

ANALISIS DE CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL DE PILOTES
SUJETOS A CARGAS LATERALES ESTATICAS

SONIA ELDA RUIZ GOMEZ

TESIS DOCTORAL

Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

DOCTOR EN INGENIERIA

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F., Agosto de 1984



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPA

T. UNAM

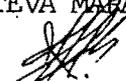
1 9 8 4

RUI

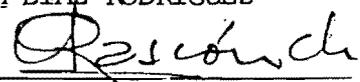
ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL DE PILOTES
SUJETOS A CARGAS LATERALES ESTATICAS

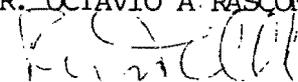
APROBADA POR EL
COMITE DOCTORAL:

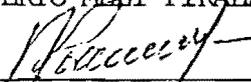

DR. LUIS ESTEVA MARABOTO

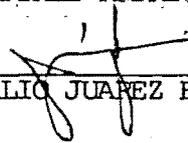

DR. FRANCISCO J. SANCHEZ SESMA


DR. J. ABRAHAM DIAZ RODRIGUEZ


DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ


DR. ROBERTO MELI PIRALLA

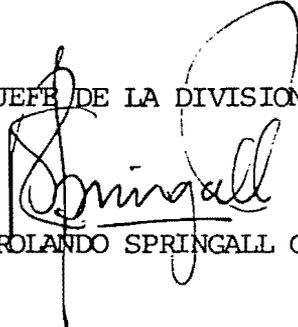

M. C. NEFTALI RODRIGUEZ CUEVAS


DR. EULALIO JUAREZ BADILLO

ASESOR


DR. LUIS ESTEVA MARABOTO

EL JEFE DE LA DIVISION


DR. ROLANDO SPRINGALL GALINDO

Con amor, a mi Mami,
modelo de
fortaleza, cariño y comprensión.

A la memoria de mi papá,
de mi abuelo Fernando, y
de don Abu.

A mis hermanos.

A mis maestros.

A mis amigos.

I N D I C E

Capítulo		Página
	RECONOCIMIENTOS	1
	RESUMEN	2
	NOTACION	4
	INTRODUCCION	15
1	ANALISIS ESTRUCTURAL DE PILOTES CARGADOS LATERALMENTE	19
	1.1 Métodos de análisis estructural	19
	1.2 Determinación experimental de curvas p-y	24
2	INCERTIDUMBRE EN EL COMPORTAMIENTO DEL SUELO	36
	2.1 Introduucción	36
	2.2 Elección de las variables aleatorias significativas	37

2.3	Modelos probabilistas y criterios de estimación de β_1 y β_2	40
2.4	Estimación bayesiana de los parámetros de la distribución de β_{iL}	50
3	FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE LA RESPUESTA DE UN PILOTE AISLADO	65
3.1	Hipótesis y objetivos	65
3.2	Cálculo de las medias y covarianzas de los desplazamientos a lo largo de un pilote	65
3.3	Cálculo de las medias y varianzas de los momentos flexionantes	75
4	EJEMPLO ILUSTRATIVO	78
4.1	Formulación del problema	78
4.2	Distribución bayesiana de los parámetros de la distribución de p_u y E_i normalizados	79
4.3	Respuesta probabilista del pilote	108

5	SOLUCION ADIMENSIONAL GENERALIZADA	125
	5.1 Antecedentes	125
	5.2 Curvas p-y adimensionales	131
	5.3 Coeficientes adimensionales proba- bilistas	133
6	CONFIABILIDAD DE PILOTES SUJETOS A FLEXION	146
	6.1 Estado límite	147
	6.2 Formato probabilista	148
	6.3 Estadísticas de la solución (momento flexionante actuante)	149
	6.4 Estadísticas de la resistencia (momento flexionante resistente)	151
	6.5 Ejemplos	152
7	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	164
	REFERENCIAS	171

APENDICE A	CONCEPTOS BASICOS DEL ANALISIS BAYESIANO	182
APENDICE B	FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILI- DADES GAMMA-2 Y MULTINORMAL	185
APENDICE C	DEDUCCION DE LA ECUACION 3.7	190
APENDICE D	DEDUCCION DE LAS ECS. 3.14 Y 3.18	191
APENDICE E	REPRESENTACION BIDIMENSIONAL DE B	196
APENDICE F	OBTENCION DE LA ECUACION 6.6	199
APENDICE G	LISTA DE TABLAS Y DE FIGURAS	200

R E C O N O C I M I E N T O S

Deseo manifestar mi gratitud a Luis Esteva, director de esta tesis, por la orientación y estímulo que me ha brindado durante mi formación de posgrado, transmitiéndome siempre su experiencia y conocimientos con un sentido de alta calidad académica y humana; a Abraham Díaz Rodríguez por su apoyo constante desde mi ingreso a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería y por sus acertados comentarios hechos a esta tesis; a Roberto Meli, Neftalí Rodríguez, Francisco Sánchez-Sesma, Octavio Rascón y Eulalio Juárez Badillo por sus valiosas sugerencias para el mejor contenido y presentación de este trabajo.

También agradezco a Lymon Reese sus alentadores comentarios, así como el haberme facilitado su biblioteca particular para obtener los datos experimentales que contiene esta tesis; y a José M. Roesset el apoyo académico y financiero que me otorgó durante mi estancia en la Universidad de Texas en Austin.

Expreso mi agradecimiento también a René Olvera, Alfonso Gutiérrez y Federico Cervantes de la sección de dibujo del Instituto de Ingeniería por la elaboración de las figuras, y a Gloria Cortés-Rubio la cuidadosa transcripción del manuscrito.

R E S U M E N

Se desarrolla un criterio para encontrar la confiabilidad estructural de pilotes aislados sujetos a cargas laterales estáticas.

Se consideran como variables aleatorias la carga que actúa sobre el pilote y los principales parámetros que definen las relaciones entre desplazamientos del pilote a diversas alturas y reacciones del suelo, ambos en la dirección horizontal. Por simplicidad en este trabajo se supone que dichas relaciones se representan mediante curvas $p-y$ no-lineales de resortes independientes (modelo de Winkler).

Para obtener la descripción estadística del comportamiento del suelo, se propone un criterio de tipo bayesiano, que permite incorporar información directa e indirecta, tanto de modelos de laboratorio como de pruebas a escala natural. Se encuentran los valores estadísticos típicos de la resistencia última y del módulo tangente inicial de la reacción del suelo, ambos normalizados con respecto a sus valores calculados a partir de un criterio comúnmente empleado en la práctica profesional, correspondientes a suelos arcillosos blandos saturados.

Se propone una metodología para calcular la respuesta probabilista de un pilote sujeto a cargas estáticas aplicadas monótonamente. Dicha metodología se aplica a un caso particular,

así como para obtener gráficas de soluciones adimensionales de las esperanzas y desviaciones estándar de los desplazamientos y momentos flexionantes a lo largo del pilote, bajo la hipótesis de variación lineal del módulo secante de la reacción del suelo con respecto a la profundidad.

Se presenta un criterio para valuar la confiabilidad de pilotes sujetos a flexión diseñados de acuerdo con la práctica común profesional. Dicho criterio se ilustra para el caso de un pilote largo de acero hincado en un suelo arcilloso blando saturado, bajo la acción de una carga horizontal de corta duración aplicada en su cabeza.

Se encuentran valores del índice de confiabilidad y de la probabilidad de falla de pilotes hipotéticos correspondientes a cimentaciones de plataformas marinas de acero ubicadas en cinco distintos sitios. Se obtienen valores de los factores parciales de seguridad que deben emplearse para que el diseño de todos los pilotes en estudio tengan la misma probabilidad de falla. Dichos valores no son normas de diseño generales sino indicadores de las variaciones de los factores parciales de seguridad que necesitan aplicarse en los casos estudiados para obtener una confiabilidad especificada.

Se presentan conclusiones y recomendaciones derivadas de este estudio.

N O T A C I O N

En este trabajo se usan los siguientes símbolos:

A_M = Coeficiente de momento flexionante adimensional para un pilote cuya cabeza puede girar

A_y = Coeficiente de desplazamiento adimensional para un pilote cuya cabeza puede girar

B = Vector que contiene los valores β_1 y β_2

c = Resistencia al corte del suelo, k/pie^2 (ton/m^2)

C = Módulo de Young del suelo, k/pie^2 (kg/cm^2)

c^* = Valor característico de la resistencia al corte del suelo, k/pie^2 (ton/m^2)

\bar{c} = Valor medio de la resistencia al corte del suelo, k/pie^2 (ton/m^2)

$cov(,)$ = Covarianza entre variables

c_u = Resistencia al esfuerzo cortante del suelo, obtenida de una prueba triaxial no drenada, k/pie^2 (ton/m^2)

- d = Diámetro exterior del pilote, pie (m)
- \bar{d}_1 = Valor medio del desplazamiento en la cabeza del pilote, pie (m)
- d_n = Desplazamiento normalizado de la cabeza del pilote
- \bar{d}_n = Media del valor medio de d_n
- E = Módulo de la reacción horizontal del suelo, lb/pulg² (kg/m²)
- E_i = Módulo tangente inicial de reacción horizontal del suelo, lb/pulg² (kg/m²)
- E_s = Módulo secante de reacción horizontal del suelo, lb/pulg² (kg/m²)
- E_{i_c} = Módulo tangente inicial calculado de la reacción horizontal del suelo, lb/pulg² (kg/m²)
- $E(\cdot)$ = Esperanza de una variable aleatoria
- E' = Matriz diagonal que contiene los valores de E_i para cada resorte

- e_{s0} = Deformación unitaria correspondiente a la mitad de la diferencia de esfuerzos principales máximos determinada con una prueba de compresión triaxial UU, (%)
- f = Esfuerzo horizontal a lo ancho del pilote, k/pie² (kg/m²)
- $f(\cdot) = f.d.p.$ = Función de densidad de probabilidad
- f_y^* = Esfuerzo de fluencia nominal del acero, k/pulg² (kg/cm²)
- F_y = Coeficiente de deflexión adimensional para un pilote cuya cabeza no puede girar
- F_M = Coeficiente de momento flexionante adimensional para un pilote cuya cabeza no puede girar
- $g(\cdot)$ = Matriz diagonal que contiene la reacción del suelo
- $g'(\cdot)$ = Matriz diagonal que contiene las derivadas de $g(\cdot)$
- $\hat{g}(\cdot)$ = Matriz $g(\cdot)$ cuando la reacción del suelo y la carga adquieren sus valores medios

- H = Matriz de precisión
- h = Precisión media
- h_{β} = Precisión media de la variable β
- I = Momento de inercia de la sección transversal del pilote, pie^4 (m^4)
- I_s = Matriz cuyos elementos se valúan por integración de la ecuación de Mindlin
- J = Vector cuyos elementos son unitarios
- k = Gradiente de la tangente inicial del módulo de reacción del suelo, k/pie^3 (kg/m^3)
- K = Matriz de rigideces del pilote
- K_f = Factor de forma = Z_p/Z_e
- K_c = Coeficiente de presión de tierra
- $k(c)$ = Gradiente de la tangente inicial del módulo del suelo, función de la resistencia al corte del suelo

- l = Longitud del segmento en que se divide el pilote, pie (m)
- L.R.F.D. = Criterio de diseño de factores de carga y resistencia (Load Resistance Factor Design)
- \ln = Logaritmo natural
- M = Momento flexionante del pilote, lb-pulg (kg-m)
- M_m = Momento flexionante del pilote en el punto m , lb-pulg (kg-m)
- $m_\beta = \bar{\beta} = E(\beta)$ = Valor medio de la variable aleatoria
- n = Tamaño de una muestra
- n_{d_i} = Número de pruebas, localizadas en la literatura, en las que se midió carga lateral y desplazamiento en la cabeza del pilote
- o = Rango de una matriz
- P = Vector de cargas laterales aplicadas al sistema suelo-pilote
- \bar{P} = Esperanza de la carga, kips (kg)

- P_t = Carga lateral externa aplicada en la cabeza del pilote, kips (kg)
- p^* = Carga de diseño, kips (kg)
- $P_{0.5}^*$ = Carga de diseño necesaria para que la plataforma tenga una probabilidad de falla de 0.5 por ciento, kips (ton)
- p = Fuerza lateral del suelo sobre el pilote, por unidad de longitud, lb/pulg (kg/m)
- P_F = Probabilidad de falla por año
- p_u = Reacción última del suelo, por unidad de longitud, lb/pulg (kg/m)
- p_{u_c} = Resistencia última calculada del suelo, por unidad de longitud, lb/pulg (kg/m)
- \tilde{p}_u = Resistencia última normalizada del suelo
- p_L = Reacción lateral del suelo sobre un pilote ficticio
- Q = Coeficiente empírico

R = Resistencia

R^* = Resistencia nominal

\bar{R} = Resistencia media

r_i = Factores que toman en cuenta la incertidumbre
en el criterio de cálculo

s = Vector de valores reales de las propiedades del
suelo

s^* = Vector de valores nominales de las propiedades
del suelo

s^2 = Varianza de la variable observada

S = Solicitación

S^* = Solicitación nominal

\bar{S} = Solicitación media

\bar{S}_c = Media del momento flexionante en la cabeza del
pilote

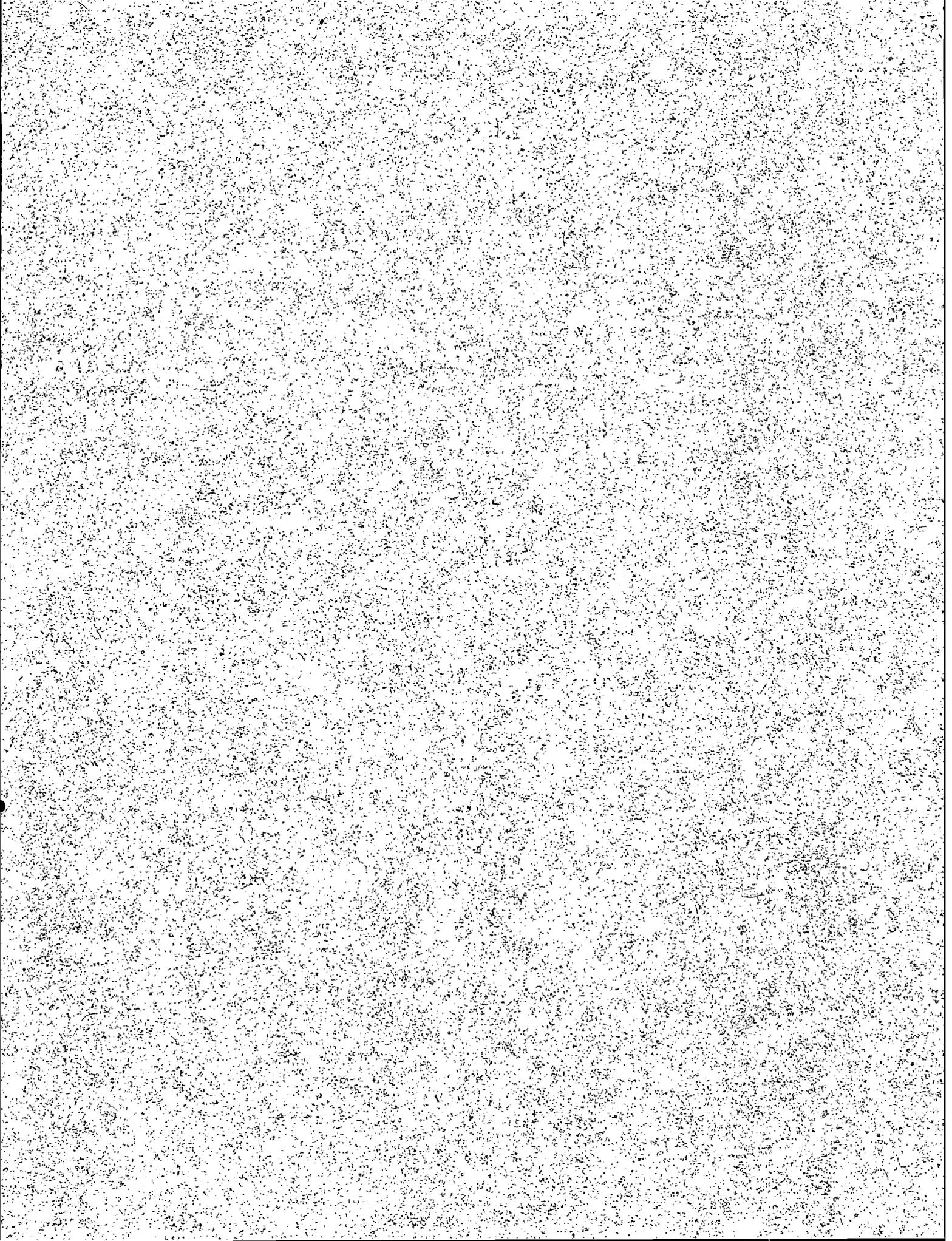
t = Espesor del pilote, pulg (cm)

T	= Factor de rigidez relativa, pulg (cm)
U	= Vector de parámetros aleatorios
UU	= Tipo de prueba triaxial sin drenar ni consolidar
v, v	= Parámetros de una función de distribución Gamma-2
$\text{var}(\cdot) = \sigma^2$	= Varianza de una variable aleatoria
V_P	= Coeficiente de variación de la carga
V_R	= Coeficiente de variación de la resistencia
V_S	= Coeficiente de variación de la sollicitación
V_{S_c}	= Coeficiente de variación del momento flexionante en la cabeza del pilote
x	= Profundidad medida a partir de la superficie del terreno, pie (m)
Y	= Módulo de Young del pilote, k/pulg ² (kg/cm ²).
y	= Desplazamiento lateral del pilote, pulg (cm)
y_1	= Desplazamiento horizontal en la cabeza del pilote, pulg (cm)

- \hat{y} = Vector que contiene los desplazamientos calculados del pilote cuando la reacción del suelo y la carga adquieren sus valores medios
- \bar{y}_c = Valor medio del desplazamiento en la cabeza del pilote, pulg (cm)
- y_{50} = Valor del desplazamiento lateral del sistema suelo-pilote, que corresponde a la mitad de la resistencia última del suelo, pulg (cm)
- z = Coeficiente de profundidad
- $z_{m\acute{a}x}$ = Coeficiente de profundidad máxima
- z_e = Módulo de sección elástico, pulg³ (cm³)
- z_p = Módulo de sección plástico, pulg³ (cm³)
- α'_i, α''_i = Factores que toman en cuenta las discrepancias entre las condiciones de campo y de laboratorio
- α_1, α_2 = Factores numéricos
- β = Índice de confiabilidad
- β_1 = Relación igual a p_u/p_{u_c}
- β_2 = Relación igual a E_i/E_{i_c}

- β_R = Índice de confiabilidad de la resistencia
- $\bar{\beta}_i$ = Valor medio de β_i
- γ_m = Peso volumétrico del suelo *in situ*, k/pie³
(ton/m³)
- γ = Factor de carga
- $\bar{\gamma}'$ = Peso volumétrico efectivo medio del suelo de la superficie a una profundidad x , k/pie³ (ton/m³)
- γ_i = Factores que consideran la variabilidad de las propiedades del suelo
- Γ = Función gamma
- ϵ = Coeficiente que es función de la reacción del suelo
- η = Matriz de precisión relativa
- ψ = Curvatura del pilote
- ϕ = Factor de resistencia
- θ = Vector que contiene parámetros inciertos

- κ = Número que define la probabilidad de que la carga exceda a su valor nominal (P^*)
- μ = Relación de Poisson
- ρ_{ij} = Coeficiente de correlación entre i y j
- ρ_s = Vector de desplazamientos horizontales del suelo
- σ = Desviación estándar de una variable aleatoria
- σ^2 = Varianza de la variable aleatoria
- σ_{β}^2 = Varianza de la varianza de la variable aleatoria β
- Σ = Matriz de covarianzas
- Σ_{β} = Varianza de la variable aleatoria β



I N T R O D U C C I O N

Las normas modernas de diseño estructural recomiendan en general usar el criterio de factores de carga y de resistencia (LRFD) a fin de lograr niveles adecuados de seguridad en las construcciones. Dichos factores deben ser de magnitudes tales que no resulten excesivos los costos de construcción, al mismo tiempo que las obras sean suficientemente seguras y desarrollen adecuadamente las funciones para las que se proyectaron.

Para fines operativos, el criterio de diseño mencionado se expresa como sigue:

$$\gamma S^* < \phi R^*$$

Aquí γ y ϕ son factores de carga y de resistencia; y S^* y R^* los valores nominales de la sollicitación y la resistencia. Los valores de γ y ϕ toman en cuenta el nivel de confiabilidad (o el de riesgo) adoptado para una estructura y varían según el tipo de construcción los fines para los que se construye, su ubicación, etc. En el diseño estructural de cimentaciones constituidas por pilotes estos factores se eligen con base en la experiencia y juicio del ingeniero. Al parecer, según la revisión de la literatura hecha por la autora, no se han desarrollado estudios probabilistas que cuantifiquen las confiabilidades implícitas en los criterios de diseño de dichos miembros estructurales.

La necesidad de estimar la confiabilidad implícita en los criterios convencionales de diseño de pilotes condujo a hacer este estudio enfocado a desarrollar una metodología que marque el camino a seguir para establecer factores de seguridad para el diseño de los elementos citados.

Los criterios y algoritmos que aquí se desarrollan cubren varias etapas del proceso de análisis de confiabilidad, desde la formulación de modelos probabilistas de las propiedades de los suelos y de las fuerzas de interacción entre suelo y pilote hasta el análisis probabilista en primera aproximación de la respuesta de un pilote hincado sobre suelo con propiedades inciertas y sujeto a una carga estática aleatoria aplicada horizontalmente en la cabeza. Los criterios y algoritmos en cuestión se ilustran mediante su aplicación al caso de pilotes hincados en arcillas blandas saturadas.

En este trabajo la confiabilidad se expresa en términos de la que corresponde a una sección crítica de un pilote de acero sujeto a momento flexionante. Se cuantifican los índices de confiabilidad (β) para cinco casos que corresponden a un mismo pilote hincado en cada caso en un lugar distinto, con propiedades del suelo similares y sujeto a condiciones de carga diferentes. Para ello se toman en cuenta incertidumbres asociadas al comportamiento del suelo que circunda al pilote (representado por curvas $p-y$) al desplazarse éste horizontalmente, así como a la magnitud de las cargas laterales que actúan sobre el pilote.

El primero de estos conceptos depende a su vez de variables tales como la incertidumbre en las propiedades del suelo en el sitio, así como la asociada con las expresiones matemáticas de las curvas $p-y$ (de la literatura existente); la discrepancia entre resultados de pruebas de campo y de laboratorio; y la incertidumbre en estimaciones estadísticas.

Además de estas incertidumbres existen otras como las asociadas a la forma de modelar el sistema suelo-pilote, a la imprecisión en los aparatos de medición, a errores humanos, criterios de ajuste de curvas, etc. Sin embargo, aquí se considera que la incertidumbre asociada con estos últimos es pequeña comparada con la que proporcionan los mencionados en el párrafo anterior, por lo que en este trabajo se desprecia su influencia.

Los capítulos de esta tesis constan de lo siguiente: en el capítulo I se presente una revisión de los métodos comúnmente usados para el análisis estructural de pilotes sujetos a cargas laterales estáticas. También se presenta una revisión de los procedimientos experimentales para obtener curvas $p-y$. En el capítulo II se propone un criterio bayesiano para valuar las propiedades estadísticas de las curvas $p-y$. En dicho criterio se toma en cuenta tanto información objetiva (proveniente de pruebas de laboratorio y campo) como subjetiva, dada por expertos en la materia. El capítulo 3 plantea una forma de obtener los primeros dos momentos de la función de distribución de probabilidades de la respuesta estructural de un pilote sujeto

a carga lateral estática monótonamente aplicada. Los dos momentos antes mencionados se obtienen mediante las fórmulas aproximadas de primero y segundo orden dadas por Benjamin y Cornell (7). En el planteamiento se consideran como variables aleatorias la carga lateral aplicada y los parámetros correspondientes a las curvas $p-y$ que mayor influencia tienen en la respuesta del pilote. En el capítulo IV se ilustran, con un ejemplo, los criterios propuestos. Aquí se encuentra la respuesta probabilista de un pilote, hincado en arcilla blanda saturada, sujeto a una carga lateral aplicada sobre su cabeza en un intervalo corto de tiempo.

Para fines de aplicación práctica, se obtienen en el capítulo V soluciones generalizadas adimensionales de pilotes hincados en suelos en los que se supone que el módulo secante de la reacción horizontal del suelo varía linealmente con la profundidad.

La confiabilidad implícita en los criterios convencionales de diseño se valúa en el capítulo 6 para un pilote que forma parte de la cimentación de una plataforma marina ubicado en cinco distintos sitios. La seguridad se mide en términos del índice de confiabilidad, β . Se encuentran los valores de los factores parciales de seguridad que deberían de emplearse para que los casos estudiados tengan la misma confiabilidad. En el último capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo y algunas recomendaciones sobre estudios futuros.

C A P I T U L O 1

ANALISIS ESTRUCTURAL DE PILOTES CARGADOS LATERALMENTE

En la primera parte de este capítulo se revisan brevemente los métodos más usados en la práctica común profesional para el análisis estructural de pilotes ante cargas laterales estáticas. Se describen dos tipos de métodos: los que representan al suelo como un medio continuo y los que lo representan como una serie de elementos independientes entre sí.

En la segunda parte del capítulo se describen tres diferentes formas de obtener curvas $p-y$ experimentalmente. Estas son: pruebas de pilotes hechas a escala natural, medición de reacción del suelo *in situ* y pruebas hechas a pequeña escala.

1.1 METODOS DE ANALISIS ESTRUCTURAL

Una de las principales dificultades que se presenta para el análisis estructural de pilotes es la complejidad de la distribución de la reacción del suelo que circunda al pilote, dado que el comportamiento del suelo ante grandes deformaciones es no-lineal y se trata de un problema tridimensional. En la práctica común profesional esto generalmente se simplifica adoptando modelos bidimensionales y suponiendo que el suelo tiene comportamiento elástico-lineal.

Los métodos de análisis más empleados son:

- a) Los que representan al suelo como un medio continuo Douglas y Davis (15) presentan la solución al problema de pilotes aislados cargados lateralmente, suponiendo al suelo en donde se encuentra hincado el pilote como un medio continuo, isótropo, elástico y lineal. Poulos (40) presenta una extensión del trabajo de estos investigadores; supone que el comportamiento lateral del pilote es similar al de una lámina delgada vertical de ancho d , longitud L y rigidez flexionante constante, $Y I$. Divide al pilote en elementos. Cada elemento lo supone sujeto a un esfuerzo horizontal, f , uniforme y constante a lo ancho del pilote. Supone que el suelo es un semi-espacio elástico, isótropo y homogéneo con módulo de Young, C , y relación de Poisson μ . Los desplazamientos del suelo, a lo largo del pilote, están dados por

$$\rho_s = \frac{d}{C} I_s f$$

En donde ρ_s es un vector, que representa el desplazamiento horizontal del suelo, I_s es una matriz cuyos elementos se valúan por integración de la ecuación de Mindlin. La ecuación de Mindlin se usa para obtener el desplazamiento horizontal de cualquier punto dentro del medio, causado por una carga horizontal concentrada aplicada en un punto distinto.

Para determinar los desplazamientos del pilote se usa la ecuación de flexión de una viga.

El método de Poulos supone que los desplazamientos del suelo, ρ_s , son iguales a los del pilote.

Una aproximación ligeramente diferente a la anterior ha sido planteada por Penzien (39). El procedimiento general es el mismo mencionado anteriormente; su diferencia radica en la manera de encontrar la reacción del suelo. También se usa la ecuación de Mindlin, pero el pilote se representa como un cilindro en vez de una lámina delgada vertical.

Las soluciones basadas en la teoría de la elasticidad, como las anteriores, son muy útiles para el estudio sobre el comportamiento de pilotes cuando éstos presentan desplazamientos muy pequeños, de manera que el suelo que los circunda tenga un comportamiento lineal. Son principalmente útiles para realizar estudios paramétricos de tipo cualitativo para niveles bajos de carga y para el análisis del comportamiento de grupos de pilotes. Poulos (40, 41) plantea soluciones más refinadas respecto al comportamiento del sistema suelo-pilote. Él formula la solución al problema de falla local del suelo utilizando modelos simplificados para representar su resistencia última y presenta sugerencias para tomar en cuenta de manera aproximada la separación que ocurre entre el suelo y el pilote,

cerca de la superficie cuando existen esfuerzos de compresión muy grandes frente al pilote y de tensión detrás de él, en la dirección en que se aplica la carga.

Dada la naturaleza continua del suelo, resulta realista representarlo mediante un modelo continuo. Los criterios antes mencionados tienen esta ventaja sobre los que se mencionan enseguida.

- b) Soluciones que representan al suelo como una serie de elementos independientes

El modelo matemático más simple para estudiar el comportamiento de un pilote es el que simula al suelo mediante un modelo de Winkler (fig. 1).

En éste, el suelo se representa por resortes que actúan independientemente entre sí. Cada uno de ellos tiene una ley de variación dada por las curvas $p-y$. La reacción lateral del suelo por unidad de longitud, p , y el desplazamiento del pilote, y , se relacionan a través del módulo secante de reacción horizontal del suelo, E_s , de la siguiente manera

$$p = -E_s y$$

El signo negativo indica que la reacción, p , actúa en sen-

tido opuesto al desplazamiento y .

El modelo de Winkler tiene la ventaja de su simplicidad analítica y que toma en cuenta de manera sencilla el comportamiento no-lineal del suelo, así como la variación irregular del módulo E_s y de la resistencia última del suelo, p_u , con la profundidad. Su extensión al caso de suelos estratificados es inmediata. Este modelo es el comúnmente empleado para el análisis estructural de pilotes de plataformas marinas, de acero y de duques de alba.

La limitación más importante de este modelo es que ignora la interconexión entre los elementos que representan al suelo.

Para obtener los desplazamientos del pilote se usa la ecuación diferencial de flexión de una viga.

Jamiolkowski y Garassino (25) presentan una revisión crítica del estado del arte en donde discuten los parámetros que interesan para el diseño de pilotes cargados lateralmente usando el método del módulo de reacción horizontal del suelo. En dicho trabajo se da una amplia bibliografía sobre el tema.

Novak (37) presenta una solución al problema de un pilote cargado lateralmente utilizando un modelo de Winkler gene-

realizado. Supone que el suelo está compuesto por una serie de capas con comportamiento elástico, de espesor infinitesimal que se extienden horizontalmente hasta el infinito. El modelo es muy útil para el caso en que el pilote esté cargado dinámicamente y se provoquen desplazamientos laterales del suelo que estén dentro del intervalo lineal.

Las incertidumbres introducidas al modelar el sistema suelo-pilote son pequeñas comparadas con las asociadas a propiedades del suelo, carga lateral aplicada y comportamiento del suelo que circunda al pilote al desplazarse éste lateralmente. Aquí se emplea el modelo de Winkler porque tiene la ventaja de facilitar el manejo del álgebra sin introducir errores graves en los resultados. Se hace hincapié en que la metodología que aquí se presenta puede aplicarse a modelos suelo-pilote diferentes al de Winkler.

1.2 DETERMINACION EXPERIMENTAL DE CURVAS $p-y$

La reacción del suelo que circunda a un pilote sometido a sollicitaciones laterales depende de varios factores como son: características estructurales del pilote (dimensiones, rigidez, forma de la sección transversal, etc.); tipo y magnitud de las cargas aplicadas; leyes esfuerzo-deformación del suelo, etc.

Es casi imposible intentar un análisis riguroso del comportamiento del suelo en este tipo de problemas, por lo que es necesario hacer simplificaciones substanciales y considerar solamente los parámetros que tienen mayor influencia en la respuesta estructural del pilote.

El modelo de Winkler permite considerar de manera simple el comportamiento no-lineal del suelo. A cada resorte se le asocia una curva $p-y$ que representa al comportamiento lateral del suelo a la altura del segmento de pilote en cuestión. En la fig. 2 se presenta una posible distribución de presiones, a una cierta profundidad, antes y después de aplicar la carga. A medida que el desplazamiento, y , crece, la reacción del suelo, p , aumenta, hasta alcanzar un valor último. Esto puede representarse mediante curvas $p-y$ como las que muestran en la fig. 3.

Existen expresiones matemáticas sencillas para determinar curvas $p-y$ para distintos tipos de suelo y carga (2, 21, 26, 47, 50, 55). Se puede lograr de varias formas: con pruebas de pilotes hechas a escala natural, con aparatos de medición directa en el sitio, probando modelos a pequeña escala, o bien, combinando algunos de estos procedimientos con pruebas convencionales de laboratorio sobre muestras de suelos.

Enseguida se describen algunos tipos de estudios experimentales.

Pruebas de pilotes a escala natural

Algunas de las maneras de obtener curvas $p-y$ con pruebas hechas a escala natural son:

- i) Medición directa de la presión del suelo en diferentes puntos de secciones transversales del pilote, a lo largo del eje vertical a través de medidores de presión.

El principal obstáculo de esta forma de obtener curvas $p-y$, es el hecho de que la presión del suelo, p , sólo se mide en el área de contacto entre el suelo y el medidor. Dicha presión se debe integrar alrededor de la sección transversal del pilote, pero las variaciones locales de presión son desconocidas, por lo que deben de adoptarse hipótesis razonables sobre la presión resultante. Lo anterior da lugar a una gran incertidumbre (16, 33).

Esta forma de medición ha sido utilizada por algunos investigadores (1, 24). Por ejemplo, Holloway *et al* (24) obtienen curvas $p-y$ en arcillas rígidas a lo largo de un pilote de 15 pies (4.58 m) de largo y 3 pies (0.92 m) de diámetro. En su estudio comparan los resultados de obtener la resistencia última del suelo con 5 diferentes expresiones matemáticas simples aplicables a arcillas rígidas; concluyen que la fórmula sugerida por Matlock (31) es la que se acerca más a la realidad. Sus resultados se

muestran en la fig. 4.

Generalmente los desplazamientos laterales se miden con inclinómetros de alta precisión, instalados a lo largo del pilote. A partir de las mediciones obtenidas con éstos, se calculan por integración los desplazamientos.

- ii) Otro procedimiento para obtener curvas $p-y$ consiste en medir las deformaciones de flexión a lo largo del pilote a través de celdas de resistencia eléctrica ("strain-gauges"). A partir de un número suficiente de mediciones a lo largo del pilote, se obtienen los momentos flexionantes del pilote, M . Por doble integración y derivación se calculan los valores del desplazamiento, y la reacción por unidad de longitud, p , respectivamente, como sigue

$$y = \iint \frac{M(x)}{YI} dx dx$$

$$p = \frac{d^2M}{dx^2}$$

La rigidez flexionante del pilote, YI , se obtiene por métodos de calibración en laboratorio a través de

$$YI = \frac{M}{\Psi}$$

En donde la curvatura Ψ se determina midiendo las defor-

maciones flexionantes a lo largo del pilote.

Las mediciones de las deformaciones por flexión deben ser muy precisas para que la doble diferenciación pueda hacerse numéricamente; de otra manera debe ajustarse una función matemática continua a fin de obtener valores de p confiables. Por ejemplo, Reese y Welch (50) utilizan, en un trabajo enfocado a predecir curvas $p-y$ en arcillas rígidas que se encuentren arriba del nivel freático, un polinomio de séptimo grado; sin embargo, Parker y Reese (38) no aproximan una función continua en su trabajo, sino que utilizan procedimientos numéricos (diferencias centrales y regla de Simpson) para encontrar los valores de p y de y .

Los datos que se presentan en la literatura sobre curvas $p-y$ obtenidas de pruebas a escala natural se refieren exclusivamente a dos tipos de carga: estática de corta duración y cíclica. En pruebas del primer tipo la carga se aplica monótonamente. Las del segundo tipo se aplica cíclicamente con periodos promedio de carga de 15-20 segundos (11). Durante los primeros ciclos de carga las partículas del suelo en donde se encuentra hincado el pilote de prueba no se han reacomodado y las curvas $p-y$ no se han ablandado, por lo que generalmente se utilizan las curvas $p-y$ correspondientes a cargas estáticas para el diseño de pilotes que no estarán sometidos a numerosos ciclos de carga durante su vida útil, sino a pocos

ciclos aplicados a baja frecuencia. Por ejemplo, comúnmente se supone (49) que el suelo que circunda los duques de alba (diseñados para absorber la energía cinética de los barcos que chocan contra ellos) tienen un comportamiento intermedio entre estático y cíclico.

Utilización de aparatos de medición *in situ*

Algunos investigadores (6, 12, 19) recomiendan para la obtención de curvas $p-y$ el uso del presiómetro. Este aparato se basa en los esfuerzos y deformaciones que ocurren directamente en el suelo ante la acción de una presión inducida. Este criterio supone que el fenómeno de reacción lateral de un pilote es similar a la expansión de una cavidad en el suelo causada por el presiómetro. El método es totalmente empírico y discutible, pues no hay bases teóricas suficientes para considerar los resultados de estos instrumentos confiables para la determinación de curvas $p-y$. La reacción del suelo que circunda a un pilote cargado lateralmente es de diferente forma que la reacción del suelo alrededor de una cavidad que se expande simultáneamente en todas direcciones. Por otro lado, el efecto de la forma de la sección transversal y dimensiones del pilote no puede reproducirse fielmente con este tipo de aparatos en los que el comportamiento local del suelo tiene gran influencia. La alteración de la estructura del suelo local es un factor muy importante en los resultados obtenidos con este aparato.

Es deseable establecer, con número suficiente de casos, las relaciones entre las curvas $p-y$ estimadas con este tipo de instrumentos y las determinadas con métodos más directos, como los explicados en los incisos anteriores.

Pruebas de modelos a pequeña escala

El número de pruebas a pequeña escala que se encuentra en la literatura es reducido. La razón por la que no son muy empleadas las pruebas a pequeña escala es porque las curvas $p-y$ obtenidas con ellas reproducen el efecto de la profundidad del pilote. Los resultados así obtenidos son menos confiables mientras más pequeño es el tamaño del espécimen probado.

Los tamaños y forma de medición que se han empleado en los experimentos hechos a pequeña escala son variados (8, 46); por ejemplo, se han probado pilotes hincados en arena, de diferentes tamaños, por ejemplo: de 40 cm de longitud (58), de 2.44 m (39), de 4 m (27), etc. De los resultados de estos experimentos se puede concluir que los pilotes más pequeños no reproducen fielmente las curvas $p-y$, mientras que los de mayor longitud (2.44 m y 4 m) sí dan resultados aceptables de curvas $p-y$ para fines de diseño.

Resultados de campo combinados con resultados de laboratorio

Algunos investigadores correlacionan las curvas esfuerzo-de-

formación obtenidas de pruebas triaxiales en laboratorio con las curvas $p-y$ obtenidas de experimentos con pilotes hechos a escala natural.

Los primeros en proponer tal tipo de correlación son McClelland y Focht (34), quienes realizan experimentos de pilotes a escala natural hincados en arcillas.

Basado en lo anterior, Matlock (31) propone expresiones matemáticas simples para calcular curvas $p-y$ correspondientes a arcillas blandas saturadas. Para ello usa resultados de laboratorio y de pruebas de pilotes hechas a escala natural. Posteriormente varios investigadores han seguido este criterio para proponer expresiones matemáticas para obtener curvas $p-y$ aplicables a distintos tipos de suelo (38, 47, 50, 54, 55, 57).

Este criterio, a la fecha, es bastante usado en la práctica. Su validez es mayor cuando se aplica a suelos cohesivos, de los cuales es posible obtener muestras inalteradas de gran calidad y, por lo tanto, mejor correlación entre los resultados de laboratorio y de campo.

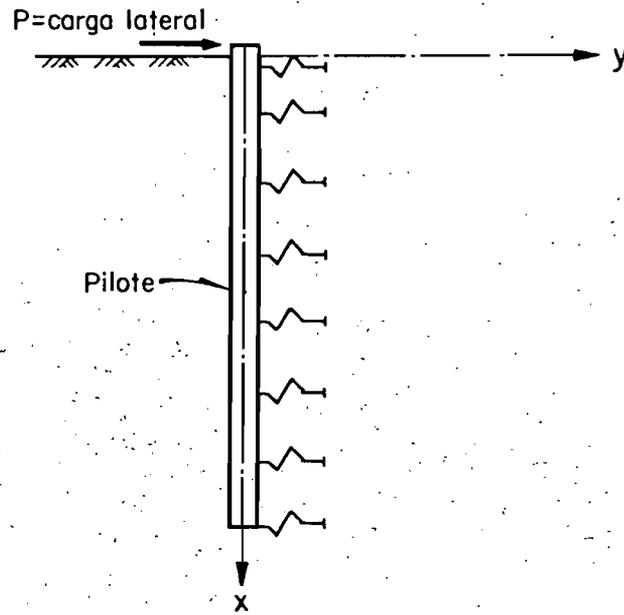


Fig 1 Modelo de Winkler

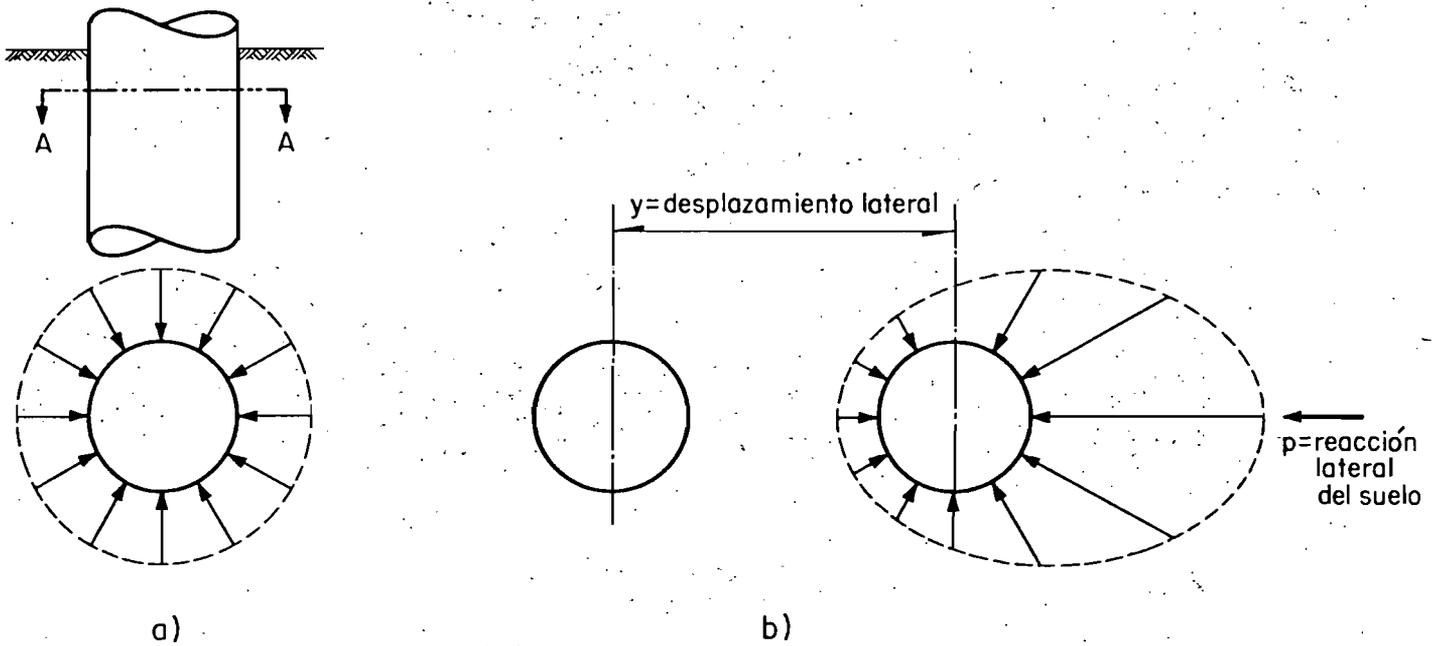


Fig 2 Corte A-A. Distribución de presiones alrededor de un pilote, antes y después de aplicar la carga lateral (Reese y Welch, 1975)

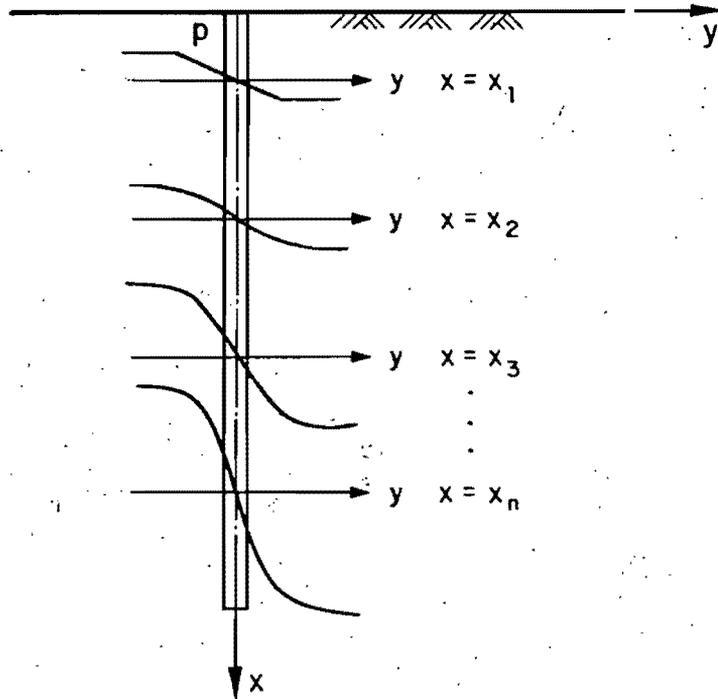


Fig 3 Posible familia de curvas p - y a diferentes profundidades x (Reese y Welch, 1975)

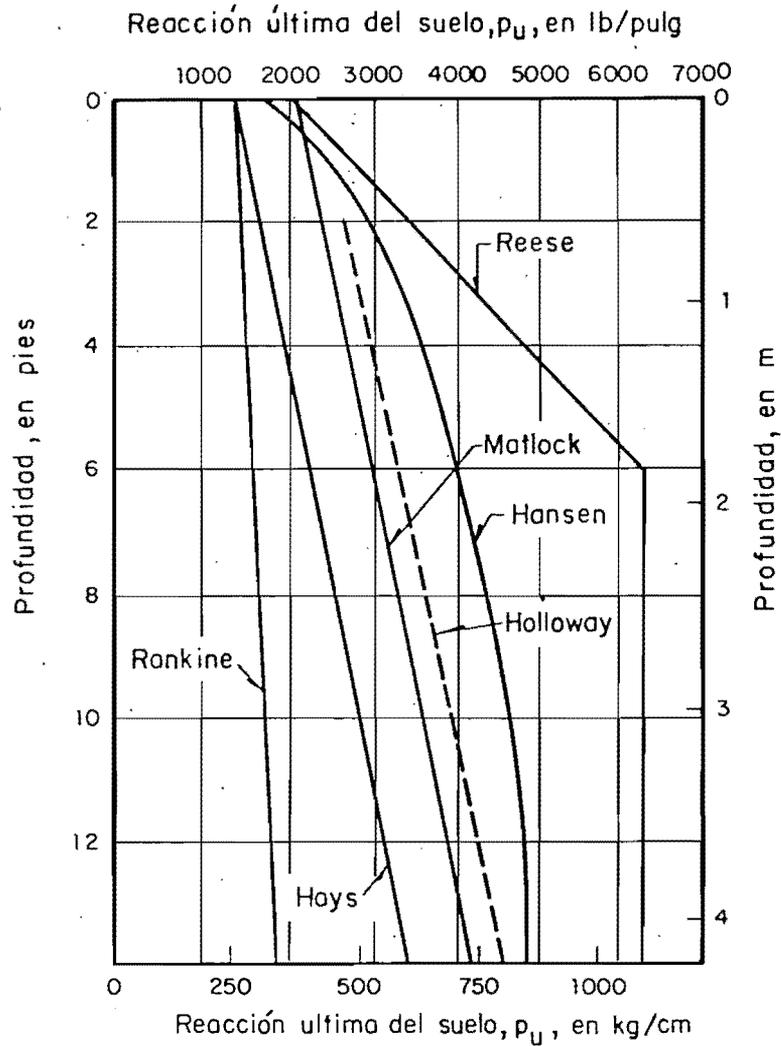


Fig 4 Reacción última del suelo -vs- profundidad (Holloway et al, 1977)

C A P I T U L O 2

INCERTIDUMBRE EN EL COMPORTAMIENTO DEL SUELO

2.1 INTRODUCCION

Para el análisis de confiabilidad de un pilote sujeto a carga estática se adoptará un modelo constituido por dicho elemento estructural que recibe el empuje de un sistema de cargas laterales y que se apoya sobre un conjunto de resortes no lineales que representan la rigidez lateral del suelo circundante. Las propiedades mecánicas de los resortes citados se expresan en términos de sus curvas $p-y$, las que son inciertas como consecuencia tanto de la variabilidad espacial intrínseca de las propiedades mecánicas del suelo, como de las incertidumbres asociadas en la estimación estadística de dichas propiedades. En efecto, las pruebas de campo que se llevan a cabo para determinar las propiedades del suelo en la vecindad de un pilote no bastan para determinar distribuciones estadísticas de dichas propiedades; además, las propiedades de las curvas $p-y$ no se obtienen directamente de los sondeos y pruebas de laboratorio usuales en la práctica, sino que se estiman por medio de modelos teóricos y relaciones semiempíricas a partir de propiedades básicas de muestras de suelo en pruebas de campo o de laboratorio. Al pasar de dichas propiedades básicas a rigideces laterales del suelo y al expresar éstas mediante curvas $p-y$ de resortes de Winkler se introducen

incertidumbres adicionales como resultará obvio más adelante, las incertidumbres asociadas con las propiedades mecánicas *in situ*, así como con la relación entre éstas y las rigideces laterales del suelo son muy grandes en relación con las que pueden provenir de representar el medio continuo por un sistema de resortes de Winkler; por ello, las incertidumbres relacionadas con este último concepto se desprecian en este trabajo.

En este capítulo se desarrolla un criterio para establecer una descripción probabilista (primeros dos momentos) de la incertidumbre acerca de la forma y parámetros de las curvas $p-y$ correspondientes a arcilla blanda saturada. Se eligen como variables aleatorias la resistencia última del suelo, p_u , y la tangente inicial del módulo de la reacción horizontal del suelo, E_i , ambas normalizadas respecto a los valores que adquieren de acuerdo con la expresión matemática que se adopte para representar las curvas $p-y$. En la fig. 5 se ilustra la variabilidad posible de los parámetros p_u y E_i .

La información estadística usualmente disponible respecto a los valores normalizados de p_u y E_i es escasa y por lo tanto insuficiente para definir las funciones de densidad de probabilidad (f.d.p.) directamente. Por otro lado, las pruebas hechas en modelos a pequeña escala y a escala natural proporcionan información indirecta sobre dichos parámetros. Dada la escasez de información directa disponible se propone el

empleo del método de Bayes para la estimación estadística de los parámetros elegidos como variables aleatorias.

El análisis bayesiano permite el uso de diversas fuentes de información (modelos teóricos, juicio ingenieril, datos directos e indirectos, etc.) en el establecimiento de modelos probabilísticos que tomen en cuenta tanto la incertidumbre asociada con la variabilidad de los procesos naturales como la que proviene de nuestro conocimiento imperfecto sobre ellos.

2.2 ELECCION DE LAS VARIABLES ALEATORIAS SIGNIFICATIVAS

La forma de las curvas $p-y$ puede definirse mediante expresiones matemáticas simples en las que intervienen parámetros como los mencionados en el capítulo anterior.

En este trabajo se eligen como variables aleatorias los valores normalizados de p_u y de E_i porque están muy relacionados con las ordenadas de las curvas $p-y$ en sus diferentes rangos y por considerar que son los parámetros cuya variabilidad influye más significativamente en la incertidumbre acerca de la respuesta del pilote (45). Dado que la incertidumbre en las propiedades mecánicas del pilote es bastante menor, éstas se consideran parámetros deterministas.

La resistencia última del suelo, p_u , y la tangente inicial

del módulo del suelo, E_i , son funciones de la profundidad y dependen de i) propiedades del suelo (incluyendo efectos de hincado del pilote en el suelo circundante), ii) características geométricas del pilote, iii) tipo de carga aplicada y iv) forma de obtención de los valores p_u y E_i .

Existen diversos métodos para valuar la resistencia última del suelo, p_u , ante la acción lateral de un pilote en función de las propiedades mecánicas del material. Algunos son del tipo analítico y se basan en las hipótesis de que el suelo es homogéneo e isótropo con comportamiento rígido-plástico; otros utilizan la técnica del elemento finito (13, 42, 60); algunos más son procedimientos semi-empíricos basados en modelos simples de falla del suelo, como el que supone falla del terreno superficial en forma de cuña, y el que idealiza el movimiento del terreno alrededor del pilote como un movimiento de bloques de suelo (23, 44, 54).

En la literatura se encuentran diferentes expresiones matemáticas simples para valuar p_u (23, 31). Algunas de las fórmulas aplicables a arcillas son:

$$p_u = K_c c d \quad (\text{Hansen})$$

$$p_u = 2 \eta' c d + \epsilon x \quad (\text{Hays})$$

$$p_u = \left(3 + \frac{\gamma_m x}{c} + \frac{0.5x}{d} \right) c d \quad (\text{Matlock})$$

$$p_u = (\gamma_m x + 2 c) d \quad (\text{Rankine})$$

$$p_u = \left(3 + \frac{\gamma_m x}{c} + \frac{2.83x}{b} \right) c d \quad (\text{Reese})$$

Aquí, γ_m representa el peso volumétrico del suelo *in situ*, c la resistencia al esfuerzo cortante a la profundidad x , d el diámetro del pilote, K_c el coeficiente de presión lateral de tierra, η' un factor de reducción de la resistencia del suelo y ϵ un coeficiente que es función de la reacción del suelo. En la fig. 4 se comparan los resultados de aplicar estas fórmulas a un caso específico (24). Las diferencias son notorias. En consecuencia, la distribución de las desviaciones de los valores observados de p_u respecto a los valores calculados, p_{uc} , dependerán significativamente de la expresión que se adopte. En lo que sigue se llama β_1 a la relación p_u/p_{uc} .

En la literatura también se encuentran diferentes criterios para estimar el módulo de la reacción lateral del suelo, (27, 47, 50, 52, 56). Algunas de las expresiones propuestas son las siguientes:

$$E = k x^n y^m \quad (\text{Kubo})$$

$$E = kx^n \quad (\text{Reese y Cox})$$

$$E = E(x = 0) + k x \quad (\text{Reese y Welch})$$

$$E = x \quad (\text{Terzaghi})$$

En estas expresiones, x es la profundidad, y el desplazamiento lateral, n y m son coeficientes que adquieren distintos valores según el tipo de suelo, y k es el gradiente del módulo de la reacción horizontal del suelo.

Igual que para p_u , la distribución de las desviaciones de los valores observados E_i , respecto a los calculados, E_{i_c} , depende del criterio adoptado. En lo que sigue se llama β_2 a la relación E_i/E_{i_c} , y B al vector que contiene los valores β_1 y β_2 .

Rigurosamente, en la incertidumbre de las curvas p - y contribuyen factores tales como errores de medición, criterios para ajuste de curvas, imprecisión en aparatos de medición, errores humanos, etc.; sin embargo, en lo que sigue no se tratan éstos como variables aleatorias, por considerar que la variabilidad de β_1 y β_2 contribuye mucho más en la incertidumbre de la respuesta del pilote.

2.3 MODELOS PROBABILISTAS Y CRITERIOS DE ESTIMACION DE β_1 Y β_2

Los primeros dos momentos de β_1 y β_2 se estimarán dentro de

un marco bayesiano. En la fig. 6 se presentan en forma esquemática, mediante un diagrama de bloques, los pasos que se proponen en esta tesis para obtener la descripción probabilista de estos parámetros. Como se indica en tal figura, el teorema de Bayes se aplica secuencialmente durante el análisis. Las variables bayesianas en cada caso son distintas. En el apéndice A se presentan algunos conceptos básicos del análisis bayesiano.

A fin de estimar las distribuciones de las desviaciones de p_u y E_i con respecto a p_{u_c} y E_{i_c} para un tipo de suelo dado, se toma en cuenta lo siguiente:

- i) Incertidumbre en el criterio de cálculo de p_{u_c} y E_{i_c} , determinada a partir de los resultados de pruebas en modelos a pequeña escala.
- ii) Variabilidad de las propiedades del suelo.
- iii) Discrepancia entre resultados obtenidos de modelos a pequeña escala y los obtenidos de pruebas hechas a escala natural.

A esto se le incorpora la información directa e indirecta de observaciones hechas en pilotes a escala natural.

Debido a que la variabilidad intrínseca de las propiedades

de los suelos es muy grande comparada con la debida a la imprecisión de las pruebas de laboratorio o *in situ* (29, 59); y a que no existen razones de peso para decir que las curvas $p-y$, obtenidas de pruebas de campo a escala natural hechas sobre pilotes cargados lateralmente presentan mayor variabilidad a una profundidad que a otra, en este estudio se considera que la función de distribución de probabilidades de B es independiente de la profundidad.

En lo que sigue se encuentra una estimación estadística de los parámetros de la función de distribución de probabilidades (f.d.p.) de B suponiéndola normal y lognormal, respectivamente.

i) Sean r_1 y r_2 dos variables adimensionales. Para el caso en que B tiene distribución normal éstas son iguales a las relaciones de los valores de p_u y E_i obtenidos de mediciones hechas en modelos a pequeña escala, divididos entre los valores calculados cuando se conoce el vector de propiedades del suelo $s = \{s_1 \ s_2 \ s_3 \ \dots \ s_n\}^T$:

$$r_1 = \frac{p_u(s)}{p_{u_c}(s)} \quad , \quad r_2 = \frac{E_i(s)}{E_{i_c}(s)} \quad , \quad (2.1 \ a)$$

Para el caso en que B se supone con distribución lognormal, r_1 y r_2 se definen como los logaritmos de tales relaciones; o sea,

$$r_1 = \ln \frac{p_u(s)}{p_{u_c}(s)} \quad , \quad r_2 = \ln \frac{E_i(s)}{E_{i_c}(s)} \quad (2.1 \text{ b})$$

La dispersión de r_1 y r_2 representa la incertidumbre asociada al criterio de cálculo de p_{u_c} y E_{i_c} . Si se tuvieran suficientes datos de pruebas hechas a pequeña escala, las f.d.p. de r_1 y r_2 podrían inferirse directamente; sin embargo, la información que se encuentra en la literatura no basta para ello (46, 58, 38), por lo que se propone usar las técnicas bayesianas descritas más adelante.

- ii) La variabilidad de las propiedades del suelo se toma en cuenta mediante los factores γ_i , $i = 1, 2$. Estos se definen enseguida para las formas de distribución gaussiana y lognormal de B, respectivamente

$$\gamma_1 = \frac{p_{u_c}(s)}{p_{u_c}(s^*)} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{E_{i_c}(s)}{E_{i_c}(s^*)} \quad ; \quad (2.2 \text{ a})$$

$$\gamma_1 = \ln \frac{p_{u_c}(s)}{p_{u_c}(s^*)} \quad , \quad \gamma_2 = \ln \frac{E_{i_c}(s)}{E_{i_c}(s^*)} \quad (2.2 \text{ b})$$

En estas ecuaciones s representa el vector de valores reales de las propiedades mecánicas básicas del suelo y s^* sus valores nominales (valores medios, valores asociados a una probabilidad dada de excedencia, según el

caso) usados en un análisis determinista convencional. El modelo probabilista que describa la incertidumbre asociada a s debe tomar en cuenta principalmente la variabilidad intrínseca en las propiedades del suelo (29, 59) así como errores de medición, influencia del muestreo y tipo de pruebas, efectos de hincado del pilote, correlación espacial entre distintos puntos del terreno y correlación entre distintas propiedades del suelo (14, 29).

Los factores β_1 y β_2 , definidos antes, se obtienen como sigue para el caso de distribución normal

$$(\beta_i) = \gamma_i r_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.3 \text{ a})$$

y para el caso de distribución lognormal

$$(\beta_i)_{LN} = \gamma_i + r_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.3 \text{ b})$$

Los subíndices N y LN indican que B tiene una f.d.p. normal o lognormal, respectivamente.

Los valores medios y las covarianzas están dadas por

$$(\bar{\beta}_i)_N = \bar{\gamma}_i \bar{r}_i, \quad (2.4 \text{ a})$$

$$(\text{cov } (\beta_i, \beta_j))_N = \text{cov } (\gamma_i, \gamma_j) \text{ cov } (r_i, r_j) + \bar{\gamma}_i \bar{\gamma}_j \text{ cov } (r_i, r_j) + \bar{r}_i \bar{r}_j \text{ cov } (\gamma_i, \gamma_j) \quad , \quad (2.4 \text{ b})$$

$$(\bar{\beta}_i)_{LN} = \bar{\gamma}_i + \bar{r}_i \quad , \quad (2.5 \text{ a})$$

$$(\text{cov } (\beta_i, \beta_j))_{LN} = \text{cov } (\gamma_i, \gamma_j) + \text{cov } (r_i, r_j) \quad , \quad (2.5 \text{ b})$$

$$i = 1, 2$$

$$j = 1, 2$$

Aquí se supone que γ_1 está correlacionada con γ_2 , y que r_1 lo está con r_2 , pero las r_i 's son independientes de las γ_i 's. Si se considera que r_i es independiente de r_j , para $i \neq j$ la covarianza entre β_i y β_j para el caso de distribuciones normales resulta igual a

$$(\text{cov } (\beta_i, \beta_j))_N = \bar{r}_i \bar{r}_j \text{ cov } (\gamma_i, \gamma_j) \quad , \quad i \neq j$$

por lo que en este caso el coeficiente de correlación es igual a

$$(\rho_{\beta_i \beta_j})_{LN} = \frac{\bar{r}_i \bar{r}_j \text{ cov } (\gamma_i, \gamma_j)}{(\text{var } \beta_i \text{ var } \beta_j)} \quad , \quad i \neq j$$

Para el caso de distribución lognormal, si se considera que r_i es independiente de r_j , para $i \neq j$, se obtiene

$$\text{cov} (\beta_i, \beta_j)_{LN} = \text{cov} (\gamma_i, \gamma_j) \quad , \quad i \neq j$$

el respectivo coeficiente de correlación es como sigue

$$(\rho_{\beta_i \beta_j})_{LN} = \frac{\text{cov} (\gamma_i, \gamma_j)}{(\text{var} \beta_i \text{ var} \beta_j)} \quad , \quad i \neq j$$

Para el caso en el que $i = j$ las ecuaciones 2.4 b y 2.5 b se convierten en

$$(\text{var} \beta_i)_{LN} = \sigma_{\gamma_i}^2 \sigma_{r_i}^2 + \bar{\gamma}_i^2 \sigma_{r_i}^2 + \bar{r}_i^2 \sigma_{\gamma_i}^2 \quad (2.6)$$

$$(\text{var} \beta_i)_{LN} = \sigma_{\gamma_i}^2 + \sigma_{r_i}^2 \quad (2.7)$$

Los momentos de las distribuciones de γ se pueden obtener a partir de las aproximaciones de primer y segundo orden propuestas por Benjamin y Cornell (7), en donde las variables aleatorias son las propiedades del suelo, s . Entonces,

$$\bar{\gamma}_i = \gamma_i(\bar{s}) + \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \frac{\partial^2 \gamma_i(s)}{\partial s_m \partial s_n} \Big|_{\bar{s}} \text{cov} (s_m, s_n)$$

$$\text{cov} (\gamma_i, \gamma_j) = \sum_m \sum_n \frac{\partial \gamma_i(s)}{\partial s_m} \Big|_{\bar{s}} \frac{\partial \gamma_j(s)}{\partial s_n} \Big|_{\bar{s}} \text{cov} (s_m, s_n)$$

La covarianza entre γ_i y γ_j puede referirse a diversas propiedades del suelo en un mismo punto o en puntos distintos o a la misma propiedad en puntos distintos.

Si en las ecs. 2.4 a y 2.6 se consideran \bar{r}_i y σ_{r_i} como variables aleatorias y se aplican nuevamente las aproximaciones de Benjamin y Cornell para los primeros dos momentos, se obtiene

$$(\beta_i)_N = \bar{\gamma}_i \bar{r}_i \quad (2.8 a)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_{\beta_i}^2)_N &= \sigma_{\gamma_i}^2 \bar{\sigma}_{r_i}^2 + \bar{\gamma}_i^2 \bar{\sigma}_{r_i}^2 + \bar{r}_i^2 \sigma_{\gamma_i}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \sigma_{\beta_i}^2}{\partial \sigma_{r_i}^2} \text{var } \sigma_{r_i} \right. \\ &+ \frac{\partial^2 \sigma_{\beta_i}^2}{\partial \bar{r}_i^2} \text{var } \bar{r}_i + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{\beta_i}^2}{\partial \bar{r}_i \partial \sigma_{r_i}} \text{cov} (\bar{r}_i, \sigma_{r_i}) \Big|_{\bar{\sigma}_{r_i}, \bar{r}_i} \left. \right] \quad (2.8 b) \end{aligned}$$

$$= \sigma_{\gamma_i}^2 \bar{\sigma}_{r_i}^2 + \bar{\gamma}_i^2 \bar{\sigma}_{r_i}^2 + \bar{r}_i^2 \sigma_{\gamma_i}^2 + \sigma_{\gamma_i}^2 \text{var } \bar{r}_i + (\sigma_{\gamma_i}^2 + \bar{\gamma}_i^2) \text{var } \sigma_{r_i}$$

$$(\text{var } (\bar{\beta}_i))_N = \bar{\gamma}_i^2 \text{var } (\bar{r}_i) \quad (2.8 c)$$

$$\begin{aligned} (\text{var } (\sigma_{\beta_i}^2))_N &= \left(\frac{\partial \sigma_{\beta_i}^2}{\partial \sigma_{r_i}} \right)^2 \text{var } \sigma_{r_i} + \left(\frac{\partial \sigma_{\beta_i}^2}{\partial \bar{r}_i} \right)^2 \text{var } \bar{r}_i + \\ &2 \frac{\partial \sigma_{\beta_i}^2}{\partial \sigma_{r_i}} \frac{\partial \sigma_{\beta_i}^2}{\partial \bar{r}_i} \text{cov} (\bar{r}_i, \sigma_{r_i}) \Big|_{\bar{\sigma}_{r_i}, \bar{r}_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\bar{\sigma}_{r_i}^{-2} (\sigma_{\gamma_i}^2 + \bar{\gamma}_i^{-2}) \text{var } \sigma_{r_i} + 4\sigma_{\gamma_i}^4 \bar{r}_i^{-2} \text{var } \bar{r}_i \\
&+ 8\sigma_{\gamma_i}^2 \bar{\sigma}_{r_i} \bar{r}_i (\sigma_{\gamma_i}^2 + \bar{\gamma}_i^{-2}) \text{cov} (\bar{r}_i, \sigma_{r_i}) \quad (2.8 \text{ d})
\end{aligned}$$

Las correspondientes al caso con distribución logarítmico-normal resultan como sigue

$$(\bar{\beta}_i)_{LN} = \bar{\gamma}_i + \bar{r}_i \quad (2.9 \text{ a})$$

$$\begin{aligned}
(E(\sigma_{\beta_i}^2))_{LN} &= \sigma_{\gamma_i}^2 + \bar{\sigma}_{r_i}^{-2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{\beta_i}^2}{\partial \sigma_{r_i}^2} \text{var } \sigma_{r_i} \Big|_{\bar{\sigma}_{r_i}} \\
&= \sigma_{\gamma_i}^2 + \bar{\sigma}_{r_i}^{-2} + \text{var } \sigma_{r_i} \quad (2.9 \text{ b})
\end{aligned}$$

$$(\sigma_{\beta_i}^2)_{LN} = \sigma_{r_i}^2 \quad (2.9 \text{ c})$$

$$(\sigma_{\sigma_{\beta_i}^2})_{LN} = \left(\frac{\partial \sigma_{\beta_i}^2}{\partial \sigma_{r_i}} \right)^2 \text{var } \sigma_{r_i} \Big|_{\bar{\sigma}_{r_i}} = 4\bar{\sigma}_{r_i}^{-2} \text{var } \sigma_{r_i} \quad (2.9 \text{ d})$$

iii) Las discrepancias entre las condiciones de campo y de laboratorio se toman en cuenta suponiendo que la media de β_i en el campo, $\bar{\beta}_{iC}$, es igual a la correspondiente media de β_i en el laboratorio, $\bar{\beta}_{iL}$, multiplicada por un factor α'_i . Las varianzas de β_i en campo, $\sigma_{\beta_{iC}}^2$, y en laboratorio, $\sigma_{\beta_{iL}}^2$, se relacionan mediante el factor α''_i . Es-

to es

$$\bar{\beta}_{iC} = \alpha' \bar{\beta}_{iL} \quad (2.10 a)$$

$$\sigma_{\beta_{iC}}^2 = \alpha'' \sigma_{\beta_{iL}}^2 \quad (2.10 b)$$

En estas relaciones los subíndices C y L representan las condiciones de campo y laboratorio respectivamente.

Los momentos de las f.d.p. de estas variables están dados por

$$\bar{\beta}_{iC} = \bar{\alpha}'_i \bar{\beta}_{iL} \quad (2.11 a)$$

$$\sigma_{\beta_{iC}}^2 = \sigma_{\alpha'_i}^2 \sigma_{\beta_{iL}}^2 + \bar{\alpha}'_i{}^2 \sigma_{\beta_{iL}}^2 + \bar{\beta}_{iL}^2 \sigma_{\alpha'_i}^2 \quad (2.11 b)$$

$$E(\sigma_{\beta_{iC}}^2) = \bar{\alpha}''_i \cdot E(\sigma_{\beta_{iL}}^2) \quad (2.11 c)$$

$$\text{var}(\sigma_{\beta_{iC}}^2) = \text{var}(\alpha''_i) \text{var}(\sigma_{\beta_{iL}}^2) + \bar{\alpha}''_i{}^2 \text{var}(\sigma_{\beta_{iL}}^2)$$

$$+ (\sigma_{\beta_{iL}}^2)^2 \text{var}(\alpha''_i) \quad (2.11 d)$$

Las medias y varianzas de α'_i y α''_i las deben proporcionar personas con experiencia en esta materia. Para el caso en que ambos grupos de propiedades (pruebas a escala natural y pequeña escala) tengan la misma f.d.p., las esperanzas de α'_i y α''_i son unitarias y sus variancias

son nulas.

En la siguiente sección se formula el caso de la distribución bayesiana conjunta para las condiciones de laboratorio.

2.4 ESTIMACION BAYESIANA DE LOS PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION DE β_{iL}

Como se discutió antes, el criterio bayesiano combina juicio profesional, resultados de pruebas de laboratorio, a pequeña escala y a escala natural, a fin de estimar la incertidumbre asociada a los parámetros de la f.d.p. de B^* . En la inferencia bayesiana, la distribución *a priori* representa lo que se conoce acerca de los parámetros inciertos antes de que se tengan datos de observaciones. A ésta se le incorporan datos observados a fin de tener un mejor conocimiento de los mencionados parámetros y se obtiene una f.d.p. *a posteriori*.

La aplicación del teorema de Bayes para el caso que nos interesa se puede resumir en la siguiente ecuación:

$$f''_{\mu, \sigma}(\tilde{m}, \tilde{s}) = N L(\tilde{m}, \tilde{s} | x_1, x_2, \dots, x_n) f'_{\mu, \sigma}(\tilde{m}, \tilde{s}) \quad (2.12)$$

*Por simplicidad de notación, los subíndices C y L se omiten cuando no hay posibilidad de confusión.

En esta ecuación μ y σ son parámetros inciertos cuya distribución se busca (en este caso, medias y desviaciones estándar de la distribución de β_i), $i = 1, 2$; \tilde{m} , \tilde{s} son variables mudas; N es una constante normalizadora; x_1, x_2, \dots, x_n es el conjunto de valores de las variables que pueden observarse o deducirse de mediciones; en este caso, son valores de β_1 y β_2 ; n es el número de observaciones; L la función de verosimilitud de \tilde{m} , \tilde{s} , dado que se observaron los valores x_1, x_2, \dots, x_n ; y f' , f'' las f.d.p. inicial y final de μ, σ .

En lo que sigue los superíndices ' y '' se relacionan con funciones de distribución *a priori* y *a posteriori*, respectivamente.

Para elegir una familia, F , de funciones de distribución *a priori* es deseable que se cumplan los siguientes requisitos:

- a) Dicha familia, F , debe ser tal que sea razonablemente fácil determinar la f.d.p. *a posteriori* que resulta de una f.d.p. *a priori* y una muestra dada.
- b) Si la f.d.p. *a priori* es un miembro de F , la f.d.p. *a posteriori* también debe pertenecer a F . En este caso a la primera se le llama f.d.p. *a priori* conjugada de la función de verosimilitud, L .

Raiffa y Schlaifer (43) presentan familias de f.d.p. conjugadas naturales de algunos procesos comunes (Bernoulli, Poisson, Rectangular, Normal y Multinormal).

En esta tesis se supone que la función de verosimilitud, L , es de tipo gaussiano. Para que se cumplan los incisos a y b antes mencionados la f.d.p. *a priori* más conveniente debe de ser Normal-Gamma, de modo que la f.d.p. *a posteriori* resulte también tipo Normal-Gamma.

La f.d.p. Normal-Gamma r -dimensional con parámetros (m, v, n, v) está dada por el producto de una distribución Normal con parámetros $(m, h\eta)$ y una distribución Gamma-2 con parámetros (v, v) , es decir,

$$f_{NY}^{(r)}(\mu h | m, v, \eta, v) = f_N^{(r)}(\mu | m, h\eta) f_{\gamma_2}(h | v, v) \propto \quad (2.13 a)$$

$$e^{-0.5h(\mu - m)^T \eta (\mu - m)} h^{0.5o} e^{0.5vvh} h^{0.5v - 1} \quad (2.13 b)$$

Aquí m es un vector que contiene los valores medios de las variables aleatorias; $h\eta = H$ es la matriz de *precisión* o inversa de la matriz de covarianzas. En esta última expresión h es un escalar llamado *precisión media*, $h \equiv |H|^{1/r}$; η es una matriz igual a $\eta = H/h$ conocida como *precisión relativa*, cuyo determinante es unitario, y o es el rango* de η .

*El rango es el número de vectores o columnas linealmente independientes entre sí.

Los parámetros v y v representan lo siguiente: v está relacionada con el primer momento de la f.d.p. de la variable aleatoria, en este caso $v = 1/E(h)$; y v lo está con el primer y segundo momentos, o sea $v = 2E^2(h)/\text{var}(h)$.

En el apéndice B de esta tesis se trata más extensamente los conceptos relacionados con las f.d.p. Multinormal y Gamma-2.

La función de verosimilitud, para este caso, en el que se supone η conocida, es tipo gaussiano. Está dada por

$$L(\mu, h \mid m_o, n_o, v_o, v_o) \propto e^{-0.5h v_o v_o} - 0.5h(m_o - \mu)^T n_o (m_o - \mu) h^{0.5(r + v_o)} \quad (2.14)$$

En donde las variables con subíndice "o" representan las características de las observaciones. Están dadas por

$$m_o = \frac{1}{n} \sum x^j \quad (2.15 \text{ a})$$

$$n_o = n\eta \quad (2.15 \text{ b})$$

$$v_o = r(n - 1) \quad (2.15 \text{ c})$$

$$v_o = \frac{1}{v_o} \sum (x^j - m_o)^T \eta (x^j - m_o) \quad (= 0 \text{ si } v_o = 0) \quad (2.15 \text{ d})$$

Aquí x^j representa el j -ésimo vector observado que contiene

r variables; n es el número de observaciones hechas; η es la matriz de precisión relativa (que se supone conocida). A n_o se le llama *tamaño efectivo de la muestra*.

Si la distribución inicial de (μ, h) es Normal-Gamma con parámetros (m', v', n', v') donde n' es de rango o' , y las observaciones tienen estadísticas (m_o, v_o, n_o, v_o) donde n_o es de rango o , la distribución final de (μ, h) es Normal-Gamma con parámetros (Raiffa y Schlaifer, 1961):

$$m'' = (n' + n_o)^{-1} (n'm' + n_o m_o), \quad (2.16 \text{ a})$$

$$n'' = n' + n_o, \quad (2.16 \text{ b})$$

$$v'' = \frac{(v'v' + m'^T n' m') + (v_o v_o + m_o^T n_o m_o) - m''^T n'' m''}{(v' + o') + (v_o + o_o) - o''}, \quad (2.16 \text{ c})$$

$$v'' = (v' + o') + (v_o + o_o) - o'', \quad (2.16 \text{ d})$$

en que o'' es el rango de n'' .

Estos parámetros están relacionados con los valores centrales y las medidas de dispersión como sigue

$$E''(\mu) = m'' \quad (2.17 \text{ a})$$

$$(\sigma_\mu^2)'' = n''^{-1} v'' \frac{v''}{v'' - 2}, \quad (2.17 \text{ b})$$

$$E''(h) = \frac{1}{v''} \quad , \quad \text{en donde } h = \frac{1}{\sigma^2} \quad (2.17 \text{ c})$$

$$(\sigma_h^2)'' = \frac{2}{v''v''^2} \quad (2.17 \text{ d})$$

Las distribuciones marginales de la media y de la desviación estándar se encuentran a partir de

$$f''_{\mu}(\tilde{m}) = \int_0^{\infty} f''_{\mu, \sigma}(\tilde{m}, \tilde{s}) d\tilde{s}$$

$$f''_{\sigma}(\tilde{s}) = \int_0^{\infty} f''_{\mu, \sigma}(\tilde{m}, \tilde{s}) d\tilde{m}$$

La f.d.p. marginal de μ resulta de la familia t de Student y la f.d.p. marginal de σ de tipo χ^2 . Sus estadísticas, para el caso unidimensional (o sea el caso en el que se considere la distribución de β_i independiente de β_j , $i \neq j$) son iguales a

$$\bar{\mu} = E(\mu) = m'' \quad (2.18 \text{ a})$$

$$\sigma_{\mu}^2 = s''^2 \frac{n'' - 1}{n''(n'' - 2)} \quad (2.18 \text{ b})$$

$$\bar{\sigma} = E(\sigma) = s''^2 \sqrt{\frac{n'' - 1}{2}} \frac{\Gamma[(n'' - 3)/2]}{\Gamma[(n'' - 2)/2]} \quad , \quad n'' > 3 \quad (2.18 \text{ c})$$

$$\sigma_{\sigma}^2 = s''^2 \frac{n'' - 1}{n'' - 4} - E^2(\sigma) \quad (2.18 \text{ d})$$

En que Γ representa la función gamma; y m'' , s'' y n'' son pa-

rámetros (media, varianza y tamaño) de la distribución a posteriori, normal gamma, de (μ, σ) .

La distribución incondicional de la variable aleatoria B, para el caso r-dimensional, es igual a

$$f_B(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f_N^{(r)}(\beta | \tilde{\mu}, \tilde{h}\eta) f_{N\gamma}^{(r)}(\tilde{\mu}, \tilde{h} | m'', v'', n'', v'') d\tilde{h} d\tilde{\mu} \quad (2.19)$$

Esta distribución puede ser interpretada como un promedio pesado de todas las posibles distribuciones de B asociadas con diferentes valores de sus parámetros (μ, h) . (Este es el mismo sentido que tiene el Teorema de Probabilidad Total).

La distribución $f_B(\beta)$ así obtenida es, en este caso, una f.d.p. de Student. Sus primeros dos momentos son como sigue

$$E(B) = m'' \quad (2.20 a)$$

$$\Sigma_B = \left(\frac{n_u}{v''}\right)^{-1} \frac{v''}{v'' - 2}, \quad v'' > 2 \quad (2.20 b)$$

donde $n_u^{-1} = n''^{-1} + \eta^{-1}$.

Hasta aquí se ha presentado una visión global sobre la aplicación del Teorema de Bayes. Enseguida se propone su aplicación en varias etapas de esta tesis:

- 1) Para encontrar la dispersión de r_i , $i = 1, 2$ mencionada en el inciso 3.i) de este capítulo. En este caso la función de probabilidad *a priori* se supone *difusa* como indicación de la ignorancia que se tiene inicialmente sobre el valor de la variable aleatoria. Esto implica que la varianza de la f.d.p. es relativamente grande y que n' y v' son casi nulas.

Quando la información *a priori* es difusa la distribución *a posteriori* resulta igual a la función de verosimilitud multiplicada por una constante. En este caso los datos observados son los correspondientes a pruebas hechas a pequeña escala.

- 2) La segunda aplicación del Teorema de Bayes incorpora los datos de mediciones hechas en pruebas de pilotes a escala natural (sobre el mismo tipo de suelo).

En esta sección los valores de los parámetros correspondientes a la distribución *a priori* se obtienen al aplicar las ecs. 2.11 y los datos de observaciones corresponden a mediciones hechas en campo, las cuales no forman parejas de valores (p_u, E_i) . Es decir, en este grupo de observaciones p_u y E_i no corresponden a una misma curva $p-y$, sino a curvas que se encuentran a diferentes profundidades.

- 3) El Teorema de Bayes nuevamente se usa para incorporar los

datos correspondientes a las parejas de valores p_u y E_i de mediciones hechas en pruebas a escala natural. En esta sección se toma en cuenta la correlación entre los parámetros β_i observados. Es decir, se trabaja con funciones de distribución conjunta de β_1 y β_2 . En este inciso la aplicación de las ecs. 2.16 es directa.

- 4) Por último se aplican las ecs. 2.12-2.18, para incorporar a la información resultante del inciso anterior los resultados de pruebas hechas a escala natural, en donde la carga lateral y el desplazamiento se miden al nivel del terreno. La actualización de la información no es directa en este caso, porque los datos observados no son las variables aleatorias β_1 y β_2 , sino que son mediciones de la carga aplicada lateralmente, P , y del desplazamiento en la cabeza del pilote, y_1 . Por ello, se propone el siguiente tratamiento para poder manejar esta información indirecta:

Según la ec. 3.14 del capítulo 3, el vector de esperanzas de los desplazamientos laterales de un pilote sujeto a cargas horizontales estáticas, está dado por:

$$E(y) = \hat{y} + FQ - FBH\Delta_1 + FA'H\Delta_1 \quad (2.21)$$

La notación correspondiente se presenta también en el capítulo 3.

La ec. 2.21 puede expresarse como sigue

$$E(y) = \hat{y} + FQ - \overline{FBX} + FA'X$$

En que $X = H\Delta_1$

El primer elemento del vector de esperanzas de y , correspondiente a la media del desplazamiento en la cabeza del pilote, $E(y_1)$, es igual a

$$E(y_1) = \hat{y}_1 + \sum_j F_{1j} Q_j - \sum_j F_{1j} \overline{B}_{i,jj} X_j + \sum_j F_{1j} A'_{jj} X_j$$

En donde, según la ec. 3.14

$$A_{jj} = L_{jj} \text{ var } B_{i,jj}, \quad i = 1, 2$$

Suponiendo $\overline{B}_{i,jj} = \overline{\beta}_i$ y $\text{var } B_{i,jj} = \text{var } \beta_i$, es decir, que tanto la media como la varianza de los parámetros β_i , $i = 1, 2$ se consideran iguales a lo largo del pilote, se obtiene

$$E(y_1) = \hat{y}_1 + \sum_{j=1}^n F_{1j} Q_j - \overline{\beta}_i \sum_{j=1}^n F_{1j} X_j \\ + \text{var } \beta_i \sum_{j=1}^n F_{1j} L_{jj} X_j$$

o sea

$$E(y_1) = a' + c' \overline{\beta}_i + e' \text{ var } \beta_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.22)$$

El valor de i es igual a 1 si el desplazamiento \hat{y} es tal que se encuentra dentro del intervalo no-lineal de la curva $p-y$ correspondiente, y es igual a 2 si \hat{y} se encuentra dentro del intervalo lineal.

En la ec. 2.22

$$a' = \hat{y}_1 + \sum_{j=1}^n F_{1j} Q_j$$

$$c' = \sum_{j=1}^n F_{1j} X_j$$

$$e' = \sum_{j=1}^n F_{1j} L_j X_j$$

n = número de resortes

Del mismo modo se trata la varianza del desplazamiento en la cabeza del pilote. Se parte de la ec. 3.18 que es la siguiente

$$\Sigma_y = FUF - FVN^T - NWF + NZN^T + ROR^T$$

La notación correspondiente también se presenta en el capítulo III.

Para el primer elemento de la matriz de covarianzas se tiene

$$\text{var } y_1 = \sum_{j=1}^n (F_{1j}U_{jj}F_{j1} - F_{1j}V_{jj}N_{j1}^T - N_{1j}W_{jj}F_{j1} \\ + N_{1j}Z_{jj}N_{j1}^T + R_{1j}^T O_{jj} R_{j1}^T) \text{ var } B_{i,jj}$$

Si se considera que la varianza de B_i es la misma a lo largo del pilote, se tiene

$$\text{var } B_{i,jj} = \text{var } \beta_i \quad , \quad i = 1, 2 \\ j = 1, 2, 3 \dots n$$

Llamando

$$h' = \sum_{j=1}^n (F_{1j}U_{jj}F_{j1} - F_{1j}V_{jj}N_{j1}^T - N_{1j}W_{jj}F_{j1} \\ + N_{1j}Z_{jj}N_{j1}^T + R_{1j}^T O_{jj} R_{j1}^T)$$

Entonces

$$\text{var } (y_1) = h' \text{ var } \beta_i \quad (2.23)$$

Normalizando las ecs. 2.22 y 2.23 con respecto al valor calculado del desplazamiento en la cabeza del pilote y a su cuadrado, respectivamente, se obtiene

$$\bar{d}_n = \frac{E(y_1)}{y_{1c}} = \frac{a'}{y_{1c}} + \frac{c'}{y_{1c}} \bar{\beta}_i + \frac{e'}{y_{1c}} \text{ var } \beta_i \\ \bar{d}_n = a + c\bar{\beta}_i + e \text{ var } \beta_i \quad (2.24)$$

$$\sigma_{d_n}^2 = \frac{\text{var}(y_1)}{y_{1c}^2} = \frac{h'}{y_{1c}^2} \text{var} \beta_i = h \text{var} \beta_i \quad (2.25)$$

Los primeros dos momentos de \bar{d}_n y $\sigma_{d_n}^2$ están dados por

$$\bar{d}_n = a + c\bar{\beta}_i + e \bar{\sigma}_{\beta_i}^2 \quad (2.26 \text{ a})$$

$$\text{var}(\bar{d}_n) = c^2 \sigma_{\beta_i}^2 + e^2 \text{var} \sigma_{\beta_i}^2 \quad (2.26 \text{ b})$$

$$\sigma_{d_n}^2 = h \sigma_{\beta_i}^2 \quad (2.26 \text{ c})$$

$$\text{var}(\sigma_{d_n}^2) = h^2 \text{var} \sigma_{\beta_i}^2 \quad (2.26 \text{ d})$$

Los valores de las ecs. 2.26 constituyen la información *a priori* que se tiene sobre el desplazamiento lateral al nivel del terreno; a ésta se le incorporan los datos correspondientes observados, aplicando el Teorema de Bayes. Con la información actualizada se puede conocer el valor de $\bar{\beta}_i$, $\sigma_{\beta_i}^2$, $\bar{\sigma}_{\beta_i}^2$ y $\sigma_{\sigma_{\beta_i}^2}^2$, a partir de las ecs. 2.26.

En el capítulo 5 se presenta un ejemplo en el que se ilustra la aplicación de estos conceptos.

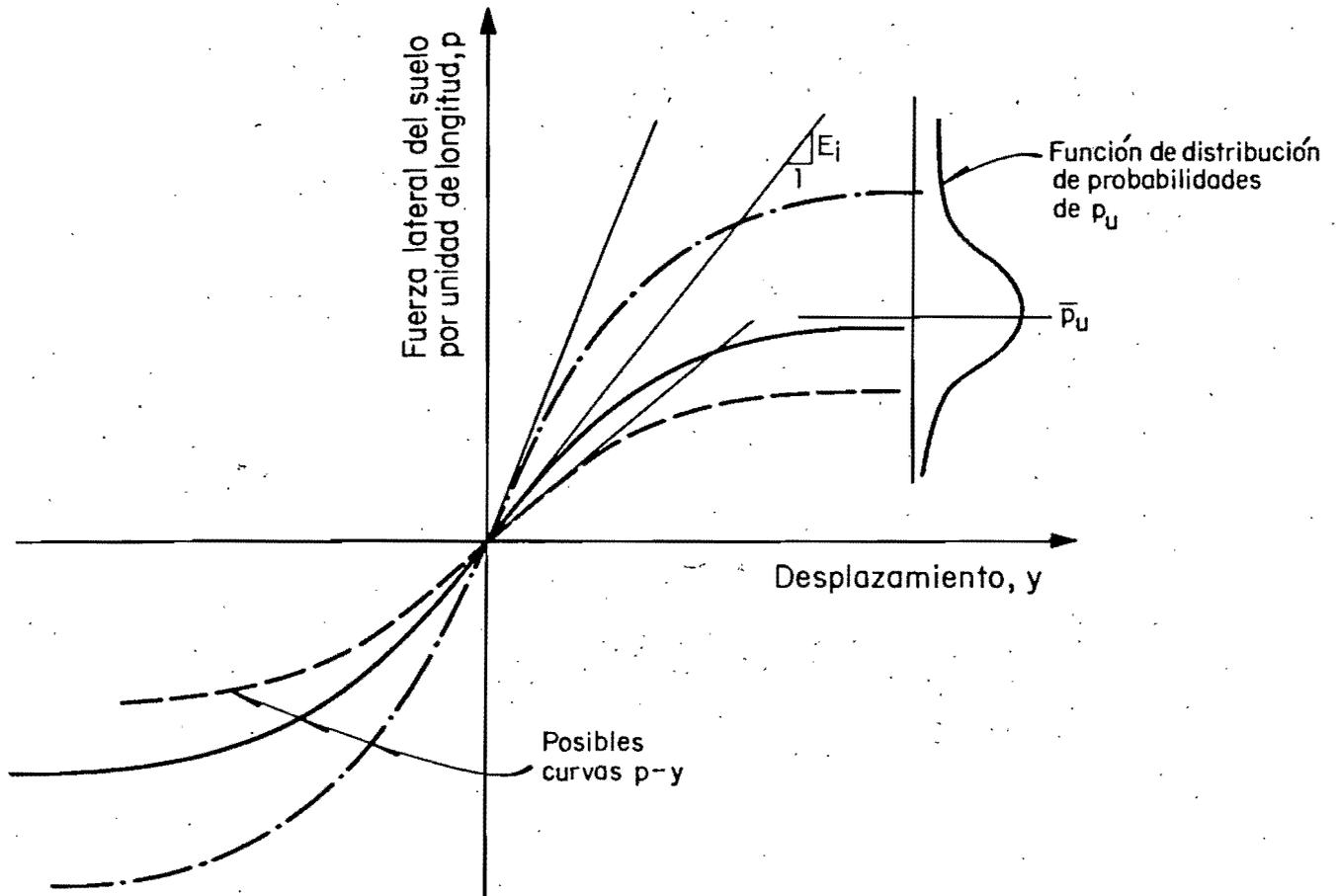


Fig 5 Posible variación de la tangente inicial de la reacción del suelo, E_i , y de la reacción última del suelo, p_U

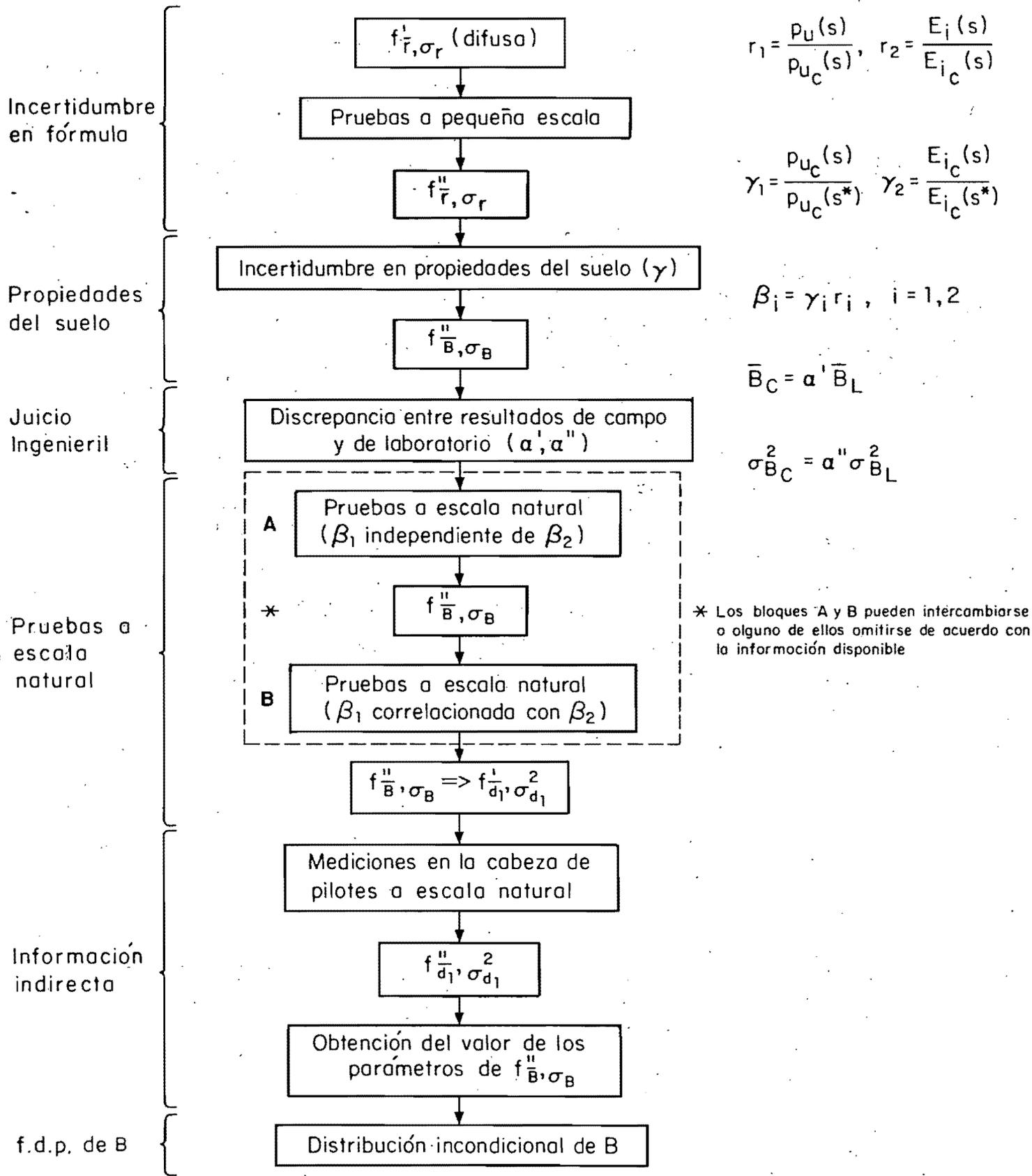


Fig 6 Diagrama de bloques para obtener los parámetros estadísticos de B

C A P I T U L O 3

FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE LA RESPUESTA DE UN PILOTE AISLADO

3.1 HIPOTESIS Y OBJETIVOS

A fin de desarrollar la metodolgia necesaria para obtener la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de la respuesta de un pilote aislado, se supondrá que el pilote tiene un comportamiento lineal, y que el suelo que lo circunda lo tiene no-lineal representado por curvas p-y (modelo de Winkler, fig 1). En la formulación que sigue se supone que las curvas p-y tienen características inciertas cuyos primeros dos momentos pueden obtenerse de acuerdo al capítulo anterior.

Se supone que el pilote está sujeto a una carga lateral estática monótonamente aplicada con magnitud aleatoria.

3.2 CALCULO DE LAS MEDIAS Y COVARIANZAS DE LOS DESPLAZAMIENTOS A LO LARGO DE UN PILOTE

La ecuación de equilibrio que gobierna al sistema suelo-pilote representado en la fig 1, es la siguiente

$$P = K_y + g (y) J \quad (3.1)$$

En que

K = matriz de rigideces del pilote

y = vector formado por los desplazamientos laterales del pilote en los puntos de su eje donde se conectan los resortes que representan la rigidez lateral del suelo

P = vector de cargas laterales aplicadas al sistema suelo-pilote

$g(y)$ = matriz diagonal de reacciones del suelo, correspondientes a cada resorte, expresadas en unidades de fuerza, como función de los desplazamientos y . En general $g(\cdot)$ contiene valores de funciones no lineales

J = vector cuyos elementos son unitarios

Para obtener los valores medios y covarianzas de los desplazamientos del pilote, tomando en cuenta la incertidumbre en la reacción del suelo y en la carga, se hace un desarrollo en serie de Taylor de la ec. 3.1 con respecto a \hat{y} , que es el vector que contiene los desplazamientos calculados del pilote cuando la reacción del suelo y la carga adquieren sus valores medios (17, 18). Es decir, cuando $B = \bar{B}$ y $P = \bar{P}$. Resulta entonces

$$P = K\hat{y} + g(\hat{y})J + (K + g'(\hat{y})) (y - \hat{y}) \quad (3.2)$$

En esta ecuación

- \hat{y} = vector formado por los desplazamientos del pilote cuando β_1 , β_2 y P adquieren sus valores medios
- $g(\hat{y})$ = matriz diagonal que contiene la reacción del suelo que corresponde a un desplazamiento \hat{y}
- y = vector de desplazamientos aleatorios del pilote
- $g'(\hat{y})$ = matriz diagonal que contiene las derivadas de $g(y)$ con respecto a y , evaluada en \hat{y}

Sea

$$\kappa(\hat{y}) = g'(\hat{y}) - \hat{g}'(\hat{y}) \quad (3.3)$$

En donde $\hat{g}(y)$ es la función $g(y)$ cuando β_1 , β_2 y P adquieren sus valores medios y $\hat{g}'(y)$ es su derivada con respecto a y (fig 7).

$$g'(\hat{y}) = \kappa(\hat{y}) + \hat{g}'(\hat{y}) \quad (3.4)$$

Sustituyendo la ec. 3.4 en la 3.2 y despejando la variable y , se obtiene

$$y = (K + \kappa(\hat{y}) + \hat{g}'(\hat{y}))^{-1} (P - K\hat{y} - g(\hat{y})J) + \hat{y} \quad (3.5)$$

Si se definen

$$\begin{aligned} K_2 &= K + \hat{g}'(\hat{y}) \\ C &= P - K\hat{y} - g(\hat{y})J \end{aligned}$$

se obtiene

$$y = (K_2 + \kappa(\hat{y}))^{-1} (C) + y \quad (3.6)$$

La inversa de la Matriz $(K_2 + \kappa(\hat{y}))$ puede aproximarse por (16)

$$(K_2 + \kappa(\hat{y}))^{-1} = F(I - \kappa(\hat{y})F + (\kappa(\hat{y})F)^2 - \dots) \quad (3.7)$$

En que $F = K_2^{-1}$, e I es la matriz identidad. En el apéndice C se presenta la deducción de la ec. 3.7.

Remplazando la ec. 3.7 en la 3.6 se obtiene

$$y = F(I - \kappa(\hat{y})F + \dots) (P - K\hat{y} - g(\hat{y})J) + \hat{y} \quad (3.8)$$

Con esta última expresión se puede estudiar la incertidumbre que resulta en los desplazamientos, y , como consecuencia de la incertidumbre de las curvas $p-y$, y de la carga P . Para ello se deberán tomar $\kappa(\hat{y})$ y $g(\hat{y})$ como funciones de los parámetros inciertos E_i y P_u que determinan las curvas $p-y$.

Si en la ec. 3.8 se desprecian los términos de grado superior, se obtiene

$$y = F(I - \kappa(\hat{y})F) (P - K\hat{y} - g(\hat{y})J) + \hat{y}$$

Desarrollando ésta, resulta

$$\begin{aligned} y &= \hat{y} + F(P - K\hat{y}) - Fg(\hat{y})J - F\kappa(\hat{y})FP + F\kappa(\hat{y})FK\hat{y} + F\kappa(\hat{y})Fg(\hat{y})J \\ y &= \hat{y} + F(P - K\hat{y}) - Fg(\hat{y})J - F\kappa(\hat{y})F(P - K\hat{y} - g(\hat{y})J) \end{aligned} \quad (3.9)$$

En esta tesis se estudia el caso de pilotes hincados en suelos arcillosos saturados. Las curvas $p-y$ para este tipo de suelo, recomendadas por Matlock (31) y Sullivan (54) son dadas por las ecs. 4.3. En estas se observan tres tramos de curva: intervalo lineal, intervalo intermedio e intervalo no lineal.

Dado que las curvas $p-y$, antes mencionadas, suponen formas diversas, por tramos, las funciones $g(\hat{y})$ y $\kappa(\hat{y})$ que intervienen en la ec. 3.9, dependen del intervalo de valores en que se encuentre el desplazamiento y correspondiente a cada resorte.

i) para un resorte s cuya deformación \hat{y} corresponda al tramo lineal

$$g_s(\hat{y}) = \beta_{2s} E_i \hat{y}_s$$

$$\kappa_s(\hat{y}) = g'_s(\hat{y}) \cdot - g'_s(\hat{y}) = (\beta_{2s} - \bar{\beta}_{2s}) E_i$$

En este caso (lineal) la ec. 3.9 se convierte en

$$y = \hat{Y} + F(P - K\hat{Y}) - FB_2 E' \hat{Y} - F(B_2 - \bar{B}_2) E' F(P - K\hat{Y} - B_2 E' \hat{Y}) \quad (3.10)$$

En donde B_2 es la matriz diagonal de las β_{2s} , E' es la matriz diagonal de las E_{is} , y la letra s se asocia a cada resorte que se encuentra a lo largo del pilote.

ii) Para el caso en el que el desplazamiento y del resorte s corresponda al tramo intermedio

$$g_s(\hat{Y}) = \beta_{1s} \left(\frac{p_{uc}}{2}\right)_s \left(\frac{\hat{Y}}{Y_{50}}\right)_s^{1/3} = \beta_{1s} H'_s \hat{Y}^{1/3}$$

$$\kappa_s(\hat{Y}) = (\beta_{1s} - \bar{\beta}_{1s}) H'_s (\hat{Y}^{-2/3}/3)$$

En que p_{uc} es el valor de la resistencia última para el resorte correspondiente, Y_{50} es igual a $2.5 e_{50}$ d según se define en el capítulo IV, ec. 4.1. En este caso la ec. 3.9 se convierte en

$$y = \hat{Y} + F(P - K\hat{Y}) - FB_1 H' \hat{Y}^{1/3} - F(B_1 - \bar{B}_1) H' (\hat{Y}^{-2/3}/3) \\ F(P - K\hat{Y} - B_1 H' \hat{Y}^{1/3}) \quad (3.11)$$

Aquí B_1 es la matriz diagonal de las β_{1s} , H' es la matriz diagonal que contiene $(0.5 p_{uc}/Y_{50}^{1/3})_s$, y s se asocia a cada resorte que se encuentra a lo largo del pilote.

iii) Para el caso en el que el desplazamiento \hat{y} corresponda al tramo lineal

$$g_s(\hat{y}) = \beta_{1s} (p_{uc})$$

$$\kappa_s(\hat{y}) = 0$$

En este caso la ec. 3.9 se convierte en

$$y = \hat{y} + F(p - K\hat{y}) - FB_1P'J \quad (3.12)$$

En donde p' es una matriz diagonal que contiene los valores de p_{uc} correspondientes a cada resorte y J es un vector con elementos iguales a uno.

Las ecs. 3.10, 3.11 y 3.12 pueden expresarse en forma general como sigue

$$y = \hat{y} + F(P - K\hat{y}) - FBH\Delta_1 - F(B - \bar{B})H\Delta_2 F(P - K\hat{y} - BH\Delta_1) \quad (3.13)$$

Para el caso en el que \hat{y} se encuentre en el intervalo lineal ($0 < \hat{y} < y_0$), en que $y_0 = 0.5 y_{50}$, (y_{50} se define en la ec. 4.1), se tiene

- H = matriz diagonal formada por la tangente inicial del módulo del suelo, E_i , a las profundidades correspondientes
- Δ_1 = vector que contiene los valores de \hat{y}
- Δ_2 = matriz de identidad

B = matriz diagonal que contiene los valores de β_2 descritos en el capítulo anterior.

Para el caso en el que \hat{y} se encuentre dentro del intervalo intermedio ($y_0 < \hat{y} < 8y_{50}$), entonces

H = matriz que contiene los valores $0.5 p_{uc}/y_{50}^{1/3}$ asociados a las profundidades correspondientes

Δ_1 = vector que contiene los valores $\hat{y}^{1/3}$, correspondientes a los desplazamientos elevados a la 1/3, a lo largo del pilote.

Δ_2 = matriz diagonal cuyos elementos son iguales a $\hat{y}^{-2/3}/3$, correspondientes a cada desplazamiento a lo largo del pilote

B = matriz diagonal que contiene los valores de β_1 encontrados en el capítulo anterior

Para el caso en el que \hat{y} sea mayor que $8y_{50}$, se tiene

H = matriz que contiene los valores de p_{uc} correspondientes a una profundidad dada

Δ_1 = vector cuyos elementos son iguales a uno

Δ_2 = matriz nula

B = matriz diagonal que contiene los valores de β_1 , descritos en el capítulo anterior

La esperanza de los desplazamientos, $E(y)$, resulta igual a

$$E(y) = \hat{y} + F\bar{Q} - F\bar{B}H\Delta_1 + FA'H\Delta_1 \quad (3.14)$$

En donde

\bar{B} = matriz diagonal que contiene los valores medios de B

A' = matriz cuyos elementos son iguales a

$$A'_{mn} = L_{mn} \text{COV} (B_{imm}, B_{inn}) \quad , \quad i = 1, 2$$

En que i es igual a 1 cuando el valor de \hat{y} se encuentra en el intervalo no-lineal, e igual a 2 cuando se encuentra en el lineal

$$L = H\Delta_2 F$$

$$\bar{Q} = \bar{P} - K\hat{y}$$

La deducción de la ec. 3.14 se presenta en el apéndice D.

A fin de obtener la matriz de covarianzas de los desplazamientos, Σ_y , se parte de la ec. 3.13 la cual puede expresarse como sigue

$$y = \hat{y} + GFP - GFK\hat{y} - AB\Delta_1 - FBH\Delta_2 FP + FBH\Delta_2 FK\hat{y} + FBDB\Delta_1 \quad (3.15)$$

En donde

$$G = I + F\bar{B}H\Delta_2$$

$$A = F(I + BH\Delta_2 F)H$$

$$D = H\Delta_2 FH$$

Se supone $B = \bar{B} + b$, $P = \bar{P} + p$ en donde b y p son variables aleatorias con medias nulas y varianzas iguales a $\sigma_b^2 = \sigma_B^2$, $\sigma_p^2 = \sigma_P^2$. Estas se sustituyen en 3.15 dando lugar a una expresión en función de b y p . En la expresión obtenida se desprecian los términos de segundo orden y ésta se sustituye en la siguiente

$$\Sigma_Y = E(yy^T) - E(y)E(y^T) \quad (3.16)$$

La matriz de covarianzas resultante es

$$\begin{aligned} \Sigma_Y = & FE(bCC^T b)F - FE(bC\Delta_1^T b)N^T - NE(b\Delta_1 C^T b)F \\ & + NE(b\Delta_1 \Delta_1^T b)N^T + RE(pp^T)R^T \end{aligned} \quad (3.17)$$

En que

$$C = L(\bar{P} - K\hat{Y})$$

$$N = 2F\bar{B}D - A$$

$$R = GF - F\bar{B}L$$

La ec. 3.17 puede expresarse como sigue

$$\Sigma_Y = FUF - FVN^T - NWF + NZN^T + ROR^T \quad (3.18)$$

En donde

$$U_{mn} = (CC^T)_{mn} \text{ cov } (b_m, b_n) \quad (3.19 \text{ a})$$

$$V_{mn} = (C\Delta_1^T)_{mn} \text{ cov } (b_m, b_n) \quad (3.19 \text{ b})$$

$$W_{mn} = (\Delta_1^T C^T)_{mn} \text{ cov } (b_m, b_n) \quad (3.19 \text{ c})$$

$$Z_{mn} = (\Delta_1 \Delta_1^T)_{mn} \text{ cov } (b_m, b_n) \quad (3.19 \text{ d})$$

$$O_{mn} = (JJ^T)_{mn} \text{ cov } (p_m, p_n) \quad (3.19 \text{ e})$$

Debe notarse que el último término se asocia con la variabilidad de las cargas, mientras que los otros con la variabilidad de los parámetros de la reacción del suelo.

La demostración de las ecs. 3.17 y 3.19 se encuentra en el apéndice D.

En la ec. 3.18 los términos que multiplican a la covarianza de (b_m, b_n) , y de (p_m, p_n) corresponden al elemento (m,n) de la matriz correspondiente, es decir, la que resulta de multiplicar un vector por otro vector transpuesto; por ejemplo, $(CC^T)_{mn}$ es el elemento (m,n) de la matriz que resulta de la multiplicación CC^T .

3.3 CALCULO DE LAS MEDIAS Y COVARIANZAS DE LOS MOMENTOS FLEXIONANTES

Los momentos flexionantes en diversos puntos del pilote se obtienen como transformaciones lineales de los desplazamientos.

En forma simplificada los momentos flexionantes pueden expresarse en términos de diferencias finitas, como sigue

$$M_m = \frac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}}{l^2} (YI)_m \quad (3.20)$$

En que

- M_m = momento flexionante en el punto m
 y_{m-1}, y_m, y_{m+1} = desplazamientos correspondiente a los puntos $m-1, m$ y $m+1$, respectivamente
 $(YI)_m$ = rigidez flexionante del pilote en el punto m
 l = distancia entre los puntos $m-1$ y m , y entre m y $m+1$.

A partir de la ec. 3.20 se obtiene la esperanza de M_m

$$E(M)_m = \frac{E(y)_{m-1} - 2E(y)_m + E(y)_{m+1}}{l^2} (YI)_m \quad (3.21)$$

La varianza resulta

$$\begin{aligned} \text{var}(M)_m &= \frac{(YI)_m^2}{l^4} (\text{var } y_{m-1} + 4 \text{ var } y_m + \text{var } y_{m+1} \\ &\quad - 4 \text{ cov } (y_{m-1}, y_m) + 2 \text{ cov } (y_{m-1}, y_{m+1}) \\ &\quad - 4 \text{ cov } (y_m, y_{m+1})) \end{aligned} \quad (3.22)$$

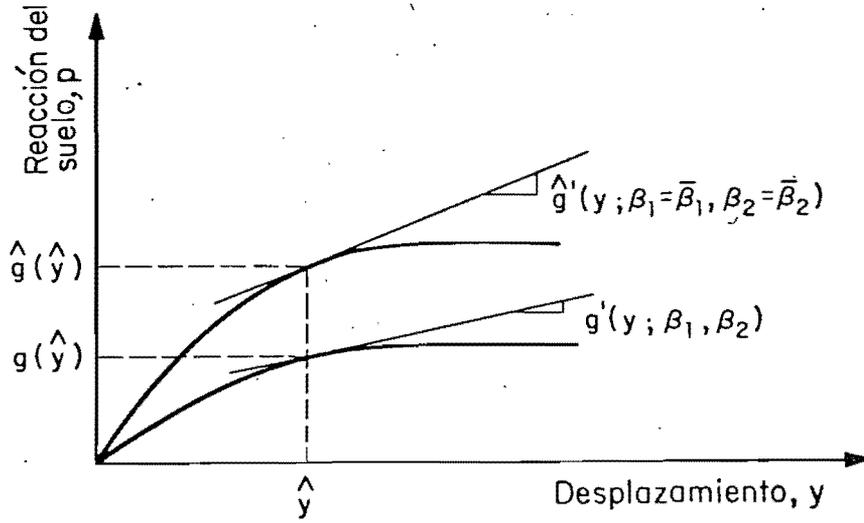


Fig.7 Formas hipotéticas de la función $g(y)$ para diversos valores de β_1 y β_2

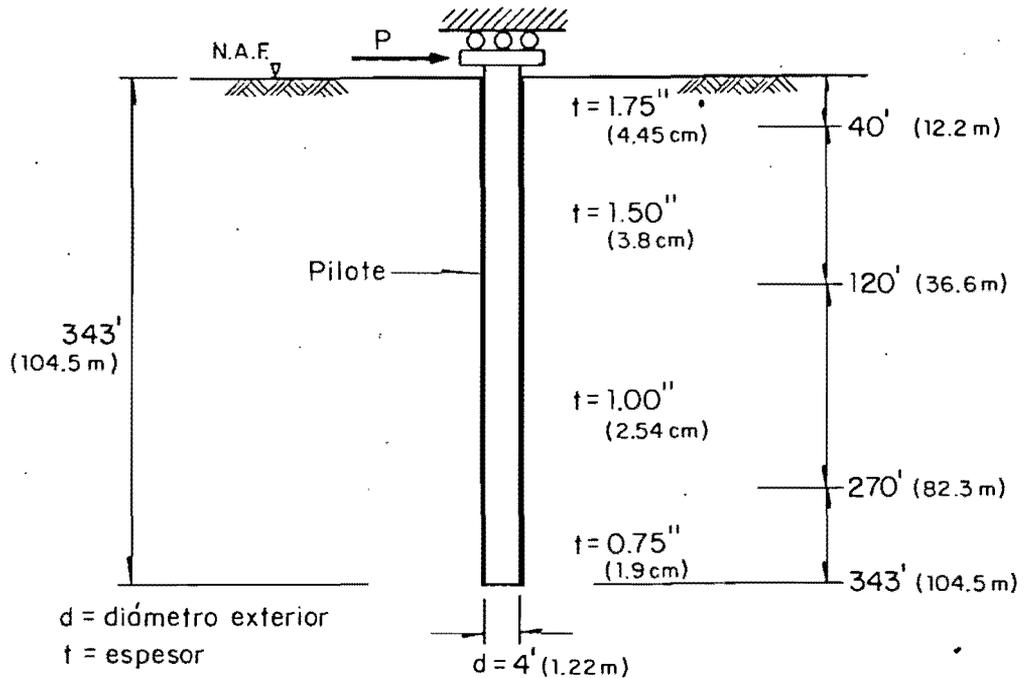


Fig 8 Ejemplo ilustrativo

C A P I T U L O 4

EJEMPLO ILUSTRATIVO

4.1 FORMULACION DEL PROBLEMA

En este capítulo se presenta un ejemplo ilustrativo de los criterios propuestos para estimar los parámetros estadísticos de las curvas $p-y$, y para obtener una descripción probabilista de la respuesta del pilote. Esta última se representa mediante los desplazamientos y momentos flexionantes. Se considera un pilote cuyas características se muestran en la fig 8. Este se encuentra sujeto a una carga lateral, aplicada durante un intervalo corto de tiempo.

Las propiedades básicas del suelo, determinadas de acuerdo con pruebas estándar, se presentan en la tabla 2 y pertenecen a un suelo arcilloso saturado.

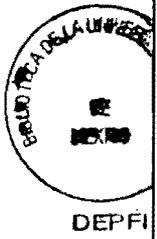
Las propiedades del pilote se suponen deterministas, mientras que el comportamiento del suelo, representado por curvas $p-y$, se considera en forma probabilista. En este ejemplo se supone que la carga es determinista con magnitud igual a 275 kips* (125 ton).

* La razón por la que se seleccionó este ejemplo es para notar la influencia de la incertidumbre en las curvas $p-y$ separadamente de la aleatoriedad de la carga. En el capítulo VI se presenta el mismo ejemplo suponiendo que la carga aplicada es incierta.

El problema se resuelve en dos etapas. La primera relacionada con la incertidumbre de las curvas $p-y$ (capítulo 2), y la segunda con sus implicaciones en la respuesta estructural del pilote (capítulo III).

4.2 DISTRIBUCION BAYESIANA DE LOS PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION DE p_u Y E_i NORMALIZADOS

En esta sección se encuentra la distribución bayesina de los parámetros de la función de distribución de probabilidades (f.d.p.) de la resistencia última del suelo, p_u , y del módulo inicial de la reacción del suelo, E_i , ambos normalizados con respecto a sus valores calculados. Esta sección cuenta con ocho partes (A a H). En la parte A se encuentran los parámetros correspondientes a La distribución *a priori* de B; en la B se incorpora la información dada por pruebas hechas a escala natural, de las cuales se tienen datos de curvas $p-y$ a lo largo de los prototipos, pero en donde p_u y E_i no pertenecen a una misma curva $p-y$; en la C se obtienen los parámetros de la f.d.p. *a posteriori*; en la D se incorporan datos de parejas de valores (p_u , E_i) correspondientes a pruebas hechas a escala natural, en donde se han medido curvas $p-y$ en diferentes profundidades a lo largo de los pilotes; en la parte E se obtiene una "segunda distribución *a posteriori*" de los parámetros de la distribución de B; en la F se incorporan los datos indirectos de mediciones de cargas y desplazamientos hechos en las cabezas de los pilotes (pruebas hechas a escala natural);



DEPE

en la parte G se obtiene una tercera distribución *a posteriori* correspondiente a la f.d.p. de los parámetros de la distribución de B; finalmente, en la parte H, se obtienen los primeros dos momentos de la distribución incondicional de B.

A. Distribución inicial de (β_i, h_{β_i}) , $i = 1, 2$

Matlock (31) recomienda la siguiente forma de curva $p-y$, para el caso de un suelo constituido por arcilla blanda saturada

$$p = 0.5 p_u (y/y_{50})^{1/3} \quad (4.1)$$

en donde

p = fuerza del suelo sobre el pilote, por unidad de longitud

p_u = resistencia última del suelo, por unidad de longitud

y = desplazamiento horizontal

y_{50} = $2.5 e_{50} d$

e_{50} = deformación correspondiente a la mitad de la diferencia de esfuerzos principales máximos, obtenida con una prueba de compresión triaxial

d = diámetro del pilote

A fin de evitar una pendiente inicial infinita, Sullivan (54, 55) sugiere una modificación como la mostrada en la fig 9. La parte inicial de la curva es lineal, de modo que

$$p = E_i y \quad (4.2)$$

en que E_i es el valor de la tangente inicial del módulo de la reacción horizontal del suelo. Considerando esto último, las ecuaciones que representan el comportamiento de este tipo de suelo están dadas por

$$p = \beta_2 E_i y \quad ; \quad 0 \leq y \leq y_0 \quad (4.3 a)$$

$$= \beta_1 0.5 p_{uc} (y/y_{50})^{1/3} \quad ; \quad y_0 < y \leq 8y_{50} \quad (4.3 b)$$

$$= \beta_1 p_{uc} \quad ; \quad y > 8y_{50} \quad (4.3 c)$$

Aquí el subíndice c se refiere al valor calculado, y_{50} se supone un valor determinista, y $y_0 = 0.5y_{50}$.

A.1 Resistencia última del suelo (p_u)

Según Matlock (31), la resistencia última del suelo para arcillas blandas saturadas es el valor menor que resulte de las siguientes expresiones

$$p_{uc} = (3 + \bar{\gamma}x/c + Qx/d) c d \quad (4.4 a)$$

$$p_{uc} = 9 c d \quad (4.4 b)$$

En que

p_{uc} = resistencia última del suelo calculada, por unidad de longitud

- $\bar{\gamma}$ = peso volumétrico efectivo medio del suelo de la superficie a una profundidad x
- Q = coeficiente empírico. Matlock (31) recomienda un valor igual a 0.5 para arcillas blandas, como las que se encuentran en el Golfo de México
- x = profundidad donde se determina la curva $p-y$, medida desde la superficie del suelo
- c = resistencia del suelo al esfuerzo cortante, a la profundidad x
- d = diámetro del pilote

Sólamamente se encontró un estudio hecho con modelos a pequeña escala enfocado a predecir p_u , para el tipo de suelo considerado (34). Los resultados de sus curvas $p-y$ se muestran en la fig 10. Ellos utilizaron tubos verticales de una pulgada (2.54 cm) de diámetro, d , empotrados en su cabeza. La resistencia al esfuerzo cortante promedio del suelo, c , fue de 0.56 lb/pulg^2 (394.0 kg/m^2). El suelo se tomó de sitios ubicados en el Lago de Austin, Texas. El suelo utilizado se hizo lo más homogéneo posible. El valor de su peso volumétrico sumergido fue de 0.0278 lb/pulg^3 (0.77 ton/m^3). La longitud de los especímenes varió de una a nueve pulgadas (2.54 a 22.8 cm).

En la fig 10 se presentan con líneas interrumpidas las cotas superior e inferior del valor de la resistencia última calculadas con las ecs. 4.4. En la tabla que sigue se muestran los valores de p_{u_c} ; calculados con las ecs. 2.1 y 4.4. También se

muestra la esperanza y varianza de r_1 , suponiendo B con distribución normal.

Prueba	P_u (fig 10) lb/pulg (kg/cm)	P_{uc} (ec. 4.4) lb/pulg (kg/cm)	r_1 (ec. 2.1)	$(r_1 - \bar{r}_1)^2$
1	1.93 (0.35)	1.98 (0.35)	0.974	0.0269
2	2.35 (0.42)	2.60 (0.47)	0.904	0.0088
3	2.55 (0.46)	3.22 (0.58)	0.792	0.0003
4	2.80 (0.50)	3.83 (0.69)	0.731	0.0062
5	2.90 (0.52)	4.45 (0.80)	0.652	0.0250
S U M A =			4.053	0.0673

$$\bar{r}_1 = 4.053/5 = 0.81$$

$$\sigma_{r_1}^2 = 0.0673/4 = 0.0168$$

A.2 Tangente inicial del módulo de la reacción del suelo (E_i)

Para el cálculo de E_i , Sullivan (54) sugiere las siguiente expresión

$$E_i = k x \quad (4.5)$$

En donde

k = gradiente de la tangente inicial del módulo de la reacción del suelo

E_i = tangente inicial del módulo de la reacción del suelo

x = profundidad, media a partir de la superficie del suelo

En la fig 11 se muestran los valores típicos del valor medio de k para diferentes valores de la resistencia al esfuerzo cortante.

En seguida se presentan los resultados asociados al parámetro E_i obtenidos de las pruebas a pequeña escala hechas por Matlock y Ripperger (34).

La siguiente tabla muestra los valores obtenidos de dichas pruebas (fig 12) y los calculados con las ecs. 2.1 a 4.5

PRUEBA	Prof. x pulg. (cm)	E_i (fig 12)		E_i (ec. 4.5)		r_2 (ec. 2.1 a)	$(r_2 - \bar{r}_2)^2$
		lb/pulg ²	(kg/cm ²)	lb/pulg ²	(kg/cm ²)		
1	1 (2.54)	20.5	(1.44)	18	(1.27)	1.14	0.1954
2	3 (7.62)	69.0	(4.86)	54	(3.80)	1.28	0.3384
3	5 (12.7)	49.0	(3.45)	90	(6.34)	0.54	0.0250
4	7 (17.8)	42.8	(3.02)	126	(8.88)	0.34	0.1282
5	9 (22.8)	31.5	(2.22)	162	(11.41)	0.19	0.2581
S U M A =						3.49	0.9451

$$\bar{r}_2 = 3.49/5 = 0.70$$

$$\sigma_{r_2}^2 = 0.9451/4 = 0.24$$

La aplicación del Teorema de Bayes, cuando la distribución *a priori* es difusa, conduce a parámetros s''^2 , m'' y n'' , correspondientes a la distribución *a posteriori*, iguales a los obtenidos a partir de las observaciones. Para el caso en que r_1 y r_2 se suponen independientes, los valores en cuestión sustituidos en las ecs. 2.18, dan lugar a lo siguiente

$$\bar{r}_1 = 4.053/5 = 0.81 ; \bar{r}_2 = 3.49/5 = 0.70 \quad (4.6 a)$$

$$\sigma_{r_1}^2 = 0.0168 \frac{4}{5 \times 3} = 0.00448; \quad \sigma_{r_2}^2 = 0.24 \frac{4}{5 \times 3} = 0.063 \quad (4.6 b)$$

$$\bar{\sigma}_{r_1} = \sqrt{0.0168} \sqrt{\frac{4}{2}} \frac{1}{0.5 \sqrt{\pi}} = 0.2076 ;$$

$$\bar{\sigma}_{r_2} = \sqrt{0.24} \sqrt{\frac{4}{2}} \frac{1}{0.5 \sqrt{\pi}} = 0.782 \quad (4.6 c)$$

$$\sigma_{\sigma_{r_1}}^2 = (0.0168) \frac{4}{1} - (0.207)^2 = 0.0242;$$

$$\sigma_{\sigma_{r_2}}^2 = (0.24) \left(\frac{4}{1}\right) - (0.782)^2 = 0.3435 \quad (4.6 d)$$

A.3 Influencia de la incertidumbre en las propiedades del suelo

En este ejemplo sólo se considera como variable aleatoria la resistencia al esfuerzo cortante del suelo, c , y se suponen determinadas todas las demás propiedades del suelo que intervienen en el cálculo de p_u y de E_i . En la tabla 2 se presentan los valores de c , en un sitio dado para diferentes profundidades.

Los valores de c fueron obtenidos con varios tipos de pruebas diferentes, como puede verse en dicha tabla, sin embargo, para los fines ilustrativos que aquí se pretenden, se supone que la variabilidad asociada a cada tipo de prueba es mínima con

respecto a las pruebas triaxiales UU (29). Por lo tanto, en lo que sigue, se utilizan directamente los datos que se dan en esta tabla.

La influencia de c se considera en las siguientes expresiones (suponiendo que B tiene distribución normal).

$$\beta_1 = r_1 \frac{p_u(c)}{p_u(c^*)} = r_1 \gamma_1, \quad \beta_2 = r_2 \frac{k(c)}{k(c^*)} = r_2 \gamma_2 \quad (4.7)$$

en que

$$c^* = \text{valor característico de } c$$

Los valores medios y covarianzas de β_i , $i = 1, 2$ están dados por las ecs. 2.4. Los valores aproximados de $\bar{\beta}_i$ y $\sigma_{\beta_i}^2$, indicados en las ecs. 2.8, se expresan en forma explícita en lo que sigue

$$\bar{\beta}_i = \bar{r}_i, \quad (4.8 a)$$

$$\sigma_{\beta_i}^2 = \sigma_{r_i}^2, \quad h_{\beta_i} = 1/\sigma_{r_i}^2 \quad (4.8 b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta_i}^2 &= (\bar{\sigma}_{r_i})^2 + (\bar{r}_i)^2 \sigma_{\gamma_i}^2 + (\bar{\sigma}_{r_i})^2 \sigma_{\gamma_i}^2 + \text{var } \sigma_{r_i} \\ &+ \sigma_{\gamma_i}^2 \sigma_{r_i}^2 + \sigma_{\gamma_i}^2 \text{var } \sigma_{r_i} \quad (4.8 c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta_i}^2 &= 4 [(\bar{\sigma}_{r_i})^2 \text{var } \sigma_{r_i} + (\bar{r}_i \sigma_{\gamma_i})^2 \text{var } \bar{r}_i \\ &+ (\bar{\sigma}_{r_i} \sigma_{\gamma_i})^2 \text{var } \sigma_{r_i} + 2 \bar{\sigma}_{r_i}^2 \sigma_{\gamma_i}^2 \text{var } \sigma_{r_i}], \quad i = 1, 2 \quad (4.8 d) \end{aligned}$$

En donde se supone por simplicidad que $\text{cov}(\bar{r}_i, \sigma_{r_i}) = 0$.

Aquí se consideró que el valor característico de c es igual a su valor medio \bar{c} , y por lo tanto $\bar{\gamma}_i = 1$, $i = 1, 2$.

Dado que se cuenta con suficientes datos de la resistencia al esfuerzo cortante, c , (92) es posible obtener la varianza de γ_i , $i = 1, 2$ directamente de estas pruebas. En la Tabla 1 se presentan los datos de c , \bar{c} , γ_1 y γ_2 correspondientes al subsuelo del sitio de interés. La última columna se obtuvo a partir de la fig 11.

De dicha tabla se obtiene

$$\sigma_{\gamma_1}^2 = 1.1733/91 = 0.0129$$

$$\sigma_{\gamma_2}^2 = 4.7566/91 = 0.0523$$

$$\text{cov}(\gamma_1, \gamma_2) = 0.0237$$

Sustituyendo los valores correspondientes en las ecs. 4.8, se calcula lo siguiente

$$\bar{\beta}_1 = 0.81 \quad ; \quad \bar{\beta}_2 = 0.70 \quad (4.9 \text{ a})$$

$$h_{\bar{\beta}_1} = 223.21 \quad ; \quad h_{\bar{\beta}_2} = 15.873 \quad (4.9 \text{ b})$$

$$\bar{\sigma}_{\beta_1}^2 = 0.0766 \quad ; \quad \bar{\sigma}_{\beta_2}^2 = 1.056 \quad (4.9 \text{ c})$$

$$\sigma_{\sigma_{\beta_1}}^2 = 0.0042 \quad ; \quad \sigma_{\sigma_{\beta_2}}^2 = 0.9158 \quad (4.9 \text{ d})$$

A.4 Parámetros de la distribución bayesiana de B.

En este ejemplo se supone que los valores obtenidos de modelos a pequeña escala y a escala natural tienen la misma distribución probabilista, por lo que $E(\alpha_i') = E(\alpha_i'') = 1$, y $\sigma_{\alpha_i}^2 = \sigma_{\alpha_i''}^2 = 0$, $i = 1, 2$. Entonces los parámetros de la distribución bayesiana de B son idénticos a los obtenidos en las ecs. 4.9.

La anterior hipótesis es discutible. Para estimar las estadísticas de α_i' y α_i'' deberían de aplicarse cuestionarios a los expertos en mecánica de suelos. Las personas calificadas para contestar tales cuestionarios, deben de tener suficiente experiencia de modo que los juicios emitidos por ellos puedan tomarse con alto nivel de confianza. De esta manera, se utiliza la experiencia obtenida a través de los años dentro de un formato cuantitativo.

En lo que sigue se relacionan los valores centrales, dados por las ecs. 4.9 con los parámetros m , n , v y v según las ecs. 2.17.

Valores medios de $\bar{\beta}_i$

$$m_{\beta_1}^i = 0.81$$

(4.10 a)

$$m_{\beta_2}^i = 0.70$$

. Parámetros v'_{β_i} , $i = 1, 2$

Según la relación 2.17 c

$$v'_{\beta_i} = 1/E(1/\sigma_{\beta_i}^2)$$

A fin de obtener el valor de esta expresión se introduce una aproximación de segundo orden, como sigue

$$E(1/\sigma_{\beta_i}^2) = 1/\bar{\sigma}_{\beta_i}^2 + \text{var}(\sigma_{\beta_i}^2)/E^3(\sigma_{\beta_i}^2), \quad i = 1, 2 \quad (4.10 \text{ b})$$

Entonces,

$$E(1/\sigma_{\beta_1}^2) = 22.58$$

$$E(1/\sigma_{\beta_2}^2) = 1.72$$

Sustituyendo estos valores en la expresión correspondiente a v' se obtiene

$$v'_{\beta_1} = 0.0443 \quad (4.10 \text{ c})$$

$$v'_{\beta_2} = 0.5809 \quad (4.10 \text{ d})$$

. Parámetros v'_{β_i} , $i = 1, 2$.

$$v'_{\beta_i} = \frac{2}{\text{var}'(1/\sigma_{\beta_i}^2) v'_{\beta_i}}, \quad i = 1, 2 \quad (4.11 \text{ a})$$

Así como se hizo en el inciso anterior, aquí también introducimos una aproximación de segundo orden (7), de modo que

$$\text{var} (1/\sigma_{\beta_i}^2) \approx (1/E^2(\sigma_{\beta_i}^2))^2 \text{var} (\sigma_{\beta_i}^2) , i = 1, 2 \quad (4.11 b)$$

Sustituyendo valores en la ec. 4.11, resulta

$$v'_{\beta_1} = 8.201 \quad (4.12 a)$$

$$v'_{\beta_2} = 8.087 \quad (4.12 b)$$

Despejando el valor de n' de 2.17 b se obtiene

$$n'_{\beta_i} = \frac{v'_{\beta_i}}{\text{var}(\bar{\beta}_i) (v' - 2)} , i = 1, 2$$

Sustituyendo en ésta, se llega a

$$n'_{\beta_1} = 13.02 \quad (4.12 c)$$

$$n'_{\beta_2} = 12.25 \quad (4.12 d)$$

Los valores de n'_{β_i} pueden interpretarse como un tamaño equivalente de una muestra ficticia cuyos datos conducen a la distribución *a priori*.

B. Estadísticas de las mediciones en campo de curvas p-y a diferentes profundidades

A fin de tener un mejor conocimiento sobre la distribución de los parámetros de la f.d.p. de B, enseguida se incorpora la información obtenida a partir de pruebas hechas a escala natural. En éstas se han medido valores de p_u y E_i a distintas profundidades. En la primera parte de esta sección se incorporan valores obtenidos en campo ya sea de p_u o de E_i encontrados por separado en la literatura. En la segunda se incorporan simultáneamente parejas de valores (p_u , E_i).

En la tabla 3 se presentan resultados de mediciones hechas por diferentes investigadores (20, 24, 26, 35) de los parámetros p_u y E_i , así como sus respectivas relaciones con respecto a valores calculados usando las ecs. 4.4 y 4.5.

B.1 Incorporación de datos p_u y E_i obtenidos de pruebas hechas a escala natural

Las estadísticas de las observaciones anotadas en la parte superior de la tabla 3 (24, 26, 35) son las siguientes

. Valores medios

$$m_{\bar{\beta}_1} = \frac{\sum \beta_{1i}}{n_{\beta_1}} = 1.09 \quad (4.13 \text{ a})$$

$$m_{\bar{\beta}_2} = \frac{\sum \beta_{2i}}{n_{\beta_2}} = 0.51 \quad (4.13 \text{ b})$$

n_{β_1} y n_{β_2} son los datos de β_1 y β_2 , que no forman parejas de valores.

. Parámetros v_{β_i} , $i = 1, 2$

$$v_{\beta_1} = 2 - 1 = 1 \quad (4.14 \text{ a})$$

$$v_{\beta_2} = 6 - 1 = 5 \quad (4.14 \text{ b})$$

. Parámetros v_{β_i} , $i = 1, 2$

$$v_{\beta_1} = \frac{1}{v_{\beta_1}} \sum (\bar{\beta}_{1i} - m_{\bar{\beta}_1})^2 = 0.0032 \quad (4.15 \text{ a})$$

$$v_{\beta_2} = \frac{1}{v_{\beta_2}} \sum (\bar{\beta}_{2i} - m_{\bar{\beta}_2})^2 = 0.31 \quad (4.15 \text{ b})$$

C. Primera distribución a posteriori de los parámetros de la distribución de B

Si se considera que la distribución de $(\beta_i; h_{\beta_i})$ es Normal-Gamma con los parámetros dados por las ecs. 4.10 y 4.12, y que las estadísticas de las observaciones están representadas por las ecs. 4.13-4.15, entonces la f.d.p. posterior es Normal-Gamma con los parámetros siguientes, obtenidos según las ecs. 2.16

$$m_{\beta_1}'' = \frac{(13.02)(0.81) + (2)(1.09)}{13.02 + 2} = 0.85 \quad (4.16 \text{ a})$$

$$m_{\beta_2}'' = \frac{(12.25)(0.70) + (6)(0.51)}{12.25 + 6} = 0.64 \quad (4.16 \text{ b})$$

$$n_{\beta_1}'' = 15.02 \quad (4.17 \text{ a})$$

$$n_{\beta_2}'' = 18.25 \quad (4.17 \text{ b})$$

$$v_{\beta_1}'' = 8.201 + 1 + 1 = 10.201 \quad (4.18 \text{ a})$$

$$v_{\beta_2}'' = 8.087 + 5 + 1 = 14.087 \quad (4.18 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} v_{\beta_1}'' &= \frac{(0.0443)(8.201) + (13.02)(0.81)^2}{10.201} \\ &\quad + \frac{(1)(0.0032) + (2)(1.09)^2 - (15.02)(0.85)^2}{10.201} \\ &= 0.0425 \end{aligned} \quad (4.19 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} v_{\beta_2}'' &= \frac{(0.5809)(8.087) + (12.25)(0.70)^2}{14.087} \\ &\quad + \frac{(5)(0.31) + (6)(0.51)^2 - (18.25)(0.64)^2}{14.087} \\ &= 0.4498 \end{aligned} \quad (4.19 \text{ b})$$

A partir de estos parámetros se pueden calcular los valores centrales y de dispersión, usando las ecs. 2.17, así se obtiene

$$E(\bar{\beta}_1) = 0.85 ; E(\bar{\beta}_2) = 0.64 \quad (4.20 \text{ a})$$

$$\text{var}(\bar{\beta}_1) = 0.0035 ; \text{var}(\bar{\beta}_2) = 0.0287 \quad (4.20 \text{ b})$$

$$E(h_{\beta_1}) = 23.53 ; E(h_{\beta_2}) = 2.22 \quad (4.20 \text{ c})$$

$$\text{var}(h_{\beta_1}) = 108.54 ; \text{var}(h_{\beta_2}) = 0.7017 \quad (4.20 \text{ d})$$

C.1 Expresiones de la primera distribución *a posteriori* en forma bidimensional

En los incisos anteriores, los parámetros β_1 y β_2 se trataron separadamente, considerando funciones de densidad de probabilidades unidimensionales. Su representación bidimensional es la siguiente

$$m = \begin{Bmatrix} 0.85 \\ 0.64 \end{Bmatrix} \quad (4.21 \text{ a})$$

$$n = \begin{bmatrix} 48.57 & 0 \\ 0 & 5.923 \end{bmatrix} \quad (4.21 \text{ b})$$

$$v = 0.14 \quad (4.21 \text{ c})$$

$$v = 10.01 \quad (4.21 \text{ d})$$

La obtención detallada de estos valores se presenta en el apéndice E.

D. Incorporación de parejas de valores p_u y E_i medidas a distintas profundidades en pruebas hechas a escala natural

En seguida se incorpora información de pruebas hechas a escala natural en las que se obtuvieron curvas p - y completas a distintas profundidades (20,35). Es decir, con estos datos se puede obtener la correlación entre las variables β_1 y β_2 para una profundidad dada. Debido a lo anterior, en esta sección se tratan los datos que forman parejas de valores β_1 y β_2 en forma bidimensional correspondientes a pruebas hechas por distintos investigadores. Esta información, (10 parejas de valores), aparece en la parte inferior de la tabla 3. Sus estadísticas correspondientes según las ecs. 2.15, son las siguientes

$$m_0 = \begin{Bmatrix} 0.65 \\ 0.878 \end{Bmatrix} \quad (4.22 \text{ a})$$

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0.318 & 0.29 \\ 0.29 & 1.443 \end{bmatrix}; \quad H_0 = \begin{bmatrix} 3.85 & -0.77 \\ -0.77 & 0.85 \end{bmatrix}$$

$$; \quad h_0 = 1.637$$

$$\eta_0 = \begin{bmatrix} 2.35 & -0.47 \\ -0.47 & 0.52 \end{bmatrix}; \quad n_0 = n\eta_0 = \begin{bmatrix} 23.5 & -4.7 \\ -4.7 & 5.2 \end{bmatrix}; \quad (4.22 \text{ b})$$

$$v_0 = r(n - 1) = 2(10 - 1) = 18 \quad (4.22 \text{ c})$$

$$v_0 = \frac{10.74}{18} = 0.6 \quad (4.22 \text{ d})$$

E. Segunda distribución a posteriori de los parámetros de la distribución de B

Los parámetros *a posteriori* que se obtienen al sustituir los valores dados por las ecs. 4.21 y 4.22 en las ecs. 2.16 son iguales a

$$m'' = \begin{Bmatrix} 0.78 \\ 0.79 \end{Bmatrix} \quad (4.23 \text{ a})$$

$$n'' = \begin{bmatrix} 72.07 & -4.7 \\ -4.7 & 11.12 \end{bmatrix} \quad (4.23 \text{ b})$$

$$v'' = 30.01 \quad (4.23 \text{ c})$$

$$v'' = 0.444 \quad (4.23 \text{ d})$$

Estos valores expresados en términos de valores centrales y de dispersión son como sigue

$$m_{\bar{B}} = \begin{Bmatrix} 0.78 \\ 0.79 \end{Bmatrix} \quad (4.24 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\bar{B}} &= n^{-1} v \frac{v}{v-2} = \begin{bmatrix} 11.12 & 4.7 \\ 4.7 & 72.07 \end{bmatrix} \frac{0.4444}{779.33} \cdot \frac{30.01}{28.01} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.0068 & 0.0029 \\ 0.0029 & 0.044 \end{bmatrix} \quad (4.24 \text{ b}) \end{aligned}$$

$$E(h_B) = \frac{1}{v} = \frac{1}{30.01} = 2.25 \quad (4.24 \text{ c})$$

$$\text{var}(h_B) = \frac{2}{v v^2} = \frac{2}{(30.01)(0.444)} = 0.338 \quad (4.24 \text{ d})$$

Tratando las ecs. 4.10 b y 4.11 b como un sistema de ecuaciones simultáneas, para $\beta_i = \beta$, se obtiene

$$E(\text{var } \beta) = \frac{E(h_\beta) \pm \sqrt{E(h_\beta)^2 - 4 \text{ var } h_\beta}}{2 \text{ var } h_\beta} \quad (4.25 \text{ a})$$

$$\text{var}(\text{var } \beta) = E^4(\text{var } \beta) \text{ var}(h_\beta) \quad (4.25 \text{ b})$$

Sustituyendo 4.24 c y d en 4.25 resulta

$$E(\text{var } \beta) = \frac{2.25 \pm \sqrt{5.0625 - 4(0.338)}}{2(0.338)} = \begin{cases} 0.478^* \\ 6.17^* \end{cases} \quad (4.26 \text{ a})$$

$$\text{var}(\text{var } \beta) = (0.478)^4 (0.338) = 0.0176 \quad (4.26 \text{ b})$$

F. Mediciones hechas en la cabeza de los pilotes

Para mejorar el conocimiento sobre la distribución bayesiana de (\bar{B}, h_β) en seguida se incorporan datos obtenidos de pruebas hechas a escala natural en las que se midieron la carga lateral aplicada al nivel del terreno (P) y el desplazamiento (y_1) en la cabeza de los pilotes. Dado que estas no son las variables que se han manejado aquí, se aprovechará dicha información indirecta mediante el tratamiento expuesto al final del capítulo II.

* De estas dos soluciones se toma 0.478, que es la más cercana a la solución para la aproximación de primer orden: $E(\text{var } \beta) = E^{-1}(h_\beta) = 2.25^{-1}$

F.1 Distribución *a priori* de la media y la varianza del desplazamiento lateral normalizado, en la cabeza del pilote

$$(\bar{d}_n, \sigma_{d_n}^2)$$

Las ecs. 2.24 describen los primeros dos momentos de la media y la varianza del desplazamiento lateral en la cabeza de los pilotes, normalizados respecto a su desplazamiento calculado y al cuadrado de este valor.

Los valores de los coeficientes, obtenidos con un programa de computadora hecho para estos fines, para una carga lateral igual a 275 kips (125 ton) son

$$a = 2.64; \quad c = -1.64; \quad e = 0.18; \quad h = 0.56$$

(Estos coeficientes dependen de los intervalos a los que pertenezcan las deformaciones esperadas de los resortes de Winkler en la parte superior, que son los que influyen en el desplazamiento de la cabeza del pilote).

Sustituyendo los valores de los coeficientes anteriores y los de las ecs. 4.24 y 4.26 en las expresiones dadas por las ecs. 2.26 se obtienen los siguientes parámetros (aplicables a los casos en que las deformaciones de los resortes que determinan d_n se encuentran en el intervalo en que la curva carga-deformación está definida por β_1 , o sea, en el intervalo no-lineal).

$$(\bar{d}_n)_1 = 2.64 - 1.64(0.78) + 0.18(0.478) = 1.447 \quad (4.27 \text{ a})$$

$$(\sigma_{d_n}^2)_1 = (-1.64)^2 (0.0068) + (0.18)^2 (0.0176) = 0.0189 \quad (4.27 \text{ b})$$

$$(\bar{\sigma}_{d_n}^2)_1 = 0.56(0.478) = 0.268 \quad (4.27 \text{ c})$$

$$(\sigma_{\sigma_{d_n}^2}^2)_1 = (0.56)^2 (0.0176) = 0.0055 \quad (4.27 \text{ d})$$

Para el caso en que la parte significativa de la curva carga-deformación de los resortes está definida por β_2 , o sea en el intervalo lineal, se obtiene

$$(\bar{d}_n)_2 = 2.64 - 1.64(0.79) + (0.18)(0.478) = 1.430 \quad (4.28 \text{ a})$$

$$(\sigma_{d_n}^2)_2 = (-1.64)^2 (0.044) + (0.18)^2 (0.0176) = 0.1189 \quad (4.28 \text{ b})$$

$$(\bar{\sigma}_{d_n}^2)_2 = 0.56(0.478) = 0.268 \quad (4.28 \text{ c})$$

$$(\sigma_{\sigma_{d_n}^2}^2)_2 = (0.56)^2 (0.0176) = 0.0055 \quad (4.28 \text{ d})$$

Las ecs. 4.27 y 4.28 constituyen la información *a priori* sobre la distribución de $(\bar{d}_n, \sigma_{d_n}^2)$. En lo que sigue se expresan estos valores en términos de los parámetros m , n , v y v , (notación usada por Raiffa y Schlaifer, 43)

Valores medios de \bar{d}_{n_i} , $i = 1, 2$

$$m_{\bar{d}_1} = 1.447 \quad (4.29 \text{ a})$$

$$m_{\bar{d}_2} = 1.430 \quad (4.29 \text{ b})$$

Parámetros $(v_{d_n})_i$, $i = 1, 2$

$$\text{En que } v_{d_n} = \frac{1}{E(1/\sigma_{d_n}^2)}$$

A fin de conocer el valor del denominador de esta expresión, se usa una similar a la ec. 4.10 b, a saber

$$E(1/\sigma_{d_n}^2) = 1/\sigma_{d_n}^2 + \text{var}(\sigma_{d_n}^2)/E(\sigma_{d_n}^2)$$

Por lo que

$$E(1/\sigma_{d_n}^2)_1 = 1/0.268 + 0.0055/(0.268)^3 = 4.017$$

$$E(1/\sigma_{d_n}^2)_2 = 4.017$$

O sea que los valores de $(v_{d_n})_i$, $i = 1, 2$ son iguales a

$$(v_{d_n})_1 = 0.25 \quad (4.30 \text{ a})$$

$$(v_{d_n})_2 = 0.25 \quad (4.30 \text{ b})$$

Parámetros (v_{d_n}) , $i = 1, 2$

En donde

$$v_{d_n} = \frac{2}{\text{var}(h_{d_n})v_{d_n}^2}$$

Igual que en el inciso anterior, se usa una ecuación similar a la 4.11 b que es la siguiente

$$\text{var}(1/\sigma_{d_n}^2) = (1/E^2(\sigma_{d_n}^2))^2 \text{var}(\sigma_{d_n}^2)$$

Sustituyendo valores en ésta se obtiene

$$\text{var}(1/\sigma_{d_n}^2)_1 = (1/0.268^2)^2 (0.0055) = 1.066$$

$$\text{var}(1/\sigma_{d_n}^2)_2 = 1.066$$

Los valores de $(v_{d_n})_i$, $i = 1, 2$ están dados por

$$(v_{d_n})_1 = \frac{2}{(1.066)(0.25)^2} = 30.02 \quad (4.31 \text{ a})$$

$$(v_{d_n})_2 = 30.02 \quad (4.31 \text{ b})$$

Parámetros $(n_{d_n})_i$, $i = 1, 2$

$$\text{En que } n_{d_n} = \frac{1}{\text{var}(\bar{d}_n)} v_{d_n} \frac{v_{d_n}}{v_{d_n} - 2}$$

$$(n_{d_n})_1 = \frac{1}{0.0189} (0.25) \frac{30.02}{28.02} = 14.17 \quad (4.32 \text{ a})$$

$$(n_{d_n})_2 = \frac{1}{0.1189} (0.25) \frac{30.02}{28.02} = 2.25 \quad (4.32 \text{ b})$$

En lo que sigue se considera como información *a priori* las ecs. 4.29 a 4.32, y se incorporan las estadísticas de las me

diciones tomadas al nivel del suelo.

F.2 Estadísticas de las mediciones tomadas en la cabeza de los pilotes

Las tablas 4 y 5 (28, 31 y 34) muestran los resultados de los desplazamientos en la cabeza de los pilotes, divididos entre los desplazamientos calculados (usando curvas p-y deterministas). La primera columna se puede asociar principalmente con el parámetro β_2 dado que la deformación esperada del suelo se encuentra dentro de un intervalo de comportamiento lineal; la segunda puede asociarse a β_1 , porque los datos corresponden a un comportamiento no-lineal del suelo.

Las estadísticas de las observaciones son las siguientes

Valores medios de los desplazamientos normalizados*

$$m_{d_1} = \frac{\sum_{j=1}^{n_{d_1}} (d_n)_{1j}}{n_{d_1}} = \frac{56.47}{45} = 1.25 \quad (4.33 \text{ a})$$

$$m_{d_2} = \frac{\sum_{j=1}^{n_{d_2}} (d_n)_{2j}}{n_{d_2}} = \frac{51.43}{39} = 1.32 \quad (4.33 \text{ b})$$

n_{d_1} y n_{d_2} corresponden al número de datos de la primera y segunda columna de las tablas 4 y 5, y $(d_n)_{1j}$, $(d_n)_{2j}$ son los correspondientes valores de y_1/y_{1c} .

* En lo que sigue se omite el subíndice n por simplicidad de notación.

• Varianzas de los desplazamientos normalizados

$$v_{d_1} = \frac{31.05}{44} = 0.71 \quad (4.34 \text{ a})$$

$$v_{d_2} = \frac{29.68}{38} = 0.78 \quad (4.34 \text{ b})$$

F.3 Distribución *a posteriori* de $(\bar{d}_n, \sigma_{d_n}^2)$

A fin de obtener los parámetros *a posteriori* se aplica nuevamente el Teorema de Bayes. Sustituyendo las ecs. 4.29 a 4.34 en las ecs. 2.16 se obtiene

$$(m_d)_1'' = \frac{(1.447)(14.17) + (1.25)(45)}{14.17 + 45} = 1.30$$

$$(m_d)_2'' = \frac{(1.43)(2.25) + (1.32)(39)}{2.25 + 39} = 1.33$$

$$n_{d_1}'' = 14.17 + 45 = 59.17$$

$$n_{d_2}'' = 2.25 + 39 = 41.25$$

$$v_d'' = 30.02 + 1 + 44 = 75.02$$

$$v_{d_1}'' = 30.02 + 1 + 38 = 69.02$$

$$v_{d_1}'' = \frac{(30.02)(0.25) + (1.447)^2(14.17) + (44)(0.71)}{75.02}$$

$$+ \frac{(1.25)^2(45) - (1.3)^2(59.17)}{75.02} = 0.52$$

$$v_{\bar{d}_2}'' = \frac{(30.02)(0.25) + (1.43)^2(2.25) + (38)(0.78)}{69.02} \\ + \frac{(1.32)^2(39) - (1.33)^2(41.25)}{69.02} = 0.53$$

Los parámetros anteriores pueden expresarse en términos de valores centrales, según las ecs. 2.17, como sigue

$$E(\bar{d})_1 = 1.30 \quad (4.35 \text{ a})$$

$$E(\bar{d})_2 = 1.33 \quad (4.35 \text{ b})$$

$$E(h_d)_1 = \frac{1}{0.52} = 1.923$$

$$E(h_d)_2 = \frac{1}{0.53} = 1.88$$

$$\text{var}(h_d)_1 = \frac{2}{v_{d_1} v_{d_2}^2} = \frac{2}{(75.02)(0.52)^2} = 0.098$$

$$\text{var}(h_d)_2 = \frac{2}{(69.02)(0.53)^2} = 0.103$$

$$\text{var}(\bar{d})_1 = \frac{v_{d_1}}{n_{d_1}} \frac{v_{d_1}}{(v_{d_1} - 2)} = \frac{(0.52)}{(59.17)} \frac{(75.02)}{(73.02)} = 0.009 \quad (4.36 \text{ a})$$

$$\text{var}(\bar{d})_2 = \frac{(0.53)(69.02)}{(41.25)(67.02)} = 0.013 \quad (4.36 \text{ b})$$

Utilizando las relaciones dadas por la ec. 4.25 se obtiene

$$E(\text{var } d)_1 = \frac{1.923 \pm \sqrt{(1.923)^2 - (4)(0.098)}}{(2)(0.098)} = 0.53 \quad (4.37 \text{ a})$$

$$E(\text{var } d)_2 = \frac{1.88 \pm \sqrt{(1.88)^2 - 4(0.103)}}{(2)(0.103)} = 0.55 \quad (4.37 \text{ b})$$

$$\text{var}(\text{var } d)_1 = (0.53)^4 (0.098) = 0.0077 \quad (4.38 \text{ a})$$

$$\text{var}(\text{var } d)_2 = (0.55)^4 (0.103) = 0.0094 \quad (4.38 \text{ b})$$

G. Tercera distribución a posteriori de los parámetros de la distribución de B

A partir de las ecs. 2.26 se establecen dos sistemas de ecuaciones de donde se despejan las variables $\bar{\beta}_i$, $\text{var } \bar{\beta}_i$, $E(\text{var } \beta_i)$ y $\text{var}(\text{var } \beta_i)$, $i = 1, 2$.

Para $i = 1$, resulta

$$1.30 = 2.64 - 1.64 \bar{\beta}_1 + 0.18 \bar{\sigma}_{\beta_1}^2$$

$$0.009 = (1.64)^2 \sigma_{\beta_1}^2 + (0.18)^2 \text{var}(\sigma_{\beta_1}^2)$$

$$0.53 = 0.56 \bar{\sigma}_{\beta_1}^2$$

$$0.0077 = (0.56)^2 \text{var}(\sigma_{\beta_1}^2)$$

Para $i = 2$, el sistema es el siguiente

$$1.33 = 2.64 - 1.64 \bar{\beta}_2 + 0.18 \bar{\sigma}_{\beta_2}^2$$

$$0.013 = (1.64)^2 \sigma_{\beta_2}^2 + (0.18)^2 \text{var}(\sigma_{\beta_2}^2)$$

$$0.55 = 0.56 \bar{\sigma}_{\beta_2}^2$$

$$0.0094 = (0.56)^2 \text{var}(\sigma_{\beta_2}^2)$$

De estos dos sistemas se obtienen los siguientes valores

$$\bar{\beta}_1 = 0.92 \quad ; \quad \bar{\beta}_2 = 0.91 \quad (4.39 \text{ a})$$

$$\text{var} \bar{\beta}_1 = 0.003 \quad ; \quad \text{var} \bar{\beta}_2 = 0.0045 \quad (4.39 \text{ b})$$

$$E(\text{var} \beta_1) = 0.94 \quad ; \quad E(\text{var} \beta_2) = 0.98 \quad (4.39 \text{ c})$$

$$\text{var}(\text{var} \beta_1) = 0.024 \quad ; \quad \text{var}(\text{var} \beta_2) = 0.03 \quad (4.39 \text{ d})$$

A partir de las ecs. 4.10 b y 4.11 b se obtiene

$$E(1/\sigma_{\beta_1}^2) = 1/0.94 + 0.024/(0.94)^3 = 1.09 \quad (4.39 \text{ e})$$

$$E(1/\sigma_{\beta_2}^2) = 1/0.98 + 0.030/(0.98)^3 = 1.05 \quad (4.39 \text{ f})$$

$$\text{var}(1/\sigma_{\beta_1}^2) = (1/0.94)^4 (0.024) = 0.0307 \quad (4.39 \text{ g})$$

$$\text{var}(1/\sigma_{\beta_2}^2) = (1/0.98)^4 (0.030) = 0.0325 \quad (4.39 \text{ h})$$

Los valores dados por las ecs. 4.39 pueden expresarse en términos de los parámetros m , n , v y v . Se obtiene lo siguiente

$$m_{\bar{\beta}_1} = 0.92 \quad (4.40 \text{ a})$$

$$m_{\bar{\beta}_2} = 0.91 \quad (4.40 \text{ b})$$

$$v_{\bar{\beta}_1} = 1/1.09 = 0.92 \quad (4.41 \text{ a})$$

$$v_{\bar{\beta}_2} = 1/1.003 = 0.95 \quad (4.41 \text{ b})$$

$$v_{\bar{\beta}_1} = \frac{2}{(0.0307)(0.92)^2} = 76.9 \quad (4.42 \text{ a})$$

$$v_{\bar{\beta}_2} = \frac{2}{(0.032)(0.95)^2} = 69.25 \quad (4.42 \text{ b})$$

$$n_{\bar{\beta}_1} = \frac{(0.92)(76.9)}{(0.003)(74.9)} = 314.8 \quad (4.43 \text{ a})$$

$$n_{\bar{\beta}_2} = \frac{(0.95)(69.25)}{(0.0045)(67.25)} = 217.38 \quad (4.43 \text{ b})$$

H. Distribución incondicional de B

Los parámetros de las distribuciones incondicionales de β_1 y β_2 están dados por las ecs. 2.20 para el caso unidimensional

$$E(\beta_i) = m_{\bar{\beta}_i} \quad (4.44 \text{ a})$$

$$\text{var}(\beta_i) = \frac{v_{\bar{\beta}_i} v_{\bar{\beta}_i}}{n_{u_i} (v_{\bar{\beta}_i} - 2)} \quad (4.44 \text{ b})$$

$$n_{u_i} = \frac{n_{\bar{\beta}_i} \eta}{n_{\bar{\beta}_i} + \eta}, \quad i = 1, 2 \quad (4.44 \text{ c})$$

En este caso el valor de η es igual a 1 porque es lo mismo un valor de la variable β_i que la media de una muestra de tamaño 1 de dicha variable.

Sustituyendo en estas se obtienen los siguientes valores

$$E(\beta_1) = 0.92 \quad (4.45 \text{ a})$$

$$E(\beta_2) = 0.91 \quad (4.45 \text{ b})$$

$$n_{u_1} = \frac{314.8}{315.8} = 0.997$$

$$n_{u_2} = \frac{217.38}{218.38} = 0.995$$

$$\text{var}(\beta_1) = \frac{(0.92)(76.9)}{(0.997)(74.9)} = 0.95 \quad (4.46 \text{ a})$$

$$\text{var}(\beta_2) = \frac{(0.95)(69.25)}{(0.995)(67.25)} = 0.98 \quad (4.46 \text{ b})$$

Los valores $E(\beta_i)$ y $\text{var}(\beta_i)$, $i = 1, 2$ son los parámetros que nos dan la información estadística sobre las curvas $p-y$

4.3 RESPUESTA PROBABILISTA DEL PILOTE

En esta sección se calcula la respuesta probabilista del pi lote representado en la fig 8. El pilote es hueco de 4 pies (1.22 m) de diámetro externo con espesores variables entre 1.75" (4.45 cm) y 0.75" (1.91 cm). Se encuentra hincado en

arcilla saturada cuyas propiedades se dan en la tabla 2 y su su jeto a una carga cuyo valor medio es 275 kips (125 ton) y va rianza nula.

Del análisis convencional hecho con un programa de computadora se llegó a la conclusión de que bastaba analizar la mitad superior del pilote, ya que el movimiento en la otra mitad era casi imperceptible y de poca influencia en la respuesta del pilote completo, por lo que se considera, en el análisis que sigue, que el pilote tiene 171.5 pies (52.25 m) de longitud.

La mitad superior se analiza dividiéndola en incrementos de igual tamaño. Generalmente, para un pilote largo, flexible, la longitud de los incrementos en que se divide éste es aproxi madamente igual a la mitad de su diámetro exterior(36). En es te estudio se hicieron varias pruebas sobre la influencia del tamaño de la subdivisión llegando a la conclusión de dividir la mitad superior del pilote en 49 elementos.

Las medias y covarianzas de las deflexiones y momentos se cal cularon mediante un programa de computadora.

En las figs 13 y 14 se presentan los desplazamientos y momentos flexionantes calculados en forma determinista, así como los desplazamientos y momentos esperados y sus correspondientes desviaciones estándar a lo largo del pilote. La respuesta probabilista del pilote depende en este caso, de los valo-

res de los parámetros estadísticos de las curvas $p-y$, dados por las ecs. 4.45 y 4.46. El coeficiente de variación en la cabeza del pilote del desplazamiento es igual a 0.6, mientras que el del momento flexionante es igual a 0.25.

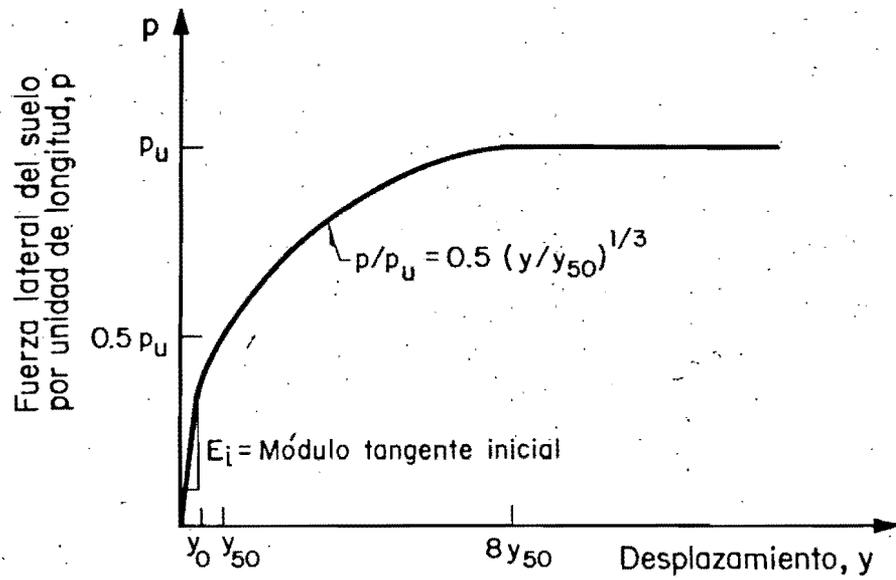


Fig 9 Curva p - y para arcilla blanda saturada (Matlock, 1970 ; Sullivan, 1977)

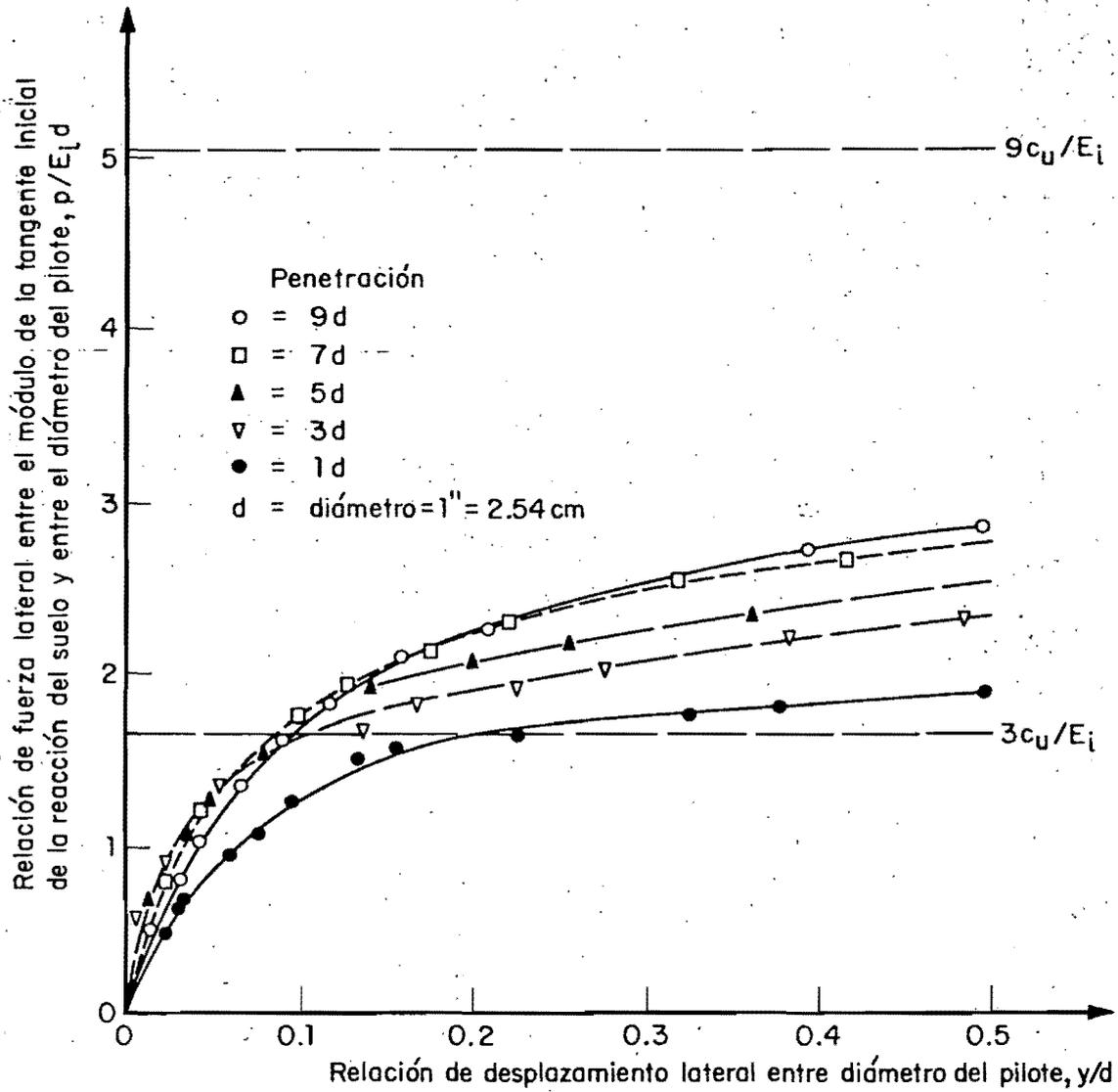


Fig 10 Mediciones carga deformación en segmentos de pilotes verticales. Se consideró arbitrariamente $E_i = 1 \text{ lb/pulg}^2 = 0.0703 \text{ kg/cm}^2$ (Matlock y Ripperger, 1957)

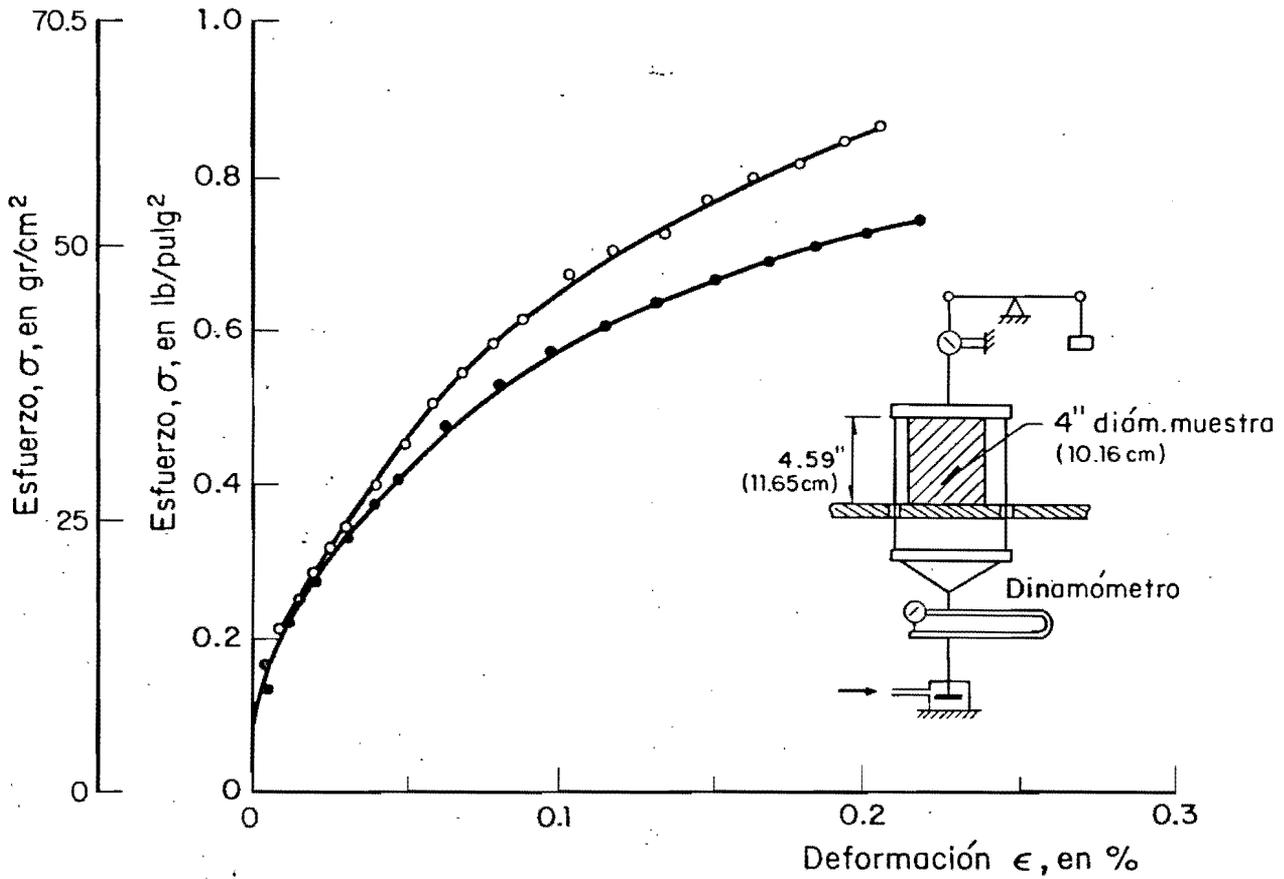


Fig 12 Diagramas esfuerzo-deformación correspondientes a pruebas de compresión no confinada de arcillas blandas (Matlock y Ripperger, 1957)

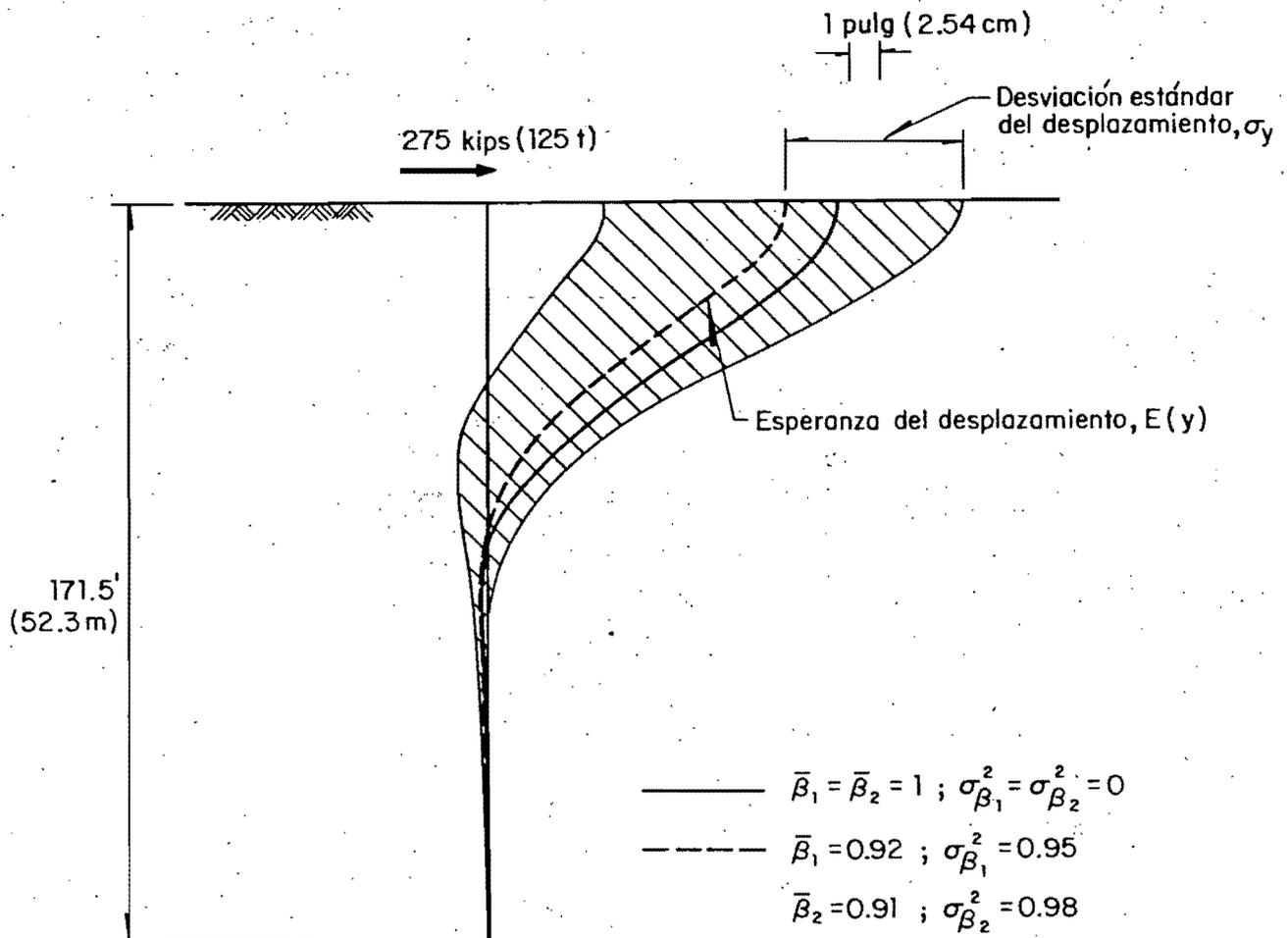


Fig 13 Desplazamientos probabilistas del pilote del ejemplo

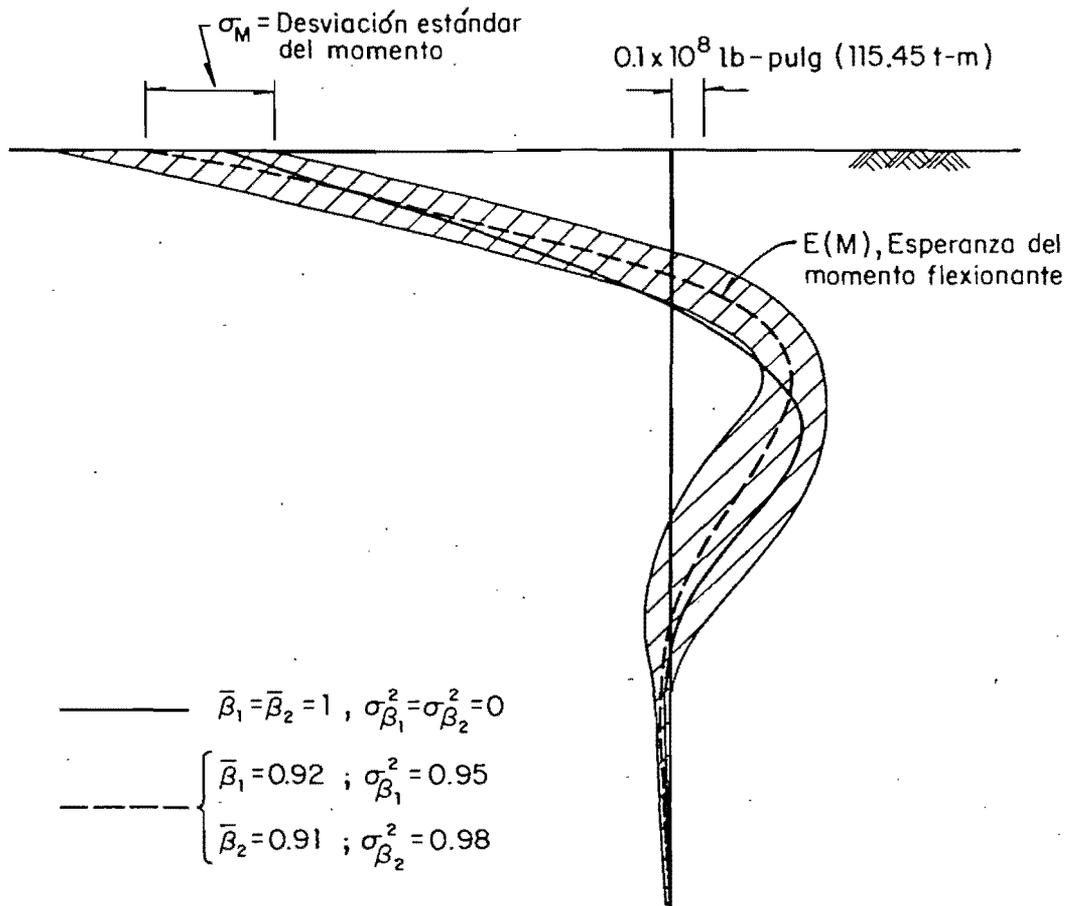


Fig 14 Momentos probabilistas del pilote del ejemplo

T A B L A 1

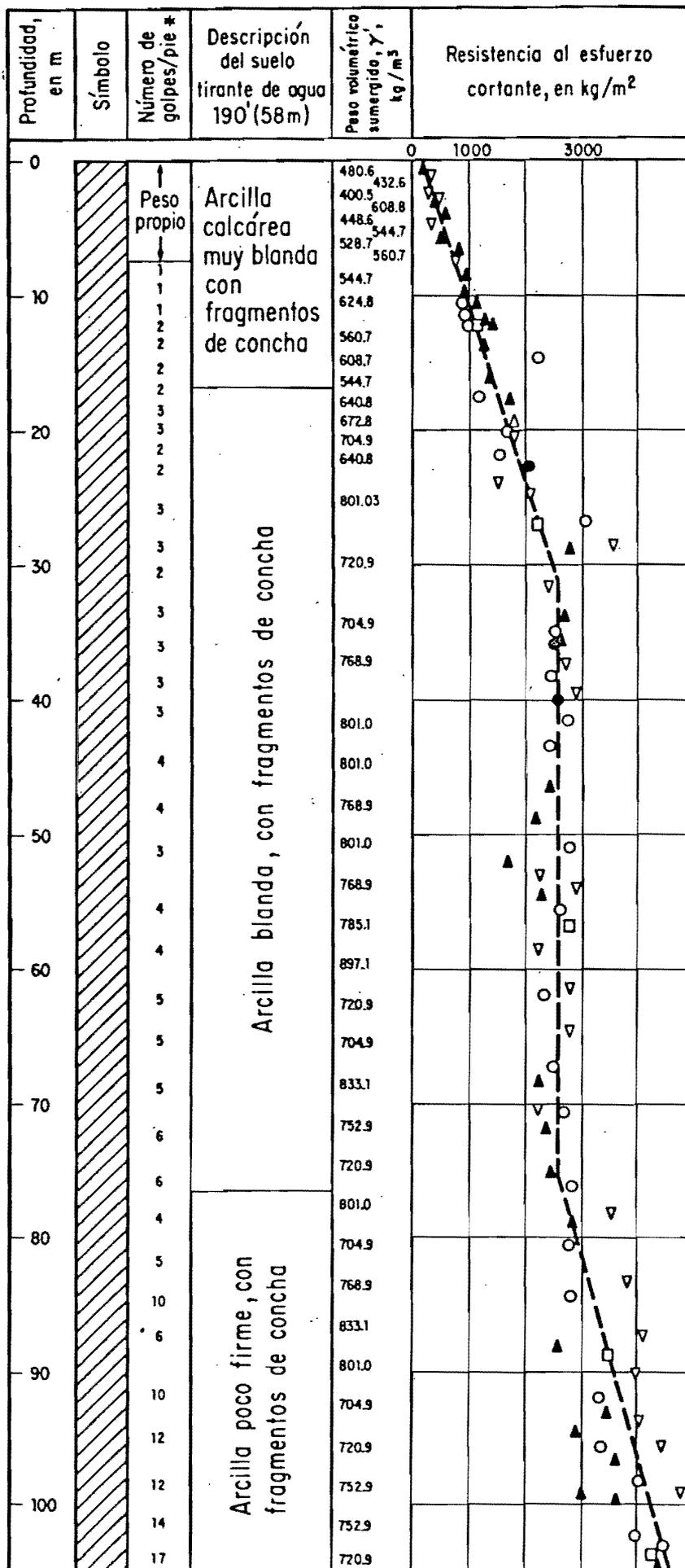
Valores de la resistencia última y del gradiente de la tangente inicial del módulo de la reacción del suelo normalizados, a diferentes profundidades en el sitio de interés.

x		c		\bar{c}		$P_u(c)/P_u(\bar{c})$	$k(c)/k(\bar{c})$
(pies)	(m)	(lb/pie ²)	(ton/m ²)	(lb/pie ²)	(ton/m ²)		
2	(0.61)	53.3	(0.26)	69.33	(0.34)	0.8324	0.80
4	(1.22)	96.00	(0.47)	80.00	(0.39)	1.1241	1.12
8	(2.44)	80.00	(0.39)	109.33	(0.53)	0.849	0.80
10	(3.05)	108.00	(0.53)	126.67	(0.62)	0.917	0.90
10	(3.05)	146.00	(0.71)	126.67	(0.62)	1.08	1.10
13	(3.97)	173.33	(0.85)	146.67	(0.72)	1.09	1.10
16	(4.88)	106.67	(0.52)	162.67	(0.80)	0.81	0.80
18	(5.49)	166.67	(0.82)	186.67	(0.91)	0.94	0.90
22	(6.71)	246.67	(1.21)	206.67	(1.01)	1.11	1.10
26	(7.93)	226.00	(1.11)	226.67	(1.11)	0.99	0.99
28	(8.54)	293.33	(1.43)	253.33	(1.24)	1.09	1.10
32	(9.76)	282.67	(1.38)	277.33	(1.36)	1.01	1.01
35	(10.68)	266.67	(1.30)	300.00	(1.47)	0.93	0.90
35	(10.68)	346.67	(1.70)	300.00	(1.47)	1.09	1.10
38	(11.59)	280.00	(1.37)	320.00	(1.56)	0.92	0.90
39	(11.90)	386.67	(1.89)	322.67	(1.58)	1.11	1.10
40	(12.20)	294.67	(1.44)	333.33	(1.63)	0.92	0.90
40	(12.20)	353.33	(1.73)	333.33	(1.63)	1.03	1.03
40	(12.20)	440.00	(2.15)	333.33	(1.63)	1.19	1.20

x		c		\bar{c}		$p_u(c)/p_u(\bar{c})$	$k(c)/k(\bar{c})$
(pies)	(m)	(lb/pie^2)	(ton/m^2)	(lb/pie^2)	(ton/m^2)		
46	(14.03)	386.67	(1.89)	373.33	(1.83)	1.02	1.02
48	(14.64)	263.33	(1.29)	393.33	(1.92)	0.67	0.60
53	(16.17)	413.33	(2.02)	426.67	(2.09)	0.97	0.90
58	(17.69)	526.67	(2.58)	466.67	(2.28)	1.08	1.23
58	(17.69)	294.67	(1.44)	466.67	(2.28)	0.75	0.50
64	(19.52)	546.67	(2.67)	506.67	(2.48)	1.05	1.16
66	(20.13)	520.00	(2.54)	520.00	(2.54)	1.00	1.00
68	(20.74)	546.67	(2.67)	533.33	(2.61)	1.01	1.04
72	(21.96)	473.33	(2.31)	566.67	(2.77)	0.88	0.69
75	(22.88)	640.00	(3.13)	586.67	(2.87)	1.06	1.17
79	(24.10)	466.67	(2.28)	613.33	(3.00)	0.83	0.60
83	(25.32)	650.00	(3.18)	640.00	(3.13)	1.01	1.02
88	(26.84)	946.67	(4.63)	680.00	(3.33)	1.28	1.72
89	(27.15)	680.67	(3.33)	682.67	(3.34)	0.99	0.95
95	(28.98)	866.67	(4.24)	720.00	(3.52)	1.14	1.35
95	(28.98)	1093.83	(5.35)	720.00	(3.52)	1.37	2.04
105	(32.03)	746.67	(3.65)	800.00	(3.91)	0.95	0.92
113	(34.47)	826.67	(4.04)	800.00	(3.91)	1.02	1.04
117	(35.69)	780.00	(3.81)	800.00	(3.91)	0.98	0.85
118	(35.99)	806.67	(3.94)	800.00	(3.91)	1.01	1.04
120	(36.60)	776.00	(3.79)	800.00	(3.91)	0.97	0.93
124	(37.82)	840.00	(4.11)	800.00	(3.91)	1.03	1.07
127	(38.74)	766.67	(3.75)	800.00	(3.91)	0.96	0.93
132	(40.26)	893.33	(4.37)	800.00	(3.91)	1.08	1.15
134	(40.87)	793.30	(3.88)	800.00	(3.91)	0.99	0.97

x		c		\bar{c}		$P_u(c)/P_u(\bar{c})$	$k(c)/k(\bar{c})$
(pies)	(m)	(lb/pie ²)	(ton/m ²)	(lb/pie ²)	(ton/m ²)		
138	(42.09)	853.30	(4.17)	800.00	(3.91)	1.04	1.10
145	(44.23)	746.67	(3.65)	800.00	(3.91)	0.95	0.88
155	(47.28)	760.00	(3.72)	800.00	(3.91)	0.96	0.89
163	(49.72)	686.60	(3.36)	800.00	(3.91)	0.89	0.75
170	(51.85)	866.67	(4.24)	800.00	(3.91)	1.06	1.11
173	(52.77)	533.33	(2.61)	800.00	(3.91)	0.75	0.50
176	(53.68)	773.33	(3.78)	800.00	(3.91)	0.97	0.93
180	(54.90)	893.33	(4.37)	800.00	(3.91)	1.08	1.15
182	(55.51)	726.67	(3.55)	800.00	(3.91)	0.93	0.90
186	(56.73)	820.00	(4.01)	800.00	(3.91)	1.01	1.05
189	(57.65)	866.67	(4.24)	800.00	(3.91)	1.06	1.11
195	(59.48)	693.33	(3.39)	800.00	(3.91)	0.90	0.78
205	(62.53)	866.67	(4.24)	800.00	(3.91)	1.06	1.11
207	(63.14)	726.67	(3.55)	800.00	(3.91)	0.93	0.90
215	(65.58)	866.67	(4.24)	800.00	(3.91)	1.06	1.11
224	(68.32)	773.33	(3.78)	800.00	(3.91)	0.97	0.90
227	(69.24)	766.67	(3.75)	800.00	(3.91)	0.97	0.93
235	(71.68)	693.33	(3.39)	800.00	(3.91)	0.90	0.80
236	(71.98)	840.00	(4.11)	800.00	(3.91)	1.03	1.09
239	(72.90)	733.33	(3.59)	800.00	(3.91)	0.94	0.96
250	(76.25)	760.00	(3.72)	800.00	(3.91)	0.96	0.93
253	(77.17)	866.67	(4.24)	826.67	(4.04)	1.03	1.07
261	(79.61)	1093.33	(5.35)	866.67	(4.24)	1.19	1.47
263	(80.22)	826.67	(4.04)	833.33	(4.08)	0.99	0.95
268	(81.74)	866.67	(4.24)	920.00	(4.50)	0.95	0.90

x		c		\bar{c}		$P_u(c)/P_u(\bar{c})$	$k(c)/k(\bar{c})$
(pies)	(m)	(lb/pie ²)	(ton/m ²)	(lb/pie ²)	(ton/m ²)		
277	(84.49)	1173.33	(5.74)	973.33	(4.76)	1.15	1.18
282	(86.01)	873.33	(4.27)	986.67	(4.82)	0.98	0.88
285	(86.93)	1008.00	(4.93)	1008.00	(4.93)	1.00	1.00
292	(89.06)	1266.67	(6.19)	1053.33	(5.15)	1.15	1.35
294	(89.67)	800.00	(3.91)	1066.67	(5.22)	0.80	0.63
296	(90.28)	1073.33	(5.25)	1080.00	(5.28)	0.99	0.97
301	(91.81)	1226.67	(6.00)	1106.67	(5.41)	1.08	1.30
307	(93.64)	1026.67	(5.02)	1133.33	(5.54)	0.92	0.87
311	(94.86)	1066.67	(5.22)	1173.33	(5.74)	0.92	0.86
313	(96.47)	1253.33	(6.13)	1186.67	(5.80)	1.04	1.10
316	(96.38)	893.33	(4.37)	1200.00	(5.87)	0.79	0.63
319	(97.30)	1373.33	(6.72)	1220.00	(5.97)	1.09	1.17
319	(97.30)	1040.00	(5.09)	1220.00	(5.97)	0.88	0.72
322	(98.21)	1120.00	(5.48)	1233.33	(6.03)	0.93	0.88
328	(100.04)	1253.33	(6.13)	1266.67	(6.19)	0.99	0.93
330	(100.65)	1466.67	(7.17)	1280.00	(6.26)	1.11	1.21
331	(100.96)	933.33	(4.56)	1283.00	(6.27)	0.78	0.60
333	(101.57)	1113.30	(5.44)	1293.33	(6.32)	0.88	0.79
339	(103.40)	1640.00	(8.02)	1333.33	(6.52)	1.18	1.33
342	(104.31)	1226.67	(6.00)	1346.67	(6.59)	0.92	0.85
344	(104.92)	1374.67	(6.72)	1360.00	(6.65)	1.01	1.03
346	(105.53)	1307.07	(6.39)	1373.33	(6.72)	0.96	0.94
348	(106.14)	1346.67	(6.59)	1387.00	(6.78)	0.97	0.95



- ▲ Veleta
- ▽ Veleta miniatura
- Triaxial no drenada
- Compresión no confinada
- Penetrómetro de bolsillo

T A B L A 3

Tabla 3. Valores de β_1 y β_2 obtenidos de pruebas hechas a escala natural (Ref. 20, 24, 26, 35)

Ref.	Profundidad	c	k	E_i	P_u	P_{u_c}	β_1	β_2
	pies (metros)	k/pie ² (ton/m ²)	k/pulg ³ (kg/cm ³)	k/pulg ² (kg/cm ²)	k/pulg (kg/cm)	k/pulg (kg/cm)		
24	2.00 (0.61)	1.00 (4.89)	.1 (2.77)	-	2.7 (483.18)	2.4 (429.49)	1.13	-
24	14.0 (4.27)	1.00 (4.89)	.1 (2.77)	-	4.4 (787.40)	4.0 (751.61)	1.05	-
26	1.64 (0.50)	0.92 (4.50)	.1 (2.77)	.44 (31.0)	-	-	-	0.22
26	4.92 (1.50)	0.92 (4.50)	.1 (2.77)	.82 (57.8)	-	-	-	0.14
26	5.56 (1.70)	0.92 (4.50)	.1 (2.77)	1.15 (81.0)	-	-	-	0.14
26	8.20 (2.50)	0.92 (4.50)	.1 (2.77)	1.42 (100.0)	-	-	-	0.14
35	7.00 (2.14)	0.22 (1.07)	.03 (0.83)	3.6 (253.6)	-	-	-	1.43
35	12.0 (3.66)	0.24 (1.17)	.03 (0.83)	4.15 (292.4)	-	-	-	0.96
20	1.00 (0.31)	.005 (0.02)	.03 (0.83)	0.11 (7.75)	0.16 (28.63)	0.17 (30.42)	0.91	0.31
20	3.28 (1.00)	.010 (0.08)	.03 (0.83)	0.21 (14.8)	0.35 (62.63)	0.57 (102.00)	0.61	0.18
20	6.56 (2.00)	.033 (0.16)	.03 (0.83)	0.40 (28.2)	0.50 (89.48)	1.18 (211.17)	0.42	0.17
20	9.84 (3.00)	.050 (0.24)	.03 (0.83)	0.61 (43.0)	0.48 (85.90)	1.80 (322.12)	0.26	0.17
20	13.12 (4.00)	.066 (0.32)	.03 (0.83)	0.88 (62.0)	0.47 (84.11)	2.37 (424.12)	0.20	0.19
20	16.40 (5.00)	.083 (0.41)	.03 (0.83)	1.28 (90.2)	0.44 (78.74)	2.98 (533.29)	0.15	0.22
20	19.70 (6.00)	.100 (0.49)	.03 (0.83)	1.73 (121.9)	0.41 (73.37)	3.60 (644.24)	0.11	0.24
35	1.00 (0.31)	.160 (0.78)	.03 (0.83)	1.35 (95.1)	0.11 (19.69)	0.179 (32.03)	0.612	3.75
35	3.00 (0.92)	.170 (0.83)	.03 (0.83)	1.90 (133.8)	0.38 (68.00)	0.235 (42.05)	1.617	1.76
35	5.00 (1.53)	.200 (0.98)	.03 (0.83)	3.23 (227.6)	0.52 (93.06)	0.324 (57.98)	1.605	1.79

k = Kips

T A B L A 4

Valores normalizados de desplazamientos en la cabeza de pilotes, obtenidos de pruebas hechas a escala natural (Ref. 28).

Prueba	c (ton/m ²)	y_1/y_{1c}	
		Intervalo lineal	Intervalo No-lineal
1	3.58	0.38	0.78
2	2.55	1.00	1.00
3	2.55	0.83	1.28
4	2.55	0.92	2.67
5	2.55	2.08	3.87
6	4.09	0.80	0.96
7	3.06	1.00	0.17
8	3.06	0.50	0.08
9	3.06	0.75	
10	3.06	0.50	
11	2.55	1.60	1.21
12	2.55	3.45	1.71
13	2.55	1.09	0.44
14	2.55	1.82	2.38
15	2.55		1.56
16	2.55	2.22	1.40
17	2.55	1.67	1.46
18	2.55	0.80	1.10
19	2.55	0.40	1.45
20	2.55		1.22
21	2.55	4.17	2.34
22	2.55	3.00	3.91
23	2.55	2.2	0.64
24	2.55		1.52
25	2.55		1.60
26	2.55	0.56	0.69
27	2.55	0.44	2.75
28	2.04	0.80	1.69
29	2.04	1.00	1.00
30	2.04	1.20	1.31
31	2.55		1.00
32	2.55		1.38
33	2.55	0.44	0.55
34	2.55	0.42	0.69
35	2.55	2.5	0.40
36	2.55	1.2	0.92
37	2.55	0.83	0.79
38	2.55		0.49
39	2.55		0.76
40	2.55	0.63	0.71
41	4.09	1.00	1.48
42	4.09	1.2	0.52
43	4.09	1.2	0.81

T A B L A 5

Valores normalizados de desplazamientos en la cabeza de pilotes obtenidos de pruebas a escala natural (Refs. 31, 34)

Ref.	y_1/y_{1c}	
	Intervalo lineal	Intervalo No-lineal
31		1.25
34	2.	
34	2.04	
34	1.85	
34	0.94	
34		0.76
34		0.91
34		1.04

C A P I T U L O 5

SOLUCION ADIMENSIONAL GENERALIZADA

5.1 ANTECEDENTES

Con fines de aplicación práctica conviene obtener soluciones generalizadas en forma adimensional al problema de pilotes sometidos a cargas laterales estáticas. La formulación de dichas soluciones parte de los principios del análisis dimensional, como se describe a continuación.

El desplazamiento de un pilote sujeto a una carga lateral es función de varios parámetros

$$y = f(x, T, L, E_s, YI, P_t) \quad (5.1)$$

en donde

x = profundidad

T = factor de rigidez relativa, definido más adelante

L = longitud del pilote

E_s = módulo secante de la reacción horizontal del suelo, definido como la pendiente de la secante medida desde el origen a un punto de la curva $p-y$

YI = rigidez flexionante del pilote

P = carga lateral externa aplicada en la cabeza
del pilote

Estas son seis variables significativas expresadas mediante dos unidades básicas: longitud y fuerza. Existen, por lo tanto, cuatro parámetros independientes adimensionales en la función dada por la ec. 5.1.

Matlock y Reese (32) seleccionan los siguientes parámetros adimensionales, los cuales tienen los mismos valores numéricos para cada elemento de un par de sistemas semejantes, o para cualquier modelo y su prototipo. Estos son

a) Coeficiente de profundidad

$$z = \frac{x}{T}$$

b) Coeficiente de profundidad máxima

$$z_{\text{máx}} = \frac{L}{T}$$

c) Función que depende del coeficiente de profundidad

$$\phi(z) = \frac{E_s T^4}{YI}$$

d) Coeficiente de desplazamiento

$$A_y = \frac{y \ YI}{P_t \ T^3}$$

Introduciendo estos parámetros en la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de un pilote sujeto solamente a sollicitaciones laterales estáticas dada por

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{E_s}{YI} y = 0 \quad (5.2)$$

se obtiene la siguiente

$$\frac{d^4 A_y}{dz^4} + \phi(z) A_y = 0 \quad (5.3)$$

Las condiciones de frontera necesarias para resolver la ecuación diferencial 5.2 son las siguientes: el momento flexionante y la fuerza cortante se consideran nulos en la punta del pilote. En la cabeza de éste se imponen otras dos condiciones. Estas son: la carga lateral aplicada y el momento flexionante actuante, para el caso en que la cabeza del pilote se considere libre de girar y desplazarse lateralmente; y la carga lateral aplicada y la pendiente nula con respecto al eje longitudinal (x) del pilote, para el caso en que la cabeza del pilote pueda desplazarse lateralmente pero no pueda girar.

La variación de E_s con la profundidad puede suponerse de diversas formas. Por ejemplo

$$E_s = k x^n$$

o

$$E_s = k_0 + k_1 x + k_2 x^2$$

En donde n , k_0 , k_1 y k_2 son parámetros constantes.

Conocida la variación de E_s es posible encontrar el factor de rigidez relativa, T . Por ejemplo si se supone $E_s = kx^n$, entonces

$$\phi(z) = \frac{kx^n}{YI} T^4$$

Se define T de modo que resulte para $\phi(z)$ una expresión simple; así, si se toma

$$T^{n+4} = \frac{YI}{k}$$

La función $\phi(z)$ resulta igual a

$$\phi(z) = \frac{x^n T^4}{T^n T^4} = \left(\frac{x}{T}\right)^n$$

La ecuación diferencial (5.3), para $n = 1$, se convierte en

$$\frac{d^4 A_y}{dz^4} + z A_y = 0 \quad (5.4)$$

Esta ecuación equivale a tener un pilote ficticio cuyos desplazamientos son A_y , y cuyo módulo secante de la reacción del suelo dividido entre YI es igual a una cantidad directamente proporcional al coeficiente de profundidad z . Para resolver esta ecuación se necesitan cuatro condiciones de frontera similares a las mencionadas antes para resolver la ec. (5.2). Matlock y Reese (32, 48) calculan valores de los desplazamientos adimensionales bajo la hipótesis que E_s varía linealmente con la profundidad, $E_s = kx$, para distintas condiciones de frontera en la cabeza de los pilotes y para diferentes longitudes normalizadas ($z_{\text{máx}}$). Resuelven las respectivas ecuaciones diferenciales mediante un programa de computadora que utiliza el método de diferencias finitas (22), y obtienen los valores de dichos coeficientes adimensionales.

En esta tesis se tratan los casos de pilotes cuya longitud normalizada máxima es igual a 5 ($z_{\text{máx}} = 5$), para dos condiciones de frontera: libre y guiada en la cabeza de los pilotes. En lo que sigue se restringirá el empleo de A_y para denotar el desplazamiento adimensional a lo largo de un pilote con cabeza libre de restricciones y se usará F_y para designar el desplazamiento adimensional para un pilote cuya cabeza no puede girar.

El desplazamiento de un pilote cuya cabeza está libre de restricciones, sujeta a una carga lateral P_t aplicada al nivel del suelo, se encuentra usando los coeficientes adimensionales A_y (32). Sus respectivos momentos flexionantes pueden encontrarse empleando los coeficiente A_M :

$$y = A_y \frac{P_t T^3}{YI} \quad (5.5)$$

$$M = A_M P_t T \quad (5.6)$$

En que

- A_M, A_y = coeficientes adimensionales
 P_t = fuerza aplicada en la cabeza del pilote
 T = factor de rigidez relativa
 ($T = (YI/k^{1/5})$)
 YI = rigidez flexionante del pilote
 y = desplazamiento lateral del pilote
 M = momento flexionante del pilote

Para encontrar desplazamientos y momentos flexionantes cuando la cabeza del pilote puede desplazarse horizontalmente sin girar, se usan los coeficientes adimensionales F_y y F_M . O sea

$$y = F_y \frac{P_t T^3}{YI}$$

$$M = F_M P_t$$

Más adelante se obtienen los valores esperados y las desviaciones estándar de A_y , A_M , F_y y F_M suponiendo diferentes niveles de incertidumbre en los parámetros de las curvas p-y.

5.2 CURVAS p-y ADIMENSIONALES

La ec. 5.4 considera un pilote hincado en un medio con comportamiento lineal cuya rigidez lateral varía en forma proporcional a la profundidad. A fin de poder aplicar los resultados de los análisis que se lleven a cabo para tales condiciones a los casos en que se tengan curvas p-y no lineales, es necesario relacionar rigideces secantes adimensionales con valores también adimensionales de los parámetros E_i y p_u . Por supuesto la extrapolación de los resultados obtenidos a partir de la ec. 5.4 queda limitada a aquellos casos en que la variación resultante de la rigidez secante del suelo sea lineal con la profundidad ($E_s = kx$).

Las curvas p-y seleccionadas corresponden a arcillas blandas saturadas. Sus expresiones son (31, 54)

$$p = E_i y \quad 0 \leq y \leq y_0 \quad (5.7 a)$$

$$p = \frac{P_u}{2} \left(\frac{y}{y_{50}} \right)^{1/3} \quad y_0 < y \leq 8y_{50} \quad (5.7 b)$$

$$p = p_u \quad y > 8y_{50} \quad (5.7 \text{ c})$$

Las condiciones que debe cumplir cada curva $p-y$ adimensional son:

- a) Que pase por el punto definido por el desplazamiento lateral del pilote ficticio y su respectiva "reacción del suelo", cuando este es sometido a una carga unitaria.
- b) Que pase por el origen.
- c) Que su forma esté dada por las ecs. 5.7.

La reacción última del suelo en forma adimensional se escoge como sigue

$$\tilde{p}_u = \frac{p_u T}{P_t}$$

El valor de y_{50} adimensional se denomina A_{50} . Para el caso de una arcilla blanda saturada es igual a lo siguiente

$$A_{50} = \frac{A_y}{8} \left(\frac{\tilde{p}_u}{P_L} \right)^3$$

En que

A_y = desplazamiento lateral del pilote ficticio

p_L = reacción adimensional del suelo ficticio

\tilde{p}_u = resistencia última normalizada del suelo

Las variables que aquí intervienen se definieron en el capítulo 4.

Para desplazamientos pequeños, en que se aplica la ec. 5.7 a, se toma el valor de E_i igual a

$$E_i = \frac{YI}{T^5} \cdot zT = \frac{YI}{T^4} z$$

por lo tanto, las curvas p - y adimensionales son de la forma

$$p_L = zA_y \quad 0 \leq A_y \leq A_0 \quad (5.8 \text{ a})$$

$$p_L = \frac{\tilde{p}_u}{2} \left(\frac{A_y}{A_{50}} \right)^{1/3} \quad A_0 < A_y \leq 8A_{50} \quad (5.8 \text{ b})$$

$$p_L = \tilde{p}_u \quad A_y > 8A_{50} \quad (5.8 \text{ c})$$

El valor de A_0 es equivalente al parámetro adimensional y_0 , o sea, $A_0 = 0.5 A_{50}$.

5.3 COEFICIENTES ADIMENSIONALES PROBABILISTAS

En las figs 15-18 se presentan las esperanzas y desviaciones estándar de los coeficientes A_y , A_M , F_y y F_M para casos en que la carga se considera determinista y los parámetros β_1 y

β_2 toman los siguientes valores:

$$E(\beta_i) = 1.5, 1.0 \text{ y } 0.5 ; \text{ var}(\beta_i) = 1.0, i = 1, 2$$

En estos casos se considera que el comportamiento del medio que circunda al pilote es no-lineal.

Si se considera que los desplazamientos laterales del pilote son suficientemente pequeños, de modo que el comportamiento del suelo se encuentre dentro del intervalo lineal, entonces los coeficientes A_y , A_M , F_y y F_M probabilistas son los que se presentan en las figs 19-22.

En las tablas 6 y 7 se presentan las desviaciones estándar de tales coeficientes para el caso en que las curvas $p-y$ se consideran deterministas y la carga externa es aleatoria. Se analizaron casos en que la varianza de la carga, P_t , toma los siguientes valores

$$\sigma_{P_t}^2 = 0.25, 0.67, 1.0, 2.0 \text{ y } 2.25$$

En estos casos, el valor medio de la respuesta del pilote ficticio es idéntico al dibujado en las figs 15-18 para cuando $E(\beta) = 1$ y $\text{var}(\beta) = 0$. La razón es que el valor de las cargas aplicadas coinciden en ambos casos (unitarias).

Basados en las figs 15-18 y en las tablas 6 y 7 es posible

establecer combinaciones de casos en los que se incluyan las incertidumbres en las curvas p-y, así como en la carga aplicada.

La respuesta media del pilote se presenta en las figs 15-18. Su varianza es igual a la suma de la varianza de la respuesta debida a incertidumbre en las curvas p-y más la varianza debida a la aleatoriedad en la carga. (Esta superposición la justifica la ec. 3.18),

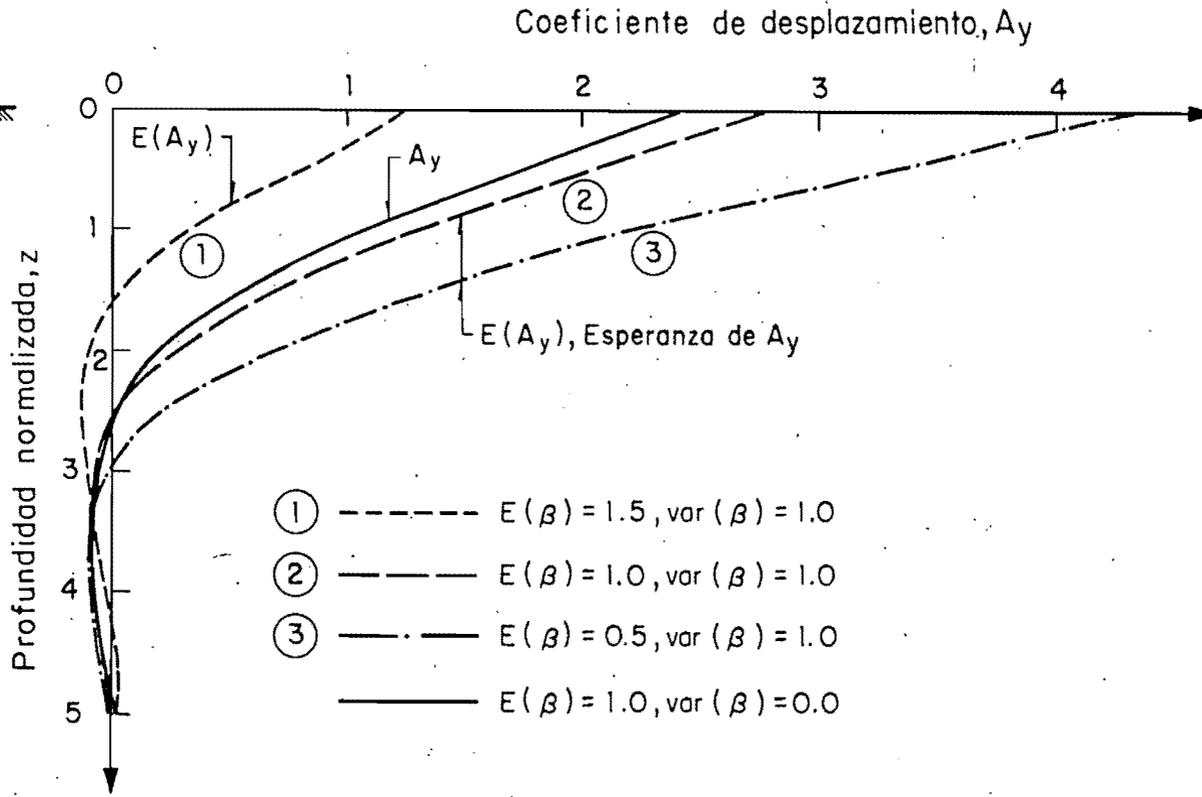
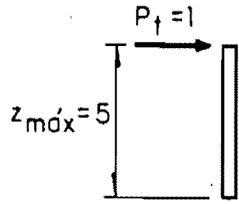
$$\sigma_{A_y}^2 = (\sigma_{A_y}^2)_{\text{curvas p-y}} + (\sigma_{A_y}^2)_{\text{carga}} \quad (5.9)$$

Por ejemplo, supongamos que nos interesa conocer la varianza del coeficiente A_y , al nivel del suelo, cuando se sabe que los parámetros tienen los siguientes momentos probabilistas

$$E(\beta) = 1.0, \text{ var}(\beta) = 1.0, E(P_t) = 1.0, \text{ var}(P_t) = 1.0$$

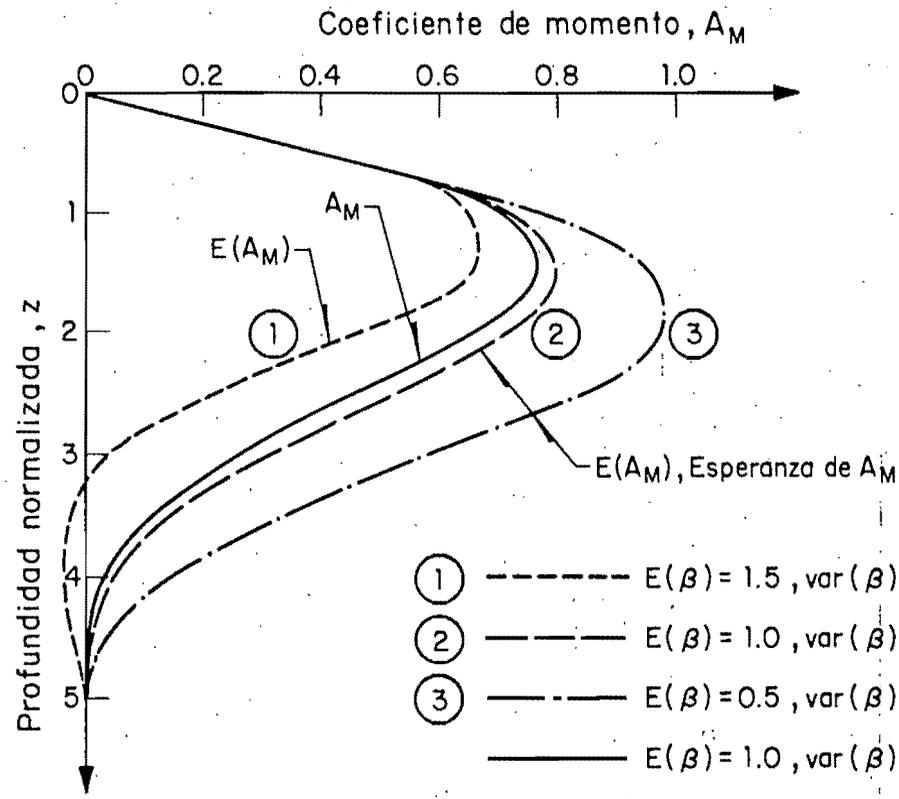
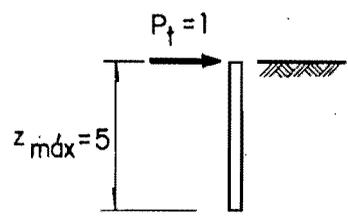
De la fig 15 se obtiene $(\sigma_{A_y})_{\text{curvas p-y}} = 1.58$ y de la tabla 6: $(\sigma_{A_y})_{\text{carga}} = 4.45$, por lo tanto

$$\sigma_{A_y}^2 = (1.58)^2 + (4.45)^2 = 22.3$$



Desviación estándar de A_y			z
①	②	③	
1.59	1.58	1.78	0
1.14	1.13	1.30	0.6
0.74	0.71	0.84	1.1
0.44	0.38	0.45	1.8
0.24	0.18	0.19	2.5
0.13	0.09	0.07	3.1
0.06	0.05	0.05	3.6
0.05	0.04	0.04	4.3

Fig 15 Coeficientes adimensionales probabilistas A_y , suponiendo comportamiento no-lineal del suelo y carga determinista



Desviación estándar de A_M			z
(1)	(2)	(3)	
0	0	0	0
0.13	0.10	0.07	0.6
0.34	0.29	0.25	1.1
0.46	0.42	0.40	1.8
0.41	0.39	0.40	2.5
0.27	0.26	0.28	3.1
0.15	0.13	0.14	3.6
0.07	0.05	0.05	4.3

Fig 16 Coeficientes adimensionales probabilistas A_M , suponiendo comportamiento no-lineal del suelo y carga determinista

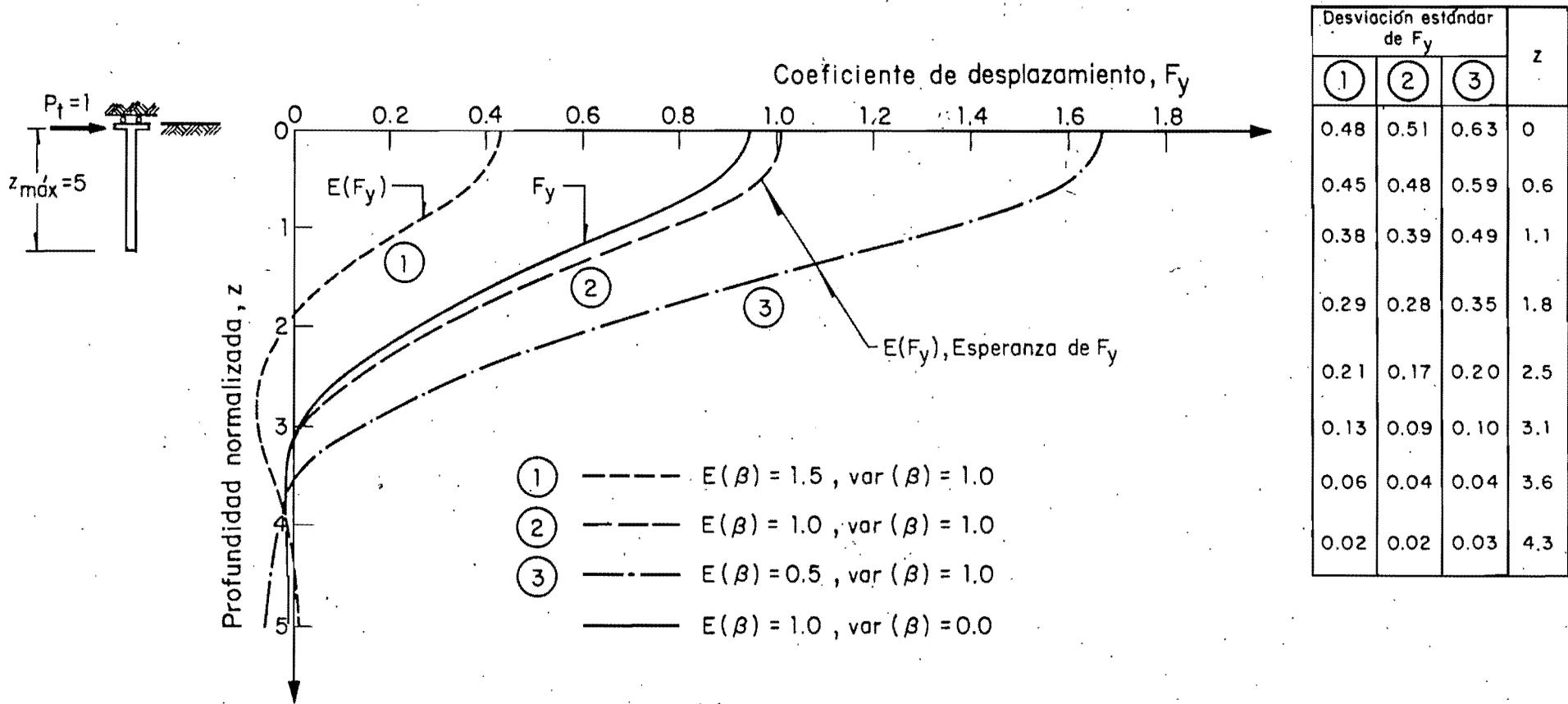


Fig 17 Coeficientes adimensionales probabilistas F_y , suponiendo comportamiento no-lineal del suelo y carga determinista

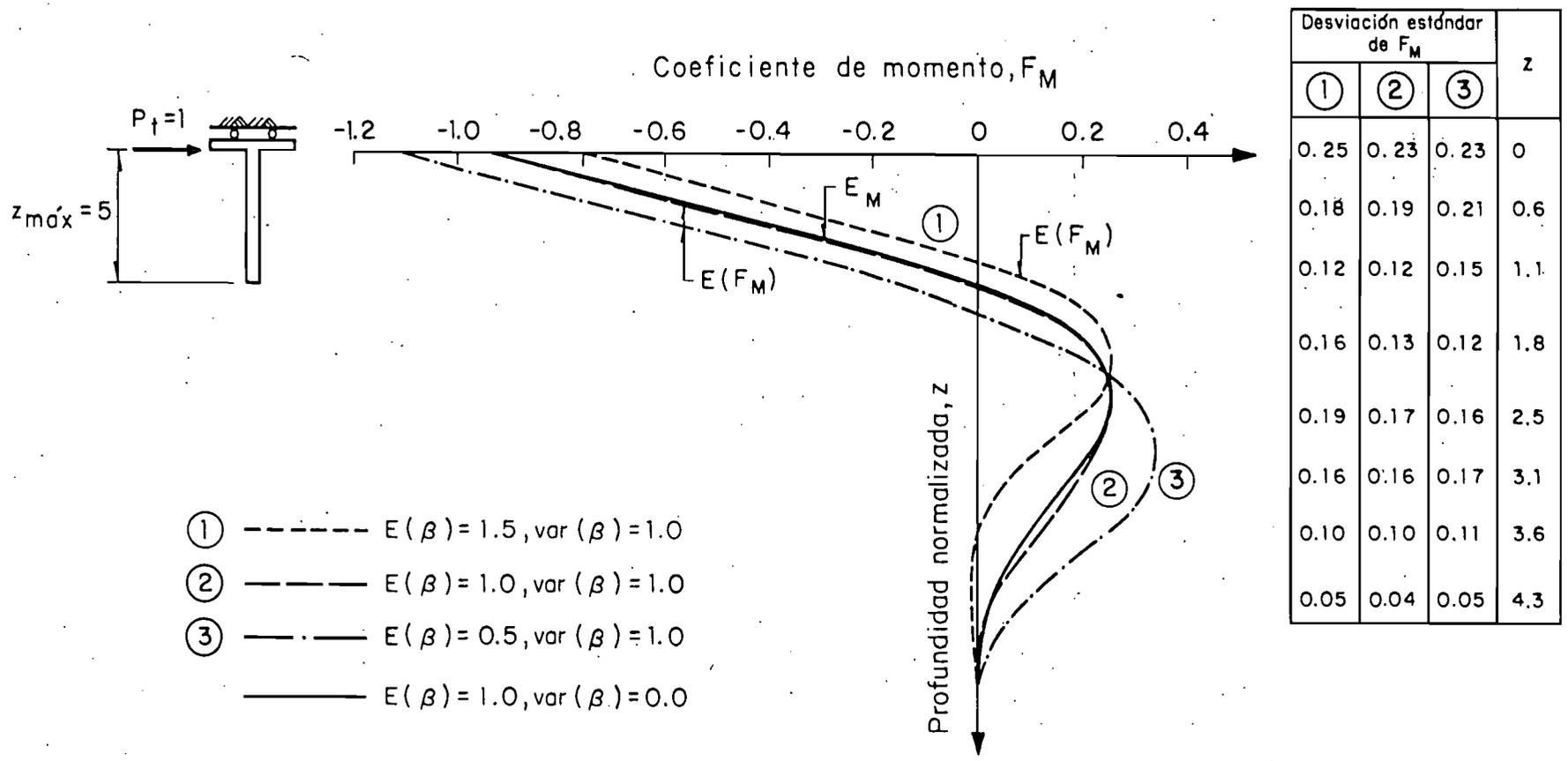


Fig 18 Coeficientes adimensionales probabilistas F_M , suponiendo comportamiento no-lineal del suelo y carga determinista

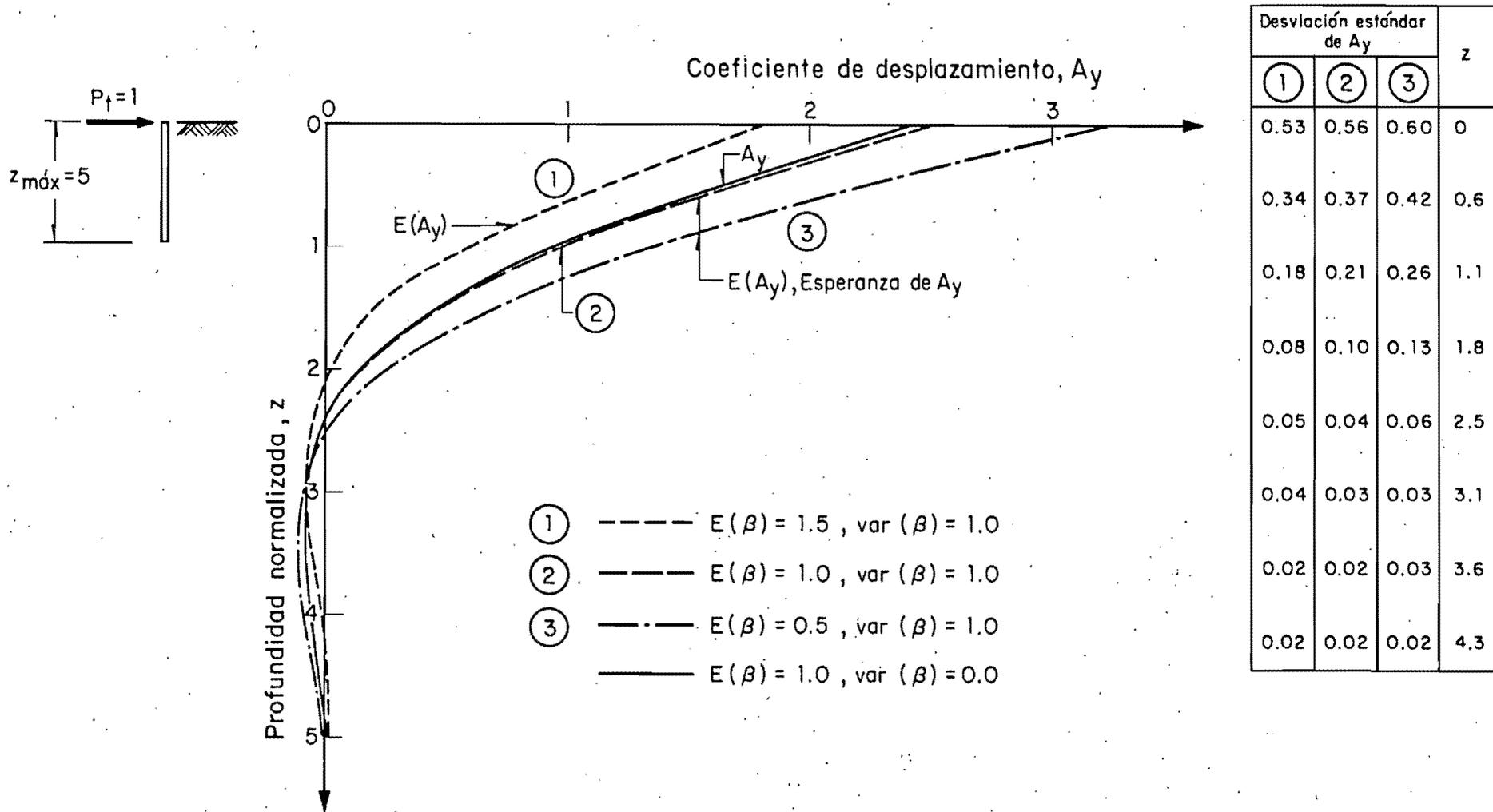
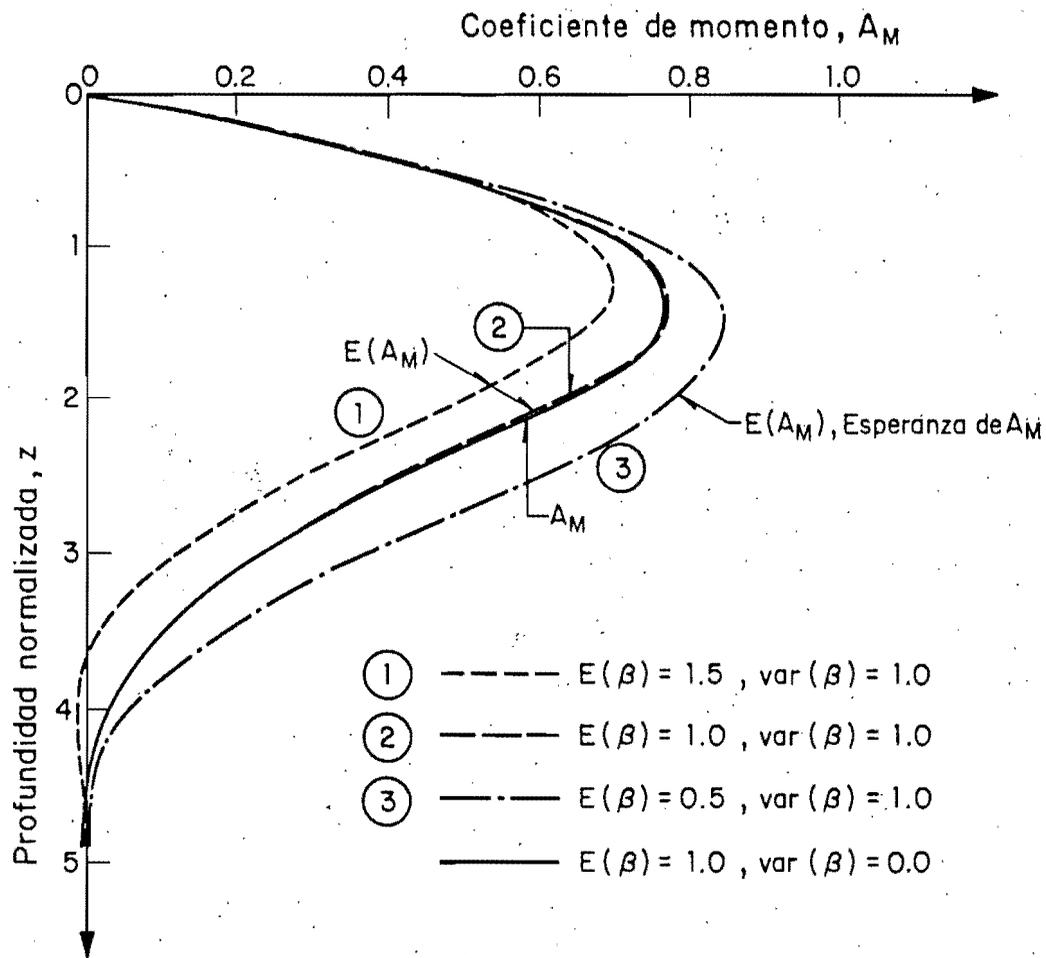
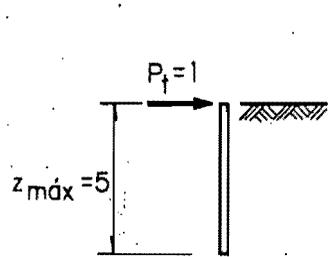
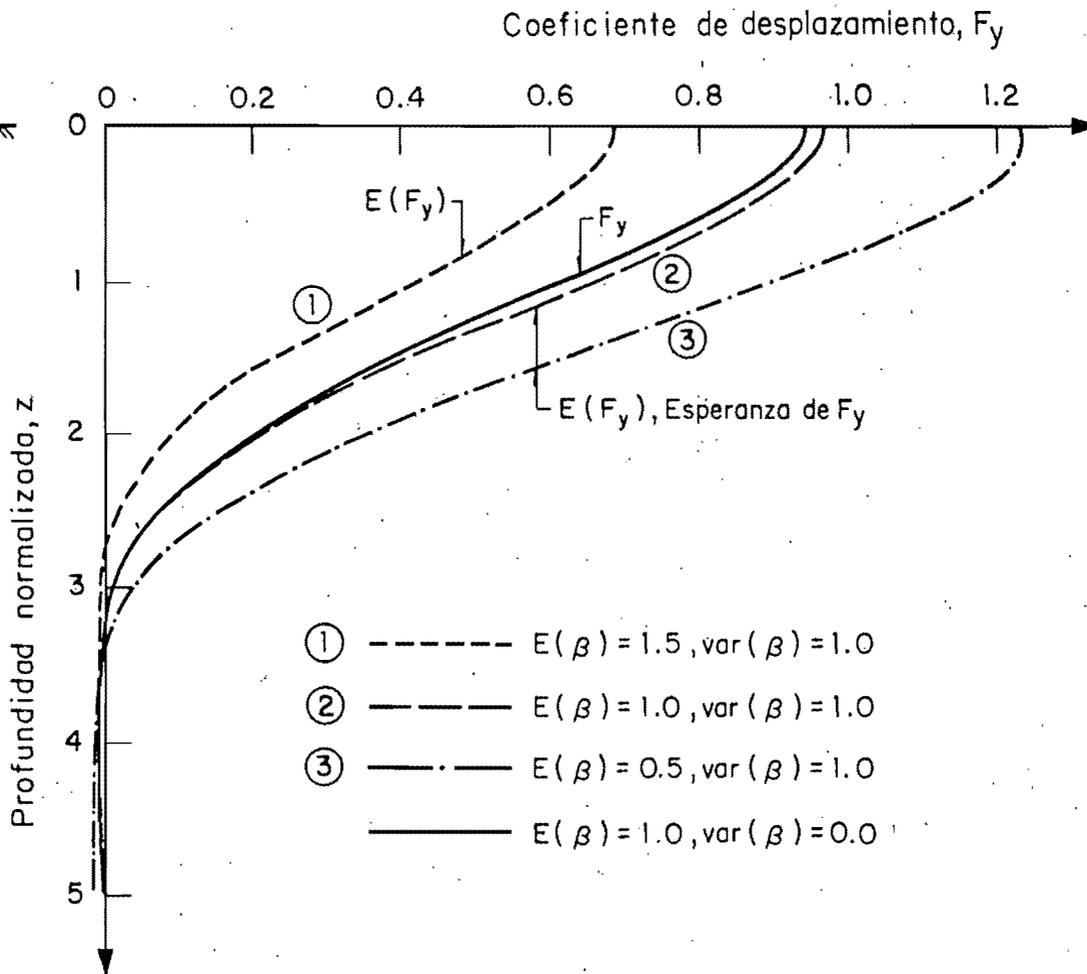
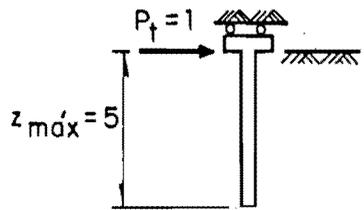


Fig 19 Coeficientes adimensionales probabilistas A_y , suponiendo comportamiento lineal del suelo y carga determinista



Desviación estándar de A_M			z
①	②	③	
0	0	0	0
0.06	0.05	0.04	0.6
0.17	0.15	0.14	1.1
0.20	0.19	0.18	1.8
0.15	0.15	0.14	2.5
0.08	0.08	0.09	3.1
0.05	0.04	0.05	3.6
0.03	0.02	0.02	4.3

Fig 20 Coeficientes adimensionales probabilistas A_M , suponiendo comportamiento lineal del suelo y carga determinista



Desviación estándar de F_y			z
①	②	③	
0.16	0.18	0.20	0
0.14	0.16	0.19	0.6
0.10	0.12	0.10	1.1
0.06	0.08	0.10	1.8
0.04	0.04	0.05	2.5
0.02	0.02	0.03	3.1
0.01	0.01	0.01	3.6
0.01	0.01	0.01	4.3

Fig 21 Coeficientes adimensionales probabilistas F_y , suponiendo comportamiento lineal del suelo y carga determinista

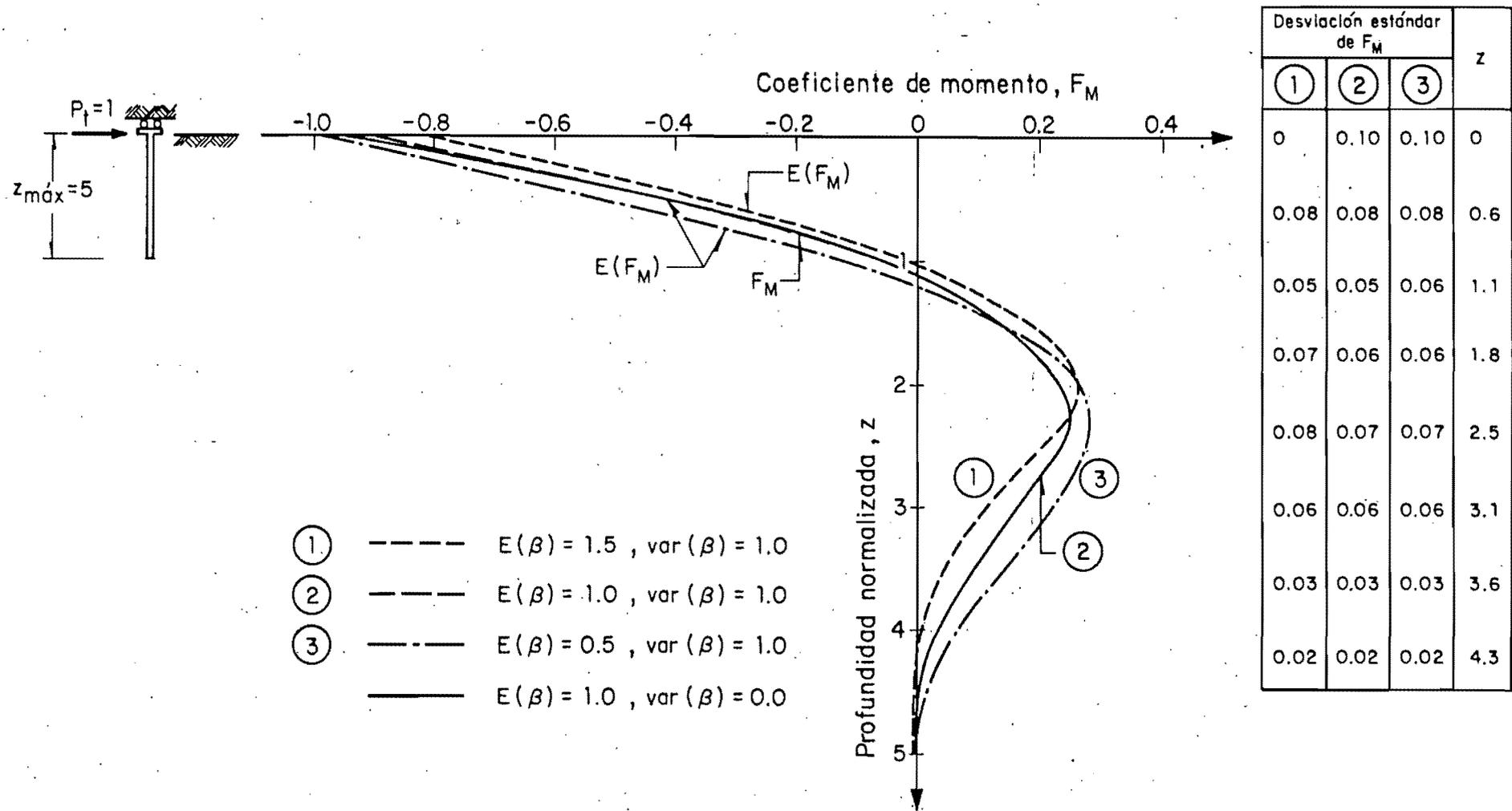


Fig 22 Coeficientes adimensionales probabilistas F_y , suponiendo comportamiento lineal del suelo y carga determinista

T A B L A 6

Valores medios y desviaciones estándar de los coeficientes A_y y A_M , correspondientes a pilotos sometidos a cargas aleatorias.

\bar{A}_y	σ_{A_y}					\bar{A}_M	σ_{A_M}				
	$\sigma_{P_t}=.50$	$\sigma_{P_t}=.82$	$\sigma_{P_t}=1.0$	$\sigma_{P_t}=1.41$	$\sigma_{P_t}=1.5$		$\sigma_{P_t}=.50$	$\sigma_{P_t}=.82$	$\sigma_{P_t}=1.0$	$\sigma_{P_t}=1.41$	$\sigma_{P_t}=1.5$
2.44	2.23	3.63	4.45	6.30	6.68	0.	0.	0.	0.	0.	0.
.50	1.50	2.45	3.00	4.24	4.51	.53	0.28	0.45	0.56	0.79	.83
.74	0.87	1.43	1.75	2.47	2.62	.76	0.45	0.74	0.91	1.29	1.37
.24	0.41	0.66	0.81	1.15	1.22	.69	0.51	0.83	1.02	1.44	1.53
-.008	0.12	0.19	0.23	0.33	0.35	.46	0.44	0.71	0.87	1.24	1.31
-.08	0.02	0.03	0.03	0.05	0.05	.23	0.27	0.45	0.55	0.77	.82
-.07	0.05	0.08	0.10	0.11	0.16	.07	0.12	0.20	0.24	.34	.36
-.03	0.04	0.07	0.08	0.12	0.13	.008	0.03	0.05	0.06	.09	0.09

T A B L A 7

Valores medios y desviaciones estándar de los coeficientes F_y y F_M , correspondientes a pilotes sometidos a cargas aleatorias.

\bar{F}_y	σ_{F_y}					\bar{F}_M	σ_{F_M}				
	$\sigma_{P_t} = .50$	$\sigma_{P_t} = .82$	$\sigma_{P_t} = 1.0$	$\sigma_{P_t} = 1.41$	$\sigma_{P_t} = 1.5$		$\sigma_{P_t} = .60$	$\sigma_{P_t} = .82$	$\sigma_{P_t} = 1.0$	$\sigma_{P_t} = 1.41$	$\sigma_{P_t} = 1.5$
.93	.88	1.44	1.76	2.49	2.64	-.93	.57	0.93	1.14	1.61	1.71
.79	.79	1.29	1.58	2.24	2.37	-.36	.30	0.48	0.59	0.84	0.89
.53	.60	0.97	1.19	1.69	1.79	.05	.06	0.10	0.12	0.17	0.18
.27	.38	0.61	0.75	1.06	1.13	.23	.10	0.16	0.20	0.28	0.29
.09	.19	0.31	0.38	0.54	0.57	.24	.18	0.29	0.35	0.50	0.53
.007	.06	0.11	0.13	0.18	0.20	.16	.18	0.29	0.35	0.50	0.53
-0.2	1×10^{-3}	2×10^{-3}	3×10^{-3}	4×10^{-3}	4×10^{-3}	.08	.11	0.18	0.22	0.31	0.33
-0.2	.02	0.04	0.05	0.06	0.07	.02	.04	0.06	0.08	0.11	0.12

C A P I T U L O 6

CONFIABILIDAD DE PILOTES SUJETOS A FLEXION

Los criterios de diseño de pilotes ante cargas laterales usados en la práctica común profesional recomiendan que la carga nominal actuante se multiplique por un factor de carga, γ , mayor que la unidad y que la resistencia lateral del suelo que circunda al pilote se multiplique por un factor de resistencia, ϕ , menor que la unidad (10). Mediante la definición de los valores nominales citados y el empleo de los factores parciales de seguridad γ y ϕ , se logra que la confiabilidad de los elementos estructurales sea aproximadamente la misma para cualquier elemento estructural, independientemente de la variabilidad de cargas y resistencias.

En el diseño de cimentaciones constituidas por pilotes los valores numéricos de γ y ϕ normalmente se estiman de acuerdo con la experiencia, de manera de lograr niveles aceptables de seguridad. Hasta la fecha no se han hecho estimaciones formales de la confiabilidad que corresponde a estos factores.

En esta tesis se propone un criterio para valuar la confiabilidad implícita en los procedimientos de cálculo para valores dados de ϕ y γ . En lo que sigue se describe dicho criterio y se presentan algunos ejemplos ilustrativos.

6.1 ESTADO LIMITE

El colapso de un pilote cargado lateralmente ocurre cuando se forma un mecanismo de falla. Este puede presentarse de diferentes maneras según la longitud del pilote, las condiciones de frontera en su cabeza, la rigidez a la flexión del pilote y las características de la reacción lateral del suelo (9).

En general los modos de falla pueden asociarse a dos causas principales: a la falla del suelo al alcanzar éste su resistencia última a lo largo del pilote, o a la falla del pilote cuando su resistencia última sobrepasa a la que es capaz de soportar. El primer tipo de falla generalmente se presenta en pilotes cortos y el último en pilotes largos o de longitud intermedia cuya cabeza está restringida al giro. Una combinación de ambos tipos de falla se presenta en pilotes largos cuya cabeza tiene libertad de girar (10).

Dado que en esta tesis se elige como ejemplo un pilote largo guiado en su cabeza, se considera que éste falla cuando se presenta un mecanismo de falla en el pilote. Por simplicidad, y siguiendo un criterio muy frecuentemente empleado para el análisis de confiabilidad de estructuras convencionales, la confiabilidad del pilote se mide aquí a través de la correspondiente a la sección crítica con mayor probabilidad de falla que en este caso es la que corresponde a la de la máxima esperanza de momento flexionante.

La resistencia nominal se define, cuando no existen problemas de estabilidad, como

$$R^* = Z_p f_y^* \quad (6.1)$$

En donde Z_p es el módulo de sección plástico y f_y^* es el esfuerzo de fluencia nominal del acero que constituye al pilote. Se supone que la sección del pilote se diseña de acuerdo con un criterio elástico, tal que

$$Z_e = \frac{S^*}{0.66 f_y^*} \quad (6.2)$$

en donde Z_e es el módulo de sección elástico, y S^* la sollicitación nominal. De lo anterior, la condición de diseño puede expresarse como sigue

$$R^* > \frac{K_f S^*}{0.66} \quad (6.3)$$

en donde K_f es el factor de forma $K_f = Z_p / Z_e$.

6.2 FORMATO PROBABILISTA

Una manera de expresar la confiabilidad de un elemento estructural es por medio del formato probabilista de primer orden y segundos momentos propuesto por A. Cornell (51). Dicho formato consiste en lo siguiente:

a) Las incertidumbres de las variables aleatorias se toman

en cuenta a través de la desviación estándar o del coeficiente de variación de las variables que intervienen.

- b) No se hace una estimación formal de la probabilidad de falla.
- c) La confiabilidad de un diseño se expresa mediante el índice de confiabilidad β , dado por lo siguiente, para el caso en que la resistencia R , y la sollicitación S , se consideren con distribución lognormal (51)

$$\beta = \frac{\ln \left(\frac{\bar{R}}{\bar{S}} \sqrt{\frac{1 + V_S^2}{1 + V_R^2}} \right)}{\sqrt{\ln[(1 + V_R^2)(1 + V_S^2)]}} \quad (6.4)$$

En esta ecuación \bar{R} y \bar{S} son las medias de la resistencia y de la sollicitación, respectivamente, y V_R y V_S los correspondientes coeficientes de variación.

6.3 ESTADISTICAS DE LA SOLICITACION (MOMENTO FLEXIONANTE ACTUANTE)

Para conocer el valor medio y el coeficiente de variación de la sollicitación a la que se ve sujeta una sección crítica del pilote, es necesaria la descripción estadística de las cargas a las que se somete el pilote y de la reacción del suelo. Es decir, el momento flexionante esperado, \bar{S} , y su respectivo

coeficiente de variación, V_S , dependen tanto de la carga media, \bar{P} , y su coeficiente de variación, V_P , como de la esperanza y coeficiente de variación de los parámetros que tienen mayor influencia en las curvas $p-y$, éstos son: $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$, V_{β_1} y V_{β_2} , los cuales intervienen en la respuesta del pilote.

Los valores de \bar{S} y V_S se pueden obtener con un programa de computadora.

El valor del momento flexionante nominal, S^* , se obtiene de un análisis determinista del pilote excitado por una carga de diseño P^* dada por

$$P^* = \bar{P} \exp(\kappa V_P) \quad (6.5)$$

en donde κ es un número que define la probabilidad de que la carga P exceda a su valor nominal, P^* .

En el análisis citado se supone que la resistencia lateral del suelo dada por las curvas $p-y$ se afecta con un factor reductivo ϕ menor que la unidad.

Con el valor de S^* se diseña la sección de acuerdo con la ec. 6.2.

6.4 ESTADÍSTICAS DE LA RESISTENCIA (MOMENTO FLEXIONANTE RESISTENTE)

Una vez obtenido S^* , de acuerdo con el párrafo anterior, se obtiene el momento flexionante resistente nominal, R^* , a partir de la ec.6.3, es decir

$$R^* = \frac{K_f S^*}{0.66}$$

Teniendo el valor de R^* es posible encontrar el valor de \bar{R} a partir de (Apéndice F)

$$\bar{R} = \phi_R R^* \exp(\alpha \beta_R V_R) \quad (6.6)$$

en que

\bar{R} = Valor esperado de la resistencia

α = factor numérico, en general igual a 0.55

β_R = índice nominal de confiabilidad de la resistencia

V_R = coeficiente de variación de la resistencia

ϕ_R = factor de resistencia

Yura, Galambos y Ravindra (61) obtuvieron los valores numéricos ϕ_R , V_R y β_R aplicables a vigas de acero sujetas a flexión. Ellos recomiendan usar los siguientes valores

$\phi_R = 0.86$, $V_R = 0.12$, y $\beta_R = 3.0$, utilizando dichas recomendaciones la ec. 6.6 se convierte en

$$\bar{R} = 0.86R^* \exp(0.2) = 1.05R^* \quad (6.7)$$

6.5 EJEMPLOS

A. Factores parciales de seguridad

Enseguida se obtiene el índice de confiabilidad, β , de un pilote típico de una plataforma marina, para diversas hipótesis sobre su ubicación.

El pilote (fig. 8) se supone sujeto a una carga lateral nominal igual a $P^* = 204.55$ kips (92.98 ton). Las características del suelo en donde se supone hincado están dadas en la Tabla 2 que corresponde a un suelo arcilloso blando saturado. Dichas características (resistencia al esfuerzo cortante, c) se multiplicaron por un factor reductivo, ϕ , igual a 0.67. Para fines ilustrativos, aquí se consideran las curvas $p-y$ estáticas en lugar de cíclicas, porque los parámetros estadísticos de las curvas $p-y$ obtenidos en el capítulo 4 se refiere a este tipo de curvas.

Se supone que la longitud del pilote se determinó previamente y es igual a 343 pies (104.6 m); sin embargo, por las mismas razones dadas en el capítulo 4, inciso 3, solamente se considera en este análisis la mitad superior del pilote.

La esperanza de la carga lateral equivalente, \bar{P} , provocada por el oleaje y su correspondiente coeficiente de variación, V_P , dependerá del sitio en donde se suponga ubicado el pilote.

En esta tesis los valores de la carga lateral, \bar{P} , y del coeficiente de variación, V_P , se obtuvieron de estudios hechos por Bea (4, 5), quien proporciona gráficas de la función de probabilidad acumulada del cortante basal, debido a tormentas, que se presenta en una plataforma, de acuerdo con su ubicación (fig 23); estas gráficas no incluyen la influencia de la incertidumbre asociada con los errores de predicción de fuerzas laterales a partir de altura de olas. Bea también proporciona la carga de diseño, $P_{.5}^*$, necesaria para que la plataforma tenga una probabilidad de falla de 0.5 por ciento por año. De tal estudio se obtuvieron los siguientes valores.

Lugar	\bar{P}		V_P	$P_{.5}^*$	
	kips	(ton)		kips	(ton)
Norte del Golfo de México, (GOM)	5140.99	(2336.8)	0.79	13000	(5909.1)
Sur de California (SC)	3278.04	(1490.0)	0.79	9500	(4318.2)
Golfo de Alaska (GOA)	9358.98	(4254.1)	0.89	26000	(11818.2)
Canal de Santa Bárbara (SBC)	2440.60	(1109.4)	0.79	5000	(2272.7)
Mar del Norte (NS)	5700.00	(2590.9)	0.59	9000	(4090.9)

Los coeficientes de variación incluyen un término que refleja la incertidumbre en el modelo matemático (5) la que corresponde a un coeficiente de variación de 0.66.

Los valores anteriores se normalizaron de manera que el valor $P_{.5}^*$ fuera igual a 204.55 kips (92.98 ton), es decir,

Lugar	\bar{P}		V_P	$P_{.5}^*$	
	kips	(ton)		kips	(ton)
GOM	80.89	(36.77)	0.79	204.55	(92.98)
SC	70.58	(32.08)	0.79	204.55	(92.98)
GOA	73.63	(33.45)	0.89	204.55	(92.98)
SBC	99.84	(45.38)	0.79	204.55	(92.98)
NS	129.55	(58.89)	0.59	204.55	(92.98)

Es notorio que los valores de \bar{P} que corresponden a una misma carga de diseño $P_{.5}^*$ difieren significativamente de un sitio a otro.

Si se supone que la fracción de la carga total que le toca a cada pilote es determinista, o sea que no presenta incertidumbres asociadas con las incertidumbres en las propiedades de estructura y suelo, entonces el coeficiente de variación de la carga en cada pilote es igual al de la carga total.

Con los valores anteriores de \bar{P} y V_P , y con los valores de $\bar{\beta}_1 = 0.92$, $\bar{\beta}_2 = 0.91$, $\sigma_{\beta_1}^2 = 0.95$, $\sigma_{\beta_2}^2 = 0.98$, obtenidos en el

capítulo 4, se analizaron los pilotes con un programa de computadora.

La media del momento flexionante en la cabeza del pilote, \bar{S}_c , y su coeficiente de variación, V_{s_c} , resultantes, se presentan en la siguiente tabla

Lugar.	\bar{S}_c		V_{s_c}
	lb-pulg	ton-m	
GOM	0.396×10^8	(475.5)	1.02
SC	0.336×10^8	(388.2)	1.01
GOA	0.354×10^8	(408.9)	1.14
SBC	0.503×10^8	(581.1)	1.03
NS	0.686×10^8	(792.5)	0.80

En la fig. 24 se presenta la variación de los momentos flexionantes a lo largo del pilote para el último caso (NS).

El momento flexionante, S^* , con el cual se diseñó la parte superior del pilote fue de 0.124×10^9 lb-pulg (1432.6 ton-m) y el esfuerzo de fluencia del acero f_y^* de 70 Ksi (4932 kg/cm²). Con los valores anteriores y un factor de forma $K_f = 1.32$ se obtuvo la resistencia nominal, R_c^* , igual a 0.248×10^9 lb-pulg (2865.1 ton-m) y la resistencia media, \bar{R}_c , de 0.2599×10^9 lb-pulg (3002.6 ton-m) El subíndice c indica que los valores se refieren a la cabeza del pilote.

Los índices de confiabilidad respectivos se calculan usando

la ec. 6.4; sus probabilidades de falla por año, p_F , pueden encontrarse a partir de (51)

$$p_F = 460 \exp(-4.3 \beta) \quad (6.8)$$

Enseguida se presentan los índices de confiabilidad y las probabilidades de falla por año de los cinco casos en estudio

Lugar	β	p_F
GOM	2.62	0.0059
SC	2.82	0.0025
GOA	2.61	0.0061
SBC	2.33	0.0205
NS	2.20	0.0358

Esta tabla muestra que las probabilidades de falla del pilote varían de un sitio a otro y difieren de la probabilidad de falla de la estructura.

Si elegimos una probabilidad de falla de cada pilote similar a la de la estructura (0.005) el índice de confiabilidad de los pilotes debería ser 2.66.

Para que la confiabilidad sea igual en los cinco pilotes se propone modificar la carga nominal P^*_s , que actúa en la cabeza de los pilotes. Dado que el problema es de tipo no-li-

neal, las cargas nominales que conducen a la confiabilidad requerida se encontraron por aproximaciones sucesivas. El primer intento se desarrolló como sigue. Se alteraron las cargas nominales P^* y se normalizaron de manera que su valor fuera igual a 204.55 kips (92.98 ton), dando lugar a los siguientes valores

Lugar	\bar{P}		P^*	
	kips	(ton)	kips	(ton)
GOM	64.712	(29.41)	204.55	(92.98)
SC	84.696	(38.50)	204.55	(92.98)
GOA	66.024	(30.01)	204.55	(92.98)
SBC	59.904	(27.23)	204.55	(92.98)
NS	45.342	(20.61)	204.55	(92.98)

Con los valores anteriores y con los obtenidos en el Cap. 4 para \bar{B} y Σ_B , se analizaron nuevamente los pilotes. La media del momento flexionante máximo, \bar{S}_c , y su coeficiente de variación, V_{S_c} , resultantes fueron los siguientes

Lugar	\bar{S}_c		V_{S_c}
	lb-pulg	(ton-m)	
GOM	0.302×10^8	(348.7)	1.24
SC	0.418×10^8	(482.6)	0.89
GOA	0.310×10^8	(357.9)	1.25
SBC	0.275×10^8	(317.5)	1.62
NS	0.196×10^8	(226.3)	2.03

Los índices de confiabilidad y las probabilidades de falla por año asociados con estos valores son

Lugar	β	P_F
GOM	2.67	0.0047
SC	2.73	0.0037
GOA	2.63	0.0056
SBC	2.51	0.0094
NS	2.63	0.0056

Después de hacer varios intentos como el anterior se obtuvieron las cargas de diseño que dan lugar a un índice de confiabilidad igual (2.66) en los cinco sitios. Se propone que los valores de dichas cargas se obtengan multiplicando las cargas nominales, P_s^* , necesarias para que la plataforma tenga una probabilidad de falla de 0.005 (Ref. 4, 5), por un factor parcial de seguridad, γ , igual a

Lugar	γ
GOM	1.23
SC	0.72
GOA	1.17
SBC	1.92
NS	3.03

El factor de resistencia, ϕ , que se aplica a las características nominales del suelo (en este caso la resistencia al

esfuerzo cortante, c), y que afecta a las curvas $p-y$, es igual a 0.67.

B. Influencia del nivel de la carga

Es interesante hacer notar lo siguiente: los coeficientes de variación V_{s_c} obtenidos para los pilotes ubicados en diferentes sitios dependen no sólo de la variabilidad de la carga, y de β_1 y β_2 , sino también de la magnitud de la carga media lateral aplicada \bar{P} . En la fig. 25 se muestra el coeficiente de variación del momento flexionante en la cabeza del pilote, V_{s_c} , ubicado en el sitio NS, sujeto a distintas condiciones de carga, de manera que se presentan distintos desplazamientos medios, \bar{y}_c , en su cabeza. La figura muestra en sus abscisas los desplazamientos esperados \bar{y}_c normalizados respecto al factor $8y_{50}$ (esta variable se definió en la ec. 4.1). Se presentan tres casos: uno considerando un coeficiente de variación de la carga V_p igual a 0.89, uno igual a 0.59 (como el del sitio NS) y otro cuando el coeficiente de variación de la carga es igual a cero (el primero y el último corresponden a sitios hipotéticos).

En la parte inferior de la fig. 25 se indican horizontalmente tres intervalos (A, B y C). Estos corresponden a los intervalos lineal (A), intermedio (B) y no-lineal (C) de las curvas $p-y$, para este caso particular (estos tres intervalos se definieron en el capítulo 3. Como puede apreciarse en es-

ta figura el coeficiente de variación del momento flexionante en la cabeza del pilote (V_{sc}) es sensible a la esperanza del desplazamiento lateral en el mismo punto. La variación del coeficiente en cuestión es muy irregular debido a que dicho coeficiente es sensible al intervalo de la curva $p-y$ aplicable en cada punto a lo largo del pilote, y dicho intervalo varía: los desplazamientos laterales esperados del pilote en su parte superior corresponden al intervalo no-lineal de las correspondientes curvas $p-y$, mientras que los desplazamientos esperados de la parte inferior son muy pequeños y caen dentro del intervalo lineal de las curvas $p-y$ correspondientes.

En la fig. 25 se indica el punto O que corresponde al pilote en estudio ubicado en el sitio NS (Mar del Norte) sometido a una carga media igual a 129.55 kips (58.9 ton) y un coeficiente de variación V_p de 0.59. En este caso el coeficiente de variación del momento flexionante en su cabeza es igual a 0.80

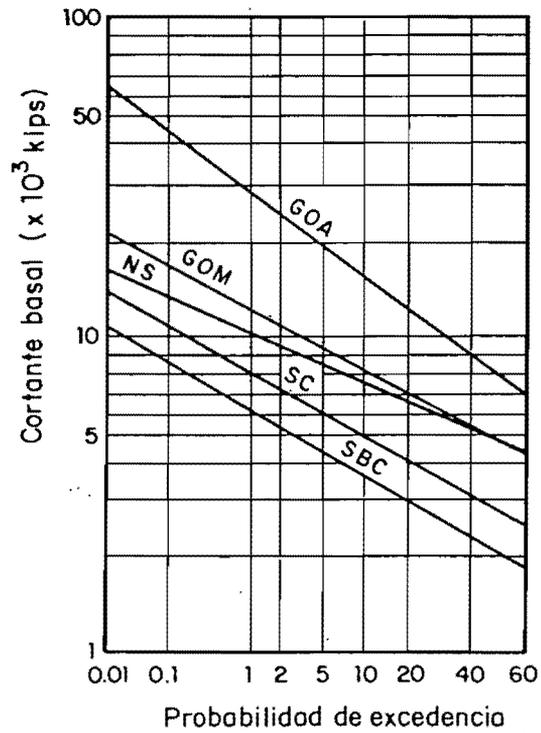


Fig 23 Probabilidades de excedencia anual de cortantes basales debidos a tormentas, para diferentes sitios (Bea, 1974; 1979) (1 Kip = 453.7 kg)

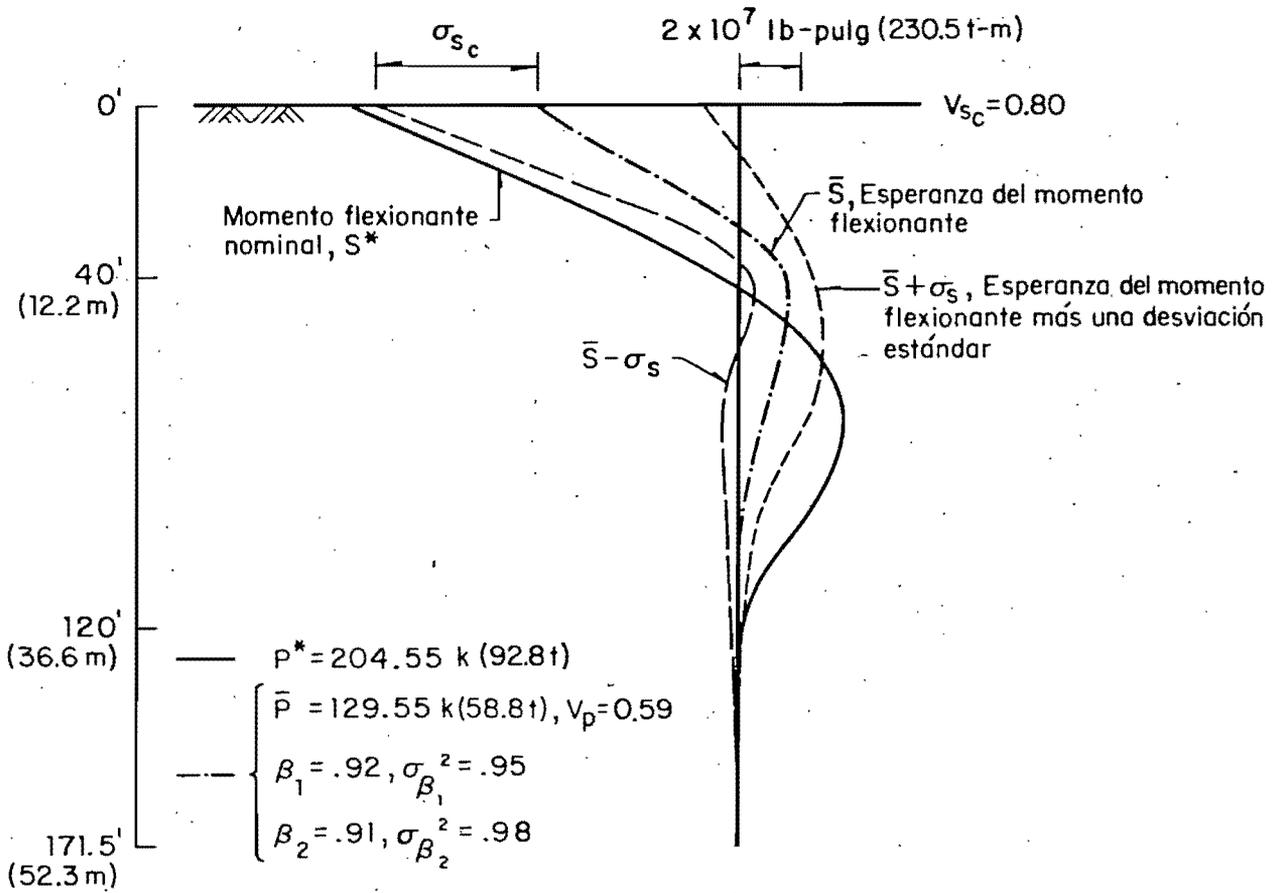


Fig 24 Momentos flexionantes deterministas y probabilistas para el pilote ubicado en el mar del norte (NS)

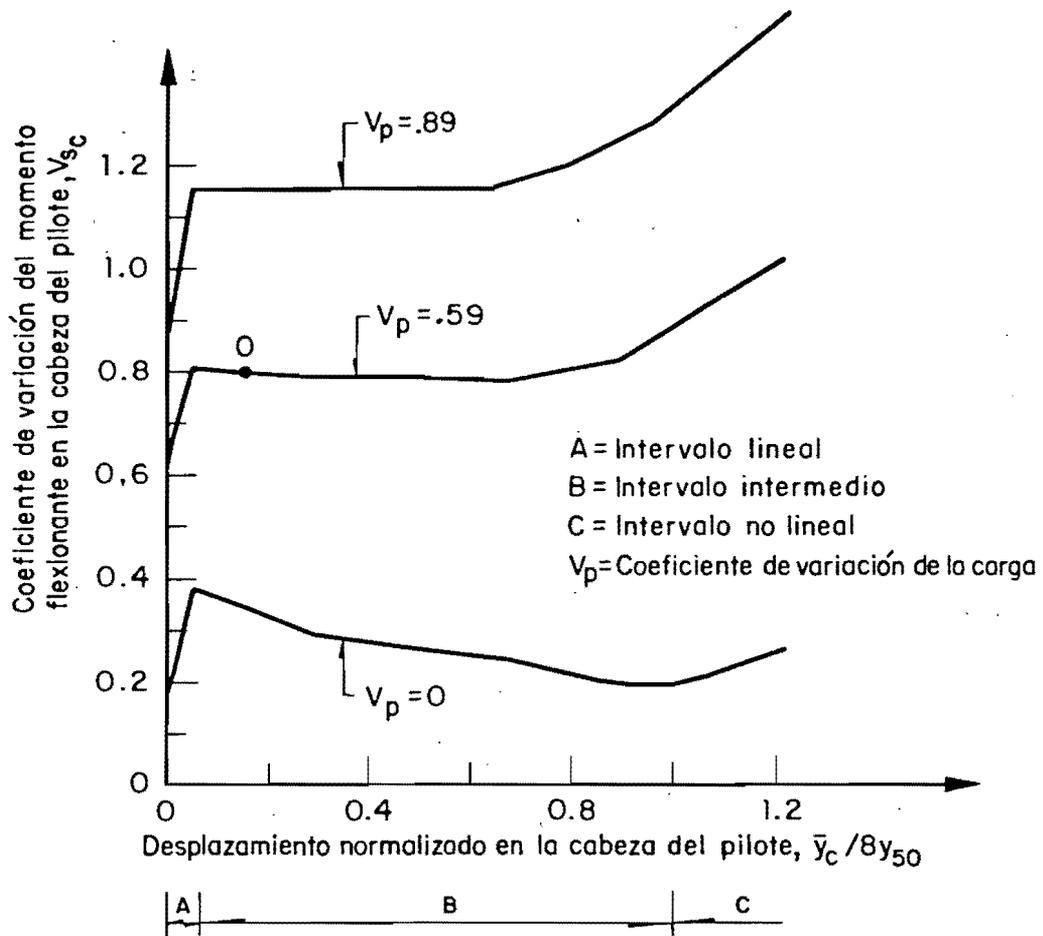


Fig 25. Influencia del nivel de carga en el coeficiente de variación del momento máximo

C A P I T U L O 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta tesis se desarrolla un estudio sistemático sobre el análisis de confiabilidad de pilotes aislados, tomando en cuenta la incertidumbre en la carga estática aplicada, así como la de los principales parámetros que definen la reacción lateral del suelo que circunda al pilote.

Este trabajo se ilustra con ejemplos de pilotes de acero hincados en suelos arcillosos blandos, cuyo comportamiento ante acciones laterales se representa mediante curvas $p-y$ obtenidas de pruebas de pilotes sometidos a cargas estáticas de corta duración propuestas en la literatura. Sin embargo, el criterio aquí desarrollado puede aplicarse a cualquier otro tipo de suelo y a cualquier expresión matemática o algoritmo que describa al comportamiento lateral del suelo ante acciones estáticas, a través de un modelo de Winkler, y es posible generalizarlo a otras formas de representar la interacción entre pilote y suelo.

El criterio presentado incluye tres partes:

- i) Se cuantifican los parámetros estadísticos asociados a la reacción lateral del suelo representada por curvas $p-y$.

En esta parte se propone un criterio de tipo bayesiano que toma en cuenta información que proviene de distintas fuentes (pruebas a pequeña escala, a gran escala, juicio de los expertos en la materia, y datos de laboratorio). Es posible extender la metodología aquí desarrollada a otro tipo de problemas de mecánica de suelos.

Los valores típicos encontrados para arcillas blandas saturadas (capítulo 4) son: $E(\beta_1) = 0.92$, $E(\beta_2) = 0.91$, $V(\beta_1) = 1.06$, $V(\beta_2) = 1.09$, en donde $E(\cdot)$ representa la esperanza y $V(\cdot)$ el coeficiente de variación. Es decir, que la incertidumbre asociada a éstos es bastante grande.

Los valores anteriores no toman en cuenta la correlación estadística entre las características del suelo en diversos puntos, y resultan de suponer la misma función de distribución de probabilidades de β_1 y de β_2 a lo largo del pilote. Desafortunadamente, hasta este momento no se cuenta con suficiente información experimental, por lo que difícilmente se puede mejorar la descripción probabilista de dichas variables. Es deseable que en el futuro, cuando se cuente con mayor información, principalmente de pruebas hechas a escala natural, se desarrolle un modelo matemático que considere tanto la correlación espacial como la correlación entre las variables aleatorias en cuestión.

La forma de las curvas $p-y$ con la que se ilustra el criterio desarrollado en este trabajo, es la propuesta por Matlock (31) y Sullivan (54). Ellos recomiendan su uso para el caso de pilotes hincados en arcillas blandas saturadas (como las que se encuentran en el Golfo de México). Dicha forma (dada mediante tres tramos discontinuos) es la recomendada por las Normas A.P.I. RP 2A(3).

Las curvas $p-y$ adoptadas en este trabajo están constituidas por tres tramos, descritos por expresiones matemáticas distintas. Como el sistema pilote-resortes es estáticamente indeterminado, las fuerzas internas en los resortes dependen de la configuración deformada del sistema, y ésta a su vez es función de las fuerzas internas. La incertidumbre en estas últimas es función de la incertidumbre en las propiedades de los resortes y esta última depende del tramo de la curva $p-y$ en la que se encuentre la deformación del resorte. Así pues, la incertidumbre en las fuerzas internas debe incluir una parte que represente el hecho de que no se conoce en forma determinista a qué tramo de la curva $p-y$ corresponde la fuerza en cada resorte. Tratar de tomar en cuenta esta última incertidumbre complicaría excesivamente el problema y por ello no se intenta en este trabajo. Por ello se juzga conveniente que los estudios que en el futuro se hagan en relación con planteamien-

tos semejantes al presente partan de curvas $p-y$ que se presenten por una sola expresión matemática en todo el intervalo de valores significativos del desplazamiento.

- ii) Se desarrolla un algoritmo para obtener los valores esperados y la matriz de covarianzas de los desplazamientos laterales y de los momentos flexionantes a lo largo del pilote. Estos últimos se expresan directamente como funciones lineales de los desplazamientos.

El algoritmo se aplica a casos de carga estática lateral, sin embargo su aplicación a pilotes cargados verticalmente es inmediata.

En el ejemplo que se presenta en las figs. 13 y 14 se puede apreciar la alta variabilidad de la respuesta debida a la incertidumbre de las propiedades del suelo; para este caso, el coeficiente de variación en la cabeza del pilote del desplazamiento es igual a 0.6, y del momento flexionante es 0.25. La influencia del nivel de carga y su coeficiente de variación se presenta en la fig. 25; la cual fue ampliamente discutida en el capítulo 6.

La evaluación de estas incertidumbres es esencial para un análisis racional y la elección de factores de seguridad adecuados.

Para fines de aplicación práctica se presentan soluciones adimensionales en términos de coeficientes de desplazamientos y de momentos flexionantes bajo la hipótesis de variación lineal del módulo secante de la reacción del suelo con la profundidad, para dos condiciones de restricción respecto a la rotación de la cabeza del pilote: fija y libre. De los casos analizados (figs. 15 - 22) se deduce que las incertidumbres asociadas a la reacción lateral del suelo dan lugar a coeficientes de variación grandes de la respuesta del pilote; por ejemplo, para el caso 1 de la figura 15 el coeficiente de variación de A_y en la cabeza del pilote es igual a 1.2. En este mismo punto la incertidumbre de la respuesta asociada con la carga, suponiendo un coeficiente de variación de esta última igual a 0.82, es de 1.5 (Tabla 6).

- iii) Se desarrolla una formulación de primer orden y segundos momentos probabilistas para obtener el índice de confiabilidad de secciones críticas de pilotes sujetos a flexión, tomando en cuenta las características inciertas de la reacción lateral del suelo y de la carga lateral aplicada.

Se analizan cinco pilotes hipotéticos hincados en el mismo tipo de suelo, pero sujetos a diferentes condiciones de carga, correspondientes a diferentes localidades.

Los valores del índice de confiabilidad β que se obtienen, para estos casos, se encuentran entre intervalos amplios de variación (2.20-2.82). Esto indica que las probabilidades de falla de los cinco casos estudiados discrepan sustancialmente.

En el capítulo 6 se dan recomendaciones sobre los factores parciales de seguridad que deben emplearse para que los pilotos estudiados tengan probabilidades de falla iguales.

Los factores de carga (γ) encontrados para los cinco sitios son los siguientes:

Sur de California (SC)	0.72
Golfo de Alaska (GDA)	1.17
Norte del Golfo de México (GOM)	1.23
Canal de Santa Bárbara (SBC)	1.92
Mar del Norte (NS)	3.03

Los factores de reducción, ϕ , que se aplican a las propiedades del suelo son iguales a 0.67 en todos los casos.

Como puede apreciarse los factores de carga difieren mucho entre sí. Debe advertirse que éstos corresponden solamente a un pilote ubicado en un suelo cuyas propie-

dades mecánicas tienen una cierta distribución de probabilidades, para una carga estática monótonamente aplicada, y que no deben tomarse como normas de diseño, sino solamente como indicadores de las variaciones de los factores parciales de seguridad que necesitan aplicarse para obtener una confiabilidad especificada, de acuerdo con la forma y coeficiente de variación de la carga lateral máxima durante el lapso que se toma como base para el diseño.

Es deseable llevar a cabo estudios de confiabilidad semejantes a los que aquí se presentan con el fin de proponer normas de diseño que conduzcan a niveles de seguridad congruentes con criterios beneficio-costos-riesgo estipulados.

El criterio de análisis de confiabilidad desarrollado en esta tesis no trata el problema de confiabilidad de sistemas, esto es, el análisis de falla gradual del suelo que circunda a un pilote, hasta llegar a formar un mecanismo de falla; sin embargo, dicho problema puede formularse utilizando las herramientas que aquí se presentan.

R E F E R E N C I A S

1. Adams, J.I. y Radarishna, H.S., "The Lateral Capacity of Deep Angered Footings", *Proceedings, VIII International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1973.
2. Alizadeh, M., "Lateral Load Tests on Instrumented Timber Piles", *Report*, Fruco and Associates, Inc., Saint Louis, Mo., 1968.
3. A.P.I. RP2A *Recommended practice for planning, designing and constructing fixed offshore platforms*, 12a. Edición, American Petroleum Institute, Washington, D.C., 1981.
4. Bea, R.G., "Development of safe environmental criteria for offshore structures", *Nota técnica CE-7*, Shell Oil Co., 1974.
5. Bea, R.G., "Earthquake and wave design criteria for offshore platforms", *J. Structural Div., ASCE*, ST2, Feb., 1979, pp. 401-419.
6. Baguelin, F., Jezequel, J., y Shields, A., *The Pressurometer and Foundation Engineering*, Trans. Tech. Publications, 1978.

7. Benjamin, J.R. y Cornell, C.A., *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*, McGraw-Hill, Inc., U.S.A., 1970.
8. Bowman, E.R., "Investigación of the Lateral Resistance to Movement of a Plate in Cohesionless Soil", M.S. Thesis, *The University of Texas at Austin, Texas*, 1958.
9. Broms, B.B., "Lateral Resistance of Piles in Cohesive Soils", *J. Soil Mech. and Found. Div.*, ASCE, Vol. 90, SM2, Mar., 1964, pp. 27-58.
10. Broms, B.B., "Design of Laterally Loaded Piles", *J. Soil Mech. and Found. Div.*, ASCE, Vol. 91, SM3, May., 1965, pp. 79-99.
11. Cox, W.R., Reese, L.C. y Grubbs, B.R., "Field Testing of Laterally Loaded Piles in Sand", *VI Offshore Technology Conference*, 2079, 1974, pp. 459-472.
12. Davidson, R.R. y Pérez, J., "Pressurometer", *Research 1-90 Project*, Seattle, Washington, Feb., 1980.
13. Desai, C.S. y Christian, J.T. (Editores), *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, McGraw-Hill Inc., U.S.A., 1977.

14. Díaz Padilla, J. y Vanmarcke, E.H., "Settlement of Structures on Shallow Foundations: A Probabilistic Analysis", *Research Report R74-9*, Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., Ene., 1974.
15. Douglas, K.J. y Davis, E.H., "The Movement of Buried Footing Due to Moment and Horizontal Load and the Movement of Anchor Plates", *Geotechnique*, Vol. 14, 1964, pp. 115-132.
16. Esteva, L., "Second Probabilistic Analysis of Statically Loaded and Non-Linear Structures", *Proceedings, II International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, Aachen, Alemania, 1974.
17. Esteva, L., "Uncertainty, Reliability and Decisions in Structural Engineering", *Proceedings, International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Engineering*, Trondheim, 1981.
18. Esteva, L.; et al, "Criterio de Diseño Estructural para Plataformas Marinas, Etapa I. Modelos de Confiabilidad para Evaluar Criterios de Diseño", *Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1981.*

19. Gambin, M., "Calculation of Foundation Subjected to Horizontal Forces Using Pressurometer Data", *SOLS Soils*, Vol. 8, No. 30/31, 1979, pp. 17-67.
20. Garassino, A., Jamiolkowsky, M.B. y Pasqualini, E., "Soils Modulus for Laterally Loaded Piles in Sands and N.C. Clays", *Proceedings, W. European Conference on Soil Mechanic and Foundation Engineering*, Viena, 1976.
21. Gill, H.L. y Demars, K.R., "Displacement of Laterally Loaded Structures in Non-Linearly Responsive Soils", *Technical Report R-670*, Naval Civil Eng. Lab. Port Huaneme, California, 1970.
22. Gleser, S.M., "Lateral Load Tests on Vertical Fixed-Head and Free-Head Piles", *Publicación Especial 16154, Symposium on Lateral Load Tests on Piles*, ASTM, 1953, pp. 75-101.
23. Hansen, J.B., "The Ultimate Resistance of Rigid Piles Against Transversal Forces", *Bulletin 12*, The Danish Geotechnical Institute, Copenhage, 1961, pp. 5-9.
24. Holloway, G.L., *et al*, "Field Test and Preliminary Design Method for Laterally Loaded Drilled Shafts in Clay", *Research Report 211-2*, Study 2-5-77-211, Texas Transportation Institute, 1977.

25. Jamiolkowsky, M. y Garassino, A., "Soil Modulus for Laterally Loaded Piles", Panel, Discusión presentada en la Sesión Especial No. 10, *IX International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Tokio, 1979.
26. Jamiolkowski, M. y Marchetti, S., "Determinazione del Modulo di Reazione Orizzontale del Terreno Attraveso Misure Inclinoetriche Effecttuatte Durante Prove di Carico Orizzontale su Pali", *XI Convegno di Geotecnica*, Associazione Geotecnica Italiana, Milán, Mar., 1973.
27. Kubo, K., "Experimental Study of the Behavior of Laterally Loaded Piles", *Found. Lab., Port and Harbour Tech. Res. Inst., Japón*, 1964.
28. Leicht, T.J. y Reese, L.C., "Load Deformation Characteristics of Pile Foundations", *Geotechnical Engineering Report GR81-17*, Geotechnical Engineering Center, Civil Engineering Department, The University of Texas at Austin, Texas, Ago., 1981.
29. Lumb, P., "Precision and accuracy of soil tests", *International Conference on Application of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering*, Hong Kong, Sep., 1971.

30. Marchetti, S., "In situ Tests by Flat Dilatometer", citado por Jamiolkowsky y Garassino, *IX International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Tokio, 1979.
31. Matlock, H., "Correlations for Design of Laterally Loaded Piles in Soft Clay", *II Offshore Technology Conference*, 1204, 1970, pp. 577-594.
32. Matlock, H. y Reese, L.C., "Generalized Solution for Laterally Loaded Piles", *J. Soil Mech. and Found. Div., ASCE*, SM5, Oct., 1960, pp. 63-90.
33. Matlock, H. y Ripperberger, E.A., "Measurement of Soil Pressure on a Laterally Load Pile", *Proc. ASTM*, Vol. 58, 1958, pp. 1245-1259.
34. Matlock, H. y Ripperberger, E.A., "Theoretical Analysis and Laboratory Studies of Laterally Loaded Model Pile Segments", *III Report*, Shell Oil Co., Exploitation and Production Department, Technical Services Division, Houston, Tx., 1957.
35. McClelland, B. y Focht, J.A., "Soil Modulus for Laterally Loaded Piles", *Transactions*, ASCE, Vol. 123, 2954, 1958, pp. 1049-1086.

36. Meyer, B.J. y Reese, L.C., "Analysis of single piles under lateral loading", Research Report 244-1, Project 3-5-78-244, Center for Transportation Research, Bureau of Engineering Research, The University of Texas at Austin, Dic., 1979.
37. Novak, M., "Vibrations of embedded footings and structures", No. 2029, ASCE, National Structural Engineering Meeting, San Francisco, Cal., Abr., 1973.
38. Parker, T. y Reese, L.C., "Lateral Pile Soil Interaction Curves for Sand", Proceedings, International Symposium on the Engineering Properties of Sea-Floor Soils and Their Geophysical Identification, University of Washington, Seattle, Jul. 25, 1971.
39. Penzien, J., Schaffey, C.F. y Pamerlee, R.A., "Seismic Analysis of Bridge on Long Piles", Journal Engineering Mechanics Division, ASCE, EM3, 1964, pp. 223-254.
40. Poulos, H.G., "Behavior of Laterally Loaded Piles: I - Single Piles", J. Soil Mech. and Found. Div., ASCE, SM5, May., 1971, pp. 711-731.
41. Poulos, H.G., "Pile Foundation Analysis and Design", John Wiley and Sons., U.S.A., 1980.

42. Radhakrishna, N. y Reese, L.C., "Soil Resistance-Movement Relationship for Laterally Loaded Piles in Clays at Great Depths", *J. Indian Nat. Soc. of Soil Mechn and Foundation Engineering*, Vol. 9, No. 4, Oct., 1970.
43. Raiffa, H. y Schlaifer, R., "*Applied Statistical Decision Theory*", Division of Research, Graduate School of Business Administration, Harvard University, Boston, 1961.
44. Reese, L.C., Discusión al artículo "Soil Modulus for Laterally Loaded Piles", por McClelland, B. y Focht, J.A., *Transactions*, ASCE, Vol. 123, 2954, 1958.
45. Reese, L.C., apuntes tomados en el Curso *Interaction of soils and structures*, CE 394, Universidad de Texas en Austin, Tx., 1981.
46. Reese, L.C., "Ultimate Resistance Against a Rigid Cylinder Moving Laterally in a Cohesionless Soil", *J. Society of Petroleum Engineers*, 1962, pp. 355-359.
47. Reese, L.C. y Cox, W.R., "Field Testing and Analysis of Laterally Loaded Piles in Stiff Clay", *VII Offshore Technology Conference*, 2312, 1975, pp. 671-690.
48. Reese, L.C. y Matlock, H., "Non-dimensional Solutions for Laterally Loaded Piles with Soil Modulus Assumed Propor-

- tional to Depth", *Proceedings, VIII Texas Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Publicación Especial No. 29, Bureau of Engineering Research, The University of Texas at Austin, 1956.
49. Reese, L.C., O'Neill, M.W. y Radhakrisna, N., "Rational design concept for breasting dolphins", *J. of the Waterways and Harbors Div.*, ASCE, WW2, May., 1970, pp. 433-450.
50. Reese, L.C. y Welch, R.G., "Lateral Loading on Deep Foundations in Stiff Clay", *J. Geotechn. Engng. Div.*, ASCE, GT7, Jul., 1975, pp. 633-649.
51. Rosenblueth, E. y Esteva, L., "Reliability Basis for some Mexican Codes", *Publicación SP-31, Probabilistic Design of Reinforced Concrete Buildings*, ACI, Detroit, Mich., 1972, pp. 1-41.
52. Singh, A., Wei-Hu, R.E. y Consineu, R.D., "Lateral Load Capacity of Piles in Sand and N.C. Clay", *J. of Civil Engng. Div.*, ASCE, CE8, Vol. 41, 1971.
53. Sokolnikoff, I.S. y Redheffer, R.M., *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, McGraw-Hill Inc., Nueva York, 1958.

54. Sullivan, W.R., "Development and Evaluation of a Unified Method for the Analysis of Laterally Loaded Piles in Clay", M.S. Thesis, University of Texas at Austin, Ago., 1977.
55. Sullivan, W.R. y Reese, L.C., "Unified Method for Analysis of Laterally Loaded Piles in Clay", *Numerical Methods in Offshore Piling*, Institution of Civil Engineers, Londres, 1979, pp. 107-118.
56. Terzaghi, K., "Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction", *Geotechnique, The International Journal of Soil Mechanics*, Vol. 5, No. 4, Dic., 1955.
57. Welch, R., "Lateral Load Behavior of Drilled Shafts", Ph. D. Thesis, The University of Texas at Austin, 1972.
58. Williams, D.J., "The Behavior of Model Piles Dense Sand Under Vertical and Horizontal Loading", Ph. D. Thesis, University of Cambridge, Oct., 1979.
59. Yegian, M.K. y Hadley, P.K., "Reliability of Laterally Loaded Pile Analysis", *IX Offshore Technology Conference*, 2841, 1977.
60. Yegian, M. y Wright, S.G., "Lateral Soil-Resistant-Displacement Relationship Pile Foundation in Soft Clays", *V Offshore Technology Conference*, 1973.

61. Yura, J.A., Galambos, T.V. y Ravindra, M.K., "The bending resistance of steel beams", *J. Structural Div.*, ASCE, ST9, Sep., 1978, pp. 1355-1369.

A P E N D I C E A

CONCEPTOS BASICOS DEL ANALISIS BAYESIANO

Supóngase que $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ es un vector de n observaciones cuya distribución de probabilidades $p(y|\theta)$ depende de los valores de los K parámetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$. Supóngase también que θ tiene una distribución de probabilidades $p(\theta)$. Entonces

$$p(y|\theta)p(\theta) = p(\theta|y)p(y) \quad \text{A.1}$$

Dadas las observaciones y , la distribución condicional de θ es

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} \quad \text{A.2}$$

El denominador $p(y)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} p(y) &= c^{-1} = \int p(y|\theta)p(\theta)d\theta, \quad \theta \text{ continua} \\ &= \sum p(y|\theta)p(\theta), \quad \theta \text{ discreta} \end{aligned}$$

Entonces la ec. A.2 puede escribirse como

$$p(\theta|y) = c p(y|\theta)p(\theta) \quad \text{A.3}$$

La ec. A.2 es conocida como el Teorema de Bayes. En esta ex-

presión, $p(\theta)$ es conocida como la distribución *a priori* de θ , y $p(\theta|y)$ es conocida como la distribución *a posteriori* de θ dado y . La cantidad c es una constante normalizadora necesaria para que la integración o suma de $p(\theta|y)$ sea igual a uno.

Dado que se conocen los datos, y , entonces $p(y|\theta)$ es una función de θ y no de y . A esta función se le conoce como función de verosimilitud de θ dado y , y se escribe comunmente $\ell(\theta|y)$.

En otras palabras, el Teorema de Bayes dice que la distribución de probabilidad de θ posterior a los datos y es proporcional al producto de la distribución de θ antes de conocer los datos por la verosimilitud de θ dado que se conoce y . Esto es,

distribución posterior \propto verosimilitud \times distribución anterior

La base conceptual del método de Bayes es que la nueva evidencia que se obtiene es información adicional sobre la evidencia *a priori* y por lo tanto no la sustituye totalmente. Dicha información *a priori* puede ser de tipo subjetivo; por ello también se le llama "probabilidad personal" o "información colateral".

En ciertos casos es posible encontrar una forma de distribución *a priori* conjugada de la función de verosimilitud tal que la distribución posterior sea de la misma forma analítica

que ésta. Comúnmente los parámetros de la distribución posterior están relacionados de manera directa y simple con los parámetros de la distribución *a priori* y con las estadísticas de las observaciones.

El Teorema de Bayes permite actualizar la información sobre los mencionados parámetros θ a medida que se cuenta con más observaciones. Supóngase que se tiene una muestra inicial de observaciones y_1 ; la fórmula de Bayes en este caso es

$$p(\theta|y_1) \propto l(\theta|y_1)p(\theta) \quad \text{A.4}$$

Ahora, supóngase que se tiene una segunda muestra de observaciones y_2 que son independientes de y_1 , entonces

$$\begin{aligned} p(\theta|y_2) &\propto p(\theta)l(\theta|y_1)l(\theta|y_2) \\ &\propto p(\theta|y_1)l(\theta|y_2) \quad \text{A.5} \end{aligned}$$

La ec. A.5 es de la misma forma que la ec. A.4. Aquí, $p(\theta|y_1)$ juega el papel de la distribución *a priori*. Este proceso puede repetirse cuantas veces se requiera.

A P E N D I C E B

FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES GAMMA-2 Y MULTINORMAL

1. Función Gamma-2

La función de densidad Gamma-2 se define por

$$f_{\gamma_2}(h|v, \nu) \equiv \frac{e^{-\frac{1}{2}\nu v h} (\frac{1}{2}\nu v h)^{\frac{1}{2}\nu-1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \frac{1}{\frac{1}{2}\nu v}, \quad h > 0 \\ \nu, v > 0$$

Sus primeros dos momentos son

$$m_h = \frac{1}{\nu}$$

$$\sigma_h^2 = \frac{2}{\nu v^2}$$

La función gamma $\Gamma(\cdot)$ se define como

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du$$

Esta integral es en este caso una constante normalizadora necesaria para que $f_{\gamma_2}(h|v, \nu)$ sea una función de densidad de probabilidades.

2. Función Multinormal

La forma de la función estandarizada normal de una varia-

ble aleatoria x es como sigue

$$f_x(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad -\infty < x < \infty$$

Sus primeros dos momentos son

$$m_x = 0$$

$$\sigma_x^2 = 1$$

Su forma general no-estandarizada está dada por

$$f_x(x|m, h) \equiv \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}h(x-m)^2}$$

cuyos momentos son

$$m_x = m$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{h}$$

Al parámetro h se le llama precisión media. Para el caso de r variables aleatorias contenidas en un vector U , la función de densidad estandarizada (función normal esférica unitaria) es igual a

$$f_U(u) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} e^{-\frac{1}{2}u^T I u} \quad -\infty < u < \infty$$

En donde

I = matriz identidad de tamaño $r \times r$

u^T = vector u traspuesto

Sus primeros dos momentos son

$$E(u) = 0$$

$$\Sigma_u = I$$

$E(U)$ representa un vector con los valores medios de las variables U y Σ_u la matriz de covarianzas de U , que en este caso es diagonal.

La forma general para el caso de r variables aleatorias es como sigue

$$f_U(u|m, H) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} e^{-\frac{1}{2}(u - m)^T H(u - m)} |H|^{\frac{1}{2}} \quad \begin{array}{l} -\infty < u < \infty \\ -\infty < m < \infty \end{array}$$

En donde

m = vector que contiene los valores medios de u

H = matriz de precisión o inversa de la matriz de covarianzas, de tamaño $r \times r$

$|H|$ = determinante de la matriz H

Los primeros dos momentos de u son

$$E(U) = m$$

$$\Sigma_u = H^{-1}$$

Al parámetro H se le denomina como precisión del proceso.

Esta puede expresarse como

$$H = \eta h$$

en que $h = |H|^{1/r}$ es un escalar que representa la precisión media y η una matriz que representa la precisión relativa

$$\eta = \frac{H}{h} = \begin{bmatrix} h_{11}/h & h_{12}/h & h_{13}/h & h_{1r}/h \\ h_{21}/h & h_{22}/h & h_{23}/h & h_{2r}/h \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{r1}/h & h_{r2}/h & h_{r3}/h & h_{rr}/h \end{bmatrix}, \quad |\eta| = 1$$

$|\eta|$ = determinante de η

Ejemplo:

Para el caso de $r = 2$ la matriz H es igual a

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2 (1-\rho_{1,2}^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_1 \sigma_2 (1-\rho_{1,2}^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1 \sigma_2 (1-\rho_{1,2}^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2 (1-\rho_{1,2}^2)} \end{bmatrix}$$

En donde σ_1^2 , σ_2^2 son las varianzas de la primera y segunda variables respectivamente y $\rho_{1,2}$ representa el coeficiente de correlación entre ellas.

$$|H| = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}}$$

A P E N D I C E C

DEDUCCION DE LA EC. $(K_2 + \kappa(\hat{Y}))^{-1} = F(I - \kappa(\hat{Y})F + (\kappa(\hat{Y})F)^2 \dots)$

Sea K_2^{-1} una aproximación de $(K_2 + \kappa(\hat{Y}))^{-1}$

Entonces el residuo está dado por

$$\begin{aligned} R_0 &= I - (K_2 + \kappa(\hat{Y}))K_2^{-1} = I - K_2K_2^{-1} - \kappa(\hat{Y})K_2^{-1} \\ &= \kappa(\hat{Y})K_2^{-1} \end{aligned} \quad \text{C.1}$$

Se sabe* que

$$(K_2 + \kappa(\hat{Y}))^{-1} = K_2^{-1} [I + R_0 + R_0^2 + \dots] \quad \text{C.2}$$

Sustituyendo C.1 en C.2 se obtiene

$$= K_2^{-1} [I - \kappa(\hat{Y})K_2^{-1} + \kappa(\hat{Y})^2 K_2^{-2} + \dots] \quad \text{C.3}$$

*Householder A.S., "Theory of matrices in numerical analysis",
Dover Publications, Inc., New York, 1975

A P E N D I C E D

DEMOSTRACION DE LAS ECS. 3.14 Y 3.18

Se parte de la ec. 3.13, que es la siguiente

$$y = \hat{y} + F(P - K\hat{y} - BH\Delta_1) - F(B - \bar{B})H\Delta_2F(P - K\hat{y} - BH\Delta_1) \quad D.1$$

Sea

$$X = H\Delta_1$$

$$L = H\Delta_2F$$

Entonces

$$y = \hat{y} + F(P - K\hat{y} - BX) - F(B - \bar{B})L(P - K\hat{y} - BX)$$

que a su vez es igual a

$$y = \hat{y} + FP - FK\hat{y} - FBX - FBLP + FBLK\hat{y} + FBLBX + F\bar{B}LP - F\bar{B}LK\hat{y} - F\bar{B}LBX$$

La esperanza de y está dada por

$$E(y) = \hat{y} + F\bar{P} - FK\hat{y} - F\bar{B}X - E[FBLP] + E[FBLBX] + F\bar{B}L\bar{P} - F\bar{B}L\bar{B}X \quad D.2$$

$$= \hat{y} + F(\bar{P} - K\hat{y} - \bar{B}X) - FE[BLP] + F\bar{B}L\bar{P} + FE[BLB]X - F\bar{B}L\bar{B}X$$

$$= \hat{y} + F(\bar{P} - K\hat{y} - BX) - F\theta + FA^1X \quad D.3$$

En donde

$$\theta_m = L_{mn} \text{cov} (B_{mn}, P_n) \quad D.4$$

$$A_{mn}^1 = L_{mn} \text{cov} (B_{mm}, B_{nn})$$

Teniendo en cuenta que $\text{cov} (B_{mn}, P_n) = 0$, se obtiene

$$E(y) = y + F(\bar{P} - Ky - \bar{B}X) + FA^1H\Delta_1 \quad D.5$$

Esta ecuación es equivalente a la ec. 3.14.

La demostración de la ec. D.4 se ve más adelante en este apéndice (ec. D.10).

A fin de demostrar la ec. 3.18 se parte de la ec. 3.15, o sea

$$y = \hat{y} + GFP - M - AB\Delta_1 - FBLP + FBLK\hat{y} + FBDB\Delta_1 \quad D.6$$

en que

$$M = GFK\hat{y}$$

$$L = H\Delta_2F$$

$$D = LH$$

B es una matriz diagonal, y P es un vector.

Si hacemos $B = \bar{B} + b$, $P = \bar{P} + p$ en que $E(b) = 0$, $E(p) = 0$,
 $\text{var}(B) = \text{var}(b)$, $\text{var}(P) = \text{var}(p)$. Sustituyendo estos valores se obtiene

$$y = \hat{y} + GF(\bar{P}+p) - M - A(\bar{B}+b)\Delta_1 - F(\bar{B}+b)L(\bar{P}+p) + F(\bar{B}+b)LK\hat{y} +$$

$$F(\bar{B}+b)D(\bar{B}+b)\Delta_1$$

$$y = \hat{y} + GF\bar{P} - M - A\bar{B}\Delta_1 - F\bar{B}L\bar{P} - F\bar{B}Lp - FbL\bar{P} - FbLp$$

$$+ F\bar{B}LK\hat{y} + F\bar{B}D\bar{B}\Delta_1 + F\bar{B}Db\Delta_1 + FbD\bar{B}\Delta_1 + FbDb\Delta_1$$

$$+ GFp - Ab\Delta_1 + FbLK\hat{y}$$

Sea

$$\Delta = \hat{y} + GF\bar{P} - M - A\bar{B}\Delta_1 - F\bar{B}L\bar{P} + F\bar{B}LK\hat{y} + F\bar{B}D\bar{B}\Delta_1$$

$$N = -A + F\bar{B}D \quad ; \quad T = D\bar{B}\Delta_1$$

$$C_1 = L(\bar{P} - K\hat{y})$$

Entonces

$$y = \Delta + Nb\Delta_1 - FbC_1 - \overline{FBL}p - FbLp + GFp + FbDb\Delta_1 + FbT$$

Si se desprecian los términos de segundo grado y se define

$$R = GF - \overline{FBL}, C = C_1 - T,$$

se obtiene

$$y = \Delta + NB\Delta_1 - FbC + Rp \quad D.7$$

En que J es un vector compuesto por términos iguales a uno.

La matriz de covarianzas se obtiene al sustituir la ec. D.7 en la siguiente expresión

$$\Sigma_y = E(y y^T) - E(y) E(y^T) \quad D.8$$

Esto es

$$E(y y^T) = E \{ (\Delta + Nb\Delta_1 - FbC + Rp) (\Delta^T + \Delta_1^T b N^T - C^T b F^T + p^T R^T) \}$$

$$E(y) E(y^T) = E \{ (\Delta + Nb\Delta_1 - FbC + Rp) \} \cdot E \{ \Delta + Nb\Delta_1 - FbC + Rp \}^T$$

De ahí resulta

$$\Sigma_Y = FE(bCC^T b)F - FE(bC\Delta_1^T b)N^T - NE(b\Delta_1 C^T b)F +$$

$$NE(b\Delta_1 \Delta_1^T b)N^T + RE(pp^T)R^T$$

D.9

El valor de $E(bSb)$, en que S representa una matriz cuadrada de valores conocidos, se encuentra con el siguiente algoritmo

sea $X = bSb = bY$, en que $Y = Sb$

$$Y_{ij} = \sum S_{ir} b_{rj}, \text{ pero } b_{rj} = \begin{cases} b_j, & \text{para } r = j \\ 0, & \text{para } r \neq j \end{cases}$$

$$\therefore Y_{ij} = S_{ij} b_j$$

$$X_{mn} = \sum b_{ms} Y_{sn} = b_m Y_{mn} = b_m S_{mn} b_n$$

así que $E(bSb)$ es una matriz, T , tal que

$$T_{mn} = S_{mn} E(b_m b_n) = S_{mn} (E(b_m)E(b_n) + \text{cov}(b_m, b_n))$$

D.10

A P E N D I C E E

REPRESENTACION BIDIMENSIONAL DE B

Para representar las variables β_1 y β_2 en forma bidimensional se hizo lo siguiente

De las ecs. 4.20 se sabe que

$$E(h_{\beta_1}) = 23.53 \quad , \quad \text{var } h_{\beta_1} = 108.54$$

$$E(h_{\beta_2}) = 2.22 \quad , \quad \text{var } h_{\beta_2} = 0.7017$$

O sea

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 23.53 & 0 \\ 0 & 2.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{11}\bar{h} & \eta_{12}\bar{h} \\ \eta_{21}\bar{h} & \eta_{22}\bar{h} \end{bmatrix} \quad \text{E.1}$$

Por lo tanto

$$|\bar{H}|^{\frac{1}{2}} = 7.23 = \bar{h}$$

De aquí que

$$v = \frac{1}{E(h)} = 0.14$$

De la ec. E.1 se obtiene

$$\eta = \begin{bmatrix} 23.53/7.23 & 0 \\ 0 & 2.22/7.23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.26 & 0 \\ 0 & 0.31 \end{bmatrix} \quad \text{E.2}$$

Obtención de var h

Las condiciones que se imponen para obtener la varianza de h, (var h), son

Dado que $h_{\beta} = \eta h$, entonces $\text{var } h_{\beta} = \eta^2 \text{ var } h$, por lo tanto

$$\text{var } h_{\beta_1} = \eta_{11}^2 \text{ var } h \quad \text{E.3}$$

$$\text{var } h_{\beta_2} = \eta_{22}^2 \text{ var } h \quad \text{E.4}$$

No es posible con una sola variable (var h) satisfacer simultáneamente las ecs. E.3 y E.4. Como una aproximación se obtendrá var h de manera que se satisfaga la suma de dichas ecuaciones.

$$\text{var } h_{\beta_1} + \text{var } h_{\beta_2} = (\eta_{11}^2 + \eta_{22}^2) \text{ var } h$$

Despejando y sustituyendo los correspondientes valores se obtiene

$$\text{var } h = \frac{\text{var } h_{\beta_1} + \text{var } h_{\beta_2}}{n_{11}^2 + n_{22}^2} = \frac{108.54 + 0.7017}{(3.26)^2 + (0.31)^2} = 10.19$$

Obtención de v

$$v = \frac{2}{(\text{var } h)v^2} = 10.01$$

Obtención de n

De las ecs. 4.20 se sabe que

$$\text{var}(\bar{\beta}_1) = 0.0035, \quad \text{var}(\bar{\beta}_2) = 0.0287$$

O sea

$$\Sigma_B = \begin{bmatrix} \text{var } \bar{\beta}_1 & \\ & \text{var } \bar{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0035 & \\ & 0.0287 \end{bmatrix}$$

Pero se conoce también la siguiente relación

$$\Sigma_{\bar{B}} = n^{-1} v \frac{v}{v-2}$$

Por lo tanto, despejando de esta última, se obtiene:

$$n = \begin{bmatrix} 48.57 & \\ & 5.293 \end{bmatrix}$$

A P E N D I C E F

OBTENCION DE LA EC. 6.6

Se parte de lo siguiente

$$\frac{\bar{R}}{\bar{S}} = e^{\beta} \sqrt{V_R^2 + V_S^2}$$

que puede aproximarse por

$$\frac{\bar{R}}{\bar{S}} = e^{\alpha_1 \beta V_R} e^{\alpha_2 \beta V_S}$$

por lo que

$$\frac{\bar{R}}{e^{\alpha_1 \beta V_R}} = \bar{S} e^{\alpha_2 \beta V_S}$$

Tomando el primer término se obtiene

$$\phi_{R^*} = \bar{R} e^{-\alpha_1 \beta V_R}$$

$$\bar{R} = \phi_R e^{\alpha_1 \beta V_R} \cdot R^*$$

A P E N D I C E . G

LISTA DE TABLAS

Tabla	Título
1	Valores de la resistencia última y del gradiente de la tangente inicial del módulo de la reacción del suelo normalizados, a diferentes profundidades en el sitio de interés
2	Propiedades del suelo en donde se encuentra hincado el pilote del ejemplo
3	Valores de β_1 y β_2 , obtenidos de pruebas hechas a escala natural (Refs 20, 24, 26, 35)
4	Valores normalizados de desplazamientos en la cabeza de pilotes obtenidos de pruebas hechas a escala natural (Ref 28)
5	Valores normalizados de desplazamientos en la cabeza de pilotes obtenidos de pruebas hechas a escala natural (Refs 31, 34)
6	Valores medios y desviaciones estándar de los coeficientes A_y y A_M , correspondientes a pilotes sometidos a cargas aleatorias

7 Valores medios y desviaciones estándar de los coeficientes F_y y F_M , correspondientes a pilotos sometidos a cargas aleatorias.

LISTA DE FIGURAS

Fig	Título
1	Modelo de Winkler
2	Distribución de presiones antes y después de la carga
3	Posible familia de curvas $p-y$
4	Reacción última del suelo vs profundidad (Holloway, G.L. <i>et al</i> , 1977)
5	Posible variación de E_i y p_u
6	Diagrama de bloques
7	Formas hipotéticas de la función $g()$ para diversos valores de β_1 y β_2
8	Ejemplo ilustrativo
9	Curva $p-y$ para arcilla blanda saturada (Matlock, 1970; Sullivan, 1977)
10	Mediciones carga-deformación en segmentos de pilotes verticales (Matlock y Ripperger, 1957)

- 11 Gradiente de la tangente inicial del módulo del suelo
 vs resistencia al corte

- 12 Diagramas esfuerzo-deformación correspondientes a prue-
 bas de compresión no confinada de arcillas blandas
 (Matlock y Ripperger, 1957)

- 13 Desplazamientos probabilistas del pilote del ejemplo

- 14 Momentos probabilistas del pilote del ejemplo

- 15 Coeficientes adimensionales probabilistas A_y , supo-
 niendo comportamiento no-lineal del suelo y carga de-
 terminista

- 16 Coeficientes adimensionales probabilistas A_M , supo-
 niendo comportamiento no-lineal del suelo y carga de-
 terminista

- 17 Coeficientes adimensionales probabilista F_y , supo-
 niendo comportamiento no-lineal del suelo y carga de-
 terminista

- 18 Coeficientes adimensionales probabilista F_M , supo-
 niendo comportamiento no-lineal del suelo y carga de-
 terminista

- 19 Coeficientes adimensionales probabilistas A_y , suponiendo comportamiento lineal del suelo y carga deterministas
- 20 Coeficientes adimensionales probabilistas A_M , suponiendo comportamiento lineal del suelo y carga deterministas
- 21 Coeficientes adimensionales probabilistas F_y , suponiendo comportamiento lineal del suelo y carga deterministas
- 22 Coeficientes adimensionales probabilistas F_M , suponiendo comportamiento lineal del suelo y carga deterministas
- 23 Probabilidades de excedencia anual de cortantes basales debidos a tormentas (Bea, 1974; 1977)
- 24 Momentos flexionantes probabilistas y deterministas para el pilote ubicado en el Mar del Norte (NS)
- 25 Influencia del nivel de carga en el coeficiente de variación del momento máximo