

0152

" PRESENTACION Y SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES  
DIFERENCIALES ADIMENSIONALES QUE DEFINEN LAS OSCI-  
LACIONES DE LA SUPERFICIE DEL AGUA EN CAMARAS PRO-  
DUCIDAS POR MANIOBRAS DE DEMANDA Y RECHAZO DE CAR-  
GA EN TURBINAS "

RENE AUTRIQUE RUIZ

Julio de 1982.

*Maestría Hidráulica*



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPA

T. UNAM  
1982  
AUT

## INDICE

- 00. RESUMEN
- 0. NOTACION
- 1. INTRODUCCION
- 2. DEDUCCION DE LAS ECUACIONES
- 3. SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES
- 4. RESULTADOS
- 5. APLICACION
- 6. CONCLUSIONES
- 7. REFERENCIAS

## 00. RESUMEN

Se presenta un método para calcular las oscilaciones del nivel del agua en cámaras de oscilación originadas por las maniobras de rechazo o demanda de carga de las turbinas.

Se emplean las variables normalizadas y las ecuaciones adimensionales propuestas por Calame y Gaden, aunque se deriva una nueva ecuación dinámica que permite formar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que resuelto numéricamente proporciona la velocidad y la elevación de la superficie del agua en la cámara a través del tiempo.

Se analizan maniobras de rechazo y demanda de carga, totales y parciales, instantáneas y lineales, para cámaras de oscilación simples y con restricción en su base, y localizadas aguas arriba o aguas abajo de la turbina.

Finalmente, se presentan algunas gráficas y tablas que pueden usarse en el diseño preliminar de cámaras de oscilación o en la predicción de las oscilaciones originadas por las maniobras.

0. NOTACION

- a Variable que define la localización de la cámara de oscilación
- $A_s$  Area transversal de la cámara de oscilación
- $A_T$  Area transversal de la galería de alimentación o del túnel de desfogue
- $A_d$  Area del orificio de restricción en la base de la cámara
- D Diámetro de la galería de alimentación o del túnel - de desfogue
- F Factor de fricción, igual a  $fL/2gD$
- $F_r$  Factor de fricción normalizado, igual a  $F_v v / z_*$
- $F_{r_0}$  Factor de fricción normalizado, correspondiente a  $v_0$
- f Coeficiente de fricción
- L Longitud de la galería de alimentación o del túnel de desfogue
- $n_1$  Proporción de carga inicial en la turbina
- $n_2$  Proporción de carga final en la turbina
- Q Gasto en la tubería de presión o en el tubo de aspiración
- $Q_0$  Gasto máximo en la tubería de presión o en el tubo de aspiración
- $Q_1$  Gasto correspondiente a la carga inicial en la turbina
- $Q_2$  Gasto correspondiente a la carga final en la turbina
- R Factor de pérdidas por estrangulamiento en la entrada de la cámara, igual a  $\frac{1}{2g} \left( \frac{A_s}{A_d} - 1 \right)^2$
- r Factor de pérdidas por estrangulamiento normalizado, igual a  $Ru u / z_*$
- $r_0$  Factor de pérdidas por estrangulamiento normalizado, correspondiente a  $u_0$

t	Tiempo	3
$t_r$	Tiempo normalizado	
T	Período de las oscilaciones en la cámara para fricción nula	
u	Velocidad del agua en la cámara	
$u_0$	Velocidad del agua en la cámara, correspondiente al -- gasto $Q_0$	
$u_r$	Velocidad normalizada del agua en la cámara	
v	Velocidad del agua en la galería o en el túnel de des- fogue	
$v_0$	Velocidad del agua en la galería o en el túnel de des- fogue, correspondiente al gasto $Q_0$	
$v_r$	Velocidad normalizada del agua en la galería o en el - túnel de desfogue	
w	Velocidad del agua en la tubería de presión o en el tu- bo de aspiración	
$w_0$	Velocidad del agua en la tubería de presión o en el tu- bo de aspiración, correspondiente al gasto $Q_0$	
$w_r$	Velocidad normalizada del agua en la tubería de presión o en el tubo de aspiración	
z	Elevación del nivel del agua en la cámara de oscilación, medida a partir del nivel correspondiente al gasto nulo	
$z_r$	Elevación normalizada del nivel del agua en la cámara de oscilación	
$z_*$	Semiampplitud de las oscilaciones en la cámara para -- fricción nula	
$\theta$	Tiempo de maniobra normalizado	
$\tau$	Tiempo de maniobra	

Los sistemas hidroeléctricos tradicionales pueden, para los fines de este trabajo, considerarse compuestos por los elementos siguientes <sup>5</sup> (figura 1) :

1. Un gran almacenamiento de agua en el extremo aguas arriba.
2. Un túnel o galería de admisión.
3. Una cámara de oscilación, situada en la frontera entre el túnel y la tubería de presión.
4. Una tubería de presión.
5. Una turbina.
6. Un tubo de aspiración, que comunica a la turbina con el río.

Ahora bien, la mayoría de los grandes sistemas hidroeléctricos en México no siguen el arreglo tradicional, pues en ellos la cámara de oscilación se encuentra situada aguas abajo de la turbina, entre el tubo de aspiración y el túnel de desfogue <sup>5</sup> (figura 2).

Las plantas hidroeléctricas participan generalmente en sistemas eléctricos mayores que deben generar energía siguiendo curvas de demanda. Los cambios en la demanda de potencia se satisfacen regulando el gasto de entrada a la turbina, abriendo o cerrando los álabes móviles del distribuidor. Si los mecanismos de regulación son eficientes, podremos considerar que a una variación porcentual del gasto de admisión a la turbina corresponderá una variación porcentual igual en la potencia entregada por ella, y viceversa.



Los movimientos del distribuidor para ajustar la potencia entregada a la demandada se conocen como maniobras de demanda o de rechazo de carga. Al realizarse originan ondas positivas o negativas de presión, dependiendo del sentido de la maniobra, que a su vez se traducen en oscilaciones de la superficie del agua en las cámaras de oscilación. Estas, ubicadas aguas arriba o aguas abajo de la turbina, protegen la galería de alimentación o el túnel de desfogue contra presiones excesivas o separación de columna, limitando las fluctuaciones de la presión a la tubería comprendida entre la propia cámara y la turbina.

Las ecuaciones que rigen las oscilaciones del agua en la cámara, cuando ésta se encuentra aguas arriba de la turbina, son:

$$A_T v = A_S \frac{dz}{dt} + Q \quad (1)$$

$$\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} + z + Fv|v| + R \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| = 0 \quad (2)$$

La primera se conoce como ecuación de continuidad, y la segunda como ecuación dinámica. Su deducción <sup>1</sup> se hace partiendo de los siguientes supuestos:

- a. Tanto el agua como el material de la galería de alimentación son incompresibles
- b. La carga de velocidad  $v^2/2g$  es despreciable
- c. La expresión para calcular la resistencia debida a la fricción en régimen establecido es válida también para régimen transitorio
- d. La masa del agua en la cámara de oscilación es despreciable comparada con la masa del agua en la galería
- e. La altura de la cámara es despreciable comparada con la

longitud de la galería

En caso de que la cámara se encuentre aguas abajo de la turbina, algunos términos de las ecuaciones (1) y (2) cambiarán de signo. Para contar con un par de ecuaciones que puedan emplearse para cualquier localización de la cámara, introduciremos el parámetro  $a$ , que valdrá +1 para cámaras aguas arriba y -1 para cámaras aguas abajo. Las ecuaciones de continuidad y dinámica quedarán entonces:

$$A_T v = a A_S \frac{dz}{dt} + Q \quad (3)$$

$$\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} + az + Fv|v| + aR \left. \frac{dz}{dt} \right| \frac{dz}{dt} = 0 \quad (4)$$

Estas ecuaciones han sido resueltas mediante esquemas de diferencias finitas propuestas por diversos autores <sup>1</sup> - (Pressel, Schoklitsch, Escande), aunque esta solución sólo es válida para cámaras y sistemas hidroeléctricos particulares.

Para tener aplicación general, las ecuaciones (3) y (4) deberán normalizarse. El propósito de este trabajo es proponer una manera de resolver las ecuaciones normalizadas de las cámaras de oscilación en casos de demanda o rechazo de carga, que permitan resolver tanto problemas particulares como obtener resultados o gráficas que permitan estudiar el funcionamiento general de las cámaras de oscilación en instalaciones hidroeléctricas.

## 2. DEDUCCION DE LAS ECUACIONES ADIMENSIONALES

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias del capítulo anterior ha sido transformado por algunos autores <sup>1</sup> - en un sistema en términos de variables normalizadas, con varios fines:

1. Encontrar expresiones integrables analíticamente en algunos casos, gráficamente en otros.
2. Reducir el número de variables en las ecuaciones.
3. Obtener gráficas, en términos de parámetros adimensionales, que puedan emplearse para cualquier cámara.
4. Tratar de establecer una teoría general de las cámaras de oscilación.

Expondremos aquí la deducción de las ecuaciones adimensionales propuestas por Calame y Gaden <sup>1</sup>, pues sus variables normalizadas y algunas de sus ecuaciones serán el punto de partida del sistema de ecuaciones que propondremos más adelante.

Introduciendo los parámetros

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_S}{A_T}}$$

$$y \quad z_* = v_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_T}{A_S}} = w_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_S}{A_T}}$$

que son respectivamente el período y la semiamplitud de la oscilación para un sistema sin fricción o no amortiguado, y definiendo

$$u = \frac{dz}{dt} ; \quad w = \frac{Q}{A_S} ; \quad w_0 = \frac{Q_0}{A_S} ; \quad v_0 = \frac{Q_0}{A_T} ; \quad u_0 = \frac{Q_0}{A_S} = w_0$$

podremos trabajar con las relaciones

$$z_r = \frac{z}{z_*} ; F_r = \frac{Fv |v|}{z_*} ; v_r = \frac{v}{v_0} ; u_r = \frac{u}{u_0} ; w_r = \frac{w}{w_0}$$

$$t_r = \frac{t}{T} \quad r = \frac{Ru |u|}{z_*}$$

Dividiendo ahora la ecuación (3) entre  $Q_0$ , y sustituyendo  $\frac{dz}{dt}$  por  $u$ ,

$$\frac{v A_T}{Q_0} = \frac{a A_S u}{Q_0} + \frac{Q}{Q_0} \quad (5)$$

$$\frac{v}{v_0} = a \frac{u}{u_0} + \frac{w}{w_0}$$

llegamos a la forma adimensional de la ecuación de continuidad

$$v_r = a u_r + w_r \quad (6)$$

Nuevamente, de (3),

$$v = a \frac{A_S}{A_T} u + \frac{A_S}{A_T} \frac{Q}{A_S}$$

$$\frac{dv}{dt} = a \frac{A_S}{A_T} \frac{du}{dt} + \frac{A_S}{A_T} \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = a \frac{A_S}{A_T} \frac{du}{dz} \frac{dz}{dt} + \frac{A_S}{A_T} \frac{dw}{dt}$$

Sustituyendo en (4),

$$a \frac{L A_S}{g A_T} u \frac{du}{dz} + \frac{L A_S}{g A_T} \frac{dw}{dt} + az + Fv|v| + aRu|u| = 0$$

Como  $\frac{L A_S}{g A_T} = \frac{z_*^2}{w_0^2} = \frac{T^2}{4\pi^2}$ , sustituyendo en la expresión anterior,

$$a \frac{z_*^2}{w_0^2} u \frac{du}{dz} + \frac{z_*}{w_0} \frac{T}{2\pi} \frac{dw}{dt} + az + Fv|v| + aRu|u| = 0$$

Dividiendo entre  $z_*$ ,

$$a \frac{z_*}{w_0^2} u \frac{du}{dz} + \frac{1}{w_0} \frac{T}{2\pi} \frac{dw}{dt} + a \frac{z}{z_*} + \frac{Fv|v|}{z_*} + a \frac{Ru|u|}{z_*} = 0$$

$$a \frac{u}{w_0} \frac{du}{\frac{dz}{z_*}} + \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{dw}{w_0}}{\frac{dt}{T}} + a \frac{z}{z_*} + \frac{Fv|v|}{z_*} + a \frac{Ru|u|}{z_*} = 0$$

Recordando que  $u_0 = w_0$ , podremos escribir finalmente -  
la ecuación dinámica en forma adimensional:

$$a u_r \frac{du_r}{dz_r} + \frac{1}{2\pi} \frac{dw_r}{dt_r} + az_r + F_r + ar = 0$$

o bien

$$u_r \frac{du_r}{dz_r} + \frac{a}{2\pi} \frac{dw_r}{dt_r} + z_r + aF_r + r = 0 \quad (7)$$

pues  $|a| = 1$  y lo que interesa es su signo.

Si además definimos

$$F_{r_0} = \frac{Fv_0 |v_0|}{z_*} = \frac{F_r}{v_r |v_r|}$$

$$y. \quad r_0 = \frac{Ru_0 |u_0|}{z_*} = \frac{r}{u_r |u_r|}$$

la ecuación (7) podrá escribirse

$$u_r \frac{du_r}{dz_r} + \frac{a}{2\pi} \frac{dw_r}{dt_r} + z_r + aF_{r_0} v_r |v_r| + r_0 u_r |u_r| = 0 \quad (8)$$

Esta ecuación adimensional permite resolver analíticamente el caso particular del rechazo de carga instantáneo. Analizaremos este caso y dos más, para ver el tipo de ecuaciones a que conducen. Supondremos que la cámara se encuentra aguas arriba de la turbina, es decir, que  $a = 1$ .

#### a. Rechazo total de carga instantáneo

Si la maniobra es instantánea y se realiza en el tiempo  $t = 0$ , tendremos, para  $t_r \geq 0$ ,

$$Q = 0; \quad w = 0; \quad w_r = 0; \quad \frac{dw_r}{dt_r} = 0$$

convirtiéndose las ecuaciones (6) y (8) en

$$v_r = u_r \quad y$$

$$u_r \frac{du_r}{dz_r} + z_r \pm (F_{r_0} + r_0) u_r^2 = 0 \quad *$$

\* Por comodidad en la solución de las ecuaciones, trabajaremos ahora con  $u_r^2$  en lugar de  $u_r |u_r|$ . El signo del término en  $u_r^2$  será  $u_r$  positivo para  $u_r > 0$  y negativo para  $u_r < 0$ .

Definiremos  $m_0 = F_{r_0} + r_0$ . Como  $x \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2)$ ,

la ecuación anterior puede escribirse

$$\frac{d}{dz_r} (u_r^2) + 2z_r \pm 2m_0 (u_r^2) = 0 \quad (9)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, que puede integrarse analíticamente si se multiplica por el factor integrante  $e^{\pm 2m_0 z_r}$ :

$$e^{\pm 2m_0 z_r} \left[ \frac{d}{dz_r} (u_r^2) \pm 2m_0 (u_r^2) \right] = -2z_r e^{\pm 2m_0 z_r}$$

$$\frac{d}{dz_r} \left[ e^{\pm 2m_0 z_r} (u_r^2) \right] = -2z_r e^{\pm 2m_0 z_r}$$

Integrando,

$$e^{\pm 2m_0 z_r} (u_r^2) = \int -2z_r e^{\pm 2m_0 z_r} dz_r \quad (10)$$

La integral  $-\int 2z_r e^{\pm 2m_0 z_r} dz_r$  puede escribirse también como

$$-\frac{1}{2m_0^2} \int \pm 2m_0 z_r e^{\pm 2m_0 z_r} d(\pm 2m_0 z_r)$$

La integral anterior es del tipo  $\int x e^x dx$ , cuya solución, obtenida mediante integración por partes, es

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + c, \text{ por lo que}$$

$$- \int 2z_r e^{2m_0 z_r} dz_r = - \frac{1}{2m_0^2} \left[ \pm 2m_0 z_r e^{+2m_0 z_r} - e^{+2m_0 z_r} + c \right]$$

Sustituyendo en la expresión (10), y dividiendo entre  $e^{-2m_0 z_r}$ , obtendremos la solución general de la ecuación (9)

$$u_r^2 = - \frac{1}{2m_0^2} \left[ +2m_0 z_r - 1 + ce^{+2m_0 z_r} \right]$$

$$u_r^2 = \frac{1}{2m_0^2} \left[ \frac{z_r}{m_0} + Ae^{+2m_0 z_r} \right] \quad (11)$$

donde A es una constante de integración que depende de las condiciones iniciales. Para un rechazo de carga total instantáneo, estas serán

$$t = 0 ; \quad t_r = 0$$

$$z = -Fv_0^2 ; \quad z_r(0) = -Fr_0$$

$$v = v_0 ; \quad v_r(0) = 1$$

y, de la ecuación de continuidad,  $u_r(0) = 1$ .

Sustituyendo en (11) y tomando el signo superior, obtendremos el valor de la constante para el ascenso máximo

$$A = \left[ 1 - \frac{1}{2m_0^2} - \frac{Fr_0}{m_0} \right] e^{-2m_0 Fr_0} \quad (12)$$

mismo que, sustituido nuevamente en (11)

$$u_r^2 = \frac{1}{2m_0^2} \left[ 1 - 2m_0 z_r + (2m_0^2 - 1 - 2m_0 Fr_0) e^{-2m_0(z_r + Fr_0)} \right] \quad (13)$$



El ascenso máximo se presentará cuando  $\frac{dz_r}{dt_r} = u_r = 0$ , es

decir cuando

$$1 - 2m_0 z_{r \max} + (2m_0^2 - 1 - 2m_0 F_{r0}) e^{-2m_0 (z_{r \max} + F_{r0})} = 0 \quad (14)$$

b. Demanda de carga total instantánea

Si la maniobra es instantánea y se realiza en el tiempo -

$t = 0$ ,

$$Q = Q_0; \quad w = \frac{Q_0}{A_s}; \quad w_r = 1; \quad \frac{dw_r}{dt_r} = 0$$

La ecuación (6) se convierte en

$$v_r = u_r + 1$$

y la ecuación (8) en

$$u_r \frac{du_r}{dz_r} + z_r + F_{r0} (u_r + 1)^2 + r_0 u_r^2 = 0 \quad (15)$$

A diferencia del caso anterior, la ecuación (15) no tiene solución analítica exacta.

c. Demanda de carga total lineal

Si el tiempo de apertura es  $\tau = \theta T$ , durante la maniobra, que supondremos lineal,

$$Q = Q_0 \frac{t}{\tau}; \quad w_r = \frac{Q}{Q_0} = \frac{t_r}{\theta}; \quad \frac{dw_r}{dt_r} = \frac{1}{\theta}$$

La ecuación de continuidad se convierte en

$$v_r = u_r + \frac{t_r}{\theta}$$

y la ecuación dinámica en

$$u_r \frac{du_r}{dz_r} + \frac{1}{2\pi\theta} + z_r \pm F_{r_0} \left(u_r + \frac{t_r}{\theta}\right)^2 \pm r_0 u_r^2 = 0 \quad (16)$$

que tampoco es integrable analíticamente, y en la que además aparece otra variable, el tiempo normalizado  $t_r$ .

Hasta aquí la presentación de las ecuaciones adimensionales de Calame y Gaden. Como podemos ver, la ecuación (8) sólo es integrable en el caso particular del rechazo de carga total instantáneo. La expresión (11), solución de la ecuación (8) para este caso particular, permite calcular los picos de la oscilación y da origen a la conocida gráfica de Calame y Gaden (figura 3). La curva del primer pico se calcula directamente de la ecuación (14). Para los picos sucesivos es necesario recalcularse la constante A de la ecuación (11) con los valores de las variables en el pico anterior como condiciones iniciales.

Para maniobras parciales, maniobras no instantáneas y maniobras de demanda de carga, la ecuación (8) no tiene solución analítica exacta, y debe integrarse numérica o gráficamente. Los mismos Calame y Gaden propusieron un método gráfico que les permitió obtener tanto la gráfica de la figura 4, correspondiente a la figura 3, pero para demanda de carga total instantánea, como las gráficas de las figuras 5 a 10<sup>2</sup>; correspondientes a maniobras instantáneas totales o parciales tanto de rechazo como de demanda de carga, para cámaras de oscilación con restricción en su base.

La integración - sea analítica, numérica o gráfica - de la ecuación (8) es independiente del tiempo. Las curvas  $u_r$  contra  $z_r$  son espirales que parten del punto  $A(z_r(0), u_r(0))$  y se cierran hacia el punto  $B(z_r \text{ final}, 0)$ . Las intersecciones de la espiral con el eje  $z_r$  representan los picos de la oscilación (figuras 11 y 12).

Cuando la ecuación (8) es integrable analíticamente, puede también obtenerse, mediante la ecuación

$$\frac{dz_r}{dt_r} = 2\pi u_r \quad (17)$$

fácilmente derivable de las expresiones que definen a  $u$ ,  $z_*$  y  $T$ , la variación de  $z_r$  con respecto al tiempo normalizado <sup>6</sup> (figura 13).

En los casos en que la ecuación no sea integrable analíticamente, la gráfica de las oscilaciones normalizadas no podrá obtenerse. Para ello requerimos de un sistema como el formado por las ecuaciones (3) y (4), es decir, con una sola variable independiente.

Partiendo de las mismas ecuaciones (3) y (4), podemos derivar otra ecuación dinámica con variables normalizadas. Así, de (3),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{A_s}{A_T} \frac{dw}{dt} + a \frac{A_s}{A_T} \frac{du}{dt}$$

que, sustituida en (4), normalizando y acomodando términos

$$\frac{L}{g} \frac{A_s}{A_T} \frac{dw}{dt} + a \frac{L}{g} \frac{A_s}{A_T} \frac{du}{dt} + az + Fv|v| + aRu|u| = 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{dw_r}{dt_r} + a \frac{du_r}{dt_r} \right] + az_r + F_{r_0} v_r |v_r| + ar_0 u_r |u_r| = 0$$

$$\frac{du_r}{dt_r} = -a \frac{dw_r}{dt_r} - 2\pi a \left[ az_r + F_{r_0} v_r |v_r| + ar_0 u_r |u_r| \right] \quad (18)$$

Esta nueva ecuación dinámica adimensional, más la ecuación (17), formarán un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que podrán resolverse simultáneamente.

Aparentemente el sistema contiene cuatro incógnitas ( $u_r$ ,  $w_r$ ,  $v_r$  y  $z_r$ ) y sólo dos ecuaciones. Sin embargo, como veremos, la derivada de  $w_r$  con respecto a  $t_r$  será siempre una constante, y  $v_r$  podrá sustituirse en términos de  $u_r$  mediante la ecuación de continuidad:

$$v_r = a u_r + w_r \quad (6)$$

Las maniobras que pueden presentarse durante la operación de una planta hidroeléctrica pueden agruparse de distintas maneras. Si atendemos a la variación en el tiempo del gasto de admisión a la turbina, podremos clasificar las maniobras en maniobras de rechazo de carga, en las cuales el gasto de admisión se reduce, y maniobras de demanda de carga, en las cuales el gasto de admisión crece.

Si consideramos los límites entre los cuales varía el gasto de admisión, podremos hablar de maniobras totales y maniobras parciales. En las primeras, el gasto variará entre un 0 y un 100 por ciento de su valor de diseño, o viceversa. En las maniobras parciales, la variación podrá presentarse entre valores porcentuales cualesquiera del gasto de diseño.

Si en cambio tomamos en cuenta el tiempo necesario para realizar las maniobras, podremos clasificarlas en maniobras instantáneas y maniobras lineales. En general, el tiempo de maniobras, definido generalmente por el período de las variaciones de la presión,  $4 L/a$ , es muy pequeño comparado con el período de las oscilaciones en el tanque, por lo que las maniobras pueden considerarse instantáneas. Sin embargo, convendrá considerar también el caso eventual de maniobras no instantáneas, que supondremos lineales; es decir, que el gasto de admisión a la turbina aumentará o disminuirá linealmente entre sus límites durante el tiempo de maniobra.

Con esta clasificación podemos abarcar las distintas clases de maniobras que pueden presentarse:

1. Rechazo total instantáneo
2. Rechazo total lineal
3. Rechazo parcial instantáneo
4. Rechazo parcial lineal
5. Demanda total instantánea
6. Demanda total lineal
7. Demanda parcial instantánea
8. Demanda parcial lineal

En lo que respecta a la cámara de oscilación, cabría hacer dos clasificaciones. La primera, respecto a su localización aguas arriba o aguas abajo de la turbina, y la segunda, - respecto a la presencia o ausencia de restricciones en su base. El tipo y ubicación relativa de la cámara no tendrán que ver con el tipo de maniobra, aunque si afectarán las oscilaciones.

Deduciremos ahora las ecuaciones que permiten calcular las oscilaciones producidas en las cámaras por los distintos tipos de maniobras, y que tengan en cuenta además la localización relativa de la cámara y el grado de estrangulamiento en su base.

Para ello es necesario introducir algunos nuevos parámetros:

$$n_1 = \frac{Q_1}{Q_0} = \text{proporción de carga inicial}$$

$$n_2 = \frac{Q_2}{Q_0} = \text{proporción de carga final}$$

$$\tau = \text{tiempo de maniobra}$$

$$\theta = \frac{\tau}{T} = \text{tiempo de maniobra adimensional}$$

$$\begin{aligned} \text{debiéndose cumplir} \quad & \theta \geq 0 \\ & 0 \leq n_1 \leq 1 \\ & 0 \leq n_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Para maniobras de demanda de carga,  $n_2 > n_1$ , y para maniobras de rechazo de carga,  $n_1 > n_2$ .

Obtendremos dos ecuaciones dinámicas generales: una para -- maniobras instantáneas y otra para maniobras lineales.

### 1. Maniobras Instantáneas

En ellas  $w_r$ , el gasto normalizado en la tubería de presión o en el tubo de aspiración, es constante y vale  $n_2$  a partir del tiempo cero. Por tanto, para  $t_r^- \geq 0$ ,

$$w_r = n_2$$

$$\frac{dw_r}{dt_r} = 0$$

y la ecuación de continuidad se convierte en

$$v_r = au_r + n_2$$

Sustituyendo el valor de  $v_r$  en la ecuación dinámica, obtenemos

$$\frac{du_r}{dt_r} = -2\pi a \left[ az_r + F_{r0} (au_r + n_2) |au_r + n_2| + ar_0 u_r |u_r| \right] \quad (19)$$

que junto con la ecuación

$$\frac{dz_r}{dt_r} = 2\pi u_r \quad (17)$$

formarán el sistema de ecuaciones diferenciales cuya solución nos dará la evolución de  $u_r$  y  $z_r$  en el transcurso de  $t_r$ .

Las condiciones iniciales serán

$$z_r(0) = -aF_{r_0} n_1^2$$

$$v_r(0) = n_1$$

y, de la ecuación de continuidad

$$u_r(0) = a(n_1 - n_2)$$

recordando que el valor absoluto de  $a$  es 1 y que lo que interesa es su signo.

## 2. Maniobras Lineales

A diferencia de las maniobras instantáneas, en las que  $w_r$  era constante durante el fenómeno oscilatorio, en las maniobras lineales  $w_r$  tendrá un valor al principio de la maniobra y un valor diferente al final de ella, manteniéndose constante en ese valor a partir de ese momento.

Como la variación de  $w_r$  es lineal,

$$w_r = n_1 + (n_2 - n_1) \frac{t_r}{\theta}$$

$$\frac{dw_r}{dt_r} = \frac{n_2 - n_1}{\theta}$$

y la ecuación de continuidad se convierte en

$$v_r = au_r + n_1 + (n_2 - n_1) \frac{t_r}{\theta}$$

Sustituyendo el valor de  $v_r$  en la ecuación dinámica,

$$\frac{du_r}{dt_r} = a \frac{n_1 - n_2}{\theta} - 2\pi a \left[ az_r + F_{r_0} p|p| + ar_0 u_r |u_r| \right] \quad (20)$$

donde  $p = au_r + n_1 + (n_2 - n_1) \frac{t_r}{\theta}$

La ecuación (20), resuelta de nuevo simultáneamente con la ecuación

$$\frac{dz_r}{dt_r} = 2\pi u_r \quad (17)$$

nos dará los valores buscados de  $u_r$  y de  $z_r$  para  $0 \leq t_r < \theta$ .

Las condiciones iniciales a que estarían sujetas estas ecuaciones serían

$$z_r(0) = -aF_{r_0} n_1^2$$

$$v_r(0) = n_1$$

y, de la ecuación de continuidad,

$$u_r(0) = 0$$

Debemos resaltar que la ecuación (20) sólo es válida para  $0 \leq t_r < \theta$ . Para  $t_r \geq \theta$ , deberá usarse la ecuación (19), cuyas condiciones iniciales serán los valores de las variables al final de la maniobra.

Las ecuaciones (19) y (20) son válidas para cualquier tipo de maniobra. En la tabla 1 se muestran los valores de los parámetros y de las condiciones iniciales para distintos tipos de maniobra.



### 3. SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES

El sistema formado por la ecuación

$$\frac{dz_r}{dt_r} = 2\pi u_r \quad (17)$$

y la ecuación

$$\frac{du_r}{dt_r} = a \frac{n_1 - n_2}{\theta} - 2\pi a \left[ az_r + F_{r_0} p |p| + ar_0 u_r |u_r| \right] \quad (20)$$

$$\text{donde } p = au_r + n_1 + (n_2 - n_1) \frac{t_r}{\theta}$$

para  $t_r < \theta$ , o la ecuación

$$\frac{du_r}{dt_r} = -2\pi a \left[ az_r + F_{r_0} (au_r + n_2) |au_r + n_2| + ar_0 u_r |u_r| \right] \quad (19)$$

para  $t_r \geq \theta$ , constituye un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que cae dentro de los llamados problemas de valores iniciales, en los cuales es necesario conocer algún valor de las variables dependientes para algún valor de la variable independiente, y a partir de él calcular la curva que define la función que nos interesa. Los valores iniciales fueron calculados en el capítulo anterior y son,

$$\begin{aligned} z_r(0) &= -aF_{r_0} n_1^2 & y \\ u_r(0) &= a(n_1 - n_2) \text{ si } \theta = 0, \text{ o bien} \\ u_r(0) &= 0 \text{ si } \theta > 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones se resolvieron con el método predictor-corrector de Milne-Hamming de cuarto orden, empleando el método de Runge-Kutta también de cuarto orden para calcular los puntos iniciales 3, 4. El programa de cálculo aparece en el Apéndice 1.

#### 4. RESULTADOS

Se analizaron con el programa del Apéndice 1 las distintas maniobras señaladas en el capítulo 2. Algunos resultados aparecen tabulados en el Apéndice 2 o graficados en las figuras 14 a 17.

En los casos de rechazo y demanda de carga totales (tablas 8 y 9, Apéndice 2), los resultados corresponden con los publicados originalmente por Calame y Gaden (figuras 3 y 4). Algunos casos de demanda parcial, analizados por estos mismos autores, para distintos valores tanto de  $F_{r0}$  como del grado de estrangulamiento  $r_0$ , también pueden encontrarse en la literatura <sup>2</sup> (figuras 6 a 10), aunque sólo proporcionan información del primer pico de la oscilación. En este trabajo, estos mismos resultados se presentan de distinta manera, añadiendo la información relativa al segundo pico (figura 17) y al tercero (tabla 14, Apéndice 2).

Para el caso de las maniobras lineales, Calame y Gaden presentaron también una tabla <sup>1</sup> en la que aparece, para distintos valores de  $\theta$ , la relación entre la oscilación correspondiente a una maniobra lineal y la correspondiente a una maniobra instantánea (tabla 2). Podemos obtener -- tablas semejantes para el segundo pico, y para maniobras de demanda de carga (tablas 3 a 6).

Cuando la cámara de oscilación se encuentre aguas abajo de la turbina, las oscilaciones resultarán idénticas, aunque de signo contrario, a las correspondientes a la misma maniobra pero con la cámara situada aguas arriba de la -- turbina. Así, si para una maniobra de rechazo de carga -- del 100 al 60%, con un coeficiente de estrangulamiento de 0.2 y  $F_{r0} = 0.4$  ( $z_r(0) = -F_{r0} n_1^2 = -0.144$ ), los primeros picos de la oscilación para un tanque aguas arriba son:

$z_{rm1} = 0.061$  y  $z_{rm2} = -0.242$  ; para un tanque aguas abajo ( $z_r(0) = 0.144$ ), éstos serán  $z_{rm1} = -0.061$  y  $z_{rm2} = 0.242$ , (Tabla 15, Apéndice 2). Las gráficas y tablas presentadas pueden así emplearse para cualquier localización relativa de la cámara de oscilación.

Un aumento del parámetro  $F_{r0}$  reduce la magnitud del primer pico en casos de rechazo de carga, pero la aumenta ligeramente en casos de demanda de carga. El período de las oscilaciones también aumenta con  $F_{r0}$ .

El coeficiente de restricción  $r_0$  en la base de la cámara reduce las oscilaciones en cualquier maniobra, aunque su efecto se hace menos notorio a medida que crece  $F_{r0}$ . Lo mismo sucede con  $\theta$ , el tiempo normalizado de maniobra, aunque los tiempos de maniobra muy rara vez llegan a ser del orden del 10% del período de la cámara. Y, como puede inferirse de la figura 15, para un valor de  $\theta = 0.1$  prácticamente no habrá cambios en la magnitud relativa de las oscilaciones. El período de éstas crecerá con  $\theta$ , y de manera más notable para valores altos de  $F_{r0}$ .

El punto de partida y el punto en el cual la oscilación terminará estarán controlados por los porcentajes de carga entre los cuales se realiza la maniobra: el punto inicial será  $z_r = -aF_{r0} n_1^2$  y el punto final  $z_r = -aF_{r0} n_2^2$ .

Los períodos de las oscilaciones en maniobras parciales de rechazo serán mayores que los correspondientes a maniobras totales, creciendo inversamente con la diferencia entre los porcentajes inicial y final de carga, aunque esta diferencia será imperceptible para valores pequeños de  $F_{r0}$ , que son los que generalmente se presentan (comparar las tablas 9 y 12, Apéndice 2). En maniobras de demanda, en cambio, el período crecerá con la diferencia entre los porcentajes inicial y final de carga.

5. APLICACION

Supondremos una instalación hidroeléctrica cuya cámara de oscilación situada aguas abajo de la turbina, tiene un área transversal de  $122.10 \text{ m}^2$ , y está restringida en su base mediante un orificio de 4 m de diámetro. La longitud del túnel de desfogue es de 1300 m, siendo su área  $34.85 \text{ m}^2$  y su diámetro 6.66m. El gasto correspondiente a la plena carga es de  $69.70 \text{ m}^3/\text{seg}$ . Calcularemos las oscilaciones que produciría una maniobra de demanda del 0 al 80% de la carga, realizada en 7 segundos.

Los parámetros necesarios son  $F_{rO}$ ,  $r_O$ ,  $\theta$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  y  $a$ :

$$v_O = \frac{Q_O}{A_T} = 2 \text{ m/seg} \quad ; \quad z_* = v_O \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_T}{A_S}} = 12.30 \text{ m}$$

$$R = \frac{1}{2g} \left[ \frac{A_S}{A_d} - 1 \right]^2 = 3.87 \quad ; \quad u_O = \frac{Q_O}{A_S} = 0.57 \text{ m/seg}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A_S}{A_T}} = 135.39 \text{ seg}$$

$$F_{rO} = \frac{f L v_O^2}{2g D z_*} = 0.065 \quad ; \quad r_O = \frac{R u_O^2}{z_*} = 0.103 \quad ; \quad \theta = \frac{\tau}{T} = 0.052$$

$$n_1 = 0 \quad ; \quad n_2 = 0.80 \quad ; \quad a = -1$$

Las oscilaciones normalizadas aparecen en la tabla 7 y en la figura 18.

## 6. CONCLUSIONES

Se presentaron un par de ecuaciones diferenciales en términos de las variables normalizadas propuestas por Calame y Gaden, que permiten calcular numéricamente las oscilaciones en cámaras resultantes de maniobras de demanda o rechazo de carga en la turbina. La solución es general, pues representa el comportamiento de una multitud de cámaras con parámetros idénticos.

Las ecuaciones abarcan tanto cámaras simples como cámaras con restricción en su base, situadas aguas arriba o aguas abajo de la turbina, y las distintas clases de maniobras que pueden presentarse durante la operación de una planta hidroeléctrica, sean estas totales o parciales, instantáneas o lineales.

En el caso más general, las oscilaciones en la cámara dependerán de cinco parámetros: el parámetro de fricción,  $F_{r_0}$ ; el coeficiente de restricción en la base de la cámara,  $r_0$ ; el tiempo de cierre adimensional,  $\theta$ ; y las proporciones inicial y final de carga,  $n_1$  y  $n_2$ .

En casos particulares, como por ejemplo una maniobra total instantánea, las oscilaciones dependerán únicamente de dos parámetros,  $F_{r_0}$  y  $r_0$ , o bien, si se trata de una cámara simple, de uno solo,  $F_{r_0}$ .

7. REFERENCIAS

1. Jaeger, Charles. Fluid Transients in Hydro-Electric Engineering Practice. Blackie, Londres, 1977.
2. Rich, George. Hydraulic Transients. 2a. edición. Dover, Nueva York, 1963.
3. Carnahan, Brice; Luther, H. A.; Wilkes, James O. --- Applied Numerical Methods. John Wiley and Sons, 1969.
4. Hornbeck, Robert W. Numerical Methods. Quantum Publishers, Nueva York, 1975.
5. Sánchez Bribiesca, José Luis. Aspectos Hidromecánicos de Plantas Hidroeléctricas. CFE, Publicación 22, - México, 1981.
6. Berezowsky, Moisés y Aparicio, Francisco Javier. -- "Presentación Adimensional de las Oscilaciones en Cámaras de Oscilación Simples y con Orificio". Memorias, IV Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, -- Durango, México, 1981.

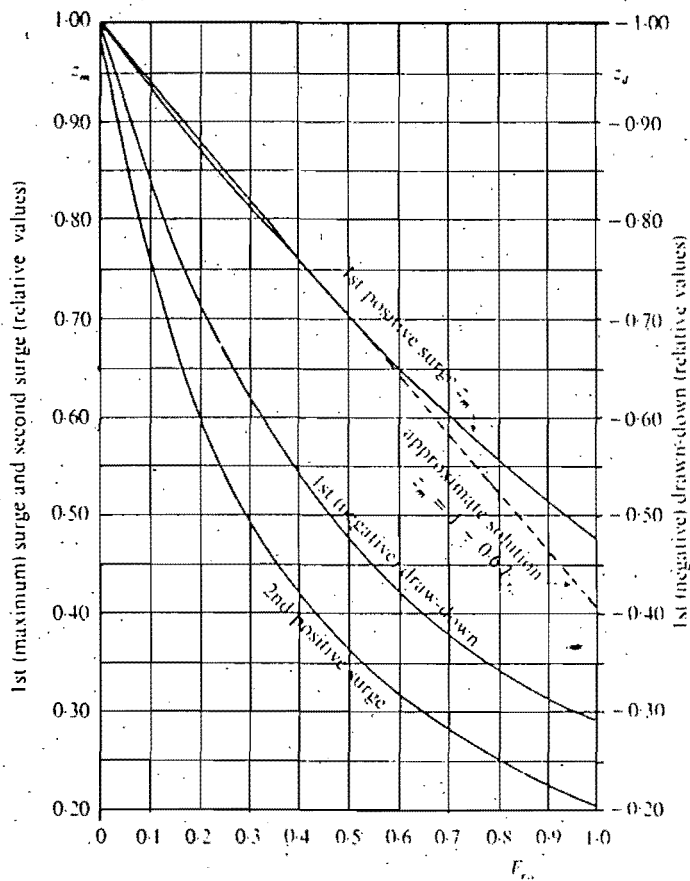


Figura 3

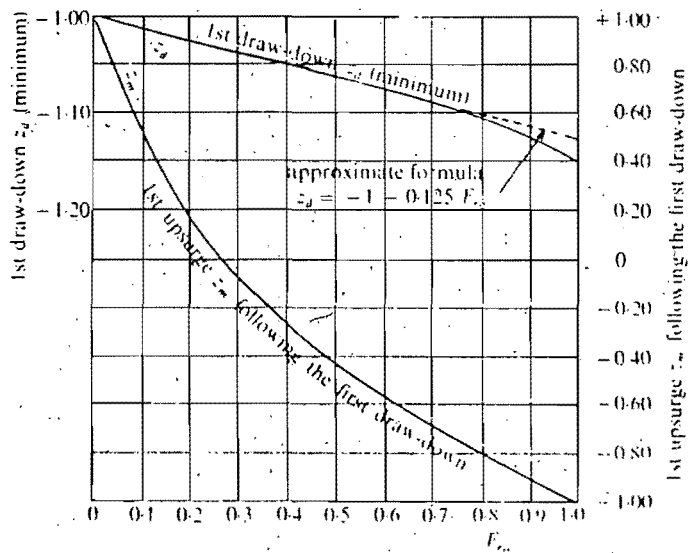


Figura 4

Figura 5  
Rechazo total instantáneo

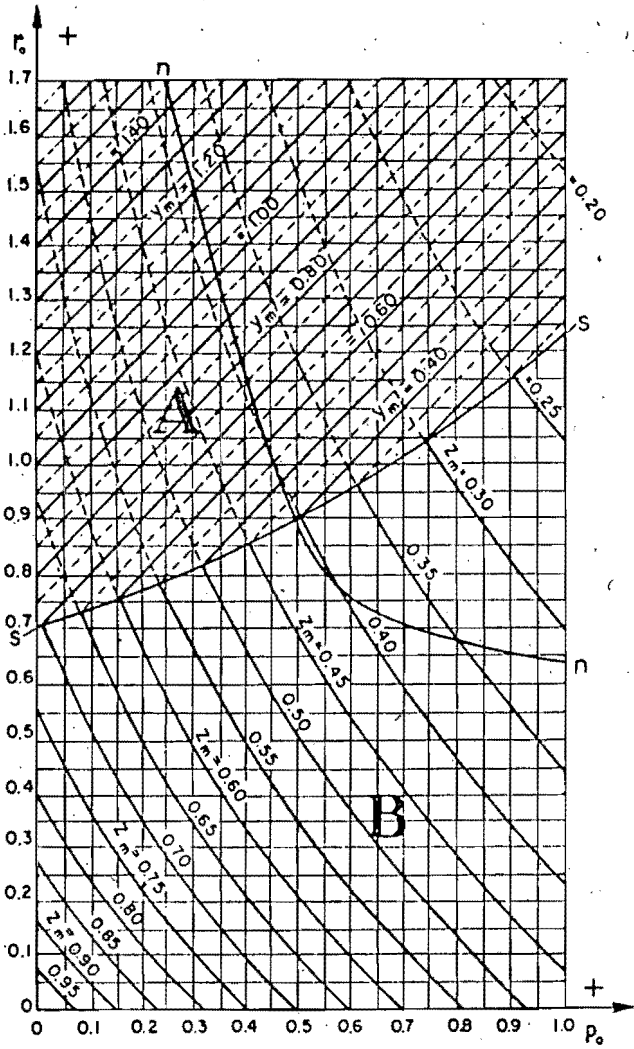


Figura 6  
Demanda total instantánea

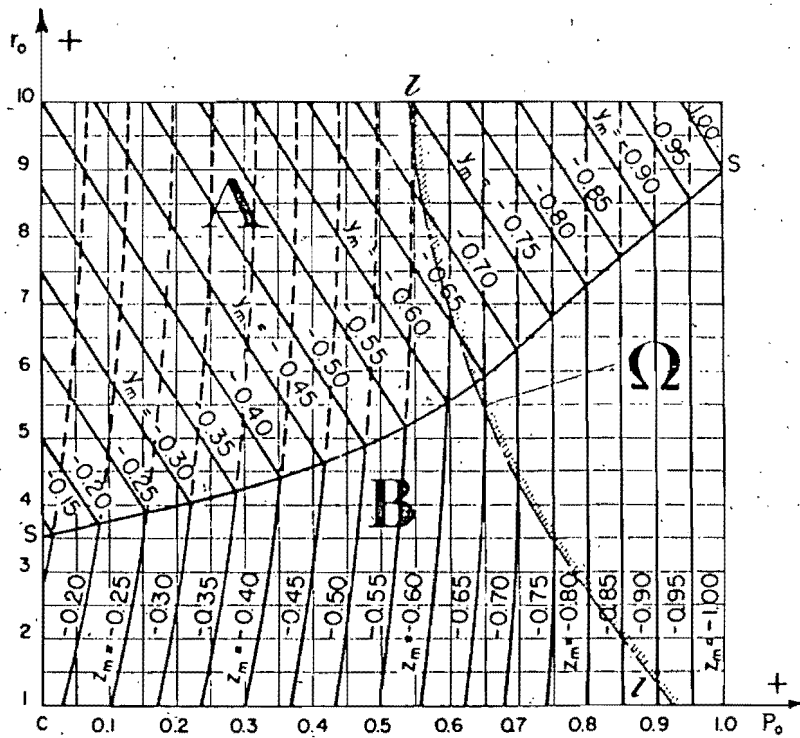
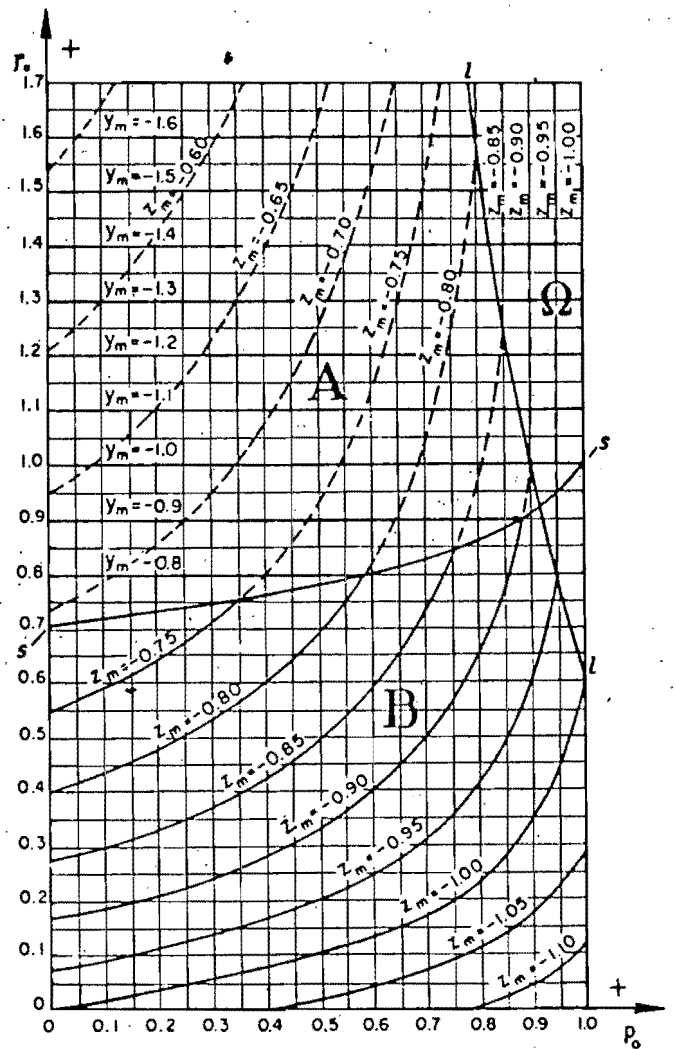


Figura 7 Demanda parcial instantánea (80 al 100%)



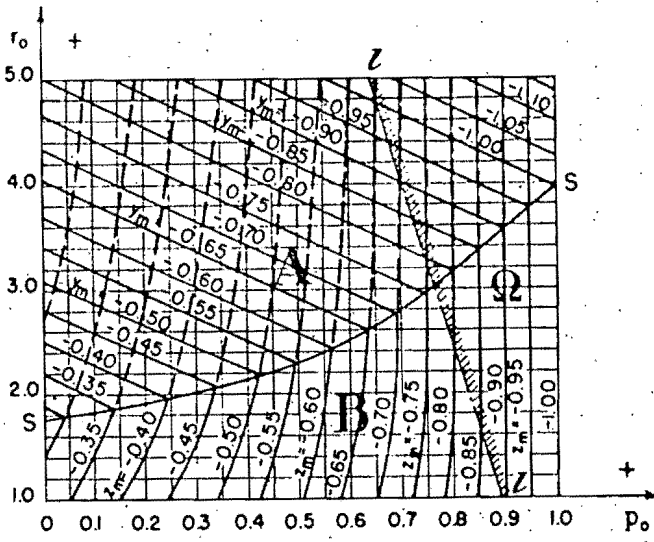


Figura 8 Demanda parcial instantánea (60 al 100%)

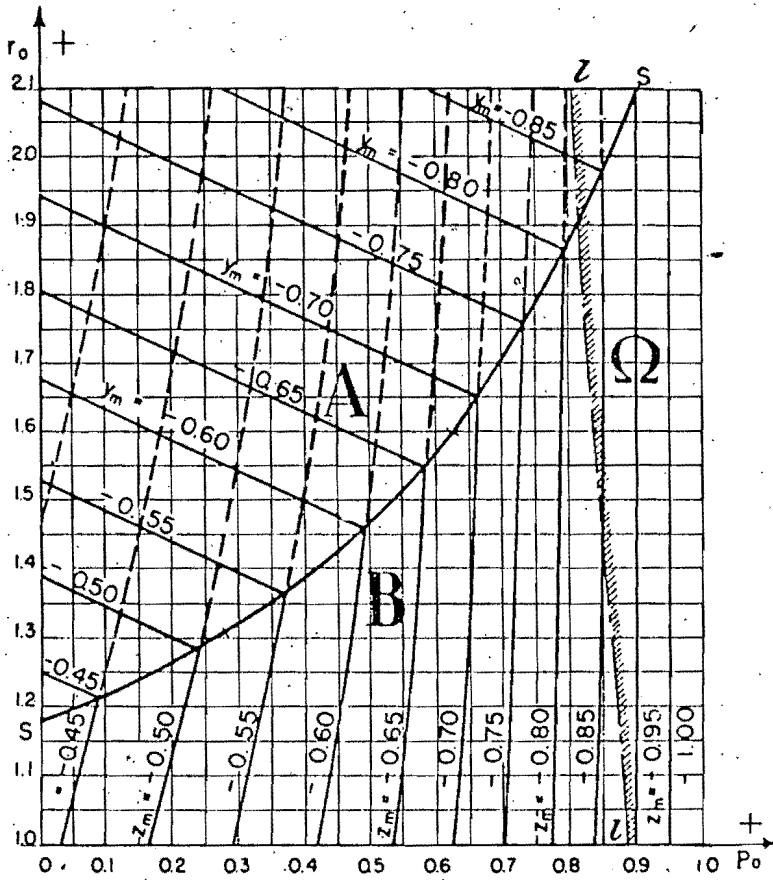


Figura 9 Demanda parcial instantánea (40 al 100%)

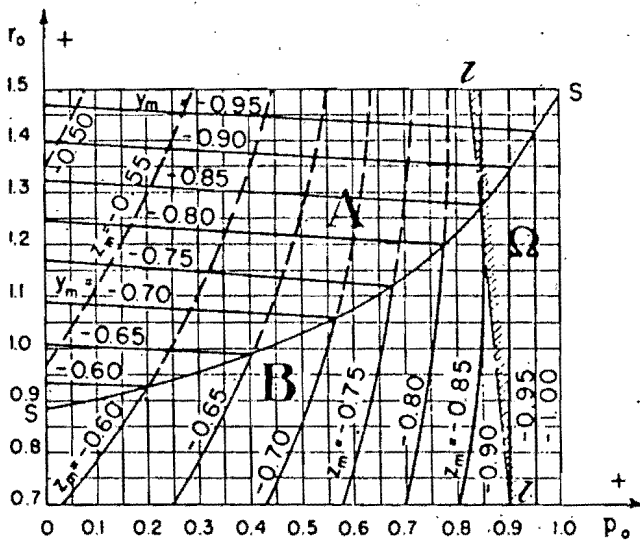


Figura 10 Demanda parcial instantánea (20 al 100%)

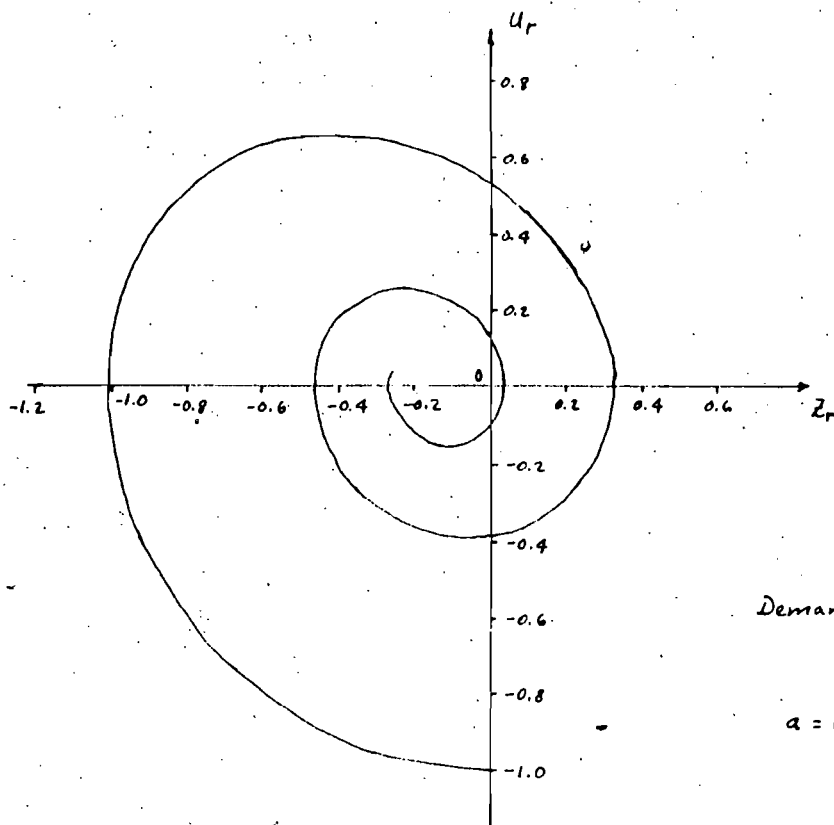


Figura 11

Demanda de carga total instantánea

$$a = 1 \quad F_{r0} = 0.15$$

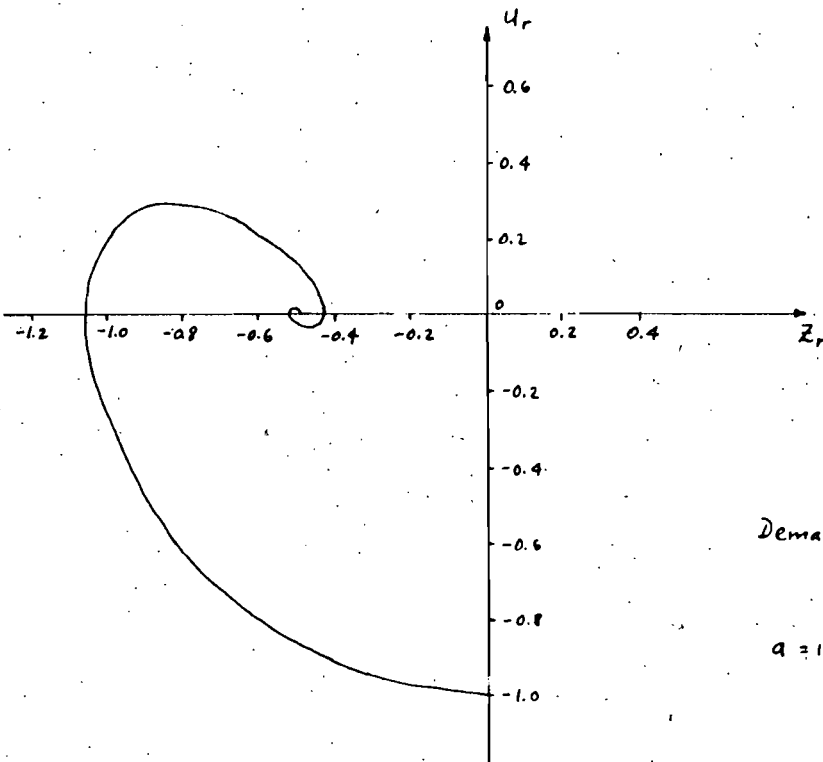


Figura 12.

Demanda de carga total instantánea

$$a = 1 \quad F_{r0} = 0.5$$

Figura 13

Demanda de carga total instantánea

Oscilaciones normalizadas

$$a = 1 \quad F_{r0} = 0.15$$

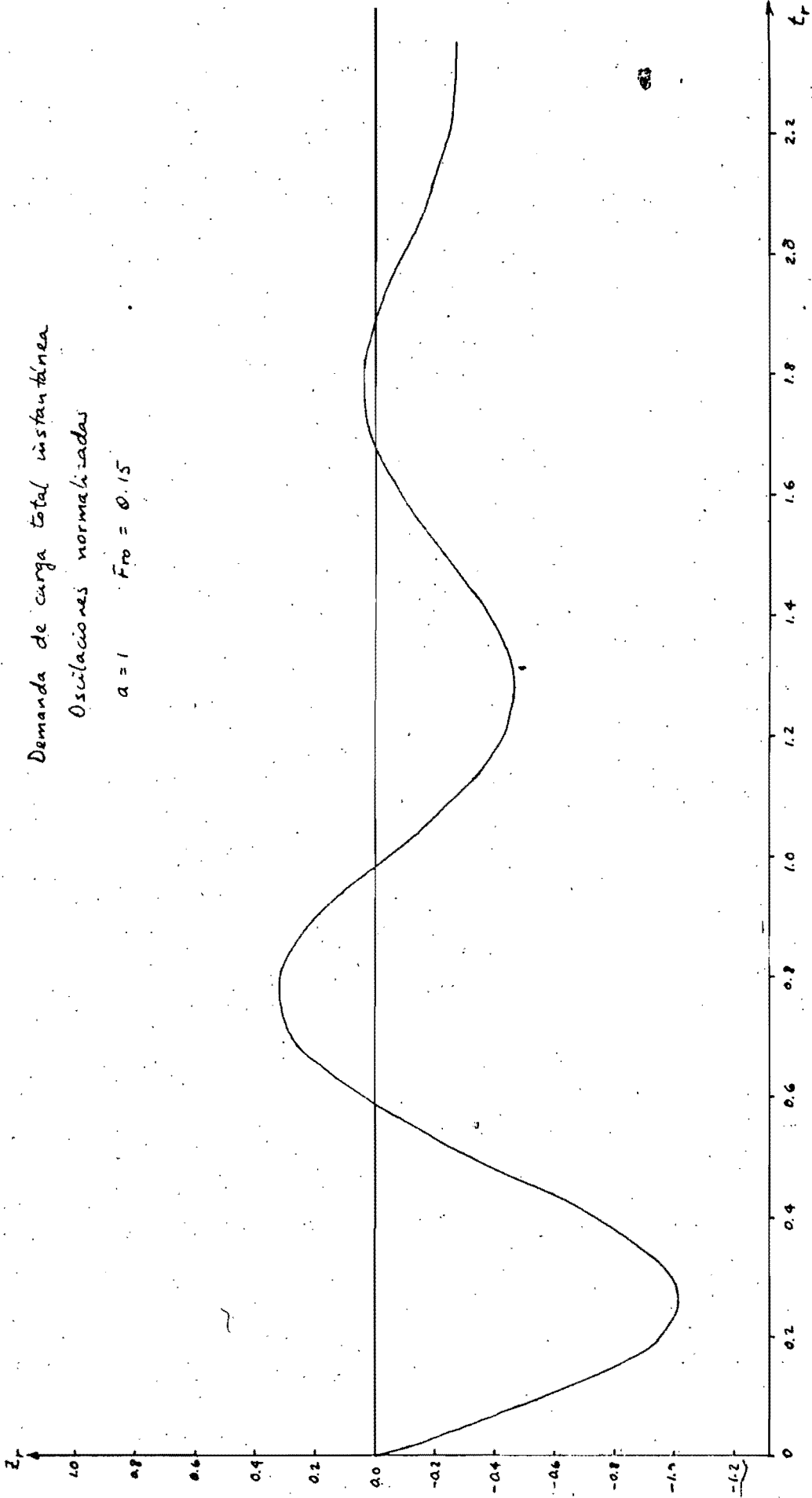


Figura 14  
Demanda de carga total instantánea  
Oscilaciones en la cámara para distintos coeficientes de restricción  
 $\alpha = 1$

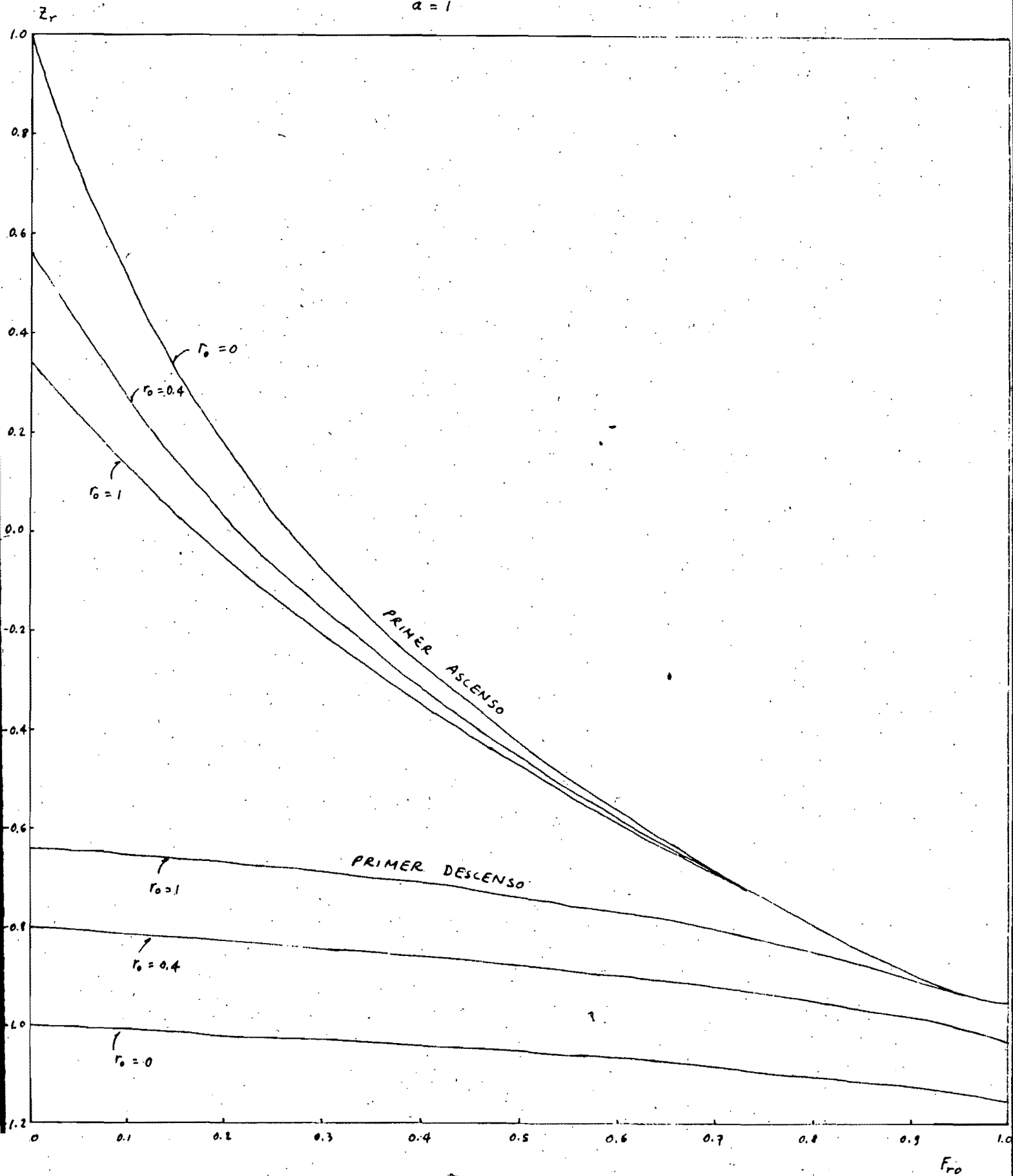


Figura 15  
 Demanda de carga total  
 Oscilaciones en una cámara simple para distintos tiempos de maniobra  
 $a = 1$

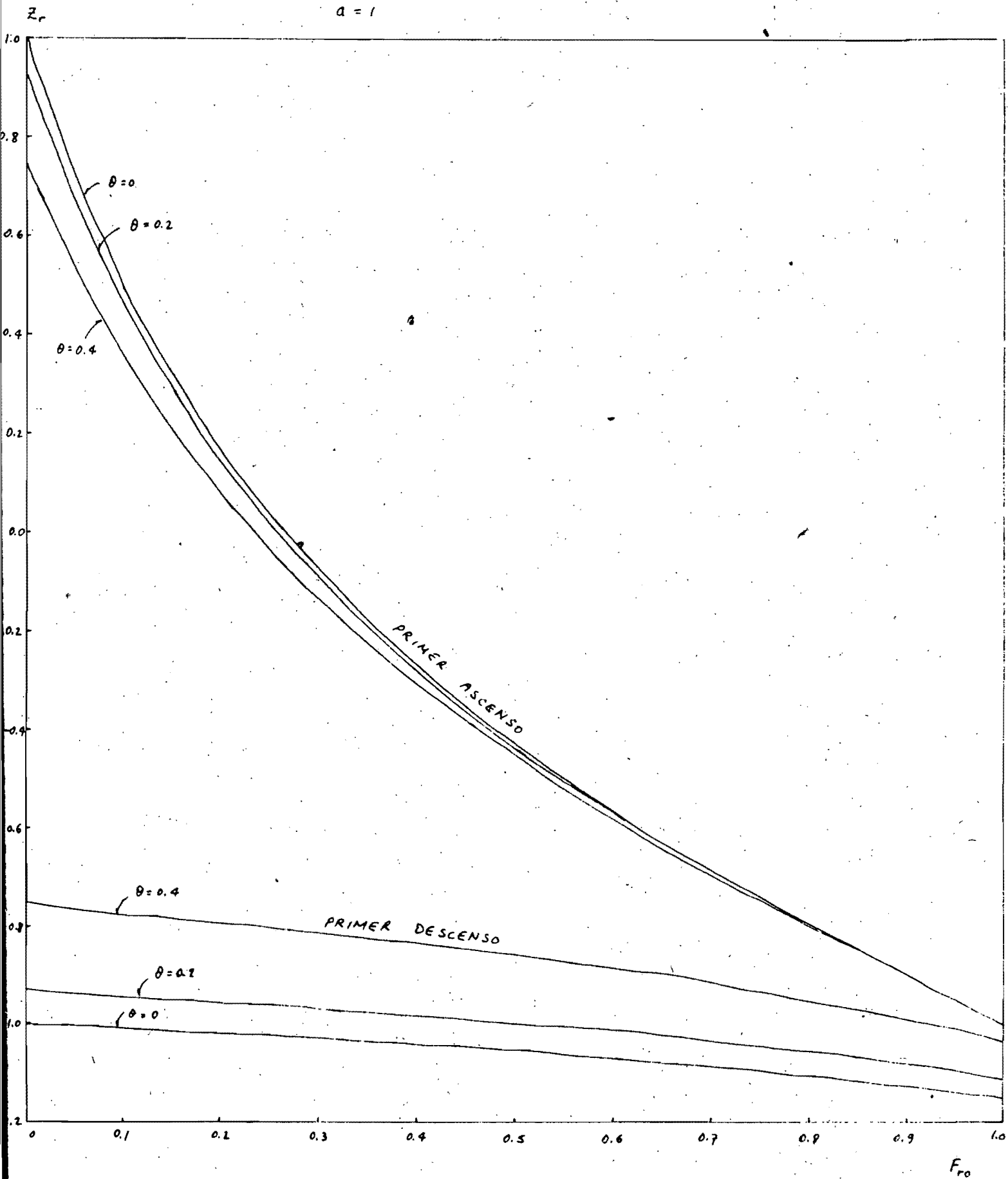


Figura 16  
 Demanda de carga instantánea

$a=1 ; \eta_1=0$

Oscilaciones en una cámara simple para distintas proporciones de carga finales

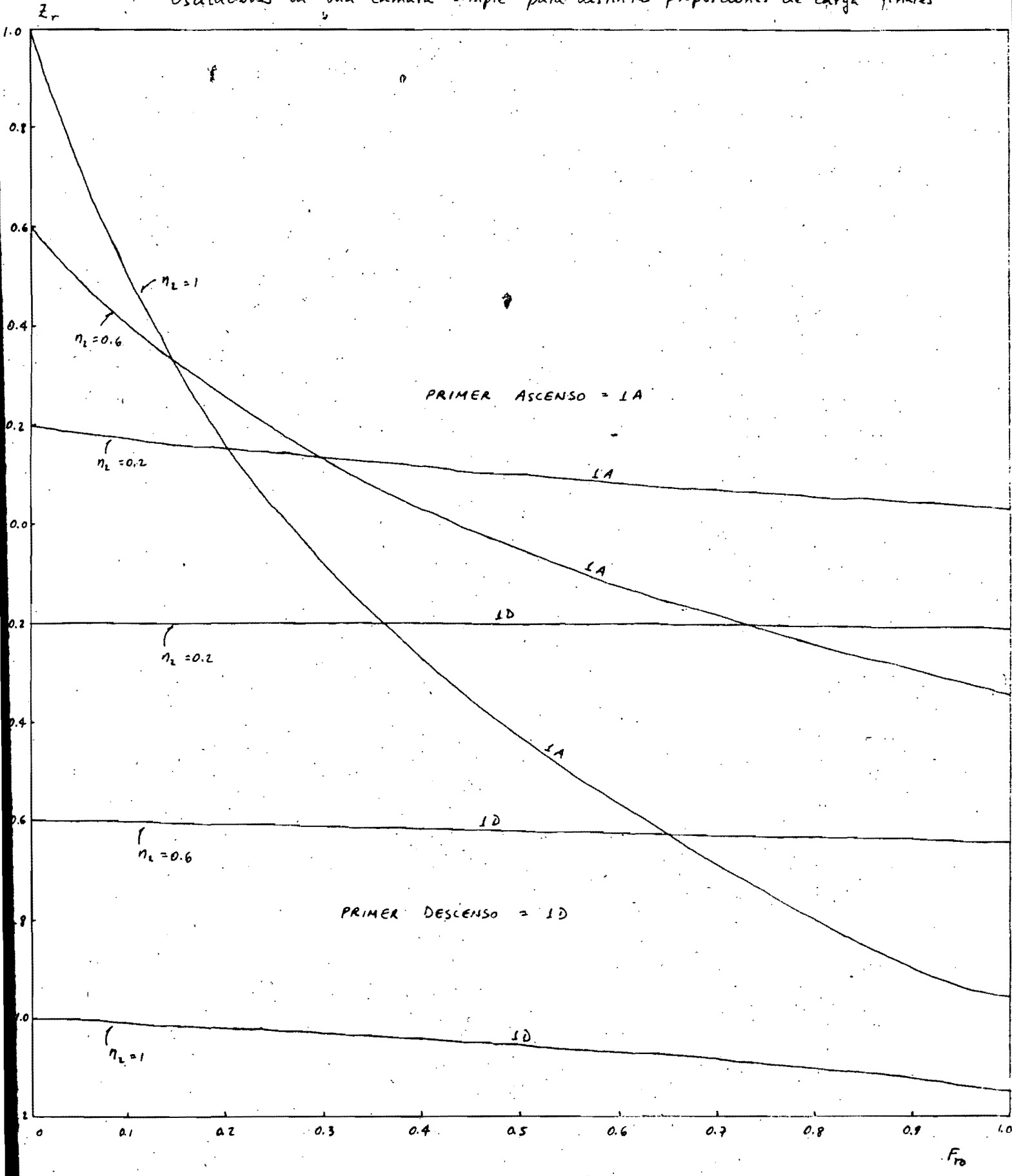


Figura 17.  
Demanda de carga parcial instantánea

$$a = 1 \quad \eta_1 = 0.6 \quad \eta_2 = 1$$

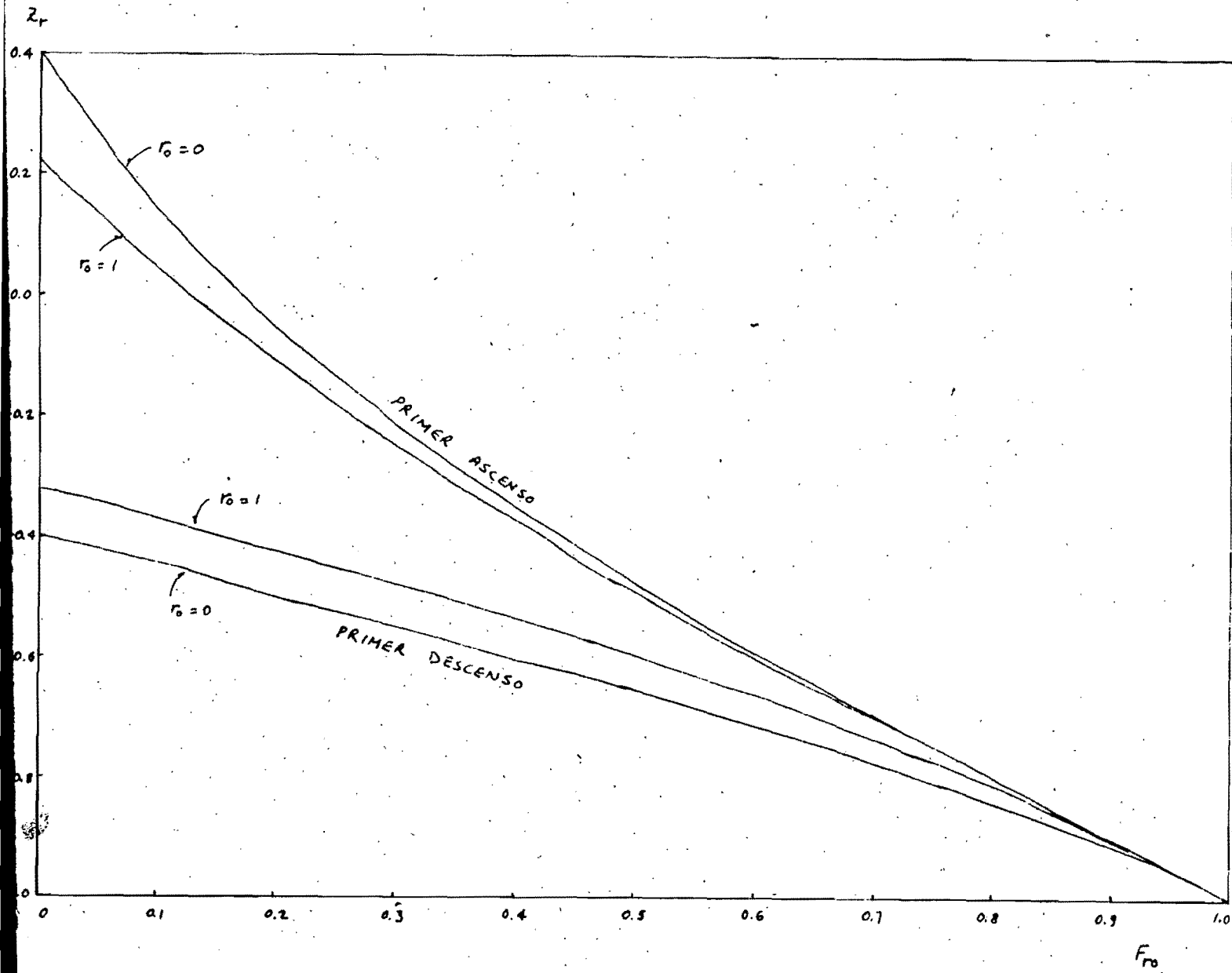


Figura 18

Demanda parcial lineal  
Oscilaciones normalizadas

$$\alpha = -1 \quad F_0 = 0.065 \quad \eta_1 = 0.1 \quad \theta = 0.05$$
$$\eta_2 = 0 \quad \eta_3 = 5.8$$

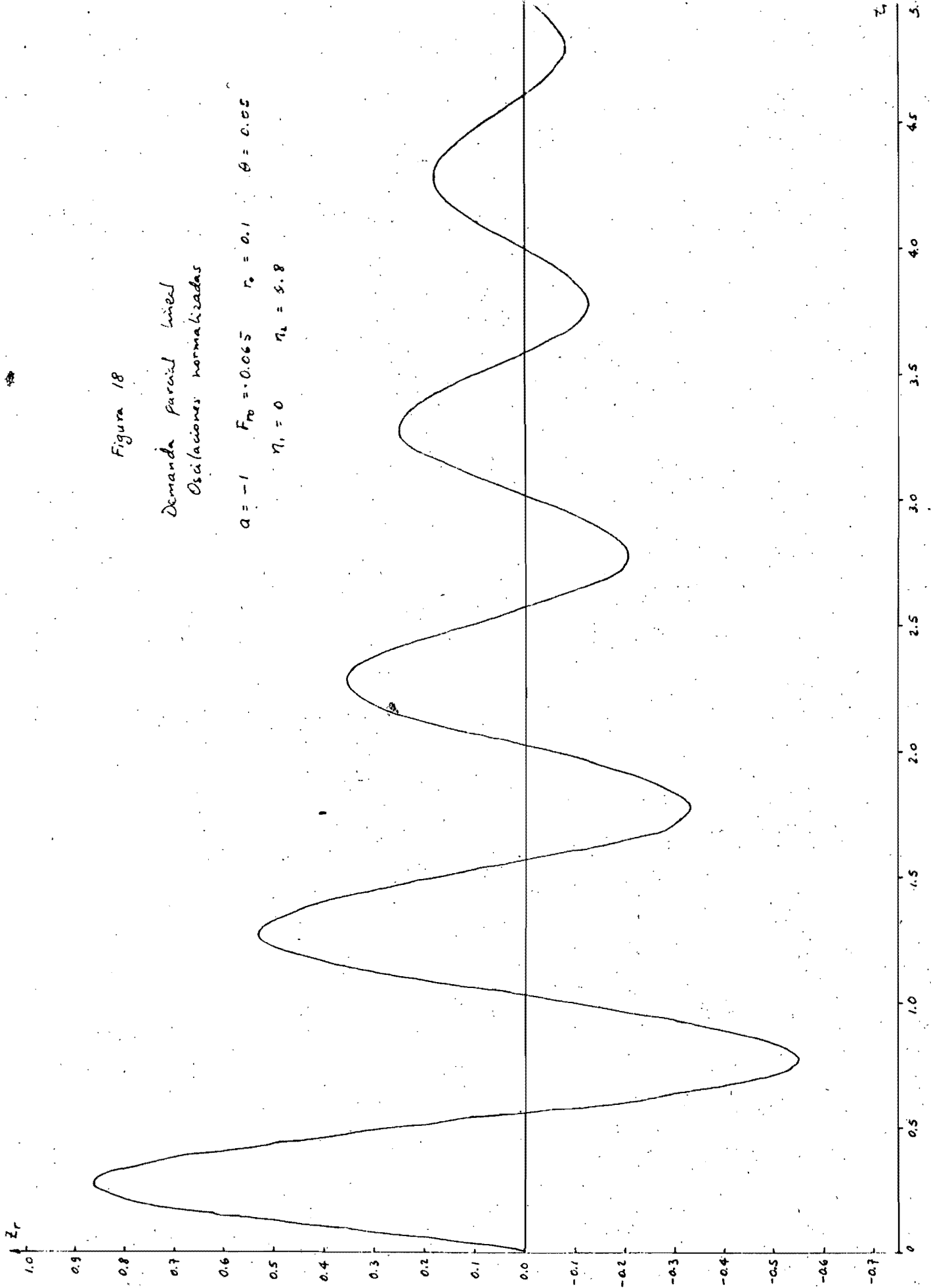




TABLA 1

Valores de algunos parámetros y de las condiciones iniciales para distintos tipos de maniobras.

Tipo de maniobra	$n_1$	$n_2$	$u_r(0)$	$z_r(0)$
Rechazo instantáneo total	1	0	a	$-aF_{r0}$
Rechazo instantáneo parcial	$n_1$	$n_2$	$a(n_1 - n_2)$	$-aF_{r0} n_1^2$
Rechazo lineal total	1	0	0	$-aF_{r0}$
Rechazo lineal parcial	$n_1$	$n_2$	0	$-aF_{r0} n_1^2$
Demanda instantánea total	0	1	-a	0
Demanda instantánea parcial	$n_1$	$n_2$	$a(n_1 - n_2)$	$-aF_{r0} n_1^2$
Demanda lineal total	0	1	0	0
Demanda lineal parcial	$n_1$	$n_2$	0	$-aF_{r0} n_1^2$

TABLA 2

Values for  $\zeta$

$\Theta$	0.0	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$F_{ra} = 0.0$	1.00	0.93	0.76	0.53	0.40	0.32
0.2	1.00	0.93	0.77	0.57	0.37	0.27
0.4	1.00	0.95	0.81	0.63	0.43	0.27
0.6	1.00	0.97	0.86	0.70	0.54	0.37
0.8	1.00	0.97	0.89	0.78	0.64	0.50
1.0	1.00	0.98	0.93	0.85	0.73	0.64

For values to the right of the heavy zigzag line the maximum upward swing occurs before the completion of closure

TABLA 3

Relación entre el primer ascenso correspondiente a una maniobra lineal y el correspondiente a una maniobra instantánea, para rechazo total de carga.

$$\xi = \frac{z_{\max}}{z_{\max}(\theta=0)}$$

$\theta \backslash F_{r0}$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.0	1.0	0.932	0.757	0.531	0.398	0.318
0.2	1.0	0.940	0.787	0.562	0.379	0.266
0.4	1.0	0.949	0.822	0.631	0.425	0.278
0.6	1.0	0.960	0.859	0.704	0.527	0.367
0.8	1.0	0.970	0.896	0.776	0.630	0.484
1.0	1.0	0.980	0.930	0.843	0.726	0.597

Por encima de la línea, el primer ascenso se presenta antes de finalizar la maniobra.

TABLA 4

Relación entre el primer descenso correspondiente a una maniobra lineal y el correspondiente a una maniobra instantánea, para rechazo total de carga.

$$\xi = \frac{z_{\min}}{z_{\min}(\theta=0)}$$

$\theta \backslash F_{r0}$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.0	1.0	0.932	0.757	0.506	0.235	0.000
0.2	1.0	0.952	0.820	0.614	0.368	0.152
0.4	1.0	0.964	0.867	0.707	0.507	0.317
0.6	1.0	0.973	0.904	0.786	0.631	0.470
0.8	1.0	0.981	0.934	0.850	0.734	0.602
1.0	1.0	0.988	0.957	0.900	0.816	0.713

Por debajo de la línea, el nivel del agua en el primer descenso quedará por encima del nivel que tenía antes de la maniobra  $z_r(0) = -F_{r0}$

TABLA 5

Relación entre el primer descenso correspondiente a una maniobra lineal y el correspondiente a una maniobra instantánea, para demanda total de carga.

$$\xi = \frac{z_{\min}}{z_{\min}(\theta=0)}$$

$F_{r0} \backslash \theta$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.0	1.0	0.932	0.757	0.531	0.398	0.318
0.2	1.0	0.937	0.778	0.560	0.411	0.325
0.4	1.0	0.943	0.802	0.619	0.472	0.335
0.6	1.0	0.949	0.829	0.689	0.612	0.605
0.8	1.0	0.956	0.860	0.770	0.741	0.739
1.0	1.0	0.966	0.902	0.871	0.871	0.828

Por encima de la línea, el primer descenso se presenta antes de finalizar la maniobra.

TABLA 6

Relación entre el primer ascenso correspondiente a una maniobra lineal y el correspondiente a una maniobra instantánea, para demanda total de carga.

$$\xi = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{z_{\max}(\theta=0) - z_{\min}(\theta=0)}$$

$F_{r0} \backslash \theta$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.0	1.0	0.932	0.757	0.518	0.316	0.159
0.2	1.0	0.925	0.734	0.464	0.246	0.090
0.4	1.0	0.911	0.688	0.391	0.116	0.012
0.6	1.0	0.886	0.616	0.297	0.119	0.105
0.8	1.0	0.842	0.494	0.167	0.062	0.054
1.0	1.0	0.802	0.431			

Por debajo de la línea, el nivel del agua en el primer ascenso no alcanza el nivel que tenía antes de la maniobra ( $z_r(0) = 0$ )

TABLA DE OSCILACION AGUAS AL ALZADO DE TURBINA

CARGA INICIAL = 0. POR CIENTO

DEMANDA DE CARGA LINEAL

Oscilaciones Normalizadas

INTERVALO DE TIEMPO = 0.010

UP	ZR	TR
0.000000	0.000000	0.000000
0.078511	0.000000	0.100000
0.307903	0.000000	0.200000
0.118907	0.000000	0.300000
0.530663	0.000000	0.400000
0.761674	0.000000	0.500000
0.309225	0.000000	0.600000
0.733067	0.000000	0.700000
0.209009	0.000000	0.800000
0.733067	0.000000	0.900000
0.309225	0.000000	1.000000
0.761674	0.000000	1.100000
0.530663	0.000000	1.200000
0.307903	0.000000	1.300000
0.118907	0.000000	1.400000
0.078511	0.000000	1.500000
0.000000	0.000000	1.600000
0.078511	0.000000	1.700000
0.118907	0.000000	1.800000
0.178511	0.000000	1.900000
0.238115	0.000000	2.000000
0.297719	0.000000	2.100000
0.357323	0.000000	2.200000
0.416927	0.000000	2.300000
0.476531	0.000000	2.400000
0.536135	0.000000	2.500000
0.595739	0.000000	2.600000
0.655343	0.000000	2.700000
0.714947	0.000000	2.800000
0.774551	0.000000	2.900000
0.834155	0.000000	3.000000
0.893759	0.000000	3.100000
0.953363	0.000000	3.200000
1.012967	0.000000	3.300000
1.072571	0.000000	3.400000
1.132175	0.000000	3.500000
1.191779	0.000000	3.600000
1.251383	0.000000	3.700000
1.310987	0.000000	3.800000
1.370591	0.000000	3.900000
1.430195	0.000000	4.000000
1.489799	0.000000	4.100000
1.549403	0.000000	4.200000
1.608907	0.000000	4.300000
1.668511	0.000000	4.400000
1.728115	0.000000	4.500000
1.787719	0.000000	4.600000
1.847323	0.000000	4.700000
1.906927	0.000000	4.800000
1.966531	0.000000	4.900000
2.026135	0.000000	5.000000
2.085739	0.000000	
2.145343	0.000000	
2.204947	0.000000	
2.264551	0.000000	
2.324155	0.000000	
2.383759	0.000000	
2.443363	0.000000	
2.502967	0.000000	
2.562571	0.000000	
2.622175	0.000000	
2.681779	0.000000	
2.741383	0.000000	
2.800987	0.000000	
2.860591	0.000000	
2.920195	0.000000	
2.979799	0.000000	
3.039403	0.000000	
3.099007	0.000000	
3.158611	0.000000	
3.218215	0.000000	
3.277819	0.000000	
3.337423	0.000000	
3.397027	0.000000	
3.456631	0.000000	
3.516235	0.000000	
3.575839	0.000000	
3.635443	0.000000	
3.695047	0.000000	
3.754651	0.000000	
3.814255	0.000000	
3.873859	0.000000	
3.933463	0.000000	
3.993067	0.000000	
4.052671	0.000000	
4.112275	0.000000	
4.171879	0.000000	
4.231483	0.000000	
4.291087	0.000000	
4.350691	0.000000	
4.410295	0.000000	
4.469899	0.000000	
4.529503	0.000000	
4.589107	0.000000	
4.648711	0.000000	
4.708315	0.000000	
4.767919	0.000000	
4.827523	0.000000	
4.887127	0.000000	
4.946731	0.000000	
5.006335	0.000000	

FR0	N1	N2	RO	TRETA	FICO	ZRF	T
0.000000	0.00	0.80	0.10	0.000000	1	0.000000	27
0.000000	0.00	0.80	0.10	0.000000	2	-0.000000	77
0.000000	0.00	0.80	0.10	0.000000	3	-0.000000	77
0.000000	0.00	0.80	0.10	0.000000	4	-0.000000	77
0.000000	0.00	0.80	0.10	0.000000	5	-0.000000	78
0.000000	0.00	0.80	0.10	0.000000	6	-0.000000	78
0.000000	0.00	0.80	0.10	0.000000	7	-0.000000	78
0.000000	0.00	0.80	0.10	0.000000	8	-0.000000	78
0.000000	0.00	0.80	0.10	0.000000	9	-0.000000	78
0.000000	0.00	0.80	0.10	0.000000	10	-0.000000	78

APENDICE 1









00017100  
00017200  
00017300  
00017500  
00017600  
00017700  
00017800  
00017900  
00018000  
00018100  
00018200  
00018300  
00018400  
00018500  
00018600  
00018700  
00018800  
00018900  
00019000  
00019100  
00019200  
00019300  
00019400  
00019500  
00019600  
00019700  
00019800  
00019900  
00020000  
00020100  
00020200  
00020300  
00020400  
00020500  
00020600  
00020700  
00020800  
00020900  
00021000  
00021100  
00021200  
00021300  
00021400  
00021500  
00021600  
00021700  
00021800  
00021900  
00022000

```
403 Z = Z(5)
404 UU = U(5)
405 TT = T(5)
406 DO 61 I2 = I1, 4
407 Z(I2) = Z(I2+1)
408 U(I2) = U(I2+1)
409 T(I2) = T(I2+1)
61 CONTINUE
410 Z7 = Z5
411 U7 = U5
412 T7 = T5
413 GE, TMAX) GO TO 404
414 N = (N/I-K) SIO, I99, CIO
415 N5 = I7E(3, 80)
801 FORMAT(//, ' FROM N1 N2 R0 THETA FICD ZRM
*F1, //)
416 DO 125 J=1, M
417 WRITE(6, 485) F, RNO, RN, R, THETA, J, ZMAX(J), TM(J)
418 CONTINUE
419 CUMAT(15(F6.2), I8, F12.6, F8.2)
420 GOTO 19
END ROUTINE DERIV
CALCULO DERIVADAS
COMMON/L1/ZMAX(10), TN(10), Z(5), U(5), T(5), P(5), S(5)
COMMON/AN/TT, TF, DELT, THETA, RNO, RN, R, F, ZF, UF, FI, F2, AC
PI = 3.14159265358979323846
R = 771.9249237
DELTA = DELT/THETA
ZC = ZC*(RNO-RN)/(THETA-2.*PI*AS*(AS*IE-F*PAR*ABS(FAP)+AS*R*UF*ABS(UF)
      -2.*PI*AS*(AS*ZF-F*(S*UF-RN))*ABS(RS*UF-RN)+AS*N*UF*ABS(UF))
      *DELTA/8.
      -2.*PI*AS*(AS*ZF-F*(S*UF-RN))*ABS(RS*UF-RN)+AS*N*UF*ABS(UF))
ROUTINE CORRECTOR
CALCULO CORRECTOR
COMMON/AN/TT, TF, DELT, THETA, RNO, RN, R, F, ZF, UF, FI, F2, AC
PI = 3.14159265358979323846
R = 771.9249237
DELTA = DELT/THETA
ZC = ZC*(RNO-RN)/(THETA-2.*PI*AS*(AS*IE-F*PAR*ABS(FAP)+AS*R*UF*ABS(UF)
      -2.*PI*AS*(AS*ZF-F*(S*UF-RN))*ABS(RS*UF-RN)+AS*N*UF*ABS(UF))
      *DELTA/8.
      -2.*PI*AS*(AS*ZF-F*(S*UF-RN))*ABS(RS*UF-RN)+AS*N*UF*ABS(UF))
ROUTINE DERIV
CALCULO DERIVADAS
COMMON/L1/ZMAX(10), TN(10), Z(5), U(5), T(5), P(5), S(5)
COMMON/AN/TT, TF, DELT, THETA, RNO, RN, R, F, ZF, UF, FI, F2, AC
PI = 3.14159265358979323846
R = 771.9249237
DELTA = DELT/THETA
ZC = ZC*(RNO-RN)/(THETA-2.*PI*AS*(AS*IE-F*PAR*ABS(FAP)+AS*R*UF*ABS(UF)
      -2.*PI*AS*(AS*ZF-F*(S*UF-RN))*ABS(RS*UF-RN)+AS*N*UF*ABS(UF))
      *DELTA/8.
      -2.*PI*AS*(AS*ZF-F*(S*UF-RN))*ABS(RS*UF-RN)+AS*N*UF*ABS(UF))
```

00017100  
00017200  
00017300  
00017500  
00017600  
00017700  
00017800  
00017900  
00018000  
00018100  
00018200  
00018300  
00018400  
00018500  
00018600  
00018700  
00018800  
00018900  
00019000  
00019100  
00019200  
00019300  
00019400  
00019500  
00019600  
00019700  
00019800  
00019900  
00020000  
00020100  
00020200  
00020300  
00020400  
00020500  
00020600  
00020700  
00020800  
00020900  
00021000  
00021100  
00021200  
00021300  
00021400  
00021500  
00021600  
00021700  
00021800  
00021900  
00022000

APENDICE 2





















1.000000	0.40	0.00	0.00	0.00	1.1693	0.00	0.00	0.00	1.1693
0.999900	0.40	0.00	0.00	0.00	1.1654	0.00	0.00	0.00	1.1654
0.999800	0.40	0.00	0.00	0.00	1.1615	0.00	0.00	0.00	1.1615
0.999700	0.40	0.00	0.00	0.00	1.1576	0.00	0.00	0.00	1.1576
0.999600	0.40	0.00	0.00	0.00	1.1537	0.00	0.00	0.00	1.1537

TOMA DE CARGA INSTANTANEA

FRQ	N	RC	THETA	IER DESCENSO	T	IER ASCENSO	I	2DO DESCENSO	T
1.000000	0.00	0.00	0.00	1.1693	0.00	1.1693	0.00	1.1693	0.00
0.999900	0.00	0.00	0.00	1.1654	0.00	1.1654	0.00	1.1654	0.00
0.999800	0.00	0.00	0.00	1.1615	0.00	1.1615	0.00	1.1615	0.00
0.999700	0.00	0.00	0.00	1.1576	0.00	1.1576	0.00	1.1576	0.00
0.999600	0.00	0.00	0.00	1.1537	0.00	1.1537	0.00	1.1537	0.00

TOMA DE CARGA INSTANTANEA

FRQ	N	RC	THETA	IER DESCENSO	T	IER ASCENSO	I	2DO DESCENSO	T
0.000000	0.00	0.00	0.00	1.1693	0.00	1.1693	0.00	1.1693	0.00
0.000100	0.00	0.00	0.00	1.1654	0.00	1.1654	0.00	1.1654	0.00
0.000200	0.00	0.00	0.00	1.1615	0.00	1.1615	0.00	1.1615	0.00
0.000300	0.00	0.00	0.00	1.1576	0.00	1.1576	0.00	1.1576	0.00
0.000400	0.00	0.00	0.00	1.1537	0.00	1.1537	0.00	1.1537	0.00











SOLUCION POR MILHE-HAMMING DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE LAS OSCILACIONES EN TANQUES DURANTE MANIOBRAS

TABLA 14

TANQUE DE OSCILACION AGUAS ABAJO DE TURBINA

CARGA INICIAL = 60. POR CIENTO

Demanda parcial instantánea  
 $n_1 = 0.60$   $n_2 = 1.0$

DEMANDA DE CARGA INSTANTANEA

FRO	H	RO	THETA	1ER PICO	T	2DO PICO	T	3ER PICO	T
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.4000	0.24	1.1100	0.74	0.4000	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.4222	0.24	1.1100	0.74	0.4222	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.4444	0.25	1.1100	0.74	0.4444	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.4667	0.26	1.1100	0.75	0.4667	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.4889	0.27	1.1100	0.75	0.4889	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.5111	0.28	1.1100	0.76	0.5111	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.5333	0.29	1.1100	0.77	0.5333	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.5556	0.30	1.1100	0.78	0.5556	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.5778	0.31	1.1100	0.79	0.5778	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.6000	0.32	1.1100	0.80	0.6000	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.6222	0.33	1.1100	0.81	0.6222	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.6444	0.34	1.1100	0.82	0.6444	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.6667	0.35	1.1100	0.83	0.6667	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.6889	0.36	1.1100	0.84	0.6889	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.7111	0.37	1.1100	0.85	0.7111	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.7333	0.38	1.1100	0.86	0.7333	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.7556	0.39	1.1100	0.87	0.7556	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.7778	0.40	1.1100	0.88	0.7778	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.8000	0.41	1.1100	0.89	0.8000	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.8222	0.42	1.1100	0.90	0.8222	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.8444	0.43	1.1100	0.91	0.8444	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.8667	0.44	1.1100	0.92	0.8667	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.8889	0.45	1.1100	0.93	0.8889	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.9111	0.46	1.1100	0.94	0.9111	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.9333	0.47	1.1100	0.95	0.9333	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.9556	0.48	1.1100	0.96	0.9556	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.9778	0.49	1.1100	0.97	0.9778	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	1.0000	0.50	1.1100	0.98	1.0000	1.00

DEMANDA DE CARGA INSTANTANEA

FRO	H	RO	THETA	1ER PICO	T	2DO PICO	T	3ER PICO	T
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.3799	0.24	1.1100	0.74	0.3799	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.4022	0.24	1.1100	0.74	0.4022	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.4244	0.25	1.1100	0.75	0.4244	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.4467	0.26	1.1100	0.75	0.4467	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.4689	0.27	1.1100	0.76	0.4689	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.4911	0.28	1.1100	0.77	0.4911	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.5133	0.29	1.1100	0.77	0.5133	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.5356	0.30	1.1100	0.78	0.5356	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.5578	0.31	1.1100	0.79	0.5578	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.5800	0.32	1.1100	0.80	0.5800	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.6022	0.33	1.1100	0.81	0.6022	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.6244	0.34	1.1100	0.82	0.6244	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.6467	0.35	1.1100	0.83	0.6467	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.6689	0.36	1.1100	0.84	0.6689	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.6911	0.37	1.1100	0.85	0.6911	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.7133	0.38	1.1100	0.86	0.7133	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.7356	0.39	1.1100	0.87	0.7356	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.7578	0.40	1.1100	0.88	0.7578	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.7800	0.41	1.1100	0.89	0.7800	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.8022	0.42	1.1100	0.90	0.8022	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.8244	0.43	1.1100	0.91	0.8244	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.8467	0.44	1.1100	0.92	0.8467	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.8689	0.45	1.1100	0.93	0.8689	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.8911	0.46	1.1100	0.94	0.8911	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.9133	0.47	1.1100	0.95	0.9133	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.9356	0.48	1.1100	0.96	0.9356	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.9578	0.49	1.1100	0.97	0.9578	1.00
0.0000	1.00	0.00	0.00	0.9800	0.50	1.1100	0.98	0.9800	1.00





