



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**PROPIEDADES DEL OPERADOR DE  
CAUCHY-CLIFFORD**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A :**

**JOSÉ LUIS LUNA GARCÍA**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. SALVADOR PÉREZ-ESTEVA  
2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

### 1. Datos del alumno

Luna  
García  
José Luis  
56 05 36 13  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
304684359

### 2. Datos del tutor

Dr.  
Pérez  
Esteva  
Salvador

### 3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Marmolejo  
Olea  
Emilio

### 4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Capella  
Kort  
Antonio

### 5. Datos del sinodal 3

Dr.  
López  
García  
Francisco Marcos

### 6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Ackermann  
Nils Heye

### 7. Datos de la tesis

Propiedades del operador de Cauchy-Clifford  
215 p  
2013

# Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a mi familia. A mi madre, por siempre confiar en mi. A mi padre, por su interés y apoyo. A mi hermano, por su ejemplo, compañía y amistad.

Al Dr. Antonio Capella le agradezco su entusiasmo por las ecuaciones diferenciales, su disposición para trabajar y guiarme durante buena parte de mi carrera, su paciencia. Gracias por ser un excelente maestro.

Al Dr. Salvador Pérez-Esteva le agradezco el haberme aceptado como su estudiante, el apoyarme en todo lo que fue posible durante la realización de este trabajo, el siempre tener tiempo para resolver mis dudas (técnicas o académicas); el ir mas allá del deber de un asesor.

Al Dr. Jorge Rivera-Noriega que, aunque no pudo ser sinodal de este trabajo, siempre estuvo interesado. Agradezco todas las pláticas, los consejos y comentarios; el entusiasmo por la investigación y la enseñanza.

Por último agradezco el apoyo, en diferentes períodos durante la realización de este trabajo, de una beca parcial de lugar en el Instituto de Matemáticas y el proyecto PAPIIT-UNAM IN100512.



# Índice general

|   |            |
|---|------------|
| Agradecimientos   | III        |
| Índice General  | v          |
| Introducción  | VII        |
| <b>1. Preliminares</b>                                      | <b>1</b>   |
| 1.1. Álgebras de Clifford . . . . .                         | 1          |
| 1.2. La función maximal de Hardy-Littlewood . . . . .       | 8          |
| 1.3. Dominios Lipschitz . . . . .                           | 19         |
| 1.4. Ahlfors regularidad . . . . .                          | 23         |
| 1.5. La función maximal no-tangencial . . . . .             | 26         |
| 1.6. Teorema de la divergencia . . . . .                    | 35         |
| 1.7. Fórmula integral de Cauchy en $\mathbb{C}$ . . . . .   | 46         |
| 1.8. Fórmula integral de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ . . . . . | 49         |
| 1.9. Núcleos y operadores de Calderón-Zygmund . . . . .     | 53         |
| 1.10. El método de rotaciones . . . . .                     | 68         |
| <b>2. El operador de Cauchy</b>                             | <b>79</b>  |
| 2.1. La integral de Cauchy en $\mathbb{C}$ . . . . .        | 81         |
| 2.2. El operador de Cauchy-Clifford . . . . .               | 98         |
| 2.3. Extensiones . . . . .                                  | 114        |
| <b>3. Medida armónica y límites no tangenciales</b>         | <b>119</b> |
| 3.1. Funciones armónicas . . . . .                          | 122        |
| 3.2. Medida armónica . . . . .                              | 123        |
| 3.3. Dominios Lipschitz estrellados . . . . .               | 127        |
| 3.4. Estimaciones para $\omega$ . . . . .                   | 136        |
| 3.5. Límites no-tangenciales . . . . .                      | 149        |

|   |            |
|---|------------|
| 3.6. $\omega \ll \sigma \ll \omega$ . . . . .                 | 160        |
| 3.7. Extensiones . . . . .                                    | 168        |
| <b>4. Espacios de Hardy</b> . . . . .                         | <b>173</b> |
| 4.1. El caso complejo y un teorema de Kerzman-Stein . . . . . | 174        |
| 4.2. Espacios de Hardy de funciones monogénicas . . . . .     | 185        |
| 4.3. Extensiones . . . . .                                    | 197        |
| <b>Bibliografía</b> . . . . .                                 | <b>203</b> |

# Introducción

El objetivo de este trabajo es dar un primer paso en la lectura del artículo “*Hardy spaces, singular integrals and the geometry of euclidean domains of locally finite perimeter*” [25], fijándonos en el caso en que los dominios a considerar son Lipschitz. Aunque los resultados de [25] son mucho más generales, las técnicas empleadas en el artículo tienen su origen en el estudio de dominios Lipschitz: El estudio de la integral de Cauchy en curvas Lipschitz empezado por Calderón en [4]; el estudio de la medida armónica y límites no-tangenciales de funciones armónicas en dominios Lipschitz, culminando con los artículos de Hunt, Wheeden [28, 29] y Dahlberg [11]; y por último el estudio de espacios de Hardy complejos sobre gráficas Lipschitz de Kenig [32] (aunque no entraremos mucho a estas últimas generalizaciones).

Como motivación del trabajo tenemos el siguiente teorema en [35]

**Teorema.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un dominio acotado simplemente conexo con frontera  $\Gamma$  una curva de Jordan suave. Si  $\mathcal{C}$  denota el operador de Cauchy en  $\Gamma$ , i.e. es el operador que a cada función en  $\Gamma$  le asocia los valores de frontera de su integral de Cauchy, y si  $H_{\pm}^p(\Gamma)$  son los espacios de valores de frontera, en  $L^2(\Gamma)$ , de funciones en  $\Omega$  y su complemento respectivamente; entonces tenemos que son equivalentes*

1.  $\Omega$  es un disco.
2.  $\mathcal{C}$  es autoadjunto.
3. La descomposición  $L^2(\Gamma) = H_+^2(\Gamma) \oplus H_-^2(\Gamma)$  es ortogonal.

En el caso suave no hay muchas dificultades técnicas: por ejemplo podemos reducir el estudio de  $\mathcal{C}$  al de la transformada de Hilbert en  $\mathbb{R}$  y la existencia de valores de frontera de funciones holomorfas es relativamente sencilla de obtener del núcleo de Poisson (ver la introducción de los capítulos 2 y 4); sin embargo en el caso Lipschitz las cosas ya no son tan sencillas. El propósito del trabajo es entonces probar la generalización del teorema anterior al caso Lipschitz por un lado (Teorema 4.1.5 y

Proposición 4.1.3), y por otro que si cambiamos la estructura compleja por la de álgebras de Clifford (que es una generalización razonable a dimensiones mayores de los números complejos, ver sección 1.1 y 1.8 para una justificación) entonces el resultado sigue siendo válido con el operador de Cauchy reemplazado por el de Cauchy-Clifford y los espacios  $H_{\pm}^2$  definidos ahora en términos de funciones monogénicas (ver Teorema 4.2.1).

El trabajo está dividido en cuatro capítulos. Al inicio de cada capítulo damos una breve introducción a los resultados que se quieren obtener. Al final se dan los teoremas (sin prueba) y referencias pertinentes a las generalizaciones requeridas para obtener los resultados de [25] en toda su generalidad.

En el primer capítulo introducimos los conceptos básicos que usaremos en la tesis. Empezamos con la definición de las álgebras de Clifford asociadas a  $\mathbb{R}^n$  y el operador de Dirac pertinente (ver [39] para otro operador). Luego pasamos a Ahlfors regularidad, una propiedad que nos dice, de manera cuantitativa, que un conjunto  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es  $n$ -dimensional; esto será útil a la hora de definir operadores integrales sobre  $\Sigma$ . Después introducimos las regiones no-tangenciales y la función maximal no-tangencial, que nos permitirán tratar el comportamiento en la frontera de ciertos operadores integrales. Pasamos luego a la definición de dominios Lipschitz y una caracterización de estos en términos de la llamada condición (uniforme) del cono interior, esta en particular implica que todo conjunto convexo es Lipschitz. Luego damos una versión generalizada del teorema de la divergencia, esto nos permitirá extender las fórmulas integrales de Cauchy en  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{R}^n$  a una clase más grande de funciones holomorfas/monogénicas. La siguiente sección está dedicada a la introducción de la función maximal de Hardy-Littlewood asociada a una medida  $\mu$  y la prueba de la cota (1,1)-débil de esta siempre que  $\mu$  sea doblante (en particular si  $\mu$  es la medida de superficie en un conjunto Ahlfors regular). En la penúltima sección introducimos los operadores de Calderón-Zygmund asociados a un núcleo estándar antisimétrico; probamos el resultado clásico que si  $T$  es de C-Z y (2,2)-fuerte entonces es  $(p,p)$ -fuerte para toda  $1 < p < \infty$  y el operador maximal asociado también lo es. Concluimos con el método de rotaciones de Calderón, que permite reducir el estudio de un operador en  $\mathbb{R}^n$  al de una familia de operadores en  $\mathbb{R}$ .

La mayoría de los resultados obtenidos en este primer capítulo son bien conocidos. Como referencia tenemos:

1. Para un enfoque más algebraico de álgebras de Clifford y sus generalizaciones se puede consultar [44]. Por otro lado [39] tiene un enfoque mucho más analítico, en particular por ejemplo se trata al operador de Cauchy-Clifford directamente con análisis de Clifford (en lugar de reducir a coordenadas y usar el método de rotaciones, aunque las técnicas usadas están basadas en ‘métodos reales’).

También ahí se tratan los espacios de Hardy de funciones monogénicas en dominios Lipschitz.

2. La definición de dominios Lipschitz es estándar, pero hay que tener cuidado con que no son equivalentes gráficas Lipschitz e imágenes bi-Lipschitz en la definición de las cartas coordenadas pues en principio no tenemos un teorema de la función implícita. Para ver más detalles y algunas sutilezas de estos dominios referimos a [26, 52].
3. El teorema de la divergencia que usamos es una versión simplificada (en términos de la geometría del dominio en consideración) de la versión que aparecen en [27, Theorem 3.2.8]. En esta misma referencia se puede consultar la fórmula integral de Cauchy para funciones monogénicas [Theorem 4.7.2].
4. La teoría de operadores de Calderón-Zygmund con núcleos antisimétricos es relativamente bien conocida, puede consultarse por ejemplo [23, 38]. En el primero de estos también se trata explícitamente el método de rotaciones.

El segundo capítulo está dedicado a introducir los operadores de Cauchy y Cauchy-Clifford en  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{R}^{n+1}$  respectivamente. Primero introducimos el operador de Cauchy en la frontera dado por el valor principal del operador con núcleo  $(z - \zeta)^{-1}$  sobre una curva de Jordan rectificable. Damos luego su relación con el operador que a una función en  $L^p$  de dicha curva le asocia los valores de frontera de su integral de Cauchy. Estas son las llamadas fórmulas de Plemelj-Sokhotskij. Probamos que estos operadores son acotados en  $L^p$ . Pasamos luego al estudio del operador de Cauchy-Clifford, al que primero reducimos a un operador en  $\mathbb{R}^n$  vía una partición de la unidad y luego al operador de Cauchy complejo vía el método de rotaciones.

Los resultados de este capítulo son famosos, aunque no tan elementales.

1. Los conceptos básicos de la integral de Cauchy en  $\mathbb{C}$  y las fórmulas de Plemelj-Sokhotskij se pueden consultar en [22, 42]. La prueba que damos de continuidad en  $L^p$  de la integral de Cauchy está tomada de [7], pero también se puede consultar en [38, 47]. Para una prueba vía el teorema  $T(b)$  referimos a [23]; una extensión del argumento original de Calderón se da en [13] y la prueba original de Coifman, McIntosh y Meyer se puede consultar en [8, 48], donde también se da una prueba del Teorema 1.10.2.
2. Para los resultados básicos del operador de Cauchy-Clifford (fórmula integral, teorema de Cauchy, etc.) se puede consultar [45] para un enfoque como el nuestro y [39] para funciones monogénicas respecto del operador  $D' = \sum_{k=0}^n e_k \odot \partial_{x_k}$

asociado a funciones  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{(n)}$ . La prueba de la continuidad en  $L^p$  del operador de Cauchy-Clifford como se hace aquí es estándar; por ejemplo los argumentos son los mismos que los usados para tratar el potencial de dos capas y se puede consultar en [48]. Por otro lado una prueba de este hecho usando análisis de Clifford se encuentra en [39].

En el tercer capítulo introducimos la noción de medida armónica en un dominio regular para el problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace. Probamos que, si  $\Omega$  es un dominio Lipschitz entonces la medida armónica y la medida de superficie son mutuamente absolutamente continuas. Probamos también que si  $u$  es una función armónica acotada no-tangencialmente por abajo en un conjunto  $E \subset \partial\Omega$  entonces  $u$  tiene límites no-tangenciales casi en todas partes respecto de la medida armónica en  $E$ . Juntando estos dos resultados concluimos convergencia no-tangencial casi en todas partes respecto de la medida de superficie.

1. Las estimaciones para la medida armónica, así como el resultado de convergencia no-tangencial, aparecen en [28]. El caso especial del semiespacio superior se trata en [5, 6]. En [2, 33] se obtienen los mismos resultados estudiando operadores en forma de divergencia con coeficientes acotados en la bola unitaria o el cubo unitario.
2. La mutua continuidad absoluta de la media armónica respecto de la de superficie sigue los argumentos de Dahlberg [11]. Otra manera de obtener esto vía una identidad integral se puede ver en [3, 33].

En el cuarto capítulo introducimos los espacios de Hardy  $H^p$ ,  $1 < p < \infty$ , de funciones holomorfas y monogénicas. En el caso complejo comparamos con la definición clásica de estos espacios en el disco unitario. En ambos casos probamos que  $H^p(\Omega)$  es exactamente la clase de funciones representables por la integral de Cauchy de una función en  $L^p(\partial\Omega)$ . Probamos también aquí el resultado principal que nos dice que el operador de Cauchy  $\mathcal{C}$  es auto-adjunto si y sólo si  $\Omega$  es una bola, el complemento de una bola o un semiespacio.

1. Los resultados básicos en la teoría clásica de los espacios de Hardy en  $\mathbb{C}$  se puede consultar en [17]. La mayoría de los resultados que exponemos en este caso aparecen en [35].
2. El caso monogénico sigue a [25]. Como se dijo antes una exposición un poco más elemental de espacios de Hardy en dominios Lipschitz se puede encontrar en [39].

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Álgebras de Clifford

Empezamos con una caracterización de  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}$ -álgebra.

**Proposición 1.1.1.** *Sea  $R$  una  $\mathbb{R}$ -álgebra que satisface que existe un mapeo lineal e inyectivo  $\iota : \mathbb{R} \rightarrow R$  con las siguientes propiedades*

1.  $\iota(\mathbb{R})$  genera  $R$  como  $\mathbb{R}$ -álgebra.
2. Si  $V \subset \iota(\mathbb{R})$  es un subespacio vectorial propio entonces  $V$  no genera  $R$  (como  $\mathbb{R}$ -álgebra).
3.  $\iota(x)^2 = -|x|^2 1_R$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ .

Entonces el mapeo  $T$  que manda  $i \mapsto \iota(1)$  se extiende a un isomorfismo de  $\mathbb{R}$ -álgebras  $T : \mathbb{C} \rightarrow R$ .

*Demostración.* Sea  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ . Si  $T$  va a ser homomorfismo de  $\mathbb{R}$ -álgebras entonces  $T(1) = 1_R$ , por lo que necesariamente  $T(z) = T(x) + T(i)T(y) = x1_R + y\iota(1)$ . Por otro lado, como  $-1_R = \iota(1)^2$ , tenemos que  $1_R, \iota(1)$  son linealmente independientes. Entonces  $T$  es un homomorfismo inyectivo de  $\mathbb{R}$ -álgebras. Como  $\iota(\mathbb{R}) \subset T(\mathbb{C})$  y  $T(\mathbb{C})$  es un álgebra, de la primera condición concluimos que  $T(\mathbb{C}) = R$ .  $\square$

Obviamente la segunda condición en nuestro caso la podemos omitir: Si  $V$  es un subespacio propio de  $\iota(\mathbb{R})$  entonces  $V = \{0\}$ , que no puede generar  $R$  por 3.

Definimos las álgebras de Clifford asociadas a  $\mathbb{R}^n$  de manera análoga.

**Definición 1.1.1.** Dado  $n \geq 1$  definimos el álgebra de Clifford en  $n$  generadores, denotada  $\mathbb{R}_{(n)}$  y con producto denotado  $\odot$ , como la  $\mathbb{R}$ -álgebra que satisface que existe  $\iota : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{(n)}$  lineal e inyectiva tal que

1.  $\iota(\mathbb{R}^n)$  genera  $\mathbb{R}_{(n)}$  como  $\mathbb{R}$ -álgebra.
2. Si  $V \subset \iota(\mathbb{R}^n)$  es un subespacio vectorial propio entonces  $V$  no genera  $\mathbb{R}_{(n)}$ .
3.  $\iota(x)^2 = -|x|^2 1_{\mathbb{R}_{(n)}}$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

En general omitiremos  $\iota$  y consideraremos  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}_{(n)}$ . En este caso, por definición, tenemos que  $\mathbb{R}_{(n)}$  está generada, como espacio vectorial, por todos los posibles productos  $e_{j_1} \odot \dots \odot e_{j_k}$  de vectores canónicos en  $\mathbb{R}^n$ . Por otro lado, la tercera condición de la definición, aplicada a  $x = e_j + e_k$ , implica que

$$e_j \odot e_k + e_k \odot e_j = -2\delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n, \quad (1.1.1)$$

donde  $\delta$  es la delta de Kronecker. En particular elementos de la base canónica anti-conmutan. Por lo tanto si definimos

$$e_J = e_1^{j_1} \odot \dots \odot e_n^{j_n}, \quad J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_2^n := \{0, 1\}^n, \quad (1.1.2)$$

tenemos que toda  $x \in \mathbb{R}_{(n)}$  tiene una representación

$$x = \sum_{J \in \mathbb{Z}_2^n} x_J e_J, \quad x_J \in \mathbb{R}. \quad (1.1.3)$$

En particular, como espacio vectorial, tenemos  $\dim(\mathbb{R}_{(n)}) \leq 2^n$ . De hecho los  $a_J$  son linealmente independientes, lo que nos daría  $\dim(\mathbb{R}_{(n)}) = 2^n$ . Para ver la independencia definamos, para  $1 \leq k \leq n$ , los conjuntos  $E_k = \{J \in \mathbb{Z}_2^n : e_k \odot e_J = e_J \odot e_k\}$ . Supongamos que para alguna elección de  $x_J$  tenemos

$$\sum_J x_J e_J = 0. \quad (1.1.4)$$

Entonces multiplicando por  $e_k$  por la izquierda y por  $e_k^{-1}$  por la derecha obtenemos

$$\sum_{J \in E_k} x_J e_J - \sum_{J \notin E_k} x_J e_J = 0. \quad (1.1.5)$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones llegamos a que

$$\sum_{J \in E_k} x_J e_J = 0 \quad (1.1.6)$$

Repetimos el argumento, empezando con esta última suma, para los demás  $e_j$  para obtener, con  $E = \cap_{j=1}^n E_j$ ,

$$\sum_{J \in E} x_J e_J = 0 \quad (1.1.7)$$

Ahora,  $E$  consiste de los  $J$  tal que  $e_k \odot e_J = e_J \odot e_k$  para toda  $1 \leq k \leq n$ . Aseguramos que los únicos tales  $J$  son  $J_0 = (0, \dots, 0)$  y, en caso de que  $n$  sea impar,  $J_n = (1, \dots, 1)$ . Supongamos que  $J \neq J_0, J_n$  es tal que  $j_m = 1$  y  $j_{m'} = 0$  entonces  $e_m$  conmuta con  $e_J$  si y sólo si  $e_{m'}$  anti-conmuta con  $e_J$  por lo que  $J \notin E$ . Por otro lado tenemos  $e_1 \odot e_{(1, \dots, 1)} = (-1)^{n-1} e_{(1, \dots, 1)} e_1$  de donde la afirmación se sigue. Juntando todo esto concluimos

$$0 = \begin{cases} x_{(0, \dots, 0)} & \text{si } n \text{ par,} \\ x_{(0, \dots, 0)} + x_{(1, \dots, 1)} e_{(1, \dots, 1)} & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Si definimos

$$e^J := (-1)^{|J|} e_n^{j_n} \odot \dots \odot e_1^{j_1}, \quad |J| = j_1 + \dots + j_n, \quad (1.1.9)$$

en particular tenemos

$$e_J \odot e^J = 1 = e^J \odot e_J, \quad J \in \mathbb{Z}_2^n. \quad (1.1.10)$$

Multiplicando (1.1.4) por  $e^{J'}$  obtenemos

$$\sum_J x_J e_J e^{J'} = 0, \quad (1.1.11)$$

por lo que repitiendo el argumento anterior obtenemos

$$0 = \begin{cases} x_{J'} & \text{si } n \text{ par.} \\ x_{J'} + x_{(1, \dots, 1) - J'} e_{(1, \dots, 1) - J'} & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases} \quad (1.1.12)$$

Esto demuestra la independendencia lineal en el caso  $n$  par. Si  $n$  impar y en lo anterior escogemos  $J'$  tal que  $j'_m = 0$  y  $x_{(1, \dots, 1) - J'} \neq 0$ , concluimos que  $e_1, \dots, e_{m-1}, e_{m+1}, \dots, e_n$  generan  $\mathbb{R}_{(n)}$ , que contradice la segunda condición de la definición.

Con esto es fácil probar unicidad de  $\mathbb{R}_{(n)}$  pues dada otra álgebra que satisfaga las condiciones, el mapeo obvio que manda los generadores y sus productos en los correspondientes se extiende a un homomorfismo de álgebras, inyectivo por lo anterior y sobre por la primera condición.

**Observación 1.1.1.** *El argumento anterior demuestra que de hecho la segunda condición en la Definición 1.1.1 es equivalente a que  $e_{(1,\dots,1)}$  no esté en el generado por la identidad, y que esto último es siempre cierto cuando  $n$  es par.*

Dado que todo espacio vectorial  $V$ , con  $\dim(V) = m < \infty$ , se puede ver como un subespacio de  $M_m(\mathbb{R})$  (el espacio de matrices de  $m \times m$  sobre  $\mathbb{R}$ ), no es extraño buscar a  $\mathbb{R}_{(n)}$  en esta última álgebra, con  $m = 2^n$ . En este caso aseguramos que nos basta encontrar  $n$  matrices  $E_1, \dots, E_n$  linealmente independientes tal que

$$E_k^2 = -I, \quad E_k E_j = -E_j E_k, \quad E_1 \cdots E_n \neq \lambda I \text{ para toda } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.1.13)$$

En efecto, poniendo  $\iota(e_k) = E_k$ , vemos que  $\iota$  es lineal e inyectiva por la independencia lineal. La identidad  $\iota(x)^2 = -|x|^2 I$  se sigue de las dos primeras condiciones en (1.1.13) y, de la Observación 1.1.1, vemos que se satisface la segunda condición de la Definición 1.1.1.

En el caso  $n = 1$  sabemos que podemos poner<sup>1</sup>

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}). \quad (1.1.14)$$

Dado que la inclusión natural  $\mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  induce una inclusión de álgebras  $\mathbb{R}_{(n-1)} \hookrightarrow \mathbb{R}_{(n)}$ , un argumento inductivo es lo apropiado. Supongamos que  $E_{k,n-1}$  con  $1 \leq k \leq n-1$  son las matrices buscadas, correspondientes a  $\mathbb{R}_{(n-1)}$ , entonces afirmamos que

$$E_{k,n} := \begin{pmatrix} E_{k,n-1} & 0 \\ 0 & -E_{k,n-1} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad E_{n,n} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1.15)$$

son las matrices correspondientes a  $\mathbb{R}_{(n)}$ . Claramente  $E_{n,n}$  no está en el generado lineal de las  $E_{k,n}$  con  $1 \leq k \leq n-1$ , por lo que la independencia lineal se sigue. También tenemos

$$\begin{aligned} E_{j,n} E_{k,n} &= \begin{pmatrix} E_{j,n-1} E_{k,n-1} & 0 \\ 0 & E_{j,n-1} E_{k,n-1} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j, k \leq n-1. \\ E_{k,n} E_{n,n} &= \begin{pmatrix} 0 & E_{k,n-1} \\ E_{k,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \\ E_{n,n} E_{k,n} &= \begin{pmatrix} 0 & -E_{k,n-1} \\ -E_{k,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

---

<sup>1</sup>El segundo índice indica la dimensión en la que estamos trabajando.

De aquí (1.1.13) es casi inmediato. Concluimos que  $\mathbb{R}_{(n)}$  existe siempre que  $\mathbb{R}_{(n-1)}$  exista, pero como sabemos que  $\mathbb{R}_{(1)} = \mathbb{C}$  tenemos que  $\mathbb{R}_{(n)}$  existe para toda  $n \geq 1$ .

Notamos que como  $E_{1,1}^t = -E_{1,1}$ , transponer en el álgebra generada por los  $E_{k,n}$  define una involución lineal  $\overline{(\cdot)} : \mathbb{R}_{(n)} \rightarrow \mathbb{R}_{(n)}$  tal que  $\bar{e}_k = -e_k$  para toda  $k$  y más generalmente, recordando (1.1.10),

$$\bar{e}_J = e^J, \quad J \in \mathbb{Z}_2^n. \quad (1.1.17)$$

Resumimos lo hecho hasta aquí en el siguiente

**Teorema 1.1.1.** *Sea  $n \geq 1$  entonces el álgebra de Clifford  $\mathbb{R}_{(n)}$  existe y es única salvo isomorfismos. Está generada, como espacio vectorial, por la base  $(e_J)_{J \in \mathbb{Z}_2^n}$  y tiene dimensión  $2^n$ . Más aún  $\mathbb{R}_{(n)}$  viene equipada con una involución tal que*

$$\sum_J x_J e_J = x \mapsto \bar{x} = \sum_J x_J e^J, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{(n)}. \quad (1.1.18)$$

Asociada a la base  $(e_J)_{J \in \mathbb{Z}_2^n}$  podemos definir una norma en  $\mathbb{R}_{(n)}$  de manera natural como

$$|x|_0^2 = \sum_J |x_J|^2, \quad x = \sum_J x_J e_J. \quad (1.1.19)$$

Notamos que si definimos, con  $x$  como arriba,  $\text{Re}(x) = x_{(0, \dots, 0)}$  entonces tenemos la expresión  $|x|_0^2 = \text{Re}(x\bar{x})$ . Notamos que, de la definición y la convexidad de la función  $t^2$ , tenemos

$$2^{-n} |x \odot y|_0^2 \leq \sum_{I,J} |x_I y_J|^2 = |x|_0^2 |y|_0^2, \quad x, y \in \mathbb{R}_{(n)}. \quad (1.1.20)$$

Esto es útil pues nos dice que, salvo un factor acotado, el producto se comporta como el producto usual en  $\mathbb{R}$ . En particular tenemos, por ejemplo, una desigualdad de Hölder.

Dado que  $\mathbb{R}_{(n)}$  es un espacio vectorial de dimensión finita, tenemos que  $|\cdot|_0$  es equivalente a la norma euclidiana usual en  $\mathbb{R}^{2^n}$ , por lo que podemos definir derivadas de la manera obvia: Para un multiíndice  $\alpha \in \mathbb{N}^m$  y  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{(n)}$  ponemos

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \sum_J \frac{\partial^\alpha f_J}{\partial x^\alpha} e_J. \quad (1.1.21)$$

donde  $f_J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ .

Análogamente, si  $\mu$  es una medida positiva en  $\mathbb{R}^m$ , podemos definir la integral

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\mu := \sum_J \left( \int_{\mathbb{R}^m} f_J d\mu \right) e_J. \quad (1.1.22)$$

De manera análoga tenemos también los espacios  $L^p$  para  $0 < p < \infty$

$$L^p(\mu, \mathbb{R}_{(n)}) := \left\{ f = \sum_J f_J e_J : f_J \text{ es } \mu\text{-medible y } \int_{\mathbb{R}^m} |f|_0^p d\mu < \infty \right\}. \quad (1.1.23)$$

Cuando  $p = 2$  podemos dar una estructura de espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{R}$  vía

$$(f, g)_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{Re}(f \odot \bar{g}) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{Re}(\bar{f} \odot g) d\mu. \quad (1.1.24)$$

**Observación 1.1.2.** *Supongamos que  $K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{(n)})$  y definamos*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^m} K(x, y) \odot f(y) dy, \quad (1.1.25)$$

entonces  $T$  es un operador acotado  $L^2 \rightarrow L^2$  y su adjunto está dado por

$$T^*f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \overline{K(y, x)} \odot f(y) dy. \quad (1.1.26)$$

Obviamente la medida de Lebesgue y el dominio pueden ser cambiados y la regularidad de  $K$  relajada, lo importante es la fórmula del núcleo del adjunto, completamente análoga al caso complejo.

Una identidad importante que motivó el estudio de operadores integrales singulares con valores en las álgebras de Clifford es la siguiente

**Proposición 1.1.2.** *Vemos  $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}_{(n+1)}$  y sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\nu$  la normal exterior a  $\Omega$  entonces*

$$\begin{aligned} \frac{x - y}{|x - y|^{n+1}} \odot \nu(y) &= -\frac{x - y}{|x - y|^{n+1}} \cdot \nu(y) \\ &\quad + \sum_{i < j} \frac{\nu_j(y)(x_i - y_i) - \nu_i(y)(x_j - y_j)}{|x - y|^{n+1}} e_i e_j \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

*Demostración.* La prueba es inmediata si recordamos que  $e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$  y desarrollamos la suma del lado izquierdo.  $\square$

Como vimos  $\mathbb{R}_{(n)}$  es una generalización algebraica de  $\mathbb{C}$ . El propósito de esta sección es ver que también podemos generalizar el análisis de funciones holomorfas.

En lo que sigue  $\Omega$  siempre denotará un dominio en  $\mathbb{R}^n$ , que a su vez consideramos en  $\mathbb{R}_{(n)}$ , i.e.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}_{(n)}. \quad (1.1.28)$$

**Definición 1.1.2** (Operador de Dirac). *Dada  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{(n)})$  definimos*

$$(Df)(x) = \sum_{k=1}^n e_k \odot \frac{\partial f}{\partial x_k}(x), \quad (fD)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \odot e_k. \quad (1.1.29)$$

Decimos que  $f$  es monogénica izquierda si  $Df = 0$  en  $\Omega$  y que es monogénica derecha si  $fD = 0$  en  $\Omega$ . En general, si no especificamos, se asumirá que trabajamos con funciones monogénicas izquierdas.

La primera propiedad importante de funciones monogénicas es la siguiente

**Proposición 1.1.3.** *Dada  $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{(n)})$  tenemos*

$$D^2 f = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = fD^2. \quad (1.1.30)$$

*Demostración.* Simplemente calculamos

$$D(Df) = \sum_{k=1}^n e_k \odot \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{j=1}^n e_j \odot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \quad (1.1.31)$$

Concluimos de la anti-conmutatividad de los  $e_j$  y la igualdad de las parciales mixtas de  $f$ .  $\square$

Esto es el análogo de la descomposición del Laplaciano vía las derivadas  $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$  cuando trabajamos con funciones complejas. Además nos da una manera sencilla de construir funciones monogénicas. A saber si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{(n)}$  es armónica entonces  $Df$  es monogénica izquierda y  $fD$  monogénica derecha. En particular, si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es armónica entonces  $\nabla f$  es monogénica. Más generalmente, para funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tenemos que el operador  $D$  se reduce al sistema de ecuaciones

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k} = 0, \quad \operatorname{curl}(f) = \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right)_{1 \leq k < j \leq n} = 0. \quad (1.1.32)$$

Otra propiedad importante, que diferencia del caso complejo en dimensiones altas, es que las funciones monogénicas izquierdas (o derechas) no forman un álgebra. Esto es consecuencia de que

$$D(f \odot g) = (Df) \odot g + \sum_{k=1}^n e_k \odot f \odot \frac{\partial g}{\partial x_k}. \quad (1.1.33)$$

Para concluir esta sección damos otra definición de funciones mongénicas, que también es usada en la literatura.

Recordamos que vemos  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}_{(n)}$  identificando  $e_j$  con  $\iota(e_j)$ . También podemos ver  $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}_{(n)}$  identificando  $(x_0, \dots, x_n)$  con  $x_0 1 + \sum_k x_k e_k$ . En este caso definimos el operador de Dirac (izquierdo) como

$$D' = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^n e_k \odot \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (1.1.34)$$

También tenemos su adjunto

$$\bar{D}' = \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{k=1}^n e_k \odot \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (1.1.35)$$

La ventaja de estos operadores es que, por ejemplo si  $n = 1$  entonces  $D' = \partial_{\bar{z}}$  es el operador de Cauchy-Riemann usual. En otras palabras, las funciones monogénicas respecto de  $D'$  son precisamente las funciones holomorfas<sup>2</sup>.

Una diferencia con la primera definición es que  $(D')^2$  es el operador de onda  $\partial_{x_0}^2 - \sum_k \partial_{x_k}^2$ , mientras que el laplaciano en este caso se factoriza como  $D' \bar{D}' = \bar{D}' D'$ , por lo que al menos retenemos que funciones monogénicas son armónicas (en particular son suaves). Resulta que la teoría para estas funciones mongénicas es esencialmente la misma que para las que nosotros usamos, referimos a [39] para ver esto.

## 1.2. La función maximal de Hardy-Littlewood

Dado un espacio métrico  $(X, d)$  localmente compacto con una medida de Radon  $\mu$  ponemos

---

<sup>2</sup>Recordamos que en este caso tomamos funciones definidas en subconjuntos de  $\mathbb{R}^{1+1}$  con valores en  $\mathbb{R}_{(1)} \cong \mathbb{C}$ .

**Definición 1.2.1.** La *función maximal de Hardy-Littlewood centrada* de una función  $f \in L^1_{loc}(X)$  se define como<sup>3</sup>

$$\mathcal{M}^\mu f(x) = \sup_{r>0} \int_{B_r(x)} |f(y)| d\mu(y). \quad (1.2.1)$$

También tenemos la *función maximal no centrada* definida como

$$\mathcal{M}_1^\mu f(x) = \sup_B \int_B |f(y)| d\mu(y), \quad (1.2.2)$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas tales que  $x \in B$  y definimos

$$\int_B |f(y)| d\mu(y) = 0, \quad \text{si } \mu(B) = 0. \quad (1.2.3)$$

**Observación 1.2.1.** 1. Fijemos  $x \in X$  y  $B$  tal que  $x \in B$ . Tomemos una sucesión tal que  $x_n \rightarrow x$ . Por definición existe  $N$  tal que si  $n > N$  entonces  $x_n \in B$  por lo tanto

$$\int_B |f| d\mu \leq \sup_{B_n} \int_{B_n} |f| d\mu = \mathcal{M}_1 f(x_n), \quad (1.2.4)$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas con  $x_n \in B_n$ . Tomando el límite inferior (respecto de  $n$ ) de ambos lados tenemos

$$\int_B |f| d\mu \leq \liminf_n \mathcal{M}_1 f(x_n). \quad (1.2.5)$$

Como  $B$  fue arbitraria concluimos que  $\mathcal{M}_1 f$  es semicontinua inferiormente.

2. Claramente tenemos que  $\mathcal{M}f \leq \mathcal{M}_1 f$ , por definición. Una desigualdad invertida no se ve obvia en tanta generalidad. Supongamos que tenemos dos constantes  $C_1, C_2$  tal que para cualesquiera  $x_1, x_2 \in X$  y  $r > 0$

$$C_1 \leq \frac{\mu(B_{2r}(x_1))}{\mu(B_r(x_2))} \leq C_2 \quad (1.2.6)$$

entonces, si fijamos  $x \in X$  y  $x \in B = B_r(z)$  vemos que, con  $B' = B_{2r}(x)$

$$\int_B |f| d\mu \leq \frac{1}{\mu(B)} \int_{B'} |f| d\mu \leq C_2 \int_{B'} |f| d\mu \leq C_2 \mathcal{M}f(x) \quad (1.2.7)$$

o, en otras palabras,  $\mathcal{M}_1 f(x) \leq C_2 \mathcal{M}f(x)$ .

---

<sup>3</sup>Cuando la medida  $\mu$  sea obvia omitimos la referencia en la notación.

Ejemplos de medidas que satisfacen esta condición son la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$  y, mas en general, cualquier medida que satisfaga, para algún  $d > 0$  y  $0 < A_i = A_i(\mu)$ ,

$$A_1 r^d \leq \mu(B_r(x)) \leq A_2 r^d \quad \forall x \in X, r > 0. \quad (1.2.8)$$

En particular, cualquier conjunto Ahlfors regular en  $\mathbb{R}^{n+1}$  (ver Definición 1.4.1). Hay que notar que la comparabilidad puntual de ambas es importante si queremos intercambiarlas: Existen medidas en  $\mathbb{R}^n$  para las cuales  $\mathcal{M}$  es acotada en  $L^p$  pero  $\mathcal{M}_1$  no lo es (ver [46]).

3. Por otro lado la función maximal centrada, en general, podría no ser medible. Esto no causa problemas en nuestro caso pues por un lado tenemos siempre  $\mathcal{M}^\mu \leq \mathcal{M}_1^\mu$  y por otro todas nuestras medidas serán doblantes (ver Definición 1.2.2), lo que garantiza las cotas necesarias para  $\mathcal{M}_1^\mu$  (ver Teorema 1.2.3), y por lo anterior, para  $\mathcal{M}^\mu$ .

Otra manera de quitar el problema de ver si  $\mathcal{M}^\mu$  es medible, en el caso en que  $\mu$  satisfaga (1.2.8), es considerar la función maximal

$$\mathcal{M}_2^\mu := \sup_{r>0} \frac{1}{r^d} \int_{B_r(x)} |f| d\mu. \quad (1.2.9)$$

En este caso  $\mathcal{M}_2^\mu$  es semicontinua inferiormente por el lema de Fatou y además  $A_1 \mathcal{M}^\mu \leq \mathcal{M}_2^\mu \leq A_2 \mathcal{M}^\mu$  puntualmente. Ver [14].

**Proposición 1.2.1.** Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  son funciones radiales entonces  $f * g$  es radial.

*Demostración.* Basta mostrar que para toda transformación ortogonal  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tenemos  $f * g(Ax) = f * g(x)$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pero esto es fácil si notamos que lo anterior vale para  $f, g$  pues

$$\begin{aligned} f * g(Ax) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - A^{-1}y)g(A^{-1}y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy = f * g(x), \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

donde la penúltima igualdad es por un cambio de variable y el hecho de que  $|\det(A)| = 1$ .  $\square$

**Teorema 1.2.1.** Sea  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función radial no negativa, integrable y no creciente (cuando es vista como  $\psi(x) = \psi_1(|x|)$ ). Entonces para toda  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $x \in \mathbb{R}^n$  tenemos

$$\psi * |f|(x) \leq C \mathcal{M}f(x), \quad (1.2.11)$$

donde  $C = \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ .

*Demostración.* Supongamos primero que  $\psi \in C_c^\infty$  y  $f \geq 0$ . Ponemos

$$A(r) := \int_{B_r(x)} f(y) dy = \int_0^r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x - y) d\sigma(y) ds, \quad (1.2.12)$$

donde la segunda igualdad usa coordenadas polares. Calculamos su derivada

$$A'(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x - y) d\sigma(y) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x - ry) r^{n-1} d\sigma(y). \quad (1.2.13)$$

Entonces tenemos, con  $B_r = B_r(x)$  y  $|B_r| = r^n \frac{\sigma_n}{n}$  su medida de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \psi * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) f(x - y) dy = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \psi_1(r) f(x - ry) r^{n-1} d\sigma(y) dr \\ &= \int_0^\infty \psi(r) A'(r) dr = \psi_1(r) A(r) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \psi'_1(r) A(r) dr \\ &= - \int_0^\infty \psi'_1(r) |B_r| \int_{B_r} f(y) dy dr \leq -\mathcal{M}f(x) \int_0^\infty \psi'_1(r) |B_r| dr \\ &= \mathcal{M}f(x) \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

donde la última igualdad es porque

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi'_1(r) r^n dr &= \psi(r) nr^{n-1} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \psi_1(r) nr^{n-1} dr \\ &= \frac{n}{\sigma_n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) dy. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Supongamos ahora que  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tiene soporte compacto. Tomamos  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  radial, no negativa con  $\text{sop}(\eta) \subset B_1$  y ponemos  $\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \eta(\varepsilon^{-1}x)$ . De la manera usual definimos la regularización de  $\psi$  como  $\psi_\varepsilon = \eta_\varepsilon * \psi$ . Entonces, dado que la convolución de dos funciones radiales es radial, que  $\psi_\varepsilon$  es decreciente por la no-negatividad de  $\eta$ , y que  $\text{sop}(\psi_\varepsilon) \subset \text{sop}(\eta_\varepsilon) + \text{sop}(\psi)$  con este último conjunto compacto, vemos que

$$\psi_\varepsilon * |f|(x) \leq \|\psi\|_1 \mathcal{M}f(x) \quad (1.2.16)$$

pues  $\|\psi_\varepsilon\|_1 \leq \|\psi\|_1$ . Además el mapeo

$$\begin{aligned} (\cdot) * f : L^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^1(\mathbb{R}^n) \\ \psi &\mapsto \psi * f \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

es acotado por la desigualdad de Young para convoluciones, por lo que existe una subsucesión  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  tal que  $\psi_{\varepsilon_k} * f(x) \rightarrow \psi * f(x)$  para casi todo  $x$ , de donde el resultado sigue.

Si  $\psi$  no tiene soporte compacto aplicamos un argumento similar, solo que ahora tomamos aproximaciones  $\psi^r = \varphi^r \psi$  donde  $\varphi \in C_c^\infty$  es una función radial decreciente,  $0 \leq \varphi \leq 1$  con  $\varphi \equiv 1$  en  $B_1$  y  $\text{sop}(\varphi) \subset B_2$ , y definimos  $\varphi^r(x) = \varphi(rx)$ . Si hacemos  $r \rightarrow 0$  claramente  $\psi^r(x) \rightarrow \psi(x)$  y  $\psi^r \leq \psi$ , por lo que  $\|\psi^r\|_1 \leq \|\psi\|_1$  y además el teorema de convergencia dominada nos da  $\psi^r \rightarrow \psi$  en  $L^1$ . Esto demuestra el teorema en general.  $\square$

**Observación 1.2.2.** *Supongamos que tenemos  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  y una sucesión  $f_k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , todas no-negativas, de tal manera que  $f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \uparrow f(x)$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por monotonía del operador  $\mathcal{M}$  tenemos que  $\mathcal{M}f_k \leq \mathcal{M}f$  para toda  $k \geq 0$ . Por otro lado, el lema de Fatou nos dice que, para toda  $x$  y  $r > 0$*

$$\int_{B_r(x)} f(y) dy \leq \liminf_k \int_{B_r(x)} f_k(y) dy \leq \liminf_k \mathcal{M}f_k(x) \quad (1.2.18)$$

por lo que, combinando esto, tenemos  $\mathcal{M}f(x) = \lim_k \mathcal{M}f_k(x)$ .

Supongamos entonces que tenemos  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  no-negativa y ponemos  $f_k = f \mathbf{1}_{B_k} \in L^1$ . Aplicando el lema de Fatou de nuevo tenemos que

$$\psi * f(x) \leq \liminf_k \psi * f_k(x) \leq \|\psi\|_1 \liminf_k \mathcal{M}f_k(x) = \|\psi\|_1 \mathcal{M}f(x) \quad (1.2.19)$$

por lo que el teorema anterior vale con  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ .

**Lema 1.2.1** (Cubierta de Vitali). *Sea  $\mathcal{F}$  una colección de bolas no degeneradas (i.e. no vacías) en  $\mathbb{R}^n$  tal que*

$$\sup_{B \in \mathcal{F}} \text{diam}(B) < \infty \quad (1.2.20)$$

entonces existe una subcolección  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  de bolas disjuntas<sup>4</sup> tal que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B \quad (1.2.21)$$

*Demostración.* Probamos el caso en que  $\mathcal{F}$  es finito, que es el que usaremos. El caso general es parecido.

Tomamos  $B_1$  la bola de radio más grande en  $\mathcal{F}$ . Tomamos  $B_2$  la siguiente con radio más grande tal que  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . En general, ya escogidos  $B_1, \dots, B_{k-1}$  tomamos

<sup>4</sup>Esta condición implica que  $\mathcal{G}$  es a lo más numerable.

$B_k$  la bola de radio mas grande tal que  $B_j \cap B_k = \emptyset$  para toda  $j = 1, \dots, k-1$ . El proceso termina pues  $\mathcal{F}$  es finito.

Sea  $B' = \cup_{\mathcal{F}} B$  y  $x \in B'$ . Si  $x \in B_j$  no hay nada que hacer. Si no,  $x \in B$  y por construcción  $B \cap B_j \neq \emptyset$  para alguna  $j$ . Si tomamos  $k = \sup\{j : B_j \cap B \neq \emptyset\}$  entonces  $r(B) \leq r(B_k)$ <sup>5</sup> (si no hubiéramos tomado  $B$  en lugar de  $B_k$  en la construcción) por lo que  $B \subset 5B_k$ .  $\square$

**Teorema 1.2.2** (Interpolación de Marcinkiewicz). Sean  $(X, \mu)$ ,  $(Y, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finitos y  $T$  un operador sublineal definido en  $L^p(X) + L^q(X)$ , con  $1 \leq p < q \leq \infty$ , y tal que  $T$  devuelve (clases de) funciones medibles en  $Y$ . Supongamos que existen constantes  $C_1, C_2$  tal que<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) &\leq \left(\frac{C_1 \|f\|_{L^p(\mu)}}{\lambda}\right)^p, & \forall \lambda > 0; \\ \nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) &\leq \left(\frac{C_2 \|f\|_{L^q(\mu)}}{\lambda}\right)^q, & \forall \lambda > 0. \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Entonces para toda  $p < r < q$  existe una constante  $C = C(C_i, p, q, r)$  tal que

$$\|Tf\|_{L^r(\nu)} \leq C \|f\|_{L^r(\mu)} \quad (1.2.23)$$

**Lema 1.2.2.** Sea  $0 < p < \infty$  y  $(X, \mu)$  un espacio de medida. Si definimos, para  $\lambda > 0$  y  $f \in L^p(X)$ ,

$$E_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}, \quad d_f(\lambda) = \mu(E_\lambda) \quad (1.2.24)$$

entonces

$$\int_X |f|^p d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} d_f(t) dt \quad (1.2.25)$$

*Demostración.* Tenemos

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty t^{p-1} d_f(t) dt &= p \int_0^\infty \int_X t^{p-1} 1_{E_t}(x) d\mu dt \\ &= \int_X \int_0^{|f(x)|} p t^{p-1} dt d\mu \\ &= \int_X |f|^p d\mu \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

donde la segunda igualdad es por el teorema de Fubini.  $\square$

<sup>5</sup> $r(B)$  = radio de  $B$ .

<sup>6</sup>Si  $q = \infty$  pedimos  $\|Tf\|_\infty \leq C_2 \|f\|_\infty$

*Demostración Teorema 1.2.2.* Supongamos primero  $q < \infty$ . Dada  $f \in L^r(X)$  y  $\lambda > 0$  definimos

$$\begin{aligned} f_1 &= f1_{E_\lambda} \\ f_2 &= f1_{X \setminus E_\lambda}, \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

entonces vemos, por sublinealidad de  $T$ , que

$$d_{Tf}(\lambda) \leq d_{Tf_1}(\lambda/2) + d_{Tf_2}(\lambda/2). \quad (1.2.28)$$

Por la desigualdad débil y las desigualdades anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{r-1} d_{Tf_1}(\lambda/2) dt &\leq (2C_1)^p \int_0^\infty \lambda^{r-p-1} \int_{E_\lambda} |f|^p d\mu \\ &= (2C_1)^p \int_0^\infty \int_X \lambda^{r-p-1} 1_{E_\lambda}(x) |f(x)|^p d\mu(x) d\lambda \\ &= (2C_1)^p \int_X \int_0^{|f(x)|} |f(x)|^p \lambda^{r-p-1} d\lambda d\mu(x) \\ &= \frac{(2C_1)^p}{r-p} \int_X |f|^r d\mu, \\ \int_0^\infty \lambda^{r-1} d_{Tf_2}(\lambda/2) dt &\leq \frac{(2C_2)^q}{q-r} \int_X |f|^r d\mu. \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

Combinando las tres últimas desigualdades con el lema anterior el resultado sigue.

Si  $q = \infty$  ponemos, para  $\alpha = (2C_2)^{-1}$ ,  $f$  y  $\lambda$  como arriba,

$$\begin{aligned} f_1 &= f1_{E_{\alpha\lambda}}, \\ f_2 &= f1_{E_{\alpha\lambda}^c}. \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

Claramente  $f_2 \in L^\infty$  por lo que

$$|Tf(x)| \leq |Tf_1(x)| + C_2 \|f_2\|_{L^\infty} \leq |Tf_1(x)| + C_2 \alpha \lambda. \quad (1.2.31)$$

Por la elección de  $\alpha$  vemos que  $d_{Tf}(\lambda) \leq d_{Tf_1}(\lambda/2)$ , por lo que un argumento igual al del caso anterior nos da la prueba.  $\square$

**Definición 1.2.2.** Decimos que  $\mu$  una medida de Borel en un espacio métrico  $(X, d)$  es doblante (respecto de  $d$ ) si existe  $C = C(\mu)$  tal que

$$\mu(B_{2r}(x)) \leq C\mu(B_r(x)), \quad \forall x \in X, r > 0. \quad (1.2.32)$$

**Observación 1.2.3.** Sea  $c > 1$  fijo y  $k = k(c)$  tal que  $2^{k-1} < c \leq 2^k$  entonces, si  $\mu, C$  son como en la definición anterior,

$$\mu(B_{cr}(x)) \leq \mu(B_{2^k r}(x)) \leq C^k \mu(B_r(x)), \quad (1.2.33)$$

por lo que, en la definición de medida doblante podemos cambiar el 2 por cualquier constante  $c > 1$ , y sólo agregamos a  $C$  una dependencia en  $c$ . En particular si tenemos  $d, d_1$  dos métricas equivalentes en el sentido que existen  $A_1, A_2$  tal que

$$A_1 d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq A_2 d(x, y), \quad \forall x, y \in X, \quad (1.2.34)$$

entonces  $\mu$  es doblante respecto de  $d$  si y sólo si lo es respecto de  $d_1$ .

El siguiente resultado es uno de los más clásicos e importantes en análisis (en nuestro contexto al menos).

**Teorema 1.2.3.** Sea  $\mu$  una medida de Radon doblante en  $\mathbb{R}^n$  entonces existen constantes  $C(n, \mu)$  y  $C(p, n, \mu)$  tal que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{M}_1^\mu f(x)| > \lambda\}) \leq C \frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{\lambda}; \quad (1.2.35)$$

$$\|\mathcal{M}_1^\mu f\|_{L^p(\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mu)}, \quad 1 < p \leq \infty. \quad (1.2.36)$$

*Demostración.* El caso  $p = \infty$  es obvio de la definición de  $\mathcal{M}_1 f$ , por lo que, si podemos establecer el caso  $p = 1$ , el teorema de interpolación de Marcinkiewicz nos da el resultado.

Para ver este caso entonces notamos que, como  $\mathcal{M}_1 f$  es semi-continua inferiormente, si definimos

$$E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{M}_1 f(x)| > \lambda\}, \quad (1.2.37)$$

entonces  $E_\lambda$  es abierto. Tomamos  $\mathcal{F} := (B_x)_{x \in E_\lambda}$  donde  $B_x$  es una bola que contiene a  $x$  tal que

$$\int_{B_x} |f| d\mu > \lambda \quad (1.2.38)$$

Por compacidad tenemos una subcobertura  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$  de  $K$ . Por el lema de cubierta de Vitali podemos extraer una subcolección  $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$  tal que, si  $\mathcal{G}_2 = (B_{x_j})_{1 \leq j \leq m}$ ,

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m 5B_{x_j} \quad (1.2.39)$$

$$B_{x_i} \cap B_{x_j} = \emptyset, \quad i \neq j$$

de donde, por la propiedad doblante, tenemos

$$\begin{aligned} \mu(K) &\leq \mu\left(\cup_j 5B_{x_j}\right) \leq \sum_j \mu\left(5B_{x_j}\right) \leq C(\mu) \sum_j \mu(B_{x_j}) \\ &\leq C \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{B_{x_j}} |f| d\mu \leq C \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda} \end{aligned} \quad (1.2.40)$$

Entonces, tomando el supremo sobre los  $K$  la desigualdad deseada sigue de la regularidad de  $\mu$ .  $\square$

**Observación 1.2.4.** *Dado que el lema de Vitali (finito) es claramente válido en espacios métricos, la prueba funciona, paso por paso, en un espacio métrico con medida doblante donde todas las bolas  $B_r(x)$  son precompactas. En particular si  $X = \Sigma$  con  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un conjunto Ahlfors regular y  $\mu = \sigma$  la medida de superficie, tenemos el resultado.*

*Un ejemplo menos elemental, pero que usaremos, es cuando  $X = \partial\Omega$  es la frontera de un dominio Lipschitz y  $\mu = \omega^{x_0}$  es la medida armónica de  $\Omega$  evaluada en  $x_0 \in \Omega$  (ver capítulo 3 para las definiciones).*

*Otra consecuencia de estas observaciones es que, en  $X = \mathbb{R}^n$ , podemos cambiar las bolas  $B_r(x)$  por cubos de lado  $r$  y centro  $x$  y lo anterior aplica pues solamente estamos cambiando la métrica euclidiana por*

$$|x - y|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad (1.2.41)$$

y la Observación 1.2.3 nos dice que no hay problema con esto.

**Corolario 1.2.1** (Teorema de diferenciación de Lebesgue). *Sea  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  entonces*

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} f(y) dy, \quad \text{para casi toda } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.42)$$

*Más generalmente tenemos, con  $x \in B_x$ ,*

$$f(x) = \lim_{\text{diam}(B_x) \rightarrow 0} \int_{B_x} f(y) dy, \quad \text{para casi toda } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.43)$$

*Como consecuencia de esto tenemos además que  $|f(x)| \leq \mathcal{M}f(x)$  para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$  (respecto de la medida de Lebesgue).*

**Teorema 1.2.4.** [Descomposición de Calderón-Zygmund I] Dada  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\lambda > 0$  existe una colección numerable  $\mathcal{B} = (Q_j)$  de cubos con interior ajeno tal que

$$\lambda < \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2^n \lambda; \quad (1.2.44)$$

$$|f(x)| \leq \lambda, \quad \text{para casi toda } x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j; \quad (1.2.45)$$

$$\sum_j |Q_j| = \left| \bigcup_j Q_j \right| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1}. \quad (1.2.46)$$

*Demostración.* Consideramos, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , las colecciones de cubos

$$\mathcal{G}_k := \left\{ \prod_{j=1}^n [2^k m_j, 2^k(m_j + 1)) : m_j \in \mathbb{Z} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.2.47)$$

Notamos en particular que si  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{G}_k$  entonces son ajenos o iguales (esto se sigue de que es claramente cierto en  $\mathbb{R}$ ). Por lo tanto si  $Q_j \in \mathcal{G}_{k_j}$  entonces o son ajenos o uno contiene al otro (pues si  $k_1 < k_2$  podemos poner  $Q_1 \subset Q'_1 \in \mathcal{G}_{k_2}$ ).

Fijamos  $f, \lambda$ . Tomemos entonces  $k_0$  tal que

$$\int_Q |f| dx \leq \lambda, \quad \forall Q \in \mathcal{G}_{k_0}, \quad (1.2.48)$$

que se puede pues

$$\int_Q |f| dx \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{2^k}, \quad \forall Q \in \mathcal{G}_k. \quad (1.2.49)$$

Tomamos un cubo arbitrario  $Q \in \mathcal{G}_{k_0}$  y lo subdividimos en  $2^n$  cubos en  $\mathcal{G}_{k_0-1}$ . Tomamos uno de estos subcubos  $Q'$ , entonces pasa una de dos cosas:

1.  $\int_{Q'} |f| dx > \lambda$ .
2.  $\int_{Q'} |f| dx \leq \lambda$ .

Si pasa 1 ponemos  $Q' \in \mathcal{B}$ . Si pasa 2 subdividimos  $Q'$  en sus  $2^n$  subcubos en  $\mathcal{G}_{k_0-2}$  y repetimos el argumento.

Para checar  $\mathcal{B}$  satisface lo que queremos calculamos: Por la forma en que escogimos los  $Q_j$  que iban a dar a  $\mathcal{B}$  es obvio que

$$\lambda < \int_{Q_j} |f| dx. \quad (1.2.50)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\int_{Q_j} |f| dx \leq 2^n \int_Q |f| dx \leq 2^n \lambda, \quad (1.2.51)$$

donde  $Q$  es el cubo del que vino  $Q_j$  (que es único por la observación al inicio de la prueba). Además, de (1.2.50), y de que claramente estos cubos son ajenos,

$$\sum_j |Q_j| \leq \sum_j \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} |f| dx \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1}. \quad (1.2.52)$$

Para checar la segunda propiedad basta notar que si  $x \notin \cup_j Q_j$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que hay una bola abierta alrededor de  $x$  en este complemento, por lo que, dado que  $x$  está en una sucesión decreciente de cubos diádicos contenidos en este complemento, por construcción cada uno de estos cubos  $Q$  satisface

$$\int_Q |f| dx \leq \lambda, \quad (1.2.53)$$

por lo que el teorema de diferenciación de Lebesgue implica que  $f \leq \lambda$  c.d. en  $\mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j$ .  $\square$

**Corolario 1.2.2.** [Descomposición de Calderón-Zygmund II] Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$   $\lambda > 0$  y  $\mathcal{B} = (Q_j)$  como en el lema anterior, entonces existen  $g, b$  funciones con las siguientes propiedades

1.  $f = g + h$ .
2.  $\|g\|_{L^2}^2 \leq 2^n \lambda \|f\|_{L^1}$ .
3.  $\text{sop}(b) \subset \cup_j Q_j$  y

$$\int_{Q_j} b(x) dx = 0, \quad \forall j \geq 0. \quad (1.2.54)$$

*Demostración.* Definimos

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j \\ \int_{Q_j} f(y) dy & \text{si } x \in Q_j \end{cases} \quad (1.2.55)$$

y de manera obvia  $b = f - g$ . Las propiedades para  $b$  son claras de esta definición. Para ver las de  $g$  calculamos, de (1) del lema anterior,

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j} |f| dx + \sum_j \left| \int_{Q_j} f dx \right| \leq \|f\|_{L^1}, \\ \|g\|_{L^\infty} &\leq 2^n \lambda, \end{aligned} \quad (1.2.56)$$

por lo que interpolando el resultado es inmediato.  $\square$

### 1.3. Dominios Lipschitz

**Definición 1.3.1.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $f$  es Lipschitz si

$$[f]_1 := \sup_{x, y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty. \quad (1.3.1)$$

Análogamente si  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  decimos que es Lipschitz si el supremo, tomado con elementos de  $A$ , es finito.

Decimos que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $U$  abierto, es localmente Lipschitz si es Lipschitz en cada compacto  $K \subset U$ .

**Notación 1.3.1.** Dado  $s > 0$ , definimos el cono recto de apertura  $\arctan(1/s)$  y vértice  $0$  (que abre hacia arriba) como  $\text{Co}(s)$ . En otras palabras

$$\text{Co}(s) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : s|x| < t\} \quad (1.3.2)$$

Una de las caracterizaciones más útiles para nosotros de estas funciones es la que sigue

**Proposición 1.3.1.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $D_\pm$  los conjuntos por arriba y debajo de la gráfica de  $f$ <sup>7</sup> entonces son equivalentes

1.  $f$  es Lipschitz con  $[f]_1 \leq M$ .
2.  $(x, f(x)) + \text{Co}(M) \subset D_+$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .
3.  $(x, f(x)) - \text{Co}(M) \subset D_-$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Sea  $f$  Lipschitz con  $[f]_1 \leq M$  y sea  $(y, s) \in (x, f(x)) + \text{Co}(M)$  para algún  $x \in \mathbb{R}^n$ . Tenemos entonces que  $M|x - y| < s - f(x)$ . Si  $f(y) \geq s$  entonces tendríamos  $M|x - y| < |f(y) - f(x)| \leq M|x - y|$  por lo que  $f(y) < s$  y  $(y, s) \in D_+$ .

<sup>7</sup>Si  $f$  no es continua, en principio estos no tienen por que ser abiertos.

Si 2 se satisface y tomamos  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x) < f(y)$  entonces, como  $(y, f(y)) \notin D_+$ , en particular  $(y, f(y)) \notin (x, f(x)) + \text{Co}(M)$  por lo que  $M|x - y| \geq f(y) - f(x) = |f(y) - f(x)|$ .

El argumento para  $1 \Leftrightarrow 3$  es análogo.  $\square$

**Observación 1.3.1.** 1. Notamos que si usamos conos truncados de la forma  $\text{Co}(M) \cap B_h(0)$  para algún  $h > 0$  fijo podemos obtener que  $f$  es Lipschitz en  $K$  compacto siempre que 2 o 3 de la proposición se satisfagan con estos conos truncados, y  $h = h(K)$ .

2. Si ponemos  $Q'_r = B_r(0) \times (-Mr, Mr)$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz entonces, para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(B_r(x)) \subset (x, f(x)) + Q'_r \quad (1.3.3)$$

Damos un resultado acerca de funciones Lipschitz sin prueba, se puede consultar [19, 3.1.2 Theorem2] para ver una.

**Proposición 1.3.2.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es Lipschitz entonces  $f$  es diferenciable casi en todas partes (respecto de la medida de Lebesgue) y su derivada es acotada. Más aún  $\|\nabla f\|_{L^\infty} \approx [f]_1$ .

Definimos  $\mathcal{C}_{a,b}$  como el cilindro de radio  $a$  y (mitad de la) altura  $b$ , i.e.

$$\mathcal{C}_{a,b} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x| < a, |t| < b\}. \quad (1.3.4)$$

**Definición 1.3.2** (Dominios Lipschitz). Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto y  $x_0 \in \partial\Omega$ . Decimos que  $\partial\Omega$  está localmente dada por  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en  $x_0$  existen  $a, b > 0$  tal que tras una rotación y una traslación (llamemos  $T$  a esta composición) que lleva  $x_0$  a 0 tenemos que,

$$\begin{aligned} T(\Omega) \cap \mathcal{C}_{a,b} &= \{(x, t) \in \mathcal{C}_{a,b} : t > f(x)\}, \\ T(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}_{a,b} &= \{(x, t) \in \mathcal{C}_{a,b} : t = f(x)\}, \\ T(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}_{a,b} &= \{(x, y) \in \mathcal{C}_{a,b} : t < f(x)\}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Decimos que  $\Omega$  es Lipschitz cerca de  $x_0$  si  $\partial\Omega$  está dada por  $f$  cerca de  $x_0$  y además  $f$  es Lipschitz.

Decimos que  $\Omega$  es Lipschitz si  $\Omega$  es Lipschitz cerca de cualquier punto de su frontera y además  $a, b$  no dependen del punto y las constantes  $\|\nabla f_{x_0}\|_{L^\infty}$  están uniformemente acotadas en  $x_0 \in \partial\Omega$ .

Pasamos ahora a una caracterización útil de dominios Lipschitz, que nos permite construir tales dominios de manera sencilla.

Recordemos que de la caracterización de funciones Lipschitz (Proposición 1.3.1) y la Observación 1.4.1 tenemos que si  $\Omega$  es Lipschitz cerca de  $0 \in \partial\Omega$  (supondremos que, en la definición,  $T = I$  para simplificar la discusión), con  $f$  la función que define a  $\partial\Omega$ , entonces existen  $r, h > 0$  y  $M' > M = [f]_1$  tal que si  $\mathcal{C} = \text{Co}(M') \cap B_h(0)$  entonces para todo  $x \in \bar{\Omega}$  con  $|x| < r$  tenemos que<sup>8</sup>

$$x + \mathcal{C} \subset \Omega. \quad (1.3.6)$$

(En este caso  $h$  se escoge pequeña respecto de  $b$ , y  $r$  respecto de  $a$ ). Si no supiéramos que  $f$  es Lipschitz pero tuviéramos la contención anterior, la Observación 1.4.1 nos diría que  $f$  es, en efecto, Lipschitz. La siguiente proposición nos dice que esto es cierto aún si no sabemos en principio que  $\partial\Omega$  está dada por una función cerca de 0.

**Proposición 1.3.3** (Caracterización vía propiedad del cono uniforme). *Sea  $\Omega$  abierto con  $0 \in \partial\Omega$  y supongamos que existen  $r, h, M' > 0$  tal que, con notación como en la discusión anterior,*

$$x + \mathcal{C} \subset \Omega, \quad \forall x \in B_r(0) \cap \bar{\Omega}. \quad (1.3.7)$$

Entonces  $\Omega$  es Lipschitz cerca de 0.

*Demostración.* De la discusión anterior basta probar que  $\partial\Omega$  está dada por una función  $f : B_r^n(0) \rightarrow \mathbb{R}$ . Para esto primero afirmamos

1.

$$\text{Co}(M') \cap B_r(0) \subset \Omega, \quad -\text{Co}(M') \cap B_r(0) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}. \quad (1.3.8)$$

Obviamente esto es trivial si  $h > r$ . En otro caso simplemente notamos que

$$2\mathcal{C} = \text{Co}(M') \cap B_{2h}(0) \subset \bigcup_{x \in 0 + \mathcal{C}} x + \mathcal{C}, \quad (1.3.9)$$

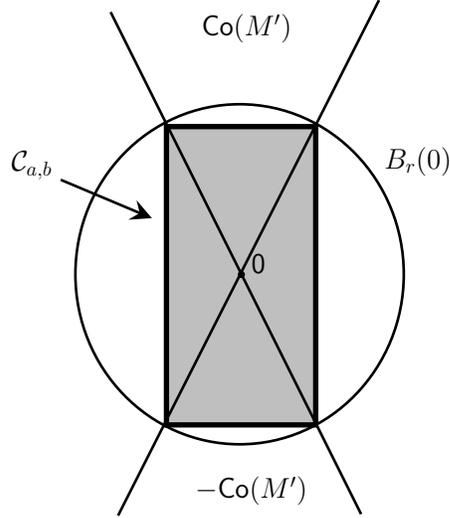
por lo que si  $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega$  estuviera en  $2\mathcal{C}$  entonces existe  $x \in \mathcal{C}$  con  $y \in x + \mathcal{C}$  que contradice las hipótesis. Aplicando esto inductivamente hasta que  $kh > r$ , la primera afirmación queda probada. La correspondiente al complemento es consecuencia de que si  $y \in -\mathcal{C}$  entonces  $0 \in y + \mathcal{C}$  por lo que  $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}$ . Concluimos con un argumento inductivo igual al anterior.

Definimos el cilindro  $\mathcal{C}_{a,b} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x| < a, |t| < b\}$  con (ver figura 1.1)

$$a = \frac{r}{(1 + (M')^2)^{1/2}}, \quad b = M'a. \quad (1.3.10)$$

---

<sup>8</sup>Recordamos que  $\mathcal{C}$  es abierto.

Figura 1.1: Construcción de  $\mathcal{C}_{a,b}$ .

Usando el mismo argumento de la prueba de la afirmación 1, vemos que para todo  $y \in \partial\Omega$

$$(y + \text{Co}(M')) \cap B_r(0) \subset \Omega, \quad (y - \text{Co}(M')) \cap B_r(0) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}. \quad (1.3.11)$$

Por construcción, dado  $x \in \mathbb{R}^n \cap \mathcal{C}_{a,b}$  existe  $t > 0$  tal que  $(x, t) \in \text{Co}(M') \cap B_r(0)$  y  $(x, -t) \in \text{Co}(M') \cap B_r(0)$  por lo que necesariamente  $(x, s) \in \partial\Omega \cap \mathcal{C}_{a,b}$  para algún  $s$ . Por (1.3.11) tenemos que  $s$  es único por lo que  $f(x) = s$  define una función que, de nuevo por (1.3.11) es Lipschitz.  $\square$

**Ejemplo 1.3.1. 1.** Claramente todo dominio  $C^1$  es Lipschitz. Para ver que la inclusión es estricta basta fijarnos en un cubo, digamos  $Q = [0, 1]^{n+1}$ . Claramente  $Q$  satisface la condición de la proposición anterior por lo que es un dominio Lipschitz, pero no puede ser  $C^1$ .

**2.** Generalizando el ejemplo anterior, todo convexo  $\Omega$  abierto, acotado con interior no vacío es Lipschitz: Tomemos  $x \in \text{int}(\Omega)$ . Por definición existe  $r > 0$  tal que  $B = B_r(x) \subset \Omega$ . Fijemos  $y \in \partial\Omega$ . Si tomamos  $\Gamma(y)$  como el cono generado por rectas que unen puntos de  $B$  con  $y$  (siempre podemos tomar el interior, por lo que suponemos que  $\Gamma$  abierto) entonces  $\Gamma(y) \subset \Omega$  (cerrando un poco la apertura de  $\Gamma$  de ser necesario). Para  $h$  a ser elegida ponemos  $\Gamma^h(y) = \Gamma(y) \cap B_h(y)$ .

Si tomamos  $s$  muy pequeña y  $z \in B_s(y) \cap \bar{\Omega}$ , el ángulo entre los ejes de  $\Gamma(y)$  y  $\Gamma(z)$  lo podemos hacer tan pequeño como queramos. En particular si tomamos  $\mathcal{C}$  como el cono de la mitad de la apertura que  $\Gamma(y)$  y el mismo eje, podemos garantizar

que  $z + \mathcal{C} \subset \Gamma(z)$ . Para truncar simplemente tomamos, por ejemplo,  $h = |x - y|/10$  y ajustamos  $s$  de ser necesario.

Respecto de la hipótesis de interior no vacío, notamos que si un convexo tiene interior vacío entonces está contenido en un hiperplano, por lo que lo podemos considerar como conjunto en  $\mathbb{R}^d$  para alguna  $d < n+1$ . Además para un convexo  $K$  tenemos  $\text{int}(K) = \text{int}(\bar{K})$  y  $\text{int}(K)$  es convexo. Entonces podemos decir sin ambigüedad que todo convexo acotado es Lipschitz.

**3.** Una consecuencia de la prueba del ejemplo anterior son los llamados dominios sawtooth: Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  acotado. Entonces para toda  $M > 0$  existe  $h > 0$  tal que, si

$$\Omega = \left( \bigcup_{y \in A} y + \text{Co}(M) \right) \cap B_h(0), \quad (1.3.12)$$

entonces  $\Omega$  es un dominio Lipschitz. Para ver esto basta notar que como  $A$  es acotado podemos elegir  $h$  tan grande de tal manera que existan  $r > 0, x \in \Omega$  con  $B_r(x) \subset \Omega$  y para todo punto, digamos  $z$ , en esta bola el segmento  $(z, y) \subset \Omega$  para toda  $y \in \partial\Omega$ .

Lo importante de este ejemplo es que no pedimos nada de regularidad sobre el conjunto  $A$ .

## 1.4. Ahlfors regularidad

**Notación 1.4.1.** Dado un subconjunto  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , denotamos por  $\sigma := \mathcal{H}^n|_{\Sigma}$  y la llamamos la medida de superficie de  $\Sigma$ .

**Definición 1.4.1.** Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  cerrado. Decimos que  $\Sigma$  es Ahlfors regular si existen  $r_0 > 0$  y  $C_1, C_2 > 0$  tal que

$$C_1 r^n \leq \sigma(B_r(x) \cap \Sigma) \leq C_2 r^n, \quad \forall x \in \Sigma, 0 < r < r_0. \quad (1.4.1)$$

Si  $\Sigma$  no es acotado pedimos  $r_0 = \infty$ .

**Observación 1.4.1.** Si  $Q_r$  denota el cubo de lado  $r$  (con la convención de que  $\text{diam}(Q_r) = 2\sqrt{n}r$ ) y centro en  $0$ , tenemos que  $B_r(0) \subset Q_r \subset B_{\sqrt{n}r}(0)$  por lo que no importa si tomamos bolas o cubos en la definición de Ahlfors regularidad.

De manera análoga podemos considerar cilindros de la forma  $B_r^n(0) \times (-Mr, Mr)$  para alguna  $M > 0$  fija. Esto será útil para checar Ahlfors regularidad de gráficas Lipschitz.

En otras palabras conjuntos Ahlfors regulares son  $n$ -dimensionales, en el sentido de medida. Ejemplos de tales conjuntos son fronteras de dominios Lipschitz acotados, como se verá en la siguiente sección. Dar contraejemplos tampoco es difícil y es instructivo

**Ejemplo 1.4.1.** 1. La manera mas sencilla de hacer fallar la definición es tomar conjuntos con dimensión de Hausdorff distinta de 1. Por ejemplo si  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  denota la gráfica de la función de Cantor en  $[0, 1]$  entonces  $0 < \mathcal{H}^{\ln 2 / \ln 3}(\Sigma) < \infty$ , por lo que  $\sigma(\Sigma) = 0$ . De manera análoga si  $\Sigma$  es un disco entonces  $\sigma(\Sigma) = \infty$ .

2. Si  $\Sigma = \cup_{k \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, y = 1/n\}$  entonces la dimensión de Hausdorff de  $\Sigma$  es 1 pero claramente  $\sigma(B_r(0) \cap \Sigma) = \infty$  para toda  $r > 0$ . Podemos mejorar este ejemplo de la siguiente manera: Sea  $0 < \beta < 1$  y definimos  $\Sigma_\beta = \Sigma \cap \{(x, y) : y > |x|^\beta\}$ . Es fácil ver que entonces, si  $Q_r$  denota el cubo de centro 0 y lado  $r$  (ver la observación anterior), entonces

$$\sigma(Q_{1/n} \cap \Sigma_\beta) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{k^{1/\beta}} \approx \int_n^{\infty} x^{-1/\beta} dx \approx n^{1-1/\beta}. \quad (1.4.2)$$

Concluimos que si  $0 < \beta < 1/2$  entonces no puede existir  $C_1$  (pues, por ejemplo,  $n^{-9} \ll n^{-1}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ). Por otro lado, si  $1/2 < \beta < 1$ , entonces no puede existir  $C_2$  por el mismo razonamiento.

3. Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  la superficie de revolución obtenida de rotar la gráfica de  $y = 1/x^2$ ,  $x > 1$ , alrededor del eje  $x$ . Entonces  $\sigma(\Sigma) < \infty$  y  $\Sigma$  no es acotada por lo que no puede existir  $C_1$ .

4. Tomamos  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  la gráfica de la función  $f(x) = \sin(2\pi nx)$  si  $|x| \in [n, n+1]$ . Entonces es sencillo ver que no puede existir  $C_2$  que funcione para toda  $r > 0$  (el problema obviamente está en  $1 \ll r$ ).

Lo que hay que observar en los ejemplos anteriores es que 3 y 4 son conjuntos mucho más sencillos que los de 2. Esto es consecuencia de que para  $1 \ll r$  ser Ahlfors regular no es tanto cuestión de regularidad en el sentido usual, sino que  $\Sigma$  no ‘se enrosque’ mucho en infinito. En cambio, para  $r < 1$  por ejemplo, si  $\Sigma$  es Lipschitz en una vecindad de  $x$  entonces la condición se satisface con  $C_i$  que sólo dependen de la seminorma Lipschitz de la función que define a  $\Sigma$  cerca de  $x$  (ver la siguientes proposiciones), por lo que necesariamente ejemplos donde la definición falle localmente deberán ser más complicados.

Un resultado bastante útil acerca de funciones Lipschitz es el siguiente, para una prueba se puede consultar [19, 3.4.2 Theorem1].

**Proposición 1.4.1.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz y  $\Sigma$  su gráfica, entonces para todo  $A \subset \Sigma$  de Borel tenemos*

$$\sigma(A) = \int_{A'} (1 + |\nabla f(y)|^2)^{1/2} dy, \quad (1.4.3)$$

donde  $A' := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, f(x)) \in A\}$ .

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función Lipschitz y  $\Sigma$  la gráfica de  $f$ . Entonces  $\Sigma$  es Ahlfors regular.*

*Demostración.* Recordando la Observación 1.4.1 vemos que basta checar Ahlfors regularidad con cilindros de la forma  $Q'_r(x) = (x, f(x)) + Q'_r$  (ver 2 de la Observación 1.3.1).

Sabemos de la proposición anterior y la Observación 1.3.1 que

$$\sigma(Q'_r(x)) = \int_{B_r(x)} (1 + |\nabla f(y)|^2)^{1/2} dy, \quad (1.4.4)$$

por lo que la proposición sigue de que  $|B_r(x)| = c_n r^n$  y  $1 \leq (1 + |\nabla f|^2)^{1/2} \leq (1 + M^2)^{1/2}$  donde  $M = \|\nabla f\|_{L^\infty} \approx [f]_1$ .  $\square$

**Proposición 1.4.3.** *Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es un dominio Lipschitz acotado entonces  $\partial\Omega$  es Ahlfors regular.*

*Demostración.* Tomemos  $r_0 < \infty$ . Supongamos que no existe  $C_1$  con la propiedad

$$C_1 r^n \leq \sigma(B_r(x) \cap \partial\Omega) \quad \forall x \in \partial\Omega, r < r_0. \quad (1.4.5)$$

Entonces podemos encontrar una sucesión  $x_k \in \partial\Omega$  y  $r_k < r_0$  tal que

$$r_k^n > k\sigma(B_{r_k}(x_k) \cap \partial\Omega). \quad (1.4.6)$$

Por compacidad podemos suponer  $x_k \rightarrow x$  y  $r_k \rightarrow r \leq r_0$ . Esto es imposible pues tendríamos que, necesariamente,  $\sigma(B_{r_k}(x_k) \cap \partial\Omega) \rightarrow 0$ , pero si tomamos  $s$  suficientemente pequeño para que  $B_s(x)$  se quede en una carta coordenada tenemos, dado que gráficas son Ahlfors regulares,

$$\sigma(B_s(x) \cap \partial\Omega) \geq C(\Omega)s^n. \quad (1.4.7)$$

Esto es una contradicción: si  $r \neq 0$  esto es claro, si  $r = 0$  entonces para  $k$  suficientemente grande  $B_{r_k/3}(x) \subset B_{r_k}(x_k)$  que nos daría  $1 > Ck$  para toda  $k$  grande. Por lo tanto existe  $C_1$ .

Supongamos que no existe  $C_2$  tal que

$$\sigma(B_r(x) \cap \partial\Omega) \leq C_2 r^n, \quad \forall x \in \partial\Omega, r < r_0. \quad (1.4.8)$$

En este caso, como antes, tomamos  $x_k \rightarrow x$  y  $r_k$  tal que

$$\sigma(B_{r_k}(x_k) \cap \partial\Omega) > k r_k^n. \quad (1.4.9)$$

Esto fuerza a que  $r_k \rightarrow 0$ . Pero entonces, argumentando como antes, usando que gráficas son Ahlfors regulares obtenemos una contradicción tomando  $k$  tan grande que  $B_{r_k}(x_k)$  se quede en una carta coordenada.  $\square$

**Notación 1.4.2.** Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto, definimos

$$\Omega_+ = \Omega, \quad \Omega_- = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}. \quad (1.4.10)$$

## 1.5. La función maximal no-tangencial

**Definición 1.5.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto y  $\alpha > 0$ . Definimos las regiones no-tangenciales asociadas a  $\Omega_{\pm}$  como

$$\Gamma_{\alpha}^{\pm}(y) = \{x \in \Omega_{\pm} : |x - y| < (1 + \alpha)d(x, \partial\Omega)\}, \quad y \in \partial\Omega. \quad (1.5.1)$$

Si no estamos interesados en  $\Omega_-$  pondremos simplemente  $\Gamma_{\alpha}(y)$ .

**Ejemplo 1.5.1.** 1. Sea  $\Omega = \mathbb{R}_+^{n+1}$  y escribimos un punto genérico ahí como  $x = (x', t)$ ,  $t > 0$ . Si  $y \in \mathbb{R}^n$  entonces, notando que  $d(x, \partial\Omega) = t$ , vemos que

$$x \in \Gamma_{\alpha}(y) \Leftrightarrow |x' - y| < (2\alpha + \alpha^2)^{1/2}t = Mt. \quad (1.5.2)$$

Notamos que el conjunto de la derecha es un cono circular recto con vértice en  $y$  y ángulo de apertura  $\arctan(M)$ .

2. Si  $\Omega$  es el dominio arriba de la gráfica de  $f(x) = \sqrt{|x|}$  entonces  $\Gamma_{\alpha}(0) \subset\subset \Omega$  para toda  $\alpha > 0$ . En particular  $0 \notin \overline{\Gamma_{\alpha}(y)}$ . Si  $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y) : y < 1/2\}$  entonces  $\Gamma_{\alpha}^1(0) = \emptyset$  para  $\alpha > \alpha_0$ .

El primer ejemplo muestra la propiedad fundamental de estas regiones: Como su nombre lo indica, queremos poder acercarnos a un punto  $y \in \partial\Omega$  sin estar demasiado cerca de otros puntos de la frontera. Por otro lado el segundo ejemplo muestra que hay conjuntos (o mejor dicho puntos en conjuntos) donde esto no es posible.

Por otro lado tenemos que, para toda  $\alpha > 0$ ,  $\cup_{y \in \partial\Omega} \Gamma_{\alpha}(y) = \Omega$  pues si  $x$  está fuera de la unión entonces  $|x - y| \geq (1 + \alpha)d(x, \partial\Omega)$  para toda  $y$ , que es una contradicción.

**Definición 1.5.2.** Sea  $u : \Omega \rightarrow X$  con  $X$  un espacio normado. Definimos la función maximal no-tangencial  $\mathcal{N}_\alpha u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  como

$$\mathcal{N}_\alpha u(y) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(y)} \|u(z)\|_X, \quad (1.5.3)$$

con la convención de que  $\mathcal{N}_\alpha u(y) = 0$  si  $\Gamma_\alpha(y) = \emptyset$ .

Una de las propiedades básicas de esta función es que siempre es medible:

**Proposición 1.5.1.** Sean  $\Omega$ ,  $\alpha$ ,  $u$  como en la definición anterior. Entonces  $\mathcal{N}_\alpha u$  es semicontinua inferiormente en  $\partial\Omega$ .

*Demostración.* Sea  $y_k \rightarrow y$  en  $\partial\Omega$ . Si  $\Gamma_\alpha(y) = \emptyset$  no hay nada que hacer. En otro caso tomamos  $z \in \Gamma_\alpha(y)$  y  $s > 0$  tal que  $|z - y| = (1 + \alpha)d(x, \partial\Omega) - s$ . Tomando  $k_0$  tal que  $|y - y_k| < s$  para  $k > k_0$  y usando la desigualdad del triángulo vemos que  $z \in \Gamma_\alpha(y_k)$ . Concluimos que

$$\|u(z)\|_X \leq \mathcal{N}_\alpha u(y_k), \quad k > k_0. \quad (1.5.4)$$

Tomando el límite inferior respecto de  $k$  y luego el supremo respecto de  $z$  la afirmación se sigue.  $\square$

**Definición 1.5.3.** Sea  $\Omega$  abierto. Decimos que  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  está no-tangencialmente acotada en  $E \subset \partial\Omega$  si existen  $\alpha, M > 0$  tal que

$$\mathcal{N}_\alpha u(y) \leq M, \quad \forall y \in E. \quad (1.5.5)$$

Decimos que  $u$  tiene límites no-tangenciales en  $E$  si para toda  $\beta > 0$  tenemos

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Gamma_\beta(y)}} u(x) \quad \text{existe para toda } y \in E. \quad (1.5.6)$$

Para motivar estas definiciones tomemos el ejemplo más sencillo: Sea  $\Omega = \mathbb{R}_+^{n+1}$  y sea

$$k_t(x - y) = \frac{2}{\sigma_n} \frac{t}{(|x - y|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n = \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (1.5.7)$$

En otras palabras  $k$  es el núcleo de Poisson para el semiespacio. El siguiente resultado afirma que  $(k_t)_t$  es una identidad aproximada.

**Proposición 1.5.2.** *Sea  $\delta > 0$  entonces*

1.  $k_t(z) > 0$  para toda  $t > 0$  y  $z \in \mathbb{R}^n$ .

2.

$$\int_{\mathbb{R}^n} k_t(z) dz = 1, \quad \forall t > 0. \quad (1.5.8)$$

3.

$$\sup_{|z| > \delta} k_t(z) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow 0. \quad (1.5.9)$$

La segunda y tercera condición implican en particular que si tomamos  $u_0 \in C_c(\mathbb{R}^n)$  y definimos  $u$  en  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  como

$$u(x, t) = k_t * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_t(x - y) u_0(y) dy, \quad (1.5.10)$$

entonces  $u(\cdot, t) \rightarrow u_0(\cdot)$  uniformemente cuando  $t \rightarrow 0$ . Usando la continuidad uniforme de  $u_0$  podemos probar además que  $u(z) \rightarrow u_0(y)$  cuando  $\mathbb{R}^{n+1} \ni z \rightarrow y$ . Ahora notamos que, como  $k_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la definición (1.5.10) tiene sentido para  $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , y tenemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|u_0\|_{L^p}, \quad t > 0. \quad (1.5.11)$$

Nos preguntamos si  $u \rightarrow u_0$  cuando en algún sentido. Para responder esto primero afirmamos que (ver Teorema 2.2.2)

$$\mathcal{N}_\alpha u(y) \leq C(\alpha, n) \mathcal{M}u_0(y), \quad (1.5.12)$$

en particular (ver Teorema 1.2.3)

$$\|\mathcal{N}_\alpha u(y)\|_{L^p} \leq C(n, \alpha, p) \|u_0\|_{L^p}, \quad 1 < p < \infty. \quad (1.5.13)$$

Definimos el operador

$$Tu_0(y) = \limsup_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in \Gamma_\alpha(y)}} u(z) - \liminf_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in \Gamma_\alpha(y)}} u(z). \quad (1.5.14)$$

Claramente  $T$  es sublineal en  $u$  y además  $|Tu| \leq 2\mathcal{N}_\alpha u$ . Entonces si  $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  y  $u_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$  tal que  $u_k \rightarrow u_0$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\|Tu_0\|_{L^p} \leq \|Tu_0 - Tu_k\|_{L^p} + \|Tu_k\|_{L^p} \leq C\|u_0 - u_k\|_{L^p}, \quad (1.5.15)$$

donde la desigualdad sigue de que  $Tu_k = 0$  y 1.5.13. Concluimos que  $u = k_t * u_0$  tiene límites no-tangenciales casi en todas partes (respecto de la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ ). Un argumento similar con

$$T'u_0(y) = \lim_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in \Gamma_\alpha(y)}} u(z) - u_0(y) \quad (1.5.16)$$

nos dice que este límite es  $u_0$ .

**Observación 1.5.1.** Si  $\mathcal{N}_\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  entonces  $u$  está no-tangencialmente acotada en  $E_r^c = \{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{N}_\alpha u(y) \leq r\}$  para toda  $r > 0$  y  $E_r^c \uparrow \mathbb{R}^n$  en medida.

Lo anterior es mas que nada para mostrar la utilidad de estimaciones en  $L^p$  de  $\mathcal{N}_\alpha$ . El siguiente resultado nos dice que para esto el valor de  $\alpha$  no es importante.

**Proposición 1.5.3.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un abierto con frontera Ahlfors regular. Si  $\alpha, \beta > 0$  entonces existe  $C = C(\alpha, \beta, \Omega)$  tal que, para toda  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $0 < p < \infty$ ,

$$\|\mathcal{N}_\alpha u\|_{L^p} \leq C \|\mathcal{N}_\beta u\|_{L^p}. \quad (1.5.17)$$

*Demostración.* Si fijamos  $r > 0$  y definimos  $E^\alpha = \{y \in \partial\Omega : \mathcal{N}_\alpha u(y) > r\}$ , y análogamente para  $E^\beta$  entonces basta probar que existe  $C = C(\alpha, \beta, \Omega, p)$  tal que

$$\sigma(E^\alpha) \leq C\sigma(E^\beta). \quad (1.5.18)$$

Para esto definimos, para  $0 < \gamma < 1$ ,

$$\begin{aligned} A_\gamma^\beta &:= \left\{ y \in \partial\Omega : \frac{\sigma((\partial\Omega \setminus E^\beta) \cap \Delta_s(y))}{\sigma(\Delta_s(y))} \geq \gamma, \forall r > 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in \partial\Omega : \mathcal{M}^\sigma(1_{\partial\Omega \setminus E^\beta})(y) \geq \gamma \right\}. \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

Donde  $\Delta_s(y) = B_s(y) \cap \partial\Omega$ . Afirmamos que basta probar que existe  $\gamma$  que no depende de  $r, u$  tal que

$$\begin{aligned} E^\alpha \subset \partial\Omega \setminus A_\gamma^\beta &= \{y \in \partial\Omega : \mathcal{M}^\sigma(1_{\partial\Omega \setminus E^\beta})(y) < \gamma\} \\ &\subset \{y \in \partial\Omega : \mathcal{M}^\sigma(1_{E^\beta})(y) > 1 - \gamma\}, \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

En efecto si esto valiera, usando la estimación débil de la función maximal tendríamos

$$\sigma(E^\alpha) \leq \frac{C}{1-\gamma} \sigma(E^\beta) = C\sigma(E^\beta). \quad (1.5.21)$$

Para ver (1.5.20) primero notamos que la segunda igualdad es por definición de  $A_\gamma^\beta$  y la última contención consecuencia de la sublinealidad de  $\mathcal{M}^\sigma$ .

Sea entonces  $y \in E^\alpha$ . Por definición existe  $x \in \Gamma_\alpha(y)$  tal que  $|u(x)| > r$ . Sean  $s_0 > 0$  y  $y_0 \in \partial\Omega$  tal que  $|x - y_0| = s_0 = d(x, \partial\Omega)$ . Aseguramos que, con  $C_1 = 2 + \alpha + \beta$ ,

$$\Delta_{\beta s_0}(y_0) \subset E^\beta \cap \Delta_{C_1 s_0}(y). \quad (1.5.22)$$

Para ver esto notamos que si  $z \in \Delta_{\beta s_0}(y_0)$  entonces  $x \in \Gamma_\beta(z)$  (pues  $|z - x| < |z - y_0| + |y_0 - x| < \beta s_0 + s_0 = (1 + \beta)d(x, \partial\Omega)$ ). Además, usando la desigualdad del triángulo dos veces obtenemos  $\Delta_{\beta s_0}(y_0) \subset \Delta_{C_1 s_0}(y)$ . Combinando esto (1.5.22) sigue inmediatamente pues  $x \in E^\alpha$ . Calculamos

$$\frac{\sigma(E^\beta \cap \Delta_{C_1 s_0}(y))}{\sigma(\Delta_{C_1 s_0}(y))} \geq \frac{\sigma(\Delta_{\beta s_0}(y_0))}{\sigma(\Delta_{C_1 s_0}(y))} \geq C_2 \left( \frac{\beta}{2 + \alpha + \beta} \right)^n, \quad (1.5.23)$$

donde usamos Ahlfors regularidad para la última desigualdad, junto con el hecho  $C_1 = 2 + \alpha + \beta$ . Sin pérdida de generalidad  $C_2 < 1$  por lo que, poniendo  $s = C_1 s_0$  y notando que  $\sigma(E^\beta \cap \Delta_s(y)) + \sigma((\partial\Omega \setminus E^\beta) \cap \Delta_s(y)) = \sigma(\Delta_s(y))$  obtenemos

$$\frac{\sigma((\partial\Omega \setminus E^\beta) \cap \Delta_s(y))}{\sigma(\Delta_s(y))} \leq 1 - C_2 \left( \frac{\beta}{2 + \alpha + \beta} \right)^n = C_3 < 1. \quad (1.5.24)$$

Por lo tanto tomando  $C_3 < \gamma < 1$  obtenemos (1.5.20). Esto termina la prueba.  $\square$

Para concluir esta sección damos una relación importante entre las regiones no-tangenciales  $\Gamma_\alpha$  y conos rectos usuales en dominios Lipschitz. Recordamos que

$$\text{Co}(M) = \{(x', t) \in \mathbb{R}^{n+1} : M|x'| < t\}. \quad (1.5.25)$$

**Proposición 1.5.4.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  el dominio arriba de la gráfica de una función Lipschitz  $f$  con  $f(0) = 0$ . Entonces existen  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  que dependen solamente de  $M = [f]_1$  tal que*

1. Si  $\alpha > \alpha_1$  entonces existe  $M' > 0$  tal que

$$\text{Co}(M') \subset \Gamma_\alpha(0). \quad (1.5.26)$$

2. Si  $\alpha < \alpha_2$  entonces existe  $M'' > 0$  tal que

$$\Gamma_\alpha(0) \subset \text{Co}(M''). \quad (1.5.27)$$

Las constantes  $\alpha_i$  se pueden calcular explícitamente como

$$\alpha_1 = (1 + M^2)^{1/2} - 1, \quad \alpha_2 = \left( \frac{1 + M^2}{M^2} \right)^{1/2} - 1. \quad (1.5.28)$$

Informalmente la proposición dice que para  $\alpha$  grande podemos meter un cono usual en las regiones no-tangenciales, mientras que si  $\alpha$  es chico podemos meter dichas regiones en un cono. Hay que notar por otro lado que  $\alpha_1 < \alpha_2$  sólo cuando  $M < 1$ , por lo que en general no podemos hacer ambas construcciones al mismo tiempo.

Es instructivo comparar esta proposición con el primer inciso del ejemplo 1.5.1.

*Demostración.* Sea  $M = [f]_1$ . Definimos  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$  los dominios arriba de la gráfica de las funciones  $f_1(x) = M|x|$  y  $f_2(x) = -M|x|$  respectivamente. Claramente  $[f_i]_1 = M$  y aseguramos que, con notación obvia,

$$\Gamma_\alpha^1(0) \subset \Gamma_\alpha(0) \subset \Gamma_\alpha^2(0), \quad \forall \alpha > 0. \quad (1.5.29)$$

Para ver esto notamos que, de la Proposición 1.3.1,  $\Omega_1 \subset \Omega$  y  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_2 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ . En particular para toda  $x_1 \in \Omega_1$  y  $x \in \Omega$  tenemos

$$d(x_1, \partial\Omega_1) \leq d(x_1, \partial\Omega), \quad d(x, \partial\Omega) \leq d(x, \partial\Omega_2). \quad (1.5.30)$$

Esto demuestra (1.5.29).

Hacemos el caso  $n = 1$ , los argumentos en este caso son fáciles de entender, y su generalización relativamente clara. En este caso notamos que si  $l_1$  y  $l_2$  son las rectas por el origen con pendiente  $M$  y  $-M$  respectivamente entonces

$$\partial\Omega_1 = (l_1 \cup l_2) \cap \mathbb{R}_+^2, \quad \partial\Omega_2 = (l_1 \cup l_2) \cap -\mathbb{R}_+^2. \quad (1.5.31)$$

Supongamos que  $x = (x', t) \in \Omega_1$  con  $x' > 0, t > 0$  (el caso  $x' < 0$  es análogo). En este caso  $d(x, \partial\Omega_1) = |x - z|$  donde  $z$  es la proyección ortogonal de  $x$  sobre la recta  $l_1$ . En este caso  $x \in \Gamma_\alpha^1(0)$  si y sólo si

$$\frac{|x|}{|x - z|} < (1 + \alpha). \quad (1.5.32)$$

Como proyectar sobre  $l_1$  es un operador lineal en  $x$ , tenemos que el cociente  $|x|/|x - z|$  (como función de  $x$ ) es constante en rectas por el origen. En particular  $\Gamma_\alpha^1(0)$  es un cono recto usual, siempre que sea no-vacío. Para ver cuando pasa esto último notamos que el cociente anterior es mínimo cuando  $x$  está sobre el eje vertical, i.e.  $x = te_2$  y en este caso un cálculo nos da

$$z_{e_2} = \frac{M}{1 + M^2}(1, M), \quad \frac{e_2}{|e_2 - z_{e_2}|} = (1 + M^2)^{1/2}. \quad (1.5.33)$$

Combinando esto con la última desigualdad vemos que  $\Gamma_\alpha^1(0)$  es no vacío si y sólo si

$$\alpha > \alpha_1 = (1 + M^2)^{1/2} - 1. \quad (1.5.34)$$

Esto demuestra 1 de la proposición.

Para ver la segunda parte sea  $l'_2$  la recta ortogonal a  $l_2$ . Si  $x \in \Omega_2$  con  $x' > 0$  entonces tenemos dos casos:  $x$  por arriba de  $l'_2$  o  $x$  por abajo de  $l'_2$ . En el primer caso tenemos que  $d(x, \partial\Omega_2) = |x|$  por lo que  $x \in \Gamma_\alpha^2(0)$ . En el segundo caso podemos proceder como antes y concluir que  $x \in \Gamma_\alpha(0)$  si y sólo si

$$\frac{|x|}{|x - z|} < (1 + \alpha), \quad (1.5.35)$$

donde  $z$  es la proyección ortogonal de  $x$  sobre  $l_2$ . De nuevo el cociente es constante en rectas por lo que  $\Gamma_\alpha(0)$  es un cono usual siempre que se quede en  $\mathbb{R}_+^2$ . En este caso tomamos  $x = e_1$  y concluimos como antes que

$$\alpha < \alpha_2 = \left( \frac{1 + M^2}{M^2} \right)^{1/2} - 1. \quad (1.5.36)$$

Esto termina la prueba. □

Esto nos dice que si  $M < 1$  entonces los conos rectos usuales son equivalentes a las regiones no-tangenciales  $\Gamma_\alpha$ , para valores apropiados de  $\alpha$ . Notamos además que  $\alpha_1 \rightarrow 0$  y  $\alpha_2 \rightarrow \infty$  cuando  $M \rightarrow 0$ .

Por otro lado la siguiente definición y proposición nos dicen que en caso de que  $M$  sea grande no estamos muy lejos.

**Definición 1.5.4.** Decimos que  $S$  es un cono truncado, si  $S$  es congruente a  $\text{Co}(s) \cap B_h(0)$  para algunas  $s, h > 0$ .

Dado  $\Omega$  un dominio Lipschitz en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , decimos que  $S$  es un cono no-tangencial en  $y \in \partial\Omega$  si  $S$  es un cono truncado con vértice en  $y$  y existe otro cono truncado  $S' \subset \Omega$  tal que  $\bar{S} \setminus \{y\} \subset S'$ .

De la definición y la Proposición 1.3.1 es fácil ver que, por ejemplo si  $\Omega$  es el dominio arriba de la gráfica de  $f$ , con  $[f]_1 = M$ , entonces  $(x, f(x)) + \text{Co}(M')$  es un cono no-tangencial para toda  $M < M'$ .

**Proposición 1.5.5.** Sea  $\Omega$  el dominio arriba de la gráfica de una función Lipschitz  $f$  con  $[f]_1 = M$  y  $f(0) = 0$ , supongamos además que  $0$  es un punto de diferenciabilidad de  $f$ . Entonces para toda  $\alpha > 0$  existen  $h > 0$  y  $S_1, S_2$  conos no-tangenciales con vértice  $0$  tal que

$$S_1 \subset \Gamma_\alpha(0) \cap B_h(0) \subset S_2. \quad (1.5.37)$$

*Demostración.* Supongamos primero que  $\nabla f(0) = 0$ . Esto nos asegura que

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{|x| < h} \frac{|f(x)|}{|x|} := \lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0 \quad (1.5.38)$$

Fijamos  $\alpha > 0$  y notamos que, para toda  $z \in B_h(0)$ ,

$$d(x, \partial\Omega) = d(x, \partial\Omega \cap B_{2h}(0)). \quad (1.5.39)$$

Por una versión local de la proposición anterior tenemos que, con

$$\alpha_1 = (1 + \theta(r)^2)^{1/2} - 1, \quad y \quad \alpha_2 = \left( \frac{1 + \theta(r)^2}{\theta(r)^2} \right)^{1/2} - 1, \quad (1.5.40)$$

que  $\Gamma_\alpha \cap B_h(0)$  está contenido en un cono  $\text{Co}(m)$  para alguna  $m > 0$ , para toda  $\alpha < \alpha_2$ . Notamos que la condición  $\theta(h) \rightarrow 0$  implica, por un lado, que para  $h$  suficientemente pequeña,  $\text{Co}(m) \cap B_h(0) \subset \Omega$  (por la Proposición 1.3.1 por ejemplo). Por otro lado también implica que  $\alpha_2 \rightarrow \infty$  cuando  $h \rightarrow 0$ . De hecho podemos pedir que el cono  $S_2 := \text{Co}(m/2) \cap B_h(0) \subset \Omega$ , haciendo  $h$  un poco más pequeña. Esto prueba la inclusión de la derecha. Para la existencia de  $S_1$  trabajamos con  $\alpha_1$ , notando que esta tiende a cero con  $h$  y argumentando como antes.

Si  $\nabla f(0) \neq 0$  procedemos por partes. Para empezar, dado que  $\nabla f(0)$  existe, podemos hablar de la normal interior a  $\Omega$  en 0 dada por

$$\nu_0 := (1 + |\nabla f(0)|^2)^{-1/2} (-\nabla f(0), 1). \quad (1.5.41)$$

De la misma manera tenemos el espacio tangente a  $\partial\Omega$  en 0, que definimos como

$$H := T_0(\partial\Omega) = \{\nu_0\}^\perp = \{(x, g(x)) : x \in \mathbb{R}^n, g(x) = \nabla f(0) \cdot x\}. \quad (1.5.42)$$

Denotamos también

$$H^+ := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : z \cdot \nu_0 > 0\}. \quad (1.5.43)$$

Como  $H, \nu_0$  son ortogonales, toda  $v \in \mathbb{S}^n \cap H^+$  la podemos escribir como

$$v = (x, g(x)) + t\nu_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, |(x, g(x))| < 1, 0 < t < 1. \quad (1.5.44)$$

Definimos, para  $m > 0$ ,  $\widetilde{\text{Co}}(m)$  como el cono congruente con  $\text{Co}(m)$  y eje  $\nu_0$ . En otras palabras tenemos

$$\widetilde{\text{Co}}(m) = \{sv : s > 0, v \in \mathbb{S}^n \cap H^+, \cos(\arctan(m^{-1})) < \nu_0 \cdot v\}. \quad (1.5.45)$$

Afirmamos que para toda  $m > 0$  existe  $h > 0$  tal que

$$\widetilde{\text{Co}}(m) \cap B_h(0) \subset \Omega. \quad (1.5.46)$$

Para probar esto sea  $z \in \widetilde{\text{Co}}(m) \cap \partial\Omega$ . Entonces tenemos, para algunas  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $\cos(\arctan(m^{-1})) < t = \nu_0 \cdot v$ ,

$$z = (y, f(y)) \in \partial\Omega \quad \text{y} \quad z = sv \in \widetilde{\text{Co}}(m), \quad v = (x, g(x)) + t\nu_0. \quad (1.5.47)$$

Poniendo  $r^2 = 1 + |\nabla f(0)|^2$  y recordando la forma explícita de  $\nu_0$  tenemos

$$y = s \left( x - \frac{t}{r} \nabla f(0) \right), \quad f(y) = s \left( g(x) + \frac{t}{r} \right). \quad (1.5.48)$$

De todo esto donde obtenemos

$$\left| \frac{f(y) - \nabla f(0) \cdot y}{|y|} \right| = \frac{tr}{|x - \frac{t}{r} \nabla f(0)|} \geq \frac{tr}{1+t} \geq \frac{t}{2} > \frac{\cos(\arctan(m^{-1}))}{2} > 0. \quad (1.5.49)$$

Dado que  $f$  es diferenciable en 0, dada  $\varepsilon > 0$  existe  $h > 0$  tal que si  $|y| < h$  entonces

$$\frac{|f(y) - \nabla f(0) \cdot y|}{|y|} < \varepsilon. \quad (1.5.50)$$

Tomando  $\varepsilon < \cos(\arctan(m^{-1}))/2$  se sigue (1.5.46).

Un argumento análogo nos da que para toda  $m > 0$  existe  $h > 0$  (de hecho la misma que la usada para (1.5.46)) tal que

$$\Gamma_\alpha^-(0) \cap B_h(0) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}. \quad (1.5.51)$$

Fijamos  $\alpha > 0$ . Tomando  $m_1 > m_2$ , y dado que para toda  $z \in \widetilde{\text{Co}}(m_1) \cap B_h(0)$  tenemos  $d(z, \partial\Omega) \geq d(x, \partial\widetilde{\text{Co}}(m_2))$ , es fácil ver, haciendo  $m_1 \rightarrow \infty$  y  $m_2 \rightarrow 0$  (notamos que la  $h$  dependerá solamente de  $m_2$ ) que tenemos la primera inclusión en (1.5.37). Análogamente, si mandamos  $m_2 \rightarrow 0$ , y con ayuda de (1.5.51), podemos garantizar que  $\Gamma_\alpha(0) \cap B_h(0) \subset \widetilde{\text{Co}}(m)$ .  $\square$

No es difícil ver que todo cono no-tangencial en  $y \in \partial\Omega$  se queda contenido en  $\Gamma_\alpha(y)$  para  $\alpha$  suficientemente grande (que dependerá del cono). En este caso el corolario siguiente es inmediato

**Corolario 1.5.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz acotado y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Para cualquier  $E \subset \partial\Omega$  y  $\sigma$ -casi toda  $y \in E$  son equivalentes*

1. *Para toda  $\alpha > 0$  y toda  $y \in E$  el límite*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Gamma_\alpha(y)}} f(x) \quad \text{existe.} \quad (1.5.52)$$

2. *Para toda  $y \in E$  y  $S$  un cono no-tangencial en  $y$ , el límite*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in S}} f(y) \quad \text{existe.} \quad (1.5.53)$$

En otras palabras, convergencia en las regiones no-tangenciales coincide,  $\sigma$ -c.d. con convergencia en los conos no-tangenciales.

Concluimos esta sección con un corolario de la prueba de la última proposición (de hecho es inmediato de (1.5.46)) que será de utilidad más adelante.

**Corolario 1.5.2.** *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz entonces para  $\sigma$ -casi toda  $y \in \partial\Omega$  tenemos que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sigma(\partial B_h(y) \cap \Omega) = \frac{\sigma_n}{2}. \quad (1.5.54)$$

## 1.6. Teorema de la divergencia

En esta sección probamos el teorema de la divergencia usual y una extensión que nos permite relajar las hipótesis de regularidad hasta la frontera. Estos resultados serán útiles a la hora de obtener fórmulas de representación para ciertas clases de funciones holomorfas y monogénicas.

**Teorema 1.6.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio Lipschitz acotado y sea  $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n+1})$  entonces*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.1)$$

Donde  $\nu$  denota la normal exterior al dominio y  $\sigma = \mathcal{H}^n|_{\partial\Omega}$ .

*Demostración.* Asumamos primero que el dominio es un cilindro de la forma

$$\Omega = \{(x', t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x'| < a, \varphi(x') < t < b + \varphi(x')\}, \quad (1.6.2)$$

para algunos  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz y  $a, b \in \mathbb{R}_+$ . Sin pérdida de generalidad suponemos que  $\varphi(0) = 0$ . Supongamos además que, para algún  $\varepsilon > 0$  pequeño,

$$\operatorname{sop}(u) \subset \{(x', t) : |x'| < a - \varepsilon, t < b + \varphi(x') - \varepsilon\}. \quad (1.6.3)$$

En otras palabras, en la integral superficial solo nos importa la tapa de abajo del cilindro  $\Omega$ .

Consideramos el homeomorfismo bi-Lipschitz  $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $\Phi(x', t) = (x', t - \varphi(x'))$  con inversa  $\Phi^{-1}(x', t) = (x', t + \varphi(x'))$ . Claramente  $\Phi(\Omega) = C_{a,b}$  donde

$$C_{a,b} = \{(y', s) : |y'| < a, 0 < s < b\}. \quad (1.6.4)$$

Además tenemos que

$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\nabla\varphi^t & 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \nabla\varphi^t & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.6.5)$$

Aplicando la regla de la cadena tenemos, dado que  $(y', s) = y = \Phi(x) = \Phi(x', t) = (x', t - \varphi(x'))$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial s}, & 1 \leq j \leq n \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Calculamos entonces, con  $\tilde{u}(y) = u(\Phi^{-1}(y)) = u(x)$ ,

$$\operatorname{div}_x(u) = \operatorname{div}_y(\tilde{u}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial s}. \quad (1.6.7)$$

Combinando esto con el hecho de que  $\det(\nabla\Phi) = \det(\nabla\Phi^{-1}) = 1$  obtenemos, por el teorema de cambio de variables,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx &= \int_{C_{a,b}} \left( \operatorname{div}_y(\tilde{u}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial s} \right) dy \\ &= \int_{C_{a,b}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial y_j} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \tilde{u}_{n+1} - \sum_{j=1}^n \tilde{u}_j \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} \right) dy, \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

donde la última igualdad es porque  $\partial y_j \varphi$  no depende de  $s$ . Notamos que por (1.6.3) tenemos que

$$\operatorname{supp}(\tilde{u}) \subset \{(y', s) : |y'| < a - \varepsilon, s < b - \varepsilon\}, \quad (1.6.9)$$

por lo que podemos extender  $\tilde{u}$  a  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  como 0 reteniendo continuidad ahí. Denotamos igual a la extensión. Por Fubini y el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\begin{aligned} \int_{C_{a,b}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_j} dy &= \int_0^b \int_{B_a^n(0)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_j} dy' ds = \int_0^b \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_j} dy' ds \\ &= \int_0^b \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_j} dy_j d\hat{y}_j ds = 0. \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

Para la segunda integral hacemos lo análogo:

$$\begin{aligned} \int_{C_{a,b}} \frac{\partial}{\partial s} \left( \tilde{u}_{n+1} - \sum_{j=1}^n \tilde{u}_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right) dy &= \int_{B_a^n(0)} \int_0^b \frac{\partial}{\partial s} \left( \tilde{u}_{n+1} - \sum_{j=1}^n \tilde{u}_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right) ds dy' \\ &= \int_{B_a^n(0)} \left( \tilde{u}_{n+1} - \sum_{j=1}^n \tilde{u}_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right) \Big|_{s=0} dy'. \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

Ahora sólo falta recordar que la normal a  $\Omega$  en la tapa de abajo está dada por  $\nu(x) = (1 + |\nabla \varphi|^2)^{-1/2} (\nabla \varphi, -1)$  y que para toda función medible  $v$  definida en dicha tapa (que llamamos  $G_\varphi$ )

$$\int_{G_\varphi} v(x) d\sigma(x) = \int_{B_a^n(0)} \tilde{v}(y') (1 + |\nabla \varphi|^2)^{1/2} dy' \quad (1.6.12)$$

Entonces, poniendo  $v = u \cdot \nu$  concluimos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{G_\varphi} u \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.13)$$

Esto prueba el primer caso.

Consideramos ahora un dominio  $\Omega$  general. Tomemos una cubierta  $(U_i)_{i \geq 1}$  de  $\partial\Omega$  por cartas coordenadas y sea  $U_0 \subset\subset \Omega$  tal que  $\bar{\Omega} \subset \cup_{i \geq 0} U_i$ . Tomamos  $(\psi_i)$  una partición de la unidad subordinada a la cubierta  $(U_i)_{i \geq 0}$ . Calculamos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \sum_{i \geq 0} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi_i u) \quad (1.6.14)$$

Tenemos  $\int \operatorname{div}(\psi_0 u) dx = 0$  pues  $\psi_0 u \in C_c^1(\Omega)$ , por lo que concluimos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \sum_{i \geq 1} \int_{U_i \cap \Omega} \operatorname{div}(\psi_i u) dx. \quad (1.6.15)$$

Por el caso anterior tenemos que, como  $\psi_i = 0$  en  $\partial U_i \cap \Omega$  podemos extender  $\psi_i u$  a un dominio como en el caso anterior sin afectar la integral (obviamente extendemos como cero),

$$\int_{U_i \cap \Omega} \operatorname{div}(\psi_i u) dx = \int_{\partial \Omega \cap U_i} \psi_i u \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial \Omega} \psi_i u \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.16)$$

Sumando sobre las  $i$  el resultado sigue.  $\square$

Supongamos que  $\Omega$  es de la forma

$$\Omega = \{(x', t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x'| < a, \varphi(x') < t < \varphi(x') + b\} \quad (1.6.17)$$

para algunos  $a, b \in \mathbb{R}_+$  y  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz con  $\varphi(0) = 0$ . Para  $b$  suficientemente grande, respecto de  $[\varphi]_1$ , tenemos que  $\Omega$  es un dominio Lipschitz.

Sea  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$  tal que existe  $\varepsilon > 0$  con la propiedad de que

$$\operatorname{sop}(u) \subset \{(x', t) : |x'| < a - \varepsilon, \varphi(x') < t < \varphi(x') + b - \varepsilon\}. \quad (1.6.18)$$

Con esto podemos extender a  $u$  como cero al conjunto  $\{(x', t) : |x'| < a, \varphi(x') < t\}$  preservando el hecho  $u \in C^1$  en este conjunto. Para  $\delta > 0$  entonces tiene sentido definir  $u_\delta(x) = u(x - \delta e_{n+1})$ . Tenemos entonces que  $u_\delta \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n+1})$  por lo que un cálculo igual al hecho en la prueba del teorema anterior nos da

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u_\delta) dx = \int_{R_\varphi} u_\delta \cdot \nu d\sigma, \quad (1.6.19)$$

donde  $R_\varphi = \{(x', t) : |x'| < a, \varphi(x') = t\}$ . El asunto ahora es ver que condiciones debemos pedir en  $u$  para poder hacer  $\delta \rightarrow 0$  y obtener la identidad con  $u$  en lugar de  $u_\delta$ .

Para empezar tenemos, de la definición de  $u_\delta$  que  $\operatorname{div}(u_\delta)(x) = \operatorname{div}(u)(x - \delta e_{n+1})$  por lo que la identidad anterior la podemos reescribir como

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u)(x - \delta e_{n+1}) dx = \int_{R_\varphi} u(y - \delta e_{n+1}) \cdot \nu(y) d\sigma(y). \quad (1.6.20)$$

Para que la identidad del lado izquierdo tenga sentido en el límite necesitamos  $\operatorname{div}(u) \in L^1(\Omega)$ , pero esta condición implica que podemos aplicar el teorema de convergencia dominada en la integral del lado izquierdo por lo que, bajo esta hipótesis, tenemos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u)(x - \delta e_{n+1}) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u)(x) dx. \quad (1.6.21)$$

Como sólo estamos pidiendo  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$  tenemos que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} u(y - \delta e_{n+1})$  no necesariamente existe (para ningún  $y \in R_\varphi$ ) por lo que necesitamos pedir que estos límites existan, por ejemplo suponiendo que  $u$  tiene límites no tangenciales  $\sigma$ -c.d. en  $\partial\Omega^9$ . Por otro lado si queremos poder aplicar el teorema de convergencia dominada en esta integral necesitamos que  $|u_\delta| \leq g \in L^1(R_\varphi)$  para alguna  $g$ . El candidato obvio es  $g = \mathcal{N}u$  que automáticamente satisface la desigualdad. En otras palabras tenemos que si  $u$  satisface

1.  $\operatorname{div}(u) \in L^1(\Omega)$ .
2.  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d. en  $R_\varphi$ .
3.  $\mathcal{N}u \in L^1(R_\varphi)$

entonces podemos tomar el límite en (1.6.20) para obtener

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{R_\varphi} u \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.22)$$

Repitiendo el argumento con particiones de la unidad hecho en el Teorema 1.6.1 obtenemos el siguiente

**Teorema 1.6.2.** *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz acotado y sea  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$  tal que  $\operatorname{div}(u) \in L^1(\Omega)$ ,  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d. en  $\partial\Omega$  y que  $\mathcal{N}u \in L^1(\partial\Omega)$  entonces*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.23)$$

Supongamos ahora que  $\Omega$  es un dominio Lipschitz exterior, i.e. existe un dominio Lipschitz acotado  $\Omega_1$  tal que  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}_1$ , entonces  $\Omega$  es Lipschitz. Queremos establecer un teorema de la divergencia para tales dominios. Supongamos primero que tenemos  $u$  como en las hipótesis del teorema anterior y además que  $\operatorname{sop}(u)$  es acotado. Si tomamos  $r > 0$  suficientemente grande para que  $\operatorname{sop}(u) \subset B_r(0)$  y  $\bar{\Omega}_1 \subset B_r(0)$  entonces  $\Omega^r = \Omega \cap B_r(0)$  es un dominio Lipschitz acotado y por el teorema anterior tenemos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\Omega^r} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\partial\Omega^r} u \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.24)$$

Para tratar el caso general supongamos que  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  tal que  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta \equiv 1$  en  $B_1(0)$  y  $\operatorname{sop}(u) \subset B_2(0)$ . Definimos  $\eta_r(x) = \eta(r^{-1}x)$ .

<sup>9</sup>Notamos que  $u \in C^1(\bar{\Omega} \setminus R_\varphi, \mathbb{R}^{n+1})$  por lo que la condición solo es necesaria en  $R_\varphi$ .

Si tenemos entonces  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$  tal que  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d. en  $\partial\Omega$  y  $\mathcal{N}u \in L^1(\partial\Omega)$  definimos  $u_r = \eta_r u$ . Tenemos entonces que  $u_r$  tiene soporte acotado por lo que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u_r) dx = \int_{\partial\Omega} u_r \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.25)$$

Queremos aplicar el teorema de convergencia dominada a ambos lados: El lado derecho no tiene problemas pues  $|u_r| \leq |u| \leq \mathcal{N}u$  en  $\partial\Omega$  por lo que

$$\int_{\partial\Omega} u_r \cdot \nu d\sigma \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.26)$$

Para ver que pasa con el lado izquierdo vemos que  $\operatorname{div}(u_r) = \nabla\eta_r \cdot u + \eta_r \operatorname{div}(u)$ . Como  $\operatorname{div}(u) \in L^1(\Omega)$  por hipótesis el segundo sumando está dominado por una función en  $L^1(\Omega)$ . Para el primer sumando notamos que existe  $C = C(\eta)$  tal que  $\|\nabla\eta_r\|_{\infty} \leq Cr^{-1}$  por lo que

$$|\nabla\eta_r \cdot u| \leq \frac{C}{r}|u|. \quad (1.6.27)$$

Concluimos que si  $|u| \in L^1(\Omega)$  entonces podemos aplicar el teorema de convergencia dominada. Tenemos

**Teorema 1.6.3.** *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz exterior y sea  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$  tal que  $|u|, \operatorname{div}(u) \in L^1(\Omega)$ ,  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d. y  $\mathcal{N}u \in L^1(\partial\Omega)$  entonces*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.28)$$

Agregamos entonces la hipótesis de que  $|u| \in L^1(\Omega)$ . Para ver que algo extra es necesario al tratar con dominios exteriores basta el siguiente

**Ejemplo 1.6.1.** *Sea  $B$  la bola unitaria en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{B}$ . Sea  $v \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$  armónica. Poniendo  $u = \nabla v$  vemos que  $u$  satisface todas las condiciones del teorema 1.6.3 excepto  $|u| \in L^1(\Omega)$  por lo que una aplicación (no justificada) del teorema anterior nos da*

$$0 = \int_{\Omega} \Delta v dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial B} \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma. \quad (1.6.29)$$

*Esto es absurdo pues  $v$  fue arbitraria: por ejemplo  $v(x) = |x|^{1-n}$  nos da  $\partial_{\nu} v(y) = -(1-n)|y|^{1-n} = (n-1)$  de donde*

$$0 = \int_{\Omega} \Delta v dx = \int_{\partial B} (n-1) d\sigma = (n-1)\sigma_n > 0. \quad (1.6.30)$$

De manera análoga podemos probar un teorema de la divergencia para gráficas, i.e.

**Teorema 1.6.4.** *Sea  $\Omega$  el dominio arriba de la gráfica de una función Lipschitz. Sea  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$  tal que  $|u|, \operatorname{div}(u) \in L^1(\Omega)$ ,  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d. en  $\partial\Omega$  y  $\mathcal{N}u \in L^1(\partial\Omega)$ . Entonces*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.31)$$

Para obtener los resultados que queremos resulta que esta versión (para gráficas) del teorema de la divergencia no es suficiente. Queremos quitarnos de encima la hipótesis  $u \in L^1(\Omega)$ . La manera de hacer esto será que integrabilidad de la función maximal  $\mathcal{N}u$  nos implica  $p$ -integrabilidad de  $u$  en  $\Omega$ , para una  $p > 1$ .

**Teorema 1.6.5.** *Sea  $\Omega$  el dominio arriba de una gráfica Lipschitz. Sea  $u \in C^1(\Omega)$  tal que  $\mathcal{N}u \in L^1(\partial\Omega)$ ,  $\operatorname{div}(u) \in L^1(\Omega)$  y  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d. entonces*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu d\sigma. \quad (1.6.32)$$

Para probar esto usamos

**Lema 1.6.1** ([27, Prop. 3.2.7]). *Sea  $\Omega$  el dominio arriba de una gráfica Lipschitz. Entonces para toda  $0 < p < \infty$  y  $q = p(n+1)/n$  tenemos que existe  $C$ , que no depende de  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\mathcal{N}u\|_{L^p(\partial\Omega)}. \quad (1.6.33)$$

**Observación 1.6.1.** *Que la integrabilidad es óptima se puede ver con el argumento usual de dilataciones: Si ponemos  $\Omega = \mathbb{R}_+^{n+1}$  y  $u_r(x) = u(rx)$  entonces, dado que en este caso  $r\Gamma_\alpha(y) = \Gamma_\alpha(ry)$  para toda  $y \in \mathbb{R}^n$  concluimos que  $\mathcal{N}u_r(x) = \mathcal{N}u(rx)$ . Sustituyendo en la desigualdad del lema y haciendo  $r \rightarrow \infty, 0$  según sea el caso, vemos que necesariamente  $q = p(n+1)/n$ .*

*Demostración Teorema 1.6.5.* La prueba es casi igual que en la discusión previa al Teorema 1.6.3, en particular definimos  $\eta, \eta_r, u_r$  igual que ahí. Basta entonces ver que

$$\int_{\Omega} \nabla \eta_r \cdot u dx \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (1.6.34)$$

Para esto primero notamos que  $\text{sop}(\nabla\eta_r) \subset B_{2r} \setminus B_r$ , por lo que, aplicando la desigualdad de Hölder en  $\Omega_r = \Omega \cap (B_{2r} \setminus B_r)$  obtenemos

$$\left| \int_{\Omega_r} \nabla\eta_r \cdot u dx \right| \leq \|\nabla\eta_r\|_{L^{p'}(\Omega_r)} \|u\|_{L^p(\Omega_r)} \leq \frac{C}{r} |\Omega_r|^{1/p'} \|u\|_{L^p(\Omega_r)} \quad (1.6.35)$$

pues  $|\nabla\eta_r| \leq Cr^{-1}$ . Ahora tenemos  $|\Omega_r| \leq C(n)r^{n+1}$  por lo que, poniendo  $p = (n+1)/n$  y  $p' = n+1$  obtenemos

$$\left| \int_{\Omega_r} \nabla\eta_r \cdot u dx \right| \leq C \|u\|_{L^{(n+1)/n}(\Omega_r)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (1.6.36)$$

pues  $|u| \in L^{(n+1)/n}(\Omega)$  por el lema anterior.  $\square$

Para demostrar el lema necesitamos la descomposición de Whitney. Hacemos la demostración para el caso del semiespacio superior y al final damos los argumentos para extender este resultado al caso de gráficas.

**Lema 1.6.2** (Descomposición de Whitney). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto. Existe  $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una colección de cubos (cerrados) con interiores ajenos tal que  $\Omega = \cup_j Q_j$  y*

$$\text{diam}(Q_j) \leq d(Q_j, \partial\Omega) \leq 8\text{diam}(Q_j). \quad (1.6.37)$$

*Demostración.* Ponemos

$$\mathcal{G}_k := \left\{ \prod_{j=1}^{n+1} [m_j 2^k, (m_j + 1) 2^k] : m_i \in \mathbb{Z} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.6.38)$$

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : 4\sqrt{n}2^{k-1} < d(x, \partial\Omega) \leq 4\sqrt{n}2^k\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notamos que para  $Q \in \mathcal{G}_k$  tenemos  $\text{diam}(Q) = \sqrt{n}2^k$ . Por otro lado para  $x \in \Omega$  con  $r = d(x, \partial\Omega)$  tenemos, para todo cubo  $Q'$  con centro en  $x$ ,

$$r - \frac{\text{diam}(Q')}{2} \leq d(Q', \partial\Omega) \leq r. \quad (1.6.39)$$

Basta ver la primera desigualdad y para esto tomamos  $y \in \partial\Omega$ ,  $z \in \partial Q'$  y calculamos

$$|z - y| \geq |x - y| - |x - z| \geq d(x, \partial\Omega) - |x - z| \geq d(x, \partial\Omega) - \frac{\text{diam}(Q')}{2}, \quad (1.6.40)$$

la desigualdad sigue de tomar ínfimos respecto de  $y, z$ .

Definimos entonces

$$\mathcal{B}_k := \{Q \in \mathcal{G}_k : Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\}. \quad (1.6.41)$$

Tomemos un cubo en esta colección, digamos  $Q$ , con centro  $x$  y sea  $z \in Q \cap \Omega_k$ . Calculamos, con  $C_0 = 4\sqrt{n}$  y usando que  $|x - z| \leq 2^{-1}\text{diam}(Q)$ ,

$$C_0 2^{k-2} \leq 2^{k-2}(2C_0 - \sqrt{n}) < d(z, \partial\Omega) - |x - z| \leq d(x, \partial\Omega). \quad (1.6.42)$$

$$d(x, \partial\Omega) \leq d(z, \partial\Omega) + |x - z| \leq C_0 2^{k+1}. \quad (1.6.43)$$

Concluimos que si  $Q \cap \Omega_m \neq \emptyset$  entonces  $m \in \{k-1, k, k+1\}$ . Por construcción  $\cup_k \mathcal{B}_k = \Omega$ . Para garantizar la condición sobre las intersecciones definimos  $\mathcal{A}_k$  como sigue: Tomemos  $Q \in \mathcal{B}_0$ . Si  $Q$  no está contenido en ningún elemento de  $\mathcal{B}_1$  lo ponemos en  $\mathcal{A}_0^{10}$ , de otra manera descartamos  $Q$ . Inductivamente escogemos los  $Q \in \mathcal{B}_k$ ,  $k > 0$ , que no estén contenidos en ningún cubo de  $\mathcal{B}_{k+1}$ . Por otro lado definimos  $\mathcal{A}_{-1}$  tomando cubos que no se quedan contenidos en ningún cubo de  $\mathcal{A}_0$ , y de igual manera procedemos inductivamente<sup>11</sup>.

Tenemos entonces nuestra colección buscada, dada por los elementos de los  $\mathcal{A}_k$ . Basta entonces ver que satisfacen las estimaciones sobre los diámetros. Sea entonces  $Q \in \mathcal{A}_k$  con centro  $x$ . Tenemos tres casos

1.  $x \in \Omega_{k-1}$ .

Usando (1.6.39) tenemos que, con  $C_0 2^{k-2} < r = d(x, \partial\Omega) \leq C_0 2^{k-1}$  y usando que  $\text{diam}(Q) = \sqrt{n} 2^k$ ,

$$\frac{\text{diam}(Q)}{2} = C_0 2^{k-2} - \sqrt{n} 2^{k-1} \leq d(Q, \partial\Omega) \leq C_0 2^{k-1} = 2\text{diam}(Q), \quad (1.6.44)$$

esto demuestra las desigualdades en este caso.

2.  $x \in \Omega_k$ .

De nuevo por (1.6.39), y dado que ahora  $C_0 2^{k-1} < r \leq C_0 2^k$ , calculamos

$$\frac{3\text{diam}(Q)}{2} = C_0 2^{k-1} - \sqrt{n} 2^{k-1} \leq d(Q, \partial\Omega) \leq C_0 2^k = 4\text{diam}(Q). \quad (1.6.45)$$

3.  $x \in \Omega_{k+1}$ .

En este caso tenemos  $C_0 2^k < r \leq C_0 2^{k+1}$  por lo que

$$\frac{7\text{diam}(Q)}{2} = C_0 2^k - \sqrt{n} 2^{k-1} \leq d(Q, \partial\Omega) \leq C_0 2^{k+1} = 8\text{diam}(Q). \quad (1.6.46)$$

Esto concluye la prueba del lema.  $\square$

<sup>10</sup>Como los cubos son diádicos  $\text{int}(Q) \cap \text{int}(Q') \neq \emptyset$  si y solo si uno se queda contenido en el otro.

<sup>11</sup>Usamos implícitamente que  $Q \in \mathcal{B}_k$  solo puede intersectar a un número finito de  $\Omega_m$ 's, cuando concluimos que  $\Omega = \cup_k \mathcal{A}_k$  (por ejemplo si aplicamos la construcción a  $\mathcal{B}_k = \{[0, 2^k]\}$  entonces  $\mathcal{A}_k = \emptyset$  para toda  $k$ ).

**Observación 1.6.2.** *Supongamos que  $\Omega$  es el dominio arriba de la gráfica de una función Lipschitz  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $U \subset \partial\Omega$  un abierto. Si denotamos por  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección en las primeras  $n$  coordenadas entonces  $\pi(U) = V$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $(Q_j)_j$  la descomposición de Whitney de  $V$ . Si  $Q_j$  tiene centro  $(x'_j, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  ponemos  $Q'_j$  el cilindro  $(0, \varphi(x')) + Q_j \times [-M\ell(Q_j), M\ell(Q)]$  donde  $\ell(Q)$  es la longitud del lado de  $Q$  y  $M = [\varphi]_1$ . Es fácil ver que  $(Q'_j \cap \partial\Omega)_j$  es una cubierta de  $U$  por ‘cubos’ ajenos. Además, dado que  $\pi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tiene inversa  $x' \mapsto (x', \varphi(x'))$ , tenemos que existen  $C_i = C_i(M, n)$  tal que*

$$\begin{aligned} C_1^{-1}d(Q_j, \partial V) &\leq d(Q'_j \cap \partial\Omega, \partial U) \leq C_1d(Q_j, \partial V), \\ C_2^{-1}\text{diam}(Q'_j \cap \partial\Omega) &\leq \text{diam}(Q_j) \leq C_2\text{diam}(Q'_j \cap \partial\Omega), \end{aligned} \quad (1.6.47)$$

de donde concluimos que  $d(Q'_j \cap \partial\Omega, \partial U) \approx \text{diam}(Q'_j \cap \partial\Omega)$ , con constantes que sólo dependen de  $M$ . Decimos que  $(Q'_j)_j$  es la descomposición de Whitney de  $U$ .

*Demostración Lema 1.6.1.* Hacemos la prueba para el caso  $p = 1$ , el caso general se sigue de poner  $v = |u|^p$ . Consideremos los conjuntos

$$T(U) = \Omega \setminus \bigcup_{y \in \partial\Omega \setminus U} \Gamma_\alpha(y), \quad U \subset \partial\Omega \text{ abierto.} \quad (1.6.48)$$

Aseguramos que basta probar que, para todo  $U$  propiamente contenido en  $\partial\Omega$ ,

$$|T(U)| \leq C(\Omega, \alpha)\sigma(U)^{(n+1)/n}. \quad (1.6.49)$$

En efecto, recordando que<sup>12</sup>  $\mathcal{N}u$  es siempre semicontinua inferiormente, tenemos que los conjuntos  $E_r = \{y \in \partial\Omega : \mathcal{N}u > r\}$  son abiertos para toda  $r > 0$ . Además si  $B_r = \{x \in \Omega : |u(x)| > r\}$  tenemos que  $x \in B_r$  implica  $x \in T(E_r)$  (pues si  $x \in \Gamma_\alpha(y)$  para  $y \notin E_r$  entonces por definición  $|u(x)| \leq r$  que es una contradicción). Combinando esto tenemos

$$\begin{aligned} |B_r| &\leq |T(E_r)| \leq C\sigma(E_r)^{(n+1)/n} = Cr^{-(n+1)/n}(r\sigma(E_r))^{(n+1)/n} \\ &\leq Cr^{-(n+1)/n}\|\mathcal{N}u\|_{L^1}^{(n+1)/n}, \end{aligned} \quad (1.6.50)$$

donde usamos la desigualdad de Chebyshev en la última desigualdad. El resultado sigue del Lema 1.2.2.

Para probar (1.6.49) tomamos un abierto  $U \subset \partial\Omega$  y tomamos  $(Q'_j)_j$  su descomposición de Whitney (como en la última observación) y definimos, si  $Q'_j$  tiene centro  $y_j$  y lado  $\ell(Q'_j) = r_j$ ,

$$\mathcal{Q}(t, j) = tQ'_j \cap \Omega, \quad (1.6.51)$$

---

<sup>12</sup>Como siempre  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\alpha$ .

donde recordamos que  $tQ$  es el cubo con el mismo centro y  $t$  veces el lado de  $Q$ . Aseguramos que existe  $t = t(\Omega, \alpha)$  tal que

$$T(U) \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}(t, j). \quad (1.6.52)$$

Para ver esto primero notamos que si  $x \in T(U)$  entonces  $|x - y| \geq (1 + \alpha)d(x, \partial\Omega)$  para toda  $y \in \partial\Omega \setminus U$ . Además sabemos que  $x \in \Gamma_\alpha(z)$  para algún  $z \in U$  por lo que  $|x - z| < (1 + \alpha)d(x, \partial\Omega) \leq |x - y|$  por lo que  $d(x, \partial\Omega) = d(x, U)$ . Concluimos

$$T(U) = \{x \in \Omega : d(x, U) \leq (1 + \alpha)^{-1}d(x, \partial\Omega \setminus U)\}. \quad (1.6.53)$$

Fijamos  $x \in T(U)$  y tomamos  $y \in U$  tal que  $|x - y| \leq (1 + s)d(x, U)$  para algún  $s > 0$  a ser escogido. Sabemos que  $y \in Q'_k$  para algún  $k$  por lo que tenemos

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq (1 + s)d(x, U) \leq \frac{1 + s}{1 + \alpha}d(x, \partial\Omega \setminus U) \\ &\leq \frac{1 + s}{1 + \alpha}(|x - y| + d(x, U)) \\ &\leq \frac{1 + s}{1 + \alpha}(|x - y| + C(\Omega)r_k). \end{aligned} \quad (1.6.54)$$

Donde usamos (1.6.47) para la última desigualdad. Si tomamos  $s = \alpha/2$  concluimos

$$\frac{\alpha}{2(1 + \alpha)}|x - y| = \left(1 - \frac{1 + s}{1 + \alpha}\right)|x - y| \leq Cr_k. \quad (1.6.55)$$

Concluimos que, tomando  $t > C2(1 + \alpha)/\alpha$ , la contención (1.6.52) es válida. El resto de la prueba es sencilla: De lo anterior concluimos

$$\begin{aligned} |T(U)| &\leq \sum_j |\mathcal{Q}(t, j)| \leq C(\Omega, \alpha) \sum_j r_j^{n+1} \\ &\leq C \sum_j \sigma(Q'_j \cap \partial\Omega)^{(n+1)/n} \leq C\sigma(U)^{(n+1)/n}, \end{aligned} \quad (1.6.56)$$

donde la tercera desigualdad es consecuencia de que  $\partial\Omega$  es Ahlfors regular y la última del hecho que los  $Q'_j$  tienen interiores ajenos. Esto prueba (1.6.49) y termina la prueba del lema.  $\square$

## 1.7. Fórmula integral de Cauchy en $\mathbb{C}$

En esta sección damos algunas aplicaciones del teorema de la divergencia a funciones holomorfas y monogénicas. En particular obtenemos la fórmula integral de Cauchy usual y sus análogos para funciones monogénicas.

Supongamos primero que tenemos una curva simple cerrada  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  y sea  $\Omega$  su interior. Si recorremos  $\Gamma$  en el sentido opuesto a las manecillas del reloj y está parametrizada por longitud de arco, digamos  $\gamma$ , entonces, por definición tenemos para  $g \in C(\Gamma)$

$$\int_{\Gamma} g(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma} g(\zeta) \gamma'(\zeta) d\sigma(\zeta). \quad (1.7.1)$$

En este caso, como  $\Omega$  se queda a la izquierda de la curva, tenemos que el vector normal está dado por  $\nu(\zeta) = -i\gamma'(\zeta)$  por lo que

$$\int_{\Gamma} g(\zeta) d\zeta = i \int_{\Gamma} g(\zeta) \nu(\zeta) d\sigma(\zeta). \quad (1.7.2)$$

Como el lado derecho de esta última expresión no necesita mención explícita de la parametrización usaremos esta identidad como definición de la integral del lado izquierdo, aún cuando  $\Gamma = \partial\Omega$  no sea una curva simple cerrada. En particular podemos entonces definir la integral del lado izquierdo siempre que  $\Omega$  sea un dominio Lipschitz y  $g \in L^1(\Gamma)$ . Otra ventaja de esta definición es que ve automáticamente de que lado de la frontera estamos, si siempre consideramos  $\nu$  como la normal exterior.

Para empezar tenemos el análogo del teorema de la divergencia en términos de análisis complejo

**Proposición 1.7.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un dominio Lipschitz acotado. Sea  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$  tal que  $f$  tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d. en  $\Omega$ ,  $\mathcal{N}f \in L^1(\partial\Omega)$  y  $\partial_{\bar{z}}f \in L^1(\Omega)$  entonces*

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta = 2i \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dz \quad (1.7.3)$$

*Demostración.* Calculamos, con  $f = u + iv$  y  $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta &= i \int_{\partial\Omega} f(\zeta) \nu(\zeta) d\sigma = i \int_{\partial\Omega} u\nu_1 - v\nu_2 + i(u\nu_2 + v\nu_1) d\sigma \\ &= i \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz \\ &= 2i \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz. \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

□

Como corolario inmediato obtenemos una versión del teorema de Cauchy, a saber

**Corolario 1.7.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un dominio Lipschitz acotado y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que  $\mathcal{N}f \in L^1(\partial\Omega)$  entonces*

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (1.7.5)$$

**Teorema 1.7.1** (Fórmula integral de Cauchy). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un dominio Lipschitz acotado y sea  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  con  $\mathcal{N}f \in L^1(\partial\Omega)$  entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega. \quad (1.7.6)$$

*Demostración.* Fijemos  $z \in \Omega$  y  $\varepsilon < d(z, \Gamma)$ . Si definimos  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(z)$  entonces  $\Omega_\varepsilon$  es Lipschitz. Del corolario anterior tenemos que para toda  $g \in \mathcal{H}(\Omega_\varepsilon) \cap C(\bar{\Omega}_\varepsilon)$

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\zeta) \nu(\zeta) d\sigma(\zeta) = \int_{\partial\Omega} g(\zeta) \nu(\zeta) d\sigma(\zeta) + \int_{\partial B_\varepsilon(z)} g(\zeta) \nu(\zeta) d\sigma(\zeta). \quad (1.7.7)$$

Si definimos  $g$  como

$$g(w) = \begin{cases} f'(z) & \text{si } w = z \\ \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z \end{cases} \quad (1.7.8)$$

entonces tenemos

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \nu(\zeta) d\sigma(\zeta) + \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \nu(\zeta) d\sigma(\zeta). \quad (1.7.9)$$

Agrupando de manera adecuada llegamos a

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta) \nu(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma(\zeta) = f(z) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\nu(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma(\zeta) - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) \nu(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma(\zeta). \quad (1.7.10)$$

Como  $h(w) = (w - z)^{-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z\})$  tenemos que la primera integral del lado derecho es cero por el corolario anterior. Por otro lado, en  $\partial B_\varepsilon(z)$  el vector normal exterior (respecto de  $\Omega_\varepsilon$ ) está dado por  $\nu(\zeta) = -\varepsilon^{-1}(\zeta - z)$  por lo que tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) \nu(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma(\zeta) &= -\varepsilon^{-1} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} f(\zeta) d\sigma(\zeta) \\ &= -2\pi \int_{\partial B_\varepsilon(z)} f(\zeta) d\sigma(\zeta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -2\pi f(z). \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

Donde el último límite es consecuencia de que  $f$  es continua en  $z$ . Combinando todo lo anterior el resultado sigue.  $\square$

Con esto podemos probar una fórmula integral para funciones en dominios exteriores

**Teorema 1.7.2.** *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz exterior y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que  $\mathcal{N}f \in L^1(\partial\Omega)$  y  $f(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  existe. Entonces*

$$f(z) = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega. \quad (1.7.12)$$

*Demostración.* Sea  $r > 0$  tal que  $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset B_r(0) = B_r$ . Ponemos como antes  $\Omega^r = \Omega \cap B_r$  y fijamos  $z \in \Omega^r$ . Por el teorema anterior tenemos

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial\Omega^r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \left( \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_r} \right) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.7.13)$$

La segunda integral del lado derecho la podemos expresar como

$$\int_{\partial B_r} \frac{f(\zeta) - f(\infty)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty) \int_{\partial B_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \rightarrow 2\pi i f(\infty), \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty \quad (1.7.14)$$

donde la última propiedad se sigue pues  $\sup_{|\zeta|=r} |f(\zeta) - f(\infty)| \rightarrow 0$  por hipótesis cuando  $r \rightarrow \infty$  y el hecho de que, para  $z$  fijo,  $|z - \zeta| \approx |\zeta|$  en infinito.  $\square$

Establecer una fórmula integral en el caso de que  $\Omega$  sea el dominio arriba de una gráfica es un poco más elaborado, esto se debe a que, como en el teorema anterior, no queremos una hipótesis a priori de que  $f \in L^1(\Omega)$ , por lo que la fórmula de Green que establecimos para este tipo de dominios no aplica inmediatamente. Más aún la hipótesis  $\mathcal{N}f \in L^1(\partial\Omega)$  ya no es la mejor posible pues no tenemos las contenciones  $L^p(\partial\Omega) \subset L^1(\partial\Omega)$  para  $p > 1$ .

**Teorema 1.7.3.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un dominio Lipschitz acotado, exterior o el dominio arriba de una gráfica Lipschitz. Sea  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que  $\mathcal{N}f \in L^p(\partial\Omega)$  para alguna  $1 < p < \infty$ , y  $f = o(1)$  en infinito si el dominio es exterior. Entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega. \quad (1.7.15)$$

*Demostración.* Dado que si  $\partial\Omega$  es acotada  $L^p(\partial\Omega) \subset L^1(\partial\Omega)$ , nos basta probar el caso en que  $\Omega$  es el dominio arriba de la gráfica de una función Lipschitz.

Fijemos  $z_0 \in \Omega$  y definamos  $g(z) = f(z)/(z_0 - z)$ . Tomemos  $r > 0$  tal que  $\bar{B} := \bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$ .

Sea  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\eta \equiv 0$  en  $B_{r/2}(z_0)$ ,  $\eta \equiv 1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus B$  y  $0 \leq \eta \leq 1$  en  $\mathbb{R}^2$ . Definimos  $g_r = \eta g$ . Tenemos entonces que  $g_r$  es holomorfa en  $\Omega \setminus \bar{B}$  y  $|g_r| \leq |g|$ . Esto implica entonces que  $\partial_{\bar{z}} g \in C_c^\infty(\Omega)$ , en particular es integrable.

Por otro lado si  $y_0 \in \partial\Omega$  tal que  $d(z_0, \partial\Omega) = d(z_0, y_0) = s \geq r$ , tenemos que existe  $C = C(r, s)$  tal que  $|z - z_0| \geq C(r + |y_0 - z|)$  siempre que  $|z - z_0| \geq r/2$ . Como  $\eta(z) = 0$  en  $B_{r/2}(z_0)$  tenemos que

$$|g_r(z)| \leq \frac{\eta(z)}{|z - z_0|} f(z) \leq \frac{C}{r + |y_0 - z|} f(z), \quad \forall z \in \Omega. \quad (1.7.16)$$

Si para algún  $y \in \partial\Omega$  tenemos  $z \in \Gamma_\alpha(y)$ , por definición obtenemos  $|z - y| < (1 + \alpha)|z - y_0|$  por lo que la desigualdad del triángulo implica que  $|y - y_0| \leq (2 + \alpha)|z - y_0|$ . Concluimos

$$\mathcal{N}g_r(y) \leq \frac{C}{r + |y - y_0|} \mathcal{N}f(y), \quad y \in \partial\Omega. \quad (1.7.17)$$

Como  $h(z) = (r + |y - y_0|)^{-1} \in L^q(\partial\Omega)$  para toda  $1 < q \leq \infty$  (esto se ve usando que  $\partial\Omega$  es Ahlfors regular), en particular, poniendo  $q = p'$  y usando la desigualdad de Hölder obtenemos que  $\mathcal{N}g_r \in L^1(\partial\Omega)$ . Usando la Proposición 1.7.1 llegamos a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g_r}{\partial \bar{z}} dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} g_r(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{z_0 - \zeta} d\zeta. \quad (1.7.18)$$

Como  $g_r$  es holomorfa fuera de  $B$  tenemos que la integral sobre  $\Omega$  la podemos reescribir como

$$\int_B \frac{\partial g_r}{\partial \bar{z}} dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial B} g(\zeta) d\zeta = \pi f(z_0). \quad (1.7.19)$$

Donde la última identidad es por la fórmula integral de Cauchy usual. Combinando esto el resultado sigue.  $\square$

**Observación 1.7.1.** *En términos de los espacios de Hardy clásicos en el disco unitario o el semiplano superior  $H^p$ ,  $1 < p < \infty$  el teorema anterior dice que si  $f \in H^p$  entonces  $f$  es igual a su integral de Cauchy.*

## 1.8. Fórmula integral de Cauchy en $\mathbb{R}^n$

Empezamos con una versión del teorema de la divergencia para funciones con valores en  $\mathbb{R}_{(n+1)}^{n+1}$ . Tenemos

**Proposición 1.8.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio Lipschitz acotado o el dominio arriba de una gráfica. Sea  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)}^{n+1})$  tal que  $\operatorname{div}(f) \in L^1(\Omega)$ ,  $f$  tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d. y  $\mathcal{N}f \in L^1(\partial\Omega)$ . Entonces*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f) dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu d\sigma. \quad (1.8.1)$$

*Demostración.* Si  $f = (f^1, \dots, f^{n+1})$  y  $f^j = \sum_J f_J^j e_J$  tenemos que, con notación obvia,

$$\operatorname{div}(f) = \sum_J \operatorname{div}(f_J) e_J, \quad f \cdot \nu = \sum_J (f_J \cdot \nu) e_J, \quad (1.8.2)$$

y además  $|\operatorname{div}(f_J)| \leq |\operatorname{div}(f)|$  y  $|f_J| \leq |f|$  por lo que  $f_J$  satisface las hipótesis del teorema de la divergencia usual y tenemos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f_J) dx = \int_{\partial\Omega} f_J \cdot \nu d\sigma. \quad (1.8.3)$$

Sumando sobre los multiíndices  $J$  el resultado sigue.  $\square$

Tenemos también un análogo de la Proposición 1.7.1

**Proposición 1.8.2.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio Lipschitz acotado y sean  $f, g \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{(n+1)})$ , entonces tenemos*

$$\int_{\Omega} ((gD) \odot f + g \odot (Df)) dx = \int_{\partial\Omega} g \odot \nu \odot f d\sigma. \quad (1.8.4)$$

*Demostración.* Basta notar que tenemos

$$g \odot \nu \odot f = \sum_{I,J} \sum_{k=1}^{n+1} (g_I \nu_k f_J) e_I e_k e_J, \quad (1.8.5)$$

por lo que, aplicando el teorema de la divergencia a cada término obtenemos

$$\int_{\partial\Omega} f \odot \nu \odot f d\sigma = \sum_{I,J} \sum_{k=1}^{n+1} \left( \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (g_I f_J) dx \right) e_I e_k e_J. \quad (1.8.6)$$

El resultado sigue de notar que

$$\begin{aligned} \sum_I \sum_{k=1}^{n+1} \left( \frac{\partial g_I}{\partial x_k} \right) f_J e_I e_k e_J &= (gD) f_J \\ \sum_J \sum_{k=1}^{n+1} g_I \left( \frac{\partial f_J}{\partial x_k} \right) e_I e_k e_J &= g_I (Df). \end{aligned} \quad (1.8.7)$$

□

En el caso de funciones con valores en  $\mathbb{R}_{(n+1)}$  tenemos los análogos del teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy clásicos, a saber,

**Teorema 1.8.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio Lipschitz acotado y sean  $f, g \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{(n+1)})$  monogénicas izquierda y derecha respectivamente. Entonces*

$$\int_{\partial\Omega} g(y) \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y) = 0. \quad (1.8.8)$$

**Teorema 1.8.2.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio Lipschitz acotado y sea  $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{(n+1)})$  monogénica (izquierda) en  $\Omega$ . Entonces*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y), \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.8.9)$$

Si  $\Omega$  es un dominio exterior y  $f(\infty) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x)$  existe entonces

$$f(x) = f(\infty) + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y), \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.8.10)$$

*Demostración.* Como en el caso complejo fijamos  $x_0 \in \Omega$  y tomamos  $\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$  y definimos  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)$ , que es un dominio Lipschitz. Poniendo  $g(x) = (x_0 - x)/|x_0 - x|^{n+1}$  tenemos que  $g$  es monogénica derecha, por lo que el resultado anterior, aplicado en  $\Omega_\varepsilon$ , implica que

$$\int_{\partial\Omega} g \odot \nu \odot f d\sigma = - \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} g \odot \nu_1 \odot f d\sigma, \quad (1.8.11)$$

donde  $\nu_1(y) = (x_0 - y)/|x_0 - y|$ . Recordando que, por construcción,  $a \odot a = -|a|^2$  para  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ , tenemos que el lado derecho de la igualdad es

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \frac{f(y)}{|y - x_0|^n} d\sigma(y) = \sigma_n \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} f(y) d\sigma(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_n f(x_0) \quad (1.8.12)$$

por continuidad de  $f$ . Recordando la definición de  $g$  la fórmula sigue. El caso exterior es análogo a como se hizo en el caso complejo. □

El resultado principal es entonces el análogo del Teorema 1.7.3.

**Teorema 1.8.3.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio Lipschitz acotado, exterior o el dominio arriba de una gráfica Lipschitz. Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{(n+1)}$  monogénica izquierda tal que  $\mathcal{N}f \in L^p(\partial\Omega)$  para alguna  $1 < p < \infty$  y  $f = o(1)$  en infinito si  $\Omega$  es exterior. Entonces*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y), \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.8.13)$$

*Demostración.* Sea  $x_0 \in \Omega$  y  $0 < r < \varepsilon = d(x_0, \partial\Omega)$ , definimos  $B = B_r(x_0)$  y  $B' = B_{r/2}(x_0)$ . Ponemos como antes  $g(x) = (x_0 - x)/|x_0 - x|^{n+1}$  y para  $r$  como antes tomamos  $\eta_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  tal que  $0 \leq \eta_r \leq 1$ ,  $\eta_r \equiv 0$  en  $B'$  y  $\eta_r \equiv 1$  en  $\Omega \setminus B$ . Definimos el campo vectorial

$$h(x) = (\eta_r g(x) \odot e_j \odot f(x))_{j=1}^n \in \mathbb{R}_{(n+1)}^{n+1}. \quad (1.8.14)$$

De la Proposición 1.8.1 tendríamos, si  $\mathcal{N}h \in L^1(\partial\Omega)$  y  $\operatorname{div}(h) \in L^1(\Omega)$ , que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(h) dx = \int_{\partial\Omega} h \cdot \nu d\sigma. \quad (1.8.15)$$

Por un lado notamos que

$$h(y) \cdot \nu(y) = g(y) \odot \nu(y) \odot f(y), \quad (1.8.16)$$

que es lo que queremos del lado derecho. Por otro lado afirmamos que  $\operatorname{div}(h) \in C_c^\infty(\Omega)$  y es cero fuera de  $B$ . Esto nos diría que la integral del lado izquierdo en (1.8.15) es igual a

$$\int_B \operatorname{div}(h) dx = \int_{\partial B} h \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial B} g \odot \nu \odot f d\sigma = \sigma_n f(x_0), \quad (1.8.17)$$

donde aplicamos la Proposición 1.8.1 para la primera igualdad, (1.8.16) en la segunda (recordando que  $\eta = 1$  fuera de  $B$ ) y el Teorema 1.8.3 para la última. Combinando todo esto vemos que (1.8.16) se convierte en (1.8.13).

Para probar la afirmación sobre la divergencia calculamos, usando la regla del producto y recordando que  $g$  es monogénica derecha, para  $x \in \Omega \setminus B$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(h)(x) &= \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \odot e_j \odot f(x) + \sum_{k=1}^{n+1} g(x) \odot e_j \odot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) \\ &= (gD)(x) \odot f(x) + g(x) \odot (Df)(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.8.18)$$

Supongamos que  $\Omega$  es acotado. En este caso, dado que  $\eta_r g \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ , tenemos que

$$\mathcal{N}h(y) \leq \|\eta_r g\|_{L^\infty(\Omega)} \mathcal{N}f(y), \quad (1.8.19)$$

por lo que, usando que  $L^p(\partial\Omega) \subset L^1(\partial\Omega)$ , tenemos  $\mathcal{N}h \in L^1(\partial\Omega)$ .

Si  $\Omega$  es el dominio arriba de una gráfica Lipschitz simplemente notamos que, si tomamos  $y_0 \in \partial\Omega$  tal que  $|x_0 - y_0| = \varepsilon$  entonces existe  $C = C(r, \varepsilon)$  tal que para toda  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  con  $|x - x_0| > r/2$  tenemos  $|x - x_0| \geq C(r + |x - y_0|)$ . Por otro lado, para  $x \in \Gamma_\alpha(y)$ , tenemos  $|y - y_0| < (2 + \alpha)|x - y_0|$ . Combinando esto con el hecho  $\eta_r = 0$  en  $B'$  tenemos

$$|\eta_r g(x)| \leq C(r + |y_0 - y|)^{-n} \in L^q(\partial\Omega), \quad q > 1. \quad (1.8.20)$$

Poniendo  $q = p' = p/(p-1)$  concluimos que  $\mathcal{N}h \in L^1(\partial\Omega)$ .

Si  $\Omega$  es un dominio exterior la Proposición 1.8.1 no aplica, pero procedemos de la siguiente manera: Tomamos  $R > 0$  tal que  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega \subset B_R(0)$  y consideramos  $\Omega^R = \Omega \cap B_R(0)$ , que es un dominio Lipschitz acotado. Si denotamos  $\mathcal{N}^R f$  la función maximal no-tangencial respecto de este dominio, tenemos que  $\mathcal{N}^R f(y) \leq \mathcal{N}f(y)$  para  $y \in \partial\Omega$  pues, con notación obvia,  $\Gamma_\alpha^R(y) \subset \Gamma_\alpha(y)$ . Si  $y \in \partial B_R$  entonces  $\Gamma_\alpha^R(y) \subset \subset \Omega$  por lo que  $\mathcal{N}^R f \in L^p(\partial\Omega^R)$ . Aplicando el caso acotado tenemos, para  $x_0 \in \Omega^R$  fijo,

$$\sigma_n f(x_0) = \int_{\partial\Omega} g \odot \nu \odot f d\sigma + \int_{\partial B_R} g \odot \nu_1 \odot f d\sigma, \quad (1.8.21)$$

donde  $\nu_1(y) = y/|y| = y/R$ . Estimamos la segunda integral como sigue

$$\left| \int_{\partial B_R} g \odot \nu_1 \odot f d\sigma \right| \leq \int_{\partial B_R} |x_0 - y|^{-n} |f(y)| d\sigma(y) \leq C \sup_{|y|=R} |f(y)|, \quad (1.8.22)$$

y este último término tiende a 0 cuando  $R \rightarrow \infty$  por hipótesis. El teorema queda probado.  $\square$

## 1.9. Núcleos y operadores de Calderón-Zygmund

**Definición 1.9.1.** Sea  $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{x = y\} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Lipschitz, decimos que  $K$  es un núcleo estándar si

1. Para todas  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq y$ ,

$$|K(x, y)| \leq \frac{C_1}{|x - y|^n}. \quad (1.9.1)$$

2. Para todas  $x, x', y \in \mathbb{R}^n$  con  $|x - x'| \leq \frac{1}{2} \max\{|x - y|, |x' - y|\}$

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq \frac{C_2|x - x'|}{(|x - y| + |x' - y|)^{n+1}}. \quad (1.9.2)$$

3. Para todas  $y, y', x \in \mathbb{R}^n$  con  $|y - y'| \leq \frac{1}{2} \max\{|x - y|, |x - y'|\}$

$$|K(x, y) - K(x, y')| \leq \frac{C_3|y - y'|}{(|x - y| + |x - y'|)^{n+1}}. \quad (1.9.3)$$

**Observación 1.9.1.** Supongamos que tenemos  $|x - x'| \leq 1/2 \max\{|x - y|, |x' - y|\}$  entonces, usando la desigualdad del triángulo invertida y la simetría de la condición,

$$\frac{1}{3}|x - y| \leq |x' - y| \leq 3|x - y|. \quad (1.9.4)$$

En este caso tenemos que la condición 2 es equivalente a

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq C'_2|x - x'||x - y|^{-(n+1)}. \quad (1.9.5)$$

En otras palabras  $K$  es Lipschitz en la primera variable con un control uniforme de la seminorma fuera de la diagonal.

Supongamos que tenemos un operador lineal y continuo

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (1.9.6)$$

**Definición 1.9.2.** Decimos que  $T$  tiene a  $K$  como núcleo asociado si alguna (y por tanto ambas) de las siguientes condiciones se cumple

1. Para todas  $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  con soportes disjuntos

$$\langle Tf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y)g(x)dydx. \quad (1.9.7)$$

2. Para toda  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $x \notin \text{sop}(f)$

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y)dy. \quad (1.9.8)$$

**Observación 1.9.2.** Que las dos son equivalentes se sigue de que si  $r = d(x, \text{sop}(f))$  entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y)dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)||f(y)|dy \leq C_1r^{-n}\|f\|_{L^1}. \quad (1.9.9)$$

Por lo tanto  $Tf \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \text{sop}(f))$ .

Antes de seguir definimos también los núcleos truncados asociados a un núcleo estándar  $K$  como

$$K_\varepsilon(x, y) = K(x, y)1_{|x-y|>\varepsilon}(x, y), \quad \varepsilon > 0. \quad (1.9.10)$$

**Definición 1.9.3.** Sea  $K$  un núcleo estándar. Decimos que  $K$  es antisimétrico si

$$K(x, y) = -K(y, x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9.11)$$

**Proposición 1.9.1.** Sea  $K$  un núcleo antisimétrico, entonces tenemos asociado un operador  $T$ , como en la definición 1.9.2, dado por

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x, y) f(y) g(x) dy dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x, y) (f(y)g(x) - f(x)g(y)) dy dx, \end{aligned} \quad (1.9.12)$$

con  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* La segunda igualdad se da pues  $K_\varepsilon(x, y) = -K_\varepsilon(y, x)$ . La linealidad en  $f, g$  (por separado) es clara. Supongamos que  $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  entonces

$$G(x, y) = (1 + |x|^2 + |y|^2)^{n+1} F(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}), \quad (1.9.13)$$

por lo que, usando el teorema del valor medio tenemos que

$$|G(x, y) - G(y, x)| \leq \sqrt{2}|x - y| \|\nabla G\|_{L^\infty}, \quad (1.9.14)$$

con el gradiente interpretado en ambas variables. Por lo tanto, tenemos

$$|F(x, y) - F(y, x)| \leq \frac{\sqrt{2}|x - y|}{(1 + |x|^2 + |y|^2)^{n+1}} \|\nabla((1 + |x|^2 + |y|^2)^{n+1} F(x, y))\|_{L^\infty}. \quad (1.9.15)$$

Poniendo ahora  $F(x, y) = f(y)g(x)$  se sigue la continuidad de  $T$ .  $\square$

**Observación 1.9.3.** 1. La prueba de hecho da que podemos definir una distribución  $W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  como

$$\langle W, F \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x, y) F(x, y) dy dx, \quad (1.9.16)$$

interpretado de la misma manera que en la proposición. Combinando esto con la definición de un operador asociado a un núcleo vemos que, fuera de la diagonal,  $K = W$  (en el sentido de distribuciones) y tenemos

$$\langle Tf, g \rangle = \langle W, g \otimes f \rangle, \quad (1.9.17)$$

donde  $g \otimes f(x, y) = g(x)f(y)$ .

2. En general no todo núcleo estándar  $K$  se extiende a una distribución  $W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ , por lo que la teoría general empieza con operadores  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y luego emplea el teorema del núcleo de Schwartz (ver [50]) para definir  $W$ . En este caso pedimos que  $W$  coincida con un núcleo estándar fuera de la diagonal.

**Ejemplo 1.9.1.** Notamos que como todo operador acotado  $T : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  se restringe a un operador continuo  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  podemos, en principio, asociarle un núcleo. La observación importante es que el núcleo no determina a  $T$ : Sea  $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  y definimos el operador de multiplicación  $M_b$ . Claramente este es acotado en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , pero si  $x \notin \text{sop}(f)$  entonces  $0 = M_b f(x)$ , i.e.  $M_b$  tiene como núcleo asociado  $K = 0$ .

Claramente, por el lema fundamental de cálculo de variaciones, si  $T$  admite un núcleo asociado este es único.

**Ejemplo 1.9.2.** Sea  $n = 1$  y  $Tf = \frac{df}{dx}$ . De manera análoga al ejemplo anterior, el núcleo asociado a  $T$  es 0. Claramente  $T$  no admite una extensión continua  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ .

**Definición 1.9.4.** Sea  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  continuo con un núcleo estándar asociado  $K$ . Decimos que  $T$  es un **operador de Calderón-Zygmund**, abreviado C-Z, si  $T$  admite una extensión continua a  $L^2(\mathbb{R}^n)$  con norma de operadores  $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_4$ . Definimos la norma de Calderón-Zygmund de  $T$  como<sup>13</sup>

$$\|T\|_{CZ} := C_1 + C_2 + C_3 + C_4. \quad (1.9.18)$$

Dado un operador  $T$  con núcleo asociado  $K$  y dado por la distribución  $W$  como arriba podemos definir el transpuesto de  $T$  como sigue: Primero definimos  $W^t$  como la distribución que actúa de la siguiente manera

$$\langle W^t, F \rangle = \langle W, F^t \rangle, \quad F^t(x, y) = F(y, x), \quad F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}). \quad (1.9.19)$$

Entonces, para  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  definimos  $T^t(f)$  como la distribución

$$\langle T^t(f), g \rangle = \langle T(g), f \rangle. \quad (1.9.20)$$

---

<sup>13</sup>Ver la Definición 1.9.1.

Esto tiene sentido si recordamos que  $\langle T(f), g \rangle = \langle W, g \otimes f \rangle$ . Notamos que  $T^t$  tiene entonces como núcleo asociado a  $K^t$ , donde  $K^t(x, y) := K(y, x)$ . En otras palabras

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K^t(x, y) f(y) dy \quad (1.9.21)$$

para  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $x \notin \text{sop}(f)$ . Claramente  $K$  estándar si y sólo si  $K^t$  lo es.

Como consecuencia de (1.9.20) obtenemos inmediatamente, por dualidad, que  $T$  admite una extensión continua a  $L^2(\mathbb{R}^n)$  si y sólo si  $T^t$  admite una.

Un resultado que será útil a la hora de estimar las extensiones de  $T$  es

**Proposición 1.9.2.** *Sea  $T$  un operador de C-Z con núcleo asociado  $K$ , entonces*

1. *Para toda  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  a soporte compacto y casi toda  $x \notin \text{sop}(f)$*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy. \quad (1.9.22)$$

2. *Para todas  $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  con soportes compactos y ajenos*

$$\langle Tf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) g(x) dy dx. \quad (1.9.23)$$

*Demostración.* Basta mostrar la segunda. Para esto regularizamos  $f, g$  y notamos que, para  $j$  suficientemente grande, estas regularizaciones satisfacen

$$d(\text{sop}(f_j), \text{sop}(g_j)) \geq \frac{1}{2} d(\text{sop}(f), \text{sop}(g)) =: \frac{r}{2} \quad (1.9.24)$$

por lo que la fórmula es válida para  $f_j, g_j$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que estas sucesiones convergen casi en todas partes y en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  por lo que, usando que  $T$  es acotado en  $L^2$ ,

$$\langle Tf_j, g_j \rangle \rightarrow \langle Tf, g \rangle. \quad (1.9.25)$$

Para ver que el lado derecho también converge notamos que, para  $x$  en la unión de los soportes de las  $g_j$  y  $g$ , y análogamente para  $y$ , tenemos

$$|K(x, y) f_j(y) g_j(x)| \leq C_1 \left( \frac{2}{r} \right)^n \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^\infty}. \quad (1.9.26)$$

Como la integración se hace en dos compactos ajenos, por el teorema de convergencia dominada vemos que en verdad converge el lado derecho de la identidad.  $\square$

Ahora, como en el caso clásico de operadores de convolución, queremos ver que podemos hacer con los truncamientos en esta generalidad.

**Definición 1.9.5.** *Dados  $T$  de C-Z y  $K$  su núcleo asociado definimos los truncamientos, para  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < \infty$ ,*

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x, y) f(y) dy, \quad (1.9.27)$$

y el operador maximal asociado

$$T_* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T_\varepsilon f(x)|. \quad (1.9.28)$$

**Observación 1.9.4.** *Se puede probar (ver por ejemplo el Lema 2.2.1) que para  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  tenemos  $T_\varepsilon f \in C(\mathbb{R}^n)$  por lo que  $T_* f$  es semicontinua inferiormente, en particular medible.*

Recordamos que en el caso de operadores de convolución con un núcleo  $K(x, y) = k(x - y)$  donde

$$k(z) = \frac{\Omega(|z|^{-1}z)}{|z|^n} \quad (1.9.29)$$

con  $\Omega : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada de promedio cero, es fácil probar que para  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x) \quad \text{existe para casi toda } x. \quad (1.9.30)$$

De esta manera podíamos definir, al menos formalmente, un operador sin tener que usar tan fuerte distribuciones. En el caso general esto no es posible con las hipótesis que tenemos<sup>14</sup>; sin embargo el siguiente resultado dice que no estamos muy lejos si asumimos que los truncamientos son uniformemente acotados en  $L^2$  (que era justo la condición apropiada en el caso de operadores de convolución para garantizar que  $T := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon$  está bien definido en  $L^2$ ).

**Teorema 1.9.1.** *Sea  $T$  un operador de C-Z y  $K$  su núcleo asociado. Supongamos que existe  $C_5$  tal que para toda  $\varepsilon > 0$*

$$\|T_\varepsilon\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_5. \quad (1.9.31)$$

*Entonces pasa lo siguiente:*

---

<sup>14</sup>Algunos autores piden que este límite exista para  $f \in C_c^\infty$  en la definición de núcleos de C-Z ([9])

1. Existe una subsucesión  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  y un  $T^0$  con  $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_4$  tal que para toda  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_{\varepsilon_j} f(x) g(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} T^0 f(x) g(x) dx \quad (1.9.32)$$

o, en otras palabras,  $T_{\varepsilon_j} f \rightarrow T f$  débilmente en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

2. El núcleo asociado a  $T^0$  es  $K$ . De hecho la distribución  $W$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  coincide con  $K$  fuera de la diagonal (en el sentido de distribuciones).

3. Existe  $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  con  $\|b\|_{L^\infty} \leq C_4 + C_5$  tal que<sup>15</sup>

$$Tf - T^0 f = bf. \quad (1.9.33)$$

Antes de empezar enunciamos un resultado, sin prueba, que dice básicamente que en la topología débil de operadores en  $\mathcal{B}(H) = \{T : H \rightarrow H : T \text{ lineal y continuo.}\}$ , con  $H$  espacio de Hilbert, conjuntos acotados son precompactos.

**Teorema 1.9.2.** Sea  $H$  de Hilbert y  $T_j \in \mathcal{B}(H)$  con  $\|T_j\| \leq C$  entonces existe una subsucesión  $(T_{j_k})$  y  $T \in \mathcal{B}(H)$  tal que, para todas  $f, g \in H$ ,

$$(T_{j_k} f, g)_H \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (T f, g). \quad (1.9.34)$$

Una prueba de este resultado se puede consultar, por ejemplo, en [10].

*Demostración Teorema 1.9.1.* 1 se sigue inmediatamente del teorema anterior. 2 es consecuencia de 1, pues si  $f, g$  tiene soportes ajenos el límite existe como integral absolutamente convergente. Para ver 3 primero afirmamos que para toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y toda  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  a soporte compacto

$$(T - T^0)(fg) = f(T - T^0)(g) \quad (1.9.35)$$

casi en todas partes.

Supongamos cierta la afirmación de momento. Tomando  $0 < r < r'$  y  $g_r = 1_{B_r(0)}$  vemos que

$$(T - T^0)(g_r) = g_r(T - T^0)(g_{r'}), \quad \text{casi en todas partes} \quad (1.9.36)$$

por lo que  $(T - T^0)(g_r) = (T - T^0)(g_{r'})$  en  $B_r$ . Podemos entonces definir

$$b(x) := (T - T^0)(g_r)(x) \quad \text{si } |x| < r. \quad (1.9.37)$$

---

<sup>15</sup>Recordamos que  $C_4 \geq \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}$ .

Tomando ahora  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  soportada en una bola  $B_s$  con  $s > 0$  vemos que

$$\begin{aligned} (T - T^0)(f)(x) &= f(x)(T - T^0)(g_s)(x) = f(x)b(x), & \text{si } |x| < s \\ (T - T^0)(f)(x) &= f(x)(T - T^0)(g_{s'})(x) = f(x)b(x) & \text{si } s < |x| < s'. \end{aligned} \quad (1.9.38)$$

De cualquier manera tenemos que  $(T - T^0)f = bf$  para  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  a soporte compacto. Si para  $k \in \mathbb{N}$  tomamos  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  arbitraria y  $f_k = f1_{B_k}$  entonces, por continuidad de  $T, T^0$ , y pasando a una subsucesión de ser necesario  $(T - T^0)f_k \rightarrow (T - T^0)f$  casi en todas partes. Claramente  $f_k b$  satisface lo mismo por lo que concluimos que  $T - T^0 = b(\cdot)$  en  $L^2$ . Para concluir simplemente notamos que

$$\|bf\|_{L^2} = \|(T - T^0)f\|_{L^2} \leq (C_4 + C_5)\|f\|_{L^2}. \quad (1.9.39)$$

Esto implica que  $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  y que  $\|b\|_{L^\infty} \leq C_4 + C_5$ .

Para probar la afirmación (1.9.35) notamos que basta probarla para  $f$  la característica de un cubo  $Q$ : Por linealidad podemos extender a funciones simples (con cubos) y por continuidad de  $T$  a  $f$  en general.

Sea entonces  $f = 1_Q$ . Sea  $x \in \text{int}(Q)$  y  $2\varepsilon < d(x, \partial Q)$ . Claramente tenemos, como en particular  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $T_\varepsilon g = T_\varepsilon(f1_Q) + T_\varepsilon(f1_{\mathbb{R}^n \setminus Q})$ , pero como  $x \notin \mathbb{R}^n \setminus Q$ , por la fórmula de representación y la elección de  $\varepsilon$  tenemos que

$$T_\varepsilon(f1_{\mathbb{R}^n \setminus Q}) = T(f1_{\mathbb{R}^n \setminus Q}). \quad (1.9.40)$$

Combinando esto concluimos que en este caso

$$(T - T_\varepsilon)(f1_Q)(x) = 1_Q(T - T_\varepsilon)(f)(x) \quad x \in \text{int}(Q), 2\varepsilon < d(x, \partial Q). \quad (1.9.41)$$

Un argumento igual, incluso más directo, nos esta identidad para  $x \notin \bar{Q}$ . Tomando límites débiles (sobre la subsucesión del punto 1) vemos que la identidad vale.  $\square$

**Observación 1.9.5.** 1. Si  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x) =: T^1 f(x)$  existe casi en todas partes para  $f \in C_c^\infty$  entonces es fácil ver que  $T^0 = T^1$ , bajo las hipótesis del teorema anterior.

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |x-y| < 1} K(x, y)f(y)dy &= \int_{\varepsilon < |x-y| < 1} K(x, y)(f(y) - f(x))dy \\ &+ f(x) \int_{\varepsilon < |x-y| < 1} K(x, y)dy, \end{aligned} \quad (1.9.42)$$

y dado que  $f(x) - f(y) = O(|x - y|)$  si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , una condición necesaria y suficiente para que estos límites ( $T^1 f$ ) existan es que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x-y| < 1} K(x, y)dy \quad \text{existe casi para toda } x. \quad (1.9.43)$$

De nuevo en el caso de operadores de convolución esto es obvio pues la integral es 0 para toda  $\varepsilon > 0$ .

Notamos además que, el mismo argumento usado aplica para ver que esta última condición implica que  $T^1 f$  existe para toda  $f = 1_X$  donde  $X$  es un conjunto con frontera de medida cero (por ejemplo bolas o cubos).

2. Por otro lado, si  $K$  es antisimétrico y  $T$  está dado como en la Proposición 1.9.1 entonces por definición tenemos que, independientemente de si  $T$  tiene una extensión a  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\langle T_\varepsilon f, g \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle T f, g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.9.44)$$

En este sentido cambiamos existencia puntual del límite de las  $T_\varepsilon$  por convergencia débil de operadores. La proposición anterior es entonces una justificación de este cambio.

Como corolario de la proposición y la observación tenemos

**Corolario 1.9.1.** *Sea  $T$  un operador de C-Z asociado al núcleo  $0$  entonces  $T = M_b$  para alguna  $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .*

**Proposición 1.9.3.** *Supongamos que  $T$ , de C-Z con núcleo  $K$ , admite una extensión continua  $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$  para algún  $1 \leq p < \infty$  entonces para toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  y casi toda  $x \notin \text{sop}(f)$  tenemos que*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy. \quad (1.9.45)$$

*Demostración.* Primero notamos que la integral en la fórmula anterior es absolutamente convergente: Si  $0 < r = d(x, \text{sop}(f))$  entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| |f(y)| dy \leq \|f\|_{L^p} \left( \int_{\text{sop}(f)} |x - y|^{-p'n} dy \right)^{\frac{1}{p'}} = B < \infty \quad (1.9.46)$$

pues  $p'n > n$  porque  $p < \infty$ .

Definimos

$$E_k := \{y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| \leq k\} \quad (1.9.47)$$

y ponemos  $f_k = 1_{E_k} 1_{B_k(0)}$ , entonces  $f_k$  acotada a soporte compacto y  $\text{sop}(f_k) \subset \text{sop}(f)$  para toda  $k > 0$ . Para estas  $f_k$  sabemos de la Proposición 1.9.2 que la fórmula vale, por lo tanto, para casi toda  $x \notin \text{sop}(f)$ ,

$$Tf_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f_k(y) dy. \quad (1.9.48)$$

Como  $Tf_k \rightarrow Tf$  en  $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$  converge en medida y una subsucesión casi dondequiera, i.e. el lado izquierdo converge a donde debe. Para ver que el lado derecho también converge, notamos que del último cálculo tenemos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)(f_k(y) - f(y))dy \right| \leq B\|f - f_k\|_{L^p} \quad (1.9.49)$$

que es lo que queríamos.

Para el caso  $p = 1$  basta notar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)||f_k(y)|dy \leq \|f\|_{L^1} d(x, \text{sop}(f))^{-n}. \quad (1.9.50)$$

□

Hecho todo este trabajo preliminar, podemos pasar de lleno a estudiar las posibles extensiones de  $T$  a los espacios  $L^p$ ,  $p \neq 2$ . Primero notamos que no es razonable esperar continuidad  $L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $p = 1, \infty$  en general pues ya en la transformada de Hilbert, dada por

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy, \quad (1.9.51)$$

tenemos que

$$H1_{(a,b)}(x) = \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| \quad (1.9.52)$$

por lo que  $H(L^p) \not\subset L^p$  para  $p = 1, \infty$ . De hecho este ejemplo muestra también que si  $H : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$  entonces  $p = q$ .

**Teorema 1.9.3.** *Sea  $T$  un operador de C-Z con núcleo asociado  $K$  entonces  $T$  se extiende a un operador acotado*

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n). \quad (1.9.53)$$

*Demostración.* Sea  $f \in L^1 \cap L^2$  y  $\lambda > 0$ . Usando la descomposición de Calderón-Zygmund (ver Teorema 1.2.4 y Corolario 1.2.2) podemos encontrar una familia numerable  $\mathcal{B}$  de cubos  $Q_j$  con interiores ajenos tal que

1.  $|f| \leq \lambda$  fuera de  $\cup_j Q_j$ .
2.  $\lambda < f_{Q_j} \leq 2^n \lambda$  donde

$$f_Q = \int_{Q_j} |f|. \quad (1.9.54)$$

3.  $\|g\|_{L^2} \leq 2^n \lambda \|f\|_{L^1}$  donde

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \cup_j Q_j \\ \int_{Q_j} f & \text{si } x \in Q_j \end{cases} \quad (1.9.55)$$

4.  $b = f - g$  satisface  $b = \sum_j b_j$  con  $b_j = b1_{Q_j}$  y  $\int_{Q_j} b_j = 0$  para toda  $j$ .

5.

$$\left| \bigcup_j Q_j \right| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1}. \quad (1.9.56)$$

Estimamos

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| &\leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \\ &\quad + \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \\ &= A + B. \end{aligned} \quad (1.9.57)$$

Estimar  $A$  es sencillo pues  $T$  es acotado en  $L^2$  por lo que, usando 3 y la desigualdad de Chebyshev,

$$A \leq \left( \frac{2\|Tg\|_{L^2}}{\lambda} \right)^2 \leq 4C_4^2 \frac{\|g\|_{L^2}^2}{\lambda^2} \leq C(n)C_4^2 \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}. \quad (1.9.58)$$

Para estimar  $B$  primero notamos que, crudamente,

$$\begin{aligned} B &\leq |\cup_j 2Q_j| + \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j 2Q_j : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \\ &= B_1 + B_2. \end{aligned} \quad (1.9.59)$$

Claramente, por 5 y el hecho de que  $1_{\cup_j Q_j} = \sum 1_{Q_j}$  casi dondequiera, tenemos la estimación para  $B_1$

$$B_1 \leq C(n) \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}. \quad (1.9.60)$$

De nuevo por la desigualdad de Chebyshev tenemos

$$B_2 \leq \frac{2}{\lambda} \|Tb\|_{L^1(\mathbb{R}^n \setminus \cup_j 2Q_j)} \leq \frac{2}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \|Tb_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j)}, \quad (1.9.61)$$

por lo que bastaría mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j} |Tb_j(x)| dx \leq C \int_{Q_j} |b_j(x)| dx. \quad (1.9.62)$$

Para ver esto primero definimos  $z_j$  el centro del cubo  $Q_j$  entonces, de que  $b_j$  tiene promedio 0 y la fórmula de representación, válida para  $x \notin 2Q_j$ , vemos

$$Tb_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (K(x, y) - K(x, z_j)) b_j(y) dy. \quad (1.9.63)$$

Dado que  $y \in Q_j$ ,  $|y - z_j| \leq \frac{1}{2} \max\{|x - y|, |x - z_j|\}$  (ver figura 1.2) por lo que, por la segunda propiedad de núcleos estándar tenemos

$$\begin{aligned} |Tb_j(x)| &\leq C_2 \int_{Q_j} \frac{|y - z_j|}{(|x - z_j| + |x - y|)^{n+1}} |b_j(y)| dy \\ &\leq C_2 \int_{Q_j} \frac{|y - z_j|}{|x - z_j|} |b_j(y)| dy. \end{aligned} \quad (1.9.64)$$

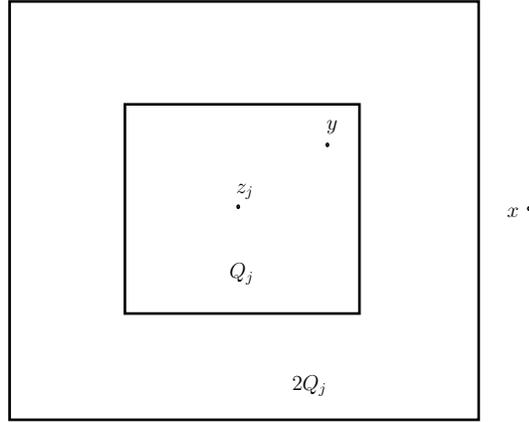


Figura 1.2: Posición de  $x, y, z_j$

Ahora, integrando esta última desigualdad sobre  $\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j$  y usando Fubini, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j} |Tb_j(x)| dx \leq C_2 \int_{Q_j} |b_j(y)| |y - z_j| \left( \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j} \frac{dx}{|x - z_j|^{n+1}} \right) dy. \quad (1.9.65)$$

Si  $r_j = \ell(Q_j)$  entonces  $B^j := B_{r_j}(z_j) \subset Q_j$  por lo que la integral en el paréntesis está dominada por

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B^j} \frac{dx}{|x - z_j|^{n+1}} = C(n) \int_{r_j}^{\infty} t^{-2} dt = C(n)r_j^{-1}. \quad (1.9.66)$$

Como  $|y - z_j| \leq \sqrt{n}r_j$  vemos que entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j} |Tb_j(x)| dx \leq C(n)C_2 \int_{Q_j} |b_j(y)| dy. \quad (1.9.67)$$

Combinando todo esto tenemos que

$$B_2 \leq \frac{1}{\lambda} C(n)C_2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} |b_j(y)| dy = \frac{1}{\lambda} C(n)C_2 \|f\|_{L^1}. \quad (1.9.68)$$

Esto nos dice que para toda  $f \in L^2 \cap L^1$  existe  $C = C(n, \|T\|_{CZ}) > 0$  tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1}. \quad (1.9.69)$$

Ver que esto implica que el operador se extiende a  $L^1(\mathbb{R}^n)$  es fácil pues si  $f_k \rightarrow f$  entonces  $Tf_k$  es Cauchy en medida, por lo que existe  $\lim_{k \rightarrow \infty} Tf_k = g =: Tf$  y satisface

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| &\leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |T(f - f_k)(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \\ &\quad + \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |Tf_k(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \\ &\leq o(1) + \frac{2C}{\lambda} \|f_k\|_{L^1} \rightarrow \frac{2C}{\lambda} \|f\|_{L^1}. \end{aligned} \quad (1.9.70)$$

Además, dado que dada una sucesión convergente en medida existe una subsucesión que converge casi en todas partes, vemos que las definiciones de  $T$  coinciden en  $L^1 \cap L^2$ .  $\square$

**Observación 1.9.6.** Dado que  $K$  es un núcleo de C-Z si y sólo si  $K^t$  lo es, vemos que  $T^t$  también admite una extensión a  $L^1$ .

La consecuencia obvia del teorema y la observación es la siguiente

**Corolario 1.9.2.** *Si  $K$  es de C-Z y  $T$  su operador asociado entonces  $T$  admite una extensión continua*

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty. \quad (1.9.71)$$

*Demostración.* El caso  $1 < p < 2$  es consecuencia del teorema de interpolación de Marcinkiewicz (Teorema 1.2.2). Por la observación lo mismo vale para  $T^t$  que es el dual de  $T$  en este caso por lo tanto  $T^{tt} = T$  es acotado en  $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$  para toda  $1 < p < 2$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

Otra aplicación interesante del teorema anterior es el siguiente resultado que, en cierto sentido, nos da un control del operador maximal  $T_*$  en términos de  $T$ .

**Corolario 1.9.3.** *Sean  $K$  de C-Z y  $T$  su operador asociado entonces existe una constante  $C > 0$ , que sólo depende que  $\|T\|_{CZ}$  y  $n$  tal que para toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*

$$T_*f(x) \leq C(\mathcal{M}(Tf)(x) + \mathcal{M}f(x)). \quad (1.9.72)$$

*Demostración.* Fijamos  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\varepsilon > 0$ . Definimos  $f_1(y) = f(y)1_{|x-y| \leq \varepsilon}(y)$ ,  $f_2 = f - f_1$  y  $B = B_{\varepsilon/10}(x)$ . Tomamos  $z \in B$ . Afirmamos que existe  $C$  tal que

$$|Tf_2(z) - Tf_2(x)| \leq C\mathcal{M}f(x). \quad (1.9.73)$$

Para ver esto notamos que  $g(y) = \min\{\varepsilon|y|^{-(n+1)}, \varepsilon^{-n}\}$  es radial, no negativa, y  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  con  $\|g\|_{L^1}$  que no depende de  $\varepsilon$ , por lo que el Teorema 1.2.1 aplica y tenemos (recordando la fórmula de representación de la Proposición 1.9.3)

$$\begin{aligned} |Tf_2(z) - Tf_2(x)| &\leq \int_{|x-y| > \varepsilon} |K(x, y) - K(z, y)| |f(y)| dy \\ &\leq C(n)(C_1 + C_2) \int_{|x-y| > \varepsilon} \min\left\{ \frac{\varepsilon}{|x-y|^{n+1}}, \varepsilon^{-n} \right\} |f(y)| dy \\ &\leq C(n)(C_1 + C_2)\mathcal{M}f(x), \end{aligned} \quad (1.9.74)$$

donde usamos la primera y segunda condición en la definición de núcleo estándar para la segunda desigualdad. Esto demuestra la afirmación. Con esto vemos que

$$|T_\varepsilon f(x)| \leq |Tf_2(z)| + C'\mathcal{M}f(x) \leq |Tf(z)| + |Tf_1(z)| + C'\mathcal{M}f(x). \quad (1.9.75)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\lambda = |T_\varepsilon f(x)| > 3C'\mathcal{M}f(x)$ , y en este caso, si definimos

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ z \in B : |Tf(z)| > \frac{\lambda}{3} \right\} \\ E_2 &= \left\{ z \in B : |Tf_1(z)| > \frac{\lambda}{3} \right\}, \end{aligned} \quad (1.9.76)$$

tenemos que  $B = E_1 \cup E_2$ , pues si  $z$  no está en ninguno tendríamos

$$|T_\varepsilon f(x)| \leq \frac{2}{3}|T_\varepsilon f(x)| + C'\mathcal{M}f(x) \quad (1.9.77)$$

que contradice nuestra suposición.

Por la desigualdad de Chebyshev tenemos

$$|E_1| \leq \frac{3}{\lambda} \int_B |Tf(y)| dy \leq \frac{3|B|}{\lambda} \int_B |Tf(y)| dy \leq \frac{3|B|}{\lambda} \mathcal{M}Tf(x). \quad (1.9.78)$$

Por otro lado, dado que  $T$  es (1,1) débil calculamos

$$|E_2| \leq \frac{\|T\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}}}{\lambda} \|f_1\|_{L^1} \leq \frac{\|T\|_{1 \rightarrow 1, \infty} |B|}{\lambda} \mathcal{M}f(x). \quad (1.9.79)$$

Sumando estas dos ecuaciones, y observando que

$$1 \leq \frac{|E_1|}{|B|} + \frac{|E_2|}{|B|}, \quad (1.9.80)$$

concluimos que  $\lambda \leq C(\mathcal{M}(Tf)(x) + \mathcal{M}f(x))$ . Como  $C$  no depende de  $\varepsilon$  el resultado sigue.  $\square$

**Corolario 1.9.4.** *Para toda  $1 < p < \infty$  existe  $C = C(n, p, \|T\|_{CZ})$  tal que*

$$\|T_*f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}. \quad (1.9.81)$$

*En particular los truncamientos  $T_\varepsilon$  están uniformemente acotados, por lo que el Teorema 1.9.1 aplica.*

**Corolario 1.9.5.** *Sea  $T$  un operador asociado a un núcleo antisimétrico  $K$ . Entonces son equivalentes*

1.  $T$  admite una extensión continua a  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

2. Existe  $C > 0$  tal que para toda  $\varepsilon > 0$  tenemos  $\|T_\varepsilon\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C$ .

*Demostración.* Que 1 implica 2 es consecuencia del corolario anterior. Para la otra dirección, de la Observación 1.9.5, tenemos que, como  $\|T_\varepsilon\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C$  entonces  $T : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  y por dualidad tenemos que  $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C$ .  $\square$

Con todo esto vemos que el problema principal para operadores con núcleos estándar es probar que son acotados en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Esto no es tarea sencilla. En el caso de operadores de convolución teníamos la transformada de Fourier pero en nuestra generalidad esta herramienta no aplica (al menos no de manera tan clara). Para resolver este problema se han desarrollado varios métodos generales, por ejemplo el de casi-ortogonalidad de Cotlar-Stein o el de ondoletas. Como nuestro interés es en operadores muy particulares, sin embargo, los métodos usados en este trabajo son un tanto ad-hoc.

## 1.10. El método de rotaciones

En esta sección introducimos el llamado método de rotaciones de Calderón. En esencia esto consiste en reducir el estudio de operadores  $T$  en  $\mathbb{R}^n$  asociado a un núcleo antisimétrico al de operadores en  $\mathbb{R}$  con cierto control uniforme sobre las estimaciones. Esto lo hacemos escribiendo  $Tf$  como el promedio de  $Tf(x' + r\theta)$  sobre todas las posibles direcciones  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$  y  $x' \in \mathbb{R}^n$ , obviamente con ayuda de coordenadas polares.

Empezamos con la definición de los núcleos que serán de nuestro interés. Sean  $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones Lipschitz entonces ponemos

$$N(x, y) = \frac{A(x) - A(y)}{(|x - y|^2 + |B(x) - B(y)|^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (1.10.1)$$

**Proposición 1.10.1.**  $N$  es un núcleo estándar.

*Demostración.* Claramente  $N$  satisface la primera propiedad con  $C_1 \leq \|\nabla A\|_{L^\infty}$ . La antisimetría también es obvia.

Para ver la tercera notamos que basta probarlo para  $A, B \in C^\infty$  si podemos demostrar que  $C_2 = C(\|\nabla A\|_{L^\infty}, \|\nabla B\|_{L^\infty})$ , pues un argumento como en la prueba del Teorema 1.2.1 nos da el resultado en general<sup>16</sup>.

<sup>16</sup>En otras palabras regularizamos, notando que la convolución con funciones de promedio 1 preservan módulos de continuidad.

Primero probamos que existe  $C$  como arriba tal que

$$|\nabla_x N(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{n+1}}. \quad (1.10.2)$$

Obviamente lo tedioso es calcular la derivada. Para no ofuscar con cuentas gigantes dividimos la derivada en partes. Sean, con  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\partial_i A(x)}{(|x - y|^2 + |B(x) - B(y)|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \\ I_2 &= A(x) - A(y), \\ I_3 &= (|x - y|^2 + |B(x) - B(y)|^2)^{-\frac{n+1}{2}-1}, \\ I_4 &= 2(x_i - y_i) + 2(B(x) - B(y))\partial_i B(x), \end{aligned} \quad (1.10.3)$$

entonces

$$\partial_i N(x, y) = I_1 + I_2 I_3 I_4. \quad (1.10.4)$$

Tenemos las estimaciones claras

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{\|\nabla A\|_\infty}{|x - y|^{n+1}}, \\ |I_2| &\leq \|\nabla A\|_\infty |x - y|, \\ |I_3| &\leq |x - y|^{-n-3}, \\ |I_4| &\leq 2|x - y| + 2\|\nabla B\|_\infty^2 |x - y|. \end{aligned} \quad (1.10.5)$$

Juntando todo esto la afirmación queda probada.

Para pasar a la desigualdad original usamos el teorema del valor medio que nos dice, si  $[x, x']$  denota el segmento de recta entre  $x, x'$ ,

$$|N(x, y) - N(x', y)| \leq \sup_{z \in [x, x']} \|\nabla_x N(z, y)\|_\infty |x - x'| \leq C \sup_{z \in [x, x']} \frac{|x - x'|}{|z - y|^{n+1}}. \quad (1.10.6)$$

Para que esto esté justificado tenemos que garantizar  $y \notin [x, x']$  y aquí es donde usamos la condición sobre  $|x - x'|$ . Supongamos entonces que  $z = tx + (1-t)x'$  para alguna  $t \in [0, 1]$ , entonces por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\begin{aligned} |z - y| &\geq |y - x| - |x - z| = |y - x| - (1-t)|x - x'| \geq |y - x| - |x - x'| \\ &\geq |y - x| - \frac{1}{2} \max\{|y - x|, |x' - y|\} \geq \frac{1}{2}|y - x|. \end{aligned} \quad (1.10.7)$$

Intercambiando  $x$  por  $x'$  llegamos a que

$$|z - y| \geq \frac{1}{2} \max\{|x - y|, |x' - y|\} \geq \frac{1}{4} (|x - y| + |x' - y|) > 0, \quad (1.10.8)$$

por lo que concluimos que, por un lado es válido usar el teorema del valor medio y además

$$|N(x, y) - N(x', y)| \leq 4^{n+1} C \frac{|x - x'|}{(|x - y| + |x' - y|)^{n+1}}, \quad (1.10.9)$$

donde  $C$  es la constante que aparece en la estimación del gradiente de  $N$ .  $\square$

La idea ahora es reducir el estudio de los operadores

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_\varepsilon(x, y) f(y) dy \quad (1.10.10)$$

al estudio de ciertos operadores la recta real. Haremos la reducción en general aunque después especializamos a casos particulares de  $A$ .

Para empezar notamos que

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|z|>\varepsilon} N(x, x+z) f(x+z) dz = \int_{|z|>\varepsilon} N(x, x-z) f(x-z) dz \quad (1.10.11)$$

por lo que, cambiando a coordenadas polares, tenemos

$$\begin{aligned} T_\varepsilon f(x) &= \int_{|r|>\varepsilon} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} N(x, x+r\theta) f(x+r\theta) |r|^{n-1} d\theta dr \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{|r|>\varepsilon} N(x, x+r\theta) f(x+r\theta) |r|^{n-1} dr d\theta. \end{aligned} \quad (1.10.12)$$

Fijamos  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$  y consideramos

$$E_\theta := \{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot \theta = 0\}, \quad (1.10.13)$$

en otras palabras,  $E_\theta$  es el complemento ortogonal de  $\theta$ . Si escribimos  $x = x' + t\theta$  (con  $x' \in E_\theta$  y  $t \in \mathbb{R}$  únicos) entonces la identidad se convierte en

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{|r|>\varepsilon} N(x' + t\theta, x' + (t+r)\theta) f(x' + (t+r)\theta) |r|^{n-1} dr d\theta \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{|t-s|>\varepsilon} N(x' + t\theta, x' + s\theta) f(x' + s\theta) |t-s|^{n-1} ds d\theta. \end{aligned} \quad (1.10.14)$$

Esto sugiere que definamos

$$T_\varepsilon^{x',\theta} f(t) = \int_{|t-s|>\varepsilon} N(x' + t\theta, x' + s\theta) f(x' + s\theta) |t-s|^{n-1} ds \quad (1.10.15)$$

Supongamos ahora que existe una constante  $C > 0$ , que no depende de  $x', \theta$  tal que

$$\|T_\varepsilon^{x',\theta} f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f(x' + (\cdot)\theta)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (1.10.16)$$

entonces, por la desigualdad integral de Minkowski y el teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left( \int_{E_\theta} \int_{\mathbb{R}} |T_\varepsilon f(x' + t\theta)|^2 dt dx' \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{E_\theta} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{S}^n} T_\varepsilon^{x',\theta} f(t) d\theta \right|^2 dt dx' \right)^{1/2} \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^n} \left( \int_{E_\theta} \int_{\mathbb{R}} |T_\varepsilon^{x',\theta} f(t)|^2 dt dx' \right)^{1/2} d\theta \quad (1.10.17) \\ &\leq C \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left( \int_{E_\theta} \|f(x' + (\cdot)\theta)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dx' \right)^{1/2} d\theta \\ &= C \int_{\mathbb{S}^n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\theta = C' \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Resumimos esto en el siguiente

**Teorema 1.10.1** (Método de Rotaciones). *Sea  $T$  un operador con núcleo asociado, antisimétrico,  $K$ . Para cada  $x' \in \mathbb{R}^n$  y  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$  sea  $T^{x',\theta}$  un operador con núcleo*

$$K^{x',\theta}(t, s) = K(x' + t\theta, x' + s\theta) |t-s|^{n-1}. \quad (1.10.18)$$

*Supongamos que existe  $C > 0$ , que no depende de  $x', \theta$  tal que*

$$\|T^{x',\theta} f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (1.10.19)$$

*Entonces  $T$  es un operador de C-Z y  $\|T\|_{CZ} \approx \|T^{x',\theta}\|_{CZ}$ .*

*En otras palabras si  $\|T^{x',\theta}\|_{CZ} \leq C'$  uniformemente en  $x', \theta$  entonces  $T$  es admite una extensión continua a  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

*Demostración.* Por el Corolario 1.9.5 tenemos que basta probar que los truncamientos  $T_\varepsilon$  están uniformemente acotados, pero esto es justo lo que hicimos pues, de nuevo por el mismo resultado, tenemos que  $T_\varepsilon^{x',\theta}$  forman un conjunto acotado en los operadores  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  (con cota que no depende de  $\varepsilon, x', \theta$ ).  $\square$

Regresando al caso particular de un núcleo  $N$  dado por (1.10.1), nos fijaremos solamente en dos casos especiales:

1.  $A$  es lineal
2.  $A = B$

Como se verá cuando definamos el operador de Cauchy, esto es suficiente para nuestros propósitos. Supongamos entonces que estamos en el primer caso. Escribimos

$$N(x' + t\theta, x' + s\theta) = \frac{(t-s)A(\theta)}{|t-s|^{n+1} \left(1 + \frac{|B(x'+t\theta) - B(x'+s\theta)|^2}{|t-s|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (1.10.20)$$

por lo que si ponemos  $F(z) = (1+z^2)^{-\frac{n+1}{2}}$  con  $z \in \mathbb{C}$  entonces

$$T_\varepsilon^{x',\theta} f(t) = \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{A(\theta)}{t-s} F\left(\frac{B(x'+t\theta) - B(x'+s\theta)}{t-s}\right) f(x'+s\theta) ds \quad (1.10.21)$$

Notamos además por un lado que para  $x', \theta$  fijos el mapeo  $r \mapsto B(x'+r\theta)$  es Lipschitz con la misma (o menor) constante que  $B$ , por lo que podemos poner<sup>17</sup>

$$T_\varepsilon^{x',\theta} f(t) = \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{A(\theta)}{t-s} F\left(\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t-s}\right) f(x'+s\theta) ds. \quad (1.10.22)$$

Por otro lado, un cálculo análogo para el segundo caso muestra que tenemos una representación de la forma

$$T_\varepsilon^{x',\theta} f(t) = \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{1}{t-s} F\left(\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t-s}\right) f(x'+s\theta) ds \quad (1.10.23)$$

donde, en este caso,  $F(z) = z(1+z^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ .

**Teorema 1.10.2.** *Sea  $F : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en una vecindad de  $\mathbb{R}$  y  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función Lipschitz con  $\|\varphi'\|_{L^\infty} = M$ . Definimos el núcleo*

$$N'(t, s) = \frac{1}{t-s} F\left(\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t-s}\right). \quad (1.10.24)$$

Entonces los operadores

$$T_\varepsilon f(t) = \int_{\mathbb{R}} N'_\varepsilon(t, s) f(s) ds, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.10.25)$$

están uniformemente acotados en  $L^2(\mathbb{R})$ .

<sup>17</sup>Notamos además que como  $A$  es lineal  $|A(\theta)| \leq \|\nabla A\|_\infty$ , por lo que podemos ignorar la dependencia en  $\theta$  de este término.

Antes de comenzar la prueba definimos la versión del operador de Cauchy que usaremos: Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz con  $\|g'\|_{L^\infty} = M$ . Ponemos

$$\mathcal{C}_\varepsilon^g f(t) = \int_{|s-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{t-s+i(g(t)-g(s))} ds, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.10.26)$$

En el capítulo 2 se probará que  $\|\mathcal{C}_\varepsilon^g\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C = C(\|g'\|_{L^\infty})$ .

*Demostración.* Notamos primero que para toda  $s, t \in \mathbb{R}$

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t-s} \in [-M, M]. \quad (1.10.27)$$

Dado  $r > 0$  consideremos la curva  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  dada por la frontera del rectángulo  $[-M-r, M+r] \times [-r, r] \subset U$  recorrida en sentido opuesto a las manecillas del reloj (ver figura 1.3).

Ahora, de la fórmula integral de Cauchy tenemos, para  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} T_\varepsilon f(t) &= \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{f(s)}{t-s} \int_\Gamma \frac{F(w)}{w - \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}} dw ds \\ &= \int_\Gamma F(w) \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{f(s)}{w(t-s) - (\varphi(t) - \varphi(s))} ds dw \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} F(w) \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{f(s)}{w(t-s) - (\varphi(t) - \varphi(s))} ds dw. \end{aligned} \quad (1.10.28)$$

Basta entonces estimar la norma  $L^2$  de los operadores

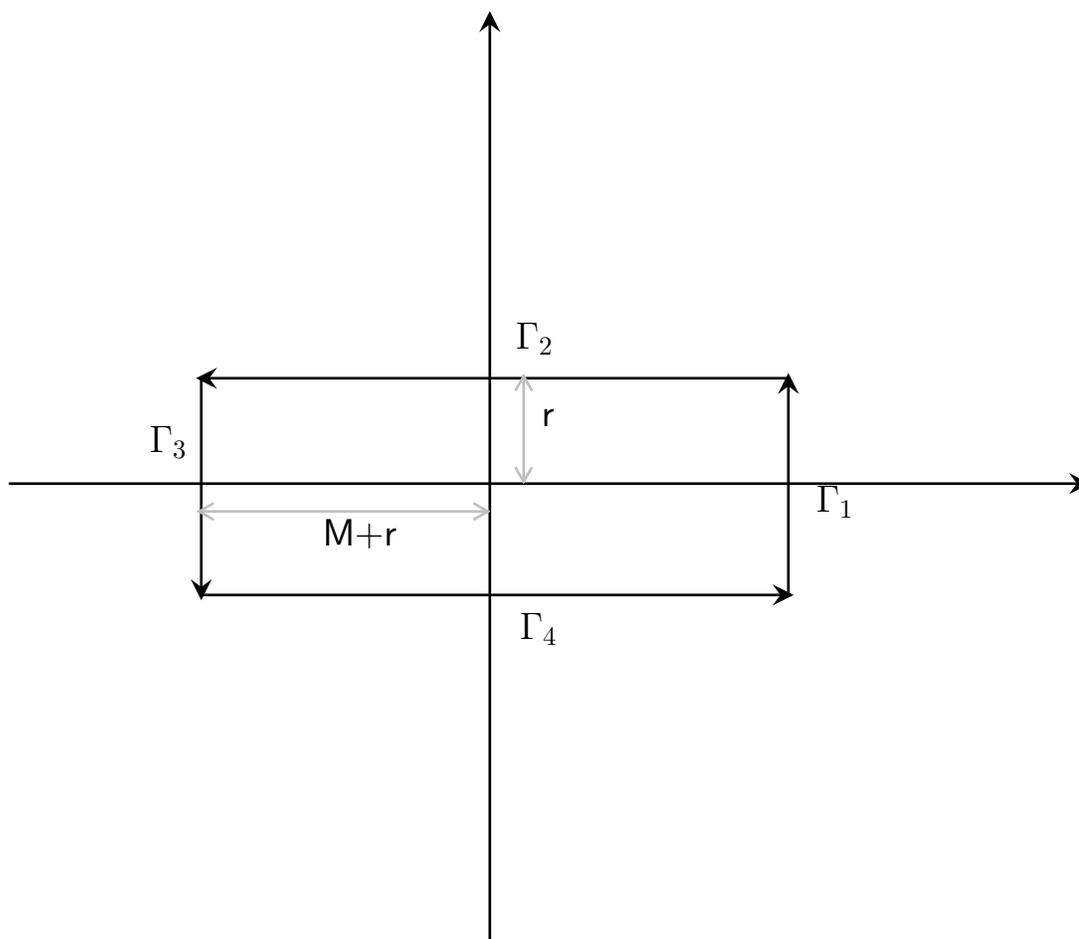
$$T_\varepsilon^w f(t) = \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{f(s)}{w(t-s) - (\varphi(t) - \varphi(s))} ds \quad (1.10.29)$$

uniformemente en  $\varepsilon > 0$  y  $w \in \Gamma$ . Hacemos esto por casos:

1.  $w \in \Gamma_1$ .

En este caso  $w = M+r+i\tau$  para  $\tau \in [-r, r]$ . Si consideramos  $\psi(x) = (M+r)x - \varphi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  entonces tenemos

- (a)  $r \leq \psi'(x) \leq 2M+r$ .
- (b)  $\psi$  es estrictamente creciente.
- (c)  $\psi(x) \rightarrow \pm\infty$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

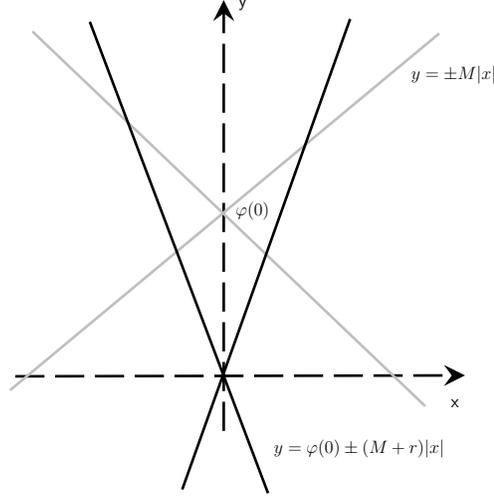
Figura 1.3: La curva  $\Gamma$ .

La primera es obvia pues, por definición de  $M$  tenemos  $-M \leq \varphi'(x) \leq M$ . Supongamos que existen  $x, y$  con  $\psi(x) = \psi(y)$ . Sin pérdida de generalidad podemos poner  $x = \eta + y$  para algún  $\eta > 0$  por lo que, poniendo esto en la igualdad llegamos a que, por un lado  $\varphi(x) > \varphi(y)$ , y además

$$|\varphi(\eta + y) - \varphi(y)| = \varphi(\eta + y) - \varphi(y) = (M + r)\eta \quad (1.10.30)$$

que contradice la definición de  $M$ .

Para ver la tercera basta notar que  $\varphi$  está entre las gráficas de  $\varphi(0) \pm M|x|$  (ver figura 1.4) por lo que  $\psi(x) \geq \varphi(0) + rx$  para  $x > 0$  y  $\psi(x) \leq \varphi(0) + rx$  para  $x < 0$ . Con esto concluimos que  $\psi$  es un homeomorfismo bi-Lipschitz y además  $(2M + r)^{-1} \|(\psi^{-1})'\|_{L^\infty} \leq r^{-1}$ .

Figura 1.4: Conos asociados a  $\varphi$ ,  $\psi$ .

Con la definición de  $w$  y lo anterior escribimos

$$\begin{aligned} w(t-s) - (\varphi(t) - \varphi(s)) &= (M+r+i\tau)(t-s) - (\varphi(t) - \varphi(s)) \\ &= \psi(t) - \psi(s) + i\tau(t-s). \end{aligned} \quad (1.10.31)$$

Haciendo el cambio de variable  $s \mapsto \psi^{-1}(s)$  en la integral de definición de  $T_\varepsilon^w f$  obtenemos

$$T_\varepsilon^w f(t) = \int_{|t-\psi^{-1}(s)|>\varepsilon} \frac{f(\psi^{-1}(s))(\psi^{-1})'(s)}{\psi(t) - s + i\tau(\psi^{-1}(\psi(t)) - \psi^{-1}(s))} ds. \quad (1.10.32)$$

Poniendo  $t' = \psi(t)$  tenemos que la integral de arriba es igual a

$$\int_{|\psi^{-1}(t')-\psi^{-1}(s)|>\varepsilon} \frac{f(\psi^{-1}(s))(\psi^{-1})'(s)}{t' - s + i\tau(\psi^{-1}(t') - \psi^{-1}(s))} ds. \quad (1.10.33)$$

El término  $(\psi^{-1})'$  no causa problemas pues está acotado por arriba y por abajo por constantes que sólo dependen de  $M, r$ , por lo que lo puede absorber  $f$ . El teorema de cambio de variable y el argumento anterior nos dan que  $\|f\|_{L^2} \approx \|f \circ \psi^{-1}\|_{L^2}$  (con constantes que sólo dependen de  $r, M$ ). Esto nos dice que basta fijarnos en los operadores

$$\int_{|\psi^{-1}(t')-\psi^{-1}(s)|>\varepsilon} \frac{f(s)}{t' - s + i\tau(\psi^{-1}(t') - \psi^{-1}(s))} ds =: S_\varepsilon f(t'). \quad (1.10.34)$$

Esto es casi un truncamiento de la integral de Cauchy, excepto por el dominio de integración. El siguiente paso es ver que esto no causa problemas. En otras palabras, la diferencia de este operador con el operador de Cauchy está controlada en  $L^2(\mathbb{R})$  o, más concretamente,

$$|S_\varepsilon f(t) - \mathcal{C}_\varepsilon^g f(t)| \leq C(M, r)\mathcal{M}f(t) \quad (1.10.35)$$

donde  $g = \tau\psi^{-1}$ .

Para probar esto primero notamos que, para  $s, t \in \mathbb{R}$ ,

$$\|\psi'\|_{L^\infty}^{-1}|t-s| \leq |\psi^{-1}(t) - \psi^{-1}(s)| \leq \|(\psi^{-1})'\|_\infty|x-y| \quad (1.10.36)$$

por lo que tenemos la siguiente inclusión

$$\begin{aligned} & \{s : |t-s| \leq \varepsilon < |\psi^{-1}(t) - \psi^{-1}(s)|\} \cup \{s : |\psi^{-1}(t) - \psi^{-1}(s)| \leq \varepsilon < |t-s|\} \\ & \quad \cap \\ & \{s : \min\{1, \|(\psi^{-1})'\|_{L^\infty}^{-1}\}\varepsilon \leq |t-s| \leq \max\{1, \|\psi'\|_{L^\infty}\}\varepsilon\}. \end{aligned} \quad (1.10.37)$$

Por lo tanto tenemos constantes  $c, c'$  que sólo dependen de  $M, r$  tal que

$$\begin{aligned} |S_\varepsilon f(t) - \mathcal{C}_\varepsilon^g f(t)| & \leq \int_{c\varepsilon \leq |t-s| \leq c'\varepsilon} \frac{|f(s)|}{|t-s + i(g(t) - g(s))|} ds \\ & \leq (c\varepsilon)^{-1} \int_{|t-s| \leq c'\varepsilon} |f(s)| ds \leq C\mathcal{M}f(t) \end{aligned} \quad (1.10.38)$$

y la afirmación queda probada. Entonces la acotabilidad uniforme, en  $\varepsilon, \tau$  es consecuencia del correspondiente resultado para los truncamientos de  $C^g$ .

2.  $w \in \Gamma_2$ .

En este caso  $w = \tau + ir$  para  $|\tau| \leq M + r$ . Sustituyendo vemos que

$$w(t-s) - (\varphi(t) - \varphi(s)) = r \left( t-s + i \frac{\varphi(t) + \tau t - (\varphi(s) + \tau t)}{r} \right) \quad (1.10.39)$$

entonces, si definimos  $\psi(x) = r^{-1}(\varphi(x) + \tau x)$  tenemos que  $\|\psi'\|_\infty \leq r^{-1}(2M + r)$ , por lo que el resultado sigue de nuevo por el análogo de la integral de Cauchy.

Los demás casos son análogos. Por lo tanto la constante  $C$  del teorema sólo depende de  $M, U, \|F\|_{L^\infty}$ .  $\square$

**Corolario 1.10.1.** Sean  $A, B$  funciones Lipschitz en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $A$  es lineal o  $A = B$ . Entonces los operadores, definidos como en la Proposición 1.9.1, con núcleo

$$N(x, y) = \frac{A(x) - A(y)}{(|x - y|^2 + |B(x) - B(y)|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad (1.10.40)$$

son operadores de C-Z.



# Capítulo 2

## El operador de Cauchy

En este capítulo introducimos los operadores de Cauchy en  $\mathbb{C}$  y de Cauchy-Clifford en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Probamos que estos operadores son acotados en los espacios  $L^p$  respectivos y deducimos las llamadas fórmulas de Plemelj-Sokhotskij. Probamos también una estimación para la función maximal no-tangencial de la integral de Cauchy de una función en la frontera.

La integral de Cauchy en  $\mathbb{C}$  aparece de varias maneras. Dos formas son particularmente importantes para nosotros:

1. Supongamos que  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es un dominio Lipschitz acotado y sea  $\Gamma = \partial\Omega$ . Sabemos que si  $F \in C(\bar{\Omega})$  es holomorfa en  $\Omega$  entonces (ver sección 1.7)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega. \quad (2.0.1)$$

Ahora definimos, para  $f \in L^1(\Gamma)$ ,

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega. \quad (2.0.2)$$

Por un lado nos preguntamos si  $F$  tendrá límites en  $\Gamma$  en algún sentido. Esto es cierto, ver Teorema 2.1.1. La siguiente pregunta es cuando estos límites coinciden con  $f$  y si podemos encontrar una fórmula general para estos. La respuesta es que si  $f \in L^p(\Gamma)$  para algún  $1 < p < \infty$  entonces  $F|_{\Gamma} = f$  si y sólo si  $f \in H_+^p(\Gamma)$  (ver capítulo 4) y la fórmula general viene dada en el Teorema 2.1.1. El operador  $f \mapsto F|_{\Gamma}$  es una versión del operador de Cauchy.

2. Recordamos la transformada de Hilbert de una función  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , dada por

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.0.3)$$

Podemos ver a  $H$  como el operador con núcleo  $K(x, y) = (x - y)^{-1}$  sobre la curva  $\Gamma = \mathbb{R}$ . En este caso la generalización obvia es considerar el operador

$$\mathcal{C}f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|z-\zeta| > \varepsilon \\ \zeta \in \Gamma}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Gamma. \quad (2.0.4)$$

Uno de los puntos principales en la primera sección es entonces justificar que estas dos definiciones son ‘equivalentes’ en el sentido que su diferencia es un múltiplo de la identidad. Esto se conoce como las identidades de Plemelj-Sokhotskij aludidas arriba y es consecuencia esencialmente del teorema de Cauchy (ver sección 1.7).

En lo que respecta a ver la continuidad del operador de Cauchy, la idea es la que sigue: Consideramos el caso  $\Omega = \mathbb{H}$  el semiplano superior y  $\Gamma = \mathbb{R}$ . Sea  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  y pongamos  $F$  la integral de Cauchy de  $f$ . Si  $F = u + iv$  entonces es fácil ver, con el teorema de la divergencia,

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx = 2 \int_{\mathbb{H}} |\nabla u|^2 y dx dy. \quad (2.0.5)$$

Dado que las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que  $|\nabla u| = |\nabla v|$  tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |F|^2 dx = 4 \int_{\mathbb{H}} |F'|^2 y dx dy. \quad (2.0.6)$$

Por lo tanto basta mostrar que la última integral es  $\lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ . Para esto usamos dualidad en  $L^2(\mu)$  donde  $d\mu = y dx dy$ : Sea  $g \in C_c(\mathbb{H})$  con  $\|g\|_{L^2(\mu)} \leq 1$  y  $z = x + iy$ , entonces

$$\begin{aligned} (F', g)_{L^2(\mu)} &= \int_{\mathbb{H}} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(z-t)^2} dt \right) \bar{g}(z) d\mu(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{H}} \frac{\bar{g}(z)}{(t-z)^2} d\mu(z) \right) f(t) dt. \end{aligned} \quad (2.0.7)$$

Si ponemos  $T(\bar{g})$  la integral dentro del paréntesis llegamos a que

$$(F', g)_{L^2(\mu)} = (T(\bar{g}), \bar{f})_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (2.0.8)$$

por lo que nos bastaría obtener una estimación como

$$\|Th\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim \|h\|_{L^2(\mu)}, \quad h \in C_c(\mathbb{H}). \quad (2.0.9)$$

Esto último es sencillo pues  $Th \in C(-\bar{\mathbb{H}})$  y holomorfa en el interior. Además

$$(Th)'(z) = \int_{\mathbb{H}} \frac{h(z)}{(z-w)^3} d\mu(z). \quad (2.0.10)$$

Usando esto junto con (2.0.6) es fácil ver que, en efecto, (2.0.9) vale. En general la idea es obtener análogos de (2.0.6) y (2.0.9) para dominios arriba de la gráfica de una función Lipschitz. Esto se hará con ayuda de mapeos conformes y el lema de distorsión de Koebe.

En la segunda sección introducimos el operador de Cauchy-Clifford asociado a un dominio Lipschitz  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Este operador juega un papel análogo al operador de Cauchy en  $\mathbb{C}$ , en este caso para funciones monogénicas. En particular probamos análogos de las fórmulas para representar valores de frontera de funciones monogénicas (izquierdas). También damos las técnicas usadas para reducir el estudio de un operador en la frontera un dominio Lipschitz acotado al de uno definido en la gráfica de una función Lipschitz.

## 2.1. La integral de Cauchy en $\mathbb{C}$

Sea  $\Gamma$  una curva simple<sup>1</sup> en el plano complejo  $\mathbb{C}$ , parametrizada por  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , con la propiedad de que para todo  $w \in \Gamma$  existe una vecindad  $x \in U$  tal que en  $U$  podemos expresar a  $\Gamma$  como la gráfica de una función Lipschitz<sup>2</sup>. Además supongamos que  $\Gamma$  divide a  $\mathbb{C}$  en dos componentes conexas que denotamos por  $\Omega_+, \Omega_-$  donde  $\Omega_+$  es el dominio a la izquierda de  $\Gamma$ , vía la parametrización  $\gamma$  (ver figura 2.1).

Como motivación supongamos en principio que  $\Gamma$  es suave y  $\Omega_+$  es acotado y simplemente conexo (en otras palabras  $\Gamma$  es una curva simple cerrada que no pasa por infinito). De la fórmula integral de Cauchy (ver sección 1.7) sabemos que toda función holomorfa  $F : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{C}$  continua en  $\bar{\Omega}_+$  satisface

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_+. \quad (2.1.1)$$

Nos preguntamos si tenemos manera de encontrar los valores de frontera de  $F$  si sólo conocemos el lado derecho de la integral. En otras palabras tenemos  $f$  definida en  $\Gamma$  tal que

$$F(z) = \mathcal{C}f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_+, \quad (2.1.2)$$

queremos entonces recobrar  $F|_{\partial\Omega}$  por medio de  $f$ .

---

<sup>1</sup>i.e. no se autointersecta.

<sup>2</sup>En particular, por el teorema de la función implícita, toda curva suave con una tangente bien definida en todo punto satisface esto.

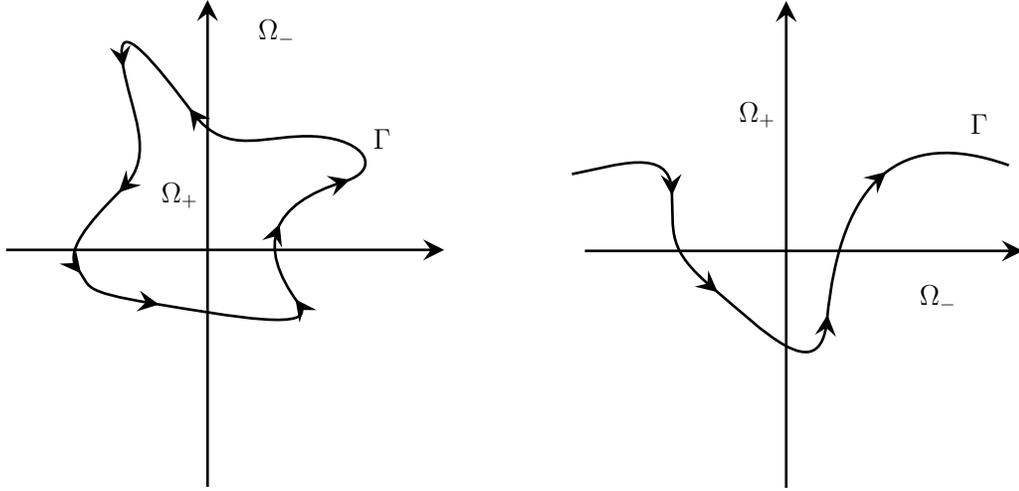


Figura 2.1: Ejemplos de curvas

Antes de seguir definimos

$$F_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_{\pm}. \quad (2.1.3)$$

Tenemos entonces el siguiente resultado que nos asegura que, en efecto, podemos recobrar los valores de frontera de  $F$ .

**Teorema 2.1.1** (Identidades de Plemelj-Sokhotskij). *Sea  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  Lipschitz e integrable (respecto de  $d\sigma$  la medida de arco en  $\Gamma$ ). Entonces existe un operador  $\mathcal{C}$  tal que para toda  $z_0 \in \Gamma$ ,  $z_{\pm} \in \Omega_{\pm}$ ,*

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \lim_{z_+ \rightarrow z_0} F_+(z_+) - \lim_{z_- \rightarrow z_0} F_-(z_-) \\ \lim_{z_{\pm} \rightarrow z_0} F_{\pm}(z_{\pm}) &= \pm \frac{f(z_0)}{2} + \mathcal{C}f(z_0). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

donde los límites se toman en el sentido no-tangencial.

**Observación 2.1.1.** *La hipótesis adicional que hicimos sobre  $\Gamma$  antes de empezar esta discusión no es necesaria como se verá en la prueba.*

*Demostración.* Antes que nada recordamos los conos no-tangenciales

$$\Gamma_{\beta}(z_0) = \{z \in \Omega : |z - z_0| \leq (1 + \beta)d(z)\}, \quad z_0 \in \Gamma, \quad (2.1.5)$$

donde  $d(z) := d(z, \Gamma)$  y pusimos  $\Omega = \Omega_+$ . Por supuesto el caso de estudiar  $\Omega_-$  es análogo.

Para ahorrar espacio ponemos para toda  $\varepsilon > 0$

$$\Delta_\varepsilon := \{w \in \Gamma : d_\Gamma(w, z_0) < \varepsilon\}, \quad (2.1.6)$$

o, en otras palabras,  $\Delta$  es la bola de radio  $\varepsilon$  y centro  $z_0$  con la métrica de  $\Gamma$  asociada a una parametrización. Además nos olvidamos del factor de  $2\pi i$  en la definición de  $F$  (aparecerá en la conclusión de igual manera).

Pasamos entonces a la prueba: Fijamos  $\varepsilon > 0$  tan pequeño que podamos expresar  $\Delta_\varepsilon$  como la gráfica de una función Lipschitz y ponemos

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\Gamma \setminus \Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta := A_\varepsilon(z) + B_\varepsilon(z). \quad (2.1.7)$$

Como para  $z$  cerca de  $z_0$  tenemos  $|z - w| > \delta > 0$  para  $w \in \Gamma \setminus \Delta_\varepsilon$  podemos tomar el límite dentro de la integral en  $B_\varepsilon(z)$  y escribir sin ambigüedad  $\lim_{z \rightarrow z_0} B_\varepsilon(z) = B_\varepsilon(z_0)$ . Por otro lado, reescribimos

$$A_\varepsilon(z) = \int_{\Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z} d\zeta + f(z_0) \int_{\Delta_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} := C_\varepsilon(z) + D_\varepsilon(z). \quad (2.1.8)$$

Para lidiar con  $C$  vemos que por la desigualdad del triángulo inversa y la definición de  $\Gamma_\beta(z_0)$  tenemos que

$$|\zeta - z_0| \leq (2 + \beta)|z - \zeta|, \quad z \in \Gamma_\beta(z_0) \quad (2.1.9)$$

por lo que, de el hecho que  $f$  es Lipschitz, obtenemos, con  $c = [f]_1$ ,

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z} \right| \leq c \frac{|\zeta - z_0|}{|\zeta - z|} \leq c(2 + \beta), \quad (2.1.10)$$

por lo que podemos meter el límite en la integral y más aún  $C_\varepsilon(z_0) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Para ver que pasa con  $D$  primero, dado que  $\Delta_\varepsilon$  se vé como la gráfica de una función Lipschitz, podemos construir una especie de cubo  $Q$  completamente contenido en  $\Omega_-$  con base  $\Delta_\varepsilon$  y una altura dada (ver figura 2.2).

Dado que  $(\zeta - z)^{-1}$  es holomorfa en  $Q$  (como función de  $\zeta$ ), el teorema de Cauchy nos dice que, si  $\Gamma' = \Delta_\varepsilon \cup \Gamma''$  denota la frontera de  $Q$  parametrizada en sentido heredado de la orientación de  $\Delta_\varepsilon$ ,

$$0 = \int_{\Gamma'} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = D_\varepsilon(z) + \int_{\Gamma''} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad (2.1.11)$$

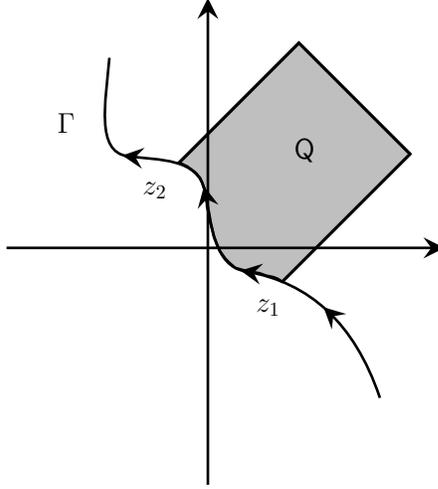


Figura 2.2: El cubo  $Q$  con  $d_{\Gamma}(z_i, z_0) = \varepsilon$  y  $z_1$  el primero por el que pasa  $\Gamma$ .

Tenemos entonces

$$D_{\varepsilon}(z) = - \int_{\Gamma''} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad (2.1.12)$$

Como en esta última integral estamos a distancia positiva de  $z_0$  vemos que podemos meter el límite para obtener

$$\lim_{z \rightarrow z_0} D_{\varepsilon}(z) = - \int_{\Gamma''} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (2.1.13)$$

Antes de seguir observamos que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para alguna  $r > 0$

$$\begin{aligned} \Delta_{\varepsilon} &= \{x + iy \in \mathbb{C} : y = \varphi(x)\} \cap B_r(0) \\ \Omega \cap B_r(0) &= \{x + iy \in B_r(0) : y > \varphi(x)\}. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

para alguna  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y además que  $z_0 = 0 + \varphi(0) = 0$ . Para ver esto primero notamos que vía una traslación, que no afecta la integral de arriba, podemos mandar  $z_0 \rightarrow 0$ . Por otro lado es inmediato checar que

$$\int_{\Gamma''} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{e^{i\theta}\Gamma''} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad \forall |\theta| = 1 \quad (2.1.15)$$

donde la última curva está parametrizada por  $\gamma_{\theta}(t) = e^{i\theta}\gamma(t)$ . Esto entonces nos dice que podemos rotar nuestra curva sin problemas y la reducción es válida.

Por otro lado, como la integral sólo depende de  $\Gamma$  a través de  $z_1, z_2$  podemos suponer que  $\Gamma$  es la gráfica de  $\varphi$  y  $\Omega$  el dominio arriba de dicha gráfica.

Como el resultado es  $\sigma$ -c.d., podemos suponer también que 0 es un punto de diferenciabilidad de  $\varphi^3$ .

Ahora, como  $\varphi$  es Lipschitz, si ponemos  $M = \|\varphi\|_{L^\infty}$  tenemos que

$$\text{Co}(M) := \{z = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : M|x| < y\} \subset \Omega, \quad (2.1.16)$$

por lo que podemos definir una rama de logaritmo en  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$  normalizada para que  $\log(-1) = -i\pi$ . Como  $\varphi$  es diferenciable en 0 tenemos que, a escalas pequeñas,  $\varphi(x)$  se vé como  $\varphi'(0)x$  por lo que, si ponemos  $z_j = x_j + i\varphi(x_j)$  tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{z_2}{z_1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_2 + i\varphi(x_2)}{x_1 + i\varphi(x_1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_2 + i\varphi(a_2)}{a_1 + i\varphi(a_1)} = -1, \quad (2.1.17)$$

donde  $a_1 = -\pm \varepsilon / \sqrt{1 + \varphi'(0)^2}$  y  $a_2 = -a_1$ .

Con esto y por el teorema de la primitiva tenemos que

$$\int_{\Gamma''} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \log \left( \frac{z_2}{z_1} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \log(-1) = -i\pi. \quad (2.1.18)$$

Concluimos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow z_0} D_\varepsilon(z) = i\pi f(z_0). \quad (2.1.19)$$

Combinando todo esto tenemos la representación

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \frac{f(z_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (2.1.20)$$

Si ponemos entonces

$$\mathcal{C}f(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \quad (2.1.21)$$

la representación deseada es válida.

Notamos que los límites no-tangenciales para  $F_+$  existen. La existencia del límite en  $\varepsilon$  de la última expresión lo que nos da es una forma útil de poner dichos límites.

---

<sup>3</sup>Notamos además, que si esta resulta ser la única condición extra que necesitamos para que la conclusión del teorema sea válida en  $z_0$ , en el caso suave podríamos reemplazar c.d. por en todas partes.

Para probar dicha existencia básicamente repetimos el mismo argumento que usamos para estudiar  $D_\varepsilon$  arriba (ver también la Observación 1.9.5): Para  $0 < \varepsilon < r$  suficientemente pequeños podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus \Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta &= \int_{\Gamma \setminus \Delta_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + f(z_0) \int_{\Delta_r \setminus \Delta_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \\ &\quad + \int_{\Delta_r \setminus \Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

El límite de la primera integral claramente existe cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Como  $|f(\zeta) - f(z_0)| = O(|\zeta - z_0|)$ , por convergencia dominada la tercera integral también tiene límite. Para estudiar la segunda construimos  $\Gamma^1, \Gamma^2$  como en la figura 2.3 entonces usando el teorema de Cauchy vemos que la segunda integral es igual a

$$\int_{\Gamma^1} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} + \int_{\Gamma^2} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (2.1.23)$$

Como la segunda integral no depende de  $\varepsilon$ , basta estudiar la primera, pero esto se hizo cuando estudiamos  $D_\varepsilon$ . Concluimos que  $\mathcal{C}f(z_0)$  está bien definido.  $\square$

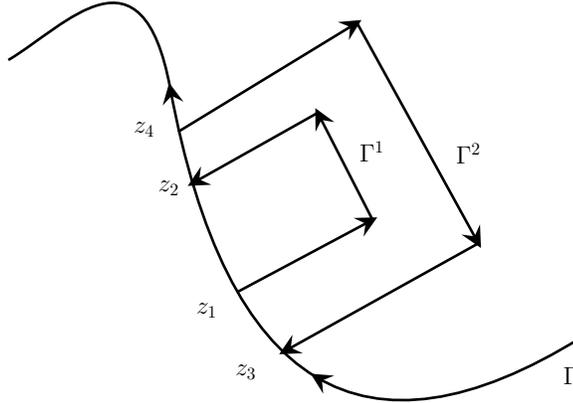


Figura 2.3:  $d_\Gamma(z_j, z_0) = \varepsilon$  para  $j = 1, 2$  y  $d_\Gamma(z_j, z_0) = r$  para  $j = 3, 4$ .

**Notación 2.1.1.** En lo que resta de esta sección  $\Gamma$  denotará la gráfica de una función Lipschitz y  $\Omega = \Omega_+$  el dominio arriba de su gráfica. En otras palabras ponemos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \|\varphi'\|_{L^\infty} = M < \infty, \\ \Gamma &= \{x+iy \in \mathbb{C} : y = \varphi(x)\}, \\ \Omega &= \{x+iy \in \mathbb{C} : y > \varphi(x)\}. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Además ponemos  $d\sigma$  la medida de longitud de arco. Es decir, para  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\Gamma} f(w) d\sigma(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x + i\varphi(x))(1 + |\varphi'(x)|^2)^{1/2} dx. \quad (2.1.25)$$

Análogamente definimos los espacios  $L^p(\Gamma)$  respecto de  $d\sigma$ .

Ponemos también

$$F(z) = \mathcal{C}f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega. \quad (2.1.26)$$

Observamos en particular que cuando  $\varphi \equiv 0$  tenemos que  $\Omega = \mathbb{H}$  es el semiplano superior y  $d\sigma$  es la medida de Lebesgue usual en  $\mathbb{R}$ .

El resultado más importante de esta sección es entonces el siguiente

**Teorema 2.1.2.** Sean  $\varphi, \Gamma, \Omega$  como en (2.1.24) y  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  Lipschitz a soporte compacto, entonces existe una constante  $C = C(\|\varphi'\|_{L^\infty})$  tal que, con  $Tf = \mathcal{C}f|_{\Gamma}$ , tenemos

$$\|Tf\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|f\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (2.1.27)$$

La prueba de este teorema se basa en dos resultados, la Proposición 2.1.1 y el Lema 2.1.5. El primero de ellos necesitará varios resultados preliminares, mas que nada para no atascar la prueba con cuentas.

**Proposición 2.1.1.** Supongamos que  $\varphi, \Gamma, \Omega$  son como en 2.1.24 y además  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Sea  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que decae en  $\infty$  y tiene límites no-tangenciales en  $\Gamma$ . Entonces existe  $C = C(\|\varphi'\|_{L^\infty})$  tal que

$$\|G\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|G\|_{H_+}, \quad (2.1.28)$$

donde definimos

$$\|G\|_{H_+} := \int_{\Omega} |G(z)|^2 d(z), \quad d(z) = d(z, \Gamma). \quad (2.1.29)$$

Empezamos los resultados preliminares con un lema que no se probará aquí (ver [20], [47]). Recordamos que  $\mathbb{H}$  denota el semiplano superior en  $\mathbb{C}$ .

**Lema 2.1.1** (de distorsión de Koebe). Sea  $\Psi : \mathbb{H} \rightarrow \Omega$  una biyección conforme, entonces existe  $C > 0$  una constante absoluta tal que

$$C^{-1}|\Psi'(z)|y \leq d(z, \partial\Omega) \leq C|\Psi'(z)|y, \quad z = x + iy. \quad (2.1.30)$$

**Lema 2.1.2.** Sean  $G, D : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones holomorfas tal que  $G$  decae en infinito y tiene límites no-tangenciales en  $\mathbb{R}$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |G|^2 dx = 4 \int_{\mathbb{H}} |G'(z)| y dz, \quad z = x + iy \quad (2.1.31)$$

y

$$\int_{\mathbb{H}} |HD'|^2 y dz \leq \|D\|_{L^\infty(\mathbb{H})}^2 \int_{\mathbb{R}} |H|^2 dx. \quad (2.1.32)$$

*Demostración.* Recordamos la fórmula de Green que dice que si  $u, v : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  son suficientemente buenas entonces

$$\int_{\mathbb{R}} u \frac{\partial v}{\partial(-y)} dx - \int_{\mathbb{H}} u \Delta v dx dy = \int_{\mathbb{H}} \nabla u \cdot \nabla v dx dy = \int_{\mathbb{R}} v \frac{\partial u}{\partial(-y)} dx - \int_{\mathbb{H}} v \Delta u dx dy. \quad (2.1.33)$$

Poniendo  $u = -y$  y  $v = |G|^2$  y usando la segunda igualdad vemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |G|^2 dx = -2 \int_{\mathbb{H}} G \cdot \partial_y G dx dy, \quad (2.1.34)$$

pero usando la primera igualdad en la fórmula de Green vemos que esta última integral es igual a

$$- \int_{\mathbb{H}} u \Delta v dx dy = - \int_{\mathbb{H}} -y (4|G'|^2 + 2g_1 \Delta g_1 + 2g_2 \Delta g_2) dx dy \quad (2.1.35)$$

donde  $G = g_1 + ig_2$ . Dado que las partes real e imaginaria de una función holomorfa son armónicas tenemos la identidad

$$\int_{\mathbb{R}} |G|^2 dx = 4 \int_{\mathbb{H}} |G'|^2 y dx dy \quad (2.1.36)$$

que es justamente la afirmación del lema en este caso. Un comentario antes de continuar: Las hipótesis sobre  $u, v$  dadas son vagas, pero es fácil ver que si  $v(z) = O(|z|^{-1})$  y  $\nabla v(z) = O(|z|^{-2})$  entonces la fórmula vale (basta aplicar el teorema de la divergencia a los dominios  $B_r \cap \mathbb{H}$  y hacer  $r \rightarrow \infty$ , las condiciones sobre  $v$  garantizan que los dos términos que aparecen en los semicírculos se van a cero en el límite).

Para obtener la segunda primero notamos que, de la identidad anterior, tenemos

$$\|D\|_{L^\infty(\mathbb{H})}^2 \int_{\mathbb{R}} |G|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}} |GD|^2 dx = 4 \int_{\mathbb{H}} |GD' + G'D|^2 y dx dy =: 4\|f + g\|_{L^2(\mu)}^2 \quad (2.1.37)$$

donde  $d\mu = ydx dy$ ,  $f = GD'$  y  $g = G'D$ . Calculamos entonces

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^2(\mu)} &\geq \|f\|_{L^2(\mu)} - \|g\|_{L^2(\mu)} \geq \|f\|_{L^2(\mu)} - \|D\|_{L^\infty(\mathbb{H})} \|G'\|_{L^2(\mu)} \\ &= \|f\|_{L^2(\mu)} - \frac{\|D\|_{L^\infty(\mathbb{H})}}{2} \left( \int_{\mathbb{R}} |G| dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

donde la primera desigualdad es la del triángulo, la segunda se sigue de que  $|H'D| \leq \|D\|_{L^\infty(\mathbb{H})} |H'|$  y la tercera es la identidad del inicio. Combinando estas dos estimaciones obtenemos

$$4\|D\|_{L^\infty(\mathbb{H})} \int_{\mathbb{R}} |G|^2 dx \geq \|f\|_{L^2(\mu)}^2 \quad (2.1.39)$$

que es la desigualdad deseada.  $\square$

**Lema 2.1.3.** *Sea  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable tal que<sup>4</sup>  $|\arg(f(x))| < \alpha$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ , entonces existe  $C = C(\alpha)$  tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \leq C \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right|. \quad (2.1.40)$$

*Demostración.* Basta notar que la condición sobre el argumento de  $f$  es equivalente a que  $\operatorname{Re}(f) > 0$  y  $|\operatorname{Im}(f)| \leq M \operatorname{Re}(f)$  con  $\alpha = \tan(M)$ , por lo que tenemos

$$|f| \leq (1 + M^2)^{1/2} \operatorname{Re}(f) = C \operatorname{Re}(f) \quad (2.1.41)$$

de donde concluimos

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \leq C \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}(f(x)) dx \leq C \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right|, \quad (2.1.42)$$

donde todas las  $C$  que aparecen son iguales.  $\square$

**Lema 2.1.4.** *Sea  $G$  holomorfa en  $\mathbb{H}$  que decae en infinito y tiene límites no-tangenciales en  $\mathbb{R}$  y  $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \Omega$  una función holomorfa. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} |G|^2 \Phi' dx = \int_{\mathbb{H}} \Delta(|G|^2 \Phi') y dz, \quad (2.1.43)$$

$$\Delta(|G|^2 \Phi') = 4(|G'|^2 \Phi' + G \bar{G}' \Phi''). \quad (2.1.44)$$

---

<sup>4</sup>Escogemos  $\arg \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

*Demostración.* Recordamos que  $\partial_\nu = \partial_{-y}$  donde  $\nu$  es la normal a la frontera de  $\mathbb{H}$ . Entonces poniendo  $u = |G|^2\Phi'$  y  $v = -y$  tenemos, por la fórmula de Green

$$\int_{\mathbb{R}} u dx = \int_{\mathbb{R}} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u) dx = \int_{\mathbb{H}} (u\Delta v - v\Delta u) dz = - \int_{\mathbb{H}} v\Delta u dz \quad (2.1.45)$$

que es la primera identidad.

La segunda son puras cuentas: En lo que sigue tratamos  $G, \Phi$  como funciones  $\mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , entonces

$$\begin{aligned} \Delta(|G|^2\Phi') &= \Delta(G\bar{G}\Phi') = \Delta(G\bar{G})\Phi' + 2\nabla(G\bar{G}) \cdot \nabla(\Phi') + G\bar{G}\Delta\Phi \\ &= \Delta(G\bar{G})\Phi' + 2\nabla(G\bar{G}) \cdot \nabla(\Phi') = A + B, \end{aligned} \quad (2.1.46)$$

donde la segunda igualdad se da pues  $\Delta H = 0$  para toda función holomorfa  $H$ . Usando esta misma fórmula tenemos

$$A = \Phi'(\Delta(G)\bar{G} + 2\nabla G \cdot \nabla\bar{G} + G\Delta\bar{G}) = 2\Phi'\nabla G \cdot \nabla\bar{G} = 4|G'|^2\Phi', \quad (2.1.47)$$

donde la última igualdad se da pues, de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos

$$\nabla G \cdot \nabla\bar{G} = \begin{pmatrix} G' \\ iG' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{G}' \\ -i\bar{G}' \end{pmatrix}. \quad (2.1.48)$$

Para calcular  $B$  notamos que, expresando las cantidades como en la cuenta anterior, tenemos

$$\nabla G \cdot \nabla\Phi' = 0, \quad \nabla\bar{G} \cdot \nabla\Phi' = 2\bar{G}'\Phi'' \quad (2.1.49)$$

por lo que, recordando que  $\nabla(G\bar{G}) = \nabla(G)\bar{G} + G\nabla\bar{G}$ , tenemos

$$B = 4G\bar{G}'\Phi''. \quad (2.1.50)$$

Juntando esto tenemos la segunda identidad. □

*Demostración Proposición 2.1.1.* Del teorema del mapeo de Riemann podemos escoger un difeomorfismo  $C^\infty$ ,  $\Phi : \bar{\mathbb{H}} \rightarrow \bar{\Omega}$  conforme en el interior de estos dominios (de hecho, como  $\varphi$  es suave  $\Phi$  es conforme hasta la frontera). Para reducir las estimaciones al semiplano superior notamos primero que

$$\|G\|_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} |G|^2 d\sigma = \int_{\mathbb{R}} |G \circ \Phi|^2 |\Phi'| dx \quad (2.1.51)$$

y además, de la fórmula de cambio de variable,

$$\begin{aligned} \|G'\|_{H_+} &= \int_{\Omega} |G'|^2 d(z) dx dy = \int_{\mathbb{H}} |G' \circ \Phi|^2 d(\Phi(z)) |\Phi'|^2 dx dy \\ &= \int_{\mathbb{H}} |(G \circ \Phi)'|^2 d(\Phi(z)) dx dy \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

por lo que, poniendo  $H = G \circ \Phi$  e invocando el lema de distorsión de Koebe, basta probar que para  $H : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa que decae en infinito

$$A := \int_{\mathbb{R}} |H|^2 |\Phi'| dx \leq C(\|\varphi'\|_{L^\infty}) \int_{\mathbb{H}} |H'|^2 |\Phi'| y dx dy =: B. \quad (2.1.53)$$

Para esto primero observamos que como la tangente a  $\Gamma$  vía la parametrización  $t \mapsto t + i\varphi(t)$  en  $x + i\varphi(x)$  está dada por  $1 + i\varphi'(x)$ , y dado que  $\Phi$  preserva ángulos tenemos que  $|\arg(\Phi'(x))| \leq \alpha$  con  $\alpha = \tan(\|\varphi'\|_{\infty})$ . Por el Lema 2.1.3 tenemos entonces  $C = C(\alpha)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |H|^2 |\Phi'| dx \leq C \left| \int_{\mathbb{R}} |H|^2 \Phi' dx \right|. \quad (2.1.54)$$

Combinando esto con las identidades del Lema 2.1.4 tenemos

$$A \leq C \left| \int_{\mathbb{H}} (|H'|^2 \Phi' + H \bar{H}' \Phi'') y dz \right| \leq CB + C \int_{\mathbb{H}} |H \bar{H}' \Phi''| y dz. \quad (2.1.55)$$

Para estimar la última integral notamos que, como  $\Phi'$  no se anula existe  $V$  holomorfa en  $\mathbb{H}$ , y continua en la cerradura, tal que  $\Phi' = e^V$ . Por la condición sobre el argumento de  $\Phi'$  tenemos que  $|\operatorname{Im}(V)| < \pi/2$ . Esto nos dice que, si  $D := e^{iV}$ , entonces  $|D| < e^{\pi/2}$  por lo que

$$|\Phi''| = |V' \Phi'| \leq e^{\pi/2} |V' e^{iV} \Phi'| =: e^{\pi/2} |D' \Phi'|, \quad (2.1.56)$$

Además por definición  $e^{V/2}$  define una raíz cuadrada de  $\Phi'$  en  $\mathbb{H}$ , por lo que podemos escribir

$$|H \bar{H}' \Phi''| = |H H' \Phi''| \leq e^{\pi/2} |H H' D' \Phi'| = e^{\pi/2} (|H' e^{V/2}|) (|H D' e^{V/2}|) \quad (2.1.57)$$

con lo que, usando la desigualdad e integrando sobre  $\mathbb{H}$  y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}} |H \bar{H}' \Phi''| y dz &\leq e^{\pi/2} B^{1/2} \int_{\mathbb{H}} |H e^{V/2} D'|^2 y dz \leq e^{\pi} B^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} |H|^2 |\Phi'| dx \right)^{1/2} \\ &= e^{\pi} B^{1/2} A^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

donde usamos la desigualdad del Lema 2.1.2 para la segunda desigualdad. Juntando estas dos estimaciones obtenemos

$$A \leq C_1(B + A^{1/2}B^{1/2}), \quad C_1 = C_1(\|\varphi'\|_{L^\infty}), \quad (2.1.59)$$

que es equivalente a la estimación que queremos: Si ponemos  $A_1 = A/C_1$  y  $B_1 = C_1B$  entonces de esta desigualdad y la desigualdad de Cauchy tenemos

$$A \leq C_1B + C_1A_1^{1/2}B_1^{1/2} \leq C_1B + \frac{A}{2} + \frac{C_1^2B}{2} \quad (2.1.60)$$

de donde se sigue la estimación deseada con  $C = 2(C_1 + C_1^2/2)$ .  $\square$

El segundo lema importante necesita un poco de preparación.

**Definición 2.1.1.** Dado  $f : \Omega_\pm \rightarrow \mathbb{C}$  medible<sup>5</sup>, decimos que  $f \in H_\pm$  si

$$\|f\|_{H_\pm}^2 := \int_{\Omega_\pm} |f(z)|^2 d(z) dz < \infty. \quad (2.1.61)$$

Dada  $f \in C_c(\Omega_+) \subset H_+$  definimos un operador  $T$  tal que

$$Tf(w) = \int_{\Omega_+} \frac{f(z)d(z)}{(z-w)^2} dz, \quad w \in \bar{\Omega}_-. \quad (2.1.62)$$

El segundo lema es entonces

**Lema 2.1.5.** Sean  $\varphi, \Gamma, \Omega$  como en (2.1.24),  $f \in C_c(\Omega_+)$  entonces existe  $C = C(\|\varphi'\|_{L^\infty})$  tal que

$$\|Tf\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|f\|_{H_+}. \quad (2.1.63)$$

*Demostración.* De la Proposición 2.1.1 tenemos que existe  $C = C(\|\varphi'\|_{L^\infty})$  tal que

$$\|Tf\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|(Tf)'\|_{H_-}, \quad (2.1.64)$$

pues  $Tf$  es holomorfa en  $\Omega_-$  (porque  $(z-w)^{-2}$  lo es) y es fácil ver que  $|Tf(w)| = O(|w|^{-1+\varepsilon})$  en infinito para toda  $\varepsilon > 0$ .

Además tenemos que, para  $w \in \Omega_-$ ,

$$(Tf)'(w) = 2 \int_{\Omega_+} \frac{f(z)d(z)}{(z-w)^3} dz \quad (2.1.65)$$

---

<sup>5</sup>Recordamos que  $\Omega_\pm$  son los dominios arriba y abajo de la gráfica de  $\varphi$ , como en 2.1.24.

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
\|(Tf)'\|_{H_-}^2 &= 4 \int_{\Omega_-} \left| \int_{\Omega_+} \frac{f(z)d(z)}{(z-w)^2} dz \right|^2 d(w)dw \\
&\leq 4 \int_{\Omega_-} \left| \int_{\Omega_+} \frac{d^{1/2}(w)d^{1/2}(z)}{|w-z|^3} d^{1/2}(z)f(z)dz \right|^2 dw \\
&=: 4 \int_{\Omega_-} \left| \int_{\Omega_+} k(w,z)g(z)dz \right|^2 dw,
\end{aligned} \tag{2.1.66}$$

donde  $g(z) = d^{1/2}(z)f(z) \in L^2(\Omega_+)$ . De esto vemos que, si definimos el operador

$$Sh(w) = \int_{\Omega_+} k(w,z)h(z)dz, \quad w \in \Omega_-, h \in L^2(\Omega_+), \tag{2.1.67}$$

y podemos probar que  $S$  es un operador acotado  $L^2(\Omega_+) \rightarrow L^2(\Omega_-)$  con norma que sólo depende de  $\|\varphi\|_{L^\infty}$  entonces tendríamos

$$\|(Tf)'\|_{H_-}^2 \leq 4\|S\|_{L^2 \rightarrow L^2}\|g\|_{L^2} = 4\|S\|_{L^2 \rightarrow L^2}\|f\|_{H_+}, \tag{2.1.68}$$

que concluiría la demostración.

Para estudiar  $S$  usamos la prueba de Schur (Lema 2.1.6) por lo que bastaría obtener una  $C$  con la dependencia apropiada tal que

$$\sup_{z \in \Omega_+} \int_{\Omega_-} |k(w,z)|dw, \sup_{w \in \Omega_-} \int_{\Omega_+} |k(w,z)|dw \leq C, \tag{2.1.69}$$

pero esto es fácil. Hacemos sólo la segunda. Recordando que  $d(z) \leq |z-w|$  y poniendo  $r = d(w) = d(w, \Gamma)$  tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_+} k(w,z)dz &= r^{1/2} \int_{\Omega_+} \frac{d^{1/2}(z)}{|w-z|^3} dz \leq r^{1/2} \int_{\Omega_+} |w-z|^{-5/2} dz \\
&\leq r^{1/2} \int_{\mathbb{C} \setminus B_r(w)} |w-z|^{-5/2} dz = 2\pi r^{1/2} \int_r^\infty t^{-3/2} dt \\
&= 2\pi r^{1/2} r^{-1/2} = 2\pi.
\end{aligned} \tag{2.1.70}$$

El resultado queda probado.  $\square$

**Lema 2.1.6** (Prueba de Schur). Sean  $(X, \lambda), (Y, \mu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finitos,  $N : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  medible tal que

$$\sup_x \int_Y |N(x,y)|d\mu(y) \leq A, \quad \sup_y \int_X |N(x,y)|d\lambda(x) \leq A \tag{2.1.71}$$

entonces el operador  $T$  asociado con el núcleo  $N$ , i.e.

$$Tf(x) = \int_Y N(x, y)f(y)dy, \quad (2.1.72)$$

es acotado en  $L^p(Y) \rightarrow L^p(X)$  para toda  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\|T\|_{L^p(Y) \rightarrow L^p(X)} \leq A$ .

*Demostración.* Supongamos primero que  $1 < p < \infty$  entonces, recordando que  $p' = \frac{p}{p-1}$  tenemos, usando la desigualdad de Hölder, y recordando que  $p(1 - 1/p') = 1$ ,

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \int_X |N(x, y)||f(y)|dy = \int_X |N(x, y)|^{\frac{1}{p'}} |N(x, y)|^{1-\frac{1}{p'}} |f(y)|dy \\ &\leq \left( \int_X |N(x, y)|dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_X |N(x, y)||f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq A^{\frac{1}{p'}} \left( \int_X |N(x, y)||f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2.1.73)$$

Ahora tenemos que, usando el teorema de Fubini (válido pues los integrandos son no-negativos y el espacio es  $\sigma$ -finito),

$$\int_X \int_X |N(x, y)||f(y)|^p dy dx = \int_X |f(y)|^p \left( \int_X |N(x, y)|dx \right) dy \leq A \int_X |f(y)|^p dy \quad (2.1.74)$$

Entonces, elevando el primer y último término en (2.1.73), integrando respecto de  $x$  y usando (2.1.74) tenemos que

$$\|Tf\|_{L^p}^p \leq A^{\frac{p}{p'}} A \|f\|_{L^p}^p \quad (2.1.75)$$

que es lo que queríamos probar.

Si  $p = 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_X |Tf(x)|dx &\leq \int_X \int_X |N(x, y)||f(y)|f(y)dy = \int_X |f(y)| \left( \int_X |N(x, y)|dx \right) dy \\ &\leq A \int_X |f(y)|dy \end{aligned} \quad (2.1.76)$$

Si  $p = \infty$ , tenemos

$$|T(x)| \leq \int_X |N(x, y)||f(y)|dy \leq \|f\|_{L^\infty} \int_X |N(x, y)|dy \leq A\|f\|_{L^\infty} \quad (2.1.77)$$

y el resultado queda probado.  $\square$

Podemos, con estos resultados dar una prueba sencilla del teorema

*Demostración Teorema 2.1.2 (parte 1,  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ).* Sean  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  Lipschitz a soporte compacto y

$$\mathcal{B} := \{h \in H_+ : \|h\|_{H_+} \leq 1, \text{sup}(h) \text{ compacto} \}, \quad (2.1.78)$$

entonces

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^2(\Gamma)} &= \left( \int_{\Gamma} |F|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|F'\|_{H_+} = C \sup_{h \in \mathcal{B}} \langle F', h \rangle_{H_+} \\ &= C \sup_{h \in \mathcal{B}} \left| \int_{\Omega_+} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \bar{h}(z) d(z) dz \right| \\ &= C \sup_{h \in \mathcal{B}} \left| \int_{\Gamma} f(w) T(\bar{h})(w) dw \right| \\ &\leq C \sup_{h \in \mathcal{B}} \|f\|_{L^2(\Gamma)} \|T\bar{h}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \sup_{h \in \mathcal{B}} \|f\|_{L^2(\Gamma)} \|h\|_{H_+} \\ &= C \|f\|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned} \quad (2.1.79)$$

donde la primera desigualdad es consecuencia de la Proposición 2.1.1 y la última desigualdad es consecuencia del Lema 2.1.5. □

Para pasar al caso general discutimos primero algunos aspectos técnicos de las consecuencias de esta primera parte del teorema. Como algunas de las afirmaciones y resultados que daremos son muy parecidas a otras que se dan en el caso del operador de Cauchy-Clifford, no daremos prueba de algunos.

Para empezar el resultado probado implica que para  $\varphi$  suave el operador  $\mathcal{C}$  es acotado en  $L^2(\Gamma)$ . Por otro lado este lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}f(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \Delta_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus U_\varepsilon} \frac{f(y + i\varphi(y))}{y-x + i(\varphi(y) - \varphi(x))} (1 + i\varphi'(y)) dy, \end{aligned} \quad (2.1.80)$$

donde  $U_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R} : d_\Gamma(x + i\varphi(x), y + i\varphi(y)) > \varepsilon\}$ . Si denotamos

$$Q(x, y) = \frac{1 + i\varphi'(y)}{y-x + i(\varphi(y) - \varphi(x))} \quad (2.1.81)$$

entonces, si definimos por

$$d_{\Gamma}(x + i\varphi(x), y + i\varphi(y)) = \int_{\min\{x,y\}}^{\max\{x,y\}} (1 + |\varphi'|^2)^{1/2} dt, \quad (2.1.82)$$

el hecho de que  $M := \|\varphi'\|_{\infty} < \infty$  implica que existe  $C = C(M)$  tal que

$$C^{-1}|x - y| \leq d_{\Gamma}(x + i\varphi(x), y + i\varphi(y)) \leq C|x - y| \quad (2.1.83)$$

por lo que, por un lado podemos identificar  $L^2(\Gamma)$  con  $L^2(\mathbb{R})$  vía la asignación  $f(x + i\varphi(x)) \mapsto f(x)$  con normas comparables<sup>6</sup>. Hecho esto entonces además podemos encontrar  $C$  con la misma dependencia tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus U_{\varepsilon}} Q(x, y) f(y) dy - \int_{|x-y|>\varepsilon} Q(x, y) f(y) dy \right| \leq CMf(x).$$

Mas aún si definimos  $g = (1 + \varphi'(y))f(y)$  entonces  $f, g$  tienen normas comparables por lo que, en lo que a la continuidad en los espacios  $L^p$  respectivos se refiere, basta estudiar a los operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\varepsilon}^{\varphi} f(x) &= \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x - y + i(\varphi(y) - \varphi(x))} dy, \\ \mathcal{C}_{*}^{\varphi} f(x) &= \sup_{\varepsilon>0} |\mathcal{C}_{\varepsilon}^{\varphi} f(x)|. \end{aligned} \quad (2.1.84)$$

No es difícil probar que

$$K(x, y) = \frac{1}{x - y + i(\varphi(x) - \varphi(y))} \quad (2.1.85)$$

es un núcleo estándar, por lo que, de la prueba del Teorema 1.9.1, y los resultados sobre operadores de Calderón-Zygmund, se sigue que existe un operador  $T$ , acotado en  $L^2$ , que es el límite débil-\* de los operadores  $\mathcal{C}_{\varepsilon}^{\varphi}$  y por lo tanto

$$\|\mathcal{C}_{*}^{\varphi}\|_{L^p \rightarrow L^p} < C(p, M) < \infty, \quad 1 < p < \infty. \quad (2.1.86)$$

Además, de manera análoga a como se hizo antes, podemos probar que

$$\mathcal{C}' f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} Q(x, y) f(y) dy \quad \text{existe casi para toda } x. \quad (2.1.87)$$

---

<sup>6</sup>Claramente con constantes que sólo dependen de  $M$ .

y por lo dicho antes tenemos las cotas

$$\|\mathcal{C}'_\varepsilon\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C(M), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.1.88)$$

Con esto estamos listos para terminar la prueba del teorema

*Demostración Teorema 2.1.2 (Parte 2,  $\varphi$  Lipschitz).* De la fórmula de representación es equivalente probar la estimación  $L^2$  para los valores de frontera,  $\mathcal{C}$  o para  $\mathcal{C}'$ . Trabajamos con el último operador. Además, como tomar  $\varphi$  ó  $\varphi + a$  con  $a \in \mathbb{R}$  no afecta al operador  $\mathcal{C}'$  podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\varphi(0) = 0$ .

Para empezar sean  $\mathcal{C}'_k$  los operadores obvios asociados con las funciones  $\psi_k := \eta_k \varphi_{1/k}$ , donde  $\varphi_{1/k}$  denota las regularizaciones usuales<sup>7</sup> de  $\varphi$ , y  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  con  $\eta \equiv 1$  en el disco unitario y  $\eta \equiv 0$  fuera del disco de radio 2, con  $\eta_k(x) = \eta(k^{-1}x)$ . Claramente  $\psi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  y además, dado que  $\|\varphi'_{1/k}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi'\|_{L^\infty}$  y  $\|\varphi_{1/k}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^\infty}$  calculamos, dado que  $\psi_k = 0$  fuera del disco de radio  $2k$ , para toda  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |\psi'_k(x)| &= \left| \frac{\eta'(k^{-1}x)}{k} \varphi_{1/k}(x) + \eta_k(x) \varphi'_{1/k}(x) \right| \\ &\leq \frac{\|\eta'\|_{L^\infty} |\varphi_{1/k}(x) - \varphi_{1/k}(0)|}{k} + \frac{\|\eta'\|_{L^\infty} |\varphi_{1/k}(0)|}{k} + \|\eta\|_{L^\infty} \|\varphi'\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{\|\eta'\|_{L^\infty} \|\varphi'\|_{L^\infty} |x|}{k} + \frac{\|\eta'\|_{L^\infty} |\varphi_{1/k}(0)|}{k} + \|\eta\|_{L^\infty} \|\varphi'\|_{L^\infty} \\ &\leq 2\|\eta'\|_{L^\infty} \|\varphi'\|_{L^\infty} + \frac{\|\eta'\|_{L^\infty} |\varphi_{1/k}(0)|}{k} + \|\eta\|_{L^\infty} \|\varphi'\|_{L^\infty}. \end{aligned} \quad (2.1.89)$$

Como el segundo término tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$  tenemos que  $\|\psi'_k\|_{L^\infty} \lesssim \|\varphi'\|_{L^\infty}$  de donde, de la primera parte de la demostración y la discusión previa a esta parte de la prueba, concluimos que existe  $C = C(\|\varphi'\|_{L^\infty})$  tal que

$$\|\mathcal{C}'_{k,\varepsilon}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \quad (2.1.90)$$

y una aplicación del lema de Fatou nos dice que lo mismo es cierto para  $\mathcal{C}'_\varepsilon$  pues por el teorema de convergencia dominada

$$\mathcal{C}'_\varepsilon f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{C}'_{k,\varepsilon} f(x). \quad (2.1.91)$$

Otra aplicación del lema de Fatou nos da entonces la cota para  $\mathcal{C}'$ .  $\square$

Hecho esto mencionamos los corolarios obvios

<sup>7</sup>En otras palabras  $\varphi_{1/k} = \varphi * h_k$  donde  $h_k(x) = kh(kx)$  y  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  con  $\int_{\mathbb{R}} h = 1$ .

**Corolario 2.1.1.** *Sea  $\varphi$  Lipschitz, entonces para toda  $1 < p < \infty$  existe  $C = C(p, \|\varphi'\|_{L^\infty})$  tal que*

$$\|\mathcal{C}_*^\varphi f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}. \quad (2.1.92)$$

**Corolario 2.1.2.** *Si  $\Gamma$  denota una curva cerrada simple o es la gráfica de una función Lipschitz entonces para toda  $f \in L^p(\Gamma)$  vale la representación*

$$F(z) = \frac{f(z)}{2} + \mathcal{C}f(z), \quad z \in \Gamma, \quad (2.1.93)$$

donde como siempre

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_+. \quad (2.1.94)$$

Un comentario que vale la pena hacer es sobre lo crucial de que la dependencia de la norma  $L^2$  de  $\mathcal{C}f$  sólo sea en la norma  $\|\varphi'\|_\infty$  pues fue esto lo que nos permitió pasar del caso  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  al general. De hecho el caso de  $\varphi$  suave se puede reducir al de la transformada de Hilbert que es un operador mucho más manejable. Dicha reducción se puede hacer como sigue: Podemos esencialmente escribir el núcleo  $K$  como

$$K(x, y) = \frac{1}{x - y + i(\varphi(x) - \varphi(y))} = \frac{1}{x - y} + \phi(x, y) \quad (2.1.95)$$

donde  $\phi(x, y) = O(1)$ , localmente y módulo algunos factores que podemos ignorar. El problema al intentar extender es que  $\phi$  depende de la segunda derivada de  $\varphi$  (o del módulo de continuidad de  $\varphi'$ ) por lo que no podemos esperar un control uniforme de las aproximaciones que se hicieron en la segunda parte de la demostración del Teorema 2.1.2 y que fueron lo esencial para concluir.

## 2.2. El operador de Cauchy-Clifford

En lo que sigue del capítulo  $\Omega$  denotará siempre un dominio Lipschitz (sección 1.3), con sus constantes uniformemente acotadas y Ahlfors regular (sección 1.4).

**Notación 2.2.1.** *En lo que sigue, dados un punto  $y \in \partial\Omega$  y  $\varepsilon > 0$  ponemos*

$$\Delta_\varepsilon(y) = B_\varepsilon(y) \cap \partial\Omega. \quad (2.2.1)$$

*Esto contrasta un poco con la notación que teníamos en la sección anterior, pero en ese caso es fácil ver que las dos definiciones dan lugar a truncamientos equivalentes (donde la Proposición 1.7.1 juega el papel del teorema de Cauchy en este caso).*

**Definición 2.2.1.** *El operador de Cauchy-Clifford asociado a una función  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}_{(n+1)}$  está definido por*

$$\mathcal{C}f(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y), \quad x \in \Omega. \quad (2.2.2)$$

*Su versión en la frontera, que llamaremos simplemente el operador de Cauchy, es entonces*

$$\mathcal{E}f(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y), \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.2.3)$$

**Observación 2.2.1.** *Como  $K(x, y) = \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}}$  satisface  $|K(x, y)| \leq |x-y|^{-n}$  para todo  $x \neq y$ ,  $y$  como  $|\nu| = 1$ , tenemos que  $\mathcal{C}f$  está bien definido<sup>8</sup> para  $f \in L^p(\partial\Omega)$ , para toda  $1 < p < \infty$ : Definamos*

$$\begin{aligned} A_0 &= \{y \in \partial\Omega : 0 < |x-y| \leq 1\} \\ A_k &= \{y \in \partial\Omega : 2^{k-1} < |x-y| \leq 2^k\}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

*Ahora calculamos*

$$\int_{\partial\Omega} |K(x, y)| |f(y)| dy \leq \|f\|_{L^p} \left( \int_{\partial\Omega} |K(x, y)|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (2.2.5)$$

*Por otro lado tenemos*

$$\int_{\partial\Omega} |K(x, y)|^{p'} dy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} |K(x, y)|^{p'} dy \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} |x-y|^{-np'} dy, \quad (2.2.6)$$

$$\int_{A_k} |x-y|^{-np'} dy \leq 2^{-np'(k-1)} \sigma(A_k) \leq C 2^{-np'(k-1)} 2^{nk} = C(n, p, \Omega) 2^{nk(1-p')}. \quad (2.2.7)$$

*Como  $p' > 1$ ,  $\sum_k 2^{nk(1-p')} < \infty$ . Combinando todo esto vemos que  $\mathcal{C}f$  está bien definido.*

Empezamos entonces el análisis de  $\mathcal{E}$  como integral singular. Introducimos los truncamientos usuales asociados a un núcleo como  $K$ .

---

<sup>8</sup>Si  $\Omega$  es acotado no hay problema, pues en este caso  $K$  es continua y podemos definir  $\mathcal{C}f$  para  $f \in L^1$

**Definición 2.2.2.** Para  $\varepsilon > 0$  definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\varepsilon f(x) &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega \setminus \Delta_\varepsilon(x)} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega} K(x,y) 1_{|x-y|>\varepsilon} \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y), \quad x, y \in \partial\Omega\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

$$\mathcal{C}_* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |\mathcal{C}_\varepsilon f(x)|\tag{2.2.9}$$

**Observación 2.2.2.** La misma prueba que en la observación anterior funciona para ver que  $\mathcal{C}_\varepsilon$  está bien definido para  $f \in L^p(\partial\Omega)$  con  $1 < p < \infty$ , de hecho la prueba da que, para toda  $x \in \partial\Omega$ ,  $K_\varepsilon(x, \cdot) \in L^p(\partial\Omega)$  con norma acotada uniformemente en  $x$ . Además, poniendo  $g = \nu \odot f$  y  $K_\varepsilon(x, y) = K(x, y) 1_{|x-y|>\varepsilon}$  vemos que  $\mathcal{C}_\varepsilon$  es básicamente la integral con núcleo  $K_\varepsilon$ .

**Lema 2.2.1.** Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $1 < p < \infty$ . Si  $f \in L^p(\partial\Omega)$  entonces  $\mathcal{C}_\varepsilon f \in C(\partial\Omega)$ .

*Demostración.* Empezamos definiendo regularizaciones de los truncamientos. Fijamos  $\varepsilon > 0$  y sea  $r \in (0, 1)$ . Tomamos  $\varphi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  radial tal que  $\varphi_r \equiv 0$  en  $B_{r\varepsilon}(0)$ ,  $\varphi_r \equiv 1$  en  $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$  y  $0 \leq \varphi_r \leq 1$  en  $\mathbb{R}^n$  (por ejemplo regularizamos  $1_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)}$ ). Definimos

$$\begin{aligned}K_{\varepsilon,r}(x, y) &= K(x, y) \varphi_r(x-y), \quad x, y \in \partial\Omega. \\ \mathcal{C}_{\varepsilon,r} f(x) &= \int_{\partial\Omega} K_{\varepsilon,r}(x, y) f(y) d\sigma(y), \quad x \in \partial\Omega.\end{aligned}\tag{2.2.10}$$

Notamos que  $K_{\varepsilon,r} \in C(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ , por lo que el teorema de Arzelà-Ascoli nos dice que si  $f \in C_c(\partial\Omega)$  entonces  $\mathcal{C}_{\varepsilon,r} f \in C(\partial\Omega)$ . De la observación anterior deducimos que si  $f \in L^p(\partial\Omega)$  y  $f_k \in C_c(\partial\Omega)$  con  $f_k \rightarrow f$  en  $L^p$  tenemos

$$\begin{aligned}|\mathcal{C}_{\varepsilon,r} f(x) - \mathcal{C}_{\varepsilon,r} f_k(x)| &\leq \|K_{\varepsilon,r}(x, \cdot)\|_{L^{p'}} \|f - f_k\|_{L^p} \\ &\leq C(\Omega, n, p, \varepsilon, r) \|f - f_k\|_{L^p},\end{aligned}\tag{2.2.11}$$

de donde obtenemos convergencia uniforme y por tanto  $\mathcal{C}_{\varepsilon,r} f \in C(\partial\Omega)$ . Para concluir simplemente notamos que, para  $f \in L^p(\partial\Omega)$ ,

$$\begin{aligned}|\mathcal{C}_{\varepsilon,r} f(x) - \mathcal{C}_\varepsilon f(x)| &\leq \|f\|_{L^p} \|K_{\varepsilon,r}(x, \cdot) - K_\varepsilon(x, \cdot)\|_{L^{p'}} \\ &= \|f\|_{L^p} \|K_{\varepsilon,r}(x, \cdot)\|_{L^{p'}(\Delta_\varepsilon(x) \setminus \Delta_{r\varepsilon}(x))} \\ &\leq C(\Omega, n, p, \varepsilon) \|f\|_{L^p} \sigma(\Delta_\varepsilon(x) \setminus \Delta_{r\varepsilon}(x)).\end{aligned}\tag{2.2.12}$$

Basta entonces probar que  $A(r, x) = \sigma(\Delta_\varepsilon(x) \setminus \Delta_{r\varepsilon}(x))$  tiende a cero localmente uniforme en  $x$  cuando  $r \rightarrow 1$ . Esto es claro si  $\varepsilon$  es pequeño o  $\partial\Omega$  es la gráfica de una

función Lipschitz pues entonces  $A(r, x) \approx \varepsilon^n(1 - r^n)$  uniformemente en  $x$ . El caso general lo podemos reducir a esto usando cartas coordenadas como sigue: Fijemos  $x_0 \in \partial\Omega$  y tomemos  $(U_j)$  una cubierta finita de  $\Delta_\varepsilon(x_0)$  por cartas coordenadas tal que  $2U_j$  también son cartas coordenadas. Existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x_0 - x| < \delta$  entonces  $\Delta_\varepsilon(x) \subset 2U_j$ . Además existe  $0 < r_0 < 1$  que no depende de  $x$  tal que si  $r > r_0$  entonces  $\Delta_{r\varepsilon}(x) \cap U_j \neq \emptyset$  para toda  $j$ . Terminamos estimando en cada carta coordenada.  $\square$

**Corolario 2.2.1.**  $\mathcal{C}_*$  es semicontinua inferiormente y, en particular, medible.

Ahora vamos a conectar la existencia de  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}_\varepsilon f$  con el comportamiento de  $\mathcal{C}f$  en  $\partial\Omega$ . Más concretamente tenemos

**Teorema 2.2.1.** Sea  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}_{(n+1)}$  Lipschitz con soporte compacto, entonces para toda  $x \in \partial\Omega$

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow x} \mathcal{C}f(z) = \frac{1}{2}f(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}_\varepsilon f(x), \quad (2.2.13)$$

siempre que alguno de ambos exista, y tomando el primer límite en el sentido no-tangencial.

*Demostración.* Como (ver Proposición 1.1.2)

$$\begin{aligned} K(x, y) \odot \nu(y) &= - \sum_{i=1}^{n+1} \nabla \Phi(x - y) \cdot \nu(y) \\ &\quad + \sum_{i < j} \left( \nu_j(y) \partial_i \Phi(x - y) - \nu_i(y) \partial_j \Phi(x - y) \right) e_i e_j \\ &:= Q(x, y) + \sum_{i < j} Q^{ij}(x, y) e_i e_j, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

basta estudiar el comportamiento en la frontera y valor principal de los operadores con núcleo  $Q, Q^{ij}$ . El primero es el conocido potencial dos capas y tenemos

1. Supongamos que  $f$  es real, entonces

$$\lim_{\Gamma_\beta(x) \ni z \rightarrow x} \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega} Q(z, y) f(y) d\sigma(y) = \frac{1}{2}f(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_n} \int_{|x-y| > \varepsilon} Q(x, y) f(y) d\sigma(y). \quad (2.2.15)$$

Ver esto es sencillo: Descomponemos la integral de la izquierda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega} Q(z, y) f(y) d\sigma(y) &= \frac{1}{\sigma_n} \left( \int_{\Delta_\varepsilon(x)} + \int_{\partial\Omega \setminus \Delta_\varepsilon(x)} \right) Q(z, y) f(y) d\sigma(y) \\ &:= A(z, \varepsilon) + A'(z, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Entonces, como no hay singularidad en la integral de  $A'$ , podemos tomar el límite cuando  $z \rightarrow x$  para obtener<sup>9</sup>

$$\lim_{z \rightarrow x} A'(z, \varepsilon) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega \setminus \Delta_\varepsilon(x)} Q(x, y) f(y) d\sigma(y) \quad (2.2.17)$$

y por lo tanto, tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , llegamos al segundo término del lado derecho de 2.2.15. Ahora queremos ver que pasa con  $A$ , para esto reescribimos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\Delta_\varepsilon(x)} Q(z, y) (f(y) - f(x)) d\sigma(y) + \frac{f(x)}{\sigma_n} \int_{\Delta_\varepsilon(x)} Q(z, y) d\sigma(y) \\ &:= A_1 + A_2. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Si ponemos  $M = [f]_1$  la seminorma Lipschitz de  $f$ , entonces

$$|A_1| \leq \frac{M}{\sigma_n} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} |z-y|^{-n} |x-y| d\sigma(y). \quad (2.2.19)$$

Además, como  $z \in \Gamma_\beta(x)$  para algún  $\beta > 0$  tenemos  $|y-z| \geq |y-x| - |x-z| \geq |y-x| - (1+\beta)|y-z|$  de donde  $|y-z|^{-n} \leq (2+\beta)^n |y-x|^{-n}$ . Combinando esto con la estimación anterior

$$\begin{aligned} |A_1| &\leq \frac{M(2+\beta)^n}{\sigma_n} \int_{\Delta_\varepsilon(x)} |x-y|^{-n+1} d\sigma(y) \\ &\leq C(\beta, M, \Omega) \int_{B_\varepsilon^n(0)} |w|^{-n+1} dw \leq C\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

donde la última desigualdad es válida si pedimos que el conjunto  $\{y : |x-y| \leq \varepsilon\}$  se quede en una carta coordenada. Concluimos entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow x} A_1(z, \varepsilon) = 0. \quad (2.2.21)$$

Lidiar con  $A_2$  es un poco más complicado. Primero ponemos  $B(\varepsilon) = B_\varepsilon^{n+1}(x)$  y notamos que, si definimos  $F = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega) \cap B(\varepsilon)$ , entonces  $\partial F = \Delta_\varepsilon(x) \cup (\partial B(\varepsilon) \setminus \bar{\Omega})$ . Aplicando el teorema de la divergencia en  $F$ , y notando que  $|z - \cdot|^{1-n}$  es armónica en  $z$ , tenemos

$$\int_{\Delta_\varepsilon(x)} Q(z, y) d\sigma(y) = - \int_{\partial B(\varepsilon) \setminus \bar{\Omega}} \frac{z-y}{|z-y|^{n+1}} \cdot \nu(y) d\sigma(y). \quad (2.2.22)$$

<sup>9</sup> Siendo pedantes podríamos repetir la prueba que se dió cuando vimos que  $\mathcal{C}_\varepsilon f$  es continua.

Argumentando como en la estimación de  $A'$ , podemos meter el límite cuando  $z \rightarrow x$  en la segunda integral de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sigma_n}{f(x)} A_2(z, \varepsilon) &= - \int_{\partial B(\varepsilon) \setminus \bar{\Omega}} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \cdot \nu(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{\sigma(\partial B(\varepsilon) \setminus \bar{\Omega})}{\varepsilon^n}, \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

donde la última igualdad se da pues la normal en  $\partial B(\varepsilon)$  está dada por  $\nu(y) = \varepsilon^{-1}(y-x)$ . Reescribiendo esto obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow x} A_2(z, \varepsilon) = f(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma(\partial B(\varepsilon) \setminus \bar{\Omega})}{\sigma_n \varepsilon^n}. \quad (2.2.24)$$

Basta entonces probar que el límite de la derecha es  $\frac{1}{2}$  (notamos que esto es la conclusión del Corolario 1.5.2, pero damos otra prueba aquí). Para ver esto primero notamos que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño  $B(\varepsilon) \cap \partial\Omega$  está contenido en una carta coordenada, por lo que no perdemos generalidad en suponer que  $\Omega$  es el dominio arriba de la gráfica de una función Lipschitz, i.e.

$$\Omega = \{(w, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > \varphi(w)\} \quad (2.2.25)$$

para alguna  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz.

La idea es sencilla: A escalas pequeñas  $\partial\Omega$ , cerca de algún punto de diferenciabilidad  $x$ , se ve como un hiperplano  $H$ , pero si  $H_+$  es uno de los semiespacios generados por este hiperplano  $\sigma(H_+ \cap B(\varepsilon)) = \frac{\sigma_n \varepsilon^n}{2}$ .

Primero supongamos, abusando de la notación, que  $x = (x, \varphi(x)) = (0, 0)$  es un punto de diferenciabilidad de  $\varphi$  y que  $D\varphi(0) = 0$ . Por definición esto quiere decir que

$$\sup_{|y| \leq r} \frac{|\varphi(y) - \varphi(0)|}{|y - 0|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow 0 \quad (2.2.26)$$

pero recordamos que si definimos el cono

$$\text{Co}(s) = \{(w, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : s|w| < t\}, \quad s > 0 \quad (2.2.27)$$

entonces la condición anterior la podemos traducir en que para toda  $s > 0$  existe un  $\varepsilon > 0$  tal que si  $|y| \leq \varepsilon$  entonces

$$\begin{aligned} (y, \varphi(y)) &\notin -\text{Co}(s), \quad \text{o en otras palabras,} \\ \partial B(\varepsilon) \cap -\text{Co}(s) &\subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Pero notamos que del teorema de la divergencia (aplicado en el conjunto  $E = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : z \in -\text{Co}(s), \quad \varepsilon \leq |z| \leq 1\}$  (ver figura 2.4) y la función  $\text{div} \nabla \Phi = \Delta \Phi$

$$\int_{\partial B(\varepsilon) \cap -\text{Co}(s)} \frac{y}{|y|^{n+1}} \cdot \nu(y) d\sigma(y) = \int_{\partial B(1) \cap -\text{Co}(s)} \frac{y}{|y|^{n+1}} \cdot \nu(y) d\sigma(y). \quad (2.2.29)$$

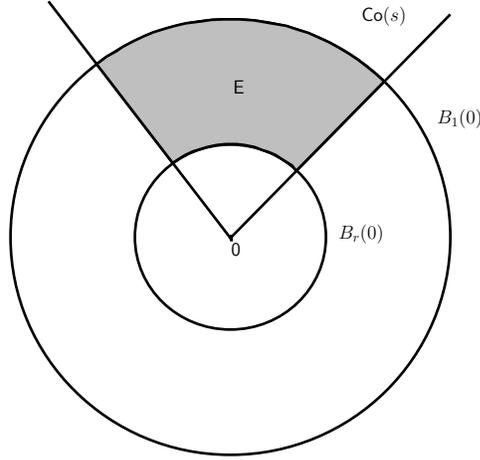


Figura 2.4: El conjunto  $E$ . Notamos que  $\nu(y) \perp y$  en la frontera lateral.

Como  $\varepsilon \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow 0$ , tenemos

$$\int_{\partial B(1) \cap -\text{Co}(s)} \frac{y}{|y|^{n+1}} \cdot \nu(y) d\sigma(y) = \sigma(\partial B(1) \cap -\text{Co}(s)) \rightarrow \frac{\sigma_n}{2} \quad \text{cuando } s \rightarrow 0. \quad (2.2.30)$$

Además, como  $\partial B(\varepsilon) \cap \text{Co}(s) \subset \Omega$ , vemos por el teorema de convergencia dominada que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\varepsilon) \setminus \bar{\Omega}} Q(0, y) d\sigma(y) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\partial B(1) \cap -\text{Co}(s)} \frac{y}{|y|^{n+1}} \cdot \nu(y) d\sigma(y) = \frac{\sigma_n}{2}. \quad (2.2.31)$$

Si  $D\varphi(0) \neq 0$  consideramos  $\varphi_1(x) = \varphi(x) - D\varphi(0)x$  y el dominio asociado  $\Omega_1$ .  $\varphi_1$  satisface las hipótesis y equivale, en términos de la medida  $\sigma(\partial B(r) \setminus \bar{\Omega}_1)$  a hacer una rotación (ver la prueba de la Proposición 1.5.5).

Esto termina la prueba de la fórmula. Ahora si  $f = \sum_I f_I e_I$  simplemente aplicamos la fórmula término a término, por lo que el resultado es cierto para  $f$   $\mathbb{R}_{(n+1)}$ -valuada.

El resultado análogo para los  $Q^{ij}$  es el siguiente.

2.

$$\lim_{\Gamma_\beta(x) \ni z \rightarrow x} \int_{\partial\Omega} Q^{ij}(z, y) \odot f(y) d\sigma(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega \setminus \Delta_\varepsilon(x)} Q^{ij}(x, y) \odot f(y) d\sigma(y). \quad (2.2.32)$$

Como antes podemos suponer que  $f$  es real. Si descomponemos la integral de la izquierda, de la misma manera que en el caso anterior, en  $A + A'$ , es inmediato que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow x} A'(z, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega \setminus \Delta_\varepsilon(x)} Q^{ij}(x, y) d\sigma(y). \quad (2.2.33)$$

Análogamente  $A = A_1 + A_2$  donde  $\lim_\varepsilon \lim_z A_1 = 0$ . Por lo tanto basta estudiar  $A_2$ , pero por el teorema de la divergencia tenemos, poniendo  $\Omega_- = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_\varepsilon(x)} Q^{ij}(z, y) d\sigma(y) &= \int_{\partial B(\varepsilon) \setminus \bar{\Omega}} Q^{ij}(z, y) d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{B(\varepsilon) \cap \Omega_-} (\partial_i \partial_j \Phi(z - y) - \partial_j \partial_i \Phi(z - y)) dy \\ &= \int_{\partial B(\varepsilon) \setminus \bar{\Omega}} Q^{ij}(z, y) d\sigma(y). \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

Por lo tanto podemos meter el límite en  $z$  en la última integral y además notamos que para  $y \in \partial B(\varepsilon)$  tenemos  $\nu(y) = \varepsilon^{-1}(y - x)$ , i.e.

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\varepsilon) \setminus \bar{\Omega}} Q^{ij}(z, y) d\sigma(y) &= \int_{\partial B(\varepsilon) \setminus \bar{\Omega}} \frac{(y_j - x_j)(x_i - y_i) - (y_i - x_i)(x_j - y_j)}{\varepsilon^{n+2}} d\sigma(y) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow x} A_2(z, \varepsilon) = 0 \quad (2.2.36)$$

y la fórmula queda probada. Combinando (2.2.15) y (2.2.32) el resultado es inmediato.  $\square$

Este teorema nos dice que una manera natural de interpretar la integral en la definición de  $\mathcal{C}$  es como valor principal, el siguiente resultado nos dice que los límites puntuales siempre existen.

**Lema 2.2.2.** *Sea  $f$  Lipschitz a soporte compacto entonces  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}_\varepsilon f(x)$  existe  $\sigma$  para casi todo  $x$ .*

*Demostración.* Claramente basta probar que, para algún  $r > 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x-y| < r} K(x, y) \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y) \quad (2.2.37)$$

existe. Nos vamos a fijar en el límite de los truncamientos asociados a  $Q, Q^{ij}$  como en el teorema anterior. Primero notamos que podemos tomar  $r$  tan pequeño que el dominio de integración esté contenido en una carta coordenada, por lo que no perdemos generalidad en suponer que  $\Omega$  es el dominio arriba de la gráfica de una función Lipschitz. Además tenemos, con  $\Delta_s = \Delta_s(x)$  para cualquier  $s > 0$  (recordando que basta suponer  $f$  real),

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_r \setminus \Delta_\varepsilon} K(x, y) \odot \nu(y) f(y) d\sigma(y) &= \int_{\Delta_r \setminus \Delta_\varepsilon} K(x, y) \odot \nu(y) (f(y) - f(x)) d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\Delta_r \setminus \Delta_\varepsilon} K(x, y) \odot \nu(y) f(x) d\sigma(y) \\ &= A + B, \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

y el límite de  $A$  es sencillo ver que existe, apelando al teorema de convergencia dominada, pues

$$|K(x, y) \odot \nu(y) \odot (f(y) - f(x))| \leq C|x - y|^{-n+1} \quad (2.2.39)$$

y esta última cantidad es integrable en  $|x - y| < r$ . Usando la notación del teorema  $B(s) = B_s^{n+1}(x)$  y usando la misma técnica que este vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_r \setminus \Delta_\varepsilon} Q(x, y) d\sigma(y) &= \int_{\partial B(r) \setminus \Omega} Q(x, y) d\sigma(y) - \int_{\partial B(\varepsilon) \setminus \Omega} Q(x, y) d\sigma(y) \\ &= r^{-n} \sigma(\partial B(r) \setminus \Omega) - \varepsilon^{-n} (\partial B(\varepsilon) \setminus \Omega) \\ &\rightarrow r^{-n} \sigma(\partial B(r) \setminus \Omega) - \frac{\sigma_n}{2}, \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

y análogamente para  $Q^{ij}$  tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_r \setminus \Delta_\varepsilon} Q^{ij}(x, y) s\sigma(y) &= \int_{\partial B(r) \setminus \Omega} Q^{ij}(x, y) d\sigma(y) - \int_{\partial B(\varepsilon) \setminus \Omega} Q^{ij}(x, y) d\sigma(y). \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

Esto termina la prueba del lema. □

Esto nos dice que todo funciona bien para funciones con cierta regularidad. Para ver lo que pasa con funciones en  $L^p$  tenemos que estudiar los operadores maximales  $\mathcal{C}_*$ ,  $\mathcal{N}$  (ver la sección 1.5 para la definición de esta última). Para ver esto supongamos que para alguna  $p \in (1, \infty)$  tenemos una cota de la forma

$$\|\mathcal{N}(\mathcal{C}f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p(\partial\Omega), \quad (2.2.42)$$

donde  $C$  no depende de  $f$  y consideramos el conjunto

$$A_1(\lambda, f, I) = \left\{ x \in \partial\Omega : \limsup_{\Gamma \ni z \rightarrow x} \mathcal{C}^I f(z) - \liminf_{\Gamma \ni z \rightarrow x} \mathcal{C}^I f(z) > \lambda \right\} \quad (2.2.43)$$

donde  $\Gamma = \Gamma_\beta(x)$ ,  $I \in \mathbb{N}^{n+1}$  y  $\mathcal{C}f = \sum_I \mathcal{C}^I f_I$ . Tomamos  $(f_k)$  una sucesión de funciones Lipschitz a soporte compacto tal que  $\|f_k - f\|_{L^p} \rightarrow 0$  y calculamos

$$\begin{aligned} \sigma(A_1) &\leq \sigma \left( \left\{ x : \limsup_z \mathcal{C}^I f(z) - \lim_z \mathcal{C}^I f_k(z) > \lambda/2 \right\} \right) \\ &\quad + \sigma \left( \left\{ x : \lim_z \mathcal{C}^I f_k(z) - \liminf_z \mathcal{C}^I f(z) > \lambda/2 \right\} \right) \\ &= \sigma \left( \left\{ x : \limsup_z \mathcal{C}^I (f - f_k)(z) > \lambda/2 \right\} \right) \\ &\quad + \sigma \left( \left\{ x : \liminf_z \mathcal{C}^I (f_k - f)(z) > \lambda/2 \right\} \right) \\ &\leq \sigma(\{x : \mathcal{N}\mathcal{C}(f - f_k)(x) > \lambda/2\}) + \sigma(\{x : \mathcal{N}\mathcal{C}(f - f_k)(z) > \lambda/2\}) \\ &\leq 2 \left( \frac{2\|\mathcal{N}\mathcal{C}(f - f_k)\|_{L^p}}{\lambda} \right)^p \leq 2 \left( \frac{2C\|f - f_k\|_{L^p}}{\lambda} \right)^p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

donde usamos, para la primera desigualdad, el hecho de que el límite no tangencial existe  $\sigma$ -c.d. para  $\mathcal{C}^I f_k$ , y la desigualdad de Chebyshev en  $L^p$  para la primera desigualdad en el último renglón.

Esto entonces nos da que si podemos asegurar que  $\mathcal{N}\mathcal{C}$  es acotado en  $L^p$  entonces los límites no-tangenciales de  $\mathcal{C}f$  existen  $\sigma$ -c.d. para  $f \in L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)})$ . Supongamos ahora que también tenemos una cota de la forma

$$\|\mathcal{C}_* f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}. \quad (2.2.45)$$

Entonces un argumento análogo al anterior muestra que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}_\varepsilon f$  existe  $\sigma$ -c.d. para  $f \in L^p$  y además la identidad del teorema 1 sigue siendo válida. Ver esto es, como se dijo, análogo al caso anterior salvo que ahora consideramos al conjunto

$$A_2(\lambda, f, I) = \left\{ x \in \partial\Omega : \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}_\varepsilon^I f(x) - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}_\varepsilon^I f(x) > \lambda \right\} \quad (2.2.46)$$

para ver la existencia del valor principal, y el conjunto

$$A_3(\lambda, f) = \left\{ x \in \partial\Omega : \limsup_{\Gamma \ni z \rightarrow x} \left| \mathcal{C}f(z) - \frac{1}{2}f(x) - \mathcal{C}f(x) \right| > \lambda \right\} \quad (2.2.47)$$

para probar la validez de la identidad. Hay que mencionar que, como  $|\mathcal{C}_\varepsilon f| \leq \mathcal{C}_* f$ , el lema de Fatou nos da que

$$\|\mathcal{C}f\|_{L^p} \leq \liminf_{\varepsilon} \|\mathcal{C}_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|\mathcal{C}_* f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}. \quad (2.2.48)$$

lo que implica la continuidad de  $\mathcal{C}$  en  $L^p$ .

Hecho esto ahora estudiamos las propiedades  $\mathcal{N}\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}_*$  como operadores en  $L^p$ . El primer resultado nos dice que basta fijarnos en  $\mathcal{C}_*$ .

**Teorema 2.2.2.** *Sea  $f \in L^p(\partial\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , y  $\beta > 0$  entonces existe  $C = C(\beta, p, \Omega)$  tal que, con  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\beta$ ,*

$$\mathcal{N}(\mathcal{C}f)(x) \leq C\mathcal{M}f(x) + \mathcal{C}_* f(x), \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (2.2.49)$$

*Demostración.* Sea  $K : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  como la definimos antes<sup>10</sup>, i.e.

$$K(x) = \frac{x}{|x|^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}. \quad (2.2.50)$$

Tenemos entonces que existen  $C_i$  tal que para todas  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  con  $x \neq y$ <sup>11</sup>,

$$|K(x-y)| \leq C_1|x-y|^{-n}, \quad |\nabla K_i(x-y)| \leq C_2|x-y|^{-n-1}, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (2.2.51)$$

En lo que sigue fijamos  $x \in \partial\Omega$  y  $z \in \Gamma = \Gamma_\beta(x)$ . Ponemos además  $r = (1 + \beta)d(z)$  con  $d(z) = d(z, \partial\Omega)$ . Definimos entonces

$$\begin{aligned} A_0 &= \{y \in \partial\Omega : 0 \leq |y-x| < 2r\}, \\ A_k &= \{y \in \partial\Omega : 2^k r \leq |y-x| < 2^{k+1} r\}. \end{aligned} \quad (2.2.52)$$

Si  $y \in A_0$  entonces  $|z-y| \geq d(z) = \frac{r}{1+\beta}$  entonces, dado que  $\sigma(A_0) \leq C(\Omega)r^n$  y de la

<sup>10</sup>Recordamos que en este caso  $K(x, y) = K(x-y)$ .

<sup>11</sup>Basta notar que las parciales de  $K_i$  son homogéneas de grado  $-n-1$ .

definición de  $\mathcal{M}f$  tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{A_0} |K(z-y)| |f(y)| d\sigma(y) &\leq C_1 \int_{A_0} |z-y|^{-n} |f(y)| d\sigma(y) \\
&\leq C_1 \left( \frac{1+\beta}{r} \right)^n \int_{A_0} |f(y)| d\sigma(y) \\
&\leq C(\Omega) \int_{A_0} |f(y)| d\sigma(y) \\
&\leq C\mathcal{M}f(x).
\end{aligned} \tag{2.2.53}$$

Además tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega \setminus A_0} K(z-y) \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y) &= \int_{\partial\Omega \setminus A_0} K(x-y) \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y) \\
&\quad + \int_{\partial\Omega \setminus A_0} (K(x-y) - K(z-y)) \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y) \\
&= B_1 + B_2,
\end{aligned} \tag{2.2.54}$$

y claramente

$$|B_1| = |\mathcal{C}_{2r}f(x)| \leq \mathcal{C}_*f(x) \tag{2.2.55}$$

por lo que basta estimar  $B_2$ . Para esto primero notamos que, por el teorema del valor medio

$$|K_i(z-y) - K_i(x-y)| \leq \sup_{w \in [z-y, x-y]} |\nabla K_i(w)| |z-x|, \tag{2.2.56}$$

donde

$$\begin{aligned}
[z-y, x-y] &= \{\lambda(z-y) + (1-\lambda)(x-y) : \lambda \in [0, 1]\} \\
&= \{\lambda(z-x) + (x-y) : \lambda \in [0, 1]\}.
\end{aligned} \tag{2.2.57}$$

Ahora, si  $y \in A_k$  con  $k \geq 1$  entonces, dado que  $|z-x| < r$  por definición, de la desigualdad del triángulo obtenemos

$$|\lambda(z-x) + (x-y)| \geq |x-y| - \lambda|x-z| \geq 2^k r - \lambda r \geq r(2^k - 1) \geq 2^{k-1} r. \tag{2.2.58}$$

En particular sí podemos aplicar el teorema del valor medio, pues  $[z - x, x - y] \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Mas aún, combinando estas dos últimas estimaciones (2.2.56),(2.2.58) junto con la cota de  $\nabla K_i$  (2.2.51) llegamos a que

$$\begin{aligned} |K_i(z - y) - K_i(x - y)| &\leq (2^{k-1}r)^{-n-1} r = 2^{-(n+1)(k-1)} r^{-n} \\ &= 2^{2n+1} 2^{-k} (2^{k+1}r)^{-n} \\ &= C(n) 2^{-k} (2^{k+1}r)^{-n}. \end{aligned} \quad (2.2.59)$$

Con esto entonces podemos estimar  $B_2$  como sigue: Ponemos  $\Delta_k = \{y \in \partial\Omega : |x - y| < 2^{k+1}\}$

$$\begin{aligned} |B_2| &\leq C(n) 2^{-k} (2^{k+1}r)^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f(y)| d\sigma(y) \\ &\leq C(\Omega, n) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \int_{\Delta_k} |f(y)| d\sigma(y) \leq C \mathcal{M}f(x). \end{aligned} \quad (2.2.60)$$

Como  $z \in \Gamma_\beta(x)$  fue arbitrario, podemos tomar el supremo. Esto termina la prueba del teorema.  $\square$

En lo que sigue consideramos  $\Omega$  acotado. La razón es que, mientras que este caso es fácil reducirlo al caso de el dominio arriba de una gráfica, nuestras cotas dependen de manera fuerte en que podamos cubrir a  $\partial\Omega$  con un número finito de cartas coordenadas, además de que  $\partial\Omega$  tenga medida finita. Una pregunta interesante sería entonces dar condiciones naturales para que el resultado se extienda a dominios no acotados más generales que la epigráfica de una función Lipschitz. La respuesta a esto es estudiar la clase de dominios uniformemente rectificables (ver la siguiente sección)

Sea entonces  $\Omega$  un dominio Lipschitz acotado. Tomamos  $(U_j, \varphi_j)_{j=1}^m$  una sucesión finita de cartas coordenadas tal que

1.  $\partial\Omega \subset \cup U_j$ .
2.  $2U_j$  es un carta coordenada.<sup>12</sup>

Tomamos ahora una partición de la unidad continua (y finita)  $(\psi_j)$  subordinada a esta cubierta. En otras palabras

---

<sup>12</sup>Recordamos que los  $U_j$  son cilindros, por lo que  $2U_j$  significa el cilindro con el mismo centro y dos veces el radio y la altura.

1.  $\psi_j \in C(\partial\Omega)$  con  $\text{sop}(\psi_j) \subset U_j$ .
2.  $0 \leq \psi_j \leq 1$ .
3.  $\sum_{j=1}^m \psi_j(x) = 1$  para toda  $x \in \partial\Omega$ .

Por la tercera propiedad tenemos, para toda  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathcal{C}_\varepsilon f(x) = \sum_{j=1}^m \mathcal{C}_\varepsilon (f\psi_j)(x). \quad (2.2.61)$$

Por lo tanto basta estimar el operador  $\mathcal{C}_*$  en funciones  $g$  soportadas en cartas coordenadas pues si tenemos tal estimación entonces

$$\|\mathcal{C}_* f\|_{L^p} \leq \sum_{j=1}^m \|\mathcal{C}_*(f\psi_j)\|_{L^p} \leq C(p, \Omega, m) \sum_{j=1}^m \|f\psi_j\|_{L^p} \leq C(p, \Omega, m) \|f\|_{L^p}, \quad (2.2.62)$$

donde en la última ecuación usamos la desigualdad  $a_1^q + \dots + a_k^q \leq C_1(k, q)(a_1 + \dots + a_k)^q$  válida para  $0 < q < 1$ <sup>13</sup>. Ahora para estimar estos términos primero notamos que<sup>14</sup>

$$\mathcal{C}_\varepsilon(f\psi_j)(x) = \int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ y \in U_j}} K(x, y) \odot \nu(y) \odot (f(y)\psi_j(y)) d\sigma(y) \quad (2.2.63)$$

entonces, poniendo  $g = f\psi_j$ , obtenemos

$$\|\mathcal{C}_* g\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \leq C(p) \left( \|\mathcal{C}_* g\|_{L^p(2U_j)}^p + \|\mathcal{C}_* g\|_{L^p(\partial\Omega \setminus 2U_j)}^p \right). \quad (2.2.64)$$

El segundo término es fácil de acotar: Existe  $\delta > 0$  (que dependo sólo de  $\text{diam}(U_j)$ ) tal que si  $y \in U_j$  y  $x \in \partial\Omega \setminus 2U_j$  entonces  $|x - y| > \delta$ . Entonces, para tales  $x$  vemos que

$$|\mathcal{C}_* g(x)|^p \leq \left( \int_{U_j} \delta^{-n} |g(y)| d\sigma(y) \right)^p \leq \sigma(U_j \cap \partial\Omega)^{p-1} \delta^{-n} \|g\|_{L^p(U_j)}^p, \quad (2.2.65)$$

donde usamos la desigualdad de Jensen para la última desigualdad. Integrando esto sobre  $\partial\Omega \setminus 2U_j$  tenemos que

$$\|\mathcal{C}_* g\|_{L^p(\partial\Omega \setminus 2U_j)} \leq C(\Omega, U_j, p) \|g\|_{L^p(\partial\Omega)}. \quad (2.2.66)$$

<sup>13</sup>Lo importante a notar aquí es que  $C_1 \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$

<sup>14</sup>En lo que sigue generalmente omitimos el factor  $\sigma_n^{-1}$  en la definición de  $\mathcal{C}$  y sus variantes

Entonces nos basta estudiar el primer término en (2.2.64). Primero vemos que en nuestro sistema coordenado, podemos poner  $\varphi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y considerar  $\Omega_j$  el dominio arriba de la gráfica de  $\varphi_j$ . De esta manera tenemos la cota trivial

$$\|\mathcal{C}_*g\|_{L^p(2U_j)} \leq \|\mathcal{C}_*g\|_{L^p(\partial\Omega_j)} \quad (2.2.67)$$

pero además, como  $\text{sop}(g) \subset U_j$  tenemos que, extendiendo  $g$  como cero al resto de  $\partial\Omega_j$ ,

$$\mathcal{C}_*g(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\substack{|x-y| > \varepsilon \\ y \in \partial\Omega_j}} K(x, y) \odot \nu(y) \odot g(y) d\sigma(y) \right|. \quad (2.2.68)$$

Por lo tanto, es suficiente tratar el caso de gráficas. Supongamos entonces que  $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > \varphi(x)\}$  para alguna  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz con  $[\varphi]_1 = M < \infty$ . Para empezar notamos que, como  $|\nu| = 1$ , el operador de multiplicación (izquierda) por  $\nu$  es unitario, i.e.

$$\begin{aligned} M_\nu : L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)}) &\rightarrow L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)}) \\ f &\mapsto \nu f \end{aligned} \quad (2.2.69)$$

es acotado con  $\|M_\nu f\|_p = \|f\|_p$  para toda  $p \in [1, \infty)$ . Por tanto basta estudiar el operador con núcleo asociado  $K$ . En otras palabras, basta considerar el operador

$$\mathcal{C}'f(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y) \odot f(y) d\sigma(y) \quad (2.2.70)$$

interpretado de la misma manera que  $\mathcal{C}$  (i.e. con ayuda de los operadores  $\mathcal{C}'_\varepsilon$  y  $\mathcal{C}'_*$ ), pues

$$\mathcal{C}'_\varepsilon f(x) = (\mathcal{C}'_\varepsilon \circ M_\nu f)(x). \quad (2.2.71)$$

Ahora, como estamos en coordenadas euclidianas, podemos darle una forma explícita a  $K$  de la siguiente manera: Si escribimos  $x = (x', \varphi(x)) \in \partial\Omega$ , con  $x' \in \mathbb{R}^n$ , y análogamente con  $y$ , podemos escribir

$$\mathcal{C}'_\varepsilon f(x) = \int_{U_\varepsilon} \frac{x' - y' + (\varphi(x') - \varphi(y'))}{|(x' - y', \varphi(x') - \varphi(y'))|^{n+1}} \odot f(y') (1 + |\nabla\varphi(y')|^2)^{\frac{1}{2}} dy', \quad (2.2.72)$$

donde  $U_\varepsilon = \{y : |x' - y' + (\varphi(x') - \varphi(y'))| > \varepsilon\}$  e identificamos una función  $f$  definida en  $\partial\Omega$  con la que define en  $\mathbb{R}^n$  de manera obvia (Que no afectamos la integrabilidad de  $f$  al hacer esto se sigue de que  $\nabla\varphi \in L^\infty$ ). De manera análoga, como

$$1 \leq (1 + |\nabla\varphi|^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + M^2, \quad (2.2.73)$$

podemos olvidar este término (o más formalmente pegárselo a  $f$ ). Si llamamos a este último operador igual entonces tenemos que estudiar

$$\begin{aligned}\mathcal{C}'_\varepsilon f(x') &= \int_{U_\varepsilon} \frac{x' - y' + (\varphi(x') - \varphi(y'))}{|(x' - y', \varphi(x') - \varphi(y'))|^{n+1}} \odot f(y') dy' \\ &:= \int_{U_\varepsilon} K'(x', y') \odot f(y') dy'\end{aligned}\quad (2.2.74)$$

que está definido enteramente en  $\mathbb{R}^n$ . Este es casi un operador singular usual, la única diferencia es el dominio de integración que se usa para los truncamientos es  $U_\varepsilon$ , que no es exactamente el usual  $|x' - y'| > \varepsilon$ . Probamos entonces que, en considerar el segundo dominio cometemos un error controlado por la función maximal de Hardy-Littlewood. En otras palabras

**Lema 2.2.3.** *Existe  $C = C(n, \varphi)$  tal que para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  tenemos*

$$\sup_\varepsilon \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} K'(x, y) \odot f(y) dy - \int_{U_\varepsilon} K'(x, y) \odot f(y) dy \right| \leq CMf(x). \quad (2.2.75)$$

*Demostración.* Definimos  $V_\varepsilon = \{y : |x - y| > \varepsilon\}$ . Como  $\varphi$  es Lipschitz con seminorma  $M$ , tenemos

$$|x - y| \leq |(x - y, \varphi(x) - \varphi(y))| \leq (1 + M^2)^{\frac{1}{2}} |x - y|, \quad (2.2.76)$$

por lo que, si  $M' = \sqrt{1 + M^2}$ , entonces  $V_\varepsilon \subset U_\varepsilon \subset V_{M'\varepsilon}$ , de donde

$$\begin{aligned}\left| \int_{U_\varepsilon \setminus V_\varepsilon} K'(x, y) \odot f(y) dy \right| &\leq \int_{V_{M'\varepsilon} \setminus V_\varepsilon} |K'(x, y) \odot f(y)| dy \\ &\leq \int_{\varepsilon < |x-y| < M'\varepsilon} \varepsilon^{-n} |f(y)| dy \\ &\leq \varepsilon^{-n} \int_{|x-y| < M'\varepsilon} |f(y)| dy \\ &\leq M^m \omega_n \int_{|x-y| < M'\varepsilon} |f(y)| dy \\ &\leq CMf(x)\end{aligned}\quad (2.2.77)$$

que es lo que se quería probar. Notamos que  $C = C(n, M)$ . □

**Corolario 2.2.2.** *Existe  $C = C(n, \varphi)$  tal que para toda  $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{U_\varepsilon} K'(x, y) \odot f(y) dy \right| \leq CMf(x) + \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} K'(x, y) \odot f(y) dy \right|. \quad (2.2.78)$$

Ahora simplemente notamos, como antes, que podemos escribir  $f = \sum_I f_I e_I$  y escribir el operador en términos de sus coordenadas reales. Por lo tanto basta estudiar los operadores  $T_*^j$  con  $0 \leq j \leq n$  donde

$$\begin{aligned} T_\varepsilon^0 &= \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|(x-y, \varphi(x) - \varphi(y))|^{n+1}} f(y) dy \\ &= \int_{|x-y|>\varepsilon} K^0(x, y) f(y) dy, \\ T_\varepsilon^j &= \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|(x-y, \varphi(x) - \varphi(y))|^{n+1}} f(y) dy \\ &= \int_{|x-y|>\varepsilon} K^j(x, y) f(y) dy, \end{aligned} \tag{2.2.79}$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , pues  $K' = \sum_0^n K^j$ .

Notamos que todos los  $T_j$  caen en el caso general de operadores con núcleo

$$N(x, y) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(y)}{(|x-y|^2 + |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{2.2.80}$$

con  $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz. Estos operadores se trataron en los preliminares, en donde se probó que en efecto los operadores maximales  $T_*^j$  son acotados en  $L^p$  para  $1 < p < \infty$  (ver Corolario 1.9.4). Concluimos esta sección resumiendo todo lo anterior en el siguiente

**Teorema 2.2.3.** *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz con frontera acotada o la epigráfica de un función Lipschitz y sea  $1 < p < \infty$ . Si  $f \in L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)})$  entonces  $\mathcal{C}f \in L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)})$  y además existe  $C = C(p, \Omega)$  tal que  $\|\mathcal{C}f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$ . Más aún el operador maximal  $\mathcal{C}_*f$  satisface una cota análoga.*

*Por otro lado la función monogénica  $\mathcal{C}f$  tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d. dados por (2.2.13) y además la función maximal no-tangencial satisface que existe  $C = C(\Omega, p, \beta)$  tal que  $\|\mathcal{N}(\mathcal{C}f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$ .*

## 2.3. Extensiones

Para presentar las extensiones de los resultados de este capítulo necesitamos algunos preliminares.

Recordamos que  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  es bi-Lipschitz si existe  $M > 0$  tal que

$$M^{-1}|x-y| \leq |F(x) - F(y)| \leq M|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3.1}$$

En este caso si  $E \subset \mathbb{R}^n$  decimos que  $F(E)$  es imagen bi-Lipschitz de  $E$ .

En particular, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es Lipschitz con  $[f]_1 = M'$  entonces  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por  $F(x) = (x, f(x))$  es bi-Lipschitz con constante  $M \leq 1 + M'$ .

**Definición 2.3.1** ([16, Definition 1.33]). *Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  cerrado. Decimos que  $\Sigma$  tiene pedazos grandes de imágenes bi-Lipschitz si existen constantes  $M, \alpha > 0$  tal que para toda  $r > 0$  y  $x \in \Sigma$  podemos encontrar un compacto  $A \subset \mathbb{R}^n$  y una función bi-Lipschitz  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  con constante  $\leq M$  tal que*

$$\sigma(\Sigma \cap F(A) \cap B_r(x)) \geq \alpha \sigma(\Sigma \cap B_r(x)) \approx \alpha r^n. \quad (2.3.2)$$

Si  $\Sigma$  es compacto pedimos esto para  $r < \text{diam}(\Sigma)$  por ejemplo.

**Ejemplo 2.3.1.** *Claramente toda gráfica Lipschitz tiene pedazos grandes de imágenes bi-Lipschitz. Más generalmente todo dominio Lipschitz acotado también satisface esto, por el caso para gráficas y la definición de dominio Lipschitz. Más generalmente tenemos el siguiente resultado*

**Teorema 2.3.1** ([15, Theorem 1]). *Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  cerrado y Ahlfors regular tal que existe  $C_0 > 0$  con la siguiente propiedad: Para toda  $x \in \Sigma$  y  $r > 0$  existen  $x_1, x_2$  en diferentes componentes conexas de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Sigma$  tal que*

$$d(x, x_i) \leq r \quad \text{y} \quad B_{C_0 r}(x_i) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Sigma. \quad (2.3.3)$$

Entonces  $\Sigma$  tiene pedazos grandes de imágenes bi-Lipschitz.

Esto en particular implica que dominios NTA y Ahlfors regulares tienen pedazos grandes de imágenes bi-Lipschitz.

**Definición 2.3.2.** *Decimos que  $\Sigma$  es uniformemente rectificable, abreviado UR, si  $\Sigma$  es Ahlfors regular y tiene pedazos grandes de imágenes bi-Lipschitz.*

El ejemplo anterior se puede poner entonces en la forma: Todo dominio NTA y Ahlfors regular es UR.

En lo que respecta al operador de Cauchy y su continuidad empezamos con

**Proposición 2.3.1.** *Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  bi-Lipschitz, entonces si  $K_i(z) = z_i/|z|^{n+1}$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$  y definimos el operador*

$$T^i f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K_i(F(x) - F(y)) f(y) dy. \quad (2.3.4)$$

Entonces  $T^i$  es acotado en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para toda  $1 < p < \infty$ .

Como  $F$  es bi-Lipschitz tenemos que  $\mathcal{H}^n|_{F(\mathbb{R}^n)} \approx \mathcal{H}^n|_{\mathbb{R}^n}$  y concluimos, dado que el núcleo del operador de Cauchy-Clifford es  $K = \sum K_i e_i$ , que  $\mathcal{C}$  es acotado en  $L^p(F(\mathbb{R}^n), \sigma)$  para toda  $1 < p < \infty$ . En otras palabras  $\mathcal{C}$  es acotado en cualquier imagen bi-Lipschitz de  $\mathbb{R}^n$ .

La prueba de la proposición se basa en el siguiente resultado, que se puede ver como una generalización del Teorema 1.10.2 y se obtiene vía el método de rotaciones.

**Proposición 2.3.2** ([38, Chapter9, Theorem11]). *Sea  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  Lipschitz y  $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  impar. Entonces el núcleo*

$$N(x, y) = G\left(\frac{A(x) - A(y)}{|x - y|}\right) |x - y|^{-n} \quad (2.3.5)$$

define un operador (como en la Proposición 1.9.1) acotado en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para toda  $1 < p < \infty$ .

En nuestro caso  $A = F$  y  $G = K_i$ . Claramente  $K_i$  no es suave pero en nuestro caso  $|F(x) - F(y)|/|x - y| \approx 1$  por lo que podemos cortar la singularidad de  $K_i$  sin afectar el núcleo  $N$ .

**Teorema 2.3.2.** *Sea  $\Sigma$  cerrado y Ahlfors regular. Supongamos que existen  $C_1, C_2, \beta > 0$  tal que para toda  $x \in \Sigma$  y  $r > 0$  existe un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$  con las siguientes propiedades*

1.  $A$  es Ahlfors regular con constantes  $C_1^{-1}, C_1$ .
2.  $\sigma(\Sigma \cap A \cap B_r(x)) \geq \beta \sigma(\Sigma \cap B_r(x))$ .
3. Para toda  $f \in C_c(\mathbb{R}^{n+1})$  tenemos que

$$\|T_{A,*}^i f(x)\|_{L^2(A)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(A)}, \quad (2.3.6)$$

donde definimos

$$T_{A,*}^i f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\substack{|x-y| > \varepsilon \\ y \in A}} K_i(x, y) f(y) d\sigma(y) \right|. \quad (2.3.7)$$

Entonces existe  $C'_2 > 0$  tal que

$$\|T_{\Sigma,*}^i f\|_{L^2(\Sigma)} \leq C'_2 \|f\|_{L^2(\Sigma)}. \quad (2.3.8)$$

En otras palabras, si sabemos que a cualquier escala tenemos pedazos grandes de superficies en donde podemos acotar uniformemente los operadores asociados a los truncamientos entonces lo mismo es cierto de  $\Sigma$ . En particular  $T_{\Sigma,*}^i$  es acotado siempre que  $\Sigma$  sea UR.

La prueba de este teorema se basa en las llamadas ‘good  $\lambda$  inequalities’, que dicen lo siguiente:

**Proposición 2.3.3** ([13, Lemme 12]). *Sea  $(X, \mu)$  un espacio de medida y  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  medible tal que, excepto en un conjunto de medida finita,  $u = v \in L^p(\mu)$ . supongamos además que existe  $0 < \eta < 1$  y, para toda  $\varepsilon > 0$  una constante  $\gamma > 0$ , tal que para toda  $\lambda > 0$*

$$\mu(\{x \in X : u(x) > (1 + \varepsilon)\lambda, v(x) \leq \varepsilon\lambda\}) \leq (1 - \eta)\mu(\{x \in X : u(x) > \lambda\}). \quad (2.3.9)$$

Entonces existe  $C = C(p, \varepsilon, \eta, \gamma)$  tal que  $\|u\|_{L^p(\mu)} \leq \|v\|_{L^p(\mu)}$ .

Siendo informales lo que dice la proposición es que si  $u = v$  en un conjunto grande y tenemos un control local ‘débil’ pero uniforme de  $u$  en términos de  $v$ , entonces tenemos un control global (que es justo la filosofía del Teorema 2.3.2).

La extensión buscada es consecuencia entonces de todo lo anterior. Formalmente tenemos

**Teorema 2.3.3.** *Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  satisface que  $\partial\Omega$  es UR entonces  $\mathcal{C}$  define un operador acotado en  $L^p(\partial\Omega)$  para toda  $1 < p < \infty$ .*

De hecho, recientemente se probó que si los operadores con núcleo  $K_i$  son todos acotados en  $\Sigma$  (a priori Ahlfors regular) entonces  $\Sigma$  es UR (ver [43]). Esto nos dice que, al menos en la clase de conjuntos Ahlfors regulares, UR es lo más general que podemos esperar donde  $\mathcal{C}$  es continuo.

Nos gustaría poder tener un análogo completo del Teorema 2.2.3 en esta generalidad. La primera parte está contenida en el teorema anterior. La cota para la función maximal no es difícil obtener pues para obtener

$$\mathcal{N}(\mathcal{C}f)(x) \lesssim \mathcal{M}f(x) + \mathcal{C}_*f(x) \quad (2.3.10)$$

no usamos la regularidad de  $\Omega$ , por lo que este resultado sigue siendo válido. Para ver las llamadas fórmulas de salto (2.2.13) nos basta poder tener un teorema de la divergencia en general y que  $\partial\Omega$  tenga buenas aproximaciones por hiperplanos  $\sigma$ -c.d. (para poder concluir que  $\varepsilon^{-n}\sigma_n^{-1}\sigma(B_\varepsilon(x) \setminus \bar{\Omega}) \rightarrow 1/2$  para casi toda  $x$ ). La respuesta a esto es usar conjuntos de perímetro localmente finito (ver [19]). El teorema de la divergencia es entonces

**Teorema 2.3.4** ([27, Theorem 3.2.8]). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  acotado o de frontera no acotada tal que  $\sigma(\partial\Omega \setminus \partial_*\Omega) = 0$  y  $\partial\Omega$  Ahlfors regular. Supongamos que  $u \in C(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$  satisface*

1.  $\operatorname{div}(u) \in L^1(\Omega)$ .
2.  $\mathcal{N}u \in L^1(\partial\Omega) \cap L^p_{loc}(\partial\Omega)$  para algún  $p > 1$ .
3.  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d.

Entonces, si  $\nu$  denota la normal exterior en el sentido de medida, tenemos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu d\sigma. \quad (2.3.11)$$

De hecho, en este caso particular, nos bastaría un resultado como el Lema 1 en la sección 5.7 de [19], pero con las mismas hipótesis (ya necesitábamos Ahlfors regularidad para estudiar  $\mathcal{C}$ ), tenemos este resultado que además nos permite generalizar los resultados de las secciones 1.7 y 1.8 a un contexto más general.

Concluimos con el resultado

**Teorema 2.3.5.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\partial\Omega$  es UR y  $\sigma(\partial\Omega \setminus \partial_*\Omega) = 0$ . Entonces las conclusiones del Teorema 2.2.3 son válidas.*

# Capítulo 3

## Medida armónica y límites no tangenciales

Empezamos este capítulo con un breve recordatorio de la definición de funciones armónicas y sus propiedades básicas. La mayoría de los resultados se dan sin prueba pero pueden consultarse en libros básicos de ecuaciones diferenciales (por ejemplo [18]). Enunciamos también algunos resultados un poco más elaborados de regularidad hasta la frontera, que se pueden consultar en [21].

Después pasamos a definir la medida armónica de un dominio regular para el laplaciano. Los resultados de esta parte pueden consultarse en [24].

El resto del capítulo está dedicado a probar el siguiente resultado

**Teorema 3.0.6.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio Lipschitz. Sean  $E \subset \partial\Omega$  y  $u$  una función armónica en  $\Omega$  tal que, para alguna  $\alpha > 0$ ,  $\mathcal{N}_\alpha u(y) \leq M$  para  $y \in E$  (ver la sección 1.5 para las definiciones). Entonces existe  $F \subset E$  con  $\sigma(F) = 0$  tal que para toda  $\beta > 0$*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Gamma_\beta(y)}} u(x) \quad \text{existe para toda } y \in E \setminus F. \quad (3.0.1)$$

En otras palabras, si una función armónica está no-tangencialmente acotada en algún conjunto en  $\partial\Omega$ , entonces tiene límites no-tangenciales  $\sigma$ -c.d. en dicho conjunto.

Para probar esto necesitamos pasar por la medida armónica. Para ver que esto es natural podemos considerar el caso de  $\Omega = B$  la bola unitaria y  $E = \partial B$ . En este caso tenemos que las medidas armónicas están dadas por  $d\omega^x(y) = K(x, y)d\sigma(y)$ , donde  $K$  es el núcleo de Poisson de  $B^1$  y la prueba del teorema en este caso se reduce a probar que, en cierto sentido,  $K$  se comporta como una identidad aproximada:

---

<sup>1</sup>En otras palabras  $K(x, y) = c_n \frac{1-|x|^2}{|x-y|^{n+1}}$ .

Para toda  $0 < r < 1$  tenemos que

$$u(rx) = \int_{\partial B} u(ry)K(x, y)d\sigma(y), \quad x \in B. \quad (3.0.2)$$

Por convergencia débil-\* en  $L^\infty(\sigma)$  tenemos la representación, con  $f \in L^\infty(\sigma)$ ,

$$u(x) = \int_{\partial B} f(y)K(x, y)d\sigma(y). \quad (3.0.3)$$

Entonces, si tomamos  $x \in \Gamma_\alpha(z)$ ,

$$\begin{aligned} |u(x) - f(z)| &\leq \int_{\partial B} |f(y) - f(z)|K(x, y)d\sigma(y) \\ &\leq \left( \int_{\Delta_s(z)} + \int_{\partial B \setminus \Delta_s(z)} \right) |f(y) - f(z)|K(x, y)d\sigma(y) \end{aligned} \quad (3.0.4)$$

donde  $\Delta_s(z) = B_s(z) \cap \partial B$ . La segunda integral tiende a cero cuando  $x \rightarrow z$  pues

$$K(x, y) \leq C(s, n, \alpha)(1 - |x|^2), \quad y \in \partial B \setminus \Delta_s(z), \quad (3.0.5)$$

que es fácil ver de la representación explícita de  $K$ . Por otro lado, la primera integral la podemos estimar como sigue: Ponemos  $R_j = \Delta_{2^j t}(z) \setminus \Delta_{2^{j-1} t}(z)$  donde  $t = |x - z|$  es pequeño. Entonces tenemos que

$$K(x, y) \leq C(n, \alpha) \frac{1}{2^j 2^{jn} t^n}, \quad y \in R_j. \quad (3.0.6)$$

De esto concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_s(z)} |f(y) - f(z)|K(x, y)d\sigma(y) &\leq \sum_{j=1}^N \frac{C}{2^j 2^{jn} t^n} \int_{R_j} |f(x) - f(z)|d\sigma(y) \\ &\leq C \sum_{j=1}^N \frac{1}{2^j} \int_{\Delta_{2^j t}(z)} |f(y) - f(z)|d\sigma(y) \\ &\leq C(n, \alpha) \sup_j \int_{R_j} |f(y) - f(z)|d\sigma(y). \end{aligned} \quad (3.0.7)$$

La conclusión sigue siempre que  $z$  sea un punto de densidad 1 de  $f$ .

Los puntos principales en la prueba son

1.  $B$  es estrellado respecto de 0.

2. La representación (3.0.3).
3. Estimaciones para las integrales en (3.0.4).

La condición 1 nos permite considerar  $u(ry)$ , que simplifica la discusión. En la primera sección entonces generalizamos esta propiedad a una clase de dominios que nos permitirán aplicar estos argumentos en general.

Aunque en principio no sabemos siquiera que la medida armónica sea absolutamente continua respecto de la medida de superficie, la representación (3.0.3) la podemos poner en la forma

$$\int_{\partial B} f(y) d\omega^x(y) = \int_{\partial B} f(y) N(x, y) d\omega^0(y). \quad (3.0.8)$$

Donde  $N = d\omega^x/d\omega^0$ , que vale en dominios Lipschitz en general.

El último punto, junto con lo anterior, nos dice que podemos cambiar estimaciones para  $K$  por estimaciones para  $N$ . Esto es el propósito de la segunda sección, en donde obtenemos los análogos de (3.0.5) y (3.0.6) para  $N$ .

En la tercera sección obtenemos el resultado local, i.e. para  $E \subset \partial\Omega$ , vía unos dominios generados a partir de conos interiores de  $\Omega$ . La idea, siendo informales, es la siguiente: Tomamos  $\Omega_E = \cup_{y \in E} \Gamma_\alpha(y)$ , entonces  $\Omega_E$  es un dominio Lipschitz y  $u$  está acotada en  $\Omega_E$  por lo que los resultados de las secciones anteriores implican convergencia no-tangencial  $\omega_E$ -c.d.<sup>2</sup> en  $\partial\Omega_E$ . Concluimos notando que  $\omega_E(F) = 0$  implica  $\omega(F) = 0$  si  $F \subset E$ .

Todo esto nos da el Teorema 3.0.6 con un conjunto excepcional  $F$  de  $\omega$ -medida 0. La última sección está dedicada a probar que  $\omega \ll \sigma \ll \omega$ . Para esto obtenemos una estimación del estilo ( $\nu$  denotando la normal exterior a  $\Omega$  y  $G$  la función de Green de  $\Omega$ )

$$\frac{\omega^0(\Delta)}{\sigma(\Delta)} \approx \frac{G(0, y - r\nu(y))}{r}, \quad \Delta = \Delta_r(y). \quad (3.0.9)$$

Con los resultados de las secciones anteriores podemos concluir que el lado derecho tiene límite, cuando  $r \rightarrow 0$ ,  $\omega^0$ -c.d. por lo que el  $\omega \ll \sigma$  sigue, esencialmente, del teorema de diferenciación de medidas de Radon. Para ver la otra parte probamos que  $d\omega/d\sigma \in L^2(\sigma)$  y una cota uniforme para la norma  $L^2$  de esta derivada, concluyendo vía un cambio de escala y un argumento por contradicción.

En la última sección damos referencias para generalizaciones de estos resultados, por un lado a operadores elípticos en forma de divergencia en dominios Lipschitz, y por otro de funciones armónicas en los llamados dominios NTA.

---

<sup>2</sup> $\omega_E$  denota la medida armónica en  $\Omega_E$ .

### 3.1. Funciones armónicas

**Definición 3.1.1.** *Sea  $U$  un abierto en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . y  $u \in C^2(U)$ . Decimos que  $u$  es armónica en  $U$  si*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{en } U. \quad (3.1.1)$$

En lo que sigue  $U$  siempre denota un abierto y  $u$  una función armónica en  $U$ .

**Proposición 3.1.1** (Propiedad del promedio). *Sean  $x \in U$  y  $r < d(x, \partial U)$  entonces*

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u(y) dy = \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y). \quad (3.1.2)$$

**Proposición 3.1.2** (Regularidad).  *$u \in C^\infty(U)$  y para todo compacto  $K \subset U$ ,  $k \in \mathbb{N}$  existe  $C = C(K, k, n, U)$  tal que*

$$\sup_K |D^k u| \leq C \sup_U |u|. \quad (3.1.3)$$

**Proposición 3.1.3** (Principio del máximo). *Si  $u$  tiene un máximo (mínimo) interior entonces  $u = c$  constante. Si asumimos  $U$  acotado y  $u \in C(\bar{\Omega})$  entonces*

$$\sup_U u = \sup_{\partial\Omega} u. \quad (3.1.4)$$

**Proposición 3.1.4** (Desigualdad de Harnack para  $B_1$ ). *Si  $U = B_1(0)$  y  $u \in C(\bar{U})$  positiva entonces*

$$\frac{1 - |x|}{(1 + |x|)^n} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1 + |x|}{(1 - |x|)^n} u(0), \quad x \in U. \quad (3.1.5)$$

**Proposición 3.1.5** (Lema de Hopf). *Supongamos que  $u \in C^1(\bar{U})$  y que existe  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que  $u(x_0) > u(x)$  para toda  $x \in U$  entonces*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0, \quad \nu \text{ la normal exterior.} \quad (3.1.6)$$

**Proposición 3.1.6** (Convergencia monótona). *Sea  $u_j$  una sucesión de funciones armónicas en  $U$  tal que  $u_j \leq u_{j+1}$  para toda  $j$ . Entonces  $u_j$  diverge a infinito en  $U$  o converge uniformemente en compactos a una función armónica.*

**Proposición 3.1.7** (Estimaciones de Schauder). *Sea  $y \in \partial U$  y supongamos que existe una vecindad  $V$  de  $y$  tal que  $U \cap V$  se ve como el dominio arriba de la gráfica de una función  $C^{2,\alpha}$  para alguna  $0 < \alpha < 1$ . Si  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{U})$  entonces existe  $C = C(U, V, n)$  tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(U \cap V)} \leq C (\|u\|_{C^{2,\alpha}(\partial U)} + \|u\|_{L^\infty(U)}) \quad (3.1.7)$$

donde ponemos

$$\begin{aligned} \|g\|_{C(U)} &= \sup_U |g|, \quad \|g\|_{C^{2,\alpha}(U)} = \|g\|_{C(U)} + \|Dg\|_{C(U)} + \|D^2g\|_{C(U)} + [D^2g]_\alpha, \\ [g]_\alpha &= \sup_{x,y \in U} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

La norma en la frontera es el ínfimo de las normas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de las extensiones  $C^{2,\alpha}$  de  $u|_{\partial\Omega}$ .

**Proposición 3.1.8** (Regularidad elíptica). *Supongamos  $U$  suave,  $u \in C(\bar{U})$  y que  $u|_{\partial\Omega}$  admite una extensión suave a  $\mathbb{R}^{n+1}$  entonces  $u \in C^\infty(\bar{U})$ .*

**Ejemplo 3.1.1.** *Si  $u$  es una función holomorfa en un abierto  $U \subset \mathbb{C}$  entonces  $\operatorname{Re}(u)$ ,  $\operatorname{Im}(u)$  son armónicas en  $U$ . Esto se puede ver del hecho que*

$$\Delta \operatorname{Re}(u) + i\Delta \operatorname{Im}(u) = \Delta u = c \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} u = 0. \quad (3.1.9)$$

## 3.2. Medida armónica

Empezamos esta sección con un recordatorio del método de Perron para resolver el problema de Dirichlet para el laplaciano, referimos a [24] para los detalles.

**Definición 3.2.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto,  $u \in C(\Omega)$ . Decimos que  $u$  es subarmónica en  $\Omega$  si para toda  $x \in \Omega$  tenemos*

$$u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y), \quad r < d(x, \partial\Omega). \quad (3.2.1)$$

Decimos que  $u$  es superarmónica si  $-u$  es subarmónica.

**Definición 3.2.2.** Sea  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\underline{H}_f(x) = \sup \left\{ u(x) : u \text{ subarmónica en } \Omega \text{ y } \limsup_{\Omega \ni x \rightarrow y} u(x) \leq f(y), \quad \forall y \in \partial\Omega \right\}$$

$$\overline{H}_f(x) = \inf \left\{ u(x) : u \text{ superarmónica en } \Omega \text{ y } \liminf_{\Omega \ni x \rightarrow y} u(x) \geq f(y), \quad \forall y \in \partial\Omega \right\}$$

**Definición 3.2.3.** Decimos que  $f$  como arriba es **resolutiva** si

$$\overline{H}_f = \underline{H}_f =: H_f \tag{3.2.2}$$

y además  $H$  es armónica en  $\Omega$ .

Uno de los resultados más importantes es el siguiente

**Teorema 3.2.1.** Si  $f$  es Borel medible y acotada, entonces  $f$  es resolutiva

Para ver el comportamiento en la frontera de  $H_f$  introducimos la noción de barreras

**Definición 3.2.4.** Sea  $x \in \partial\Omega$ , decimos que  $\zeta : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  es una barrera en  $x$  si se satisface

1.  $\zeta$  es superarmónica en  $\Omega$ .
2.  $\lim_{\Omega \ni y \rightarrow x} \zeta(y) = 0$
3.  $\zeta > 0$  en  $\Omega$
4.  $\inf \{ \zeta(y) : y \in \Omega \setminus U_x \} > 0$  para toda vecindad  $U_x$  de  $x$  (en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).

Además, si las primeras tres condiciones se satisfacen con  $\Omega$  reemplazado por  $\Omega \cap V_x$  para alguna vecindad  $V_x$  e ignorando la cuarta, decimos que  $\zeta$  es una barrera local.

Un resultado bastante útil en este contexto es el siguiente

**Teorema 3.2.2.** Sea  $x \in \partial\Omega$  entonces son equivalentes

1. Existe una barrera en  $x$
2. Existe una barrera local en  $x$

**Definición 3.2.5.** Decimos que  $x \in \partial\Omega$  es un punto regular si para toda  $f \in C(\partial\Omega)$  tenemos

$$\lim_{\Omega \ni y \rightarrow x} H_f(y) = f(x) \tag{3.2.3}$$

Entonces el resultado principal es el siguiente

**Teorema 3.2.3.**  $x \in \partial\Omega$  es un punto regular si y solo si existe una barrera (local) en  $x$ .

**Definición 3.2.6.** Decimos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es **regular para el laplaciano** si todo punto de  $\partial\Omega$  es regular o, equivalentemente, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2.4)$$

tiene siempre una solución clásica, para  $g \in C(\partial\Omega)$ .

**Lema 3.2.1.** Si para  $x \in \partial\Omega$  existe un cono circular  $\mathcal{C}_x$  con vértice en  $x$  y que abre en una sola dirección tal que  $\mathcal{C}_x \cap \bar{\Omega} = \{x\}$  entonces existe una barrera en  $x$

**Corolario 3.2.1.** Si  $\Omega$  satisface la condición del cono exterior entonces es regular para el laplaciano. En particular,  $\Omega$  Lipschitz es regular para el laplaciano.

Otra propiedad que será útil a la hora de aplicar el principio del máximo es

**Proposición 3.2.1.** Sea  $\Omega$  regular y  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Supongamos que  $f$  es continua en  $y \in \partial\Omega$ . Entonces

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow y} H_f(x) = f(y). \quad (3.2.5)$$

En particular si  $U \subset \partial\Omega$  abierto, con  $f = 1_U$  entonces  $H_f \in C(\Omega \cup U)$ .

Pasamos ahora a la medida armónica

**Definición 3.2.7.** Dado  $\Omega$  Lipschitz definimos la medida armónica con respecto a  $x \in \Omega$ , denotada  $\omega^x$ , como la única medida de Radon sobre  $\partial\Omega$  tal que

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f d\omega^x, \quad \forall f \in C(\partial\Omega) \quad (3.2.6)$$

donde  $u$  es la extensión armónica de  $f$  a  $\Omega$ .

**Observación 3.2.1.** La existencia de  $\omega^x$  es consecuencia del principio del máximo y el teorema de representación de Riesz.

**Teorema 3.2.4.** *Sea  $f$  una función Borel medible y acotada en  $\partial\Omega$  entonces  $f \in L^1(\omega^x)$  para toda  $x \in \Omega$  y tenemos*

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f d\omega^x &= \sup \left\{ v(x) : v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ subarmónica y } \limsup_{\Omega \ni z \rightarrow y} v(z) \leq f(y) \quad \forall y \in \partial\Omega \right\} \\ &= \inf \left\{ w(x) : w : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ superarmónica y } \liminf_{\Omega \ni z \rightarrow y} w(z) \geq f(y) \quad \forall y \in \partial\Omega \right\} \\ &= u(x) \end{aligned}$$

donde  $u$  es la extensión armónica de  $f$  a  $\Omega$ . En particular, si  $E \subset \partial\Omega$  es Borel medible tenemos

$$\begin{aligned} \omega^x(E) &= \sup \left\{ v(x) : v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ subarmónica y } \limsup_{\Omega \ni z \rightarrow y} v(z) \leq 1_E(y) \quad \forall y \in \partial\Omega \right\} \\ &= \inf \left\{ w(x) : w : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ superarmónica y } \liminf_{\Omega \ni z \rightarrow y} w(z) \geq 1_E(y) \quad \forall y \in \partial\Omega \right\} \end{aligned}$$

**Corolario 3.2.2.** *Como función de  $x \in \Omega$  tenemos que  $\omega^x(E)$  es armónica para todo  $E \subset \partial\Omega$  Borel medible.*

**Lema 3.2.2.** *Sean  $x, x_0 \in \Omega$  entonces*

$$\omega^x \ll \omega^{x_0} \ll \omega^x \tag{3.2.7}$$

*Demostración.* Esto es nada mas una consecuencia de la desigualdad de Harnack: Sean  $E \subset \partial\Omega$  y  $u$  la extensión armónica de  $1_E$  a  $\Omega$ . Por el principio del máximo tenemos  $0 \leq u \leq 1$ . Si escogemos  $x, x_0 \in K \subset \Omega$  compacto entonces la desigualdad de Harnack nos da  $C = C(\Omega, K)$  tal que

$$C^{-1} \leq \frac{u(x)}{u(x_0)} \leq C \tag{3.2.8}$$

o, de manera equivalente,

$$C^{-1}\omega^{x_0}(E) \leq \omega^x(E) \leq C\omega^{x_0}(E) \tag{3.2.9}$$

□

### 3.3. Dominios Lipschitz estrellados

El objetivo de esta sección es introducir los dominios que utilizaremos para probar la existencia de límites no-tangenciales para funciones armónicas no-negativas en un dominio Lipschitz. La ventaja de estos dominios es que tenemos un ‘centro’, lo que nos permite estimar de manera mas sencilla la medida armónica del dominio.

Para empezar supongamos que tenemos  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $0 < \delta < f$  para algún  $\delta > 0$ . Podemos definir un dominio de manera natural como

$$\Omega = \{r\theta \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq r < f(\theta)\}, \quad (3.3.1)$$

recordando la representación de un elemento  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  en coordenadas polares  $r\theta$ , con  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in \mathbb{S}^n$ . En este caso decimos que  $f$  **define a**  $\Omega$ .

Como estamos interesados en la clase de dominios Lipschitz, una condición natural sobre  $f$  es que esta sea Lipschitz. Para evitar dificultades técnicas pediremos una condición adicional que, en particular, nos da de inmediato la regularidad con respecto al problema de Dirichlet para el Laplaciano.

Recordamos que dado  $\Omega$  como arriba definimos

$$\Omega_+ := \Omega, \quad \Omega_- := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}. \quad (3.3.2)$$

Tenemos también, para  $y \in \partial\Omega$ , los conos  $\tilde{\Gamma}_{\alpha,h}^\pm(y)$ , definidos como los conos circulares rectos de apertura  $0 < \alpha < \pi/2$ , vértice en  $y$  y truncados por la bola  $B_h(y)$ , de tal manera que  $\tilde{\Gamma}_{\alpha,h}^+(y)$  abre hacia el 0, mientras que  $\tilde{\Gamma}_{\alpha,h}^-(y)$  abre en dirección opuesta (en otras palabras es la reflexión del primer cono a través del hiperplano ortogonal a  $y$  anclado en  $y$ ).

**Definición 3.3.1.** Sean  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función Lipschitz con  $0 < \delta < f$  y  $\Omega$  el dominio definido por  $f$ . Decimos que  $\Omega$  es un **dominio Lipschitz estrellado** si además existen  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $h > 0$  tal que para toda  $y \in \partial\Omega$  los conos  $\tilde{\Gamma}_{\alpha,h}^\pm(y) \subset \Omega_\pm$ .

**Observación 3.3.1.** Hay que notar que la uniformidad de  $h$  respecto de  $y \in \partial\Omega$  es solo importante en el sentido que está acotada por abajo. En otras palabras podemos pedir que, por ejemplo  $h = |y| + \delta$  (donde  $\delta$  es como en la definición). Además, haciendo  $\alpha$  un poco más pequeño de ser necesario, podemos pedir que tenga sentido truncar estos conos por la bola de centro 0 y radio  $\delta$  (ver figura 3.2).

**Definición 3.3.2.** Definimos el cono interior estándar en un punto  $y \in \partial\Omega$ , denotado  $\Gamma^+(y)$  como el cono de la observación anterior (figura 3.2). El cono exterior,  $\Gamma^-(y)$ , es el reflejado, respecto del hiperplano ortogonal a  $y$  anclado en  $y$ , de  $\Gamma^+(y)$ .

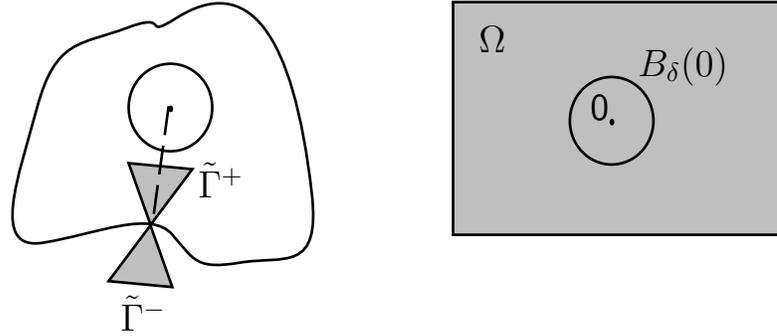


Figura 3.1: Ejemplos de dominios estrellados

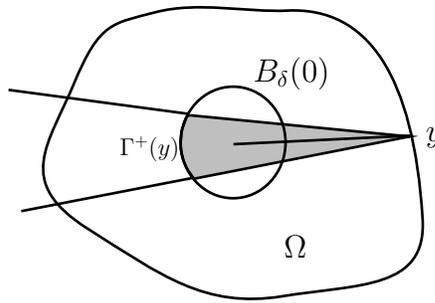


Figura 3.2: Los conos interiores estándar  $\Gamma^+$ .

**Observación 3.3.2.** *Por construcción  $\Gamma^+(y) \subset \Omega$  para  $y \in \partial\Omega$ , pero además, si movemos este para poner su vértice en  $x = ty$  con  $0 < t < 1$ , si seguimos truncando el cono obtenido por la bola de radio  $\delta$ , dicho cono se sigue quedando contenido en  $\Omega$ . Tiene sentido entonces poner  $\Gamma^+(x)$  como dicho cono.*

Los siguientes dos resultados sirven dos propósitos: Por un lado nos dicen que la hipótesis de que  $f$  sea Lipschitz es redundante, y por otro que la clase de dominios Lipschitz estrellados es suficientemente general. Esto último se verá cuando definamos la clase de dominios especiales que son los que usaremos para localizar.

El primer resultado es solamente un análogo de la caracterización de funciones Lipschitz en  $\mathbb{R}^n$  vía conos que se quedan por arriba de su gráfica.

**Proposición 3.3.1.** *Sea  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  con  $0 < \delta < f$ . Entonces  $f$  es Lipschitz con*

$$M := [f]_1 := \sup_{\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^n} \frac{|f(\theta_1) - f(\theta_2)|}{|\theta_1 - \theta_2|} \tag{3.3.3}$$

si y solo si

$$\{r\theta \in \mathbb{R}^{n+1} : M|\theta - \theta_1| < r - f(\theta_1)\} \subset \Omega_-, \quad \forall f(\theta_1)\theta_1 \in \partial\Omega. \quad (3.3.4)$$

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es Lipschitz con seminorma  $M$  y sean  $r\theta, \theta_1$  tal que  $M|\theta - \theta_1| < r - f(\theta_1)$ . Supongamos que  $r\theta \in \bar{D}$  entonces  $0 \leq r \leq f(\theta)$ . Combinando esto tenemos

$$M|\theta - \theta_1| < r - f(\theta_1) \leq f(\theta) - f(\theta_1) \leq M|\theta - \theta_1|, \quad (3.3.5)$$

que es una contradicción, por lo que  $r\theta \in D_-$ .

Para la otra dirección tomemos  $\theta_i \in \mathbb{S}^n$  y, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $f(\theta_2) \geq f(\theta_1)$ , entonces por hipótesis tenemos que, dado que  $f(\theta_2)\theta_2 \notin D_-$ ,

$$M|\theta_2 - \theta_1| \geq f(\theta_2) - f(\theta_1) = |f(\theta_2) - f(\theta_1)| \quad (3.3.6)$$

por lo que  $f$  es Lipschitz con seminorma  $M$ . □

**Observación 3.3.3.** *De manera análoga podríamos haber utilizado la inclusión*

$$\{r\theta : M|\theta - \theta_1| < f(\theta_1) - r\} \subset \Omega_+, \quad \forall f(\theta_1)\theta_1 \in \partial\Omega. \quad (3.3.7)$$

lo que implica que teniendo la contención interior o exterior implica la otra.

Estos conjuntos juegan el papel de los conos usuales en el caso de funciones en  $\mathbb{R}^n$  (ver figura 3.3).

**Proposición 3.3.2.** *Sean  $M > 0$  y  $0 < s < \sqrt{2}M + 1$ . Entonces existe  $M'(M, s) > 0$  tal que tenemos, para  $\mathbb{R}^{n+1} \ni x = r\theta = (x', t)$  con  $x' \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$\{r\theta : M|\theta - e_{n+1}| < r - 1\} \cap B_s(0) \subset \{(x', t) : M'|x'| < t - 1\} \cap B_s(0)$$

Observamos que el conjunto de la derecha es un cono recto usual, que abre hacia ‘arriba’ con vértice en  $e_{n+1}$ . En particular, estas dos proposiciones implican que la condición que impusimos sobre los conos en un dominio estrellado implican que la función que define es Lipschitz: Módulo una constante multiplicativa, podemos suponer que  $f(\theta_1) = 1$ , rotando podemos suponer que  $\theta_1 = e_{n+1}$  por lo que estamos en el caso de la proposición. En otras palabras tenemos

**Corolario 3.3.1.** *Supongamos que  $\Omega$  un dominio definido por  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow (\delta, \infty)$  que satisface la condición de los conos de la Definición 3.3.1. Entonces  $f$  es Lipschitz.*

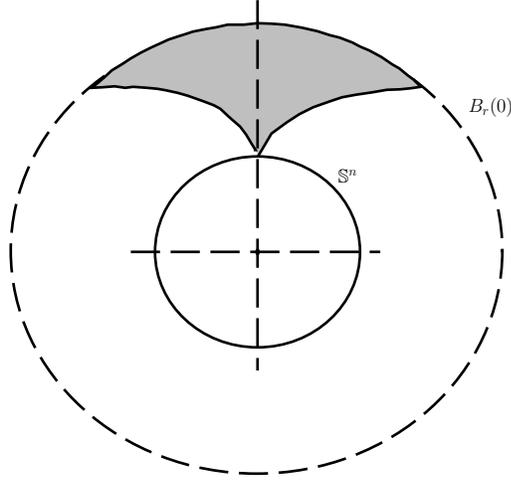


Figura 3.3: Conos en el caso esférico.

*Demostración Proposición 3.3.2.* La prueba se sigue del hecho que

$$\begin{aligned} \{r\theta : M|\theta - e_{n+1}| < r - 1\} \cap B_s(0) &= \bigcup_{0 < t < s} A_t, \\ A_t &:= \{t\theta : M|\theta - e_{n+1}| < t - 1\} \cap \partial B_t(0). \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Supongamos válida la igualdad. Notamos que  $A_t$  es simplemente la intersección de  $\partial B_t(0)$  con el cono circular recto generado por el vértice 0 y los puntos de  $B_{(t-1)/M}(e_{n+1}) \cap \mathbb{S}^n$ . Como estos conos comparten el eje  $e_{n+1}$  y su ángulo de apertura crece con  $t$ , vemos que si  $\alpha$  es el ángulo asociado al cono que define  $A_s$ , el cono recto de apertura  $\alpha$  satisface lo que queremos. Además es fácil ver, usando la ley de cosenos, que

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{(s - 1)^2}{2M^2} \tag{3.3.9}$$

de donde obtenemos inmediatamente la dependencia correcta de  $M'$ .

Basta entonces probar la primera igualdad de conjuntos. Tomemos un punto  $r\theta$  en el primer conjunto, entonces  $0 < r < s$  y  $M|\theta - e_{n+1}| < r - 1$  por lo que  $r\theta \in A_r$ . De la misma manera, claramente  $A_r$  se queda contenido en el primer conjunto.  $\square$

**Observación 3.3.4.** Si  $\Omega$  es un dominio Lipschitz estrellado entonces toda  $y \in \partial\Omega$  se queda en una carta coordenada de tal manera que el sistema coordenado de esta está dada por  $\{y\}^\perp \times \mathbb{R}y$  y  $\partial\Omega$  está dada por una función Lipschitz  $\varphi : \{y\}^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ .

Por compacidad podemos pedir que el radio del cilindro donde  $\varphi$  define a la frontera tenga radio uniformemente acotado por debajo de  $\theta^3$ .

Notamos que si  $\Omega$  es un dominio estrellado con  $f$  una función Lipschitz que lo define entonces el mapeo  $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $\Phi(r\theta) = rf(\theta)\theta$  es un homeomorfismo bi-Lipschitz que manda la bola unitaria en  $\Omega$ . En particular tenemos que, para toda  $0 < r < 1$  y  $y \in \partial\Omega$ ,

$$M^{-1}r \leq d((1-r)y, \partial D) \leq Mr \quad (3.3.10)$$

para una  $M$  que solo depende de  $f, \delta$  como en la definición de  $\Omega$ . Para ver esto simplemente ponemos  $y = f(\theta)\theta$  entonces  $\Phi^{-1}((1-r)y) = (1-r)\theta$  por lo que tenemos

$$M^{-1}r = M^{-1}d((1-r)\theta, \mathbb{S}^n) \leq d((1-r)y, \partial D) \leq Md((1-r)\theta, \mathbb{S}^n) = Mr \quad (3.3.11)$$

**Definición 3.3.3.** *Dados  $x_1, x_2 \in \Omega$ , decimos que  $B^1, \dots, B^k$  es una **M-cadena de Harnack** entre  $x_1$  y  $x_2$ , de longitud  $k$ , si*

1.  $B^j$  son bolas con radios  $r_j$  tal que

$$M^{-1}r_j \leq d(B^j, \partial\Omega) \leq Mr_j. \quad (3.3.12)$$

2.  $x_1 \in B^1$ ,  $x_2 \in B^k$  y  $B^j \cap B^{j+1} \neq \emptyset$ .

Decimos que  $\Omega$  satisface la **condición de cadena de Harnack** si existe  $M > 0$  tal que para toda  $\varepsilon > 0$  y  $x_i \in \Omega$  con  $|x_1 - x_2| < C\varepsilon$  para alguna  $C > 0$  y  $d(x_i, \partial\Omega) > \varepsilon$  existe una  $M$ -cadena de Harnack de longitud que depende de  $C$  pero no de  $\varepsilon$  entre  $x_1$  y  $x_2$ .

**Observación 3.3.5.** *Con ayuda del núcleo de Poisson para la bola unitaria y reescalando tenemos, para toda  $u > 0$  armónica en  $B_r(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$*

$$r^{n-1} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^n} u(0) \leq u(x) \leq r^{n-1} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^n}, \quad x \in B_r(0) \quad (3.3.13)$$

de donde obtenemos, restringiendo a  $x \in B_{sr}(0)$  para  $0 < s < 1$ ,

$$\frac{1-s}{(1+s)^n} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1+s}{(1-s)^n}. \quad (3.3.14)$$

---

<sup>3</sup>De hecho este radio depende solamente de los ángulos de apertura de los conos  $\Gamma^\pm(y)$ .

Esto es útil pues de la primera condición sobre las bolas en una cadena de Harnack tenemos que si  $B^j = B_{r_j}(y_j)$  entonces  $B_{(1+M^{-1})r_j}(y_j) \subset \Omega$ , por lo que para toda  $x \in B^j$  tenemos

$$C(M)^{-1}u(y_j) \leq u(x) \leq C(M)u(y_j), \quad (3.3.15)$$

para toda  $u > 0$  armónica en  $D$ . Entonces la condición de cadena de Harnack implica que, para toda  $u$  como antes y  $x_i$  como en la definición, existe  $C$  que solo depende de  $k$  y  $M$  tal que

$$C^{-1}u(x_1) \leq u(x_2) \leq Cu(x_1). \quad (3.3.16)$$

En otras palabras podemos ver la condición de cadena de Harnack como una manera de obtener una forma más cuantitativa<sup>4</sup> de la desigualdad de Harnack (Hay que notar que estas desigualdades son invariantes bajo reescalamientos). Esto, junto con el principio del máximo serán las herramientas fundamentales para obtener las estimaciones que necesitamos de la medida armónica.

**Proposición 3.3.3.** *Sea  $\Omega$  estrellado, entonces existe  $M$ , que solo depende de la apertura de los conos estándar  $\Gamma^\pm$  y de  $\delta$ , tal que  $\Omega$  satisface la condición de cadena de Harnack con  $M$ .*

*Demostración.* La prueba no es mas que una justificación de nuestra definición de dominio estrellado. Probaremos el resultado primero para  $B_1(0)$  y luego veremos que, vía el mapeo  $\Phi(r\theta) = rf(\theta)\theta^5$ , podemos pasar, casi sin problemas, al caso general.

Sea  $U$  la bola unitaria en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y sean  $x_i \in U$ ,  $\varepsilon > 0$  tal que  $d(x_i, \partial U) = s_i\varepsilon$ , para algunos  $1 < s_1 \leq s_2$ , y con  $|x_1 - x_2| < C\varepsilon$ . Como siempre, denotamos por  $[x_1, x_2] \subset U$  al segmento de recta entre  $x_1$  y  $x_2$ .

Ahora, si tomamos cualquier  $x \in [x_1, x_2]$  y si  $B \subset U$  denota una bola con radio  $r$  y centro  $x$  tenemos que  $d(B, \partial U) = d(x, \partial U) - r$  por lo que

$$M^{-1}r \leq d(B, \partial U) \leq Mr \quad \Leftrightarrow \quad (M^{-1} + 1)r \leq d(x, \partial U) \leq (M + 1)r. \quad (3.3.17)$$

Entonces, con una tal  $x$ , podemos poner  $B^x$  como la bola de radio  $(1 - |x|)t = d(x, \partial U)t =: r_x$  y centro en  $x$ , donde  $0 < t < 1$  es una constante que dejamos libre por el momento. Tenemos además que  $d(x, \partial U) \geq d(x_1, \partial U) = s_1\varepsilon$  (pues  $B_{1-|x_1|}(0)$

<sup>4</sup>En el sentido de que tenemos una dependencia explícita de las constantes involucradas, en términos de  $M$ .

<sup>5</sup>Recordamos que  $f$  define  $\Omega$ .

es convexa), por lo que  $r_x \geq s_1 \varepsilon t$ . De esto podemos concluir que para llegar de  $x_1$  a  $x_2$  con estas bolas  $B^x$  necesitamos a lo más

$$2 \frac{C\varepsilon}{ts_1\varepsilon} = 2t \frac{C}{s_1} \leq 2 \frac{C}{t}. \quad (3.3.18)$$

Esto prueba la proposición para el caso de una bola.

Consideramos ahora un dominio estrellado  $\Omega$  definido por una función  $f$ . Recordamos que  $\Phi(r\theta) = rf(\theta)\theta$  es un homeomorfismo bi-Lipschitz con inversa  $\Psi(r\theta) = r/f(\theta)\theta$  y  $[\Phi]_1, [\Psi]_1$  dependen solamente de la apertura de los conos y  $\delta$ .  $\Psi(\Omega) = U$  por lo que idea será ir mapeando cosas según convenga, vía  $\Phi, \Psi$  y traducir la información de manera apropiada.

Sean  $y_i \in \Omega$ ,  $\varepsilon > 0$  con  $d(y_i, \partial\Omega) > \varepsilon$  y  $|y_1 - y_2| < C\varepsilon$ . Definimos  $x_i = \Psi(y_i) \in U$  entonces tenemos que existen constantes  $C_1, C_2$  (que solo dependen de las seminormas  $[\Psi]_1, [\Phi]_1$ ) tal que  $d(x_i, \partial U) > C_1\varepsilon$  y  $|x_1 - x_2| < C_2C\varepsilon$ . Ponemos  $B_t^x = B^x$  como en la prueba para  $U$  (en particular  $x \in [x_1, x_2]$ ).

Fijemos  $x \in [x_1, x_2]$  y definamos  $V^y = \Phi(B_t^x)$  con  $y = \Phi(x)$ . Pongamos  $B_y$  como la bola con centro en  $y$  y tal que es la bola más grande que se queda contenida en  $V^y$ , entonces

$$\text{radio}(B_y) = \inf_{z \in \partial V^y} |z - y| \approx \inf_{w \in \partial B^x} |w - x| = r_x = td(x, \partial U) \quad (3.3.19)$$

donde todas las constantes involucradas dependen solamente de las seminormas ya mencionadas.

Definamos  $V_x = \Psi(B_y)$  y  $W_t^x$  la bola con centro  $x$  y máxima respecto de quedarse contenida en  $V_x$ . Un razonamiento análogo al anterior nos da

$$\text{radio}(W_t^x) = \inf_{w \in \partial V_x} |w - x| \approx \inf_{z \in B_y} |y - z| = \text{radio}(B_y) \approx td(x, \partial U). \quad (3.3.20)$$

Claramente tenemos, dado que  $W_t^x \subset V_x \subset B_t^x$ ,

$$d(B_t^x, \partial U) \leq d(V_x, \partial U) \leq d(W_t^x, \partial U), \quad d(V_x, \partial U) \approx d(B_y, \partial \Omega). \quad (3.3.21)$$

Ahora, (3.3.20) es equivalente a decir que existe  $C_1 > 1$  (que solo depende de las seminormas) tal que

$$C_3^{-1} \text{radio}(W_t^x) \leq td(x, \partial U) \leq C_3 \text{radio}(W_t^x). \quad (3.3.22)$$

Si pedimos  $t < C_3^{-1}$ , y dividiendo las dos ecuaciones en (3.3.17), llegamos a que existe  $C_4 = C_4(t)$  tal que

$$C_4^{-1} d(x, \partial U) \leq d(W_t^x, \partial U) \leq C_4 d(x, \partial U). \quad (3.3.23)$$

Análogamente, tras ajustar  $t$  tenemos, con constantes que dependen de  $t$  y las seminormas

$$d(x, \partial U) \approx d(B_t^x, \partial U). \tag{3.3.24}$$

Combinando estas dos últimas identidades concluimos, con ayuda de (3.3.19), que

$$d(B_y, \partial \Omega) \approx d(V_x, \partial U) \approx d(x, \partial U) \approx \text{radio}(B_y), \tag{3.3.25}$$

con constantes que dependen de  $t$  y las seminormas. Ahora, como solo ajustamos  $t$  por debajo de constantes que dependen de las seminormas, podemos asegurar que  $t$  solo depende de estas. El resultado queda probado con las  $B_y$  pues necesitamos a lo mas el numero de bolas  $W_t^x$  en  $U$ , pero por el caso anterior esta tiene longitud acotada por  $C, t, C_i$ . □

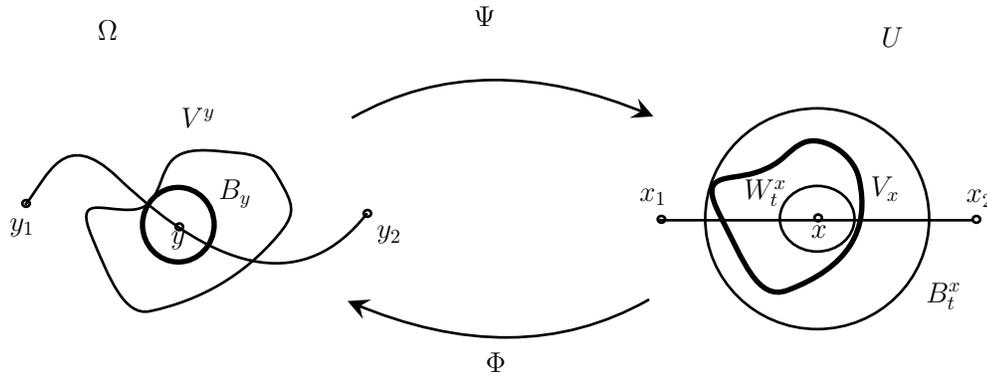


Figura 3.4: La situación de la proposición.

**Definición 3.3.4.** 1. Dado  $y \in \partial \Omega$  y  $r > 0$  suficientemente pequeño<sup>6</sup> definimos  $\mathcal{C}_r(y)$  como el cilindro recto con eje que coincide con el segmento de  $0$  a  $y$  y altura  $hr$ , con  $h = h(\Omega) > 0$  de tal manera que las tapas del cilindro estén contenidas en  $\Gamma^+$  o  $\Gamma^-$  (ver figura 3.5).

2. Definimos el disco superficial  $\Delta_r(y)$  como la intersección  $\mathcal{C}_r(y) \cap \partial \Omega$ .

3. Denotamos también por  $y_+(r)$  al punto  $[0, y] \cap \partial \mathcal{C}_r(y)$ . En otras palabras  $y_+(r)$  es el punto en el segmento  $[0, y]$  a distancia  $hr$  de  $y$ . En particular  $y_+ \in \Omega$ .

<sup>6</sup>Por ejemplo, que  $\partial \Omega \cap B_r(y)$  esté en una carta coordenada.

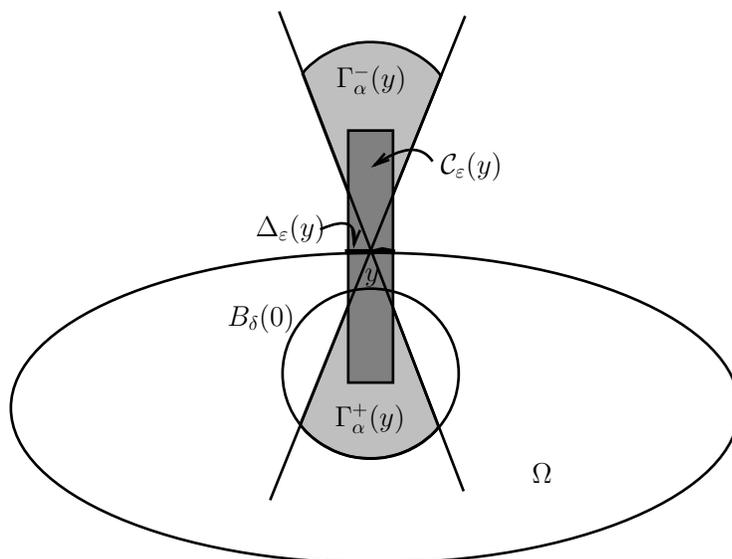


Figura 3.5: Cilindros y bolas superficiales.

Notamos que, aunque en principio  $\mathcal{C}_r$  está definido para  $r$  pequeña, ya que fijamos  $h$  podemos definir  $\mathcal{C}_r$  para toda  $r > 0$  (obviamente no necesariamente tenemos la condición sobre las tapas para  $r$  grande).

Una subclase de dominios estrellados, que necesitaremos a la hora de probar la existencia de límites no-tangenciales, son los llamados dominio ‘sawtooth’. Para definirlos primero notamos que para toda  $y \in \partial\Omega$  el cono interior estándar  $\Gamma^+(y)$  es un dominio Lipschitz estrellado respecto de 0 pues es convexo (ver el Ejemplo 1.5.1 y el Corolario 3.3.1). Si denotamos por  $f_y$  la función que lo define tenemos que  $[f_y]_1$  y  $\delta_y$  dependen solamente de  $\Omega$ , en particular están uniformemente acotadas (por arriba en el primer caso y por abajo en el segundo).

**Definición 3.3.5.** Dado  $\Omega$  estrellado y  $F \subset \partial\Omega$  definimos

$$\Omega_F := \bigcup_{y \in F} \Gamma^+(y) \quad (3.3.26)$$

Para checar que  $\Omega_F$  es un dominio Lipschitz estrellado tenemos que verificar dos cosas:

1.  $\Omega$  está definido por una función  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow (\delta, \infty)$ .

Para ver esto simplemente observamos que  $f = \sup_{y \in F} f_y$  funciona donde, como antes,  $f_y$  es la función que define  $\Gamma^+(y)$ . De hecho checar directamente que  $f$  es Lipschitz no es difícil pues las  $[f_y]_1$  están uniformemente acotadas.

2. Tenemos los conos interiores estándar, respecto de  $\Omega_F$  y denotados  $\Gamma_F^+(z)$ , para toda  $z \in \partial\Omega_F$ .

Primero escogemos  $\delta_0 > 0$  tal que  $B_{\delta_0}(0) \subset \Gamma^+(y)$  para toda  $y \in F$ . Escogemos ahora una apertura  $\alpha_0$  menor que la del cono interior estándar tal que si  $\Gamma'(x)$  es el cono con las mismas características que  $\Gamma^+(x)$  excepto con apertura  $\alpha_0$  y truncado por la bola de radio  $\delta_0$  entonces  $\Gamma'(x) \subset \Gamma^+(y)$  para toda  $y \in F$  y  $x \in \Gamma^+(y)$  (ver la Observación 3.3.2). En otras pedimos que  $\Gamma'(x)$  tenga todas las propiedades de un cono interior estándar en el dominio Lipschitz estrellado  $\Gamma^+(y)$ , uniformemente en  $y$  (i.e. la apertura y los truncamientos no dependen de  $y$ ).

De aquí terminar es fácil: Sea  $z \in \partial\Omega_F$ . El segmento  $(0, z) \subset \Omega_F$ . Entonces por como escogimos los conos  $\Gamma'$  tenemos que, para toda  $x \in (0, z)$  y dado que  $x \in \Gamma^+(y)$  para algún  $y \in F$ ,  $\Gamma'(x) \subset \Omega_F$ . El resultado sigue haciendo tender  $x \rightarrow z$  (y posiblemente reduciendo un poco la apertura de  $\Gamma'$ ).

### 3.4. Estimaciones para $\omega$

El objetivo de esta sección es obtener las estimaciones que necesitaremos para probar la existencia de límites no-tangenciales para una función armónica positiva en un dominio  $\Omega$  estrellado respecto de 0. Como ya se dijo antes las herramientas fundamentales para esto serán la desigualdad de Harnack (junto con la condición de cadena de Harnack) y el principio del máximo. Es conveniente tener siempre en mente que todas nuestras estimaciones para  $\omega$  son en realidad estimaciones para una función armónica positiva.

A lo largo de esta sección  $\Omega$  denotará un dominio Lipschitz estrellado respecto de 0 y  $\omega = \omega^0$

El primer resultado es una versión uniforme (respecto de reescalamientos) del hecho que  $\omega^x(\Delta_r(y)) \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow y$  para  $r > 0$  fijo.

**Lema 3.4.1.** *Sean  $y \in \partial\Omega$ ,  $s > 0$  pequeño y  $t > 0$ . Si  $x \in \Omega$  está en la recta generada por  $[0, y]$  y es tal que  $|x - y| < ts$  entonces existe  $C = C(\Omega, t) > 0$  con*

$$\omega^x(\Delta_s(y)) \geq C \tag{3.4.1}$$

*Demostración.* Notamos que basta probar el resultado para  $t < h$ : Si  $t > h$ , por la Observación 3.3.5, existe  $C = C(h, t, \Omega)$  tal que

$$C^{-1} \leq \frac{\omega^{y+(s)}(\Delta_s(y))}{\omega^x(\Delta_s(y))} \leq C, \quad hs < |x - y| < ts \tag{3.4.2}$$

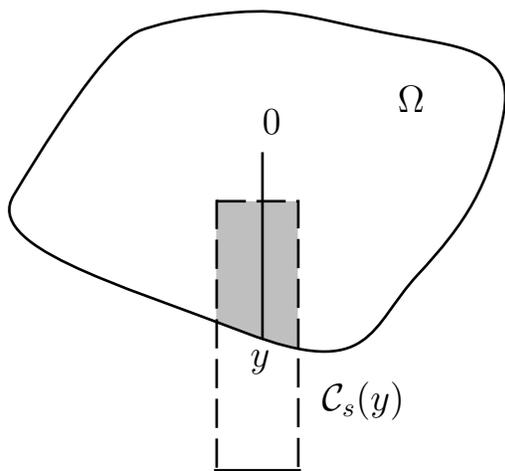


Figura 3.6:  $k_s(x)$  es la medida armónica, respecto del cilindro  $\mathcal{C}_s(y)$ , de la tapa sólida en la figura, evaluada en puntos de la región sombreada.

de donde el resultado sigue en general pues  $h$  depende solo de  $\Omega$ .

Si  $t < h$  entonces ponemos, para  $x \in \Omega \cap \mathcal{C}_s(y)$ ,  $k_s(x)$  como la medida armónica, respecto de  $\mathcal{C}_s$ , de la tapa de  $\mathcal{C}_s(y)$  en  $\Gamma^-(y)$  evaluada en  $x$  (ver figura 3.6). Como  $\omega^x(\Delta_s) > 0$  en  $\Omega \cap \partial\mathcal{C}_s$  y  $k_s(z) < 1$  para  $z \in \Delta_s$ , el principio del máximo implica que  $\omega^x(\Delta_s) \geq k_s(x)$ , de nuevo para  $x \in \Omega \cap \mathcal{C}_s$ .

El resultado sigue de cambiar la escala pues si suponemos que  $y = 0$  (podemos hacerlo con una traslación) tenemos que  $k_s(x) = k_1(sx) \geq C(h, \Omega)$  pues  $k_1(sx)$  depende solamente de  $n, t, h$  (recordamos que en este caso  $k_1(sx)$  es la medida armónica de una de las tapas del cilindro  $\mathcal{C}_1(0)$  evaluada en  $sx$ ).  $\square$

Notamos que el lema anterior implica que para toda  $s > 0$  pequeña y  $y \in \partial\Omega$  tenemos, con  $t = h$  y  $C_0 = C_0(\Omega)$ ,  $C_0^{-1} \leq \omega^{y+(s)}(\Delta_s)$ . Combinando esto con el hecho que  $\omega^{(\cdot)}(\Delta_s) \leq 1$  tenemos

$$\omega^x(\Delta_s) \leq C_0 \omega^{y+(s)}(\Delta_s), \quad x \in \Omega. \quad (3.4.3)$$

El siguiente lema se puede ver como un refinamiento de este hecho.

**Lema 3.4.2.** Sean  $y \in \partial\Omega$ ,  $s_0 > 0$ . Entonces existe  $C = C(\Omega) > 0$  tal que para toda  $0 < s < s_0$ ,  $y$  con  $y_+ = y_+(s_0)$ ,<sup>7</sup>

$$\omega^x(\Delta_s) \leq C \omega^{y_+}(\Delta_s), \quad x \in \Omega \setminus \mathcal{C}_{s_0}. \quad (3.4.4)$$

*Demostración.* Por lo dicho antes de este lema, si fijamos  $s < s_0$  tenemos que la conclusión vale con  $y_+(s)$  en lugar de  $y_+$  (y de hecho para toda  $x$ ). La idea es entonces

<sup>7</sup>Los cilindros y discos están todos centrados en  $y$ .

descomponer  $\mathcal{C}_{s_0}$  con ‘cilindros diádicos’ a escala  $s$ . La desigualdad de Harnack nos permitirá ir subiendo en las tapas de los cilindros de  $y_+(s)$  a  $y_+$ . El paso crucial será retener la uniformidad en  $x \in \Omega \setminus \mathcal{C}_{s_0}$  cerca de  $\partial\Omega$ , esto lo haremos construyendo un dominio que nos permita pasar de estimaciones para un cilindro chico a uno más grande, siempre respetando la escala. El principio del máximo nos garantiza que esto es suficiente para obtener uniformidad en  $x$ .

Empezamos construyendo la descomposición. Dada  $k \in \mathbb{N}$  ponemos  $\mathcal{C}^k := \mathcal{C}_{2^{k-1}s}(y)$  y ponemos  $y_+^k := y_+(2^{k-1}s)$  (ver figura 3.7). Claramente estos conjuntos forman una sucesión creciente de cilindros y existe  $k_0 = k_0(s, s_0)$  tal que  $\mathcal{C}^{k_0} \subset \mathcal{C}_{s_0} \subset \mathcal{C}^{k_0+1}$ .

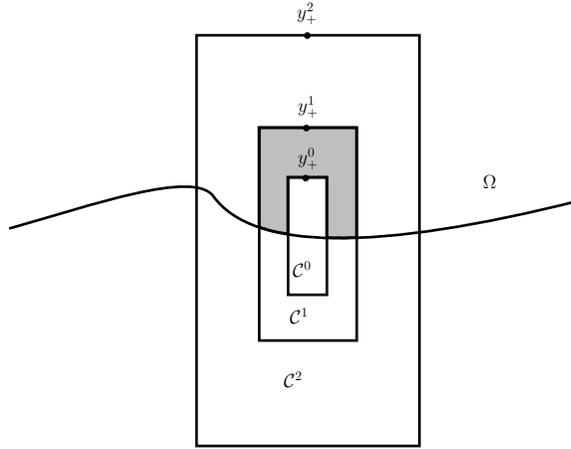


Figura 3.7: Cilindros diádicos.

1. Afirmamos que basta checar la desigualdad para  $x \in \Omega \cap \partial\mathcal{C}_{s_0}$ .

Esto es consecuencia del principio del máximo, pues  $\omega^{(\cdot)}(\Delta_s)$  se anula en  $\partial\Omega \setminus \mathcal{C}_{s_0}$  (ver Proposición 3.2.1).

2. Existe  $C_1 = C_1(\Omega)$  tal que, para toda  $k \geq 1$  y  $s < s_0$ ,

$$\omega^{y_+^k}(\Delta_s) \leq C_1 \omega^{y_+^{k+1}}(\Delta_s). \tag{3.4.5}$$

Para ver esto simplemente notamos que  $d(y_+^k, \partial\Omega) \approx 2^{k-1}hs$  y  $|y_+^k - y_+^{k+1}| = 2^{k-1}hs$  por lo que la afirmación es consecuencia de desigualdad de Harnack y la condición de cadena de Harnack (ver la Observación 3.3.5 y la Definición 3.3.3).

Sean  $r, t > 0$  dos constantes por ser determinadas. Si  $t$  es suficientemente grande

respecto de  $r$  tenemos que los siguientes dos conjuntos son ajenos:

$$\begin{aligned} & \{(x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x'| < 1, |x_{n+1}| < r\} \\ & \{(x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_- : -r < x_{n+1} < -t|x' - z_0|\}, \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

donde  $z_0 = (2, 0, 0, \dots, 0)$ . El primer conjunto es un cilindro recto centrado en 0, de radio 1 y altura  $r$ , mientras que el segundo es un cono recto con vértice  $z_0$  que abre hacia abajo de altura  $r$  y apertura  $\cot(t)$  (ver figura 3.8).

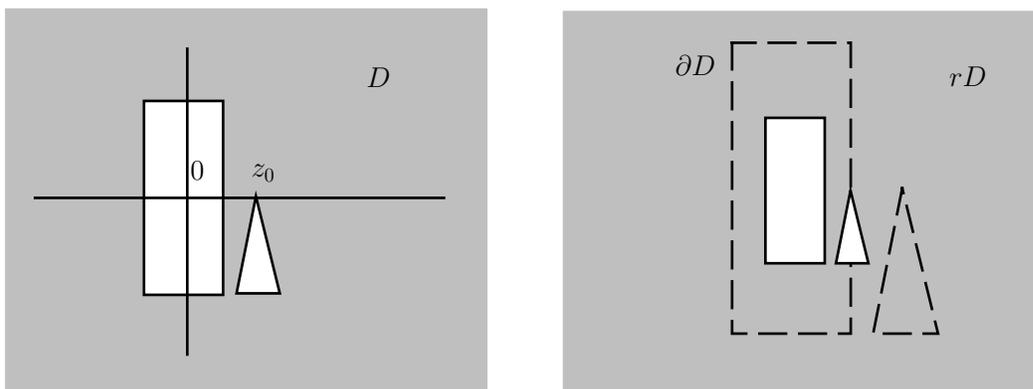


Figura 3.8: El dominio  $D$  y sus reescalados, que preservan la forma.

Con  $r, t$  como arriba, denotamos por  $D$  al complemento de la unión de estos dos conjuntos. Notamos que para toda  $t' \in \mathbb{R}$  el conjunto  $t'D$  tiene la misma forma: Es el complemento de la unión del cilindro de radio  $t'$  y altura  $t'r$  con el cono con vértice  $t'z_0$ , altura  $t'r$  y apertura  $\cot(t)$ . En otras palabras  $D$  se vé igual a cualquier escala.

Denotamos por  $h(z)$  la medida armónica, respecto de  $D$ , de la frontera del cilindro evaluada en  $z \in D$ , donde definimos esta medida armónica como el límite (monótono) de las medidas armónicas de este conjunto en  $D \cap B_N(0)$  cuando  $N \rightarrow \infty$ . Claramente  $h$  tiene valores de frontera 1 en el cilindro y tiende a 0 cuando nos acercamos al vértice del cono  $z_0$ . Con esto tenemos

**3.** Existe  $t_0$  tal que, si  $z \in D$  y  $|z - z_0| < t_0$  entonces  $0 < h(z) < C_1^{-1}$ , donde  $C_1$  es como en 2.

Definimos ahora los conjuntos  $A_k$  como los puntos en  $\partial\mathcal{C}^k \cap \Omega$  que están a altura  $< 2^{k-1}st_0$  (ver figura 3.9) y  $B_k = (\partial\mathcal{C}^k \cap \Omega) \setminus A_k$ . Dado que puntos  $x \in B_k$  satisfacen  $2^{k-1}st_0 \lesssim d(x, \partial\Omega)$  (por definición de  $A_k$ ) tenemos, usando la condición de cadena

de Harnack,

4. Existe  $C_2 = C_2(\Omega, t_0)$  tal que

$$\omega^x(\Delta_s) \leq C_2 \omega^{y_+^k}(\Delta_s), \quad x \in B_k. \quad (3.4.7)$$

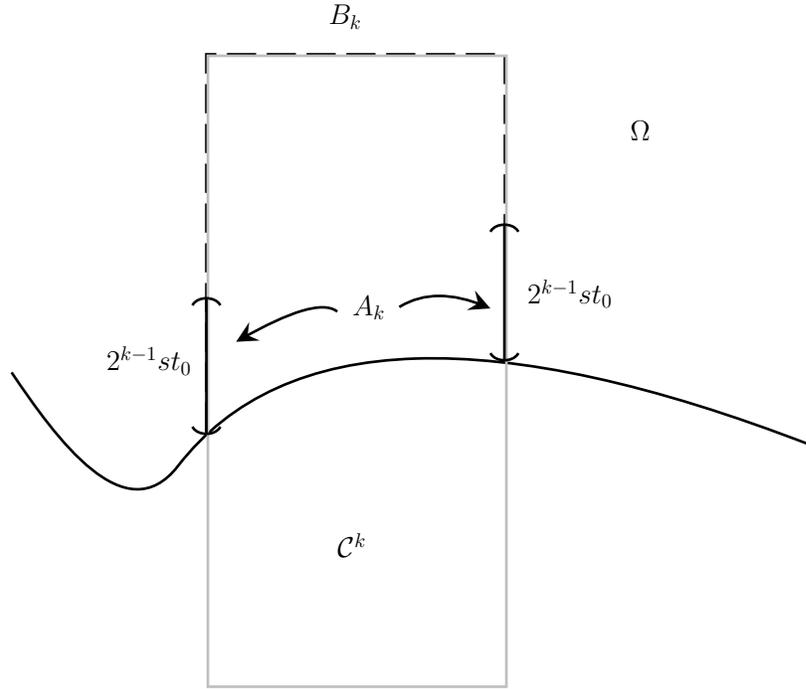


Figura 3.9: Los conjuntos  $A_k$ .

Ahora pongamos  $C_4 = \max \{C_0, C_2\}$ . Queremos probar

5. Si tenemos que

$$\omega^x(\Delta_s) \leq C_4 \omega^{y_+^k}(\Delta_s), \quad x \in A_k. \quad (3.4.8)$$

Entonces también tenemos

$$\omega^x(\Delta_s) \leq C_4 \omega^{y_+^{k+1}}(\Delta_s), \quad x \in A_{k+1}. \quad (3.4.9)$$

Hay que notar que el hecho de que la desigualdad valga para  $x \in A_k$  implica, por 4, que vale para toda  $x \in \Omega \cap \partial C^k = A_k \cup B_k$ .

Sea ahora  $D_k$  el dominio obtenido de  $2^{k-1}sD$  tras rotarlo y trasladarlo de manera que la frontera lateral del cilindro en  $D_k$  contenga a la frontera lateral de  $\mathcal{C}^k$  (en otras palabras que el eje de  $D_k$  coincida con el segmento  $[0, y]$ ) y de tal manera que  $z_k$  (la imagen de  $z_0$  bajo esta transformación de  $D$ ) coincida con algún punto de  $\partial\mathcal{C}^{k+1} \cap \partial\Omega$ . Escogiendo de manera apropiada  $r, t$  (que solo dependen de  $\Omega$ ) podemos garantizar esto y que el cono en el complemento de  $D_k$  esté contenido en el complemento de  $\Omega$  (ver figura 3.10).

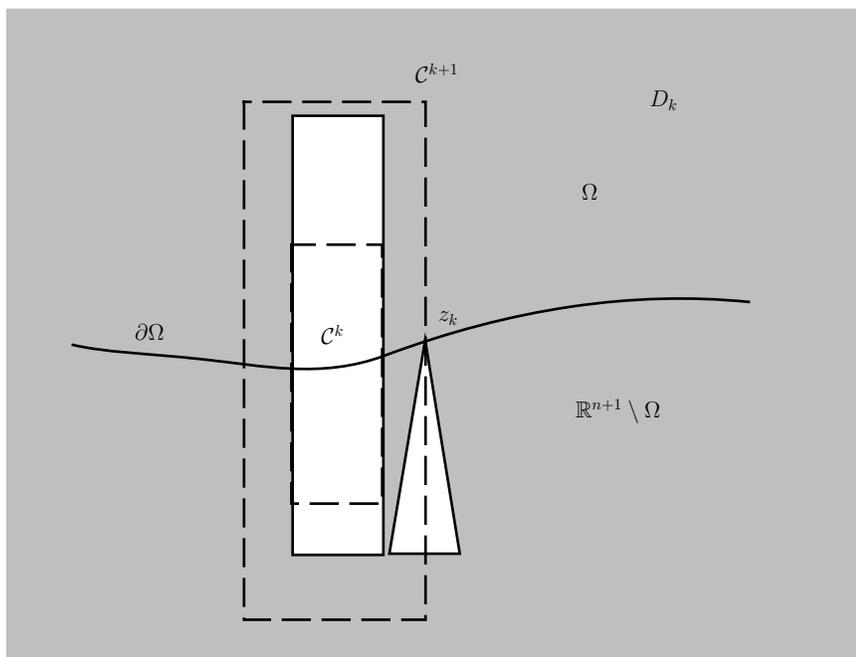


Figura 3.10: Los dominios  $D_k$ .

Si  $E_k$  denota el cilindro en el complemento de  $D_k$ , denotamos por  $h_k(x)$  la medida armónica, respecto de  $D_k$ , de  $\partial E_k$ . Entonces tenemos, como  $h_k = 1$  en  $\partial E_k$ , que contiene a  $\partial\mathcal{C}^k$  y  $h_k > 0$  en  $\Omega$ ,

$$\omega^x(\Delta_s) \leq C_4 \omega^{y_+^k}(\Delta_s) = C_4 \omega^{y_+^k}(\Delta_s) h_k(x), \quad x \in \Omega \cap \partial E_k. \quad (3.4.10)$$

donde la primera desigualdad es la hipótesis en 5. Combinando esto con el principio del máximo (pues el lado izquierdo es 0 en  $\partial\Omega \setminus \mathcal{C}^k$ ) tenemos

$$\omega^x(\Delta_s) \leq C_4 \omega^{y_+^k}(\Delta_s) h(x), \quad x \in \Omega \setminus E_k. \quad (3.4.11)$$

Si  $w \in A_{k+1}$  está por arriba de  $z_k$ , usando 3 (junto con un cambio de escala) que  $h_k(w) < C_1^{-1}$ . Esto junto con la desigualdad anterior nos da

$$\omega^w(\Delta_s) \leq C_4 C_1^{-1} \omega^{y_+^k}(\Delta_s). \quad (3.4.12)$$

Combinando esto con 2 tenemos la desigualdad deseada y 5 queda probado.

Con esto hemos probado que para toda  $k \geq 1$

$$\omega^x(\Delta_s) \leq C_4 \omega^{y_+^k}(\Delta_s), \quad x \in \partial \mathcal{C}^k \cap \Omega. \quad (3.4.13)$$

En particular, poniendo  $k = k_0$  (recordamos que  $\mathcal{C}^{k_0} \subset \mathcal{C}_{s_0} \subset \mathcal{C}^{k_0+1}$ ) y usando 1 tenemos que

$$\omega^x(\Delta_s) \leq C_4 \omega^{y_+^{k_0}}(\Delta_s), \quad x \in \Omega \setminus \mathcal{C}_{s_0}. \quad (3.4.14)$$

Usando el mismo razonamiento que en 2 (i.e. la condición de cadena de Harnack), existe  $C_5$  tal que

$$\omega^{y_+^{k_0}}(\Delta_s) \leq C_5 \omega^{y_+}(\Delta_s). \quad (3.4.15)$$

Combinando estas dos últimas desigualdades el resultado sigue.  $\square$

Notamos que en el lema anterior pudimos haber tomado, en lugar de los cilindros  $\mathcal{C}_s$  y el punto  $y_+$ , cilindros de altura  $ts$ , cambiando  $y_+$  por el centro de la tapa de este nuevo cilindro de altura  $ts$ . En este caso la prueba funciona igual, solo adaptamos la descomposición, excepto que en la aplicación del primer lema cargamos una dependencia en  $t$  de las estimaciones (ver [29]).

**Lema 3.4.3.** *Sean  $y \in \partial \Omega$ ,  $s > 0$  pequeño y  $y_s$  el punto en el segmento  $[0, y]$  a distancia  $s$  de  $y$ . Si  $E \subset \Delta_s$  boreliano entonces existe  $C = C(\Omega)$  tal que*

$$\omega^{y_s}(E) \leq C \frac{\omega(E)}{\omega(\Delta_s)} \quad (3.4.16)$$

Como siempre, lo importante en el lema es la dependencia de  $C$ . La desigualdad de Harnack automáticamente nos da esta desigualdad con  $C = C(\Omega, s)$ .

*Demostración.* Sea  $\Gamma$  un cono con vértice en el origen y eje el segmento  $[0, y]$  con apertura proporcional a  $s$  de tal manera que  $\Delta_s \subset \Gamma$ . Para  $s$  suficientemente pequeño, dicha apertura, digamos  $rs$  solo dependerá de  $\Omega$ . Tomemos además  $h'$  de tal manera que  $h's < |y|$  y definamos  $D := B_{h's}(y) \cap \Gamma$ . Si pedimos  $h' > 1$  suficientemente grande

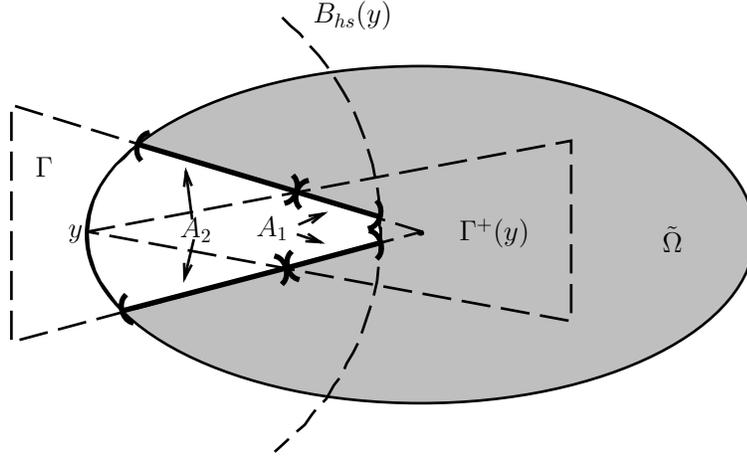


Figura 3.11: La construcción de los  $A_i$ .

podemos asegurar que  $D \cap \Gamma^+$  contiene un pedazo de cada uno de los generadores de  $\Gamma$  con la propiedad de que, si definimos  $A_1 = \partial D \cap \Gamma^+$  y  $A_2 = (\partial D \cap \Omega) \setminus A_1$  entonces para toda  $z \in A_2$  existe  $0 < t = t(s) < 1$  tal que  $tz \in A_1$  (ver figura 3.11). Podemos además, restringiendo un poco más las  $s$ , suponer que  $t < 1/2$ .

Definimos  $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus D$ , en particular  $\partial\tilde{\Omega} = (A_1 \cup A_2) \cup (\partial\Omega \setminus D)$ . Ponemos también  $\tilde{\omega}$  como la medida armónica en  $\tilde{\Omega}$  (notamos que  $0 \in \tilde{\Omega}$ ).

El principio del máximo implica que

$$\omega^x(\Delta_s) \leq \tilde{\omega}^x(A_1) + \tilde{\omega}^x(A_2), \quad x \in \tilde{\Omega}, \quad (3.4.17)$$

pues ambos lados se anulan en  $\partial\Omega \setminus D$  y el lado derecho es 1 en  $A_1 \cup A_2$ . Por como escogimos  $h'$  tenemos que, de nuevo por el principio del máximo,

$$\tilde{\omega}^x(A_2) \leq \tilde{\omega}^{tx}(A_1), \quad x \in \tilde{\Omega}, \quad (3.4.18)$$

donde  $t = t(s)$ , como se dijo, es tal que  $tz \in A_1$  para toda  $z \in A_2$ . Esto vale pues ambos lados son 1 en  $A_2$  y el lado izquierdo se anula en  $\partial\tilde{\Omega} \setminus A_2$ .

Usando estas dos desigualdades y poniendo  $x = 0$  concluimos que

$$\omega(\Delta_s) \leq 2\tilde{\omega}(A_1). \quad (3.4.19)$$

Por la definición de  $\Gamma$  y  $A_1$  tenemos que  $d(x, \partial\Omega) \gtrsim (1-t)s > 1/2s$  para  $x \in A_1$ . Usando la condición de cadena de Harnack tenemos que existe  $C_1 = C_1(\Omega)$  tal que

$$\omega^{y_s}(E) \leq C_1\omega^x(E), \quad x \in A_1. \quad (3.4.20)$$

Usando esto junto con el hecho de que  $\tilde{\omega}^x(A_1)$  se anula en  $\partial\tilde{\Omega} \setminus A_1$  y el principio del máximo obtenemos (recordamos también que  $\partial\tilde{\Omega} = (\partial\Omega \setminus D) \cup A_1 \cup A_2$ )

$$\tilde{\omega}^x(A_1)\omega^{y_s}(E) \leq C_1\omega^x(E), \quad x \in \tilde{\Omega}. \quad (3.4.21)$$

Poniendo  $x = 0$  y usando (3.4.19) concluimos que

$$\frac{\omega(\Delta_s)\omega^{y_s}(E)}{2} \leq \omega^{y_s}(E)\tilde{\omega}(A_1) \leq C\omega(E). \quad (3.4.22)$$

□

**Corolario 3.4.1** ( $\omega$  es doblante). Sean  $y \in \partial\Omega$ ,  $s > 0$ . Entonces existe  $C = C(\Omega)$  tal que

$$\omega(\Delta_{2s}) \leq C\omega(\Delta_s). \quad (3.4.23)$$

*Demostración.* Ponemos  $E = \Delta_s \subset \Delta_{2s}$  en el lema anterior para concluir, con ayuda del Lema 3.4.1 que

$$C \leq \omega^{y_s}(\Delta_s) \leq \frac{\omega(\Delta_s)}{\omega(\Delta_{2s})}. \quad (3.4.24)$$

Esto es lo que queremos siempre que  $2s$  sea pequeño, digamos  $s < s_0$ . Si  $s > s_0$  tenemos, de nuevo por el Lema 3.4.1 y la desigualdad de Harnack que

$$C \leq \omega^{y+(s_0)}(\Delta_{s_0}) \leq C'\omega(\Delta_{s_0}) \leq C'\omega(\Delta_s). \quad (3.4.25)$$

Combinando esto con el hecho que  $\omega^x(\Delta_{2s}) \leq 1$  para toda  $x \in \Omega$  el resultado sigue. □

**Observación 3.4.1.** Los discos superficiales  $\Delta_s$  que definimos en esta sección no son los que usamos normalmente  $\Delta'_s = B_s(y) \cap \partial\Omega$ . Sin embargo, si  $s$  es tan pequeño que  $\Delta_s$  se queda en una carta coordenada, no es difícil ver que existe  $c = c(\Omega) < 1^8$  tal que

$$\Delta_{cs} \subset \Delta'_s \subset \Delta_s. \quad (3.4.26)$$

Por lo que, localmente, no importa cual de las dos definiciones tomemos.

**Definición 3.4.1.** Decimos que  $\Gamma \subset \Omega$ , un cono truncado con vértice en  $y \in \partial\Omega$ , es un cono no-tangencial en  $y$  si existe otro cono  $\Gamma' \subset \Omega$  con el mismo vértice tal que  $\bar{\Gamma} \setminus \{y\} \subset \Gamma'$ .

---

<sup>8</sup>De hecho si  $\varphi$  es la función que define a localmente a  $\partial\Omega$  podemos tomar  $c = (1 + [\varphi]_1^2)^{-1/2}$ .

Recordamos que  $N(x, y)$ , para  $x \in \Omega$ ,  $y \in \partial\Omega$ , es la derivada de Radon-Nikodym de  $\omega^x$  respecto de  $\omega$ . En otras palabras

$$N(x, y) = \frac{d\omega^x}{d\omega^0}(y). \quad (3.4.27)$$

Por el teorema de diferenciación tenemos que

$$N(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\omega^x(\Delta_r)}{\omega(\Delta_r)}, \quad \text{p.c.t. } y \in \partial\Omega. \quad (3.4.28)$$

Esto, combinado con el lema anterior, poniendo  $E = \Delta_r(z) \subset \Delta_s$ , nos da

$$\omega^{y_s}(\Delta_r(z)) \leq C \frac{\omega(\Delta_r(z))}{\omega(\Delta_s)}. \quad (3.4.29)$$

La desigualdad de Harnack nos dice que existe  $C = C(\Omega, j)$  tal que, para  $j < j_0$  apropiado (que depende de  $s$ )

$$C^{-1}\omega^{y_s}(F) \leq \omega^{y_{2j_s}}(F) \leq C\omega^{y_s}(F), \quad F \subset \partial\Omega \text{ Boreliano.} \quad (3.4.30)$$

Combinando estas dos estimaciones obtenemos

$$\omega^{y_s}(\Delta_r(z)) \leq C(\Omega, j) \frac{\omega(\Delta_r(z))}{\omega(\Delta_{2j_s})}, \quad \Delta_r(z) \subset \Delta_{2j_s}(y). \quad (3.4.31)$$

En particular

$$N(y_s, z) \leq C(\Omega, j) \frac{1}{\omega(\Delta_{2j_s})}, \quad z \in \Delta_{2j_s} \quad (3.4.32)$$

El siguiente lema es un refinamiento de esta estimación, nos dice, esencialmente, que podemos tomar  $C = C(\Omega)$  si restringimos los valores de  $z$  al anillo  $\Delta_{2j_s} \setminus \Delta_{2^{j-1}s}$ .

**Lema 3.4.4.** *Sea  $S$  un cono no-tangencial en  $y \in \partial\Omega$  y sea  $x_0 \in S$ . Si ponemos  $r = |x_0 - y|$  y  $\Delta^j := \Delta_{2^j r}(y)$  y  $R_0 = \Delta^0$ ,  $R_j = \Delta^j \setminus \Delta^{j-1}$  entonces existen  $C', C_j, C''$  tal que*

$$\|N(x_0, \cdot)\|_{L^\infty(R_j)} \leq \frac{C' C_j}{\omega(\Delta^j)}, \quad j = 1, \dots, \quad (3.4.33)$$

y  $\sum_j C_j \leq C'' < \infty$ . Además  $C'$  solo depende de  $\Omega$  y  $C''$  de  $\Omega$  y  $S$ .

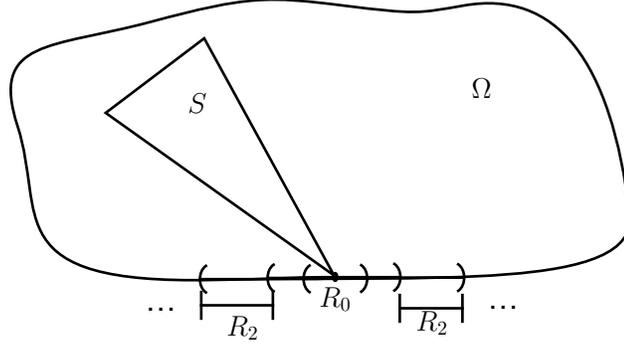


Figura 3.12: La situación del Lema 3.4.4.

Claramente nos interesan  $r$  pequeños y por tanto la sucesión la tomamos con  $j = 1, \dots, N$  para alguna  $N$  que depende de  $r$  y  $\Omega$ , la condición sobre la suma de los  $C_j$  nos dice que realmente  $N$  no importa mucho.

*Demostración.* Por el teorema de diferenciación basta probar que

$$\omega^{x_0}(\Delta) \leq C' C_j \frac{\omega(\Delta)}{\omega(\Delta^j)}, \quad \Delta \subset R_j \quad (3.4.34)$$

Por la desigualdad de Harnack existe  $C = C(\Omega, S)$  tal que

$$C^{-1} \leq \frac{\omega^{y_r}(F)}{\omega^{x_0}(F)} \leq C, \quad F \subset \Omega \text{ boreliano.} \quad (3.4.35)$$

Por lo tanto basta probar el lema con  $y_r$  en lugar de  $x_0$ . Por la discusión antes del lema, podemos suponer que la conclusión del lema es válida (con  $y_r$ ) para  $j = 0, \dots, m$  para alguna  $m$  a ser escogida.

Sea entonces  $z^j \in R_j$  y  $\Delta = \Delta_t(z^j) \subset R_j$  con  $j \geq m$ . Si recordamos que, en este caso, con  $m < j$ ,  $z_+^j(2^{j-m}r)$  es el punto en el segmento  $[0, z^j]$  cuya distancia a  $z^j$  es  $2^{j-m}hr$  entonces el Lema 3.4.2 implica que

$$\omega^x(\Delta) \leq C \omega^{z_+^j(2^{j-m}r)}(\Delta), \quad x \in \Omega \setminus \mathcal{C}_{2^{j-m}}(z^j). \quad (3.4.36)$$

La desigualdad de Harnack implica, con constantes que dependen de  $\Omega$  y  $m$ , que  $\omega^{z_+^j(2^{j-m}r)} \approx \omega^{y_{2^j r}}$ <sup>9</sup> pues  $|z_+^j(2^{j-m}r) - y_{2^j r}| \approx |z^j - y| \approx 2^j r$  para  $r, j$  pequeños ( $j$

<sup>9</sup>Recordamos que  $y_s$  es el punto en el segmento  $[0, y]$ , con  $|y - y_s| = s$ .

relativo a  $r$ ) y su distancia a  $\partial\Omega$  está en la misma escala. Invocando el lema anterior y esto tenemos

$$\omega^x(\Delta) \leq C(m, \Omega)\omega^{y_{2^j r}}(\Delta) \leq C(m, \Omega)\frac{\omega(\Delta)}{\omega(\Delta^j)}, \quad x \in \Omega \setminus \mathcal{C}_{2^j-mr}(z^j). \quad (3.4.37)$$

Esto es casi lo que queremos, con  $y_r$  en lugar de  $x$ . Lo que queremos es entonces poder ‘bajar’ a  $y_r$  sin perder el control que tenemos con el lado derecho. Para esto procedemos de una manera parecida a la hecha en el lema anterior: Definimos

$$D = B_1(0) \cap \{(x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : -M|x'| < x_{n+1}\}. \quad (3.4.38)$$

Entonces  $D$  es la bola unitaria menos un cono recto centrado en origen que abre hacia abajo. Sea  $k$  la medida armónica de la parte esférica de  $\partial D$ . Si definimos además  $D_j$  como el  $2^{j-4}D$  rotado y trasladado de tal manera que el centro coincida con  $y$  y el eje del cono coincida con  $[0, y]$  (ver figura 3.13). Podemos pedir además que la apertura del cono (dada por  $M$ ) sea igual a la del cono exterior estándar en  $y$ . Denotamos por  $k_j$  la medida armónica de la parte esférica de  $\partial D_j$ .

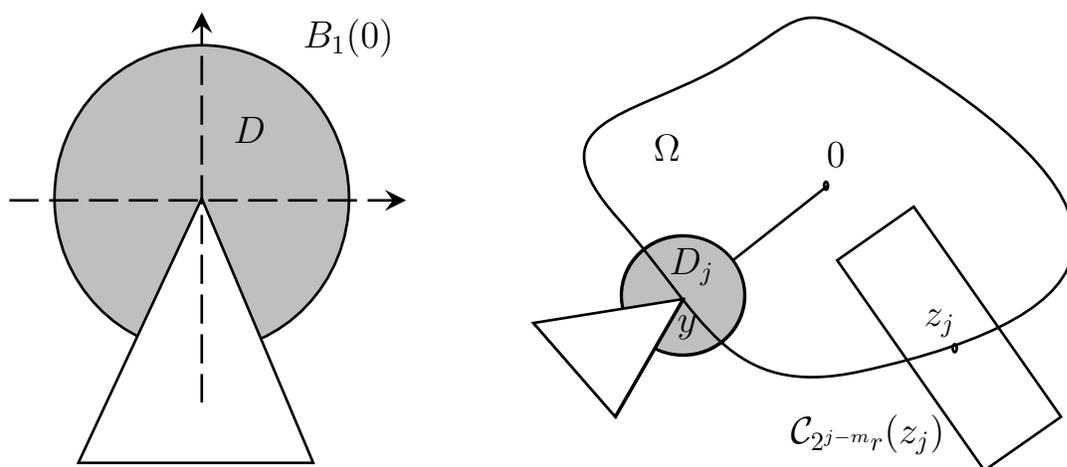


Figura 3.13: Las esferas  $D$ ,  $D_j$ .

Para empezar notamos que  $\Omega \cap D_j \subset \Omega \setminus \mathcal{C}_{2^j-mr}(z^j)$  para alguna  $m$  que depende de  $h$ : Supongamos que no, i.e.  $w$  en la intersección de estos conjuntos entonces  $|y - z^j| \leq |y - w| + |w - z^j| < 2^{j-4}r + (h+1)2^{j-m}r$ . Si pedimos  $h < 2^{m-2} - 1$  esto implicaría  $|z^j - y| < 2^{j-1}r$  que es una contradicción pues  $z^j \in R_j$ .

Podemos suponer entonces que el resultado vale para  $j = 0, \dots, m$  (con constantes que dependen de  $j$ ). Entonces como para  $j > m$  tenemos que en verdad  $\Omega \cap D_j \subset$

$\Omega \setminus \mathcal{C}_{2^{j-m_r}}(z^j)$  (ver figura 3.13), por el principio del máximo y (3.4.37) tenemos que

$$\omega^x(\Delta) \leq C(m, \Omega)k_j(x) \frac{\omega(\Delta)}{\omega(\Delta^j)}, \quad , x \in \Omega \cap D_j. \quad (3.4.39)$$

Como  $y_r \in \Omega \cap D_j$ , evaluando la desigualdad anterior en este punto, el resultado sigue con  $C(m, \Omega) = C'$ ,  $C_j = k_j(y_r)$ . Para ver la convergencia de la serie simplemente notamos que, como  $k_j(y_r) = k(2^{3-j}e_{n+1})$ , si ponemos  $s = \sup \{k(x) : x \in D, |x| < 1/2\}$  entonces  $0 < s < 1$ . Por el principio del máximo tenemos entonces  $k(x/2) \leq sk(x)$  para  $x \in D$ . Poniendo  $x = 2^{3-j}e_{n+1}$  concluimos que

$$k_{j+1}(y_r) \leq sk_j(y_r). \quad (3.4.40)$$

Iterando, y comparando con una serie geométrica, el resultado sigue. □

**Observación 3.4.2.** *La prueba nos da, por un lado, que podemos tomar  $S$  como la unión finita de conos no-tangenciales. Por otro lado también notamos que si  $S = \Gamma^+(y)$  entonces la dependencia de  $C'$  es solo en  $\Omega$  (en otras palabras no depende del punto).*

Para entrar de lleno a estudiar los límites no-tangenciales de una función armónica necesitaremos un último lema, que describe el comportamiento de  $N(x, y)$  cuando  $x \rightarrow z \in \partial\Omega$  uniformemente en  $y$  alejada de  $z$ .

**Lema 3.4.5.** *Sean  $y \in \partial\Omega$  y  $s > 0$ . Entonces si, como siempre,  $\Delta_s = \Delta_s(y)$ , tenemos*

$$\|N(x, \cdot)\|_{L^\infty(\partial\Omega \setminus \Delta_s)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow y. \quad (3.4.41)$$

*Demostración.* Notamos que basta fijarnos en  $s$  pequeña pues entre más pequeña es  $s$  más grande es el conjunto sobre el cual tomamos el supremo esencial. Por otro lado, de la discusión previa al lema anterior tenemos que basta probar

$$\frac{\omega^x(\Delta)}{\omega(\Delta)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow y \quad (3.4.42)$$

uniformemente en discos  $\Delta \subset \partial\Omega \setminus \Delta_s$ .

Sean entonces  $\varepsilon > 0$ , y  $z$  el centro de  $\Delta \subset \partial\Omega \setminus \Delta_s$ . Tomamos  $\varepsilon$  tan pequeña que  $B_{s/3}(0) \cap \mathcal{C}_{\varepsilon s}(z) = \emptyset$ . El Lema 3.4.2 implica que

$$\omega^x(\Delta) \leq C(\Omega)\omega^{y_+(\varepsilon s)}(\Delta), \quad x \in \Omega \setminus \mathcal{C}_{\varepsilon s}(z). \quad (3.4.43)$$

Por otro lado, la desigualdad de Harnack implica que

$$\omega^{y+(\varepsilon s)}(\Delta) \leq C(\varepsilon, s, \Omega)\omega(\Delta). \quad (3.4.44)$$

Combinando estas dos desigualdades obtenemos

$$\omega^x(\Delta) \leq C\omega(\Delta), \quad x \in \Omega \setminus \mathcal{C}_{\varepsilon s}(z). \quad (3.4.45)$$

Si ponemos  $D$  y  $k$  como en la prueba del lema anterior (ver figura 3.13) y ponemos  $D'$  como el reescalado  $s/3D$ , rotado y trasladado de tal manera que el centro sea  $y$  y el eje del cono coincida con  $[0, y]$  de tal manera que la apertura del cono de  $D'$  coincida con la del cono exterior estándar. y ponemos  $k'$  como el análogo en  $D'$  de  $k$ . Por como escogimos  $\varepsilon$  y el principio del máximo tenemos

$$\omega^x(\Delta) \leq C\omega(\Delta)k'(x), \quad x \in \Omega \cap D' \quad (3.4.46)$$

Como  $C = C(\varepsilon, s, \Omega) = C(s, \Omega)$  y como  $k'(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow y$ , el resultado queda probado.  $\square$

**Observación 3.4.3.** *La prueba del lema anterior da mas: Tenemos que*

$$N(x, z) \leq C(\Omega, s)k'(x), \quad x \in \Omega \cap D', \quad z \notin \Delta. \quad (3.4.47)$$

*Como los conos exteriores estándar en distintos puntos son siempre congruentes, tenemos que esta cota vale además para toda  $y \in \partial\Omega$ . En otras palabras: Si  $|x-y| < r$  y  $s > 0$  entonces existe  $C = C(\Omega, s, r)$  tal que*

$$\|N(x, \cdot)\|_{\infty, \partial\Omega \setminus \Delta_s(y)} \leq C. \quad (3.4.48)$$

*Esto será útil mas adelante.*

## 3.5. Límites no-tangenciales

El objetivo de esta sección es probar la existencia de límites no-tangenciales de una función armónica positiva. Trabajamos primero con dominios Lipschitz estrellados y al final se da la reducción del caso general de un dominio Lipschitz a uno estrellado.

Empezamos con un teorema sencillo, cuya prueba motiva todas las estimaciones que se hicieron en la sección anterior.

**Teorema 3.5.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio estrellado y  $u$  una función armónica en  $\Omega$  con  $0 \leq M_1 \leq u(x) \leq M_2$  para toda  $x \in \Omega$ . Entonces  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\omega$ -c.d.*

*Demostración.* Como para toda  $0 < r < 1$  tenemos que  $u(rx)$  es armónica en  $\Omega$  y continua en  $\bar{\Omega}$ , tenemos que

$$u(rx) = \int_{\partial\Omega} N(x, y)u(ry)d\omega(y). \quad (3.5.1)$$

Tenemos además que, si  $d\mu_r(y) = u(ry)d\omega(y)$ , entonces

$$\mu_r(E) = \int_E d\mu_r(y) \leq M_2 \int_E d\omega(y) = M_2\omega(E), \quad E \subset \partial\Omega \text{ boreliano.} \quad (3.5.2)$$

Análogamente tenemos  $M_1\omega(E) \leq \mu_r(E)$ . Por lo tanto, las medidas  $\mu_r$  están uniformemente acotadas y son uniformemente absolutamente continuas respecto de  $\omega$ , por lo que existe una subsucesión  $r_k \rightarrow 1$ , tal que  $\mu_{r_k} \rightarrow \mu$  débilmente, con  $d\mu = fd\omega$  para alguna  $f \in L^1(\omega) \cap L^\infty(\omega)$ . Para ver esto último basta notar que, dado que  $|u| \leq M_2$  existe una subsucesión y  $f' \in L^\infty(\omega)$  tal que  $u(r_k \cdot) \rightarrow f'$  en la topología débil-\* de  $L^\infty(\omega)$ , en otras palabras

$$\int_{\partial\Omega} g(y)d\mu_{r_k}(y) \rightarrow \int_{\partial\Omega} g(y)f'd\omega(y), \quad g \in L^1(\omega). \quad (3.5.3)$$

De esto se sigue  $f = f'$  y  $\|f\|_{L^\infty(\omega)} \leq M_2$  por la semicontinuidad inferior de la norma respecto de convergencia en la topología débil-\*.

Poniendo  $N(x, y) = g(y)$  en lo anterior y haciendo  $r_k \rightarrow 1$  llegamos a que

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} N(x, y)f(y)d\omega(y). \quad (3.5.4)$$

Probaremos que los límites no-tangenciales de  $u$  están dados por  $f$ . Para esto sea  $S$  un cono no-tangencial en  $y_0$  y  $x \in S$ . Por el teorema de diferenciación si  $y_0$  es un punto de densidad 1 de  $f$  podemos tomar  $\Delta = \Delta_s(y_0)$  tal que

$$\int_{\Delta'} |f(y) - f(y_0)|d\omega(y) < \varepsilon, \quad \forall \Delta' = \Delta_t(y_0), \quad t < 2s, \quad (3.5.5)$$

para alguna  $\varepsilon > 0$  fija (obviamente  $s = s(\varepsilon)$ ). Entonces calculamos

$$\begin{aligned} |u(x) - f(y_0)| &\leq \int_{\Delta} N(x, y) |f(y) - f(y_0)| d\omega(y) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega \setminus \Delta} N(x, y) |f(y) - f(y_0)| d\omega(y) \\ &:= A_1 + A_2 \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Si, como en el Lema 3.4.4, ponemos  $\Delta^j := \Delta_{2^j|x-y_0|}(y_0)$  y  $R_0 = \Delta^0$ ,  $R_j = \Delta^j \setminus \Delta^{j-1}$  con  $j = 0, \dots, N$  de tal manera que  $\Delta^{N-1} \subset \Delta \subset \Delta^N$ , entonces estimamos

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \sum_{j=0}^N \int_{R_j} N(x, y) |f(y) - f(y_0)| d\omega(y) \\ &\leq \sum_{j=0}^N \|N(x, \cdot)\|_{L^\infty(R_j)} \int_{\Delta^j} |f(y) - f(y_0)| d\omega(y) \\ &\leq \sum_{j=0}^N C' C_j \int_{\Delta^j} |f(y) - f(y_0)| d\omega(y), \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

donde la última desigualdad es consecuencia del Lema 3.4.4. Como  $\Delta^j \subset \Delta_{2^s}$  para toda  $j = 0, \dots, N$  concluimos que

$$A_1 \leq \sum_{j=0}^N C' C_j \varepsilon \leq C' C'' \varepsilon \quad (3.5.8)$$

Donde las constantes que aparecen son las del Lema 3.4.4. Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \|N(x, \cdot)\|_{L^\infty(\partial\Omega \setminus \Delta)} \int_{\partial\Omega} |f(y) - f(y_0)| d\omega(y) \\ &\leq 2 \|N(x, \cdot)\|_{L^\infty(\partial\Omega \setminus \Delta)} M_2 < \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

donde la última desigualdad se sigue del Lema 3.4.5 si  $|x - y_0|$  es suficientemente pequeña. Combinando las dos estimaciones para  $A_i$  el resultado sigue.  $\square$

**Corolario 3.5.1.** *Sea  $f = 1_E$  para algún  $E \subset \partial\Omega$  de Borel y sea 'u' su extensión armónica. Entonces u tiene límites no-tangenciales  $f$   $\omega$ -c.d.*

*Demostración.* Como  $0 \leq u \leq 1$  y dado que, por el método de Perron

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(y) d\omega^x(y) = \int_{\partial\Omega} f(y) N(x, y) d\omega(y), \quad x \in \Omega, \quad (3.5.10)$$

el resultado sigue de la prueba teorema anterior (específicamente repetimos la prueba a partir de (3.5.4)).  $\square$

La idea ahora es quitar la hipótesis de que  $u$  es acotada y reemplazarla por  $u$  positiva (o equivalentemente acotada solo por abajo). Para esto primero probamos que no perdemos demasiado relajando estas hipótesis.

**Lema 3.5.1.** *Sean  $\Omega$  estrellado,  $\varepsilon > 0$  y  $u > 0$  armónica, entonces existe un conjunto  $E \subset \partial\Omega$  con  $\omega(E) < \varepsilon$  y  $M = M(u, \varepsilon) > 0$  tal que  $u \leq M$  en cualquier cono interior estándar  $\Gamma^+(y_0)$  con  $y_0 \in \partial\Omega \setminus E$ .*

En otras palabras,  $u$  está no-tangencialmente acotada fuera de un conjunto de medida arbitrariamente pequeña (ver el Lema 3.5.3).

*Demostración.* De nuevo tenemos, para  $0 < r < 1$

$$u(rx) = \int_{\partial\Omega} u(ry) d\omega^x(y) \leq \sup_{x' \in [0, x]} u(x') \quad (3.5.11)$$

Las medidas  $d\nu_r^x = u(ry) d\omega^x(y)$  están entonces uniformemente acotadas en  $r$ . Tenemos una subsucesión  $r_k \rightarrow 1$  y una medida de Radon  $\mu^0$  tal que  $\nu_{r_k}^0 \rightarrow \mu^0$  débilmente. En particular

$$u(0) = \int_{\partial\Omega} u(r_k) d\omega(y) \rightarrow \int_{\partial\Omega} d\mu^0(y). \quad (3.5.12)$$

Para toda  $x \in \Omega$  existe una subsucesión, que depende de  $x$  pero que tomamos dentro de la subsucesión construida arriba, (por el momento además las denotamos igual) y medidas de Radon  $\mu^x$  tal que  $\nu_{r_k}^x \rightarrow \mu^x$  débilmente. Entonces

$$u(x) \xleftarrow{k \rightarrow \infty} u(r_k x) = \int_{\partial\Omega} u(r_k y) d\omega^x(y) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} d\mu^x(y). \quad (3.5.13)$$

Concluimos que tenemos la representación

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} d\mu^x(y). \quad (3.5.14)$$

En particular  $\mu^x$  son todas medidas de Radon no-negativas y finitas. Ahora, por convergencia débil sabemos que para cada  $x$  (recordamos que la subsucesión depende, en principio, de  $x$ )

$$\int_{\partial\Omega} g(y) d\nu_{r_k}^x(y) \rightarrow \int_{\partial\Omega} g(y) d\mu^x(y), \quad g \in C(\partial\Omega). \quad (3.5.15)$$

Ahora tenemos que para todo abierto  $U \subset \partial\Omega$

$$\mu^x(U) \leq \|N(x, \cdot)\|_{L^\infty(U)} \mu^0(U). \quad (3.5.16)$$

Para ver esto simplemente notamos que, como  $1_U$  es semicontinua inferiormente, es el supremo de una sucesión creciente  $g_m \geq 0$  de funciones continuas en  $\partial\Omega$ , por lo tanto, usando el teorema de convergencia monótona,

$$\begin{aligned} \mu^x(U) &= \sup_m \int_{\partial\Omega} g_m(y) d\mu^x(y) \leq \lim_k \left( \sup_m \int_{\partial\Omega} g_m(y) N(x, y) u(r_k y) d\omega(y) \right) \\ &\leq \|N(x, \cdot)\|_{L^\infty(U)} \int_U d\mu^0(y) = \|N(x, \cdot)\|_{L^\infty(U)} \mu^0(U), \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

donde la segunda desigualdad se sigue de que  $g_m \leq 1_U$ . Notamos que (3.5.16) sería inmediato, por convergencia débil y la definición de las  $\mu^x$ , si supiéramos que  $N(x, \cdot)$  es continua para  $x$  fija. Esto es cierto (ver [Hunt-Wheeden2]) pero no lo haremos aquí así que la cuenta es necesaria.

Ahora tomemos un cono no-tangencial  $S$  en  $y_0$  y  $x_0 \in S$ , para empezar obviamente nos interesan  $x_0$  cercanos a  $y_0$ . Ahora, como en el lema anterior definamos  $\Delta^j := \Delta_{2^j|y_0-x_0|}(y_0)$  pero además, para  $1/2 < \alpha < 1$  pongamos  $\Delta_\alpha^j := \Delta_{\alpha 2^j|x_0-y_0|}(y_0)$  y pongamos  $R_j = \Delta^j \setminus \bar{\Delta}_\alpha^j$ . El Lema 3.4.4 aplica con estos  $R_j$  (salvo que la constante dependerá de  $\alpha$ ). Tomemos un disco alrededor de  $y_0$  y como antes dejemos  $j = 0, \dots, M$  tal que  $\Delta^{M-1} \subset \Delta \subset \Delta^M$ . Calculamos usando (3.5.16)

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \int_{\partial\Omega} d\mu^{x_0}(y) \leq \sum_{j=0}^M \int_{R_j} d\mu^{x_0}(y) + \int_{\partial\Omega \setminus \bar{\Delta}} d\mu^{x_0}(y) \\ &\leq \sum_{j=0}^M \|N(x, \cdot)\|_{L^\infty(R_j)} \int_{\Delta^j} d\mu^0(y) \\ &\quad + \|N(x, \cdot)\|_{L^\infty(\partial\Omega \setminus \bar{\Delta})} \int_{\partial\Omega \setminus \bar{\Delta}} d\mu^0(y) \\ &= A_1 + A_2 \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Fijemos  $\varepsilon$  como en el enunciado del lema. Por el teorema de diferenciación y el hecho de que  $\omega, \mu^0 = \mu$  son finitas tenemos que

$$D_\omega \mu := \frac{d\mu}{d\omega} \in L^1(\omega). \quad (3.5.19)$$

Escogemos  $k \in \mathbb{N}$  tan grande tal que  $\omega(E_k) < \varepsilon/2$  donde

$$E_k := \{y \in \partial\Omega : D_\omega \mu(y) > k\}. \quad (3.5.20)$$

Escogemos  $y_k \in E_k, \Delta_s = \Delta_s(y_0)$  tal que para todo  $\Delta' = \Delta_t(y_0)$  con  $t < 2s$  tengamos

$$\left| \frac{\mu(\Delta')}{\omega(\Delta')} - D_\omega \mu(y_0) \right| < k. \quad (3.5.21)$$

Usando el Lema 3.4.4 y lo anterior tenemos entonces

$$A_1 \leq \sum_{j=0}^M C' C_j \frac{\mu(\Delta^j)}{\omega(\Delta^j)} \leq 2k C' C'' = C(\Omega) 2k. \quad (3.5.22)$$

Notamos que  $s = s(y_0)$ . Antes de estimar  $A_2$  nos deshacemos de esta dependencia: Para empezar definimos las siguientes funciones en  $\partial\Omega$

$$f_r(z) = \mu(\Delta_r(z)), \quad g_r(z) = \omega(\Delta_r(z)). \quad (3.5.23)$$

Notamos que para  $r$  pequeña ambas funciones son Borel medibles<sup>10</sup> y además del Lema 3.4.1 deducimos que  $f_r/g_r = h_r$  también es medible. El teorema de diferenciación nos dice que

$$\lim_{r \rightarrow 0} h_r(z) = D_\omega \mu(z), \quad \text{p.c.t. } z \in \partial\Omega. \quad (3.5.24)$$

Usando el teorema de Egorov tenemos que existe  $F \subset \partial\Omega$  con  $\omega(F) < \varepsilon/2$  tal que  $h_r \rightarrow D_\omega \mu$  uniformemente en  $\partial\Omega \setminus F$ .

Con esto, si pedimos  $y_0 \in \partial\Omega \setminus F$  podemos concluir que la misma  $s$  que usamos para definir  $\Delta$  funciona para cualquier otro  $y \in \partial\Omega \setminus F$ .

Con todo esto es sencillo estimar  $B_2$  pues de la Observación 3.4.3 concluimos

$$B_2 \leq C(s, \Omega) \int_{\partial\Omega} d\mu^0(y) \leq C u(0). \quad (3.5.25)$$

Entonces si pedimos  $y_0 \in (\partial\Omega \setminus E_k) \cap (\partial\Omega \setminus F) =: E$  concluimos que  $u$  está acotada no-tangencialmente y este último conjunto satisface  $\omega(E) < \varepsilon$ .  $\square$

<sup>10</sup>No es difícil probar que si  $z_l \rightarrow z$  entonces  $1_{\Delta_r(z)} \leq \liminf_l 1_{\Delta_r(z_l)}$  por lo que el lema de Fatou implica que  $f_r, g_r$  son semicontinuas inferiormente.

Este lema nos permite pasar de una función armónica positiva en  $\Omega$  a una acotada en  $\Omega_F$  para algún  $F \subset \partial\Omega$  (recordamos la Definición 3.3.5) por lo que el Teorema 3.5.1 aplica en este nuevo dominio. Lo que hacemos ahora es relacionar la medida armónica en  $\Omega$  con la de  $\Omega_F$ .

**Lema 3.5.2.** Sean  $\Omega$  estrellado y  $F \subset \partial\Omega$ . Denotamos por  $\omega_F^x$  la medida armónica en  $\Omega_F$  evaluada en  $x \in \Omega_F$ . Si  $E \subset F$  boreliano tal que  $\omega_F(E) = 0$  entonces  $\omega(E) = 0$ .

*Demostración.* Para empezar sea  $x \in \partial\Omega_F \cap \Omega$ . El cono exterior estándar (respecto de  $\Omega_F$ )  $\Gamma_F^-(x)$  intersecciona, tras aumentar un poco la altura de ser necesario, a  $\partial\Omega$  en un conjunto (ver figura 3.14) que contiene un disco superficial  $\Delta \subset \partial\Omega \setminus F$  (sin pérdida de generalidad podemos suponer que la apertura de los conos  $\Gamma_F^-$  es mucho menor que la de  $\Gamma^-$ , por lo que si  $\Gamma_F^-(x)$  interseccionara a  $F$  en  $z$  entonces  $x \in \Gamma^+(z)$  contradiciendo el hecho que  $x \in \partial\Omega_F$ ).

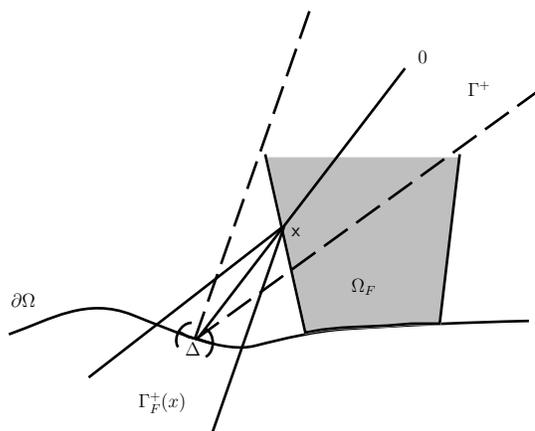


Figura 3.14:  $\Gamma^+$  es el cono interior estándar en el centro de  $\Delta$ .

Por el Lema 3.4.1 tenemos entonces, dado que el radio de  $\Delta$  es proporcional (con constantes que dependen de  $\Omega$ ) a  $d(x, \partial\Omega)$ ,

$$\omega^x(\partial\Omega \setminus E) \geq \omega^x(\Delta) \geq C_1(\Omega), \quad x \in \partial\Omega_F \cap \Omega. \quad (3.5.26)$$

Sin pérdida de generalidad tomamos  $C_1 < 1$ . Dado que  $\omega$  es finita obtenemos

$$\omega^x(E) \leq 1 - C_1, \quad x \in \partial\Omega_F \cap \Omega. \quad (3.5.27)$$

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función subarmónica tal que

$$\limsup_{\Omega \ni w \rightarrow y \in \partial\Omega} f(w) \leq 1_E(y), \quad (3.5.28)$$

y recordamos que el supremo puntual sobre todas estas funciones es la extensión armónica de  $1_E$  a  $\Omega$  (que es igual a  $\omega^w(E)$  como función de  $w \in \Omega$ ). Por lo tanto tenemos  $f(x) \leq \omega^x(E)$ . Por lo anterior tenemos que  $g(w) := f(w) - 1 + C_1$  satisface que es subarmónica y

$$\limsup_{\Omega \ni w \rightarrow y \in \partial\Omega} g(w) \leq 0 \leq 1_E(y), \quad w \in \Omega_F. \quad (3.5.29)$$

De aquí concluimos que  $g(w) \leq \omega_F^w(E) = 0$  para  $w \in \Omega_F$ , de donde  $f(w) \leq 1 - C_1$  para  $w \in \Omega_F$ . Como  $f$  fue arbitraria tenemos  $\omega^w(E) \leq 1 - C_1$  pero entonces  $\omega^x(E)$  no puede tener límites no-tangenciales 1 para ningún  $x \in E$ . Por el Corolario 3.5.1 concluimos que  $\omega(E) = 0$ .  $\square$

El siguiente paso es concluir que convergencia no-tangencial en  $\Omega_F$  implica convergencia no-tangencial en  $\Omega$ . Esto es sencillo con la construcción del lema anterior.

**Lema 3.5.3.** *Sea  $E \subset F \subset \partial\Omega$ . Existe  $E' \subset E$  con  $\omega(E') = 0$  ( $E'$  depende sólomente de  $E, F$ ) tal que para toda  $y \in E \setminus E'$  y  $S$  un cono no-tangencial en  $y$  tenemos que existe  $h = h(y, S, E, F) > 0$  con la propiedad de que*

$$B_h(y) \cap S \subset \Omega_F. \quad (3.5.30)$$

*En otras palabras todo cono no-tangencial, respecto de  $\Omega$ , es (localmente) un cono no-tangencial respecto de  $\Omega_F$ , módulo un conjunto de  $\omega$ -medida 0. En particular convergencia no-tangencial en  $E$  respecto de  $\Omega_F$  implica convergencia no-tangencial  $\omega$ -c.d. respecto de  $\Omega$ .*

*Demostración.* Dado que  $\omega^x(E) = 0$  para  $x \in \partial\Omega \setminus F$ , (3.5.26) junto con el principio del máximo implican que existe  $0 < C_1 < 1$  tal que

$$\omega^x(E) \leq 1 - C_1, \quad x \in \Omega \setminus \Omega_F. \quad (3.5.31)$$

Tomamos entonces  $E'$  el conjunto donde  $\omega^x(E)$  no tiende a 1 no-tangencialmente. Fijemos  $y \in E \setminus E'$  y  $S$  un cono no-tangencial (respecto de  $\Omega$ ) en  $y$ . Si (3.5.30) no pasa existe una sucesión que puntos  $x_k \in S \setminus \Omega_F$  con  $x_k \rightarrow y$  pero esto, junto con (3.5.31), contradicen que  $\omega^{x_k}(E) \rightarrow 1$ .  $\square$

**Lema 3.5.4.** *Supongamos que existe  $M > 0$  tal que  $0 \leq u \leq M$  en cualquier cono interior estándar  $\Gamma^+(y)$  con  $y \in E \subset \Omega$ . Entonces  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\omega$ -c.d. en  $E$ .*

*Demostración.*  $u$  está acotada en  $\Omega_E$  por lo que el Teorema 3.5.1 nos dice que el conjunto  $F$  donde  $u$  no tiene límites en  $\Omega_E$  tiene  $\omega_E$  medida cero. Como convergencia no-tangencial en  $\Omega_E$  implica convergencia no-tangencial  $\omega$ -c.d. en  $E$  (respecto de  $\Omega$ ), los dos lemas anteriores implican que el conjunto donde  $u$  no-tiene límites no-tangenciales en  $E$  (respecto de  $\Omega$ ) tiene  $\omega$ -medida 0 y el resultado queda probado.  $\square$

**Teorema 3.5.2.** *Sea  $\Omega$  estrellado y  $u > 0$  armónica entonces  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\omega$ -c.d.*

*Demostración.* La prueba es idéntica a la del Lema anterior, invocando además el Lema 3.5.1.  $\square$

Concluimos esta sección probando el resultado para dominios Lipschitz en general. En otras palabras tenemos el siguiente

**Teorema 3.5.3.** *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sea  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica acotada no-tangencialmente en un conjunto  $E \subset \partial\Omega$  entonces  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\omega$ -c.d. en  $E$ . El resultado es válido también si solo pedimos  $u > -M$  en  $\Omega$  para alguna  $M > 0$ .*

Notamos primero que la noción de convergencia/acotabilidad no-tangencial es local por lo que nos bastaría probar dos cosas:

1.  $\partial\Omega$  tiene una cubierta por dominio estrellados contenidos en  $\bar{\Omega}$
2. Si  $\Omega'$  denota alguno de estos dominios estrellados y  $\omega'$  su correspondiente medida armónica entonces  $\omega'(E) = 0$  implica  $\omega(E \cap \bar{\Omega}') = 0$ .

El primer punto es sencillo pues claramente, por definición de dominio Lipschitz, todo punto tiene asociado un dominio especial en una vecindad de  $x$  (ver la Definición 3.5.1). El segundo es consecuencia de un principio de comparación que enunciamos a continuación

**Lema 3.5.5.** *Sean  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  no-negativas y  $E \subset \partial\Omega$  cerrado con  $\omega(E) = 0$  tales que*

1.  $u$  es armónica en  $\Omega$  y continua en  $\bar{\Omega}$ .
2.  $v$  es subarmónica en  $\Omega$  y continua en  $\bar{\Omega} \setminus E$
3. Para alguna  $M > 0$

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow y} v(z) \leq M, \quad \forall y \in E \quad (3.5.32)$$

4.  $v \leq u$  en  $\partial\Omega \setminus E$   
entonces  $v \leq u$  en  $\Omega$ .

*Demostración.* Como  $\omega$  es regular existe una sucesión de abiertos  $E \subset U_j$  tal que  $\omega(U_j) \rightarrow 0$ . Si ponemos  $w_j(x) = M\omega^x(U_j)$  entonces  $0 \leq w_j \leq M$ . Si  $y \in \partial\Omega \setminus E$ , por hipótesis  $v(y) \leq u(y)$ . Si  $y \in E$ , como  $w_j$  es continua en  $\Omega \cup \{U_j\}$  (pues  $U_j$  abierto) y en este caso  $w_j(y) = M$  tenemos  $\limsup_{z \rightarrow y} v(z) \leq w_j(y)$ . En cualquier caso entonces

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow y} v(z) \leq u(y) + \limsup_{\Omega \ni z \rightarrow y} w_j(z), \quad \forall y \in \partial\Omega \quad (3.5.33)$$

Por el principio del máximo entonces  $v \leq u + w_j$  en  $\Omega$ . Como para cada  $z \in \Omega$  fijo  $w_j(z) \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ , el resultado sigue.  $\square$

**Lema 3.5.6.** *Sean  $\Omega_i$  dos dominios regulares para el laplaciano y sea  $E \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  tal que existe un abierto  $U$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con  $E \subset U$  y  $U \cap \Omega_1 = U \cap \Omega_2$  entonces*

$$\omega_1(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_2(E) = 0. \quad (3.5.34)$$

*Demostración.* Supongamos que  $\omega_1(E) = 0$ . Como  $E$  es cerrado  $w(x) = \omega_2^x(E)$  es armónica en  $\Omega_2$ , continua en  $\bar{\Omega}_2 \setminus E$  y  $0 \leq w \leq 1$ . Si extendemos  $w$  a  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus E$  como cero, esta resulta ser una función continua y subarmónica (que la desigualdad del promedio vale se sigue inmediatamente de la no-negatividad de  $w$  en  $\Omega_2$ ). Si ponemos  $u$  como la extensión armónica a  $\Omega_1$  de

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in E \\ w(y) & \text{si } y \in \partial\Omega_1 \setminus E \end{cases} \quad (3.5.35)$$

Notamos que  $f \in C(\partial\Omega_1)$  (pues  $E$  admite una vecindad abierta en  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ , llamémosle  $W$  entonces  $w|_{W \setminus E} = 0$ ). El lema anterior nos dice que entonces  $w \leq u$  en  $\Omega_1$ . Pero entonces

$$0 \leq \lim_{z \rightarrow y} w(z) \leq \lim_{z \rightarrow y} u(z) = 0, \quad \forall y \in E \quad (3.5.36)$$

Entonces  $w \in C(\bar{\Omega}_2)$  y  $w|_{\partial\Omega_2} = 0$ . Concluimos  $w \equiv 0$  en  $\Omega_2$ .  $\square$

Pasamos ahora a la definición de dominios especiales. Para empezar tomemos  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $\varphi \in \text{Lip}(M)$  si

1.  $\varphi(0) = 0$ .
2.  $\text{sop}(\varphi) \subset B_1(0)$ .
3.  $[\varphi]_1 \leq M$ . En otras palabras

$$\sup_{x, y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|} \leq M. \quad (3.5.37)$$

Dada entonces una tal  $\varphi$  tenemos que los conos

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : M|x - x_0| < t - \varphi(x_0)\} \quad (3.5.38)$$

se quedan por arriba de la gráfica de  $\varphi$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Si ponemos  $a = (0, 30M)$ ,  $b = (0, 40M) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , es fácil ver que el dominio

$$\Omega_\varphi := \{x = (x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x'| < 10, \varphi(x') < x_{n+1} < |b|\} \quad (3.5.39)$$

es un dominio estrellado respecto de  $a$  con constantes que solo dependen de  $M$  (pues todo punto en la tapa de abajo tiene un cono, de apertura uniforme y que abre hacia arriba, tal que  $a$  está en tal cono). Entonces ponemos

**Definición 3.5.1** (Dominios especiales). *Decimos que  $\Omega$  es un dominio Lipschitz especial si existen  $M > 0$ ,  $\varphi \in \text{Lip}(M)$  y  $r > 0$  tal que  $\Omega$  es congruente con  $r\Omega_\varphi$ .*

Para fijar notación ponemos también

$$R_\varphi := \left\{ (x', \varphi(x')) \in \Omega_\varphi : |x'| < \frac{1}{2} \right\}. \quad (3.5.40)$$

**Observación 3.5.1.** *Recordamos que si  $\Omega$  es estrellado respecto de  $a$  y  $y \in \partial\Omega$  poníamos  $y_+(s)$  al punto en el segmento  $[a, y]$  tal que  $|y - y_+(s)| = hs$  para una  $h$  que solo dependía de la apertura de los conos, y  $s < 1$  suficientemente pequeña. Por la desigualdad de Harnack y la Proposición 3.3.3 tenemos que existe una constante  $C = C(M)$  tal que para toda  $y \in \Omega_\varphi$  (para alguna  $\varphi \in \text{Lip}(M)$ ) y toda función armónica positiva  $u$ ,*

$$C^{-1} \leq \frac{u(y_+(s))}{u(y + hse_{n+1})} \leq C. \quad (3.5.41)$$

*En otras palabras, movernos hacia arriba o hacia el centro es casi lo mismo en un dominio especial.*

**Proposición 3.5.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz, entonces para cada punto  $y \in \partial\Omega$  tenemos una vecindad  $U$  de  $y$  y  $r, M > 0$  tal que  $\partial\Omega \cap U$  es congruente con  $rR_\varphi$ , para alguna  $\varphi \in \text{Lip}(M)$ .*

La prueba es casi trivial por la definición de dominio Lipschitz. El asunto es que, con esto y el Lema 3.5.6, podemos concluir que el hecho  $\omega(E) = 0$  para algún  $E \subset \partial\Omega$  es una propiedad local. En otras palabras, como  $\omega(E) = 0$  si y solo si  $\omega(E \cap V) = 0$  para todo abierto tenemos que nos basta checar conjuntos que se quedan en cartas coordenadas. El Lema 3.5.6 entonces nos permite concluir que basta estudiar dominios  $\Omega_\varphi$  para alguna  $\varphi$  y  $E \subset R_\varphi$ .

**3.6.**     $\omega \ll \sigma \ll \omega$ 

Para empezar recordamos que para  $\Omega$  un dominio regular para el laplaciano la función de Green asociada al dominio, definida en  $\Omega \times \bar{\Omega}$  está dada por

$$G(x, y) = c_n \left( \frac{1}{|x - y|^{n-1}} - \phi^x(y) \right) \quad (3.6.1)$$

donde  $\phi^x$  es la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta \phi^x = 0 & \text{en } \Omega \\ \phi^x = |x - \cdot|^{1-n} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.6.2)$$

y la constante  $c_n = \sigma_n$  (la superficie de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) normaliza de tal manera que  $c_n |x - y|^{1-n}$  sea la solución fundamental del laplaciano en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Notamos que entonces  $G(x, \cdot)$  es superarmónica y  $G(x, \cdot)|_{\partial\Omega} = 0$  por lo que  $G \geq 0$ .

Recolectamos algunas propiedades de funciones de Green en la siguiente

**Proposición 3.6.1.** *Sean  $\Omega_i, \Omega$  dominios regulares para el laplaciano y  $G_i, G$  sus funciones de Green entonces*

1.  $G_1(x, y) \leq G_2(x, y)$  siempre que  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ .
2. Si  $\Omega_i \subset \Omega_{i+1} \uparrow \Omega$  entonces  $G_i(x, \cdot) \rightarrow G(x, \cdot)$  uniformemente en compactos de  $\Omega \setminus \{x\}$ .

*Demostración.* 1 es consecuencia del principio del máximo: Si  $x \in \Omega_1, y \in \partial\Omega_1$  entonces

$$\phi_1^x(y) = |x - y|^{1-n} \geq \phi_2^x(y), \quad (3.6.3)$$

de donde la afirmación sigue.

Para ver 2 fijamos  $x \in \Omega$  y tomamos  $j$  tan grande tal que  $x \in \Omega_j$ . Como  $G_i(x, y) \leq G(x, y) \leq |x - y|^{1-n}$  para  $i > j$  y  $y \in \bar{\Omega}_i$  el teorema de convergencia de Harnack nos dice que las  $G_i(x, \cdot)$  convergen uniformemente en compactos a una función armónica  $v_x$  en  $\Omega \setminus \{x\}$ . Basta probar que  $v_x = G(x, \cdot)$ , para ver esto notamos que  $\phi_i^x(\phi^x)$  están caracterizadas por ser una cota superior de los conjuntos<sup>11</sup>

$$\{u : \Omega_i(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : u(y) \leq |x - y|^{1-n} \text{ en } \Omega_i(\Omega)\}, \quad (3.6.4)$$

por lo que su  $u \leq |x - \cdot|^{1-n}$  en  $\Omega$  entonces lo mismo vale en  $\Omega_i$  por lo que  $u \leq \phi_i^x$ . Concluimos que  $\phi^x \leq v_x$ . La otra desigualdad es obvia.  $\square$

<sup>11</sup>Una dirección es el principio del máximo, la otra es el método de Perron.

Supongamos por el momento que  $\Omega$  es suave. Por teoría de regularidad para ecuaciones elípticas tenemos entonces que  $\phi^x \in C^\infty(\bar{\Omega})$  por lo que  $G(x, \cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{x\})$ . La importancia de la función de Green es obvia de la siguiente

**Proposición 3.6.2.** *Sea  $\Omega$  suave y acotado  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  armónica entonces*

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, u) d\sigma(y). \quad (3.6.5)$$

En particular, si definimos el **núcleo de Poisson** como

$$K(x, y) = - \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y), \quad (3.6.6)$$

tenemos la fórmula de representación

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y) u(y) d\sigma(y). \quad (3.6.7)$$

Por unicidad en el teorema de representación de Riesz tenemos que

$$d\omega^x(y) = K(x, y) d\sigma(y), \quad (3.6.8)$$

por lo que  $\omega^x \ll \sigma$  y

$$\frac{d\omega^x}{d\sigma}(y) = K(x, y), \quad \forall x \in \Omega, \text{ p.c.t. } y \in \partial\Omega. \quad (3.6.9)$$

Por el lema de Hopf sabemos que  $K(x, \cdot) > 0$  para toda  $x \in \Omega$ . Por otro lado, como esta función es continua,  $K(x, \cdot) \in L^p(\sigma)$  para toda  $1 \leq p \leq \infty$ . De esto obtenemos que  $K^{-1}(x, \cdot) \in L^\infty(\omega)$  y por lo tanto

$$\int_F K^{-1}(x, y) d\omega^x(y) = \int_F d\sigma(y) = \sigma(F), \quad \forall F \subset \partial\Omega \text{ boreliano.} \quad (3.6.10)$$

Por lo que  $\sigma \ll \omega$ . En general para dominios Lipschitz no sabemos, en principio, que existe el núcleo de Poisson. El siguiente lema muestra que, aunque no tenemos un núcleo de Poisson, la función de Green sigue dando información importante en la relación de  $\sigma$  y  $\omega$ .

**Lema 3.6.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio estrellado (respecto de 0) y sea  $G$  su función de Green. Entonces existe  $C$ , que solo depende de la apertura de los conos estándar, tal que, con  $\Delta_s = \Delta_s(y)$  para algún  $y \in \partial\Omega$ <sup>12</sup>,*

$$C^{-1} \frac{\omega(\Delta_s)}{\sigma(\Delta_s)} \leq \frac{G(0, y_+(s))}{s} \leq C \frac{\omega(\Delta_s)}{\sigma(\Delta_s)}, \quad (3.6.11)$$

para toda  $s$  suficientemente pequeña.

*Demostración.* Antes que nada notamos que, para  $s$  suficientemente pequeña existe  $C_1$ , que solo depende de la apertura de los cono estándar y  $\delta$ , tal que

$$B^s = B_{C_1 s}(y_+(s)) \subset \Omega. \quad (3.6.12)$$

1. Probamos primero

$$\frac{G(0, y_+(s))}{s} \leq C \frac{\omega(\Delta_s)}{\sigma(\Delta_s)}. \quad (3.6.13)$$

Sea entonces  $x \in \partial B^s$ . De la definición de la función de Green tenemos  $G(x, y_+) \leq |x - y_+|^{1-n} = C_1^{1-n} s^{1-n}$ . Del Lema 3.4.1 y la desigualdad de Harnack tenemos  $C_2$  tal que  $\omega^x(\Delta_s) \geq C_2$  para  $x \in \partial B^s$ . Dado que  $G(x, y_+) = G(y_+, x)$  y que  $G(y_+, \cdot)|_{\partial\Omega} = 0$ , por el principio del máximo tenemos

$$G(y_+, x) \leq C s^{1-n} \omega(\Delta_s), \quad x \in \Omega \setminus B^s. \quad (3.6.14)$$

El resultado sigue de que  $\sigma(\Delta_s) \approx s^n$  (con constantes que dependen del carácter Lipschitz de  $\Omega$ , pero esto viene codificado en la apertura de los conos y la  $\delta$  en la definición de  $\Omega$ ) y poniendo  $x = 0$ .

2. Para ver la otra desigualdad comparamos  $G(\cdot, y_+)$  con la función de Green de  $B^s$  con polo en  $y_+$ , i.e.  $G_s(\cdot, y_+)$  de donde obtenemos

$$G(x, y_+) \geq G_s(x, y_+) = c_n |x - y_+|^{1-n} - c_n (C_1 s)^{1-n}, \quad x \in \partial B^{s/2}. \quad (3.6.15)$$

Por el principio del mínimo para funciones superarmónicas concluimos que lo mismo vale para  $x \in B^{s/2}$ , de donde

$$s^{n-1} G(x, y_+) \geq C. \quad (3.6.16)$$

---

<sup>12</sup>Recordamos que  $y_+(s)$  es el punto en el segmento  $[0, y]$  con  $|y - y_+(s)| = hs$  para algún  $h$  que solo depende de la apertura del conos estándar.

Ahora, si escogemos  $0 < t < 1$  tal que  $ty = y_+$  (recordamos que  $s$  está fijo) entonces, si  $z \in \Delta_{(C_1/2)s}$  tenemos  $|tz - ty| = t|z - y_+| < (C_1/2)s$  por lo que se dan las inclusiones

$$t\Delta_{(C_1/2)s} \subset \{x \in \Omega : |x - y_+| < (C_1/2)ts\} \subset B^{s/2}, \quad (3.6.17)$$

por lo que el principio del máximo implica que

$$\omega^x(\Delta_{(C_1/2)s}) \leq Cs^{n-1}G(x, y_+), \quad x \in \Omega. \quad (3.6.18)$$

El resultado sigue de la propiedad doblante de la medida armónica (Corolario 3.4.1) y el hecho que  $\sigma(\Delta) \approx s^n$ .  $\square$

Para seguir necesitamos un par de lemas técnicos, cuya prueba posponemos para ver como estos resultados implican  $\omega \ll \sigma$ .

**Lema 3.6.2.** *Sea  $\varphi \in \text{Lip}(M)$  y sea  $\Omega_\varphi$  su dominio especial asociado. Si  $g = G(a, \cdot)$  denota su función de Green con polo en  $a$  (que recordamos es el centro de  $\Omega_\varphi$ ) entonces existen  $C = C(M) > 0$  y  $r = r(M) > 0$  tal que  $B_r(a) \subset \subset \Omega_\varphi$  y tal que*

$$\frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}(x) + C \geq 0, \quad x \in \Omega_\varphi \setminus B_r(a). \quad (3.6.19)$$

**Lema 3.6.3.** *Sean  $\varphi, \Omega_\varphi$  como en el lema anterior entonces, si  $\Delta_s = \Delta_s(y)$  para  $y \in R_\varphi$  y  $s$  pequeño, entonces<sup>13</sup>  $\omega$ -p.c.t.  $y \in R_\varphi$  y  $s < s_0$  tenemos*

$$\sup_{s>0} \frac{\omega(\Delta_s)}{\sigma(\Delta_s)} < \infty. \quad (3.6.20)$$

**Observación 3.6.1.** *El supremo del lado izquierdo es finito  $\sigma$ -c.d. por el teorema de diferenciación, mientras que nosotros aseguramos que es finito  $\omega$ -c.d.*

**Lema 3.6.4.** *Sean  $\varphi, \Omega_\varphi$  como en los lemas anteriores y sea<sup>14</sup>  $E \subset R_\varphi$  tal que  $\sigma(E) = 0$  entonces  $\omega(E) = 0$ .*

*Demostración.* Por regularidad de ambas medidas nos basta suponer  $E$  compacto. De nuevo por regularidad existe  $E \subset U$  abierto tal que  $\sigma(U) < \varepsilon$ . Tomamos una cubierta de discos

$$E \subset \bigcup_{y \in E} \Delta_{s(y,U)}(y) \subset U. \quad (3.6.21)$$

<sup>13</sup> Como  $\Omega$  es especial ponemos  $\omega = \omega^a$ .

<sup>14</sup> Recordamos que  $R_\varphi = \{(x, \varphi(x)) : |x| < 1/2\}$ .

Por compacidad tenemos una subcubierta finita  $\Delta_{s_j} = \Delta_{s_j}(y_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Por el teorema de Vitali podemos suponer (abusando de la notación) que los  $\Delta_{s_j}$  son ajenos y que  $5\Delta_{s_j}$  contienen a  $E$ . Como conjuntos de  $\omega$  medida cero tienen complemento denso por el Lema 3.4.1 (el lema implica que si  $\omega(E) = 0$  entonces  $E$  tiene interior vacío) podemos suponer que  $y_j \in F$ , donde definimos  $F$  como el conjunto de puntos donde el supremo del lema anterior es finito.

El lema anterior entonces implica que

$$\omega(\Delta_{s_j}) \leq C\sigma(\Delta_{s_j}). \quad (3.6.22)$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \omega(E) &\leq \omega\left(\bigcup_{j=1}^k \omega(5\Delta_{s_j})\right) \leq \sum_{j=1}^k \omega(5\Delta_{s_j}) \leq C \sum_{j=1}^k \omega(\Delta_{s_j}) \\ &\leq C \sum_{j=1}^k \sigma(\Delta_{s_j}) \leq C\sigma(U) < C\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.6.23)$$

donde usamos la propiedad doblante de  $\omega$  (ver Corolario 3.4.1). Como  $\varepsilon$  fue arbitrario el resultado sigue.  $\square$

Pasamos ahora a la prueba de los lemas

*Demostración (Lema 3.6.2).* Supongamos que  $\Omega_\varphi$  con  $\varphi$  suave. Como  $g$  la podemos extender por reflexión a través de las tapas  $\{x_{n+1} = b\}$  y  $\{x_{n+1} = 0, |x'| > 3/2\}$ , podemos tratar  $\Omega_\varphi$  como un dominio suave. Las estimaciones de Schauder (ver [[21]]) implican que, en  $F = \partial\Omega \setminus R_\varphi$  tenemos

$$\|\nabla g\|_{\infty, F} \leq C(n) (\|h\|_{C^{2,\alpha}} + \|g\|_{\infty}) = C(M), \quad (3.6.24)$$

para algún  $0 < \alpha < 1$  y donde  $h$  es alguna extensión de  $|a - \cdot|^{1-n}|_F$  a  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Como  $g \leq |a - \cdot|^{1-n} \leq C(M)$  la última desigualdad sigue.

Con el mismo razonamiento la cota anterior vale con  $F$  reemplazado por  $\partial B_r(a)$ . Como  $\partial_{x_{n+1}} g \geq 0$  en  $R_\varphi$  el principio del mínimo implica la cota en este caso, con  $C = C(M)$ .

Para ver el caso general solamente construimos una sucesión de funciones  $\varphi_k$  suaves tal que

1.  $\varphi_k \in \text{Lip}(M + o(1))$ .
2.  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  uniformemente en  $\mathbb{R}^n$ .

3.  $\varphi_k \geq \varphi$ .

Por ejemplo regularizamos, sumamos una constante para obtener 3 y cortamos para garantizar el soporte en  $B_1^n$ . El resultado sigue de que como  $\Omega_{\varphi_k} \subset \Omega_{\varphi_{k+1}} \uparrow \Omega_\varphi$ , la Proposición 3.6.1 implica que  $g_k \rightarrow g$  uniformemente en compactos.  $\square$

*Demostración (Lema 3.6.3).* Del Lema 3.6.1 y la Observación 3.5.1 tenemos

$$\frac{\omega(\Delta_s)}{\sigma(\Delta_s)} \leq C \frac{G(a, y + hse_{n+1})}{s} \quad (3.6.25)$$

El teorema del valor medio implica que

$$\sup_{s>0} \frac{\omega(\Delta_s)}{\sigma(\Delta_s)} \leq C \sup_{s>0} \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}(y + se_{n+1}). \quad (3.6.26)$$

Por el Lema 3.6.2 y los teoremas de la sección anterior  $\partial_{x_{n+1}}g$  tiene límites no-tangenciales  $\omega$ -c.d. por lo que el lado derecho de la desigualdad anterior es finito  $\omega$ -c.d.  $\square$

**Observación 3.6.2.** *El mismo razonamiento muestra que*

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta_s)}{\sigma(\Delta_s)} \leq C \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}(y + se_{n+1}). \quad (3.6.27)$$

Ya tenemos que  $\omega \ll \sigma$ . Probaremos ahora que la derivada de Radon-Nikodym está en  $L^2$ .

**Lema 3.6.5.** *Sean  $\varphi, \Omega_\varphi$  como en los lemas anteriores y  $f = d\omega/d\sigma$ , que existe por el resultado anterior (si restringimos las medidas a  $R_\varphi$  de menos). Entonces existe  $C = C(M)$  tal que*

$$\int_{R_\varphi} f^2 d\sigma \leq C(M) \quad (3.6.28)$$

*Demostración.* Para ahorrar notación ponemos  $g_1 = -\varphi^a$  el corrector en la definición de la función de Green de  $\Omega_\varphi$ . En otras palabras  $g = c_n(|a - \cdot|^{1-n} + g_1)$ . Si tomamos  $r$  como en el Lema 3.6.2, de nuevo por las estimaciones de Schauder, y el hecho de que  $|g_1| \leq |a - \cdot|^{1-n}$ , tenemos que existe  $C_1 = C_1(M)$  tal que  $\|\nabla g_1\|_{\infty, B_r(a)} \leq C_1(M)$ . De nuevo por el Lema 3.6.2 tenemos que existe  $C_2 = C_2(M)$  tal que

$$h(x) := \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+1}}(x) + C_2 \geq 0, \quad x \in \Omega_\varphi \setminus B_r(a). \quad (3.6.29)$$

Para cada  $0 < t < 1$  las funciones  $h_t(x) = h(tx + (1-t)a)$  son armónicas en  $\Omega_\varphi$  y continuas hasta la cerradura (son básicamente los análogos de  $u(rx)$  en un dominio estrellado, solo que ahora el centro no es 0) por lo que tenemos (recordamos  $\omega = \omega^a$ )

$$h(a) = \int_{\partial\Omega_\varphi} h_t(y) d\omega(y) \geq \int_{R_\varphi} h_t(y) d\omega(y). \quad (3.6.30)$$

Usando esto, (3.6.29) y los resultados de la sección anterior tenemos que  $h$  tiene límites no tangenciales  $\omega$ -c.d. y además para  $y \in \partial R_\varphi$

$$\liminf_{t \rightarrow 1} h_t(y) = \limsup_{t \rightarrow 0} h(y + te_{n+1}) = F(y). \quad (3.6.31)$$

Por la Observación 3.6.2 y el hecho que  $|g_1 - g| = |a - \cdot|^{1-n} \leq C(M)$  en  $\partial\Omega_\varphi$  tenemos que existe  $C_3 = C_3(M)$  tal que

$$\begin{aligned} f(y) &\leq C \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta_t(y))}{\sigma(\Delta_t(y))} \leq C \limsup_{t \rightarrow 0} \partial_{n+1} g(y + te_{n+1}) \\ &\leq C_3(F(y) + C_3), \quad \omega\text{-c.d.} \end{aligned} \quad (3.6.32)$$

Combinando todo esto tenemos

$$\begin{aligned} \int_{R_\varphi} f^2 d\sigma &= \int_{R_\varphi} f d\omega \leq \int_{R_\varphi} C_3(F + C_3) d\omega \\ &\leq \liminf_{t \rightarrow 1} \int_{R_\varphi} C_3(h_t(y) + C_3) d\omega \\ &\leq h(a) + C\omega(R_\varphi) \leq C(M) \end{aligned} \quad (3.6.33)$$

donde usamos el lema de Fatou para la segunda desigualdad. □

**Lema 3.6.6.** *Sea  $\varphi \in \text{Lip}(M)$  y  $\Omega_\varphi$  su dominio especial. Si  $E \subset R_\varphi$  satisface  $\omega(E) = 0$  entonces  $\sigma(E) = 0$ .*

*Demostración.* Supongamos entonces que  $E \subset R_\varphi$  (recordamos que  $R_\varphi = \{(x, \varphi(x)) : |x| < 1\} \subset \partial\Omega$ ) es tal que  $\omega(E) = 0$  pero  $\sigma(E) > 0$ .

Para empezar pongamos  $E' = \pi(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \varphi(x)) \in E\}$ . Claramente  $|E'| \approx \sigma(E) > 0$ .

Como motivación notamos que, por el Lema 3.4.1,  $E$  no puede contener ningún disco superficial. Por otro lado un conjunto de medida positiva, en el sentido de medida, se ve a escalas pequeñas como un abierto por el teorema de diferenciación.

La idea será entonces ‘agrandar’  $E$  alrededor de un punto de densidad 1 y llegar a una contradicción vía la comparación uniforme que nos da el hecho de que  $d\omega/d\sigma \in L^2(\sigma)$ .

Supongamos entonces que  $0 \in E$  y que, abusando de la notación, 0 es un punto de densidad de  $E'$ , i.e.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|E' \cap B_r^n(0)|}{|B_r^n(0)|} = 1. \quad (3.6.34)$$

Definimos, para  $0 < s < 1$ , los conjuntos

$$A'_s = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1/2, sx \in E'\} = B_{1/2}^n(0) \cap s^{-1}E'. \quad (3.6.35)$$

En otras palabras,  $A'_s$  agranda  $E'$  un factor  $s^{-1}$  y corta lo que se salga de una bola fija, i.e. la construcción funciona básicamente como una lupa en 0.

Sea ahora  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave tal que  $0 \leq f \leq 1$ ,  $f(x) = 1$  si  $|x| < 2/3$  y  $\text{sop}(f) \subset B_1^n(0)$ . Si ponemos  $\varphi_s(x) = s^{-1}f(x)\varphi(sx)$  entonces  $\text{sop}(f) \subset B_1^n(0)$  y existe  $C$  que no depende de  $r$  tal que  $[\varphi_s]_1 \leq C[\varphi]_1$ . Para ver esto último calculamos

$$\nabla \varphi_s(x) = s^{-1}\varphi(sx)\nabla f(x) + f(x)\nabla \varphi(sx). \quad (3.6.36)$$

El segundo término claramente está acotado por  $\|\nabla \varphi\|_{L^\infty}$ . El primer término, dado que  $\varphi(0) = 0$ , está acotado por  $|x|[\varphi]_1\|\nabla f\|_{L^\infty}$ . Como el soporte de  $\varphi_s$  está en la bola unitaria, la afirmación sigue. Entonces existe  $M'$  (que no depende de  $s$ ) tal que  $\varphi_s \in \text{Lip}(M')$ . Denotamos como  $D_s$  los dominios especiales construidos a partir de  $\varphi_s$ , cuando consideramos a estas últimas como funciones con constante de Lipschitz  $M'$ . Denotamos  $a_s$  al centro de los dominios  $D_s$ .

Definimos ahora los conjuntos, para  $0 < s < 1$ ,

$$A_s = \{(x, \varphi_s(x)) : x \in A'_s\} \subset \partial D_r. \quad (3.6.37)$$

En otras palabras  $A_s$  es un acercamiento, en 0, del conjunto  $E$ , de la misma manera que  $A'_s$  lo es de  $E'$ . La construcción de las  $\varphi_s$  es para poder estimar las medidas armónicas de manera uniforme: Si denotamos  $\omega_s$  la medida armónica en  $D_s$  tenemos

1.  $\omega_s(A_s) = 0$  para toda  $s$ .
2.  $\omega_s(R_s) \geq C$  para toda  $s$  y  $C$  que no depende de  $s$ , donde<sup>15</sup>

$$R_s = \left\{ (x, \varphi_s(x)) : |x| < \frac{1}{2} \right\}. \quad (3.6.38)$$

<sup>15</sup>En otras palabras  $R_s$  es el análogo de  $R_\varphi$  en los  $D_s$ .

La segunda afirmación es inmediata del Lema 3.4.1. Para ver 1 primero notamos que  $sD_s$  es un dominio especial y que si  $(x, \varphi_s(x)) \in R_s$  entonces

$$s(x, \varphi_s(x)) = (sx, \varphi(sx)) \in R_\varphi, \quad (3.6.39)$$

Más aún, vemos que si además  $x \in A'_s$  entonces  $s(x, \varphi_s(x)) \in E$ . Con esto, del Lema 3.5.6, y como para  $z \in D_s$ ,  $\omega_s^z(A_s) = \omega^{sz}(sA_s) \leq \omega^{sz}(E') = 0$ , concluimos 1.

El resto es sencillo: Como  $\omega_s(A_s) = 0$  tenemos

$$\omega_s(R_s) = \omega_s(R_s \setminus A_s) \leq C\sigma(R_s \setminus A_s)^{1/p'} \leq C|\pi(R_s \setminus A_s)|^{1/p'}. \quad (3.6.40)$$

Ahora  $\pi(R_s \setminus A_s) \subset B_{1/2}^n \setminus A'_s$  por lo que concluimos

$$\omega_s(R_s) \leq C|B_{1/2}^n \setminus A'_s|^{1/p'} = C|B_{1/2}^n| \left(1 - \frac{|B_{s/2}^n \cap E'|}{|B_{s/2}^n|}\right)^{1/p'} \rightarrow 0. \quad (3.6.41)$$

Esto es una contradicción con 2, por lo que el lema queda probado.  $\square$

Como corolario a todo lo hecho hasta ahora tenemos

**Teorema 3.6.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz acotado en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces, si  $\omega$  denota su medida armónica y  $\sigma$  la medida de superficie en  $\partial\Omega$ , tenemos  $\sigma \ll \omega \ll \sigma$  y además  $d\omega/d\sigma \in L^2(\sigma)$ .*

Para concluir la prueba del Teorema 3.0.6 simplemente invocamos el Corolario 1.5.1 que nos dice que la noción de convergencia no-tangencial usada aquí es  $\sigma$ -c.d. equivalente a la definida en términos de las regiones  $\Gamma_\alpha(y)$  (ver Definición 1.5.3), y por lo tanto tenemos convergencia no-tangencial siempre que podamos probar que  $u$  está acotada en los conos interiores estándar pero esto es sencillo: Por ejemplo usando la Proposición 1.5.3 vemos que  $\mathcal{N}_\beta u \leq M' = M'(\alpha, \beta)$  en un conjunto de medida arbitrariamente grande. Escogemos  $\beta$  tan grande que contenga a los conos estándar y aplicamos los resultados anteriores.

## 3.7. Extensiones

La medida armónica es una construcción natural que aparece cuando podemos resolver el problema de Dirichlet para el laplaciano. Más aún, como hemos visto, esta medida es más natural que la medida de superficie cuando estudiamos el comportamiento en la frontera de funciones armónicas. Esto nos lleva a una generalización de lo hecho en este capítulo.

Supongamos que  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ , donde  $\Omega$  es un dominio Lipschitz estrellado, y además satisfacemos la condición de elipticidad

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (3.7.1)$$

Tenemos el operador en forma de divergencia dado por

$$L = - \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \quad (3.7.2)$$

El laplaciano, en este caso, corresponde a  $a_{ij} = \delta_{ij}$  la identidad (módulo un signo para asegurar que  $L$  sea positivo). La idea es generalizar lo hecho para funciones armónicas a funciones que satisfacen  $Lu = 0$ . Para esto primero hay que ver que las herramientas que usamos están disponibles para este tipo de funciones.

Los resultados fundamentales que nos permiten trabajar en este contexto tan general son

**Teorema 3.7.1** (Continuidad[21, 41]). *Sea  $u$  una solución de  $Lu = 0$  en  $\Omega$ , entonces  $u$  es localmente Hölder continua en  $\Omega$ .*

**Teorema 3.7.2** (Principio del máximo[37, Theo. 2.5]). *Sea  $u$  una solución de  $Lu = 0$  en  $\Omega$  y  $u|_{\partial\Omega}$  (en el sentido de traza) es acotada en el sentido de  $W^{1,2^{16}}$  entonces*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u. \quad (3.7.3)$$

**Teorema 3.7.3** (Desigualdad de Harnack[41]). *Sea  $u > 0$  una solución de  $Lu = 0$  en  $\Omega$  y  $K \subset \Omega$  un compacto. Existe  $C = C(\Omega, K)$  tal que*

$$\sup_K u \leq C \inf_K u. \quad (3.7.4)$$

**Teorema 3.7.4** (Problema de Dirichlet[37, Cor. 9.1]). *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz, entonces para toda  $f \in C(\partial\Omega)$  existe una única solución  $u$  tal que  $u \in C(\bar{\Omega})$  y*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7.5)$$

*En particular existen las medidas armónicas  $\omega_L^x$  para toda  $x \in \Omega$ .*

<sup>16</sup>i.e. existe una sucesión  $u_k \in C^1(\bar{\Omega})$  con  $|u_k| \leq M$  en  $\partial\Omega$  y  $u_k \rightarrow u$  en  $W^{1,2}$ .

Con todo esto uno puede probar los análogos de los resultados de la segunda sección de este capítulo para soluciones  $Lu = 0$ . Por ejemplo tenemos el resultado

**Teorema 3.7.5** ([2]). *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz estrellado y  $u \geq 0$  solución de  $Lu = 0$  en  $\Omega$ . Entonces  $u$  tiene límites no-tangenciales  $\omega_L$ -c.d.*

Lo instructivo de hacer esta generalización es que, como podemos restringirnos al caso de la bola unitaria (y luego jalar los resultados a un dominio estrellado vía el homeomorfismo  $\Phi$  (ver la discusión antes de la Definición 3.3.3)), se ven más claros los argumentos analíticos, pues en este caso la geometría es sencilla.

Por ejemplo, el Lema 3.4.4 realmente es una estimación puntual de la función maximal no-tangencial:

$$\mathcal{N}u \leq C(\Omega)\mathcal{M}^\omega f, \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)d\omega^x(y). \quad (3.7.6)$$

para cualquier  $f \in L^1(\omega)$ . Después la prueba para el caso  $u \geq 0$  es consecuencia de que tenemos la representación

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} N(x, y)d\mu^0(y). \quad (3.7.7)$$

En este caso probamos que  $u$  está no-tangencialmente acotada  $\omega$ -c.d. y que,  $u(x)$  tiene límites no tangenciales  $f$ , donde  $d\mu^0 = f d\omega + d\nu$  es la descomposición de Lebesgue de  $\mu^0$  respecto de  $\omega^0$ . En el caso general esto podemos probarlo vía una estimación directa en esta descomposición, i.e.

**Teorema 3.7.6** ([2, Theo. 4.3]). *Si  $\mu$  es una medida de Borel en  $\partial B$  ( $B$  la bola unitaria) y  $\omega = \omega^0$  entonces el operador*

$$\mu \mapsto \sup_{r>0} \frac{\mu(\Delta_r(\cdot))}{\omega(\Delta_r(\cdot))} \quad (3.7.8)$$

*es acotado del espacio de medidas de Borel finitas en  $L^{1,\infty}(\partial\Omega)$ .*

El resultado entonces sigue del hecho que  $d\nu/d\omega = 0$  por ser  $\nu$  singular respecto de  $\omega$ .

En este caso, en cierto sentido, estamos generalizando el análisis aplicado a las estimaciones de la medida armónica: Nos fijamos en las propiedades de funciones armónicas que usamos en la prueba y notamos que estas valen para una clase mas general de funciones, a saber  $Lu = 0$  (ver [2] para los aspectos técnicos de esta generalización y [51] para un recuento informal de las técnicas usadas).

Por otro lado también podemos generalizar la geometría: En realidad las propiedades cruciales de dominios Lipschitz estrellados que usamos para probar las estimaciones fueron

1. Regularidad para el problema de Dirichlet del laplaciano.
2. Condición de cadena de Harnack.
3. La existencia de los puntos  $y_+(s)$  y  $y_s$ .

La existencia de los puntos se puede generalizar de la siguiente manera:

**Definición 3.7.1** (Condición interior/exterior de Sacacorchos). *Existen  $M > 0$ ,  $r_0 > 0$  tal que para todo  $y \in \partial\Omega$  y  $r < r_0$  existe un punto  $y_+(r) = y_+ \in \Omega$  con*

$$M^{-1}r < |y - y_+| < r, \quad M^{-1}r < d(y_+, \partial\Omega) < r. \quad (3.7.9)$$

*En otras palabras  $|y - y_+| \approx r \approx d(y_+, \partial\Omega)$  uniformemente en  $y$ .*

*Para la condición exterior es lo mismo, excepto que pedimos  $y_- \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}$ .*

Notamos que, para  $r$  suficientemente pequeño (respecto de  $M$ ),

$$B_{r/9M}(y_+(r/3)) \subset \Omega \cap (B_r(y) \setminus B_{r/9M}(y)) \subset \Omega \cap (B_r(y) \setminus B_{r^2}(y)). \quad (3.7.10)$$

por lo que una condición de sacacorchos exterior implicaría regularidad respecto del problema del Dirichlet para el laplaciano (vía un criterio de capacidad, ver [31, p.330]). Tenemos entonces la siguiente

**Definición 3.7.2** ([30]).  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto. Decimos que  $\Omega$  es NTA (de non-tangentially accesible) si  $\Omega$  satisface la condición de cadena de Harnack y una condición de sacacorchos interior y exterior.

Los resultados aquí también se generalizan a dominios NTA, con estimaciones para  $\omega$  casi idénticas a las probadas aquí para dominios Lipschitz estrellados (ver [30]).

Un punto que hay que resaltar es que, aunque hasta ahora los resultados para  $L$  son completamente análogos a los del laplaciano, esto deja de ser cierto cuando nos fijamos en si  $\sigma \ll \omega_L \ll \sigma$ . Por ejemplo tenemos los siguientes

**Teorema 3.7.7** ([15, Theorem 2]). *Sea  $\Omega$  un dominio NTA y Ahlfors regular entonces, si  $\omega$  denota la medida armónica en algún punto de  $\Omega$  tenemos que  $\omega \ll \sigma \ll \omega$ .*

**Teorema 3.7.8** ([40]). *Existe un dominio suave  $\Omega$  y un operador elíptico  $L$  tal que  $\omega_L$  no es absolutamente continua respecto de  $\sigma$  en  $\partial\Omega$ .*

Recordamos el planteamiento del problema de Dirichlet con dato en la frontera en  $L^p(\sigma)$ .

**Definición 3.7.3.** *Sea  $1 < p < \infty$  y  $\Omega$  Lipschitz. Decimos que el problema de Dirichlet (para el laplaciano) en  $L^p(\sigma)$  tiene solución si para toda  $f \in L^p(\sigma)$  existe una función armónica  $u$  en  $\Omega$  tal que  $u$  tiene límites no-tangenciales  $f$   $\sigma$ -c.d. y existe  $C$  que no depende de  $f$  tal que*

$$\|\mathcal{N}u\|_{L^p(\sigma)} \leq C\|f\|_{L^p(\sigma)}. \quad (3.7.11)$$

**Observación 3.7.1.** *La condición sobre la función maximal no-tangencial está para garantizar unicidad: Por ejemplo si  $\Omega$  es suave, esto nos garantiza que, vía la integral de Poisson, podemos recuperar  $u$  vía  $f$ . Por otro lado existen funciones armónicas en el disco unitario con límites no-tangenciales 0 en todo punto del círculo que no son 0.*

Notamos que en lo que hemos hecho en el capítulo viene implícito que, si  $f \in L^1(\omega)$  entonces

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)d\omega^x(y) = \int_{\partial\Omega} f(y)N(x, y)d\omega^0(y) \quad (3.7.12)$$

es una función armónica en  $\Omega$  con límites no-tangenciales  $f$   $\sigma$ -c.d. Por esto y la definición de la medida armónica, este es el mejor candidato a solución del problema de Dirichlet con dato en la frontera  $f$ . Nos preguntamos que pasa si damos  $f \in L^p(\sigma)$  para algún  $p > 1$ . Probamos que si  $\Omega$  es Lipschitz entonces  $K(x, \cdot) = d\omega^x/d\sigma \in L^2(\sigma)$  por lo que, si  $p = 2$ , entonces

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)d\omega^x(y) = \int_{\partial\Omega} f(y)K(x, y)d\sigma(y) \quad (3.7.13)$$

define una función armónica. Además, de (3.7.6) podemos concluir que

$$\|\mathcal{N}u\|_{L^p(\omega)} \leq C(\Omega, p)\|f\|_{L^p(\omega)}, \quad 1 < p < \infty. \quad (3.7.14)$$

En el caso de dominios suaves, dado que  $L^p(\omega) = L^p(\sigma)$  y  $\|f\|_{L^p(\omega)} \approx \|f\|_{L^p(\sigma)}$ , esto se traduce en que el problema de Dirichlet en  $L^p(\sigma)$  siempre tiene solución para  $1 < p < \infty$ . Por otro lado, en el caso Lipschitz esto nos es tan sencillo pues no tenemos que el núcleo de Poisson  $K(x, \cdot) \in L^\infty(\sigma)$ . Sin embargo tenemos el siguiente

**Teorema 3.7.9** ([12]). *Si  $\Omega$  es un dominio Lipschitz y  $2 \leq p \leq \infty$  entonces el problema de Dirichlet en  $L^p(\sigma)$  siempre tiene solución. Además para dominios Lipschitz en general este rango de  $p$ 's es óptimo.*

# Capítulo 4

## Espacios de Hardy

El objetivo de este capítulo es introducir los espacios de Hardy  $H_{\pm}^p(\partial\Omega)$  asociados a un dominio Lipschitz  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y dar un resultado que relaciona la geometría de los espacios  $H_{\pm}^2(\partial\Omega)$  con la geometría de  $\Omega$ . Más concretamente probamos que estos últimos espacios son ortogonales si y sólo si  $\Omega$  es una bola.

En la primera sección motivamos las definiciones que daremos vía el estudio de los espacios de Hardy en  $\mathbb{C}$  de funciones holomorfas. Este parece ser el camino correcto si uno tiene en mente que, en varios aspectos, funciones monogénicas son una generalización a dimensiones altas de funciones holomorfas.

En la segunda sección adaptamos lo hecho para  $\mathbb{C}$  al caso de funciones monogénicas. En pocas palabras ponemos

$$H_+^p(\partial\Omega) = \text{Im} \left( \frac{I}{2} + \mathcal{C} \right), \quad H_-^p(\partial\Omega) = \text{Im} \left( -\frac{I}{2} + \mathcal{C} \right) \quad (4.0.1)$$

como operadores en  $L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)})$ . Resulta que estos espacios son cerrados y  $P_{\pm} = \pm I/2 + \mathcal{C}$  son proyecciones continuas sobre estos. En el caso  $p = 2$  surge entonces la pregunta natural de si  $P_+$  es la proyección ortogonal. Esto es equivalente, por un lado, a que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$ , y por otro a que  $H_+^2(\partial\Omega) \perp H_-^2(\partial\Omega)$ . En esta sección damos varias condiciones más equivalentes a esta.

También probamos que para toda  $\varepsilon > 0$  existe  $C = C(\varepsilon)$  tal que

$$1 \leq \frac{\|\mathcal{C} - \mathcal{C}^*\|_{L^2 \rightarrow L^2}}{\cos \theta} \leq C, \quad \theta \in (\varepsilon, \pi/2], \quad (4.0.2)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los subespacios  $H_{\pm}^p(\partial\Omega)$  como subespacios de  $L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)})$ . Combinando estos resultados sugiere que el hecho  $\theta = \pi/2$  sea el caso límite de un teorema de regularidad de la forma

$$\mathcal{C} - \mathcal{C}^* \text{ pequeño} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \text{ regular.} \quad (4.0.3)$$

Donde la noción de tamaño y regularidad no son triviales (por ejemplo 0 y bola respectivamente). Ejemplos de este tipo de resultados se ven en la última sección.

## 4.1. El caso complejo y un teorema de Kerzman-Stein

En esta sección veremos la versión compleja de los resultados asociados al operador de Cauchy. Estos se ponen como motivación de lo que se hará en las siguientes secciones.

Como generalmente hacemos, sea  $\Gamma$  una curva de Jordan tal que si  $\Omega_+$  denota la componente acotada del complemento de  $\Gamma$  entonces  $\Omega_+$  es un dominio Lipschitz. Suponemos siempre que  $\Gamma$  es entonces cerrada y está parametrizada por  $\gamma(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Recordamos la definición de los operadores de Cauchy en este contexto: Dada  $f \in L^p(\Gamma)$  para  $1 < p < \infty$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, & z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \\ \mathcal{E}f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, & z \in \Gamma. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Por los resultados obtenidos en el capítulo 3 tenemos que la segunda integral está bien definida como valor principal para  $f$  como arriba. Por otro lado tenemos la fórmula para los límites de  $\mathcal{C}f^1$ :

$$\lim_{w \rightarrow z} \mathcal{C}f(w) = \pm \frac{f(z)}{2} + \mathcal{E}f(z), \quad w \in \Omega_{\pm}. \quad (4.1.2)$$

Tenemos además, de manera análoga a como se hizo con el operador de Cauchy-Clifford,

$$\|\mathcal{N}(\mathcal{C}f)\|_{L^p(\Gamma)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\Gamma)}, \quad 1 < p < \infty. \quad (4.1.3)$$

Para motivar nuestra definición de espacios de Hardy fijémonos primero en el caso  $\Gamma = \mathbb{T}$ ,  $\Omega_+ = D$ , el círculo y disco unitario respectivamente. En este caso la definición usual de espacios de Hardy es la siguiente

$$H^p(D) = \left\{ u \in \mathcal{H}(D) : \sup_{0 < r < 1} \left( \int_0^{2\pi} |f(r\theta)|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty \right\}. \quad (4.1.4)$$

---

<sup>1</sup>Recordamos que  $\Omega_- = \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}_+$ .

Aunque en este caso podemos definir estos espacios para  $0 < p < \infty$ , nos fijaremos solamente en el caso  $p > 1$ . El resultado que nos interesa es la siguiente caracterización de  $H^p$ . Recordamos que  $\hat{g}(n)$  es el  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $g \in L^1(\mathbb{T})$ , i.e.

$$\hat{g}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (4.1.5)$$

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $1 < p < \infty$ . Entonces son equivalentes*

1.  $f \in H^p(D)$ .
2.  $f$  tiene límites no-tangenciales,  $f \in L^p(\mathbb{T})$  con  $\hat{f}(n) = 0$  para  $n < 0$  y  $f = \mathcal{C}(f|_{\mathbb{T}})$ .
3.  $f \in \mathcal{H}(D)$  y  $\mathcal{N}f \in L^p(\mathbb{T})$ .

*Demostración.*  $1 \Leftrightarrow 2$  Estas implicaciones son clásicas y se pueden encontrar, por ejemplo, en [1] y [17].

$2 \Rightarrow 3$  Esta implicación es consecuencia de las cotas para  $\mathcal{N}(\mathcal{C}(f|_{\mathbb{T}}))$ .

$3 \Rightarrow 2$  Por el teorema de Hunt-Wheeden (Teorema 3.0.6)  $f$  tiene límites no-tangenciales en  $L^p(\mathbb{T})$ . Como  $|f(re^{i\theta})| \leq \mathcal{N}f(e^{i\theta})$ , el teorema de convergencia dominada nos dá que los coeficientes de la expansión en serie de Laurent de  $f$  en 0 están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n-1} f(\zeta) d\zeta = \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.1.6)$$

De esto concluimos, por un lado que  $\hat{f}(n) = 0$  para  $n < 0$ , y por otro que  $f$  y  $\mathcal{C}(f|_{\mathbb{T}})$  tienen los mismos coeficientes en su serie de Taylor en 0.  $\square$

Esto justifica que pongamos para,  $\Gamma, \Omega_{\pm}$  como antes,

**Definición 4.1.1.** *Dada  $1 < p < \infty$  ponemos los espacios de Hardy*

$$H^p(\Omega_{\pm}) = \{u \in \mathcal{H}(\Omega_{\pm}) : \mathcal{N}u \in L^p(\Gamma), u = O(|z|^{-1}) \text{ en } \infty\}. \quad (4.1.7)$$

*Recordamos, por como definimos  $\Omega_{\pm}$ , que la última condición sólo es restrictiva para  $\Omega_-$ .*

*Definimos además los espacios de Hardy en  $\Gamma$  como*

$$H_{\pm}^p(\Gamma) := \{u|_{\Gamma} : u \in H^p(\Omega_{\pm})\} \quad (4.1.8)$$

**Observación 4.1.1.** *Apelando al teorema de Hunt-Wheeden (Teorema 3.0.6) vemos que, en efecto, funciones en  $H^p(\Omega_{\pm})$  tiene valores de frontera  $\sigma$ -c.d. en  $\Gamma$ , por lo que el espacio  $H_{\pm}^p(\Gamma)$  está bien definido.*

Regresando al caso del círculo, vemos que 2 del Teorema 4.1.1 implica que

$$H_+^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \text{ para } n < 0 \right\}. \quad (4.1.9)$$

Por otro lado, si  $g \in H^p(\mathbb{C} \setminus \bar{D})$ , por la condición de decaimiento,  $f(z) = g(1/z)$  define una función holomorfa en  $D$  y además  $\mathcal{N}f \in L^p(\mathbb{T})$ . En este caso tenemos  $g(e^{i\theta}) = f(e^{-i\theta})$  en  $\mathbb{T}$  por lo que

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)e^{-int} dt = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{int} dt = -\hat{f}(-n). \quad (4.1.10)$$

Deducimos que  $\hat{g}(n) = 0$  para  $n > 0$ . De nuevo por la condición de decaimiento tenemos que  $\hat{g}(0) = 0$  por lo que tenemos la caracterización

$$H_-^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \text{ para } n \geq 0 \right\}. \quad (4.1.11)$$

Con esto tenemos el siguiente resultado

**Teorema 4.1.2.** *Sea  $1 < p < \infty$  entonces  $L^p(\mathbb{T}) = H_+^p(\mathbb{T}) \oplus H_-^p(\mathbb{T})$ , i.e. para toda  $f \in L^p(\mathbb{T})$  existen  $f_{\pm} \in H_{\pm}^p(\mathbb{T})$  con  $f = f_+ + f_-$ . Más aún esta descomposición es única.*

Esta descomposición es algebraica, pero podemos ver fácilmente que también es topológica pues los espacios  $H_{\pm}^p(\mathbb{T})$  son cerrados en  $L^p(\mathbb{T})$ . La idea ahora es generalizar este resultado a  $\Gamma$  en general.

**Notación 4.1.1.** *Dada  $u \in H^p(\Omega_{\pm})$  ponemos*

$$\|u\|_{H_{\pm}^p} := \|\mathcal{N}u\|_{L^p(\Gamma)}. \quad (4.1.12)$$

*Si no hay confusión de en que dominio estamos trabajando ponemos simplemente  $\|\cdot\|_{H^p}$ .*

Claramente esta define una norma en  $H^p(\Omega_{\pm})$ . De hecho tenemos

**Proposición 4.1.1.** *Sea  $1 < p < \infty$  entonces  $(H^p(\Omega_{\pm}), \|\cdot\|_{H_{\pm}^p})$  es un espacio de Banach.*

La prueba de esto es inmediata de la completitud de  $L^p(\Gamma)$  junto con la estimación 4.1.3 y el siguiente lema, que a su vez es consecuencia de la fórmula integral de Cauchy (ver Teorema 1.7.3).

**Lema 4.1.1.** *Sea  $1 < p < \infty$  y  $u \in H^p(\Omega_{\pm})$  entonces  $u = \pm \mathcal{C}(u|_{\Gamma})$ .*

Si recordamos la fórmula para los límites de  $\mathcal{C}f$  (ver (4.1.2)) entonces tenemos operadores  $P_{\pm} : L^p(\Gamma) \rightarrow H_{\pm}^p(\Gamma)$  dados por

$$P_{\pm} = \pm \frac{1}{2}I + \mathcal{C}. \quad (4.1.13)$$

Tenemos que  $P_{\pm}$  es acotado en  $L^p(\Gamma)$  y además el lema implica que  $P_{\pm}^2 = P_{\pm} \circ P_{\pm} = P_{\pm}$  por lo que  $P_{\pm}$  es, en efecto, una proyección de  $L^p(\Gamma)$  sobre  $H_{\pm}^p(\Gamma)$ . Por otro lado  $P_{-}^2 = -P_{-}$  por lo que esta no es una proyección en el sentido usual, pero  $-P_{-}$  lo es.

**Proposición 4.1.2.** *Sea  $1 < p < \infty$  entonces tenemos*

$$\ker(P_{\pm}) = H_{\mp}^p(\Gamma), \quad \text{Im}(P_{\pm}) = H_{\pm}^p(\Gamma). \quad (4.1.14)$$

*Demostración.* La segunda identidad es clara del lema anterior. Para la primera simplemente notamos, de la definición de  $P_{\pm}$ , que  $P_{+} - P_{-} = I$  por lo que si  $f \in \ker(P_{+})$  entonces  $f = -P_{-}f \in H_{-}^p(\Gamma)$ . Para la segunda contención recordamos que del lema anterior, si  $f \in H_{-}^p(\Gamma)$  y  $u \in H^p(\Omega_{-})$  es tal que  $f = u|_{\Gamma}$  entonces  $-\mathcal{C}f = u$  por lo que  $-P_{-}f = f$ . Combinando esto con la identidad del inicio concluimos  $f \in \ker(P_{+})$ .  $\square$

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que  $H_{\pm}^p(\Gamma)$  son subespacios cerrados de  $L^p(\Gamma)$ . Pero además, de la identidad (que ya usamos en la prueba anterior)

$$P_{+} - P_{-} = I \quad \text{como operadores en } L^p(\Gamma), \quad (4.1.15)$$

tenemos el análogo del Teorema 4.1.2, a saber

**Teorema 4.1.3.** *Sea  $1 < p < \infty$  entonces  $L^p(\Gamma) = H_{+}^p(\Gamma) \oplus H_{-}^p(\Gamma)$ .*

Como antes, la interpretación de esta suma es en el sentido de espacios de Banach:  $H_{+}^p(\Gamma)$  es un complemento de  $H_{-}^p(\Gamma)$  en  $L^p(\Gamma)$  y  $\pm P_{\pm}$  las proyecciones asociadas a esta descomposición. Por otro lado en el caso  $p = 2$  tenemos otras proyecciones asociadas de manera natural a estos espacios, a saber las proyecciones ortogonales  $\mathcal{P}_{\pm}$ . La pregunta más obvia en este caso es ¿Será  $P_{+} = \mathcal{P}_{+}$ ? En el caso del círculo podemos dar una respuesta afirmativa de manera sencilla.

**Teorema 4.1.4.**  $H_+^2(\mathbb{T}) \perp H_-^2(\mathbb{T})$ . En particular  $\pm P_{\pm} = \mathcal{P}_{\pm}$ .

*Demostración.* La prueba de la primera afirmación es obvia de la representación en (4.1.9) y (4.1.11). La otra parte es puro análisis funcional y es consecuencia de la unicidad de una proyección, dada una descomposición como en el teorema anterior.  $\square$

El teorema de Kerzman-Stein, en la forma en que aparece en [35], caracteriza los dominios  $\Omega_+$  para los cuales  $P_+ = \mathcal{P}_+$ . Tenemos

**Teorema 4.1.5** (Kerzman-Stein). *Sean  $\Gamma, \Omega_+$  como antes. Si  $P_+ = \mathcal{P}_+$  entonces  $\Omega_+$  es un disco.*

Antes de pasar a la prueba de este resultado veremos algunas formas equivalentes de la afirmación  $P = \mathcal{P}_+$ .

**Proposición 4.1.3.** *Son equivalentes*

1.  $H_+^2(\Gamma) \perp H_-^2(\Gamma)$ .
2.  $\pm P_{\pm} = \mathcal{P}_{\pm}$ .
3.  $P_+ = P_+^*$ .
4.  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$ .

*Demostración.*  $1 \Leftrightarrow 2$  se sigue de la prueba del Teorema 4.1.4.  $2 \Leftrightarrow 3$  es consecuencia de la definición de  $\mathcal{P}_{\pm}$ .  $3 \Leftrightarrow 4$  es obvia de la identidad

$$P_+ - P_+^* = \mathcal{C} - \mathcal{C}^* = P_- - P_-^*. \quad (4.1.16)$$

$\square$

En otras palabras la proposición, junto con el teorema, nos dicen que la geometría de los espacios de Hardy y propiedades del operador  $\mathcal{C}$  dan información geométrica del dominio. En este caso nos dicen que la ortogonalidad de los espacios de Hardy o el hecho  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$  determinan la forma del dominio.

En lo anterior hemos visto que las proyecciones  $\pm P_{\pm}$  aparecen de manera natural por la fórmula integral de Cauchy. Resulta que las proyecciones  $\mathcal{P}_{\pm}$  también aparecen de estudiar funciones holomorfas en  $\Omega_{\pm}$ . Para ver esto primero formalizamos un hecho que básicamente está probado por lo que hemos hecho hasta ahora, en otras palabras tenemos

**Proposición 4.1.4.** *Sea  $1 < p < \infty$ . Tenemos  $H^p(\Omega_{\pm}) \cong H_{\pm}^p(\Gamma)$  como espacios de Banach.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C} : L^p(\Gamma) \rightarrow H^p(\Omega_{\pm})$ . Tenemos, de (4.1.3), que este es un operador lineal y acotado. El Lema 4.1.1 implica que también es sobre. Por otro lado, si  $\mathcal{C}f = 0$  en  $\Omega_{\pm}$  tenemos, por (4.1.2), que  $\pm P_{\pm}f = 0$  por lo que  $f \in H_{\mp}^p(\Gamma)$  o, en otras palabras,  $\ker(\mathcal{C}) = H_{\mp}^p(\Gamma)$ . Concluimos

$$H^p(\Omega_{\pm}) \cong L^p(\Gamma)/H_{\mp}^p(\Gamma) \cong H_{\pm}^p(\Gamma). \quad (4.1.17)$$

□

Lo importante de este resultado es que nos permite identificar una función  $f \in H_{\pm}^p(\Gamma)$  con su única extensión holomorfa dada por  $\mathcal{C}f$  (pues la prueba de hecho dá  $\mathcal{C}(H_{\pm}^p(\Gamma)) = H^p(\Omega_{\pm})$  de manera biyectiva). El Lema 4.1.1 además nos dice que  $f = \mathcal{C}f|_{\Gamma}$  por lo que podemos considerar que  $f$  es realmente una función holomorfa en  $\Omega_{\pm}$  con valores no-tangenciales en  $\Gamma$  sin problemas.

Por otro lado también nos dice que las normas  $\|\mathcal{N}u\|_{L^p(\Gamma)}$  y  $\|u\|_{L^p(\Gamma)}$  son equivalentes en  $H^p(\Omega_{\pm})$ . Por lo anterior, si normamos este último espacio con la segunda, tenemos que  $\mathcal{C}$  es un isomorfismo isométrico entre  $H^p(\Omega_{\pm})$  y  $H_{\pm}^p(\Gamma)$ .

Dicho esto tomemos  $z \in \Omega_{\pm}$  y consideramos el funcional lineal en  $H^p(\Omega_{\pm})$  dado por evaluación en  $z$ , llamémosle  $ev_z$ . Recordamos la definición de las regiones no-tangenciales  $\Gamma_{\alpha}^{\pm}(\zeta)$  para algún  $\zeta \in \Gamma$ ,

$$\Gamma_{\alpha}^{\pm}(\zeta) = \{z \in \Omega_{\pm} : |z - \zeta| < (1 + \alpha)d(z, \Gamma)\}. \quad (4.1.18)$$

Si definimos  $A_z = \{\zeta \in \Gamma : z \in \Gamma_{\alpha}^{\pm}(\zeta)\}$  para  $z \in \Omega_{\pm}$  entonces es claro que  $A_z \neq \emptyset$  y es abierto. Por definición, para  $u \in H^p(\Omega_{\pm})$ , tenemos que  $|u(z)| \leq \mathcal{N}u(\zeta)$  para toda  $\zeta \in A_z$ . Integrando sobre  $A_z$  tenemos

$$\sigma(A_z)|u(z)|^p \leq \int_{A_z} |\mathcal{N}u(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \leq C\|u\|_{L^p(\Gamma)}^p. \quad (4.1.19)$$

Concluimos que  $ev_z : H^p(\Omega_{\pm}) \rightarrow \mathbb{C}$  es un funcional lineal y continuo. Obviamente el siguiente paso será usar el teorema de representación de Riesz, para esto nos restringimos a  $p = 2$ .

Como se dijo, el teorema de representación de Riesz nos dice que existe  $k_z \in H_{\pm}^2(\Gamma)$  tal que

$$u(z) = \int_{\Gamma} u(\zeta)\overline{k_z(\zeta)}d\sigma(\zeta) = \int_{\Gamma} S_{\pm}(z, \zeta)u(\zeta)d\sigma(\zeta), \quad u \in H_{\pm}^2(\Gamma), \quad (4.1.20)$$

si ponemos  $S_{\pm}(z, \zeta) = \overline{k_z(\zeta)}$ . Como  $\overline{S_{\pm}(z, \cdot)} \in H_{\pm}^2(\Gamma)$  tenemos que

$$\int_{\Gamma} S_{\pm}(z, \zeta)v(\zeta)d\sigma(\zeta) = 0, \quad \forall v \in H_{\pm}^2(\Gamma)^{\perp}, \quad z \in \Omega_{\pm}. \quad (4.1.21)$$

Concluimos que tenemos un operador

$$\mathcal{S}_{\pm} : L^2(\Gamma) \rightarrow H^2(\Omega_{\pm}), \quad f \mapsto \int_{\Gamma} S_{\pm}(\cdot, \zeta)f(\zeta)d\sigma(\zeta). \quad (4.1.22)$$

Que el operador realmente vá al espacio adecuado se sigue de que  $f = f_{\pm} + f_{\pm}^{\perp}$  con  $f_{\pm} \in H_{\pm}^2(\Gamma)$  y  $f_{\pm}^{\perp} \in H_{\pm}^2(\Gamma)^{\perp}$ , y  $\mathcal{S}_{\pm}f_{\pm} = f_{\pm}(\cdot)^2$ ,  $\mathcal{S}_{\pm}f_{\pm}^{\perp} \equiv 0$ .

Vía la identificación que no dejamos de mencionar tenemos que podemos pensar  $\mathcal{S}_{\pm} : L^2(\Gamma) \rightarrow H_{\pm}^2(\Gamma)$  y en este caso, dado que actúa como la identidad en  $H_{\pm}^2(\Gamma)$  y cero en su complemento ortogonal, tenemos que  $\mathcal{S}_{\pm} = \mathcal{P}_{\pm}$ .

Algo importante a notar es que  $\mathcal{S}$  reproduce funciones holomorfas en  $H^2(\Omega_{\pm})$  por (4.1.20), al igual que el operador de Cauchy  $\mathcal{C}$ . El siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en [35], nos dice que  $\mathcal{S}_{+}$ , o más apropiadamente  $S_{+}$ , no son solo curiosidades

**Teorema 4.1.6.** *Sea  $\Omega_{+}$  suave y  $a \in \Omega_{+}$ . Si  $F : \Omega_{+} \rightarrow D$  es el mapeo de Riemann con  $F(a) = 0$  y  $F'(a) > 0$ , entonces*

$$F'(z) = \frac{2\pi}{S(a, a)}S^2(z, a), \quad z \in \Omega_{+}. \quad (4.1.23)$$

Observamos nada más que, aunque  $S$  está en principio definido en  $\Omega_{+} \times \Gamma$ , como  $k_z \in H_{\pm}^2(\Gamma)$ , podemos, de hecho, definirlo en  $\Omega_{+} \times \bar{\Omega}_{\pm}$  por lo que lo anterior tiene sentido.

El teorema entonces nos dice que, conociendo  $S$ , podemos recuperar el mapeo de Riemann. Por supuesto nuestra manera de definir  $S$  es poco explícita y no podemos esperar mucho en términos de encontrar una fórmula para  $S$  en general. El punto principal en [35] es que siempre podemos recuperar  $\mathcal{S}_{\pm}$  en términos de  $\pm P_{\pm}$ , que tienen núcleos definidos de manera explícita, y un operador invertible definido en términos de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}^*$ . Más concretamente tenemos

**Lema 4.1.2.** *Si definimos  $\mathcal{A}_{\pm} = \pm(P_{\pm} - P_{\pm}^*)$  entonces, como operadores en  $L^2(\Gamma)$ , tenemos*

$$\mathcal{P}_{\pm} = \pm P_{\pm}(I + \mathcal{A}_{\pm})^{-1}. \quad (4.1.24)$$

---

<sup>2</sup>Siempre hay que tener en mente la identificación de elementos en  $H_{\pm}^2(\Gamma)$  con sus extensiones holomorfas en  $H^2(\Omega_{\pm})$ .

*Demostración.* Para empezar notamos que  $i\mathcal{A}_\pm$  es un operador autoadjunto por lo que su espectro es real, en particular  $iI \pm i\mathcal{A}$  es invertible. Concluimos que lo mismo es cierto para  $I + \mathcal{A}_\pm$ .

Para establecer la fórmula primero vemos que, como  $\mathcal{P}_\pm$  y  $\pm P_\pm$  son proyecciones sobre los mismos espacios,

$$\mathcal{P}_\pm \circ (\pm P_\pm) = \pm P_\pm, \quad \pm P_\pm \circ \mathcal{P}_\pm = \mathcal{P}_\pm. \quad (4.1.25)$$

Tomando adjuntos en la segunda tenemos  $\pm \mathcal{P}_\pm P_\pm^* = \mathcal{P}_\pm$  pues  $\mathcal{P}_\pm$  son proyecciones ortogonales. Si restamos esta ecuación a la primera de las anteriores llegamos a

$$\mathcal{P}_\pm(1 + \mathcal{A}_\pm) = \pm P_\pm. \quad (4.1.26)$$

que es equivalente a la afirmación.  $\square$

En particular esto nos dá otra prueba de que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$  implica  $\pm P_\pm = \mathcal{P}_\pm$ , pero el punto aquí es otro:  $P_\pm$  tiene una expresión sencilla en términos del operador de Cauchy, por lo que si tuviéramos una manera sencilla de representar  $(I + \mathcal{A}_\pm)^{-1}$  podríamos representar a las proyecciones ortogonales  $\mathcal{P}_\pm$  y, en particular, a  $\mathcal{S}_\pm$ . Una ruta, obvia de las expresiones, es representar a  $(I + \mathcal{A}_\pm)^{-1}$  como serie de Neumann, que es posible cuando  $\|\mathcal{A}_\pm\|_{L^2 \rightarrow L^2} < 1$ . Para ver a donde lleva esto referimos de nuevo a [35].

Con todo esto hecho regresamos a nuestro resultado principal

*Demostración Teorema 4.1.5.* De la Proposición 4.1.3 vemos que podemos suponer que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$  en  $\Gamma$ , por lo que tenemos que los núcleos que definen a estos operadores son iguales. En otras palabras

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\gamma'(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{-1}{2\pi i} \overline{\left( \frac{\gamma'(z)}{z - \zeta} \right)}, \quad \text{para casi toda } z, \zeta \in \Gamma, \quad (4.1.27)$$

donde podemos suponer que  $\gamma$  es la parametrización de  $\Gamma$  por longitud de arco. Despejando tenemos que

$$\gamma'(\zeta) = -\overline{\gamma'(z)} \frac{\zeta - z}{z - \zeta}, \quad \text{p.c.t. } z, \zeta \in \Gamma. \quad (4.1.28)$$

Vemos que el lado derecho, como función de  $\zeta$ , está en  $C(\Gamma \setminus \{z\})$  siempre que  $\gamma'(z)$  exista. Tomando dos puntos distintos  $z_i$  tal que  $\gamma'(z_i)$  exista vemos que la identidad anterior implica que  $\gamma'$  tiene un representante continuo, por lo que, dado que la norma

del lado derecho nunca se anula, tenemos  $\Gamma$  es una curva  $C^1$ . Es fácil ver entonces que, de hecho,  $\Gamma$  es  $C^\infty$  (pues el lado derecho lo es). Concluimos

$$0 = \frac{\gamma'(\zeta)}{\zeta - z} + \overline{\left(\frac{\gamma'(z)}{z - \zeta}\right)} = \frac{1}{\zeta - z} \left( \gamma'(\zeta) - \frac{\zeta - z}{\zeta - z} \overline{\gamma'(z)} \right). \quad (4.1.29)$$

Recordamos que, para cualesquiera números complejos  $a, b$ , el vector  $(a/\bar{a})\bar{b}$  es la reflexión de  $b$  a través de la recta que genera  $a$ . Para ver esto simplemente notamos que, dado que multiplicación por  $\bar{a}$  preserva ángulos, y  $\bar{a}a \in \mathbb{R}$ , tenemos que la reflexión de  $\bar{a}b$  a través de  $\mathbb{R}$  es  $a\bar{b}$ , de donde la reflexión buscada es  $(a/\bar{a})\bar{b}$  (tiene el argumento correcto por lo anterior y obviamente tiene la norma de  $b$ ).

Entonces si definimos

$$\gamma'_1(z) = \frac{\zeta - z}{\zeta - z} \overline{\gamma'(z)}, \quad (4.1.30)$$

tenemos que  $\gamma'_1(z)$  es la reflexión a través de la cuerda  $\zeta - z$  de  $\gamma'(z)$ . En particular, de la última ecuación tenemos, para  $\zeta \in \Gamma$  arbitrario pero fijo,

$$\gamma'(\zeta) = \gamma'_1(z), \quad z \in \Gamma. \quad (4.1.31)$$

Esto implica que  $\gamma'(z)$  y  $\gamma'(\zeta)$  forman el mismo ángulo con el vector  $\zeta - z$  (justamente porque  $\gamma'_1$  es la reflexión de  $\gamma'$  a través de este vector). El teorema se sigue del lema siguiente.  $\square$

**Lema 4.1.3.** *Sea  $\Gamma$  una curva simple suave en  $\mathbb{C}$  tal que las tangentes a  $\Gamma$  en cualesquiera dos puntos forman el mismo ángulo con la cuerda entre dichos puntos, entonces  $\Gamma$  es un arco de circunferencia, o un segmento de recta (posiblemente infinito).*

Para probar este lema necesitaremos un resultado de geometría elemental disfrazado de la manera que lo usaremos

**Proposición 4.1.5.** *Sean  $z, z_i, i = 1, 2, 3$  puntos en el plano. Supongamos que  $|z - z_3| < \min\{|z - z_1|, |z - z_2|\}$ . Asumimos además que el ángulo generado por  $z_1z$  y  $z_2z$  es igual al generado por  $z_1z_3$  y  $z_2z_3$ , entonces  $z$  está en la circunferencia generada por los  $z_i$ . (ver figura 4.1).*

*Demostración.* La prueba es consecuencia sencilla del hecho que el converso es cierto: Si  $z$  está en la circunferencia, que llamamos  $C$ , entonces ambos ángulos son la mitad del arco entre  $z_1$  y  $z_2$  que no contiene a  $z_3$  (la condición sobre las distancias asegura que  $z$  tampoco está en este arco).

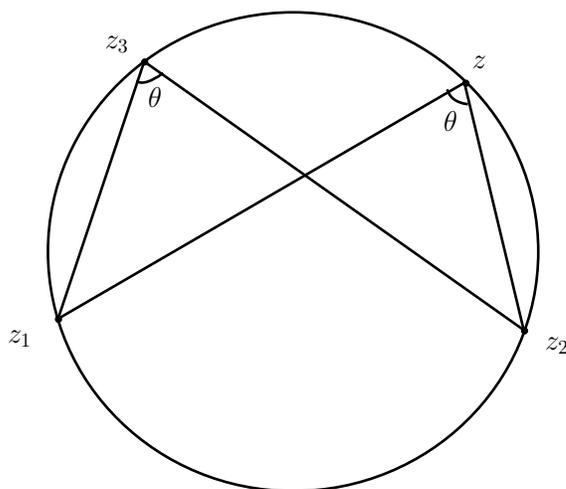


Figura 4.1: Enunciado de la proposición.

Con esto supongamos que  $z$  satisface las hipótesis y que  $z$  está, digamos, fuera del círculo completo. Sea  $z'$  el punto en el segmento  $z_2z$  intersección  $C$ . Por lo anterior el ángulo generado por  $z_1z'$  y  $z_2z'$  es igual al generado por  $z_3$ , pero esto es imposible pues la suma de ángulos interiores suman  $\pi$  y el triángulo  $z_1z_2z'$  comparte dos ángulos con el correspondiente  $z_1z_2z$  (ver figura 4.2)  $\square$

*Demostración Lema 4.1.3.* Recordamos que el ángulo entre dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}^2$  lo definimos como el único  $\theta \in [0, \pi/2]$  tal que

$$\cos(\theta) = \frac{|x \cdot y|}{|x||y|}. \quad (4.1.32)$$

Sea  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización de  $\Gamma$  por longitud de arco (i.e.  $|\gamma'| = 1$ ). Ponemos entonces, para  $z, \zeta \in \Gamma$ ,  $z = \gamma(t)$  y  $\zeta = \gamma(s)$  para algunos  $s, t \in I$ . Por hipótesis tenemos la igualdad de ángulos

$$\angle(\gamma'(t), \gamma(t) - \gamma(s)) = \angle(\gamma'(s), \gamma(t) - \gamma(s)). \quad (4.1.33)$$

Combinando las dos últimas ecuaciones tenemos

$$\gamma'(t) \cdot (\gamma(t) - \gamma(s)) = \pm \gamma'(s) \cdot (\gamma(t) - \gamma(s)), \quad \forall t, s \in I. \quad (4.1.34)$$

Derivando esto último respecto de  $t$  y de  $s$  obtenemos (usando que  $\gamma' \cdot \gamma' = 1$ )

$$\gamma''(t) \cdot (\gamma(t) - \gamma(s)) = -1 \pm \gamma'(t) \cdot \gamma'(s) = \gamma''(s) \cdot (\gamma(t) - \gamma(s)). \quad (4.1.35)$$

Hacemos lo que sigue por casos

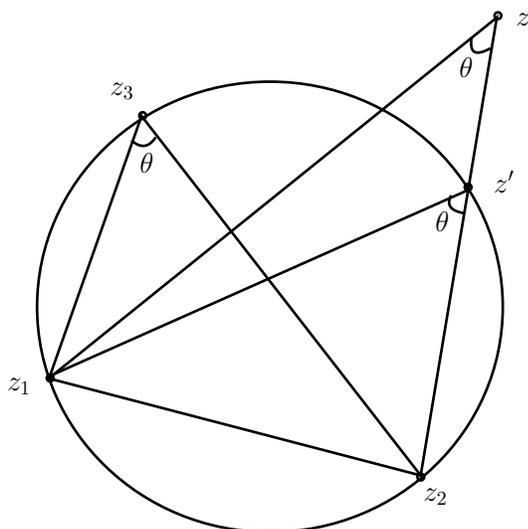


Figura 4.2: Prueba de la proposición.

1.  $\gamma''(s_0) = 0$  para alguna  $s_0 \in I$ .

Por la última identidad tenemos que  $\gamma''(t) \cdot (\gamma(t) - \gamma(s)) = 0$  para toda  $t \in I$ , en otras palabras  $\gamma''(t) \perp (\gamma(t) - \gamma(s))$  para toda  $t$ . Por otro lado, de (4.1.34) derivando primero con respecto de  $t$  y luego con respecto de  $s$  ambos lados obtenemos

$$\gamma''(t) \cdot \gamma'(s) = \pm \gamma''(s) \cdot \gamma'(t). \quad (4.1.36)$$

Combinando esto vemos que  $\gamma''(t) \perp \gamma'(s_0)$  para toda  $t$ . Concluimos que  $\gamma'(s_0)$  es colineal con  $\gamma(t) - \gamma(s_0)$  para toda  $t \in I$  o, en otras palabras,  $\gamma$  es un segmento de recta.

2.  $\gamma''(s) \neq 0$  para toda  $s \in I$ .

Tomemos  $t_i \in I$  con  $t_1 < t_2 < t_3$  ponemos  $z_i = \gamma(t_i)$ . Queremos aplicar la proposición anterior, para esto basta fijarnos en la figura 4.3 (donde las igualdades entre los diferentes  $\theta, \varphi, \psi$  son por hipótesis, y el caso en el que estamos impide que los  $z_i$  sean colineales), que implica que las hipótesis de dicha proposición son válidas, por lo que  $\Gamma$  es un arco de círculo (pues  $I$  es un intervalo).  $\square$

Notamos que, por como obtuvimos la continuidad de  $\mathcal{C}$  (i.e. primero en gráficas y luego en dominios acotados), tenemos el siguiente resultado como corolario de lo anterior

**Teorema 4.1.7.** *Sea  $\Gamma$  la gráfica de una función Lipschitz tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$  en  $L^2(\Gamma)$  entonces  $\Gamma = \mathbb{R}$ .*

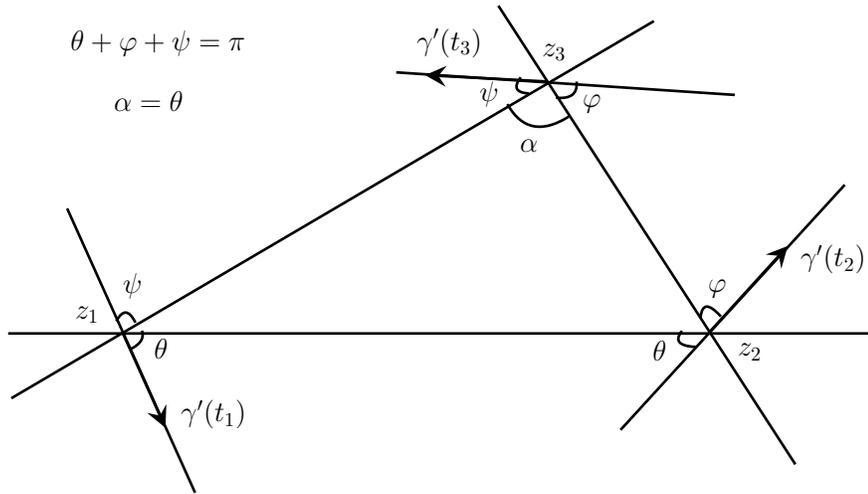


Figura 4.3:  $\theta$  solo depende de  $z_1, z_2$ , por lo que  $\alpha$  no depende de  $z_3$ .

## 4.2. Espacios de Hardy de funciones monogénicas

En esta sección definimos los análogos de espacios de Hardy de funciones holomorfas en el caso en que cambiamos la estructura compleja por las álgebras de Clifford  $\mathbb{R}_{(n+1)}$ .

Para empezar recordamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es un dominio Lipschitz acotado o el dominio arriba de una gráfica. Como siempre definimos

$$\Omega_+ = \Omega, \quad \Omega_- = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}. \quad (4.2.1)$$

Recordamos que  $D$  es el operador de Dirac. En otras palabras, si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{(n+1)}$  entonces

$$Df = \sum_{j=1}^{n+1} e_j \odot \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad fD = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_j} \odot e_j. \quad (4.2.2)$$

Entonces  $f$  es monogénica (izquierda) si  $Df = 0$ .

En analogía con el caso complejo definimos

**Definición 4.2.1.** *Dados  $\Omega$  como antes y  $1 < p < \infty$  definimos los espacios de Hardy*

$$H^p(\Omega_{\pm}) = \{u : \Omega_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}_{(n+1)} : Du = 0, \mathcal{N}u \in L^p(\partial\Omega), u(x) = O(|x|^{-n}) \text{ en } \infty\}. \quad (4.2.3)$$

$$H^p_{\pm}(\partial\Omega) = \{u|_{\partial\Omega} : u \in H^p(\Omega_{\pm})\} \quad (4.2.4)$$

Como funciones monogénicas son armónicas el Teorema 3.0.6 (Hunt-Wheeden) nos garantiza que  $H_{\pm}^p$  está bien definido.

Recordamos los operadores de Cauchy-Clifford, donde  $\nu$  denota la normal exterior a  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}f(x) &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial\Omega} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \partial\Omega. \\ \mathcal{C}f(x) &= \frac{1}{\sigma_n} \text{V.P.} \int_{\partial\Omega} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \odot \nu(y) \odot f(y) d\sigma(y), \quad x \in \partial\Omega. \\ \mathcal{C}^*f(x) &= \frac{-1}{\sigma_n} \text{V.P.} \int_{\partial\Omega} \nu(x) \odot \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \odot f(y) d\sigma(y), \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

De las fórmulas de salto (2.2.13) tenemos que, para toda  $f \in L^p(\partial\Omega)$ ,  $\mathcal{C}f \in H^p(\Omega_{\pm})$  y

$$\lim_{\Omega_{\pm} \ni z \rightarrow x} \mathcal{C}f(z) = \pm \frac{f(x)}{2} + \mathcal{C}f(x), \quad \sigma\text{-c.t. } x \in \partial\Omega. \quad (4.2.6)$$

De la fórmula integral de Cauchy para funciones monogénicas (Teorema 1.8.3) tenemos que para toda  $u \in H^p(\Omega_{\pm})$ <sup>3</sup>

$$u = \pm \mathcal{C}(u|_{\partial\Omega}). \quad (4.2.7)$$

Combinando lo anterior podemos definir dos proyecciones

$$P_{\pm} = \pm \frac{I}{2} + \mathcal{C} : L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)}) \rightarrow H_{\pm}^p(\partial\Omega). \quad (4.2.8)$$

De (4.2.7) y (4.2.6) tenemos que  $P_{\pm}^2 = \pm P_{\pm}$  por lo que, en efecto,  $\pm P_{\pm}$  son proyecciones sobre  $H_{\pm}^p(\partial\Omega)$  respectivamente. Dado que  $P_+ - P_- = I$  tenemos que si  $f \in H_+^p(\partial\Omega)$  entonces  $f - P_-f = f$  por lo que  $P_-f = 0$ . Concluimos el siguiente resultado

**Proposición 4.2.1** (Descomposición de  $L^p$ ). *Sea  $1 < p < \infty$ . Entonces  $H_{\pm}^p = \text{Im}(\pm P_{\pm}) = \ker(\mp P_{\mp})$ . En particular  $L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)}) = H_+^p(\partial\Omega) \oplus H_-^p(\partial\Omega)$  con proyecciones asociadas  $\pm P_{\pm}$ .*

El propósito ahora es obtener varias identidades de  $\mathcal{C}, P_{\pm}, \mathcal{P}_{\pm}$ . Para empezar notamos que, del hecho  $P_+^2 = P_+$ , tenemos que

$$\frac{1}{4}I + \mathcal{C} + \mathcal{C}^2 = \left(\frac{1}{2}I + \mathcal{C}\right)^2 = \frac{1}{2}I + \mathcal{C}, \quad \text{i.e. } \mathcal{C}^2 = \frac{1}{4}I. \quad (4.2.9)$$

<sup>3</sup>El  $-$  aparece pues en la definición de  $\mathcal{C}$  estamos considerando la normal interior a  $\Omega_-$ .

Con esto tenemos que si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq \pm 1/2$  entonces

$$(\lambda I + \mathcal{C})(\lambda I - \mathcal{C}) = (\lambda I - \mathcal{C})(\lambda I + \mathcal{C}) = \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) I. \quad (4.2.10)$$

Combinando esto con la proposición anterior tenemos

**Proposición 4.2.2** (Espectro de  $\mathcal{C}$ ). *Sea  $1 < p < \infty$  entonces para toda  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/2\}$  tenemos*

$$(\lambda I - \mathcal{C})^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - 1/4}(\lambda I + \mathcal{C}) \quad (4.2.11)$$

como operadores en  $L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)})$ . Más aún  $\lambda = \pm 1/2$  son valores propios de  $\mathcal{C}$  con espacios asociados  $H_{\pm}^p(\partial\Omega)$  respectivamente.

En lo que sigue nos restringimos al caso  $p = 2$ . De manera análoga a como se definieron las proyecciones de Szegö<sup>4</sup> en la sección anterior, tenemos  $\mathcal{P}_{\pm}$  las proyecciones ortogonales de  $L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)})$  sobre  $H_{\pm}^2(\partial\Omega)$ .

**Proposición 4.2.3.** *Si vemos a  $\mathcal{P}_{\pm}$  y  $\mathcal{C}_{\pm}$  como operadores en  $L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)})$ , entonces tenemos las siguientes identidades*

1.  $(\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-)^{-1} = \mathcal{C} + \mathcal{C}^*$ .
2.  $\mathcal{C} - \mathcal{C}^* = \mathcal{P}_+\mathcal{P}_-(\mathcal{C} + \mathcal{C}^*) - (\mathcal{C} + \mathcal{C}^*)\mathcal{P}_-\mathcal{P}_+$ .
3.  $I - \mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_- = (\mathcal{P}_+\mathcal{P}_- - \mathcal{P}_-\mathcal{P}_+)(\mathcal{C} + \mathcal{C}^*)$ .
4.  $(I + 4\mathcal{C}\mathcal{C}^*)^{-1} = (\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-)\mathcal{C}$ .
5.  $(I + 4\mathcal{C}^*\mathcal{C})^{-1} = (\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-)\mathcal{C}^*$ .

*Demostración.* 1. Notamos que  $\mathcal{C} + \mathcal{C}^* = P_+ + P_-^* = P_+^* + P_-$  por lo que,

$$(\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-)(P_+ + P_-^*) = P_+ + \mathcal{P}_+P_-^* - \mathcal{P}_-P_+ - \mathcal{P}_-P_-^* = P_+ - P_- = I, \quad (4.2.12)$$

donde usamos que  $\mathcal{P}_{\pm}$  y  $\pm P_{\pm}$  son proyecciones sobre los mismos espacios y que

$$\begin{aligned} \text{Im}(P_-^*) &= \ker(P_-)^{\perp} = H_+^p(\partial\Omega)^{\perp} = \text{Im}(\mathcal{P}_+)^{\perp} = \ker(\mathcal{P}_+), \\ \mathcal{P}_-P_-^* &= P_-P_- = -\mathcal{P}_- \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Tomando adjuntos la identidad sigue.

---

<sup>4</sup>En el caso  $\Omega$  acotado también tenemos el núcleo  $S$  asociado a  $\mathcal{P}_+$ .

2. De manera análoga tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_+\mathcal{P}_-(P_+ + P_-^*) &= \mathcal{P}_+\mathcal{P}_-P_+ - \mathcal{P}_+\mathcal{P}_- = \mathcal{P}_+\mathcal{P}_-P_- \\ &= \mathcal{P}_+P_- = \mathcal{P}_+(P_+ - I) = P_+ - \mathcal{P}_+\end{aligned}\quad (4.2.14)$$

Tomando conjuntos de ambos lados llegamos a

$$(\mathcal{C}^* + \mathcal{C})\mathcal{P}_-P_+ = P_+^* - P_+ \quad (4.2.15)$$

Restando y recordando que  $P_+^* - P_+ = \mathcal{C}^* - \mathcal{C}$  el resultado sigue.

3. Recordando que  $\mathcal{P}_+P_-^* = 0$ , de manera análoga a (4.2.14), obtenemos

$$\mathcal{P}_-\mathcal{P}_+(\mathcal{C} + \mathcal{C}^*) = P_- + \mathcal{P}_- \quad (4.2.16)$$

por lo que, restando esto a (4.2.14) tenemos la identidad buscada.

4. De (4.2.9) y 1 tenemos

$$(I + 4\mathcal{C}\mathcal{C}^*)^{-1} = \frac{1}{4}(\mathcal{C} + \mathcal{C}^*)^{-1}\mathcal{C}^{-1} = (\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-)\mathcal{C}. \quad (4.2.17)$$

5. Igual que en el inciso anterior tenemos, como  $4(\mathcal{C}^*)^2 = I$ ,

$$(I + 4\mathcal{C}^*\mathcal{C})^{-1} = \frac{1}{4}(\mathcal{C} + \mathcal{C}^*)^{-1}(\mathcal{C}^*)^{-1} = (\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-)\mathcal{C}^*. \quad (4.2.18)$$

□

Recordamos que

$$\theta := \angle(H_+^2(\partial\Omega), H_-^2(\partial\Omega)) = \sup\{(f_+, f_-)_{L^2} : f_{\pm} \in H_{\pm}^2(\partial\Omega), \|f_{\pm}\|_{L^2} = 1\}. \quad (4.2.19)$$

**Proposición 4.2.4.** *Sea  $\Omega$  como antes. Entonces tenemos*

1.  $\|P_{\pm}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|\mathcal{C} + \mathcal{C}^*\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \csc \theta$ .
2.  $\cos \theta \leq \|\mathcal{C} - \mathcal{C}^*\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 2 \cot \theta$ .
3.  $2^{-1} \cos \theta \leq \|\mathcal{C}\mathcal{C}^* - \mathcal{C}^*\mathcal{C}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \cos \theta \csc^2 \theta$ .

Antes de probar la proposición necesitamos un resultado de cálculo elemental.

**Proposición 4.2.5.** Si  $\alpha \in (0, \pi/2]$  y si definimos  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A = \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < x_1\}$ ,

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \alpha}, \quad (4.2.20)$$

entonces tenemos que  $\sup_A f = 1/\sin \alpha$ . Además tenemos, con

$$f_i(x_1, x_2) = \frac{x_i^2}{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \alpha} \quad (4.2.21)$$

que  $\sup_A f_i = 1/\sin^2 \alpha$ .

*Demostración.* Notamos que para toda  $r > 0$  tenemos que, si  $x = (x_1, x_2) \in A$ ,  $f(rx) = f(x)$  por lo que  $f$  es constante en rectas por el origen. Concluimos que

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup_{x_1 > 0, t > 1} f(tx_1, x_1) = \sup_{t > 1} h(t), \quad h(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1 - 2tb}, \quad (4.2.22)$$

donde, por conveniencia, ponemos  $b = \cos \alpha$ . Calculamos

$$h'(t) = \frac{2(-bt^2 + 2t - b)}{(t^2 - 2bt + 1)^2}, \quad (4.2.23)$$

de donde vemos que  $h' < 0$  en  $(0, t_-) \cup (t_+, \infty)$  y  $h' > 0$  en  $(t_-, t_+)$ , donde  $t_{\pm}$  son las soluciones de la ecuación  $-bt^2 + 2t - b = 0$ , i.e.

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - b^2}}{b}. \quad (4.2.24)$$

Concluimos que  $t_+$  es un máximo global siempre que  $h(t_+) \geq h(0) = 1$ . Para concluir basta evaluar y comprobar que  $h(t_+) = 1/\sin \alpha$ .

La prueba para  $f_i$  es igual, en este caso las correspondientes  $h_i$  tienen un máximo global en  $t = b^{-1}$  y es fácil calcular que  $h_i(b^{-1}) = 1/\sin^2 \alpha$ .  $\square$

*Demostración Proposición 4.2.4.* 1. Calculamos, para  $f \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)})$

$$\begin{aligned} ((\mathcal{C} + \mathcal{C}^*)f, f)_{L^2} &= (P_+f, f)_{L^2} + (P_-^*f, f)_{L^2} \\ &= (P_+f, (P_+ - P_-)f)_{L^2} + ((P_+ - P_-)f, P_-f)_{L^2} \\ &= \|P_+f\|_{L^2}^2 - \|P_-f\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

Como  $\mathcal{C} + \mathcal{C}^*$  es auto-adjunto tenemos entonces

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C} + \mathcal{C}^*\|_{L^2 \rightarrow L^2} &= \sup \left\{ \frac{((\mathcal{C} + \mathcal{C}^*)f, f)_{L^2}}{\|f\|_{L^2}^2} : f \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)}) \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|P_+f\|_{L^2}^2 - \|P_-f\|_{L^2}^2}{\|P_+f - P_-f\|_{L^2}^2} : f \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)}) \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|f_+\|_{L^2}^2 - \|f_-\|_{L^2}^2}{\|f_+\|_{L^2}^2 - 2(f_+, f_-)_{L^2} + \|f_-\|_{L^2}^2} : f_{\pm} \in H_{\pm}^p(\partial\Omega) \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Como por un lado podemos suponer que  $(f_+, f_-)_{L^2} \geq 0$  (pues estamos tomando el supremo), y por otro tenemos que

$$(f_+, f_-)_{L^2} = \|f_+\|_{L^2} \|f_-\|_{L^2} \cos(\angle(f_+, f_-)), \quad (4.2.27)$$

tomando  $x_1 = \|f_+\|_{L^2}$ ,  $x_2 = \|f_-\|_{L^2}$  en la proposición anterior llegamos a que

$$\|\mathcal{C} + \mathcal{C}^*\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \frac{1}{\sin \theta}. \quad (4.2.28)$$

Para ver la otra igualdad, notamos que

$$\|P_+\|_{L^2}^2 = \sup \left\{ \frac{\|P_+f\|_{L^2}^2}{\|P_+f\|_{L^2}^2 - 2(P_+f, P_-f)_{L^2} + \|P_-f\|_{L^2}^2} : f \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}_{(n+1)}) \right\}. \quad (4.2.29)$$

Usando entonces las  $f_i$  de la proposición anterior, con  $x_1 = \|P_+f\|_{L^2}$ ,  $x_2 = \|P_-f\|_{L^2}$  el resultado sigue.

2. Primero notamos que

$$\|\mathcal{P}_+\mathcal{P}_-\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \sup_{f \neq 0} \frac{(\mathcal{P}_+f, \mathcal{P}_-f)_{L^2}}{\|f\|_{L^2}^2} \leq \sup_{f \neq 0} \cos(\angle(\mathcal{P}_+f, \mathcal{P}_-f)_{L^2}) \leq \cos \theta. \quad (4.2.30)$$

De 2 de la Proposición 4.2.3 tenemos que

$$\|\mathcal{C} - \mathcal{C}^*\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 2\|\mathcal{P}_+\mathcal{P}_-\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|\mathcal{C} + \mathcal{C}^*\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2 \cot \theta. \quad (4.2.31)$$

Para la otra desigualdad calculamos, con  $f_{\pm} \in H_{\pm}^2(\partial\Omega)$ ,

$$((\mathcal{C} - \mathcal{C}^*)f_+, f_-)_{L^2} = (P_+f_+, f_-)_{L^2} - (f_+, P_+f_-)_{L^2} = (f_+, f_-)_{L^2}, \quad (4.2.32)$$

donde usamos que  $P_+P_- = 0$ . Tomando el supremo sobre  $\|f_{\pm}\|_{L^2} = 1$  tenemos que el lado izquierdo está dominado por la norma  $\|\mathcal{C} - \mathcal{C}^*\|_{L^2 \rightarrow L^2}$ , mientras que el lado izquierdo es  $\cos \theta$ .

3. De (4.2.9) tenemos que  $\mathcal{C}^2 - (\mathcal{C}^*)^2 = 0$  por lo que

$$\mathcal{C}\mathcal{C}^* - \mathcal{C}^*\mathcal{C} = (\mathcal{C} + \mathcal{C}^*)(\mathcal{C}^* - \mathcal{C}), \quad (4.2.33)$$

por lo que, de los dos incisos anteriores obtenemos

$$\|\mathcal{C}\mathcal{C}^* - \mathcal{C}^*\mathcal{C}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 2 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (4.2.34)$$

Para la otra desigualdad notamos que, de (4.2.33) y 1 de la Proposición 4.2.3, obtenemos

$$(\mathcal{C}\mathcal{C}^* - \mathcal{C}^*\mathcal{C})(\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-) = \mathcal{C} - \mathcal{C}^*, \quad (4.2.35)$$

por lo que, usando el inciso anterior, llegamos a

$$\cos \theta \leq \|\mathcal{C}\mathcal{C}^* - \mathcal{C}^*\mathcal{C}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 2 \|\mathcal{C}\mathcal{C}^* - \mathcal{C}^*\mathcal{C}\|_{L^2 \rightarrow L^2}, \quad (4.2.36)$$

pues  $\|\mathcal{P}_\pm\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1$  por ser proyecciones ortogonales. Esto termina la prueba.  $\square$

**Teorema 4.2.1.** *Supongamos que  $\Omega$  satisface alguna de las siguientes condiciones*

1.  $\Omega$  es un dominio Lipschitz acotado.
2.  $\Omega$  es un dominio Lipschitz exterior.
3.  $\Omega$  es el dominio arriba de una gráfica Lipschitz.

Supongamos además que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$ . Entonces  $\Omega$  es

1. Una bola.
2. El complemento de una bola
3. Un semiespacio.

según sea el caso.

*Demostración.* Si  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$  entonces sus núcleos deben coincidir, i.e.

$$\frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \odot \nu(y) = -\nu(x) \odot \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}}, \quad \sigma\text{-c.t. } x, y \in \partial\Omega. \quad (4.2.37)$$

De manera equivalente, dado que si  $z \in \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}_{(n+1)}$  entonces  $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ ,

$$\nu(x) = \frac{x-y}{|x-y|} \odot \nu(y) \odot \frac{x-y}{|x-y|}, \quad \sigma\text{-c.t. } x, y \in \partial\Omega. \quad (4.2.38)$$

Concluimos, fijando dos  $y_i \in \partial\Omega$  tal que  $\nu(y_i)$  exista, que  $\nu$  tiene un representante continuo en  $\partial\Omega$ . Afirmamos que esto implica que el dominio es  $C^1$ . Para esto nos basta (vía restringirnos a una carta coordenada) probarlo en el caso en que  $\Omega$  es el dominio arriba de la gráfica de  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz. En este caso la normal está dada por

$$\nu(x', \varphi(x')) = \frac{(\nabla\varphi(x'), -1)}{(1 + |\nabla\varphi(x')|^2)^{1/2}}, \quad x' \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2.39)$$

De esto obtenemos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x') = -\frac{\nu_j(x', \varphi(x'))}{\nu_{n+1}(x', \varphi(x'))}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.2.40)$$

Como el lado derecho es la composición  $x' \mapsto (x', \varphi(x')) \mapsto \nu(x', \varphi(x'))$ , donde ambas son continuas, concluimos que  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Regresando al caso general, como ya sabemos que  $\Omega$  es  $C^1$  podemos suponer que  $0 \in \partial\Omega$  y además existen  $a, b \in \mathbb{R}_+$  tal que si ponemos

$$C_{a,b} = \{(x', t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x'| < a, |t| < b\}, \quad (4.2.41)$$

entonces, abusando un poco de la notación,

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap C_{a,b} &= \{(x', t) : \varphi(x') = t\} \cap C_{a,b}, \\ \Omega \cap C_{a,b} &= \{(x', t) : \varphi(x') > t\} \cap C_{a,b}. \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

También podemos suponer que  $\nu(0) = -e_{n+1}$ <sup>5</sup>. Calculamos para  $z, w \in \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}_{(n+1)}$ , recordando que  $\bar{z} = -z$ ,

$$\begin{aligned} z \odot w \odot z &= (-2z \cdot w - w \odot z) \odot z = -2(z \cdot w)z + |z|^2 w \odot z^{-1} \odot z \\ &= |z|^2 w - 2(z \cdot w)z. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Poniendo  $z = (x - y)/|x - y|$  y  $w = \nu(y)$  tenemos, combinando lo anterior con (4.2.38),

$$\nu(x) = \nu(y) - 2 \left( \frac{x - y}{|x - y|} \cdot \nu(y) \right) \frac{x - y}{|x - y|}, \quad (4.2.44)$$

siempre que  $x, y \in \partial\Omega \cap C_{a,b} =: V$ . Poniendo entonces  $y = 0$  tenemos entonces

$$\nu(x) = -e_{n+1} + 2 \frac{x \cdot e_{n+1}}{|x|} \frac{x}{|x|}, \quad x \in V. \quad (4.2.45)$$

<sup>5</sup>Aquí usamos el teorema de la función implícita, por lo que necesitamos saber que  $\partial\Omega$  es  $C^1$ .

Recordando que  $x = (x', \varphi(x'))$  obtenemos

$$\nu_j(x) = \begin{cases} 2\frac{\varphi(x')x_j}{|x|^2} & \text{si } 1 \leq j \leq n \\ -1 + 2\frac{\varphi(x')^2}{|x|^2} & \text{si } j = n + 1 \end{cases} \quad (4.2.46)$$

Sustituyendo esto en (4.2.40) tenemos, para  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x') = 2\frac{\varphi(x')x_j}{|x'|^2 - \varphi(x')^2}, \quad 0 \neq x \in V. \quad (4.2.47)$$

Consideremos la función

$$f(x') = \frac{\varphi(x')}{|x'|^2 + \varphi(x')^2}, \quad 0 \neq x \in V. \quad (4.2.48)$$

Calculamos, para  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x') = \frac{\partial_j \varphi(x')(|x'|^2 + \varphi(x')^2) - \varphi(x')(2x_j + 2\varphi(x')\partial_j \varphi(x'))}{(|x'|^2 + \varphi(x')^2)^2}. \quad (4.2.49)$$

Notamos que, por (4.2.47), tenemos

$$\partial_j \varphi(x')(|x'|^2 + \varphi(x')^2) = 2\varphi(x')x_j + 2\varphi(x')^2 \partial_j \varphi(x'), \quad (4.2.50)$$

por lo que si sustituimos esto en lo anterior llegamos a que  $\nabla f = 0$ , por lo que  $f$  es constante en el conjunto  $|x'| < a$  (podemos extender a 0). Digamos que  $f = c_0$  entonces

$$(|x'|^2 + \varphi(x')^2)c_0 = \varphi(x'), \quad \text{i.e.} \quad \varphi(x')^2 - c_0^{-1}\varphi(x') + |x'|^2 = 0. \quad (4.2.51)$$

Si ponemos  $s = \varphi(x')$  tenemos la ecuación  $s^2 - c_0^{-1}s + |x'|^2 = 0$  que tiene soluciones

$$s_{\pm} = \frac{c_0^{-1}}{2} \pm \frac{\sqrt{c_0^{-2} - 4|x'|^2}}{2}. \quad (4.2.52)$$

Tenemos entonces tres casos distinguidos, que corresponden a las tres posibles formas de  $\Omega$ :

1. Si  $c_0 \neq 0$  entonces, poniendo  $c_0^{-1} = 2r$  tenemos

$$\varphi(x') = r \pm \frac{\sqrt{4r^2 - 4|x'|^2}}{2} = r \pm \sqrt{r^2 - |x'|^2}. \quad (4.2.53)$$

Dado que cambio de signo en  $r$  es sólo una traslación, podemos suponer que  $r > 0$ . Con notación obvia entonces  $\varphi_+$  corresponde al caso en que, cerca de 0,  $\partial\Omega$  coincide con el hemisferio superior de la esfera  $re_{n+1} + B_r(0)$  y de manera análoga  $\varphi_-$  al caso del hemisferio inferior. Como  $\Omega$  está por arriba de la gráfica de  $\varphi$  tenemos que el primer caso correspondería a  $\Omega$  el complemento de una bola y el segundo al de  $\Omega$  una bola.

2. Si  $c_0 = 0$  entonces  $\varphi = 0$ , por lo que  $\partial\Omega \cap C_{a,b} = \mathbb{R}^n \cap C_{a,b}$ , i.e.  $\partial\Omega$  coincide, cerca de 0, con un hiperplano.

Tenemos entonces que localmente  $\partial\Omega$  se vé como una esfera o un hiperplano. Basta entonces ver que no pueden pasar ambas.

Sea entonces  $\mathcal{A} \subset \partial\Omega$  una componente conexa de la frontera y llamemos  $\mathcal{A}_e, \mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$  a los conjuntos de puntos con una vecindad donde  $\partial\Omega$  coincide con una esfera o un hiperplano respectivamente.

Supongamos primero que  $\mathcal{A}_e \neq \emptyset$ . Por lo anterior  $\mathcal{A}_e$  es abierto en  $\partial\Omega$ , por lo que también lo es en  $\mathcal{A}$ . Sea  $z_k \in \mathcal{A}_e$ ,  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $z_k \rightarrow z \in \mathcal{A}$  entonces  $z \in \mathcal{A}_e$ , pues si no tendríamos  $r > 0$  tal que  $B_r(z) \cap \partial\Omega$  es la bola intersección un hiperplano por  $z$ , por lo que tenemos una contradicción tomando  $z_j \in B_r(z)$ . Concluimos que  $\mathcal{A}_e = \mathcal{A}$ .

Tenemos entonces que en cada componente conexa  $\partial\Omega$  se vé como una bola o un hiperplano. El siguiente paso es probar que, en efecto,  $\mathcal{A}$  es una esfera (asumiendo que  $\mathcal{A}_e \neq \emptyset$ ). Para esto supongamos, sin pérdida de generalidad que  $0 \in \mathcal{A}$  y que, de nuevo tras una rotación, estamos en la situación descrita arriba (con  $\varphi$  definiendo la frontera localmente,  $\nu(0) = -e_{n+1}$ , etc.). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\varphi(x') = r + \sqrt{r^2 - |x'|^2}$ , el caso de  $\varphi_-$  siendo análogo. Pongamos  $B = re_{n+1} + B_r(0)$ , entonces  $0 \in \partial B \cap \mathcal{A} =: \mathcal{B}$ .

Como  $\mathcal{A}$  es una componente conexa tenemos que es cerrada en  $\partial\Omega$ , que a su vez es un cerrado en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Concluimos que  $\mathcal{B}$  es cerrado en  $\partial B$ . Si probamos que  $\mathcal{B}$  es abierto en  $\partial B$  habríamos terminado, por conexidad. Para ver esto probaremos que  $\partial_{\partial B} \text{int}(\mathcal{B}) = \emptyset$  (i.e. la frontera, en  $\partial B$ , del interior de  $\mathcal{B}$  es vacío).

Para probar esto tomamos  $z \in \partial_{\partial B} \text{int}(\mathcal{B})$ . Notamos primero que esta frontera no puede tener puntos aislados pues esto violaría el hecho que  $\text{int}(\mathcal{B})$  es abierto en  $\partial B$ , por lo que  $z$  tiene que ser un punto de acumulación de  $\text{int}(\mathcal{B})$ . En particular si  $U$  es una vecindad abierta de  $z$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  entonces  $U \cap \text{int}(\mathcal{B})$  es un abierto no vacío. Por otro lado, como tenemos  $z \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A} = \mathcal{A}_e$  podemos encontrar una bola  $B'$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y una vecindad  $U$  como antes tal que  $\partial\Omega \cap \partial B' = \partial\Omega \cap U$ . Como  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \partial\Omega$ , tendríamos entonces que  $U \cap \text{int}(\mathcal{B}) \subset U \cap \partial\Omega$ . Esto nos dice que  $z$  tiene una vecindad  $U$  en la que  $\partial\Omega$  coincide con  $\partial B'$ , pero  $\emptyset \neq U \cap \text{int}(\mathcal{B}) \subset \partial B$  por lo que  $\partial B \cap \partial B'$  tiene interior no vacío en  $\partial B$ . La única manera en que dos esferas se intersecten en un abierto es que sean iguales, por lo que  $B = B'$  que contradice  $z$  en la frontera.

Concluimos  $\partial B = \mathcal{A}$ .

Con todo esto hemos probado que  $\partial\Omega$  es la unión ajena de esferas o hiperplanos. Vamos a ver ahora que si  $\partial\Omega$  tiene más de una componente conexa, (4.2.37) no puede valer. Para esto notamos que, como  $\partial\Omega$  es  $C^1$  la identidad (4.2.37) vale para toda  $x \neq y$ , por lo que sacando la parte real tenemos

$$(x - y) \cdot \nu(y) = -(x - y) \cdot \nu(x), \quad x, y \in \partial\Omega, \quad x \neq y. \quad (4.2.54)$$

Notamos que esta identidad, si  $x - y$ ,  $\nu(y)$ ,  $\nu(x)$  son colineales, se convierte en la afirmación:  $\nu(x)$  apunta en dirección opuesta a  $\nu(y)$ . Si tuviéramos dos esferas (necesariamente ajenas), tomando  $L$  la recta que pasa por los centros de las bolas tendríamos que  $L$  intersecta a estas esferas en cuatro puntos. Dos a dos, las normales en estos puntos deberían apuntar en direcciones opuestas, que claramente no es posible pues todas estas normales son colineales.

Si tenemos una esfera y un hiperplano, el mismo razonamiento funciona tomando  $L$  la recta perpendicular al hiperplano por el centro de la bola.

El caso de dos hiperplanos, necesariamente paralelos, no es tan directo: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los hiperplanos son paralelos a  $\mathbb{R}^n$ . La condición anterior nos permite concluir que las normales en hiperplanos distintos apuntan en direcciones contrarias, pero de hecho con esto (4.2.54) automáticamente se satisface en estos hiperplanos por lo que no podemos concluir. Sin embargo en este caso podemos usar las coordenadas que nos faltan en (4.2.37), en particular tenemos, para  $x, y \in \partial\Omega$  y  $x \neq y$ ,

$$(x_1 - y_1)\nu_1(y) - (x_{n+1} - y_{n+1})\nu_{n+1}(y) = (x_1 - y_1)\nu_1(x) - (x_{n+1} - y_{n+1})\nu_{n+1}(x). \quad (4.2.55)$$

Usando que los hiperplanos son paralelos a  $\mathbb{R}^n$  tenemos que  $\nu_1 \equiv 0$ , por lo que la identidad se reduce a

$$\nu_{n+1}(y) = \nu_{n+1}(x), \quad (4.2.56)$$

que es una contradicción si  $x, y$  están en hiperplanos ajenos, pues habíamos visto que en este caso  $\nu_{n+1}(x) = -\nu_{n+1}(y)$ .

Concluimos que  $\partial\Omega$  es una esfera o un hiperplano. Para poder concluir nos basta mostrar que en efecto  $\Omega$  es una bola, el complemento de una bola o un hiperplano.

Para esto primero notamos que  $\Omega$  se queda de un sólo lado de  $\partial\Omega$ , pues si no, esto quiere decir que la normal apunta en otra dirección en algún punto de  $\partial\Omega$ , que violaría la identidad (4.2.37) en el caso de la esfera o el hecho de que  $\partial\Omega$  es un hiperplano o el hecho de que es  $C^1$ .

Supongamos entonces que  $\Omega$  se queda contenido en una bola  $B$  y  $\partial\Omega = \partial B$ . Supongamos que  $x \in B \setminus \Omega$ . Tenemos que existe un segmento  $[x, y)$  con  $y \in \partial B$  tal

que  $[x, y) \cap \Omega \neq \emptyset$  pues si no tendríamos  $B \cap \Omega = \emptyset$  que contradice nuestra suposición. Esto implica que  $[x, y) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ : Si  $x \in \partial\Omega$  no hay nada que hacer, si no entonces  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}$  por lo que un argumento de conexidad nos dá la afirmación. Tenemos entonces que hay un punto frontera que no está en  $\partial B$  que es una contradicción. Concluimos  $\Omega = B$ .

Si  $\Omega$  se queda fuera de una bola  $B$  podemos usar un argumento similar: Si  $rB$  denota la bola con el mismo centro y radio  $r$ -veces el original entonces para  $r > 1$  tenemos que  $\partial rB$  tiene que quedarse en  $\Omega$  o  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}$ . Como  $\partial\Omega = \partial B$  tenemos que el segundo caso es imposible por lo que  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{B}$ .

El caso del hiperplano es sencillo pues supusimos a priori que en este caso  $\Omega$  era el dominio arriba de la gráfica de una función.  $\square$

**Observación 4.2.1.** *La prueba que dimos del teorema anterior realmente no usa esencialmente que  $\partial\Omega$  sea frontera de alguien. En particular tenemos que si  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es un conjunto localmente Lipschitz para el cual  $\mathcal{C}, \mathcal{C}^*$  son acotados en  $L^2(\Sigma, d\sigma)$  (en particular tenemos una normal bien definida) entonces  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$  implica que  $\Sigma$  es una esfera o un hiperplano.*

Como consecuencia de esto tenemos el resultado principal, que nos dice que la geometría de los espacios de Hardy  $H_{\pm}^2(\partial\Omega)$  guarda información geométrica del dominio.

**Corolario 4.2.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz acotado, exterior o el dominio arriba de una gráfica Lipschitz. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1.  $\Omega$  es una bola, el complemento de una bola o un semiespacio.
2.  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$ .
3.  $H_+^2(\partial\Omega) \perp H_-^2(\partial\Omega)$ .
4.  $\|P_+\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1$ .
5.  $\|P_-\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1$ .
6.  $\|\mathcal{C} + \mathcal{C}^*\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1$ .

La prueba es consecuencia inmediata del teorema anterior y la Proposición 4.2.4 pues todas estas son equivalentes a que  $\theta = \angle(H_+^2(\partial\Omega), H_-^2(\partial\Omega)) = \pi/2$ .

### 4.3. Extensiones

Como se dijo al principio del capítulo, los resultados obtenidos en estas dos secciones son el caso límite de teoremas que relacionan de cierta manera el tamaño de  $\mathcal{C} - \mathcal{C}^*$  con la regularidad de  $\Omega$ . Sin embargo las nociones de regularidad involucradas son un poco más finas que simplemente dominios Lipschitz o  $C^{k,\alpha}$ . Una manera informal de ver esto sería aproximando el círculo unitario por polígonos inscritos: Intuitivamente la norma del operador  $\mathcal{C} - \mathcal{C}^*$  debería ser pequeña pues su núcleo es cercano a cero, mientras que estos dominios no son mejor que Lipschitz.

Por otro lado, si la noción de tamaño la tomamos como compacidad del operador  $\mathcal{C} - \mathcal{C}^*$  esto está justificado por el siguiente

**Teorema 4.3.1** ([36]). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un dominio suave, entonces  $\mathcal{C} - \mathcal{C}^*$  es compacto. Además existe un dominio Lipschitz  $\Omega_1$  tal que  $\mathcal{C} - \mathcal{C}^*$  no es compacto en  $L^2(\partial\Omega_1)$ .*

Para completar esto se introducen los llamados dominios SKT-regulares. Antes de esto, sin embargo, necesitamos una serie de preliminares interesantes.

**Definición 4.3.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto con  $\bar{\Omega} \neq \mathbb{R}^{n+1}$ . Decimos que  $\Omega$  satisface la propiedad de separación si existe  $r_0 > 0$  tal que para toda  $x \in \partial\Omega$  y  $r < r_0$  tenemos que existe un hiperplano  $L = L(x, r)$  y una normal a dicho plano  $n = n(x, y)$  tal que*

$$\begin{aligned} \{y + tn \in B_r(x) : y \in L, t < -r/4\} &\subset \Omega, \\ \{y + tn \in B_r(x) : y \in L, t > r/4\} &\subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

No es difícil ver, por ejemplo, que todo dominio Lipschitz satisface esta propiedad, si usamos  $L$  el plano sobre el cual tomamos la función Lipschitz que define a  $\partial\Omega$  (tal vez habría que cambiar el 4 que aparecen la definición por un  $s$  que depende de la seminorma de dichas funciones, pero esto no afecta mucho la definición).

**Definición 4.3.2.** *Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  compacto y  $\delta > 0$ . Decimos que  $\Sigma$  es  $\delta$ -Reifenberg plano si existe  $r_0 > 0$  tal que para toda  $x \in \Sigma$  y  $r < r_0$  existe un hiperplano  $x \in L = L(x, r)$  con*

$$D(\Sigma \cap B_r(x), L \cap B_r(x)) \leq \delta r, \quad (4.3.2)$$

donde recordamos que  $D(A, B)$  es la distancia de Hausdorff entre  $A, B$ , i.e.

$$D(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b) \right\}. \quad (4.3.3)$$

*Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto y acotado, decimos que  $\Omega$  es  $\delta$ -Reifenberg plano si satisface la propiedad de separación y  $\partial\Omega$  es  $\delta$ -Reifenberg plano.*

Un resultado sencillo pero ilustrativo de la definición anterior es

**Proposición 4.3.1.** *Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es  $C^1$  entonces para toda  $\delta > 0$  existe  $r_0 = r_0(\delta, \Omega)$  tal que  $\Omega$  es  $\delta$ -Reifenberg plano con constante  $r_0$ .*

*Existen  $\Omega_1, \Omega_2$  tal que  $\Omega_1$  es Lipschitz, pero  $\Omega_1$  no es  $\delta$ -Reifenberg plano para ninguna  $\delta < \delta_1$ , (con  $\delta_1 = \delta_1(\Omega)$ ).  $\Omega_2$  es  $\delta$ -Reifenberg plano para alguna  $\delta > 0$  pero  $\Omega_2$  no es Lipschitz.*

*Demostración.* Como la propiedad de ser  $\delta$ -Reifenberg plano es local, podemos trabajar con los dominios arriba de la gráfica de una función  $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ , digamos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Fijemos  $x_0 \in \partial\Omega$  y  $r > 0$ . Definimos

$$A = B_r(x_0) \cap \partial\Omega, \quad B = B_r(x_0) \cap L, \quad (4.3.4)$$

donde  $L$  es el plano tangente a  $\partial\Omega$  en  $x_0$ . Si tomamos  $a, b$  en los respectivos conjuntos tenemos que

$$a = (y', f(y')), \quad b = (x', f(x'_0) - \nabla f(x'_0) \cdot (x' - x_0)), \quad (4.3.5)$$

para algunos  $x', y' \in \mathbb{R}^n$  con  $|x' - x'_0|, |y' - x'_0| < r$  (recordando que  $x'_0$  es la proyección de  $x_0$  en  $\mathbb{R}^n$ ). Calculamos

$$|a - b| \leq (|x' - y'|^2 + |f(y') - f(x'_0) - \nabla f(x'_0) \cdot (x' - x'_0)|^2)^{1/2} \quad (4.3.6)$$

Poniendo  $g(x') = f(x') - f(x'_0) - \nabla f(x'_0) \cdot (x' - x'_0)$  y  $x' = y'$  en lo anterior el teorema del valor medio nos dice que

$$\max\{d(a, B), d(b, A)\} \leq \sup_{|z - x'_0| < r} |\nabla g(z)| |x' - x'_0|. \quad (4.3.7)$$

Como  $g$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}^n$  (pues  $f$  tiene soporte compacto) y  $\nabla g(x') = \nabla f(x') - \nabla f(x'_0)$  concluimos que para toda  $\delta > 0$  existe  $\eta > 0$  tal que si  $|z - x'_0| < \eta$  entonces  $|\nabla g(z)| < \delta$ . Tomando el supremo sobre las  $x'$  en la última ecuación y tomando  $r < \eta$  concluimos

$$D(A, B) \leq \delta r \quad (4.3.8)$$

que es lo que se quería probar.

Lo anterior se generaliza a  $\Omega$  Lipschitz, con la restricción de que ahora sólo podemos concluir que  $\Omega$  es  $\delta_0$  Reifenberg plano, para algún  $\delta_0 = \delta_0(\Omega) > 0$ . Para ver que esto es óptimo basta considerar el cono

$$\Omega_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : M|x| < t\}. \quad (4.3.9)$$

En el vértice 0 el plano que mejor aproxima es  $\mathbb{R}^n$  y además, con notación como antes con  $x_0 = 0$ , tenemos que  $D(A, B) \geq Mr/(1 + M^2)^{1/2}$ . Hacemos esto en el caso  $n = 1$ , la generalización será obvia del argumento.

Sea  $n = (1 + M^2)^{-1/2}(1, M) \in \partial\Omega_1$ , si  $x = (r, 0)$  entonces  $d(x, A)$  se alcanza en la proyección ortogonal de  $x$  sobre la recta generada por  $n$ , i.e.

$$d(x, A) = |x - (x \cdot n)n| = \left| (r, 0) - \frac{r}{(1 + M^2)^{1/2}}n \right| = \frac{Mr}{(1 + M^2)^{1/2}}. \quad (4.3.10)$$

Para ver el otro ejemplo, de manera informal uno podría poner  $\Omega_2$  como el dominio arriba de la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{|x|}$ . De nuevo siendo un poco vagos, el problema está en 0, pero tomando  $n = 1$ , podemos poner  $L$  el eje vertical y ver que entonces la distancia de puntos en  $L \cap B_r(0)$  a la gráfica de  $f$  tienen distancia dominada por  $r^2$  que, a escalas pequeñas está por debajo de  $r$ . Análogamente podríamos poner  $f(x) = \sqrt{\alpha|x|}$  para  $\alpha > 0$  y concluir que para toda  $\delta$  hay dominios  $\delta$ -Reifenberg planos que no son Lipschitz.

Para ver un ejemplo todavía más radical de la regularidad usual de dominios  $\delta$ -Reifenberg, referimos a [49] donde se da un tal dominio con frontera no rectificable (en particular ni siquiera puede tener perímetro finito).  $\square$

Una manera alternativa de expresar la definición anterior es pedir que, si

$$\begin{aligned} \theta(x, r) &= \inf_{\substack{x \in L \\ L \text{ hiperplano}}} \frac{D(B_r(x) \cap \Sigma, B_r(x) \cap L)}{r}, \\ \Theta(r) &= \sup_{x \in \Sigma} \theta(x, r) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

entonces  $\Theta(r) < \delta$ . Por otro lado, la prueba de la proposición anterior muestra que si  $\Omega$  es  $C^1$  entonces  $\lim_{r \rightarrow 0} \Theta(r) = 0$ . A dominios con esta propiedad les llamamos 0-Reifenberg (en la literatura aparecen como Reifenberg vanishing).

**Observación 4.3.1.** *Resumiendo todo esto, vemos que dominios  $\delta$ -Reifenberg son dominios localmente aproximables por hiperplanos, uniformemente a escalas pequeñas. Para  $\delta = 0$ , tenemos además que esta aproximación de hecho mejora cuanto más pequeña sea la escala. Naturalmente dominios  $C^1$  satisfacen esto, pero en general dominios Lipschitz no.*

Referimos a [19] para la teoría de conjuntos de perímetro finito. Recordamos solamente que para tales conjuntos tenemos una normal  $\nu$  bien definida  $\sigma$ -c.d.

**Definición 4.3.3.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto de perímetro finito y  $\delta > 0$ . Decimos que  $\Omega$  es  $\delta$ -**SKT** si es  $\delta$ -Reifenberg plano,  $\partial\Omega$  es Ahlfors regular y existe  $r_0$  tal que para toda  $r < r_0$

$$\sup_{x \in \Delta} \left( \sup_{\Delta \subset \Delta_r(x)} \left( \int_{\Delta} |\nu - \nu_{\Delta}|^2 d\sigma \right)^{1/2} \right) < \delta. \quad (4.3.12)$$

donde  $\Delta_r(x) = B_r(x) \cap \partial\Omega$  y  $\Delta$  de manera análoga denota un disco superficial. Definimos

$$\nu_{\Delta} = \int_{\Delta} \nu d\sigma. \quad (4.3.13)$$

Además decimos que  $\Omega$  es **SKT regular** si además

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \left( \sup_{x \in \partial\Omega} \left( \int_{\Delta_r(x)} |\nu - \nu_{\Delta_r(x)}|^2 d\sigma \right)^{1/2} \right) = 0 \quad (4.3.14)$$

La última condición la podemos expresar como  $\nu \in VMO(\partial\Omega, d\sigma)$ . Uno también debería notar el parecido de estas condiciones sobre la normal con la aproximación por hiperplanos en la definición de  $\delta$ -Reifenberg. Intuitivamente las dos deberían ser equivalentes: Si la normal no oscila mucho los planos tangentes no se mueven mucho, y viceversa. Sin embargo una condición es completamente geométrica y depende solamente de la geometría de  $\partial\Omega$  y  $\mathbb{R}^{n+1}$ , mientras que la otra involucra la medida a través de la construcción de la normal y de la condición de oscilación (4.3.12).

De estas observaciones no es difícil convencerse que todo dominio  $C^1$  es  $\delta$ -SKT para toda  $\delta$  y SKT-regular. Una prueba formal sigue de que

$$\left( \int_{\Delta} |\nu - \nu_{\Delta}|^2 \right)^{1/2} \leq \sup_{x, y \in \Delta} |\nu(x) - \nu(y)|, \quad (4.3.15)$$

y esta cantidad la podemos controlar siempre que  $\nu$  sea uniformemente continua. De manera análoga un dominio Lipschitz será  $\delta_0$ -SKT para algún  $\delta_0$ , pero en general no mejor, y no necesariamente SKT regular (por ejemplo si tomamos  $\Omega$  un cuarto de plano entonces  $\int_{\Delta_r(0)} |\nu - \nu_{\Delta_r(0)}|^2 = 1/2$  para toda  $r > 0$ ).

Para ver algunas de las implicaciones de los distintos conceptos que usamos, ver la figura 4.4.

El refinamiento del Teorema 4.3.1, en el contexto de álgebras de Clifford, es entonces

**Teorema 4.3.2** ([27, Theorem 4.6.8]). Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto tal que satisface una condición bilateral local de John y su frontera es Ahlfors regular. Son equivalentes

1.  $\mathcal{C} - \mathcal{C}^*$  es compacto en  $L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ .
2.  $\Omega$  es SKT regular.

Por otro lado el resultado aludido al inicio de esta sección es el siguiente (recordamos que  $\theta$  es el ángulo entre los subespacios  $H_{\pm}^2(\partial\Omega)$ )

**Teorema 4.3.3.** *Sea  $\Omega$  un abierto tal que  $\Omega, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}$  son NTA (ver Definición 3.7.2) y  $\partial\Omega$  es Ahlfors regular. Existe  $C$ , que depende solo de las constantes de Ahlfors regularidad de  $\Omega$ , tal que*

$$\text{dist}(\nu, VMO(\partial\Omega, d\sigma)) \leq C \cot^{1/n} \theta. \quad (4.3.16)$$

Además si  $\pi/2 - \theta < \varepsilon = \varepsilon(\Omega)$  entonces existe  $\delta = \delta(\theta)$  tal que  $\Omega$  es  $\delta$ -SKT y  $\delta \rightarrow 0$  cuando  $\theta \rightarrow \pi/2$ .

En otras palabras  $\Omega$  es más regular cuanto más cercano sea  $\theta$  de  $\pi/2$ . El caso límite en este contexto está dado por

**Teorema 4.3.4.** *Sea  $\Omega$  un dominio UR (ver definición 2.3.2) tal que  $\partial\Omega = \partial\bar{\Omega}$  entonces son equivalentes*

1.  $\Omega$  es una bola, el complemento de una bola o un semiespacio.
2.  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^*$ .

Si asumimos además que  $\Omega$  y  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{\Omega}$  son dominios NTA entonces estas dos condiciones son también equivalentes a

3.  $H_+^2(\partial\Omega) \perp H_-^2(\partial\Omega)$ .

En cierto sentido los resultados son óptimos: Si vemos a los dominios NTA como la clase más grande en la cual  $\omega \ll \sigma \ll \omega$  (recordamos que  $\omega$  es la medida armónica), entonces esto es lo mejor que podemos esperar pues en otro caso no podríamos definir  $H_{\pm}^p(\partial\Omega)$  (aunque tal vez lo podríamos hacer con la medida armónica reemplazando a la de superficie). Por otro lado, dominios UR son lo más general que podemos pedir para que  $\mathcal{C}$  esté definido.

El punto a resaltar aquí es que los espacios de Hardy, junto con el operador  $\mathcal{C}$ , dan bastante información geométrica del dominio, pero hay que saber leerla. Como vimos, los dominios  $\delta$ -SKT y NTA, aunque un poco técnicos de definir, son la herramienta apropiada para esto.

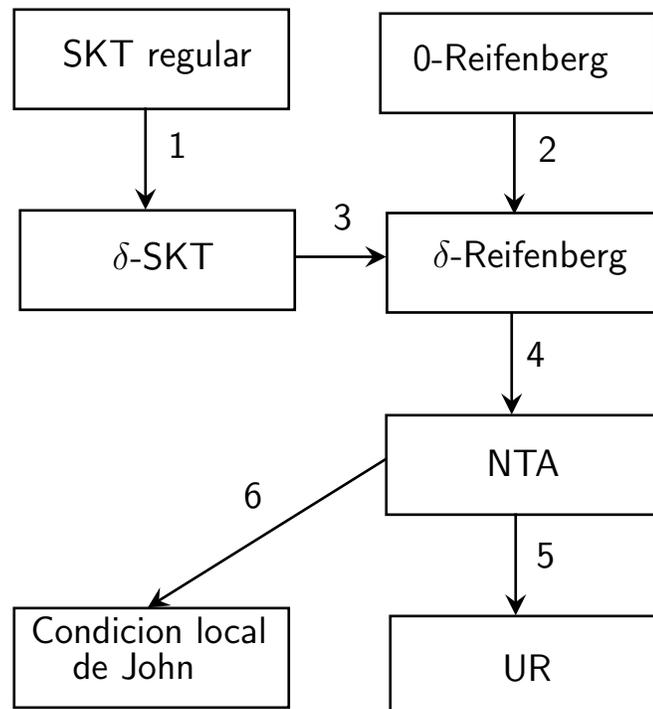


Figura 4.4: Implicaciones: 1, 2 y 3 son por definición. Para 4 ver [34]. 5 está en [15] y 6 en [27].

# Bibliografía

- [1] C. A. Berenstein and R. Gay. *Complex analysis and special topics in harmonic analysis*, volume 262. Springer New York, 1995.
- [2] L. Caffarelli, E. Fabes, S. Mortola, and S. Salsa. *Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form*. Indiana Univ. Math. J., 30(4):621–640, 1981.
- [3] L. Caffarelli and S. Salsa. *A geometric approach to free boundary problems*, volume 68. AMS Bookstore, 2005.
- [4] A. Calderón. *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 74(4):1324–1327, 1977.
- [5] A. P. Calderón. *On the behaviour of harmonic functions at the boundary*. Transactions of the American Mathematical Society, 68(1):47–54, 1950.
- [6] L. Carleson. *On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables*. Arkiv för matematik, 4(5):393–399, 1962.
- [7] R. Coifman, P. W. Jones, and S. Semmes. *Two elementary proofs of the  $L^2$  boundedness of Cauchy integrals on Lipschitz curves*. Journal of the American Mathematical Society, 2(3):553–564, 1989.
- [8] R. R. Coifman, A. McIntosh, and Y. Meyer. *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes lipschitziennes*. The Annals of Mathematics, 116(2):361–387, 1982.
- [9] R. R. Coifman and Y. Meyer. *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*. Société mathématique de France, 1978.
- [10] J. B. Conway. *A course in operator theory*. American Mathematical Soc., 2000.

- [11] B. E. Dahlberg. *Estimates of harmonic measure*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 65(3):275–288, 1977.
- [12] B. E. Dahlberg. *On the Poisson integral for Lipschitz and  $C^1$ -domains*. Studia Math., 66:13–24, 1977.
- [13] G. David. *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 17:157–189, 1984.
- [14] G. David. *Opérateurs d'intégrale singulière sur les surfaces régulières*. In Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, volume 21, pages 225–258. Société mathématique de France, 1988.
- [15] G. David and D. Jerison. *Lipschitz approximation to hypersurfaces, harmonic measure, and singular integrals*. Indiana Univ. Math. J, 39(3):831–845, 1990.
- [16] G. David and S. Semmes. *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, volume 38. American Mathematical Soc., 1993.
- [17] P. L. Duren. *Theory of  $H_p$  spaces*. Courier Dover Publications, 1970.
- [18] L. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [19] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*, volume 5. CRC press, 1992.
- [20] J. B. Garnett and D. E. Marshall. *Harmonic measure*, volume 2. Cambridge University Press, 2005.
- [21] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224. Springer Verlag, 2001.
- [22] G. M. Goluzin. *Geometric theory of functions of a complex variable*, volume 26. American Mathematical Soc., 1969.
- [23] L. Grafakos. *Modern Fourier Analysis*, volume 250. Springer New York, 2009.
- [24] L. L. V. Helms. *Introduction to potential theory*. Krieger New York, 1975.
- [25] S. Hofmann, E. Marmolejo-Olea, M. Mitrea, S. Pérez-Estevea, and M. Taylor. *Hardy spaces, singular integrals and the geometry of Euclidean domains of locally finite perimeter*. Geometric and Functional Analysis, 19(3):842–882, 2009.

- [26] S. Hofmann, M. Mitrea, and M. Taylor. *Geometric and transformational properties of Lipschitz domains, Semmes-Kenig-Toro domains, and other classes of finite perimeter domains*. The Journal of Geometric Analysis, 17(4):593–647, 2007.
- [27] S. Hofmann, M. Mitrea, and M. Taylor. *Singular integrals and elliptic boundary problems on regular Semmes–Kenig–Toro domains*. International Mathematics Research Notices, 2010(14):2567–2865, 2010.
- [28] R. A. Hunt and R. L. Wheeden. *On the boundary values of harmonic functions*. Transactions of the American Mathematical Society, 132(2):307–322, 1968.
- [29] R. A. Hunt and R. L. Wheeden. *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*. Transactions of the American Mathematical Society, 147(2):507–527, 1970.
- [30] D. S. Jerison and C. E. Kenig. *Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains*. Advances in Mathematics, 46(1):80–147, 1982.
- [31] O. D. Kellog. *Foundations of potential theory*. Courier Dover Publications, 1929.
- [32] C. E. Kenig. *Weighted  $H^p$  spaces on Lipschitz domains*. American Journal of Mathematics, 102(1):129–163, 1980.
- [33] C. E. Kenig. *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*. American Mathematical Society Providence, 1994.
- [34] C. E. Kenig and T. Toro. *Harmonic measure on locally flat domains*. Duke Mathematical Journal, 87(3):509–552, 1997.
- [35] N. Kerzman and E. M. Stein. *The Cauchy kernel, the Szegő kernel, and the Riemann mapping function*. Mathematische Annalen, 236(1):85–93, 1978.
- [36] L. Lanzani. *A new perspective on the Cauchy transform for non-smooth domains in the plane and applications*. 1997.
- [37] W. Littman, G. Stampacchia, and H. Weinberger. *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 17(1-2):43–77, 1963.
- [38] Y. Meyer and R. Coifman. *Wavelets: Calderón-Zygmund and multilinear operators*, volume 48. Cambridge University Press, 2000.

- [39] M. Mitrea. *Clifford wavelets, singular integrals, and Hardy spaces*, volume 1575. Springer-Verlag New York, 1994.
- [40] L. Modica and S. Mortola. *Construction of a singular elliptic-harmonic measure*. *manuscripta mathematica*, 33(1):81–98, 1980.
- [41] J. Moser. *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 14(3):577–591, 1961.
- [42] N. I. Muskhelishvili. *Singular integral equations: boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. Dover Publications., 2008.
- [43] F. Nazarov, X. Tolsa, and A. Volberg. *On the uniform rectifiability of AD regular measures with bounded Riesz transform operator: the case of codimension 1*. arXiv preprint arXiv:1212.5229, 2012.
- [44] I. R. Porteous. *Clifford algebras and the classical groups*, volume 50. Cambridge University Press, 1995.
- [45] J. Ryan. *Introductory Clifford Analysis*. arXiv preprint math/0303339, 2003.
- [46] P. Sjögren. *A remark on the maximal function for measures in  $\mathbb{R}^n$* . *American Journal of Mathematics*, 105(5):1231–1233, 1983.
- [47] M. E. Taylor. *Tools for PDE: pseudodifferential operators, paradifferential operators, and layer potentials*. Cambridge Univ Press, 2000.
- [48] A. Torchinsky. *Real-variable methods in harmonic analysis*, volume 123. Academic Press, 1986.
- [49] T. Toro. *Doubling and flatness: geometry of measures*. *Notices Amer. Math. Soc*, 44, 1997.
- [50] F. Trèves. *Topological vector spaces, distributions and kernels*, volume 25. Dover Publications, 2006.
- [51] T. Wolff. *Generalizations of Fatous theorem*. In *Proceedings of the International Congress of Mathematics, Berkeley, CA*, volume 2, pages 990–993, 1986.
- [52] M. Wuertz. *The implicit function theorem for Lipschitz functions and applications*. PhD thesis, University of Missouri, 2008.