



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

**ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS ORTOGONALES Y SIMPLES CON
BIRRADARES**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (COMPUTACIÓN)

PRESENTA:
JOEL AGUILAR GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. JORGE URRUTIA GALIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM

CODIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ DAVID FLORES PEÑALOZA
Facultad de Ciencias

MÉXICO, D. F. DICIEMBRE 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Índice de figuras	3
1. Introducción	9
2. Preliminares	11
2.1. Definiciones	11
2.2. Teoría de gráficas	13
2.3. Caminos, paseos, trayectorias y ciclos	15
2.4. Conexidad	15
2.5. El problema de la Galería de Arte	16
2.5.1. Prueba de Fisk	18
2.5.2. Triangulación	18
2.5.3. Partición de polígonos ortogonales en polígonos con forma de L	19
3. Antecedentes	27
3.1. Reflectores fijos	27
3.2. Iluminación con radares	29
3.3. Galerías de arte ortogonales	33
4. Resultados con birradares	37
4.1. Iluminación de líneas	38
4.2. Iluminación de Triángulos	40
4.3. Iluminación de Cuadrados y rectángulos	44
4.4. Iluminación de semiplanos y planos	48
4.4.1. Intersección de cuñas de sombra	49
4.4.2. Iluminación de semiplanos	52
4.4.3. Iluminación del plano	55
4.5. Iluminación de polígonos ortogonales	57
4.6. Iluminación de Polígonos simples	61
5. Conclusiones	67

Bibliografía	69
Índice alfabético	71

Índice de figuras

2.1.	La lámpara colocada sobre el punto p , ilumina todo a su alrededor.	12
2.2.	Reflectores de tamaño α , la región iluminada por los reflectores está delimitada por los rayos A y B considerados en sentido anti-horario o positivo .	13
2.3.	Dos gráficas de 5 vértices de las cuales sólo la primera es plana.	14
2.4.	Árboles con seis vértices.	16
2.5.	Polígonos con a lo más cinco vértices pueden ser cubiertos con un sólo guardia, pero algunos con seis vértices necesitan dos.	17
2.6.	Cada diente del peine requiere un guardia. De aquí $n = 15$ y se requieren 5 guardias.	17
2.7.	La línea xv_2 es una diagonal interna.	19
2.8.	(a) Polígono ortogonal sin cortes impares. (b) Polígono ortogonal son cortes horizontales impares.	21
2.9.	H -partición de P y su gráfica- H	22
2.10.	Encontrando un corte impar en un pozo.	23
2.11.	Polígono ortogonal en espiral.	24
2.12.	Histograma.	24
3.1.	El problema de la iluminación de estrados.	27
3.2.	Un Polígono que no puede ser iluminado colocando reflectores- $\frac{\pi}{2}$	28
3.3.	Orientación inicial de radares- α para vigilar una recta L	30
3.4.	(a) Orientación en t . (b) Si $F(n, L) < \frac{3\pi}{2}$, L no está completamente vigilada todo el tiempo.	30
3.5.	Dos radares- α giratorios.	32
3.6.	Orientación inicial 3 radares- α colineales.	32
3.7.	Los tres reflectores se intersectan en a	33
3.8.	Si los reflectores son menores a π hay al menos uno que no cubre a a	33
3.9.	Los 8 posibles tipos de vértices en un polígono ortogonal. (a) Vértices convexos. (b) Vértices cóncavos.	34
3.10.	Diagrama que ilustra la colocación de los reflectores por la regla-NE.	35

3.11. (a) Un rectángulo requiere sólo un reflector ortogonal. (b) Polígono que requiere cuatro reflectores ortogonales. (c) si pegamos dos polígonos como el de (b), el número de vértices se incrementa en 8, pero sólo se requieren 3 reflectores más.	36
4.1. Birradar- α delimitado por las rectas A y B en sentido positivo. Las sombras están delimitadas por las rectas B y A en el mismo sentido(sin incluirlas). .	37
4.2. Configuración fuerte utilizando birradares de tamaño $\frac{2\pi}{3}$ girando en sentido positivo. F_2 está adelantado $\frac{\pi}{3}$ con respecto a F_1	38
4.3. Cobertura de la recta ℓ . (a) Posición en la que F_1 comienza a iluminar ℓ . (b) Al entrar la primera cuña de sombra de F_1 , F_2 entra al relevo. (c) Antes de terminar la cobertura de F_2 , después de un tiempo π de la configuración inicial, se vuelve a repetir dicha configuración para F_1	39
4.4. (a) Triángulo cuyos ángulos correspondientes a los vértices en los que se colocarán los birradares- α son θ y β . La gráfica ilustra como dos birradares- α , con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, son suficientes para iluminar el triángulo. En (b), las líneas sólidas representan la iluminación por un ángulo de cada birradar y las punteadas representan la iluminación por el respectivo ángulo opuesto.	41
4.5. Birradar- α y su sombra s . Triángulo T y sus ángulos internos	41
4.6. La intersección de la sombra de los dos birradares es la región comprendida entre las rectas A , B , C y D , de la cual el punto x es el punto inferior y se extiende al infinito.	43
4.7. (a) Configuración inicial. B y C son perpendiculares. (b) Después de 25° . (c) Después de $\frac{\pi}{2}$. (d) Después de $\frac{3\pi}{4}$	44
4.8. Con birradares mayores a $\frac{3\pi}{4}$ el segmento entre ellos es cuerda propia (no diametral) del circuncírculo uvx , por lo tanto existen los puntos u' y v' que corresponden a la cuerda paralela, del mismo tamaño de la cuerda uv (puede verse como el reflejo de uv en el diámetro paralelo a ésta misma).	45
4.9. Los puntos u' y v' del rectángulo están definidos por la intersección de las rectas que definen la sombra.	46
4.10. Los arcos entre dos rectas secantes, paralelas, de una circunferencia son iguales.	46
4.11. Relación de ángulos en dos birradares para cubrir un rectángulo.	47
4.12. Configuración de dos birradares- α . La cuña de sombra de los birradares es de tamaño σ	48
4.13. Cuñas de sombra de dos birradares en configuración fuerte.	49
4.14. Intersección de ángulos que giran a la misma velocidad (A y D son paralelas).	50
4.15. Intersección de ángulos que giran a la misma velocidad (A y D). En una vuelta completa, la intersección de los ángulos es no vacía durante un intervalo de longitud 2α y se mantiene dentro del círculo uvx , donde x es el punto de intersección de los lados B y C	51

4.16. Intervalos de tiempo de sombra común generada dos birradares en configuración fuerte. 52

4.18. Configuración de 3 birradares- $\frac{5\pi}{6}$ donde se forma un ángulo recto. 53

4.17. (a) La región en la que podemos colocar el tercer birradar incluye las rectas perpendiculares a uv a partir de los puntos y y y' . (b) Muestra la posición a partir de la cual se puede colocar el tercer birradar, que es el punto y (o por simetría y'). 54

4.19. Posible configuración para el tercer birradar F_3 que ilumina la sombra generada por F_1 y F_2 en el semiplano superior, F_3 está colocado sobre un punto a la derecha de v 55

4.20. Colocación de F_1 , F_2 y F_3 sobre los puntos u, v y p , respectivamente. 56

4.21. Reflejo de F_1 y F_2 sobre ℓ . F_4 debe corresponder al reflejo de F_2 para iluminar el semiplano inferior. 56

4.22. Los 4 birradares- $\frac{5\pi}{6}$ después de $(\frac{\pi}{2} + \sigma)$ segundos. Se puede observar como el plano permanece completamente iluminado. 57

4.23. Se muestra como quedan configurados birradares- $\frac{5\pi}{6}$ en vértices cóncavos y convexos para la regla-NO para un polígono ortogonal 58

4.24. En un polígono con forma de L, hay una región en la que podemos colocar 3 birradares- $\frac{5\pi}{6}$ para mantenerlo iluminado todo el tiempo. 60

4.25. Configuración posible de tres birradares- $\frac{5\pi}{6}$ para mantener a P iluminado todo el tiempo. 60

4.26. Familia de polígonos simples para los cuales son necesarios n birreflectores- $\frac{5\pi}{6}$, donde n es el número de vértices. 61

4.27. Familia de polígonos simples para los cuales son necesarios n birreflectores- $\frac{5\pi}{6}$, donde n es el número de vértices. 62

4.28. (a) Triangulación del polígono P con su gráfica dual marcada al interior. (b) Gráfica dual de la $T(P)$ 63

4.29. Polígono P' , al regresar el vértice v_i forma un triángulo con sus vértices vecinos que puede ser iluminado con alguno de los dos birradares existentes en v_{i-1} o v_{i+1} y un nuevo birradar en v_i , quedando P totalmente iluminado. 63

4.30. (a) Descomposición de P en dos polígonos Q y Q' . (b) Colocación de los birradares para iluminar P 65

Agradecimientos

Quiero agradecer primero a mis padres, María Trinidad y José, por enseñarme que siempre hay cosas por hacer, que soy capaz de lograr lo que quiero y porque siguen a mi lado donde quiera que ellos estén.

A la universidad por darme la oportunidad de aprender y vivir momentos inolvidables con personas muy especiales.

A mis hermanos, José Luis, Juan, María Lourdes, Martín, Eusebio Antonio, Noé, Raymundo y David, porque todos y cada uno han aportado grandes cosas a mi vida además de apoyarme en cada nuevo reto que decido tomar e impulsarme a llegar mas lejos cada vez.

A mis sobrinos, que me motivan para ser mejor cada día.

A Jorge, por haberme brindado la oportunidad de trabajar con el y con todos sus colaboradores, además de mostrarme la puerta de entrada a lo que el llama “mundo de las ideas” y guiarme para realizar esta investigación.

A Carlos y David, porque sus revisiones exhaustivas, valiosas aportaciones y sugerencias me han ayudado a dar forma a este trabajo.

A mis compañeros Israel, Carmen, Josué, Erick y Marcela, por haber compartido esta maravillosa experiencia.

A mis grandes amigos, Jose Guillermo, Alfredo, Amando y Fernando porque su apoyo ha sido muy importante.

Por último quiero agradecer y dedicar este trabajo a mi prometida Karen Susana, por todo su apoyo, paciencia, por ser mi complemento perfecto y porque con ella mi vida tiene un sabor muy especial.

Capítulo 1

Introducción

En 1973 el matemático Victor Klee planteó el problema de determinar el número mínimo de guardias suficientes para vigilar el interior de una galería de arte modelada por un polígono simple de n vértices. Poco tiempo después, Vašek Chvátal estableció lo que en la actualidad se conoce como el *Teorema de Chvátal de la galería de arte* en el que señala que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar un polígono de n vértices.

Para la definición del problema vamos a utilizar los siguientes conceptos.

Un *polígono* P es definido comúnmente como una colección de n vértices v_1, v_2, \dots, v_n y n aristas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ de manera que aristas no consecutivas no comparten ningún punto. A diferencia de la práctica habitual, vamos a definir un polígono como la región del plano cerrada y acotada por la curva formada por las aristas de P . Las aristas y vértices de P son la frontera de P , denotada como $\partial(P)$. Observemos que al ser P cerrado la frontera está contenida en P . Decimos que un punto $x \in P$ ve a cualquier punto $y \in P$ si el segmento xy está totalmente contenido en P .

Si existe $S \subseteq P$, decimos que un punto $y \in P$ es vigilado por S si existe un punto $x \in S$ que ve a y .

Para cualquier polígono P , definimos $G(P)$ como el número mínimo de puntos de P que ven a todo P .

En 1978, S.Fisk [1] dio una demostración concisa al teorema de Chvátal, la cual ha trascendido debido a su elegancia y sencillez.

Es interesante ver que no todos los polígonos necesitan $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias. Por ejemplo, para un polígono convexo con n vértices sólo se necesita un guardia. Ésto nos lleva a preguntarnos si es posible determinar el número mínimo de guardias para un polígono de n vértices.

En 1982, J. O'Rourke y K. J. Supowit [2] demostraron que encontrar el número mínimo de guardias necesarios para vigilar un polígono con agujeros es un problema NP-Completo.

En 1984, en su tesis de doctorado A. Aggarwal [3] demostró que si sólo se toman

guardias ubicados en vértices del polígono el problema es NP-Completo.

En 1986, D.Lee y A. Lin [4] demostraron que también para polígonos simples con guardias sólo en sus vértices, el problema es NP-Completo. El primer problema estudiado sobre iluminación con reflectores, es conocido como el problema de la iluminación de estrados [5]. Este problema consiste en decidir si los reflectores de un teatro pueden ser rotados sobre sus bases de tal manera que todo el estrado quede iluminado.

En el año 2000, Ito Hiroy, Uehara Hideyuki y Yokoyama Mitsuo[6] demostraron que el problema de la iluminación de estrados es NP-Completo.

En 1994, V. Estivill-Castro y J. Urrutia [7], demostraron que $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores (fijos, con ángulo de $\frac{\pi}{2}$) son suficientes para iluminar por completo un polígono ortogonal de n vértices.

En 1995, V. Estivill-Castro, J. O'Rourke, J. Urrutia y D. Xu [8] establecieron que cualquier polígono puede ser iluminado con reflectores con ángulo de cobertura de tamaño π colocados en sus vértices y sólo un reflector por vértice, además de demostrar que ángulos de cobertura menores a π no son suficientes para cualquier polígono.

Este trabajo toma en cuenta algunos de estos resultados y está organizado de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 se establecen definiciones y se listan conceptos importantes para el desarrollo de esta investigación.
- En el capítulo 3 se listan algunos resultados interesantes que se conocen hasta el momento sobre el problema de la galería de arte y que sirvieron de base para este trabajo.
- En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos en esta investigación.
- En el capítulo 5 se muestran las conclusiones de este trabajo y algunas sugerencias para investigaciones futuras.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Definiciones

A continuación se listan algunas de las definiciones que se utilizarán en este trabajo.

Definición 1. *Polígono:* Como se definió en el capítulo anterior un polígono se define como una región cerrada, conexa y finita del plano cuya frontera es el conjunto de n vértices v_1, v_2, \dots, v_n y n aristas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ de tal manera que aristas no consecutivas no comparten ningún vértice. Donde las aristas son segmentos de recta.

Esta definición coincide con la definición común de un polígono simple con respecto a sus aristas.

Es importante señalar que en este trabajo consideraremos que las aristas son segmentos de recta.

Definición 2. Polígono simple: Es un polígono en el cual ninguna de sus aristas no consecutivas se cruzan.

De aquí en adelante cuando hagamos referencia a un polígono éste será siempre un polígono simple, de acuerdo a las dos definiciones anteriores.

Definición 3. Polígonos ortogonales: Son aquellos polígonos cuyos ángulos internos miden $\frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$.

Definición 4. Diagonal: Una diagonal de un polígono P es un segmento de recta que tiene como extremos a dos vértices de P y está contenido en P .

Definición 5. Triangulación: Una triangulación $T(P)$ de un polígono P es una división del interior de P en triángulos con interiores ajenos, de tal forma que las aristas de estos triángulos son aristas o diagonales de P .

Definición 6. Visibilidad: Dados dos puntos p y q en el interior o en la frontera de un polígono P , decimos que q es visible desde p si y sólo si el segmento pq está totalmente contenido en P .

Definición 7. Vigilancia: Un subconjunto de puntos $G \subseteq P$ vigila a P si y sólo si cualquier punto $p \in P$ es visible desde al menos un punto de G .

Para cualquier polígono P , definimos $G(P)$ como el número mínimo de puntos de P que ven a todo P . En adelante utilizaremos indistintamente los términos vigilancia, cobertura o iluminación para referirnos a la vigilancia del interior de un polígono.

Definición 8. Guardia: De acuerdo a la definición anterior. Un guardia es un punto $x \in G$.

Sea P un polígono. De acuerdo a su naturaleza, los guardias que se utilizarán para vigilar a P se pueden clasificar de la siguiente forma:

1. Guardias punto: Son los guardias colocados en cualquier punto contenido en P .
2. Guardias vértice: Son aquellos que se colocan únicamente en vértices de P .
3. Guardias arista: Son los que pueden colocarse sobre aristas de P .
4. Guardias móviles: Son guardias que pueden desplazarse sobre diagonales de P .

Definición 9. Lámpara: Es una fuente de luz que ilumina todo a su alrededor. Es decir, ilumina a todo punto visible desde el.

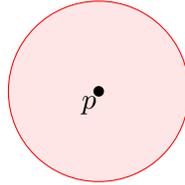


Figura 2.1: La lámpara colocada sobre el punto p , ilumina todo a su alrededor.

Definición 10. Reflector: Es una fuente de luz que ilumina una región angular. Los reflectores son fijos con alcance infinito.

Llamamos *reflector de tamaño α* ó *reflector- α* a un reflector que cubre una región angular, cuyo vértice corresponde al ápice de α siendo éste el ángulo de apertura con el que ilumina el reflector, $\alpha < 2\pi$.

Sea x el punto de origen de los rayos A y B que forman un ángulo α en sentido positivo. La región iluminada por un reflector- α está delimitada por los rayos que definen α (incluyendo los rayos), ver figura 2.2.

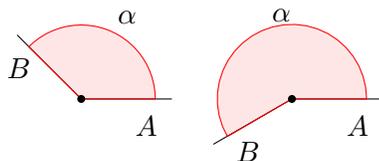


Figura 2.2: Reflectores de tamaño α , la región iluminada por los reflectores está delimitada por los rayos A y B considerados en sentido anti-horario o positivo

Definición 11. Radar: *Un radar es un reflector que además gira sobre su ápice.*

2.2. Teoría de gráficas

Definición 12. Gráfica: *Una gráfica G es una tupla (V,E) , donde V son los vértices de G , y E es un conjunto de pares de vértices llamados aristas de G . Un par de vértices u y v de G son llamados adyacentes, si el par $\{u,v\}$ es un elemento de E .*

Por simplicidad denotaremos uv al par no ordenado $\{u,v\}$.

Definición 13. Gráfica aplanable: *Una gráfica G es aplanable si puede dibujarse en el plano de tal forma que sus vértices son representados por puntos en el plano, y cada arista uv de G es representada por una curva que une a los puntos que representan a u y v . Más aún, dos aristas de G sólo se intersectan en sus extremos. En la imagen 2.3 se muestran dos gráficas de las cuales sólo la primera es plana.*

Definición 14. *Una gráfica plana es una gráfica aplanable dibujada en el plano sin que dos aristas se crucen en su interior relativo.*

Definición 15. Interior relativo: *Dado un segmento de recta, su interior relativo es cualquier punto sobre la recta que no es ninguno de sus extremos.*

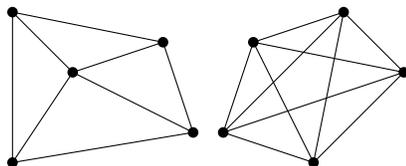


Figura 2.3: Dos gráficas de 5 vértices de las cuales sólo la primera es plana.

Definición 16. Subgráfica: Sea G una gráfica. Una gráfica H es una subgráfica de G ($H \subseteq G$) si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Cuando $H \subseteq G$ pero $H \neq G$, escribimos $H \subset G$ y decimos que H es una subgráfica propia de G .

Definición 17. Orden de una gráfica: El orden $|G|$ de una gráfica G se refiere al número de vértices de G .

Definición 18. Tamaño de una gráfica: El tamaño de G se refiere al número de aristas en G es decir $|E| = \text{tamaño}$.

Los símbolos $v(G)$ y $\varepsilon(G)$ denotan el número de vértices y aristas en la gráfica G , respectivamente.

Definición 19. Grado de un vértice: El grado de un vértice v de G es el número de vértices de G adyacentes a v y se denota como $\text{grado}(v)$ o $d(v)$. En situaciones en las que v pertenece a más de una gráfica utilizamos $\text{grado}_G(v)$ o $d_G(v)$.

Definición 20. Se denotará $\Delta(G)$ al grado máximo entre todos los vértices de G . De igual forma se denotará $\delta(G)$ al grado mínimo de entre todos los vértices de la gráfica.

Definición 21. Aristas adyacentes: Si $uv \in G$ y $uw \in G$ son aristas distintas, es decir $v \neq w$, entonces uv y uw son aristas adyacentes.

Definición 22. Gráfica Dual: Sea G una gráfica plana. Se puede definir a otra gráfica G^* a partir de G de la siguiente forma: por cada cara f de G se tiene un vértice f^* en G^* , y por cada arista e de G , se consideran las caras f y g , incidentes en e , entonces G^* tendrá la arista e^* que conecta a los vértices f^* y g^* . Decimos que G^* es la gráfica dual de G , y podemos ver que G^* es también una gráfica plana que puede ser dibujada colocando cada vértice f^* en el interior de cada cara f , y dibujando la arista e^* de forma que cruce sólo en un punto a e sin que cruce ninguna otra arista de G .

Definición 23. Vértice convexo: Sea v un vértice de P . Decimos que v es convexo si las aristas que inciden en él, forman un ángulo menor a π al interior de P .

Definición 24. Vértice cóncavo: Sea v un vértice de P . Decimos que v es cóncavo si las aristas que inciden en él, forman un ángulo mayor a π al interior de P .

2.3. Caminos, paseos, trayectorias y ciclos

Definición 25. Camino: Un camino en una gráfica G , es una secuencia finita no nula $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$ cuyos términos son alternadamente vértices y aristas de G , tal que, para $1 \leq i \leq k$, los extremos de e_i son v_{i-1} y v_i . La longitud de un camino es k .

Definición 26. uv-camino: Un uv-camino en una gráfica G , es un camino que comienza en el vértice u y termina en el vértice v .

Definición 27. uv-paseo: Un uv-paseo en una gráfica, es un uv-camino que no repite aristas.

Definición 28. uv-trayectoria: Una uv-trayectoria, es un uv-camino o (uv-paseo) tal que no repite vértices.

Definición 29. Circuito: Un uv-paseo en el cual $u = v$, y que contiene al menos tres aristas es llamado circuito. Un circuito debe terminar en el mismo vértice en que se empezó.

Definición 30. Ciclo: Un circuito que no repite vértices (excepto el primero y el último) es llamado ciclo.

Definición 31. Distancia: En una gráfica G , la distancia entre dos vértices u y v , es la longitud del menor uv-camino.

Denotaremos $d(v, w)$ a la distancia entre u y v .

2.4. Conexidad

Definición 32. Vértices conectados: Dos vértices u y v en una gráfica G , están conectados si $u = v$ o si $u \neq v$ y existe una uv-trayectoria en G .

Definición 33. Gráfica conexa: Una gráfica G es conexa, si todo par de vértices de G están conectados. Caso contrario se dice que G es desconexa.

Definición 34. Subgráfica conexa: Una subgráfica conexa de una gráfica G es el conjunto de todos los vértices que son alcanzables a partir de un vértice de G .

Definición 35. Componente conexa: Una subgráfica conexa H de una gráfica G es una componente conexa (o simplemente una componente) de G , si $H = H'$ siempre que H' sea una subgráfica conexa de G que contenga a H . Es decir, una componente de una gráfica es una subgráfica conexa máxima.

Una gráfica es conexa si y sólo si el número de sus componentes es uno. Denotaremos por $C(G)$ a las componentes de G .

Definición 36. Árbol: Sea G una gráfica sin ciclos (acíclica). G es un árbol si es una gráfica conexa acíclica [9].

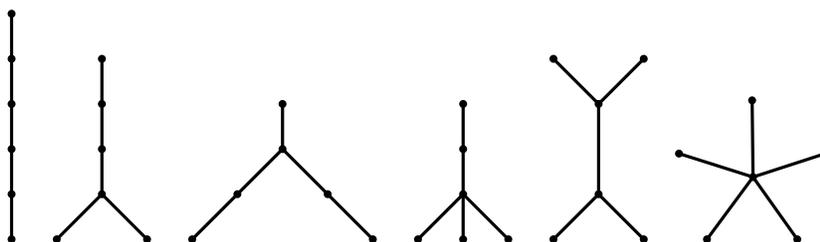


Figura 2.4: Árboles con seis vértices.

2.5. El problema de la Galería de Arte

En 1973, el matemático Víctor Klee planteó el problema de determinar el número de guardias necesarios y suficientes para vigilar el interior de una galería arte de n muros. En el problema original de Klee, los puntos para vigilar el interior son guardias que pueden vigilar 360° alrededor de su posición fija y la galería de arte es un polígono. La función $g(n)$ representa el máximo número de guardias necesarios para iluminar un polígono de n vértices: $g(n)$ guardias siempre son suficientes, y $g(n)$ guardias son necesarios para al menos un polígono de n vértices. De aquí la frase: $g(n)$ guardias son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes, o sólo necesarios y suficientes. Experimentando con valores pequeños de n y aumentando en uno cada vez, podemos establecer una cota mínima para $g(n)$. Para $n = 3$, claramente, se necesita exactamente un guardia, entonces $g(3) = 1$. Para $n = 4$ (un cuadrilátero) también puede ser cubierto por un sólo guardia, aun cuando el cuadrilátero no sea convexo, entonces $g(4) = 1$. Para $n = 5$ no es tan obvio que un guardia sea suficiente, pero sólo existen tres formas distintas que puede tomar un pentágono: con 0, 1 o 2 vértices cóncavos. Cualquiera de estas 3 formas puede ser cubierta con un sólo guardia, entonces $g(5) = 1$. Para $n = 6$ hay dos formas de crear un hexágono que necesitan dos guardias, entonces $g(6) = 2$. Todo ésto se puede observar en la figura 2.5.

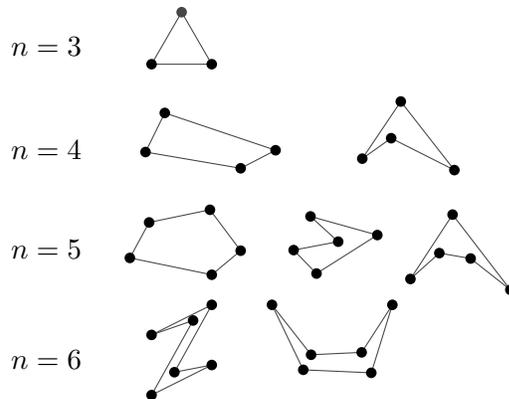


Figura 2.5: Polígonos con a lo más cinco vértices pueden ser cubiertos con un sólo guardia, pero algunos con seis vértices necesitan dos.

La segunda imagen de $n = 6$ puede generalizarse a un *peine* de k dientes y $n = 3k$ aristas que requiere k guardias (Fig. 2.6) (Chvátal 1975).

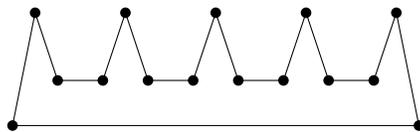


Figura 2.6: Cada diente del peine requiere un guardia. De aquí $n = 15$ y se requieren 5 guardias.

Ésto establece que $g(n) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Esta situación es típica en los teoremas de la galería de arte: muchas veces es fácil establecer una cota mínima mediante un ejemplo genérico que asienta la necesidad de una fórmula en particular. La parte difícil es establecer la suficiencia ya que necesita un argumento que funcione para *todos* los polígonos.

Vašek Chvátal estableció lo que en la actualidad se conoce como el *Teorema de Chvátal de la galería de arte* en el cual demostró que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son ocasionalmente necesarios y siempre suficientes para cubrir un polígono de n vértices. Este teorema ha sido

extendido en muchas direcciones, una de las cuales ha dado origen a la familia de problemas relacionada con la iluminación del interior de polígonos.

Tres años después de que Chvátal estableciera su teorema, S. Fisk presentó una prueba notablemente más simple a la de Chvátal y que se explica a continuación.

2.5.1. Prueba de Fisk

Demostración. Sea P un polígono simple. La prueba consiste en realizar una triangulación T del polígono P . Posteriormente realizar una 3-coloración de T .

Definición 37. k -coloración: Una k -coloración de una gráfica es la asignación de colores a cada uno de sus nodos, de tal manera que sólo se asigna un color por nodo, sin utilizar más de k colores, ni el mismo color para vértices adyacentes.

En la siguiente sección revisaremos más a detalle las triangulaciones, pero por el momento supondremos que siempre existe una triangulación.

Se puede observar que alguno de los tres colores no es utilizado en más de $\frac{1}{3}$ de los nodos lo que se explica a continuación. Sean a, b y c el número de ocurrencias de cada uno de los tres colores en la coloración de P , con $a \leq b \leq c$, entonces $a + b + c = n$. Si $a > \frac{n}{3}$, entonces la suma de las tres ocurrencias es más grande que n , por lo tanto, y como a debe ser entero, $a \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Entonces existe una clase cromática con a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices, digamos que es la *roja*. Entonces como cuarto paso se colocan guardias en cada nodo de color rojo. Como un triángulo es la gráfica completa de tres nodos, entonces, cada triángulo en $T(P)$ tiene los tres colores en sus vértices. Por lo tanto cada triángulo tiene un nodo de color rojo y por ende, un guardia en una de sus esquinas. Más aún, como los triángulos forman una partición de P , cualquier punto en el polígono está dentro de algún triángulo, y como los triángulos son convexos, entonces cada punto es cubierto por un guardia rojo. Entonces, los guardias cubren el polígono por completo y se utilizan a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ de ellos. \square

Esta prueba establece la suficiencia para cualquier polígono, y junto con la necesidad explicada en el punto anterior, entonces $g(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

2.5.2. Triangulación

La triangulación es una de las formas más simples de partir un polígono, la pregunta es ¿todos los polígonos pueden ser triangulados?

Teorema 1 (Teorema de Triangulación): Un polígono de n vértices puede ser particionado en $n - 2$ triángulos agregando $n - 3$ diagonales internas.

Demostración: La prueba es por inducción sobre n . El problema es trivialmente verdadero para $n = 3$. Sea P un polígono de n vértices, con $n \geq 4$. Sea v_2 un vértice convexo de P y consideremos los tres vértices consecutivos v_1, v_2, v_3 de P (es obvio que debe haber un vértice convexo). Buscamos una diagonal interna d . Si el segmento v_1v_3

está completamente al interior de P (i.e. que no interseca ∂P), entonces sea $d = v_1v_3$. De otra manera el triángulo cerrado $v_1v_2v_3$ debe contener al menos un vértice de P . Sea x el vértice de P más cercano a v_2 , donde la distancia es medida perpendicularmente a v_1v_3 hacia el interior de P , ver la figura 2.7, y sea $d = v_2x$

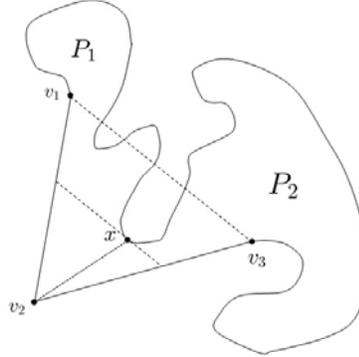


Figura 2.7: La línea xv_2 es una diagonal interna.

En cualquiera de los casos, d divide P en dos polígonos pequeños P_1 y P_2 . Si P_i tiene n_i vértices, $i = 1, 2$, entonces $n_1 + n_2 = n + 2$ debido a que P_1 y P_2 comparten los extremos de d . Claramente $n_i \geq 3$, $i = 1, 2$, lo que implica que $n_i \leq n$, $i = 1, 2$. Aplicando la hipótesis de inducción a cada polígono resulta en una triangulación de P de $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$ triángulos, y $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n - 3$ diagonales, incluyendo a d . \square

Corolario 1. *La suma de los ángulos internos de un polígono es $(n - 2)\pi$*

Demostración: Cada uno de los $n - 2$ triángulos aporta π radianes a la suma total de los ángulos internos del polígono. \square

2.5.3. Partición de polígonos ortogonales en polígonos con forma de L

La partición de polígonos ortogonales en formas-L es una forma alterna a la cuadrilaterización convexa propuesta por J. O'Rourke [10] para probar que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias son suficientes para vigilar un polígono ortogonal y para colocar los guardias en tiempo $O(n \log n)$. Notemos que un polígono con forma de L puede ser vigilado por un sólo guardia. La prueba para la partición en formas-L se realiza con base en los ángulos cóncavos, a los que denominaremos r^1 , en lugar de n , que es el número total de vértices del polígono. Ésto puede realizarse ya que hay una relación fija entre r y n . En [11] J. Urrutia da una explicación sencilla a la partición en formas-L.

¹“r” por su término en ingles “*reflex*”.

Lema 1. *En un polígono ortogonal de n vértices, r de los cuales son cóncavos, se cumple que $n = 2r + 4$.*

Demostración: Sea P un polígono ortogonal. Sea c el número de vértices convexos de P (su ángulo mide $\frac{\pi}{2}$); claramente $n = c + r$. Tomando en cuenta que la suma de los ángulos internos de un polígono simple es $(n - 2)\pi$ y como el ángulo de los vértices cóncavos es $\frac{3\pi}{2}$,

$$(n - 2)\pi = c\left(\frac{\pi}{2}\right) + r\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

como $c = n - r$, entonces:

$$(n - 2)\pi = (n - r)\left(\frac{\pi}{2}\right) + r\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

lo que nos lleva a,

$$n = 2r + 4$$

□

O'Rourke demostró que:

Teorema 2. $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ guardias siempre son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar un polígono ortogonal con r vértices cóncavos.

Demostración: La prueba se realiza por inducción en r . Si $r = 0$ el resultado claramente es verdadero. Surgen dos casos:

1. Hay un segmento de línea vertical u horizontal l que conecta dos vértices cóncavos de P de tal forma que el interior de l está totalmente contenido en el interior de P .
2. No existe dicho segmento de línea horizontal o vertical. En este caso decimos que P está en posición general.

Sea l un segmento de línea horizontal como en el caso (1), el cual divide a P en dos polígonos ortogonales Q y R con s y t vértices cóncavos respectivamente de tal forma que $r = s + t + 2$. Por inducción, podemos vigilar Q y R con $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$ y $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1$ respectivamente. Pero $(\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1) + (\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1) \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ y el resultado se sigue. Para probar (2) necesitamos lo siguiente:

Definición 38. *Definimos un corte de un polígono ortogonal como la extensión de una de las dos aristas adyacentes a un vértice cóncavo a través del interior del polígono hasta que choque con la frontera del polígono.*

Un corte elimina el vértice cóncavo en el sentido que el vértice ya no es cóncavo en cualquiera de las dos piezas de la partición determinada por el corte, Q o R . Claramente un corte no introduce ningún vértice cóncavo.

Definición 39. *Un corte es llamado corte impar si al menos alguno de Q o R tienen un número impar de vértices cóncavos.*

Para probar el teorema vamos a utilizar el lema 2 que indica que *todo polígono ortogonal en posición general tiene un corte impar*. Este lema se probará más adelante.

Sea P un polígono ortogonal en posición general. Consideremos un corte impar que parte a P en dos subpolígonos Q y R . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que Q tiene un número impar de vértices cóncavos. Sean s y t el número de vértices cóncavos de Q y R respectivamente. Entonces, por inducción, podemos vigilar Q y R con $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$ y $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1$ respectivamente. Notemos que $s + t = r - 1$, y como s es impar se sigue de un simple caso de análisis que $(\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1) + (\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1) \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$. Con ésto queda finalizada esta prueba. \square

Prueba del teorema 2 ahora probaremos lo siguiente:

Lema 2. *Todo polígono ortogonal en posición general tiene un corte impar.*

Demostración: Primero hay que notar que la condición de que el polígono esté en posición general es esencial. El polígono de la figura 2.8(a) no tiene cortes impares. Mas aún, no siempre existe un corte impar horizontal. El polígono de la figura 2.8(b) no tiene corte impar horizontal. Ésto complica las cosas un poco.

Vamos a dividir los cortes en cortes horizontales (cortes- H) y cortes verticales (cortes- V).

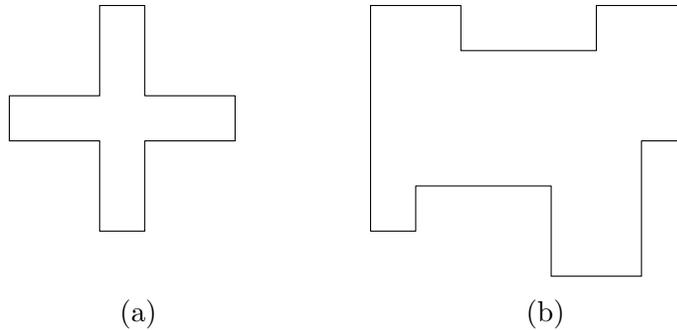


Figura 2.8: (a) Polígono ortogonal sin cortes impares. (b) Polígono ortogonal son cortes horizontales impares.

Notemos primero que si el número de vértices cóncavos de P es par, entonces el número de vértices cóncavos de Q más los de R es igual a $r - 1$, lo cual es impar, y entonces alguno de Q o R debe tener un número impar de vértices cóncavos. Supongamos entonces que P tiene un número impar de vértices cóncavos.

Definición 40. Llamaremos par horizontal a dos vértices de P si son los vértices finales de una arista horizontal de P .

Definición 41. Un vértice cóncavo v de P es llamado H -aislado si el otro vértice final de la arista horizontal incidente en él es convexo.

Obtenemos una partición de P cortando P a lo largo de cortes- H de cada vértice cóncavo de P que pertenece a un par horizontal, ver figura 2.9. A esto lo llamamos una H -partición π de P .

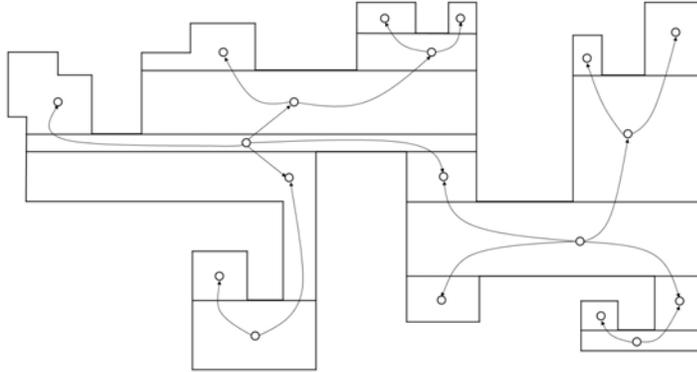


Figura 2.9: H -partición de P y su gráfica- H .

Definición 42. Una gráfica- H de la partición mencionada anteriormente es la gráfica orientada cuyo conjunto de vértices es el conjunto de regiones de esta partición.

Dos regiones adyacentes, X y Y están conectadas por una arista orientada de X a Y si el corte- H que las separa es una extensión de una arista de P en el perímetro de X , figura 2.9. Ahora podemos clasificar los vértices de la gráfica- H de P de la siguiente manera:

Nodos Hoja Vértices con grado de entrada 1

Nodos Pozo Vértices con grado de entrada 2 y grado de salida 0

Nodos Fuente Vértices con grado de salida 2 o 4

Nodos Rama Vértices con grado de salida 2 y grado de entrada 1

Lema 3. Si la gráfica- H de P contiene un pozo, entonces P tiene un corte impar.

Demostración: Sea K un pozo en P , y sean h y h' los cortes- H superior e inferior, respectivamente, que separan a K de sus vecinos. Si K contiene vértices H -aislados, alguno de h o h' debe de ser un corte impar. Si K tiene vértices H -aislados y h es un corte par, el vértice H -aislado que está más arriba, digamos u , de K genera un corte impar, como se muestra en la figura 2.10. \square

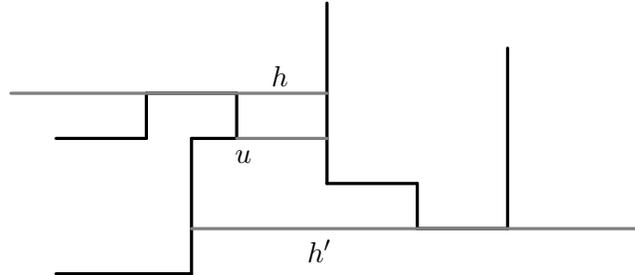


Figura 2.10: Encontrando un corte impar en un pozo.

Ahora probemos lo siguiente:

Lema 4. Si P no contiene cortes impares, su gráfica- H contiene una sola fuente, P tiene exactamente un vértice H -aislado, y está localizado en la fuente de su gráfica- H .

Demostración: Observemos que si la gráfica- H de P contiene dos fuentes, entonces el camino que las une debe contener necesariamente un pozo. Sin embargo, como P no admite cortes impares, su gráfica- H no tiene pozos. De aquí se sigue que la gráfica- H de P contiene una única fuente. Como la gráfica- H de P es un árbol con una sola fuente, cada vértice, excepto la fuente, tiene grado de entrada 1. Sea K una de estas regiones de la H -partición de P . Entonces, como P no admite cortes impares, el corte correspondiente a la arista entrante de K es un corte par. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que esta arista es una arista inferior de K . Entonces si K contiene vértices H -aislados, el que está más abajo de ellos genera un corte impar, lo cual es una contradicción. Sin embargo, como P contiene un número impar de vértices cóncavos, debe contener al menos un vértice H -aislado, y éste debe ser un vértice en la región fuente de la H -partición de P . Por otra parte, notemos que si la región fuente contiene más de un vértice H -aislado, alguno de ellos podría generar un corte impar, lo cual también es una contradicción, con lo que concluye la prueba. \square

Los resultados probados para los cortes- H se mantienen para los cortes- V , y en particular tenemos que si P no admite cortes impares verticales, tiene exactamente un vértice V -aislado localizado en la región fuente de la gráfica- V de P .

Algo más que necesitamos probar es lo siguiente:

Lema 5. Todo polígono ortogonal P en posición general con un número r impar de vértices admite un corte impar, $r \geq 3$.

Demostración: Como P no admite cortes impares, tiene exactamente un vértice H -aislado u y un vértice V -aislado v . Por otro lado, estos vértices están en regiones fuente de la gráfica- H y la gráfica- V de P . Cualquier otro vértice cóncavo de P

pertenece a un par H o V . Por lo tanto, todos los vértices cóncavos de P se encuentran en una cadena de vértices cóncavos que inicia, digamos, en u y termina en v ; ver figura 2.11. Ésto implica que u y v se encuentran en regiones hoja de las particiones H y V de P , lo que es una contradicción. \square

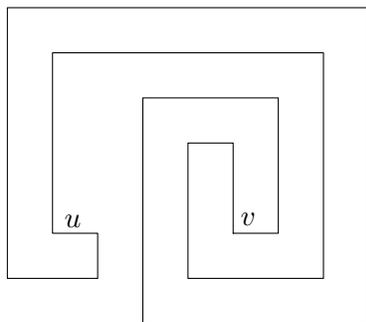
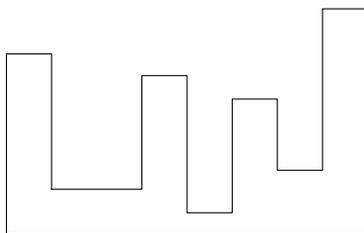


Figura 2.11: Polígono ortogonal en espiral.

Ésto concluye la prueba del teorema 2. \square

A continuación veremos un algoritmo que toma tiempo $O(n \log n)$ para partir polígonos simples en polígonos con forma L.²

Definición 43. *Un polígono ortogonal Q es llamado un histograma vertical si tiene una arista horizontal, llamada la base de Q , de tal manera que cualquier punto de Q es visible desde cualquier punto de su base, figura 2.12.*



5

Figura 2.12: Histograma.

²Utilizando el algoritmo de Chazelle para una triangulación se puede implementar un algoritmo lineal.

Lema 6. *Si un polígono ortogonal no tiene cortes- H impares, puede ser descompuesto en $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ piezas con forma de L .*

Demostración: Observemos por el lema 4 que la gráfica- H de cualquier polígono con estas características tiene exactamente una fuente, y un vértice H -aislado en el interior de la fuente. Es fácil ver que este corte descompone a P en dos histogramas. El resultado se sigue partiendo todos estos histogramas cortándolos a lo largo de una línea vertical a través de cada segundo vértice cóncavo. \square

Para partir un polígono en piezas con forma- L supongamos primero que P no tiene cortes horizontales que unan dos vértices cóncavos. Ésto puede resolverse fácilmente. Además supondremos que P contiene un número impar de vértices cóncavos. En el caso en que P tenga un número par de vértices, podemos crear un vértice cóncavo extra para P de la siguiente manera: Sea e la arista horizontal con la coordenada en y más pequeña y sea u su vértice izquierdo. Como suponemos que P está en posición general, entonces todos sus vértices tienen coordenadas diferentes. Sea ϵ tal que la distancia horizontal y vertical entre cualesquiera dos vértices de P es a lo más ϵ . Recortemos un cuadro de P con lados paralelos a los ejes coordenados de tal manera que el tamaño de las aristas de este cuadrado es ϵ y u sea su vértice más abajo y a la izquierda. Sea P' el polígono horizontal resultante. P' tiene exactamente $r + 1$ vértices cóncavos. El enfoque es justificado por la siguiente observación: un corte impar de un polígono con un número impar de vértices cóncavos lo divide en dos subpolígonos, cada uno con un número impar de vértices cóncavos. Por otra parte observemos que si cortamos P a lo largo de un corte impar h , y h' es un corte impar de P diferente a h , entonces h' también es un corte impar del subpolígono de P en el que está contenido. El algoritmo para encontrar una L -partición de un polígono P con un número impar de vértices cóncavos es el siguiente:

-
1. Encontrar todos los cortes- H de P .
 2. Encontrar todos los cortes- H impares de P .
 3. Cortar P en cada corte- H impar.
 4. Cada pieza resultante no tiene cortes- H impares, *i.e.* es un histograma. Partir cada histograma con una vertical a lo largo de cada segundo vértice cóncavo.
-

Notemos que cada subpolígono P_i de P obtenido en el paso 3 del algoritmo no tiene cortes impares, y por el lema 6 puede ser particionado en a lo más $\lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor - 1$ piezas con forma- L , donde r_i es el número de vértices cóncavos de P_i . Encontrar los cortes impares de P se puede realizar en tiempo $O(n \log n)$ haciendo un barrido de línea horizontal. Los cortes impares se pueden encontrar de la siguiente forma: elegir un vértice cóncavo de P y etiquetarlo con 1. Colocar un contador de vértices cóncavos de P en 1. Recorrer el

contorno de P . Cada vez que encontremos un vértice cóncavo de P incrementamos el contador en uno, y etiquetamos el vértice con el valor del contador. Cada que encontremos el punto final de un corte horizontal que no es un vértice de P , lo etiquetamos con el valor del contador. Un corte horizontal es par si el valor absoluto de la diferencia de las etiquetas de sus extremos es impar. Ésto puede determinarse en tiempo lineal. El paso 3 también puede realizarse en tiempo lineal. Todo ésto da como resultado el siguiente teorema:

Teorema 3. *Un polígono ortogonal con un número impar de vértices cóncavos puede ser descompuesto en a lo más $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ polígonos con forma-L en tiempo $O(n \log n)$*

Capítulo 3

Antecedentes

A continuación se presentan algunos de los resultados que sirvieron como referencia para este trabajo.

3.1. Reflectores fijos

En 1997, P. Bose, L. Guibas, A. Lubiw, M. Overmars, D. Souvaine y J. Urrutia presentan el primer problema estudiado sobre iluminación con reflectores, conocido como *el problema de la iluminación de estrados* [5]. Este problema consiste en decidir si los reflectores de un teatro pueden ser rotados sobre sus bases de tal manera que todo el estrado quede iluminado.

Supongamos que tenemos un segmento de línea L y un conjunto de reflectores $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ representados por fuentes de luz que iluminan sólo una zona angular de tamaño α_i , $i = 1, \dots, n$. Supongamos que los vértices de dichos reflectores están fijos y que estos se pueden rotar sobre sus vértices. ¿Será posible rotar r_1, \dots, r_n de tal manera que el segmento de línea L quede iluminado? Ver figura 3.1.

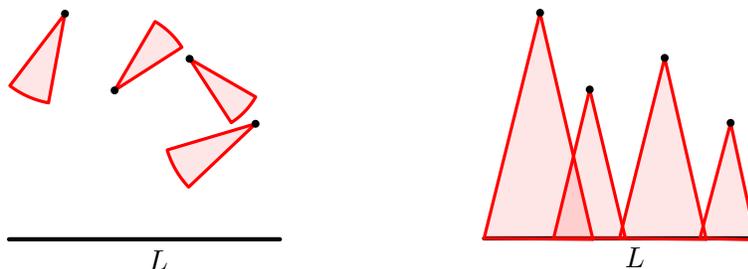


Figura 3.1: El problema de la iluminación de estrados.

En el año 2000, Ito Hiroy, Uehara Hideyuki y Yokoyama Mitsuo[6] demostraron que este

problema es NP-Completo.

El problema de iluminación óptima de estrados se ha estudiado en [6] y [12], el problema de iluminación del plano en [13], y el problema de iluminación de polígonos en [14].

En el artículo [8], V. Estivill-Castro, J. O'Rourke, J. Urrutia y D. Xu demuestran que reflectores de tamaño π son suficientes para iluminar un polígono y que ángulos menores a π no son suficientes para iluminar cualquier polígono. Además, restringen la colocación de los reflectores a sólo uno por vértice. Estos resultados se muestran a continuación.

Teorema 4. *Existen polígonos simples que no pueden ser iluminados con reflectores de tamaño menor a π colocados en sus vértices, aún cuando se permita colocar un reflector por vértice.*

Demostración. Veremos la demostración para reflectores- $\frac{\pi}{2}$. La prueba completa puede ser encontrada en [8].

El polígono que se muestra en la figura 3.2 es simétrico con respecto a una vertical que pasa por el punto medio v_m . Sea L la mitad de P que está a la izquierda de la vertical que pasa por v_m y sea R la mitad a la derecha. Los vértices en L están etiquetados para reflejar sus contrapartes en R . Los ángulos internos en los vértices v_0, v_1 y v_2 son mayores a $\frac{\pi}{2}$; los vértices r_1, r_2 y v_m son cóncavos.

Ahora mostraremos que P no puede ser iluminado reflectores ortogonales en cada uno de sus vértices. El reflector ortogonal en v_m ilumina vértices en L o en R , pero no en ambos. Supongamos sin pérdida de generalidad que el reflector ortogonal en v_m ilumina hacia la izquierda.

Reflectores de $\frac{\pi}{2}$ colocados en los vértices v_i van a dejar puntos cercanos a cada v_i , en la frontera de P , sin iluminar. La forma de iluminar estos puntos es colocando reflectores en los vértices r_i . Notemos que ésto no va a permitir que los reflectores en los vértices r_i apunten hacia v_0 ; lo que implica que los puntos cercanos a v_0 deberán ser iluminados únicamente por el reflector en v_0 , lo cual no es posible. \square

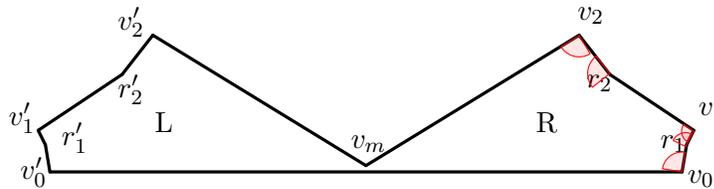


Figura 3.2: Un Polígono que no puede ser iluminado colocando reflectores- $\frac{\pi}{2}$.

Teorema 5. *Sea P un polígono con n vértices. Sea F un conjunto de n reflectores- α . Si el tamaño de los reflectores es π entonces es suficiente para iluminar P .*

La prueba para mostrar que π es suficiente es por inducción en el número de vértices del polígono.

Si P es un triángulo, un reflector en cualquier vértice es suficiente para iluminarlo. Supongamos que P tiene más de tres vértices. Entonces, P debe tener una oreja, por el *Teorema de las dos orejas de Meister*¹: tres vértices consecutivos a, b, c tales que ac es una diagonal interna. El ángulo en el vértice de la punta de la oreja es estrictamente convexo. Si colocamos un reflector para cubrir el ángulo interno en b cubrimos el triángulo abc . Si quitamos esta oreja queda un polígono de $n - 1$ vértices, el cual puede ser iluminado por la hipótesis de inducción.

3.2. Iluminación con radares

En [15] E. Kranakis, F. MacQuarie, O. Morales y J. Urrutia utilizaron radares con diferentes variantes, con los cuales obtuvieron resultados interesantes. A continuación se presentan algunos de ellos.

Definición 44. $\Phi(P; R)$

Sea P un conjunto de puntos en el plano y R una región plana. Sea $\Phi(P; R)$ el ángulo más pequeño a todos los ángulos $\phi \leq 2\pi$ tal que si radares- ϕ son colocados en los puntos de P , entonces existe una orientación inicial de los radares de tal forma que toda la región R es vigilada en todo momento.

Definición 45. $\Phi(n; R)$

Sea R una región en el plano, n un número natural y P un conjunto de puntos en el plano. Sea $\Phi(n; R)$ el tamaño más pequeño para todo P conjunto de puntos de cardinalidad n .

Definición 46. Sector vigilado Considere un radar- α colocado en un punto k que rota en sentido positivo. El sector vigilado por el reflector en el tiempo t se define de la siguiente manera:

- Sea $F_k(\phi; 0)$ el sector inicial cuyo ápice es k , su inicio tiene una orientación ϕ y su fin tiene una orientación $\phi + \alpha$.
- En el tiempo t el radar rotará un ángulo de t radianes. Sea $F_k(\phi, t)$ el sector cuyo ápice es k , su inicio tiene una orientación $\phi + t$ y su fin tiene una orientación $\phi + \alpha + t$.

Teorema 6. [15] Para cualquier conjunto P de $n \geq 2$ radares en una recta L , se tiene que $\Phi(P; L) = \frac{3\pi}{n}$.

¹Computational Geometry in C. Cambridge University Press, p.16.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que la recta L es horizontal. Sea $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ un conjunto de n radares- α en L , y sean los puntos tales que p_i siempre esté a la izquierda de p_{i+1} , ($i = 0, 1, \dots, n - 1$). Primero se probará que el ángulo $\frac{3\pi}{n}$ es siempre suficiente. Sea la orientación inicial de los radares $F_{p_i}(\frac{i3\pi}{n}; 0)$, para ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) ver figura 3.3.

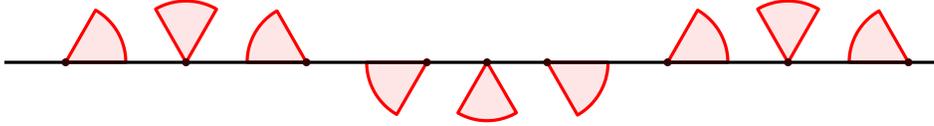


Figura 3.3: Orientación inicial de radares- α para vigilar una recta L .

Se define un plano dual de la siguiente manera: cada radar i es un sector circular de un círculo unitario C delimitado por $\frac{i3\pi}{n}$ y $\frac{(i+1)3\pi}{n}$, en el tiempo t , la recta L es representada como un segmento dirigido \vec{L} tal que \vec{L} cruza el centro de C y la cabeza de \vec{L} forma un ángulo t con el eje horizontal, ver figura 3.4 (a).

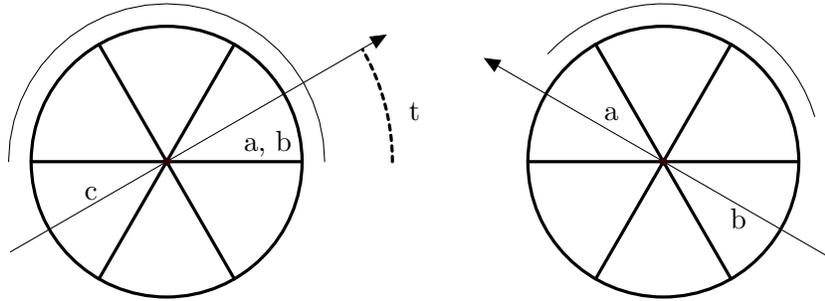


Figura 3.4: (a) Orientación en t . (b) Si $F(n, L) < \frac{3\pi}{2}$, L no está completamente vigilada todo el tiempo.

En el plano dual, los radares son estáticos mientras que L rota de manera continua. La orientación \vec{L} de L preserva la rotación de los radares en el plano original. La cabeza de \vec{L} representa ∞ , mientras que la cola representa $-\infty$ del plano original. Como la suma de ángulos es 3π , el sector circular $[0, \pi)$ de C en el plano dual es siempre vigilado por dos conjuntos $S_1, S_2 \subseteq P$ de radares, mientras que el sector circular $[\pi, 2\pi)$ de C en el plano dual es vigilado por un conjunto $S_3 \subseteq P$ de radares. Observe que cada radar en S_3 está entre S_1 y S_2 en el plano original. Sean $a \in S_1$, $b \in S_2$ y $c \in S_3$ los radares que vigilan un segmento de \vec{L} en el tiempo t en el plano dual. Si a y b vigilan la

cabeza de \vec{L} , c vigila la cola. Por lo tanto, L está vigilada por c y b en el plano original. De manera similar si a y b vigilan la cola de \vec{L} , c vigila la cabeza. Por lo tanto, L está vigilada por a y c en el plano original.

Ahora se probará que un ángulo de $\frac{3\pi}{n}$ es siempre necesario.

Supongamos por contradicción que la suma de ángulos es menor que 3π . Entonces existe un tiempo t cuando sólo dos radares, supongamos a y b , vigilan un segmento de \vec{L} en el plano dual. Como se representa en la figura 3.4 (b).

Supongamos que a vigila la cola y b la cabeza de \vec{L} en el plano dual, ver figura 3.4 (b).

Por lo tanto, L está completamente vigilada en el plano original. Sin embargo, en el tiempo $t + \pi$, a vigila la cabeza y b la cola de \vec{L} en plano dual. Por lo tanto, el segmento \overline{ab} de L en el plano original no está cubierto. \square

Otro resultado interesante es sobre vigilancia del plano con radares de tamaño π , para el cual, primero se demostrará un lema.

Lema 7. [15] Sean a y b dos radares- α en una línea horizontal. Supondremos que la orientación inicial en a y b es $F_a(\pi; 0)$, $F_b(\pi - \alpha; 0)$ respectivamente, y a está a la izquierda de b . Si $0 \leq t \leq \pi$, entonces la intersección de los sectores circulares de los radares, vigilan un sector de 2α . Si $\pi < t < 2\pi$, entonces los radares dejan un corredor sin vigilar.

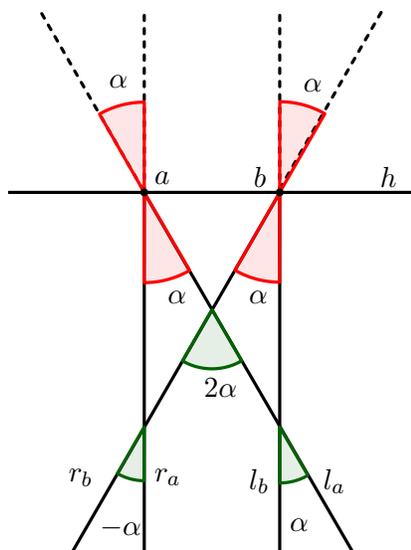
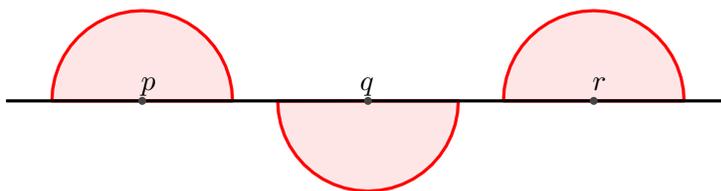
Demostración. Sean l_a , l_b , r_a y r_b los rayos izquierdo y derecho que definen los conos de los radares en a y en b respectivamente. Sea h el eje horizontal. Al tiempo t , $\angle(l_b, h) = \pi - t$. Observe que $\angle(r_a, r_b) = -\alpha$ y $\angle(l_b, l_a) = \alpha$. Por lo tanto cuando $\pi < t < 2\pi$, los rayos r_a y r_b no se intersectan, es decir $F_a(\pi; t) \cap F_b(\pi - \alpha; t) = \emptyset$, ya que la coordenada x de a es menor que la de b . Considere la intersección x entre r_a y l_b ; ver figura 3.5. No es difícil ver que l_a y r_b determinan un cono de vigilancia incidente en x de tamaño 2α . \square

Teorema 7. [15] Sea P el plano. Se tiene que $\Phi(3; P) = \pi$.

Demostración. Sean p, q, r tres radares- π en el plano. Si los radares son colineales, entonces se puede verificar, como se verá adelante, que la configuración inicial de la figura 3.6 es correcta.

Por lo tanto, supongamos sin pérdida de generalidad que los radares no son colineales, además se puede suponer que el segmento \overline{pr} es horizontal y que q se encuentra arriba de \overline{pr} . Sea C el circuncírculo de p, q, r , oriente p como $F_p(l; 0)$, donde l es el ángulo de la tangente de C en p , q como $F_1(\pi + \angle qpr; 0)$ y r como $F_r(0; 0)$ como se muestra en la figura 3.7 (a).

Considere cualquier punto a en la circunferencia C de pqr , observe que el ángulo que forma cada radar con a es igual al arco, ver figura 3.7 (b). Por lo tanto se intersectan en a . Se puede verificar que cuando a está en el arco pr , qr deja un cono sin vigilar con vértice en a . De cualquier forma, p vigila dicho cono no vigilado por qr . Cuando a está en

Figura 3.5: Dos radares- α giratorios.Figura 3.6: Orientación inicial 3 radares- α colineales.

el arco rq los roles cambian a pq y r respectivamente y cuando a está en arco qp , los roles cambian a pr y q respectivamente. Ésto prueba la cota si los puntos son no colineales.

Supongamos que p, q y r son colineales. Sin pérdida de generalidad asuma que están en una recta horizontal, y que la coordenada x de q es mayor que la coordenada x de p y menor que la coordenada x de r . Orientamos p, q, r como $F_p(0; 0)$, $F_q(\pi; 0)$ y $F_r(0; 0)$. Por el lema 7 p y q cubren el plano en el tiempo $t < \pi$ y q y r cubren el plano en el tiempo $\pi \leq t < 2\pi$.

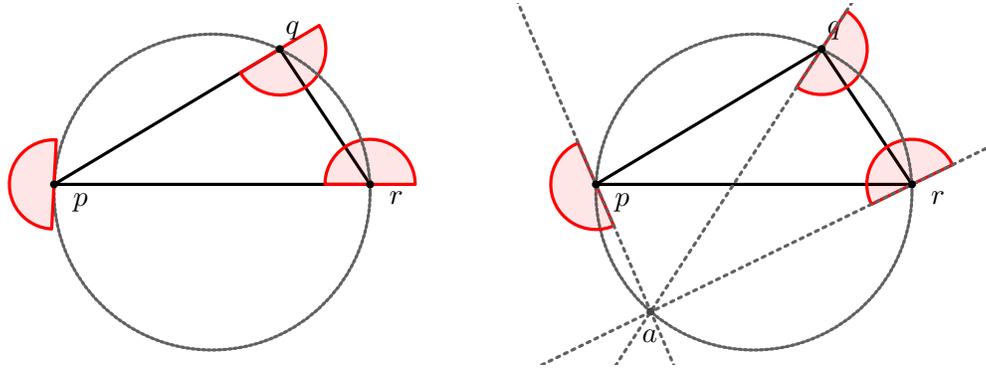


Figura 3.7: Los tres reflectores se intersectan en a .

Para probar que la cota es justa, asuma por contradicción que $F(3, P) = \pi - \epsilon$. Supongamos que en el tiempo t los radares vigilan el plano.

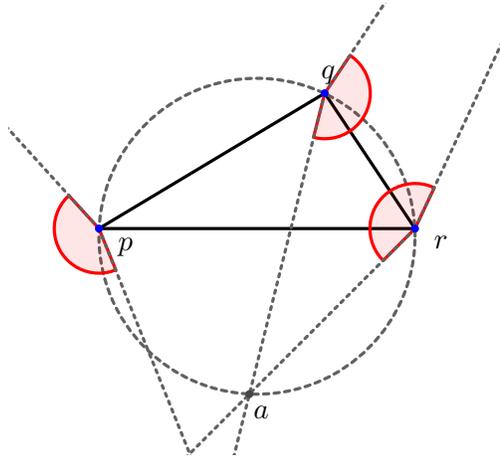


Figura 3.8: Si los reflectores son menores a π hay al menos uno que no cubre a a .

Entonces ya que dos radares no pueden cubrir el plano, existe un punto a en el área vigilada por p donde se intersectan un lado del radar q con otro del radar r , como se muestra en la figura 3.8. Sin embargo a no es vigilado en el tiempo $t + \pi$ ya que $F(3, P) = \pi - \epsilon$. □

3.3. Galerías de arte ortogonales

En 1994, V. Estivill-Castro y J. Urrutia [7] establecieron una cota de $\lfloor \frac{3(n-1)}{8} \rfloor$ para el número de reflectores ortogonales suficientes para iluminar por completo el interior de un polígono ortogonal de n vértices. En el artículo consideran una galería de arte dada por

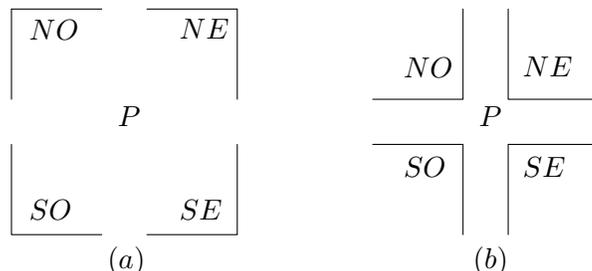


Figura 3.9: Los 8 posibles tipos de vértices en un polígono ortogonal. (a) Vértices convexos. (b) Vértices cóncavos.

un polígono ortogonal P de n vértices, sin hoyos. Estudian el caso para el que la apertura de los reflectores es $\alpha = \frac{\pi}{2}$. A continuación se muestran algunos de los conceptos interesantes de dicho artículo.

Dado un polígono ortogonal P , se dice que una arista e de P es una *arista norte* ó *arista-N* si el interior del polígono queda inmediatamente por debajo de ella. Aristas este, oeste y sur son definidas de forma análoga.

Se dice que un vértice es un *vértice noreste* o *vértice-NE* si las aristas del polígono que inciden en el vértice son una arista norte y una arista este. *Vértice-NO*, vértice-SE y vértice-SO se definen de manera similar.

En la figura 3.9 se muestran los ocho tipos de vértices que puede haber en un polígono ortogonal.

También se definen una serie de reglas para colocar los reflectores, a las que denominan *reglas de iluminación* que se describen a continuación.

- Regla de iluminación noreste o regla-NE: En cada e arista norte del polígono, colocar un reflector alineado con e en su vértice este. En cada e arista este del polígono, colocar un reflector alineado con e en su vértice norte.
- La regla-NO, la regla-SE y la regla-SO, son definidas de manera similar.

Cuando decimos que un reflector está alineado con una arista e de un polígono significa que alguno de sus lados contiene a e , claro está que la región iluminada por el reflector debe apuntar hacia adentro del polígono.

Teorema 8. *La regla-NE produce una asignación de reflectores que ilumina el interior de P .*

Demostración. Sea p un punto al interior del polígono P . Sea x el primer punto en la frontera de P visible por un rayo horizontal que va de p hacia el este. Claramente, x

está en una arista e la cual es una arista-E y p es visible desde x . Ahora, consideremos un punto x' en e justo por encima de x y consideremos el rectángulo R con puntos extremos en x' y p_i ver la figura 3.10 (b).

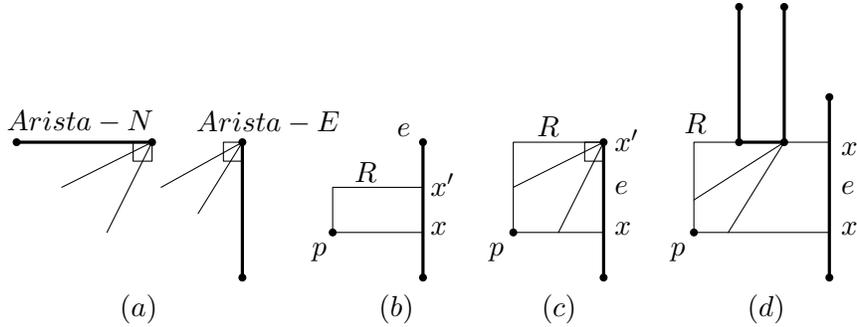


Figura 3.10: Diagrama que ilustra la colocación de los reflectores por la regla-NE.

Claramente si x' está lo suficientemente cerca de x , el rectángulo R está contenido en P . Consideremos mover x' hacia el norte hasta que no pueda moverse más sin que R deje el interior de P . Ésto sucede por:

- x' ha alcanzado el vértice más al norte de e , en cuyo caso, p es iluminado por un reflector en x' ; figura 3.10 (c), ó
- el lado superior de R coincide con una arista-N, en cuyo caso, p es iluminado por una reflector colocado en el vértice este de la arista-N; figura 3.10 (d).

En ambos casos p es iluminado y la prueba está completa. □

Las demostraciones de los teoremas análogos correspondientes a las otras reglas son similares.

Teorema 9. Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces $\lfloor \frac{3(n-1)}{8} \rfloor$ reflectores son suficientes para iluminar un polígono ortogonal P .

Demostración. Coloquemos reflectores siguiendo cada una de las cuatro reglas. Denotemos como $\|X\|$ al número de reflectores utilizados por la regla-X. Note que cada arista del polígono recibe a lo más dos reflectores (por ejemplo, una arista-N recibe un reflector en su vértice-E por la regla-NE y otro en su vértice-O por la regla-NO). Más aún, en la regla-NE, un vértice-NE convexo recibe sólo un reflector. Así, el número de reflectores utilizados por la regla-NE, $\|NE\|$, está dado por:

$$\|NE\| = \|N\|_e + \|E\|_e - \|NE\|_c$$

donde $\|N\|_e$ es el número de aristas-N, $\|E\|_e$ es el número de aristas-E y $\|NE\|_c$ es el número de vértices-NE convexos. Entonces, el número total de reflectores utilizando las cuatro reglas está dado por:

$$\|NE\| + \|NO\| + \|SE\| + \|SO\| = 2n - c$$

donde c es el número de vértices convexos del polígono.

Como $c = \frac{(n+4)}{2}$, se tiene que $\|NE\| + \|NO\| + \|SE\| + \|SO\| = \frac{(3n-4)}{2}$.

Ahora notemos que las reglas definen conjuntos de reflectores mutuamente disjuntos; así, hay una de las cuatro reglas que utiliza no más de $\lfloor \frac{3(n-1)}{8} \rfloor$ reflectores. Entonces basta colocar reflectores de acuerdo a la regla que utiliza menos. \square

En la figura 3.11 se muestran polígonos que requieren $\lfloor \frac{3(n-1)}{8} \rfloor$ reflectores.

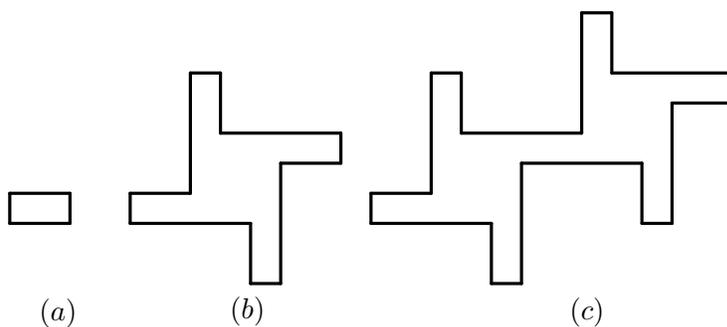


Figura 3.11: (a) Un rectángulo requiere sólo un reflector ortogonal. (b) Polígono que requiere cuatro reflectores ortogonales. (c) si pegamos dos polígonos como el de (b), el número de vértices se incrementa en 8, pero sólo se requieren 3 reflectores más.

Capítulo 4

Resultados con birradares

A la fecha existe una gran cantidad de variantes para resolver el problema de la galería de arte. En cuanto al tipo de guardias, como se ha mencionado anteriormente, se han utilizado guardias puntuales, guardias que cubren una cierta región angular, etc. La propuesta de este trabajo es utilizar guardias que pueden cubrir dos regiones angulares opuestas por el vértice y que además giran a una velocidad constante.

Definición 47. Radar bidireccional: *es una fuente de luz con alcance infinito que ilumina dos ángulos opuestos por el vértice y que gira a una velocidad angular constante.*

Un radar bidireccional puede verse como dos radares, de tamaño menor a π , opuestos por el vértice, de tal manera que las dos regiones no cubiertas por el radar, a las que llamaremos sombras, también comprenden dos ángulos opuestos por el vértice, ver figura 4.1.

El valor de α determina el tamaño del radar, de tal manera que podemos referirnos a un birradar- α como un birradar de tamaño α .

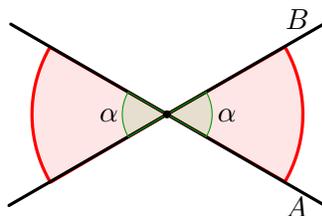


Figura 4.1: Birradar- α delimitado por las rectas A y B en sentido positivo. Las sombras están delimitadas por las rectas B y A en el mismo sentido(sin incluirlas).

En adelante vamos a utilizar los términos *birradar* ó *birradar- α* para referirnos a los radares bidireccionales de tamaño α .

Vamos a llamar *cuña de sombra* a la sombra de un birradar- α .

Definición 48. Configuración fuerte

Denominaremos configuración fuerte para dos birradares- α a la configuración en la cual uno de los birradares está adelantado del otro $\pi - \alpha$, figura 4.2.

La configuración fuerte también se puede ver como cuando la región luminosa de un birradar releva a la región luminosa de otro que esta iluminando una región específica.

Observación 1. Notemos que la recta que define el fin de la región luminosa de un birradar es paralela a la recta que define el inicio de la región luminosa del otro birradar.

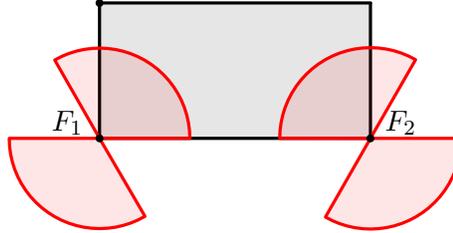


Figura 4.2: Configuración fuerte utilizando birradares de tamaño $\frac{2\pi}{3}$ girando en sentido positivo. F_2 está adelantado $\frac{\pi}{3}$ con respecto a F_1

Cada vez que hablemos de radares bidireccionales y/o birradares vamos a considerar que el giro se da en el sentido positivo y a una velocidad constante de $\frac{1 \text{ rad}}{\text{seg}}$.

4.1. Iluminación de líneas

Para comenzar, vamos a ver la forma de iluminar líneas o segmentos de línea con birradares- α .

Teorema 10. Sea ℓ una recta. Podemos iluminar ℓ con dos birradares, no necesariamente iguales, si la suma del tamaño de las regiones de luz de los birradares es al menos 2π .

Demostración. Sea F_1 un birradar de tamaño α y sea F_2 un birradar de tamaño β , donde $\alpha + \beta \geq \pi$ y sean u y v dos puntos sobre la recta ℓ , con u a la izquierda de v . Colocamos F_1 sobre el punto u de tal manera que empiece a iluminar ℓ , como el tamaño de F_1 es α , entonces, en un periodo de 2π , F_1 iluminará a ℓ durante dos periodos no consecutivos de tamaño α . Lo mismo sucede con F_2 con periodos de tamaño β . Entonces, al final del primer periodo de iluminación de F_1 colocamos F_2 sobre el punto v para que comience a iluminar ℓ (configuración fuerte).

Si consideramos el primer periodo de iluminación de F_1 y F_2 tenemos que:

$$\alpha + \beta \geq \pi$$

lo que nos indica que durante un periodo de tamaño π , los dos birradares iluminan completamente a ℓ y además, si $\alpha + \beta > \pi$, sobra tiempo de iluminación de alguno de los dos birradares para el siguiente periodo de π , ver figura 4.3.

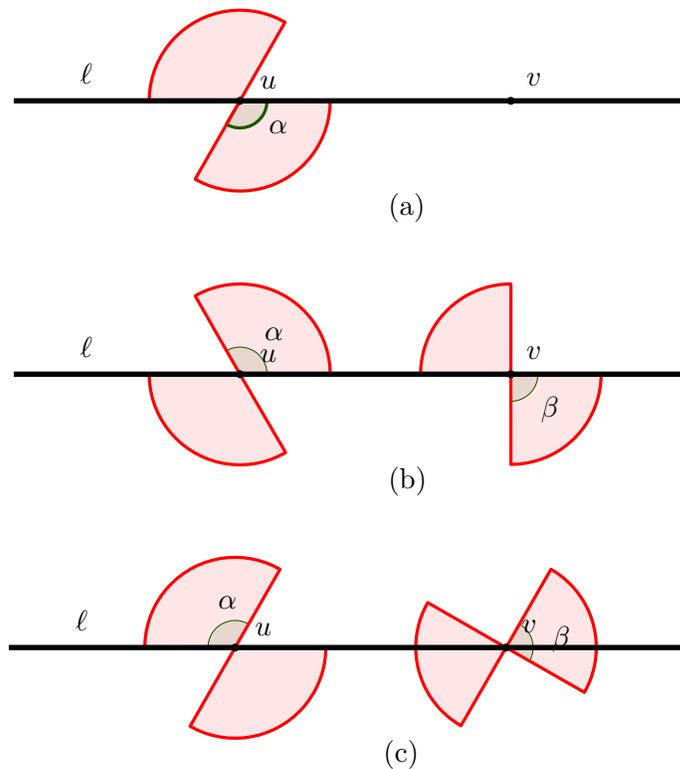


Figura 4.3: Cobertura de la recta ℓ . (a) Posición en la que F_1 comienza a iluminar ℓ . (b) Al entrar la primera cuña de sombra de F_1 , F_2 entra al relevo. (c) Antes de terminar la cobertura de F_2 , después de un tiempo π de la configuración inicial, se vuelve a repetir dicha configuración para F_1 .

□

Ahora vamos a considerar dos birradares iguales.

Corolario 2. Sea ℓ una recta. Con dos birradares- α , $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$, se puede mantener iluminada a ℓ todo el tiempo.

Demostración. Del teorema 10 tenemos que si $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ entonces $2\alpha \geq \pi$. □

Dependiendo del tamaño de α , podemos encontrar distintas propiedades de los birradares. Obviamente entre más grande sea α , más facilidades darán los birradares para iluminar distintas regiones (si tomáramos birradares- π en realidad tendríamos lámparas completas [16]).

4.2. Iluminación de Triángulos

Lema 8. *Sea T un triángulo, con ángulos internos θ , β y γ , con $\theta \leq \beta \leq \gamma$. Existe un α tal que T puede ser iluminado todo el tiempo con dos birradares- α , $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.*

Demostración. Sea T un triángulo y sean θ , β y γ sus ángulos internos, con $\theta \leq \beta \leq \gamma$. En el diagrama de la figura 4.4 (b), se muestra la forma en que se coloca θ , que es el ángulo del triángulo sobre el cual se colocará el primer birradar- α . El birradar sobre el vértice correspondiente a θ se coloca alineado con la arista de T , de tal manera que ilumine por completo al triángulo después de un tiempo θ y lo mantenga así durante $\alpha - \theta$, figura 4.4 (a). El segundo birradar se coloca sobre el vértice correspondiente a β en configuración fuerte con el primer birradar, siendo $\alpha - \beta$ el tiempo que el segundo birradar ilumina por completo al triángulo, por lo que tenemos:

$$\alpha - \theta + \alpha - \beta = 2\alpha - (\theta + \beta)$$

Como $\theta + \beta$ es menor a π , entonces siempre podemos encontrar un tamaño para α , $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, que satisfaga que el lado derecho de la ecuación sea al menos π , es decir $2\alpha - (\theta + \beta) \geq \pi$. Entonces, despejando de la desigualdad anterior, y como $\theta + \beta < \pi$, se obtiene que para:

$$\alpha \geq \left(\frac{\pi + (\theta + \beta)}{2} \right)$$

el triángulo será iluminado permanentemente por los dos birradares. □

Corolario 3. *Sea T un triángulo. T puede mantenerse iluminado en todo momento con dos birradares- $\frac{5\pi}{6}$.*

Demostración. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a π y como buscamos los dos ángulos cuya suma sea la menor, entonces el caso crítico es cuando el triángulo es equilátero, ya que es cuando todos los ángulos internos son iguales y a partir de aquí, podemos hacer crecer o disminuir su tamaño. Entonces aplicando a un triángulo equilátero la ecuación obtenida en el lema 8 tenemos:

$$\alpha \geq \frac{\pi + \frac{2\pi}{3}}{2}$$

$$\alpha \geq \frac{5\pi}{6}$$

□

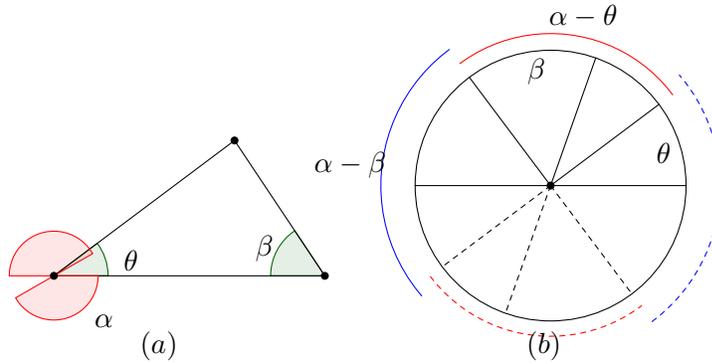


Figura 4.4: (a) Triángulo cuyos ángulos correspondientes a los vértices en los que se colocarán los birradares- α son θ y β . La gráfica ilustra como dos birradares- α , con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, son suficientes para iluminar el triángulo. En (b), las líneas sólidas representan la iluminación por un ángulo de cada birradar y las punteadas representan la iluminación por el respectivo ángulo opuesto.

Ahora podríamos preguntarnos qué sucede con el tamaño de los birradares si colocamos un tercer birradar en el tercer vértice.

Corolario 4. *Sea T un triángulo. Existe un α tal T puede ser iluminado todo el tiempo con tres birradares- α , $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.*

Demostración. El lema 8 muestra que dos birradares- α son suficientes, pero además, podemos colocar un tercer birradar- α para mantener iluminado el triángulo. Sea el triángulo T cuyos ángulos internos son β , γ y θ , y sean F_1 , F_2 y F_3 tres birradares- α , cuya cuña de sombra denotaremos por s , colocados en los vértices de T respectivamente, ver figura 4.5.

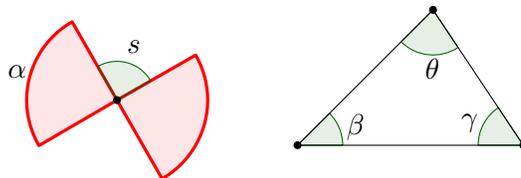


Figura 4.5: Birradar- α y su sombra s . Triángulo T y sus ángulos internos

Cada bireflector va a mantener iluminado T por si sólo durante un tiempo. Denotaremos como F_{i_L} al tiempo en que la mitad del birradar F_i mantendrá iluminado T , de tal manera que tenemos:

$$F_{1_L} = \pi - (s + \beta)$$

$$F_{2_L} = \pi - (s + \gamma)$$

$$F_{3_L} = \pi - (s + \theta)$$

La suma de estas tres ecuaciones nos da $2\pi - 3s$. Si esta suma es al menos π significa que podemos mantener iluminado a T todo el tiempo con los tres birradares relevándose uno a otro (estamos considerando sólo la mitad del birradar, ya que la otra mitad tiene el mismo comportamiento). De $2\pi - 3s \geq \pi$ se obtiene que $s \leq \frac{\pi}{3}$. De ésta última desigualdad, como $s = \pi - \alpha$, se tendrá que $\pi - \alpha \leq \frac{\pi}{3}$, equivalente a $\alpha \geq \frac{2\pi}{3}$, lo que nos dice que el tamaño mínimo para los birradares es de $\frac{2\pi}{3}$

□

Corolario 5. *Con tres birradares- α , con $\alpha < \frac{2\pi}{3}$ no todo triángulo se puede iluminar todo el tiempo.*

Demostración. Sea ϵ un valor suficientemente pequeño mayor a 0. Directamente de la demostración del corolario 4. Si en la desigualdad $\pi - \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ sustituimos α por $\frac{2\pi}{3} - \epsilon$, la desigualdad no se cumple, lo que implica que la luz de los birradares no es suficiente para cubrir por completo el triángulo. □

Teorema 11. *Con dos birradares- $\frac{3\pi}{4}$ colocados sobre dos puntos u y v de una recta ℓ , podemos iluminar todo el tiempo la familia de triángulos cuya base es el segmento uv y cuyo ángulo opuesto es de $\frac{\pi}{2}$.*

Demostración. Consideremos sin pérdida de generalidad que la recta sobre la que están los puntos u y v es horizontal y u está a la izquierda de v . Sean F_1 y F_2 dos birradares- $\frac{3\pi}{4}$. Sean A y B las rectas que definen la región luminosa del birradar F_1 y sean C y D las rectas que definen la región luminosa del birradar F_2 . Habrá un periodo durante el que las sombras de los dos birradares se intersecten, *i.e.* cuando los rayos que definen el fin de la cuña de sombra de F_2 y el inicio de la cuña de sombra de F_1 se intersecten, para la figura 4.6, este cruce se da en el semiplano superior en el punto x .

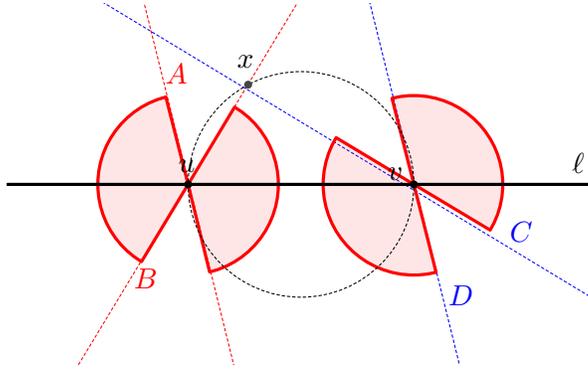


Figura 4.6: La intersección de la sombra de los dos birradares es la región comprendida entre las rectas A , B , C y D , de la cual el punto x es el punto inferior y se extiende al infinito.

Ahora, vamos a colocar los birradares, de tal manera que cumplan la propiedad de que el ángulo en x sea $\frac{\pi}{2}$.

Colocamos el birradar F_1 sobre el punto u con la recta B en posición vertical, lo que implica que la recta A estará desfasada de B , en sentido negativo, $\frac{3\pi}{4}$, y $\frac{\pi}{4}$ de ℓ .

Como queremos que F_2 releve a F_1 en cuanto empiece a entrar sombra en el semiplano superior a ℓ , entonces debemos colocar el birradar F_2 sobre el punto v de tal manera que $\frac{\pi}{4}$ después, ilumine la región por encima de ℓ . Por lo tanto la D es paralela a A y está desfasada de ℓ $\frac{\pi}{4}$ en sentido negativo. Y como C debe estar desfasada $\frac{3\pi}{4}$ en sentido negativo de D , ésto implica que C es horizontal, lo que también nos indica que en ese momento es perpendicular a B , figura 4.7.

Como los birradares giran a la misma velocidad, el ángulo de inclinación de las rectas va a modificarse a la misma velocidad, ésto implica que el ángulo en el que se intersectan C y B siempre va a ser el mismo.

Además, es bien sabido que la intersección de dos rectas no paralelas que giran a la misma velocidad genera un *círculo* que pasa por los puntos sobre los que giran las rectas. Dicho círculo circunda todos los triángulos formados con los puntos sobre los que giran las rectas y los puntos de intersección de las mismas.

Al empezar a girar, el punto de intersección va a estar bajo la línea ℓ durante $\frac{\pi}{2}$, por lo que la parte interna del circuncírculo uvx , por encima de ℓ , estará completamente iluminada (figura 4.7 (a) y (b)), en los siguientes $\frac{\pi}{2}$, la sombra está por encima de uv y además por encima del punto x el cual se desliza sobre el circuncírculo uvx . \square

Definición 49. Sean dos birradares- α colocados en configuración fuerte. Llamaremos circuncírculo de dos birradares a la circunferencia que describe el punto de intersección de las rectas no paralelas de estos birradares al girar.

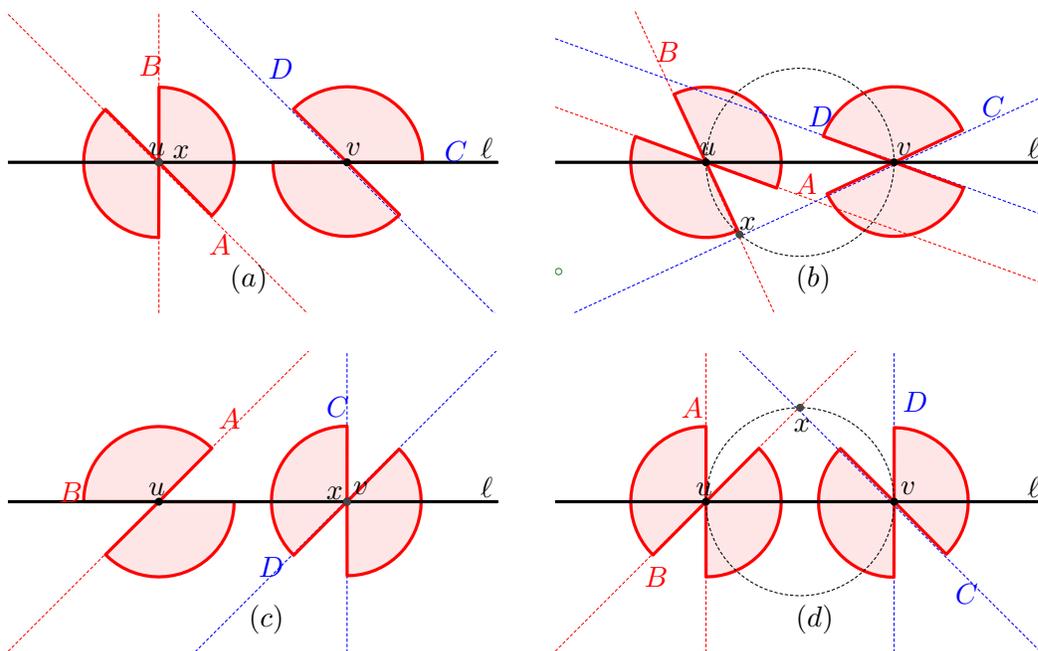


Figura 4.7: (a) Configuración inicial. B y C son perpendiculares. (b) Después de 25° . (c) Después de $\frac{\pi}{2}$. (d) Después de $\frac{3\pi}{4}$.

4.3. Iluminación de Cuadrados y rectángulos

Ahora podemos preguntarnos ¿qué más podemos hacer con birradares?, ¿podrían ser de utilidad si queremos iluminar polígonos?

Como se mencionó anteriormente, dos birradares generan sombra cuando las sombras de ambos se intersectan o superponen. Del punto anterior, para el caso de los birradares- $\frac{3\pi}{4}$ podemos observar en el circuncírculo que contiene los triángulos uvx tiene por diámetro al segmento uv (fig. 4.6). Por esta característica los birradares- $\frac{3\pi}{4}$, colocados en vértices adyacentes de un rectángulo, no nos ayudan a iluminarlo durante todo el tiempo por pequeño que éste sea. Para que esto sea posible, necesitamos que el segmento entre los birradares sea una cuerda propia de la circunferencia, como se muestra en la figura 4.8.

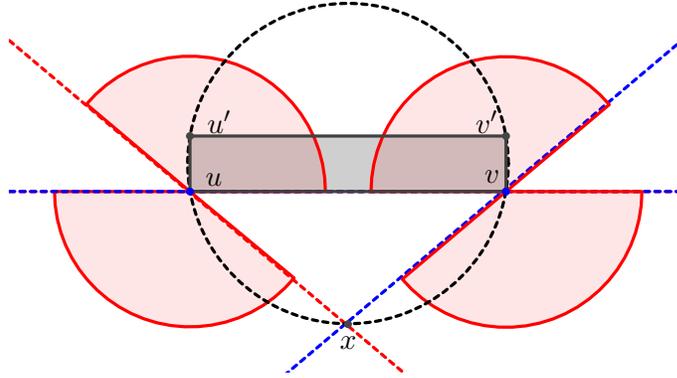


Figura 4.8: Con birradares mayores a $\frac{3\pi}{4}$ el segmento entre ellos es cuerda propia (no diametral) del circuncírculo uvx , por lo tanto existen los puntos u' y v' que corresponden a la cuerda paralela, del mismo tamaño de la cuerda uv (puede verse como el reflejo de uv en el diámetro paralelo a ésta misma).

Como puede verse en la figura 4.8 al ser el segmento uv una cuerda del circuncírculo podemos encontrar otra cuerda $u'v'$ paralela a uv . Por el teorema 11, se pueden colocar los birradares de tal manera que la parte del circuncírculo, por encima del segmento uv , se mantenga siempre iluminada, con lo que el rectángulo $uvv'u'$ se mantendrá iluminado todo el tiempo. De aquí obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 12. *Con dos birradares α , $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$, colocados en vértices de uno de los lados mayores de un rectángulo, se puede mantener iluminado éste todo el tiempo.*

Los puntos u' y v' se encuentran a la misma distancia de la recta uv . Cuando la intersección de los birradares pasa por el punto u' (resp. v'), el rayo de luz que emana del birradar sobre el punto v (resp. u) forma un ángulo γ con la recta uv como se muestra en la figura 4.9. El tamaño de este ángulo depende del tamaño de los birradares que elijamos, lo que a su vez nos indica las dimensiones del rectángulo que podremos cubrir.

Corolario 6. *El tamaño de los birradares define una cuerda igual al segmento uv (en el que se colocan los dos birradares) en el circuncírculo donde se encuentran todos los triángulos uvx , lo que a su vez define el rectángulo máximo que podremos cubrir.*

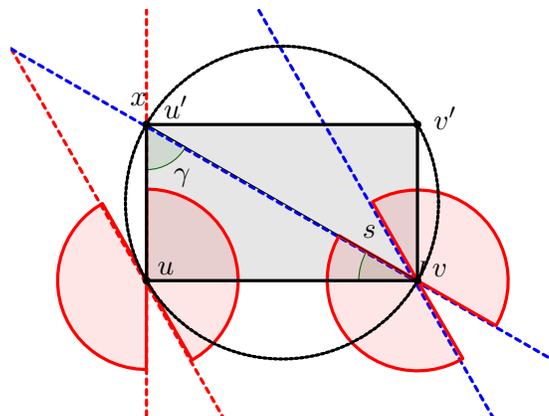


Figura 4.9: Los puntos u' y v' del rectángulo están definidos por la intersección de las rectas que definen la sombra.

Demostración. Para la demostración utilizaremos el siguiente lema:

Lema 9. Sean L y M dos secantes paralelas de una circunferencia C . Entonces los dos arcos comprendidos entre L y M son iguales.

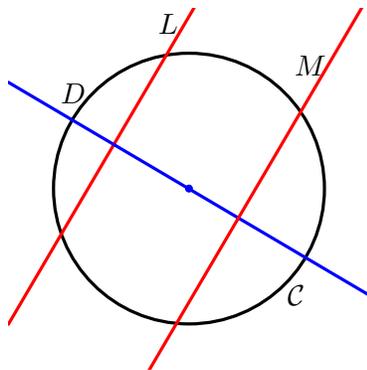


Figura 4.10: Los arcos entre dos rectas secantes, paralelas, de una circunferencia son iguales.

Demostración. En la imagen 4.10, podemos ver que la figura es simétrica respecto a la reflexión en el diámetro D que es perpendicular a L y M , por lo tanto los arcos mencionados son iguales. □

Tomando en cuenta que partimos de una configuración fuerte podemos definir lo siguiente, ver la figura 4.11.

Del tamaño de los birradares tenemos:

$$\alpha = \pi - s$$

Del birradar sobre el punto v , podemos ver que:

$$\widehat{Au'} = 2s$$

Del birradar sobre u , tenemos:

$$\widehat{u'v} = 2\gamma$$

También podemos observar que:

$$\widehat{u'v'} = 4s$$

y por el lema 9:

$$\widehat{u'v'} = \widehat{u'v}$$

entonces:

$$2\gamma = 4s$$

por lo tanto:

$$s = \frac{\gamma}{2}$$

Si por ejemplo, queremos cubrir un cuadrado donde $\gamma = \frac{\pi}{4}$, entonces :

$$s = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Por lo tanto, el tamaño mínimo de los birradares para poder cubrir el cuadrado es de:

$$\alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{8}$$

□

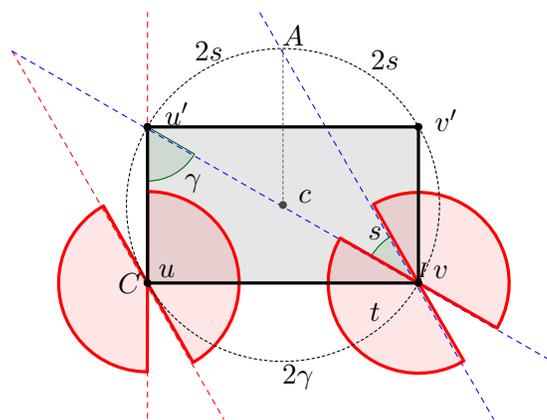


Figura 4.11: Relación de ángulos en dos birradares para cubrir un rectángulo.

A continuación se muestra la tabla 4.1 con algunos valores de α con relación a el ángulo γ .

Tabla 4.1: Tamaño de Birradares en función de γ

γ	Relación $\frac{\text{Largo}}{\text{Alto}}$	Tamaño birradares
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{x}{x} = 1$	$\frac{7\pi}{8}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2.91}{4}$	$\frac{9\pi}{10}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$

4.4. Iluminación de semiplanos y planos

Como se ha visto, por ejemplo en el caso de los reflectores, en muchas ocasiones es de utilidad poder iluminar semiplanos o planos (E. Kranakis, F. MacQuarie, O. Morales y J. Urrutia [15]), ya que con ésto se puede optimizar la cobertura de algún polígono.

Ahora haremos lo mismo con birradares, para ésto veremos el comportamiento de la sombra de dos birradares en configuración fuerte.

Sean u y v dos puntos cualesquiera sobre una recta horizontal ℓ , con u a la izquierda de v . Los ángulos menores a $\frac{\pi}{2}$ formados por las rectas A y B , así como los formados por las rectas C y D son de tamaño σ . En este caso, las rectas A y D son paralelas, ver figura 4.12.

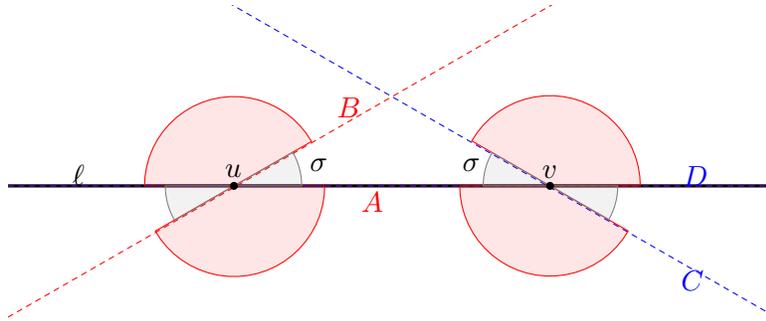


Figura 4.12: Configuración de dos birradares- α . La cuña de sombra de los birradares es de tamaño σ .

Llamaremos κ_1 y κ'_1 a los ángulos correspondientes al primer birradar y κ_2 y κ'_2 a los del segundo, como se muestra en la figura 4.13. Conviene estudiar por separado las intersección de una cuña de sombra del primer birradar con una cuña de sombra del segundo birradar. Esto da lugar a 4 casos: las intersección de κ_1 con κ_2 y κ'_2 , y la intersección de κ'_1 con κ_2 y κ'_2 ; pero basta analizar sólo los dos primeros porque como

veremos, los otros dos se reducen a estos mismos.

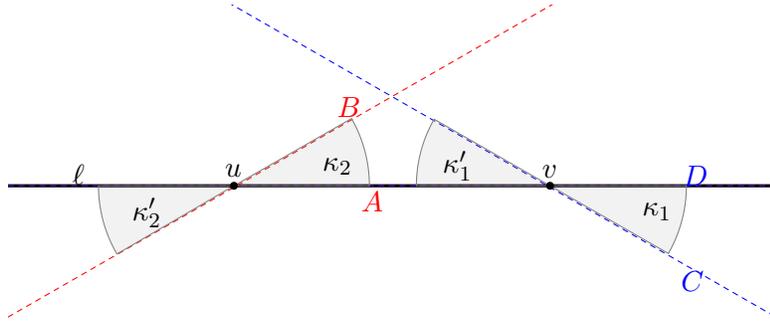


Figura 4.13: Cuñas de sombra de dos birradares en configuración fuerte.

4.4.1. Intersección de cuñas de sombra

Analizaremos el caso en el que κ_1 se intersecta con κ_2 , como se ilustra en la figura 4.14 y se explica a continuación.

Si la posición en el tiempo $t = 0$ es la mostrada en (a), entonces, del tiempo $t = 0$ a $t = \pi$ (figura (b)) no se produce sombra común.

Durante la siguiente media vuelta la sombra se presentará como se explica a continuación. Durante σ segundos la sombra común será la región comprendida entre las rectas paralelas A y D (corredor de sombra) (figura (c)). Para tiempo $\pi + \sigma < t < 2\pi - \sigma$ la sombra común será la región que queda dentro del corredor de sombra y del ángulo con vértice en el punto x , donde se intersectan B y C , hacia afuera del círculo uvx , hasta alcanzar la posición mostrada en (e) cuando $t = 2\pi - \sigma$. Durante los últimos σ segundos de la vuelta completa en forma parecida a lo sucedido en los primero σ segundos, la sombra será la región del ángulo CD comprendida en el corredor de sombra.

Para el segundo caso en el que κ_1 se intersecta con κ_2' , tomemos en cuenta la figura 4.15.

Si la posición en el tiempo $t = \sigma$ es la mostrada en (a), entonces, del tiempo $t = \sigma$ a $t = \pi - \sigma$ (figuras (b)) no se produce sombra común. Durante el intervalo de tiempo $t = \pi - \sigma$ a $t = \pi + \sigma$ la sombra se presentará de la siguiente manera. Durante σ segundos la sombra común formará un triángulo (la región del ángulo CD acotada por B) cuyos vértices serán vxy , donde x e y son los puntos de intersección de B con C y D , respectivamente. Este triángulo se mantendrá dentro del círculo uvx (figura (c)). En el instante $t = \pi$ la sombra común alcanza su tamaño máximo y se forma el triángulo uvx (figura (d)). De $t = \pi$ a $t = \pi + \sigma$ se tendrá una situación simétrica a la ilustrada en (c), la sombra será un triángulo (formado por el ángulo AB y acotado por C) cuyos vértices serán u y los puntos de intersección de C con A y B respectivamente.

Durante los últimos $\pi - \sigma$ segundos de la vuelta completa no hay sombra común.

Como se mencionó antes, los otros dos casos son similares a los anteriores desfasados π segundos. En la figura , en el eje del tiempo se indican los intervalos correspondientes a

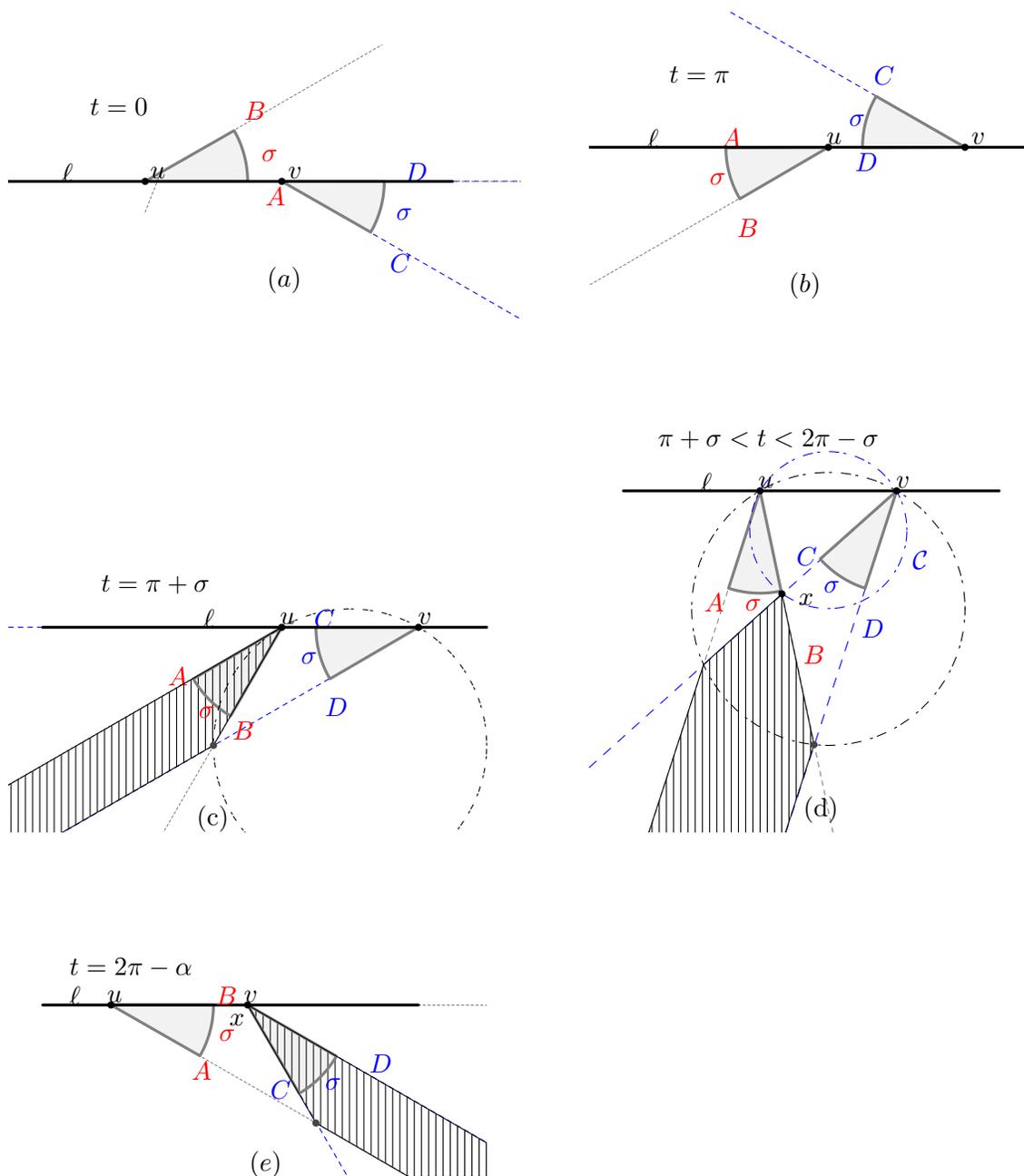


Figura 4.14: Intersección de ángulos que giran a la misma velocidad (A y D son paralelas).

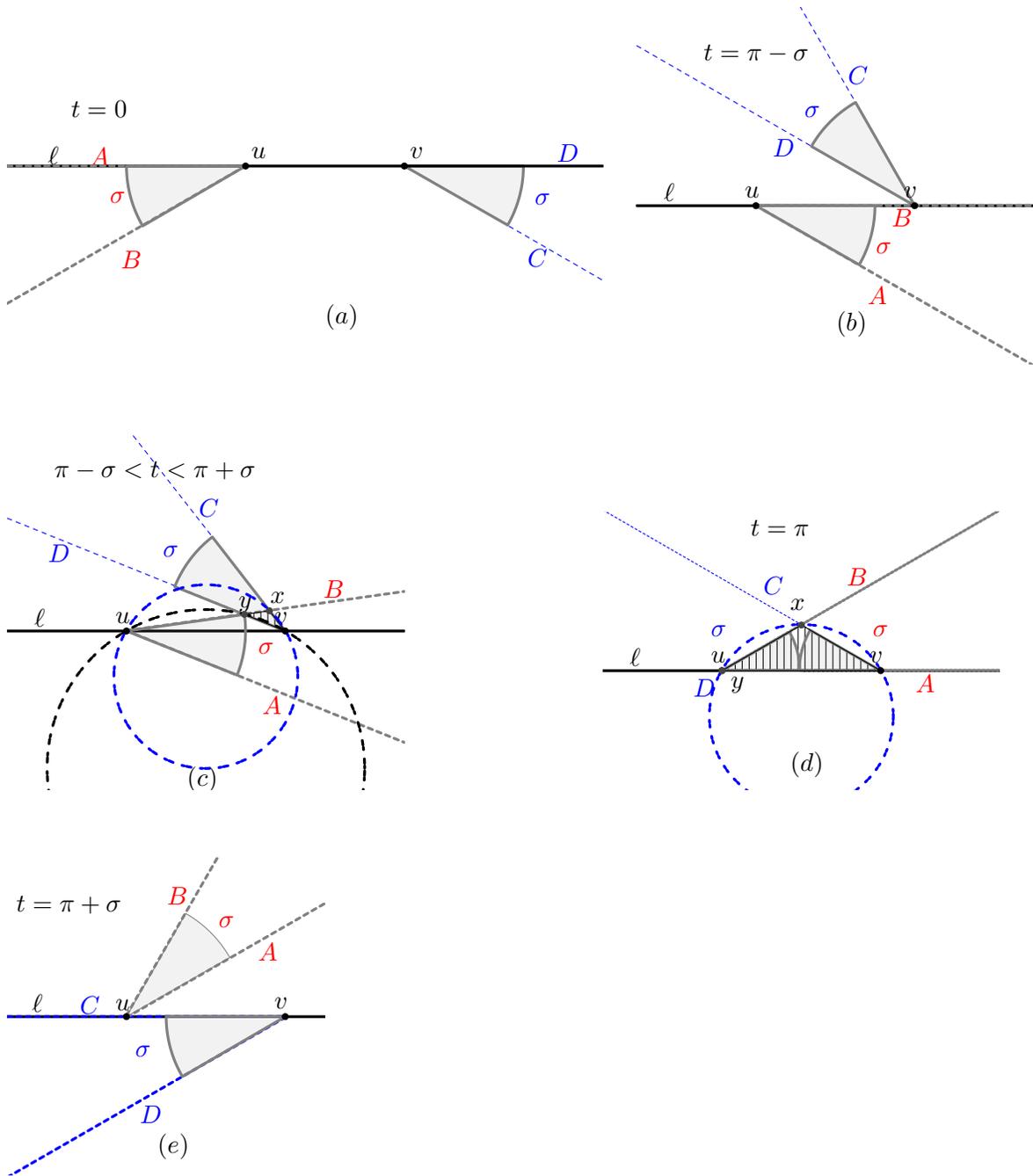


Figura 4.15: Intersección de ángulos que giran a la misma velocidad (A y D). En una vuelta completa, la intersección de los ángulos es no vacía durante un intervalo de longitud 2α y se mantiene dentro del círculo uvx , donde x es el punto de intersección de los lados B y C .

los 4 casos en los que se produce sombra común.

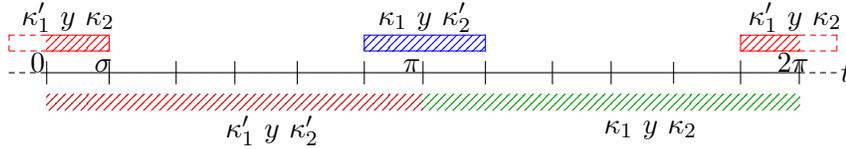


Figura 4.16: Intervalos de tiempo de sombra común generada dos birradares en configuración fuerte.

En la figura 4.16 se muestran los intervalos de tiempo de sombra común de dos birradares. En cada instante t , la sombra común se debe a la intersección de las cuñas de sombra de los birradares. Las cuñas κ_1 y κ'_1 pertenecen a uno de los birradares. El diagrama corresponde a una revolución de los birradares, muestra cada intervalo en que la intersección entre dos cuñas es no vacía, el letrero que acompaña al intervalo indica el respectivo par de cuñas. Tanto la sombra común producida por κ_1 y κ'_2 como la generada por κ'_1 y κ_2 se mantiene acotada y cae en el semiplano superior a la horizontal sobre la que descansan los birradares (figura 4.15); en contraste, la producida por los otros dos pares no es acotada y cae en el semiplano complementario.

El resultado de este análisis lo expresamos en la siguiente observación.

Lema 10. *Sean dos birradares- α colocados en configuración fuerte en los puntos u y v de una recta horizontal ℓ , sea $\sigma = \pi - \alpha$ y sea \mathcal{C} el circuncírculo de los birradares (def. 49). Entonces la sombra común (intersección de cuñas de sombra o área no iluminada por ninguno de los birradares) ocurre en los dos semiplanos determinados por ℓ de la siguiente manera: en el semiplano inferior ocurre no acotada, en intervalos abiertos y contiguos de π segundos; en el semiplano superior ocurre dentro de \mathcal{C} , en intervalos de tiempo de 2σ segundos separados uniformemente $\pi - 2\sigma$ segundos.*

4.4.2. Iluminación de semiplanos

En esta sección veremos como podemos iluminar semiplanos usando birradares. Tomando en cuenta el lema 10 y como se ha visto a lo largo de este capítulo, no cualquier tamaño para los birradares nos ayudará a optimizar la cantidad de birradares para iluminar un semiplano, específicamente se vio que, por ejemplo, los birradares- $\frac{3\pi}{4}$ son de ayuda para iluminar algunos triángulos, pero necesitamos incrementar su número si queremos iluminar cuadriláteros.

En particular, vamos a utilizar birradares- $\frac{5\pi}{6}$ ya que tienen propiedades que son interesantes y que se listan a continuación.

- El intervalo de tiempo en el que la sombra queda dentro del circuncírculo \mathcal{C} (49) es de $\pi/3$, lo mismo que nos da de iluminación continua un birradar al iluminar por completo un cuadrante ($\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \pi/3$).
- Visualizar la sincronización de los birradares para una configuración fuerte es más sencillo, ésto se mostrará más adelante.
- Son los birradares de ángulo más pequeño que sirven para iluminar cualquier triángulo con menos birradares (teorema 3).

Teorema 13. *Con tres birradares- $\frac{5\pi}{6}$ podemos iluminar un semiplano todo el tiempo.*

Demostración. La prueba se obtiene directamente del lema 10.

Podemos colocar un tercer birradar- $\frac{5\pi}{6}$ en cualquier punto en la región que se muestra en la imagen 4.17 (a) para mantener iluminado un semiplano.

Analizaremos la configuración del tercer birreflector, en particular, cuando se coloca sobre alguna de las rectas perpendiculares a uv (sobre los puntos u o en v).

Considerando la figura 4.17 (b), para el caso en el que F_3 se coloca en la perpendicular a uv en u . Podemos ver que cuando la sombra de los dos birradares en u y v empiece a entrar al plano superior a uv , F_3 debe mantenerlo iluminado durante $\frac{\pi}{3}$ segundos, como se muestra en la figura 4.18.

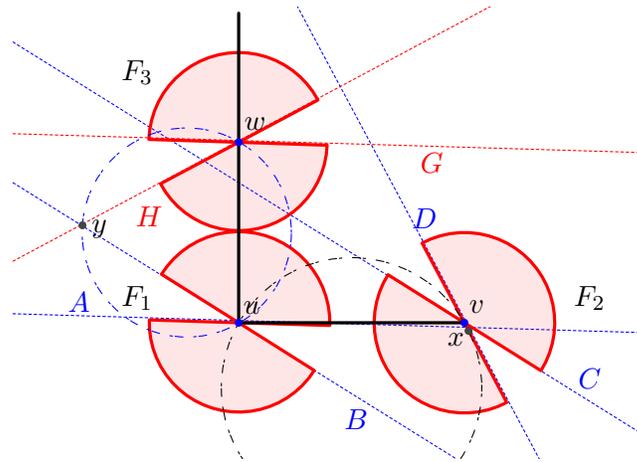


Figura 4.18: Configuración de 3 birradares- $\frac{5\pi}{6}$ donde se forma un ángulo recto.

Observando la configuración de F_3 , para que pueda cubrir la sombra, la recta G debe ser paralela a uv , por lo tanto es paralela a A . Con ésto podemos observar que la sombra de F_3 va seguida de la sombra de F_1 , que es el mismo principio que utilizamos para colocar F_1 y F_2 . Por lo tanto para iluminar un cuadrante o el interior de un vértice ortogonal (convexo) se debe colocar F_1 sobre el vértice, F_2 y F_3 se deben colocar, al menos, en las

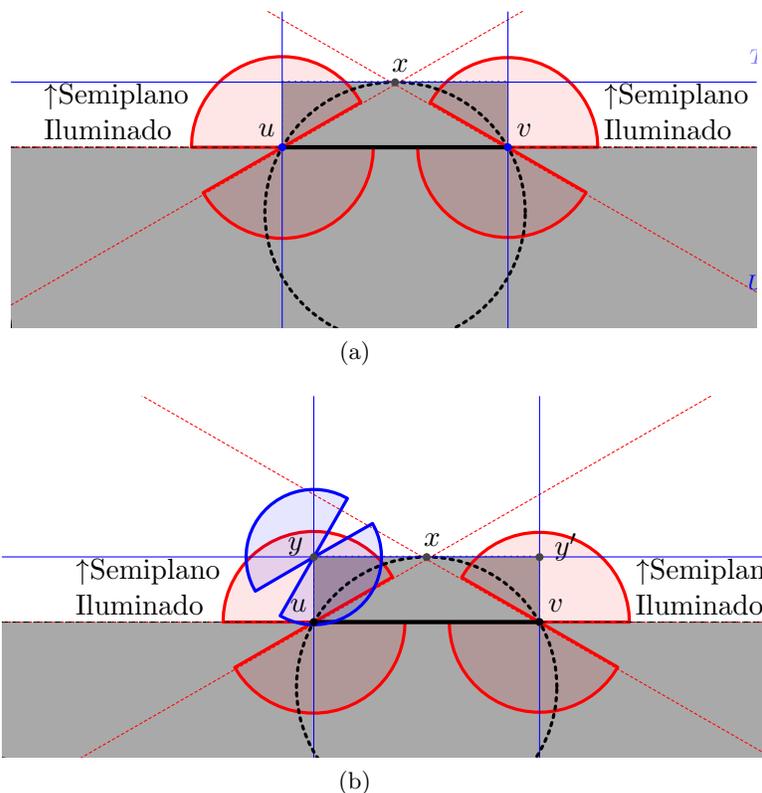


Figura 4.17: (a) La región en la que podemos colocar el tercer birradar incluye las rectas perpendiculares a uv a partir de los puntos y y y' . (b) Muestra la posición a partir de la cual se puede colocar el tercer birradar, que es el punto y (o por simetría y').

aristas que inciden en el vértice y ambas en configuración fuerte con F_1 , como se muestra en la figura 4.18. □

Corolario 7. *Con tres birradar- $\frac{5\pi}{6}$ colocados sobre un segmento de línea es posible iluminar un semiplano todo el tiempo.*

Demostración. Observando la figura 4.17, podemos ver que dentro de la región donde podemos colocar los birradares se incluye el segmento de la recta a la derecha de v . Colocando un tercer birradar- $\frac{5\pi}{6}$ en un punto p de dicho segmento, quedará cubierta la sombra generada por F_1 y F_2 en el semiplano superior. □

Cabe señalar que la configuración para F_3 mostrada en la imagen 4.19 no es única. Hay una infinidad de configuraciones para F_3 que permiten cubrir la sombra de F_1 y F_2 durante $\frac{\pi}{3}$.

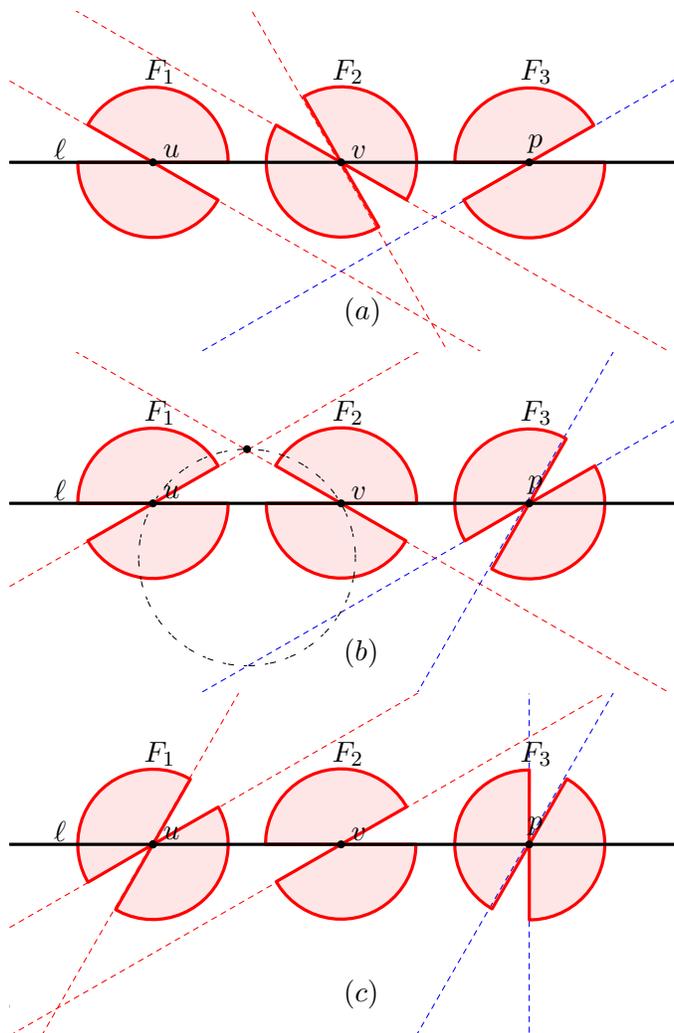


Figura 4.19: Posible configuración para el tercer birrador F_3 que ilumina la sombra generada por F_1 y F_2 en el semiplano superior, F_3 está colocado sobre un punto a la derecha de v .

4.4.3. Iluminación del plano

Ahora veremos la forma de iluminar el plano completo utilizando birradores- $\frac{5\pi}{6}$.

Teorema 14. *Con cuatro birradores- $\frac{5\pi}{6}$ colocados sobre una recta podemos mantener iluminado el plano.*

Demostración. Por el lema 10, podemos ver que la sombra generada por dos birradores- $\frac{5\pi}{6}$ permanece dentro del circuncírculo de dos birradores durante $\frac{\pi}{3}$. Y por el

teorema 7, siempre podemos encontrar un birradar que cubra esta sombra.

Entonces, sean F_1 y F_2 dos birradares- $\frac{5\pi}{6}$ colocados en configuración fuerte sobre la recta ℓ en los puntos u y v , respectivamente, con u a la izquierda de v . La sombra dentro de su circuncírculo se encuentra en el semiplano superior a ℓ . Se coloca un birradar- $\frac{5\pi}{6}$, digamos F_3 , en un punto p a la derecha de v , de tal manera que cubra la sombra generada por F_1 y F_2 (7)

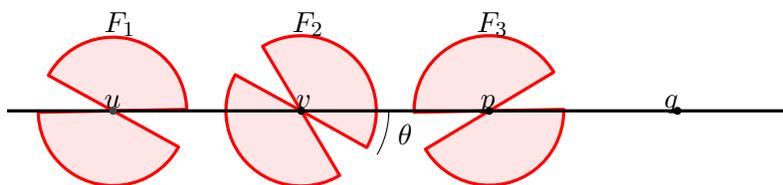


Figura 4.20: Colocación de F_1 , F_2 y F_3 sobre los puntos u, v y p , respectivamente.

Como vimos en el teorema anterior, la configuración mostrada en la figura 4.19 nos asegura la iluminación del semiplano superior a ℓ . Supongamos que colocamos un espejo en ℓ para F_1 y F_2 ; al hacer esto lograríamos que F_1 y F_2 iluminaran parte del semiplano inferior (a excepción del circuncírculo de F_1 y F_2). Como se puede ver en la figura 4.21, al reflejar F_1 se obtiene una configuración igual a la de F_3 . Por lo tanto si colocamos F_4 en el punto q con una configuración similar al reflejo de F_2 , entonces por simetría, vamos a iluminar el semiplano inferior con F_3 y F_4 ya que la sombra dentro de su circuncírculo será cubierta por F_2 logrando así la iluminación por completo del plano. \square

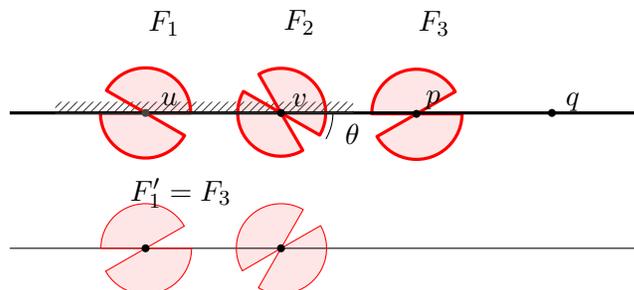


Figura 4.21: Reflejo de F_1 y F_2 sobre ℓ . F_4 debe corresponder al reflejo de F_2 para iluminar el semiplano inferior.

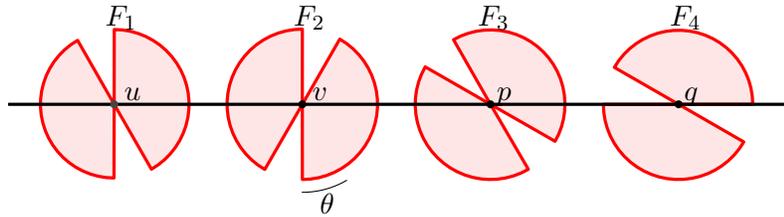


Figura 4.22: Los 4 birradares- $\frac{5\pi}{6}$ después de $(\frac{\pi}{2} + \sigma)$ segundos. Se puede observar como el plano permanece completamente iluminado.

4.5. Iluminación de polígonos ortogonales

Supongamos que tenemos una galería de arte ortogonal, la cual vamos a modelar como un polígono ortogonal P de n vértices, y queremos iluminar su interior todo el tiempo utilizando birradares- $\frac{5\pi}{6}$. El problema es determinar cuantos birradares son necesarios, la forma de configurarlos y colocarlos para asegurar que todo punto al interior de P estará iluminado.

Como se dijo en el capítulo 2 de este trabajo, en [7] V. Estivill y J. Urrutia establecieron que $\lfloor \frac{3(n-1)}{8} \rfloor$ reflectores fijos de tamaño $\frac{\pi}{2}$ son suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar un polígono ortogonal de n vértices, para lo cual definieron cuatro reglas de iluminación (reglas NE,SE,NO,SO), entonces:

Teorema 15. *Tres birradares- $\frac{5\pi}{6}$ en configuración fuerte y colocados, en vértices que formen un triángulo rectángulo o que estén sobre una línea, equivalen a un reflector- $\frac{\pi}{2}$ de los utilizados en [7].*

Demostración. En las reglas definidas en [7], los reflectores- $\frac{\pi}{2}$ tienen la particularidad de que iluminan un cuadrante.

Sean los birradares- $\frac{5\pi}{6}$ F_1 , F_2 y F_3 .

Tomando en cuenta la demostración del teorema 13 y el corolario 7, siempre es posible colocar 3 birradares- $\frac{5\pi}{6}$ para mantener iluminado un semiplano todo el tiempo. Los tres birradares se pueden colocar de manera que los vértices sobre los que se coloquen formen un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ o en línea recta para que iluminen un semiplano. En la figura 4.17 se muestran dos posibles configuraciones con tres birradares- $\frac{5\pi}{6}$. Como se vio en el teorema 13, la configuración del tercer birradar no es única, pero la configuración fuerte nos asegura una de ellas. \square

Resolviendo el problema de esta manera, utilizando birradares- $\frac{5\pi}{6}$ se define una cota que es tres veces la definida en [7]. Ésto da origen al siguiente teorema.

Teorema 16. Con $3(\lfloor \frac{3n-1}{8} \rfloor)$ birradares- $\frac{5\pi}{6}$ podemos mantener iluminado un polígono ortogonal en todo momento. Dos de cada tres birradares son colocados en aristas del polígono.

El algoritmo 1 muestra como colocar los birradares- $\frac{5\pi}{6}$ en tiempo lineal. En la figura 4.23 se muestra como quedan los birradares- $\frac{5\pi}{6}$ en vértices de P utilizando la regla noroeste, adaptada de acuerdo al teorema 15.

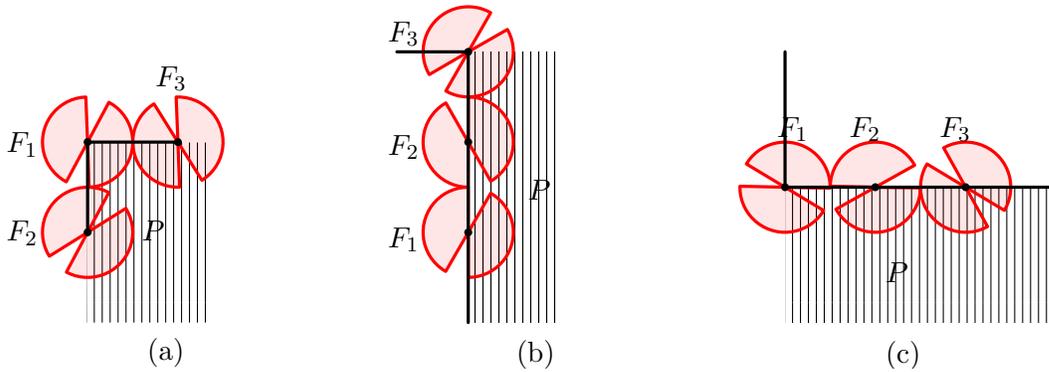


Figura 4.23: Se muestra como quedan configurados birradares- $\frac{5\pi}{6}$ en vértices cóncavos y convexos para la regla-NO para un polígono ortogonal

Podemos mejorar esta cota aunque el algoritmo se complica. Para ésto, hay que tomar en cuenta el algoritmo para partir polígonos ortogonales en *polígonos con forma de L* (*L-shapes* por su término en inglés) [11] visto en el capítulo 2.1.

Con base en el teorema 3 de la sección 2.5.3 podemos deducir lo siguiente:

Teorema 17. Un polígono ortogonal con r vértices cóncavos puede mantenerse iluminado todo el tiempo utilizando $3(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1)$ birradares- $\frac{5\pi}{6}$.

Demostración. Para demostrar el teorema tenemos que observar un polígono con forma de L, como se muestra en la figura 4.24. Podemos ver que al extender las aristas que inciden en el vértice cóncavo del polígono se delimita una región R , a partir de la cual cualquier punto del polígono puede ser vigilado. Entonces, con base en el teorema 13 podemos colocar 3 birradares- $\frac{5\pi}{6}$ dentro de R para iluminar el polígono todo el tiempo. □

Algoritmo 1 Colocación de birreflectores- $\frac{5\pi}{6}$ para iluminar un polígono ortogonal

Entrada: Un polígono ortogonal P de n vértices sin agujeros.

Salida: Subconjunto de puntos sobre los cuales se colocaran los birradares- $\frac{5\pi}{6}$.

NO,NE,SO,SE=0; {contadores para tipos de vértices}

tipoVMenor; {variable que recibirá el tipo de vértice cuya cuenta sea menor en el polígono}

para $i = 1$ to n **hacer**

 cuenta el tipo de vértice que le corresponde a cada v_i del polígono e incrementa

fin para

si hay algún contador de tipo de vértice menor a los demás **entonces**

 tipoVMenor=contador de tipo de vértice con la cuenta menor

si no

 tipoVMenor=cualquiera de los contadores de tipos de vértices

fin si

para $i = 1$ to n **hacer**

si v_i = tipoVMenor **entonces**

si tipoVMenor=NO **entonces**

si existen las aristas norte y oeste en v_i **entonces**

 Coloca un birradar- $\frac{5\pi}{6}$ F_1 sobre v_i , otro F_2 sobre la arista-O y F_3 sobre la arista-N, separados una distancia ϵ .

 El inicio de F_1 paralelo a O, F_2 atrasado $\frac{\pi}{6}$ de F_1 y F_3 adelantado $\frac{\pi}{6}$ de F_1 .

si no, si existe la arista-N en v_i **entonces**

 Coloca los tres birradares- $\frac{5\pi}{6}$ en la arista N de v_i , separados una distancia ϵ , ordenados de izquierda a derecha (F_1 debe quedar en el vértice oeste de la arista).

 El inicio de F_1 paralelo a N, F_2 adelantado $\frac{\pi}{6}$ de F_1 y F_3 atrasado $\frac{\pi}{6}$ de F_1 .

si no, si existe la arista O en v_i **entonces**

 Coloca los tres birradares- $\frac{5\pi}{6}$ en la arista E de v_i , separados una distancia ϵ , ordenados de abajo hacia arriba (F_3 debe quedar en el vértice norte de la arista).

 El inicio de F_1 paralelo a O, F_2 adelantado $\frac{\pi}{6}$ de F_1 y F_3 atrasado $\frac{\pi}{6}$ de F_1 .

fin si

fin si {estas validaciones también se realizan para los demás tipos de vértice: SE, NE, SO}

fin si

fin para

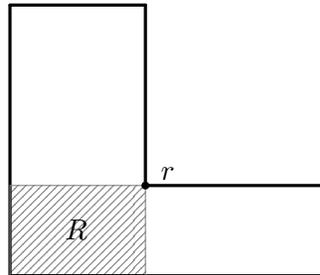


Figura 4.24: En un polígono con forma de L, hay una región en la que podemos colocar 3 birradarses- $\frac{5\pi}{6}$ para mantenerlo iluminado todo el tiempo.

En particular podemos colocar un birradar- $\frac{5\pi}{6}$ sobre el vértice cóncavo, y los otros dos sobre alguna de las aristas de P , ver figura 4.25.

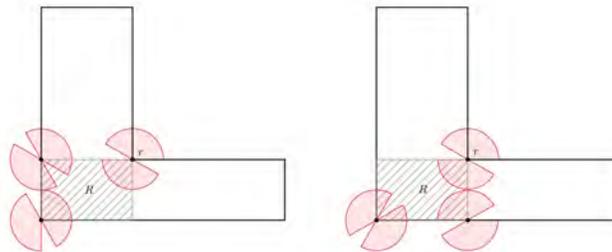


Figura 4.25: Configuración posible de tres birradarses- $\frac{5\pi}{6}$ para mantener a P iluminado todo el tiempo.

El algoritmo para colocar los birradarses- $\frac{5\pi}{6}$ toma tiempo lineal pero necesita $O(n \ln n)$ de preprocesamiento ya que utiliza el algoritmo de la sección 2.5.3 para partir el polígono ortogonal en formas-L.

Algoritmo 2 Colocación de birreflectores- $\frac{5\pi}{6}$ para iluminar un polígono ortogonal descompuesto en formas-L

Entrada: Lista de polígonos en formas-L, $PL[\]$.

Salida: Puntos sobre los cuales se colocaran los birradares- $\frac{5\pi}{6}$ en forma ortogonal.

para cada pl_i , con $i = 0, 1, \dots, \frac{r}{2}$ **hacer**

si tiene vértice r **entonces**

 Coloca un birradar- $\frac{5\pi}{6}$ F_1 sobre r , con F_{1A} paralela a la arista vertical que incide en r .

 Extender la arista horizontal que incide en r hasta que toque una arista de pl_i ,

 Coloca un birradar- $\frac{5\pi}{6}$ F_2 sobre el punto de intersección, desfasado $-\frac{\pi}{6}$ de F_1 .

 Coloca un birradar- $\frac{5\pi}{6}$ F_3 sobre el vértice convexo de pl_i desfasado $-\frac{\pi}{6}$ de F_2 .

si no

 Coloca los tres birradares- $\frac{5\pi}{6}$ de acuerdo a la regla noroeste en vértices convexos.

fin si

fin para

4.6. Iluminación de Polígonos simples

Ahora analizaremos el caso de los polígonos simples. Primero estableceremos la necesidad de n birradares- $\frac{5\pi}{6}$ para iluminar el interior todo el tiempo.

Teorema 18. *Sea P un polígono simple de n vértices, entonces para mantener vigilado a P todo el tiempo son suficientes y en ocasiones necesarios $\lfloor n \rfloor$ birradares- $\frac{5\pi}{6}$.*

Demostración. Iniciaremos estableciendo la necesidad.

Consideremos el polígono simple de la figura 4.27 (a) donde los picos no pueden ver el corredor.

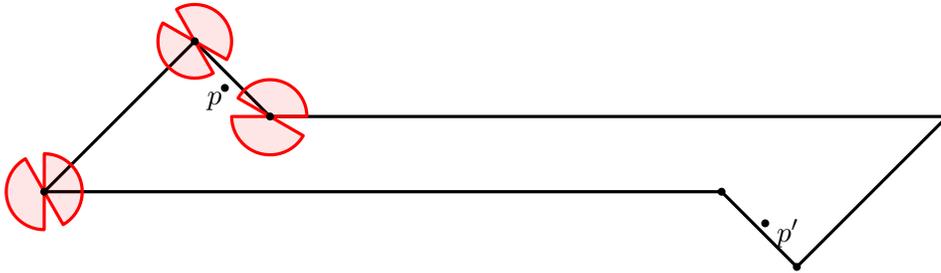


Figura 4.26: Familia de polígonos simples para los cuales son necesarios n birreflectores- $\frac{5\pi}{6}$, donde n es el número de vértices.

Sea el polígono P como el de la figura 4.26. Sean p y p' dos puntos al interior de P . Por

el corolario 4, con tres birradares- $\frac{5\pi}{6}$ podemos mantener iluminado a P todo el tiempo, estos birradares se colocan en vértices de P o incluso en alguna de las aristas visibles a $p(13)$. Es fácil ver que ninguno de estos tres birradares es de ayuda para iluminar a p' , por lo tanto necesitamos otros tres para p' . Ahora consideremos la progresión mostrada en la figura 4.27. Iniciamos con un triángulo el cual puede ser iluminado, de acuerdo al corolario 4, con tres birreflectores- $\frac{5\pi}{6}$. En cada nueva etapa son necesarios tres reflectores más para mantener el polígono iluminado y es fácil ver que en cada etapa se agregan tres vértices. Entonces n birradares- $\frac{5\pi}{6}$ son necesarios.

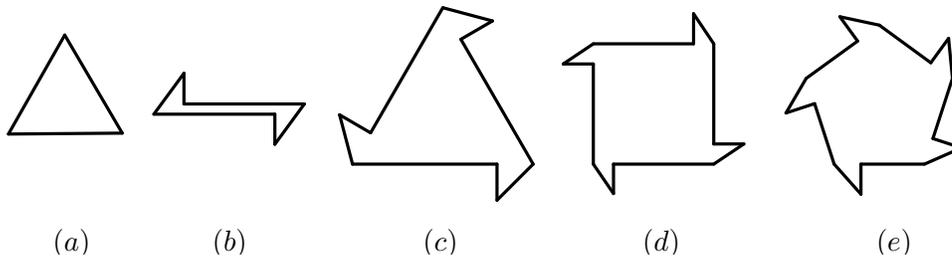


Figura 4.27: Familia de polígonos simples para los cuales son necesarios n birreflectores- $\frac{5\pi}{6}$, donde n es el número de vértices.

Ahora toca mostrar la suficiencia para lo cual haremos uso del teorema 1 que nos indica que todo polígono simple tiene una triangulación.

Lema 11. *La gráfica dual de la triangulación de un polígono simple es un árbol.*

Demostración. Sea P un polígono simple de n vértices, $n \geq 4$. Sea $T(P)$ una triangulación de P , y sean t_i los triángulos de dicha triangulación, con $i = 0, 1, \dots, n-2$. Cada arista de cada t_i tiene dos opciones, o es una arista de P o es una diagonal de P . Si es arista de P es claro que sólo pertenece a un t_i . Si es diagonal de P entonces, por la definición 4, pertenece a dos triángulos t_i y t_{i+1} .

Consideremos una diagonal arbitraria d de $T(P)$. Dicha diagonal corta a P en dos subpolígonos P_1 y P_2 con n_1 y n_2 vértices respectivamente. Todo vértice de P ocurre exactamente en P_1 o en P_2 con excepción de los vértices que definen a d , los cuales ocurren en ambos subpolígonos por lo que $n_1 + n_2 = n + 2$. Y además sabemos por el teorema 1 que toda triangulación tiene $n - 2$ triángulos.

Sea $G(T)$ la gráfica dual de $T(P)$. De acuerdo a la definición de gráfica dual (22), $G(T)$ es una gráfica cuyos vértices son triángulos de $T(P)$ y donde dos de sus vértices son adyacentes si sus triángulos correspondientes comparten una arista. Ya que cada triángulo tiene tres lados, el grado de los vértices de la gráfica dual es a lo más tres. Y debido a que cualquier diagonal corta a P en dos, entonces, remover una arista de $G(T)$ divide a la gráfica en dos, esto implica que no hay ciclos y por lo tanto $G(T)$ es un árbol. Ver figura 4.28.

□

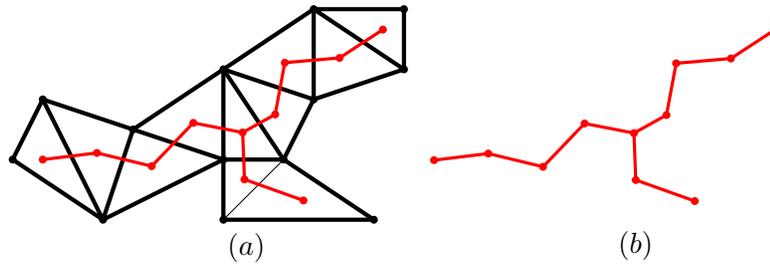


Figura 4.28: (a) Triangulación del polígono P con su gráfica dual marcada al interior. (b) Gráfica dual de la $T(P)$.

Para mostrar la suficiencia en el teorema 18 haremos lo siguiente: sea P un polígono simple con n vértices, y sea $T(P)$ una triangulación de P , como se muestra en la figura 4.29.

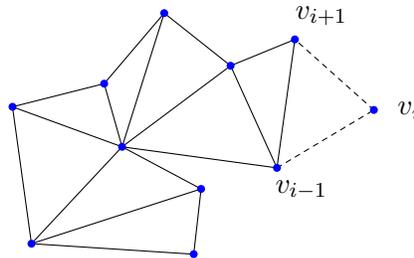


Figura 4.29: Polígono P' , al regresar el vértice v_i forma un triángulo con sus vértices vecinos que puede ser iluminado con alguno de los dos birradares existentes en v_{i-1} o v_{i+1} y un nuevo birradar en v_i , quedando P totalmente iluminado.

Quitamos un vértice cualquiera v_i de P y entonces obtenemos un polígono P' con $n - 1$ vértices, el cual, por hipótesis de inducción se puede iluminar completamente por $n - 1$ birradares $-\frac{5\pi}{6}$.

Si agregamos de nuevo el vértice v_i a P' , vemos que se genera un triángulo con los vértices $v_{i-1}v_iv_{i+1}$, el cual por el teorema 3, puede ser iluminado todo el tiempo por dos birradares $-\frac{5\pi}{6}$ colocados en dos de sus vértices correspondientes a los dos ángulos internos más pequeños, por lo tanto agregando un birradar sobre el vértice v_i en configuración fuerte con alguno de los birradares ya colocados en los vértices v_{i-1} o v_{i+1} , P permanece iluminado. □

Vale la pena realizar una observación con respecto a los vértices cóncavos dentro de un polígono.

Presentaremos dos algoritmos para iluminar polígonos simples con birradares- $\frac{5\pi}{6}$, el algoritmo 3 basado en una triangulación y el algoritmo 4 basado en la extensión de las aristas de vértices cóncavos.

Algoritmo 3 Colocación de birreflectores- $\frac{5\pi}{6}$ para iluminar un polígono simple a partir de una Triangulación

Entrada: Un polígono simple P de n vértices, sin agujeros.

Salida: Subconjunto de vértices sobre los cuales se colocarán los birradares- $\frac{5\pi}{6}$.

Realizar una triangulación del polígono, con algún algoritmo conocido, guardando los vértices de cada triángulo en el arreglo t .

para cada t_i con $i = 0, 1, \dots, n - 2$ **hacer**

3: **si** Ninguno de t_{i_1}, t_{i_2} y t_{i_3} tiene asignado birradar **entonces**

si Una arista e de t_i pertenece a P **entonces**

Coloca un birradar en un vértice de e .

6: Coloca el otro birradar en un vértice de t_i que no pertenece a e {Los birradares se colocan con la configuración para iluminar t_i }

si no

Coloca los dos birradares en cualesquiera vértices de t_i {Los birradares se colocan con la configuración para iluminar t_i }

9: **fin si**

si no

Coloca el segundo birradar en un vértice no asignados de t_i {El birradar se coloca con la configuración para iluminar t_i junto con el birradar que ya estaba asignado a t_i }

12: **fin si**

fin para

En el capítulo 2 se muestra un algoritmo para llevar a cabo una triangulación en $(O(n \log n))$, pero actualmente existen algoritmos más eficientes que toman $O(n)$ como en [17].

Sin duda utilizando el corolario 7 y la descomposición de polígonos simples en convexos, en algunas ocasiones podemos reducir el número de birradares- $\frac{5\pi}{6}$ para iluminar un polígono simple, lo que da origen al siguiente algoritmo.

Algoritmo 4 Colocación de birreflectores- $\frac{5\pi}{6}$ para iluminar un polígono simple a partir de la extensión de aristas de vértices cóncavos

Entrada: Un polígono simple P de n vértices, sin agujeros, descompuesto en polígonos convexos.

Salida: Subconjunto de aristas sobre las cuales se colocaran los birradares- $\frac{5\pi}{6}$.

Como los polígonos están formados por aristas de P y diagonales de P , y tenemos identificadas las diagonales que pertenecen a dos polígonos armamos el arreglo $A[]$ con parejas de polígonos (Q, Q') que comparten una diagonal e_i .

si Q no tiene pareja **entonces**

 agrega el elemento $(Q,)$ a $A[]$

4: **fin si**

para cada pareja en $A[]$ **hacer**

 Coloca tres birradares en la arista e_{i-1} de Q , que es la arista de $Q \in P$ cuyo extremo final toca e_i

si Q' no es nulo **entonces**

8: Coloca tres birradares en la arista e_{i+1} de Q' , que es la arista de $Q \in P$ cuyo extremo inicial toca e_i

fin si

fin para

En la figura 4.30 se muestra como se colocan los birradares en una pareja de polígonos que comparten una arista.

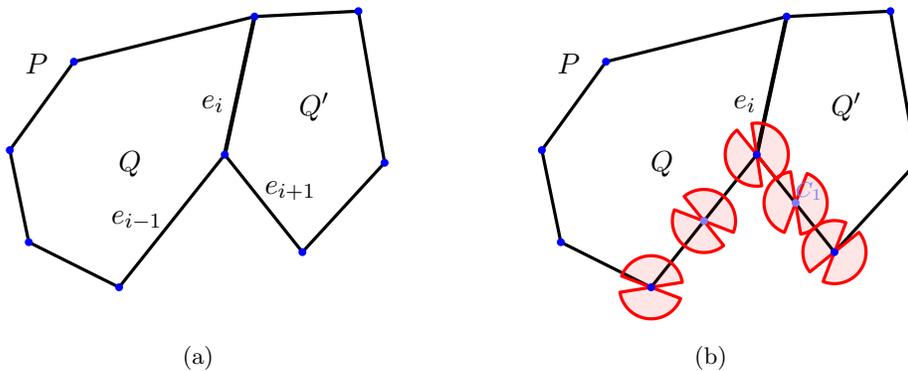


Figura 4.30: (a) Descomposición de P en dos polígonos Q y Q' . (b) Colocación de los birradares para iluminar P

Resolviendo el problema de esta forma, y como sabemos que un polígono simple con r vértices cóncavos puede descomponerse en $r + 1$ polígonos simples, entonces utilizaremos

$$5 \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1 \right) \text{ birradares-} \frac{5\pi}{6}.$$

Obviamente, al no haber una relación fija entre los vértices cóncavos y los convexos, como la que existe en los polígonos ortogonales, ya que en un polígono simple con n vértices podemos tener de 1 a $n - 3$ vértices cóncavos, la mejora con este segundo algoritmo no puede generalizarse.

Capítulo 5

Conclusiones

Dentro de este trabajo se ha estudiado el uso de birradares como una variante al problema de la galería de arte. Los resultados que se encontraron son los siguientes:

Tabla 5.1: Resultados con birradares- $\frac{5\pi}{6}$

Polígono	Preprocesamiento	Número guardias	Complejidad Algoritmo
Ortogonal		$3 \left(\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor \right)$	$O(n)$
Ortogonal	Partición en formas-L ($O(n \ln n)$)	$3 \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1 \right)$	$O(n)$
Simple	Triangulación ($O(n)$)	$\lfloor n \rfloor$	$O(n)$
Simple		$5 \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1 \right)$	$O(n)$

Dentro de la investigación se demostró que en algunas ocasiones los reflectores bidireccionales son de más ayuda que un reflector giratorio simple de tamaño π como por ejemplo en el caso de triángulos y rectángulos.

También se mostró que a pesar de que la mitad de un birradar de los que se utilizaron no nos da una iluminación constante de π , gracias a la propiedad de que puede girar, no rompe con los resultados de investigaciones anteriores en los que se establece que reflectores menores a π no permiten iluminar ningún polígono totalmente.

Quedan algunos temas que se pueden investigar a futuro como son: ¿que pasa en galerías ortogonales o simples con hoyos?, utilizar birradares para vigilar el exterior de un polígono, tratar de vigilar tanto el interior como el exterior de un polígono, ¿qué sucede si se permite utilizar birradares en puntos al interior del polígono? o si los birradares son de ayuda en galerías 3D.

Bibliografía

- [1] S. Fisk, “A short proof of Chvátal’s Watchman Theorem,” *Journal of Combinatorial Theory Series B* 24 (3): 374, (1978).
- [2] J. O’Rourke and K. J. Supowit, “Some NP-hard Polygon Decomposition Problems,” *IEEE Transactions on Information Theory* 29:2, (1983).
- [3] A. Aggarwal, “The Art Gallery Theorem: Its Variations, Applications and Algorithmic Aspects,” *Ph.D. thesis The Johns Hopkins University*, (1984).
- [4] D. T. Lee and A. Lin, “Computational Complexity of Art Gallery Problems,” *IEEE Transactions on Information Theory* 276–282, (1986).
- [5] P. Bose, L. Guibas, A. Lubiw, M. Overmars, D. Souvaine, and J. Urrutia, “The Floodlight Problem,” *Int. Journal in Computational Geometry* 7 153-163, (1997).
- [6] I. Hiro, U. Hideyuki, and Y. Mitsuo, “NP-Completeness of Stage Illumination Problems,” *Lecture Notes in Comput. Sci. Volume 1763, 2000, pp 158-165*, (2000).
- [7] V. Estivill and J. Urrutia, “Optimal Floodlight Illumination of Orthogonal Art Galleries,” *Proc. of the Sixth Canadian Conference in Computational Geometry*, (1994).
- [8] V. Estivill-Castro, J. O’Rourke, J. Urrutia, and D. Xu, “Illumination of Polygons with Vertex Lights,” *Inform. Process. Lett.*, vol. 56, no. 1, 1995.
- [9] J. A. Bondy and S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*. North-Holland, (1982).
- [10] J. O’Rourke, “An Alternate Proof of the Rectilinear Art Gallery Theorem,” *J. of Geometry* 21 118-130, (1983).
- [11] J. Urrutia, *Art Gallery and Illumination Problems*. North-Holland: Sack and J. Urrutia editors, (2000).
- [12] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, and J. Urrutia, “Optimal Floodlight Illumination of Stages,” (1993).

- [13] W. Steiger and I. Streinu, “Positive and Negative Results on the Floodlight Problem,” (1994).
- [14] J. O’Rourke and D. Xu, “Illumination of Polygons with 90° Vertex Lights,” (1994).
- [15] E. Kranakis, F. MacQuarie, O. Morales, and J. Urrutia, “Uninterrupted Coverage of a Planar Region with Rotating Directional Antennae,” *In proceedings of 11th International Conference on Ad Hoc Networks and Wireless (ADHOC-NOW) Belgrade*, (2011).
- [16] J. Urrutia, “Iluminando polígonos con reflectores,” *Proc. VI Encuentro de Geometría Computacional F. Hurtado ed. Barcelona*, (1995).
- [17] B. Chazelle, “Triangulating a Simple Polygon in Linear Time,” *Discrete and Computational Geometry 6* 485-524, (1991).

Índice alfabético

- camino*, 13
- uv – camino*, 13
- uv – paseo*, 13
- uv – trayectoria*, 13
- arcos, 44
- aristas, 7
- aristas adyacentes, 12
- birradar- α , 35, 36
- birradares, 36
- birradares diferentes, 36
- birradares iguales, 37
- circuito, 13
- circuncírculo, 43
- clase cromática, 16
- cobertura, 10
- componente conexa, 13
- configuración fuerte, 36, 44
- cuadrados, 41
- cuerda, 41, 43
- cuerda propia, 42
- Definiciones, 9
- diámetro, 44
- diagonal, 9
- El problema de la galería de arte, 14
- equilátero, 38
- estrados, 8, 25
- familia de triángulos, 40
- Fisk, 16
- frontera de P , 7
- galería de arte, 7
- gráfica, 11
- gráfica conexa, 13
- gráfica dual, 12
- gráfica plana, 11
- grado de un vértice, 12
- grado mínimo, 12
- grado máximo, 12
- guardias arista, 10
- guardias móviles, 10
- guardias punto, 10
- guardias vértice, 10
- iluminación, 36
- Iluminación con radares, 27
- intersección de dos ángulos, 46
- Introducción, 7
- k-coloración, 16
- L-shapes, 17
- lámpara, 10
- orden de una gráfica, 12
- periodo de iluminación, 36
- plano, 46, 51
- plano dual, 28
- plano original, 28
- polígono, 7, 9
- polígono simple, 9
- polígonos ortogonales, 9, 53

- polígonos simples, 57
- propiedades birradares, 38
 - radar, 11
 - Radar bidireccional, 35
 - rectángulos, 41
 - reflector, 10
- reflector de tamaño α , 10
 - reflector- α , 10
- reflectores fijos, 8, 25
 - regiones de luz, 36
- reglas de iluminación, 31
 - resultados, 35
 - secantes, 43
 - sector vigilado, 27
 - semiplano, 46, 49
 - sentido negativo, 41
 - subgráfica conexa, 13
- tamaño de una gráfica, 12
- teorema de triangulación, 16
 - tercer birradar, 49
 - triángulos, 38
- triangulación, 9, 16
 - vértice cóncavo, 13
 - vértice convexo, 13
 - vértices, 7
 - velocidad, 36
 - vigilancia, 10, 36
 - visibilidad, 7, 9