estado del arte", Tesis de Maestría en Ingeniería (Hidráulica), DEPFI, UNAM, 1982.

49. Díaz, G.E., "Comparación de métodos para el cálculo de transporte de sedimentos en la capa de fondo en canales aluviales", Tesis de Maestría en Ingeniería (Hidráulica), UNAM, DEPFI, 1984.