



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**POLÍGONOS DE DIRICHLET GENERALIZADOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A :**

**DANIEL EDUARDO ALLARD OROPEZA**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE  
2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradezco infinitamente al Dr. Antonio Lascurain Orive por sus invaluable enseñanzas, sus grandes consejos y su inagotable paciencia, este sueño no se hubiera realizado sin él.

A mis padres y mis hermanos por sus constantes muestras de cariño y su continuo apoyo a través de los años. A mis abuelos, tíos y primos por recordarme la importancia de la familia.

A mis amigos Karla, Lulú, Jenny, Gaby, Paola, Emmanuel, Raúl, Saúl, Alberto, Ernesto, Lalo, Mauricio, Paco, Braulio, Omar, Ricardo, Eugenio, Irving, Elliot, Miguel y Memo por llegar para nunca irse. A Alejandro, Eduardo, Fernando, Álvaro, Víctor, René, Raybel, Jorge B., Jorge T., César, Luis, Edith, Virginia, Hilario, Guillermo y Miguel M. por haber sido mucho más que compañeros de clase.

A Karen, Elizabeth, Araceli, Queta, Roberto, Miguel, Daniel M., Marcel, Sergio y Moisés por enseñarme que los buenos amigos se pueden encontrar en los lugares menos esperados. A Malu por creer en mí, por siempre motivarme para perseguir mis sueños, y por regalarme tantas sonrisas siempre.

A Pilar, Reyna y Magdalena por su apoyo en lo personal y en lo profesional para poder retomar y finalizar este proceso.

Por último, a la Dra. Adriana Ortíz, al Dr. Javier Páez y al M. en C. José Antonio Gómez por el tiempo dedicado a la lectura de este trabajo y por sus comentarios tan enriquecedores que ayudaron a mejorarlo.

# Polígonos de Dirichlet Generalizados

Daniel Eduardo Allard Oropeza  
Facultad de Ciencias,  
Universidad Nacional Autónoma de México



# Introducción

La geometría hiperbólica analítica se ha desarrollado intensamente en las últimas décadas, ya que esta rama interactúa con muchas áreas de la matemática y algunas de la física. Los trabajos de Ahlfors y Bers impulsaron en la década de los 70's la investigación en esta rama; de manera notable los trabajos de Thurston y Jørgensen revolucionaron la topología en dimensión 3 al observar que prácticamente todas las 3-variedades tienen estructura hiperbólica (cf. [3] y [8]). Así mismo el estudio de los grupos fuchsianos ha coadyuvado en la teoría de números principalmente en el contexto de los grupos modulares, véase por ejemplo [7].

En particular el estudio de regiones fundamentales es una poderosa herramienta para el estudio de los cocientes, ya sea las superficies de Riemann en dimensión 2 o las 3-variedades hiperbólicas en dimensión 3, al hacer actuar un grupo fuchsiano en el plano hiperbólico o un grupo kleiniano en el espacio hiperbólico. El tema central de esta tesis es mostrar que dos de las más importantes construcciones para regiones fundamentales, que son la de Ford y la de Dirichlet, en realidad corresponden a la misma construcción que se le conoce como polígono de Dirichlet generalizado.

En el segundo capítulo se describen las transformaciones de Möbius actuando en  $\mathbb{R}^n$ . Se prueban varios resultados, entre ellos se muestra que cualquier isometría euclidiana es la composición finita de reflexiones en planos (Teorema 2.1.1). Asimismo, se describe la forma general de una isometría euclidiana (Teorema 2.1.2). Se prueba también que una transformación es de Möbius si y sólo si preserva la razón cruzada (Teoremas 2.2.8 y 2.3.1). Se describe la forma general de las transformaciones de Möbius, lo cual permite introducir el concepto de esfera isométrica.

En el Capítulo 3 se prueba que la esfera isométrica es la única esfera donde una transformación de Möbius, que no es una similitud euclidiana, actúa euclidianamente y se describe la acción geométrica de estas transformaciones. En este capítulo se muestra un resultado de suma importancia,

cualquier transformación de Möbius se puede expresar como la composición de la reflexión en la esfera isométrica seguida de una isometría euclidiana (Sección 3.1).

Posteriormente, se hace un estudio detallado geométrico y analítico en el caso bidimensional de los círculos isométricos y sus inversas, dependiendo el tipo de transformación de Möbius y se concluye que cuando la transformación es elíptica y no es de orden 2, estos círculos se intersecan en los puntos fijos, son tangentes cuando la transformación es parabólica o son ajenos cuando la transformación es hiperbólica (Teorema 3.2.5). Cuando se trata de una transformación elíptica de orden 2, el círculo isométrico de una transformación es igual al de su inversa; en el caso de las loxodrómicas los círculos pueden intersecarse en dos puntos, ser tangentes o ser ajenos, dependiendo de la norma de la traza (Teoremas 3.2.6). También se relaciona este concepto con los bisectores perpendiculares (Teorema 3.2.7) y se generaliza el concepto de círculo isométrico.

El Capítulo 4 representa la parte medular de este trabajo, donde se construye el polígono de Dirichlet generalizado. Esencialmente, la construcción consiste en tomar un punto no fijo  $w$  para un grupo fuchsiano  $G$ , y para  $g \in G$  se toma una geodésica que pasa por dicho punto, que se denota por  $L_g^*$  y se encuentra otra geodésica  $L_g$  tal que  $g = \sigma_g^* \sigma_g$ , donde  $\sigma_g, \sigma_g^*$  son las reflexiones en  $L_g$  y  $L_g^*$ . El polígono de Dirichlet generalizado es la intersección de los semiplanos  $H_g$ , donde cada  $H_g$  es la componente en el plano hiperbólico que contiene a  $w$  al remover  $L_g$  (véase las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3). Se muestra que en un grupo fuchsiano en donde  $\infty$  es un punto ordinario, los radios de los círculos isométricos tienden a cero. Se prueba que el polígono de Dirichlet generalizado para un grupo fuchsiano es una región fundamental, y que dependiendo de que si el centro está en el plano hiperbólico o si es infinito, se trata del polígono de Dirichlet o del polígono de Ford (Teorema 4.2.5).

Se prueban también algunos otros resultados, por ejemplo, la manera en la que se comportan los radios de los círculos isométricos de las iteraciones de una transformación parabólica (Proposición 4.2.7).

Posteriormente se introduce el concepto de extensión de Poincaré para generalizar la construcción de Ford al caso tridimensional (Teorema 4.2.8), aparentemente esta prueba no aparece en la literatura, por lo que de cierta manera es original.

La tesis concluye con un resultado que permite construir polígonos fundamentales convexos para grupos fuchsianos que contienen subgrupos para los cuales se conoce su región fundamental y que cumplen cierta condición de estabilidad (Teorema 4.3.1). Usando este resultado, se describen detalladamente ejemplos de grupos fuchsianos que incluyen grupos cíclicos propios

parabólicos, hiperbólicos y elípticos (Ejemplos 1, 2 y 3). En el caso hiperbólico, se aplica en el contexto de las transformaciones simples y se prueban algunos resultados que permiten la construcción de dominios fundamentales (Lemas 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4 y Teorema 4.3.5).

También se extienden estos resultados al caso tridimensional para grupos kleinianos que contienen subgrupos doblemente periódicos que se les puede llamar también de Ford, bajo las hipótesis de que los radios de los círculos isométricos tienden a cero (Teorema 4.3.6), por ejemplo el grupo de Picard. En este caso también, aparentemente, la demostración no se encuentra en la literatura.

La tesis finaliza con un teorema que describe en qué casos las transformaciones hiperbólicas aparean lados de polígonos fundamentales convexos. Esencialmente, se prueba que las transformaciones hiperbólicas que aparean lados de polígonos fundamentales convexos son las simples (Teorema 4.4.1).





# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>2. Transformaciones de Möbius en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>9</b>
2.1. El Grupo de Möbius en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	9
2.2. Propiedades . . . . .	14
2.3. Forma general de las transformaciones de Möbius . . . . .	25
<b>3. Círculos y esferas isométricas</b>	<b>27</b>
3.1. Esfera isométrica . . . . .	27
3.2. Círculos isométricos . . . . .	29
<b>4. Polígono de Dirichlet Generalizado</b>	<b>39</b>
4.1. Polígono de Dirichlet . . . . .	40
4.2. Polígono de Dirichlet Generalizado . . . . .	40
4.3. Regiones fundamentales derivadas de clases laterales . . . . .	53
4.4. Transformaciones que aparean lados . . . . .	69



# Capítulo 1

## Preliminares

Enunciaremos varios resultados sin prueba que se usarán en esta tesis, las demostraciones se pueden consultar en [2] y [4].

Ciertos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  aparecerán con frecuencia en este trabajo y es conveniente introducir la siguiente notación:

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\},$$

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\},$$

y

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}.$$

En el caso de el plano complejo  $\mathbb{C}$  se usarán los símbolos  $\Delta$  y  $\partial\Delta$  para el disco unitario y el círculo unitario respectivamente.

Al espacio  $\mathbb{R}^n$  junto con el punto  $\infty$  se le denota como  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ . De esta manera es posible establecer una biyección entre  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  y  $S^n$ , dicha biyección se obtiene mediante la *proyección estereográfica*  $\pi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$  dada por:

$$\pi(x) = \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right),$$

si  $x \neq \infty$  y  $\pi(\infty) = e_{n+1}$ , donde  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ .

Definimos la métrica cordal en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , que denotamos por  $d_C(x, y)$  como  $|\pi(x) - \pi(y)|$ , es decir

$$d_C(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, & \text{si } x, y \neq \infty; \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |x|^2}}, & \text{si } y = \infty. \end{cases}$$

Hablaremos ahora del caso particular de  $\mathbb{C}$ . Las métricas cordal y euclidiana inducen la misma topología en  $\mathbb{C}$ , además

$$d_C(z_n, \infty) \mapsto 0 \quad \text{si y sólo si} \quad |z_n| \mapsto \infty \quad (\text{cf. [4], pp. 8, 9}).$$

Llamamos Transformaciones de Möbius de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  a las transformaciones de variable compleja de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Se pueden definir estas transformaciones en los puntos del plano complejo extendido en donde no se aplica el álgebra:

- (i) Si  $c = 0$ , se define  $T(\infty) = \infty$ .
- (ii) Si  $c \neq 0$ , se define  $T(\infty) = a/c$  y  $T(-d/c) = \infty$ .

Si  $ad - bc = 0$ , se trata de una transformación constante, pues

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Dos transformaciones de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{y} \quad S(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

son iguales si y sólo si existe  $k \in \mathbb{C}$  tal que

$$a = ka', \quad b = kb', \quad c = kc', \quad d = kd' \quad (\text{cf. [4], pp. 10, 11}),$$

por lo tanto, si  $ad - bc = k$ , las transformaciones

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{y} \quad T(z) = \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{k}}}{\frac{c}{\sqrt{k}}z + \frac{d}{\sqrt{k}}}$$

tienen la misma regla de correspondencia, sin embargo

$$\frac{a}{\sqrt{k}} \frac{d}{\sqrt{k}} - \frac{b}{\sqrt{k}} \frac{c}{\sqrt{k}} = 1.$$

De este hecho se sigue que las transformaciones de Möbius pueden definirse por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1,$$

y además existen exactamente dos matrices unimodulares que determinan una transformación de Möbius dada.

A este grupo de matrices se le denota por  $SL(2, \mathbb{C})$  y el centro de este grupo consiste de las matrices  $\pm Id$ . Se usará el mismo símbolo para denotar a una transformación de Möbius y a la matriz que la define.

Al cociente de  $SL(2, \mathbb{C})$  sobre su centro  $\pm Id$  se le llama su proyectivización y se denota por  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Este grupo cociente es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius complejas (cf. [4], pp. 11, 12).

**Definición 1.** Sea  $A$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable en  $A$ , se dice que  $f$  es conforme en  $x_0 \in A$ , si  $Df(x_0)$  es un múltiplo escalar de una transformación ortogonal. A dicho escalar se le llama factor de conformalidad y se denota por  $\mu_f(x_0)$ .

Es conocido que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$

existe y es precisamente el factor de conformalidad (cf. [2], pp. 27, 41).

Dado que una transformación de Möbius de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  que no es la identidad fija a lo más dos puntos, las transformaciones de Möbius se pueden clasificar de acuerdo a su conjugación a formas canónicas.

**Definición 2.** Sea  $T$  una transformación de Möbius que fija exactamente un punto en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces a  $T$  se le llama parabólica.

**Proposición 1.** Sea  $T$  una transformación de Möbius. Entonces:

- i) Si  $T$  es parabólica,  $T$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a una traslación;
- ii) Si  $T$  no es parabólica,  $T$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a una transformación de la forma  $z \mapsto \alpha z$ ,  $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

La proposición anterior muestra que cualquier transformación de Möbius es conjugada a una transformación canónica.

**Definición 3.** Sea  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ , tal que fija exactamente dos puntos en  $\mathbb{C}$ , supóngase también que  $T$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a la transformación  $S(z) = \alpha z$ . Entonces

- i) Si  $|\alpha| = 1$ , a  $T$  se le llama elíptica;

ii) Si  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , a  $T$  se le llama hiperbólica;

iii) Si  $|\alpha| \neq 1$  y  $\alpha \notin \mathbb{R}^+$  a  $T$  se le llama loxodrómica.

Se denotará por “discos” a discos o semiplanos en la esfera de Riemann. Al subgrupo de  $SL(2, \mathbb{C})$  con entradas reales se le denota por  $SL(2, \mathbb{R})$ . Se puede identificar a las transformaciones de Möbius definidas por estas matrices con  $PSL(2, \mathbb{R})$ , este grupo se obtiene al tomar el cociente de  $SL(2, \mathbb{R})$  sobre su centro, el cual está formado por las matrices  $\pm Id$ .

**Teorema 2.** *Las transformaciones de Möbius que preservan  $H^2$  son precisamente aquellas definidas por  $PSL(2, \mathbb{R})$ .*

Se quiere describir ahora las transformaciones de Möbius que preservan al disco unitario  $\Delta$ . Con este objeto, se encuentra una función que transforme  $H^2$  en  $\Delta$ . Dicha transformación, llamada de Cayley está dada por

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i}. \quad (1.1)$$

De esta observación se sigue que las transformaciones de Möbius que preservan  $\Delta$  son de la forma

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \alpha}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

**Definición 4.** *Dada  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ ,*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

*se define la traza de  $T$  como  $\pm \frac{a + d}{\sqrt{ad - bc}}$  y se denota por  $\chi(T)$ .*

**Teorema 3.** *Sea  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ ,  $T \neq y$  y  $\chi$  la traza de  $T$ . Entonces:*

i)  $T$  es parabólica si y sólo si  $\chi = \pm 2$ ;

ii)  $T$  es elíptica si y sólo si  $\chi \in (-2, 2)$ ;

iii)  $T$  es hiperbólica si y sólo si  $\chi \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ ;

iv)  $T$  es loxodrómica si y sólo si  $\chi \notin \mathbb{R}$ .

**Definición 5.** *Sea  $A$  una región en  $\mathbb{R}^n$ , una densidad en  $A$  es una función continua  $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$*

Dada una densidad  $\lambda$  en una región  $A$  y  $\gamma$  una curva de clase  $C^1$  por tramos en  $A$ , se define la  $\lambda$ -longitud de  $\gamma$  como

$$\ell_\lambda(\gamma) = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ .

**Definición 6.** Sea  $\lambda$  una densidad en una región  $A$  y  $z_1, z_2 \in A$ , se define la  $\lambda$ -distancia de  $z_1$  a  $z_2$ , como

$$\inf_{\gamma} \ell_\lambda(\gamma),$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas  $\gamma$  de clase  $C^1$  por tramos que unen  $z_1$  con  $z_2$ . A esta distancia se le denota por  $\rho_\lambda(z_1, z_2)$ .

**Teorema 4.** Sea  $\lambda$  una densidad definida en una región  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , entonces la distancia  $\rho_\lambda$  define una métrica en  $A$ .

Dadas dos regiones  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : A \rightarrow B$  una biyección conforme, supóngase que la región  $A$  está provista de una métrica definida por una densidad  $\lambda$ . Bajo éstas hipótesis, se puede proveer a la región  $B$  con una densidad  $\sigma$  de tal manera que  $f$  es una isometría. Esto se obtiene definiendo

$$\sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)},$$

donde  $\mu(x)$  es el factor de conformalidad de  $f$  en  $x$ .

**Definición 7.** Al semiplano superior  $H^2$  provisto con la métrica definida por la densidad

$$\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im } z}$$

se le llama métrica hiperbólica.

**Teorema 5.** El grupo  $PSL(2, \mathbb{R})$  actúa como un grupo de isometrías en  $H^2$  con la métrica hiperbólica.

Se puede demostrar que el grupo completo de isometrías está dado por  $\langle PSL(2, \mathbb{R}), z \mapsto \bar{z} \rangle$ .

**Teorema 6.** Sean  $z$  y  $w$  puntos en  $H^2$ , entonces

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\text{Im } z \text{Im } w}.$$



Se sigue usando la función de Cayley (1.1) y la observación posterior al Teorema 4 que se puede obtener un segundo modelo del plano hiperbólico.

**Definición 8.** Al disco unitario  $\Delta$  provisto con la métrica definida por la densidad

$$\sigma(w) = \frac{2}{1 - |w|^2}$$

se le conoce como disco de Poincaré y a la métrica inducida se le llama métrica hiperbólica.

**Teorema 7.** Cualquier isometría hiperbólica del disco de Poincaré es de la forma

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \alpha} \quad \text{o} \quad z \mapsto \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\beta \bar{z} + \alpha}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

**Definición 9.** Se dice que  $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$  es un punto límite con respecto a un subgrupo  $\Gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , si existen  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  y transformaciones distintas  $T_n \in \Gamma$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tales que  $T_n(z) \rightarrow \alpha$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

El conjunto de puntos límite se denota por  $\mathbb{L}(\Gamma)$  y el conjunto  $\widehat{\mathbb{C}} - \mathbb{L}$ , llamado ordinario, se denota por  $\mathbb{O}(\Gamma)$ .

**Definición 10.** Se dice que un subgrupo  $\Gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$  es discontinuo, si el conjunto ordinario  $\mathbb{O}(\Gamma)$  es no vacío.

**Teorema 8.** Un grupo discontinuo en  $PSL(2, \mathbb{C})$  es a lo sumo numerable.

**Definición 11.** Sea  $\Gamma < SL(2, \mathbb{C})$ , se dice que  $\Gamma$  es discreto si no existe una sucesión de matrices distintas,  $T_n \in \Gamma$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $T_n \rightarrow T$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $T$  es una matriz de  $2 \times 2$  con entradas complejas.

**Definición 12.** Se dice que  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$  es discreto, si está determinado por un subgrupo discreto  $\Gamma$  de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

**Teorema 9.** Sea  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$  discontinuo, entonces  $\Gamma$  es discreto.

**Teorema 10.** Sea  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$  discreto, entonces  $\Gamma$  es discontinuo.

**Definición 13.** Sea  $G$  un grupo actuando en un espacio métrico  $X$  y  $Y$  un espacio invariante bajo  $G$  de  $X$ , se dice que  $G$  actúa discontinuamente en  $Y$ , si dado cualquier compacto  $K \subset Y$ , se tiene que

$$g(K) \cap K \neq \emptyset$$

solamente para un número finito de transformaciones en  $G$ .

Esta propiedad, que es invariante bajo conjugación con un homeomorfismo, la satisface el conjunto ordinario de un grupo discontinuo. Si  $\Gamma$  es un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  que actúa en un subdominio  $M$  de la esfera de Riemann y  $M$  interseca al conjunto límite, entonces  $\Gamma$  no actúa discontinuamente en  $M$ . No es difícil probar que si  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , entonces  $\Gamma$  actúa discontinuamente en  $H^2$ .



# Capítulo 2

## Transformaciones de Möbius en $\mathbb{R}^n$

### 2.1. El Grupo de Möbius en $\mathbb{R}^n$

La esfera en  $\mathbb{R}^n$  con centro en  $a$  y radio  $r$  está dada por la ecuación

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r\},$$

ésta se denota por  $S(a, r)$ . Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , denotamos por  $x^*$  a  $x/|x|^2$ . Se define la *reflexión* (o *inversión*) en  $S(a, r)$  como la función  $\varphi : \mathbb{R}^n - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\varphi(x) = a + r^2(x - a)^*$ . Esta función no está determinada cuando  $x = a$ , pero es posible extenderla a  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  definiendo  $\varphi(a) = \infty$  y  $\varphi(\infty) = a$ . No es difícil probar que  $\varphi^2(x) = x$  para toda  $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$  y que  $\varphi(x) = x$  si y sólo si  $x \in S(a, r)$ .

Los planos en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  están determinados por la siguiente ecuación

$$P(a, t) = \{x \in \widehat{\mathbb{R}}^n \mid (x \cdot a) = t\} \cup \{\infty\},$$

donde  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq 0$ , y  $(x \cdot a)$  denota el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^n$ , estos se denotan por  $P(a, t)$ . La *reflexión* (o *inversión*) en  $P(a, t)$  está definida por la función  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\varphi(x) = x + sa$ , donde  $s \in \mathbb{R}$  se elige de manera que  $\frac{1}{2}(x + \varphi(x)) \in P(a, t)$ . De aquí se obtiene la expresión explícita

$$\varphi(x) = x - 2[(x \cdot a) - t]a^*,$$

y al igual que en el caso de la esfera esta función se puede extender a  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  definiendo  $\varphi(\infty) = \infty$ . De nuevo, se tiene que  $\varphi^2(x) = x$  para toda  $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$  y que  $\varphi(x) = x$  si y sólo si  $x \in P(a, t)$ .

Nótese que una esfera está determinada por una ecuación de la forma

$$|x|^2 - 2(x \cdot a) + |a|^2 - r^2 = 0 \tag{2.1}$$

y un plano está determinado por una ecuación de la forma

$$-2(x \cdot a) + 2t = 0. \quad (2.2)$$

Se puede unificar a estos conjuntos llamándolos “esferas” y están descritos por una ecuación de la forma

$$a_0|x|^2 - 2(x \cdot a) + a_{n+1} = 0, \quad (2.3)$$

donde  $a = (a_1, \dots, a_n)$ . Al vector  $(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$  se le llama el *vector coeficiente*. Nótese que este vector no está determinado de manera única, sin embargo todos difieren por un múltiplo real distinto de cero. Más aún, si  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  es cualquier vector coeficiente de una “esfera”  $\Sigma$ , entonces

$$|a|^2 > a_0 a_{n+1}.$$

Se definen ahora las transformaciones de Möbius para el caso general.

**Definición 14.** Una transformación de Möbius actuando en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es una composición finita de reflexiones en esferas o planos.

Se puede probar que estas reflexiones son continuas con la métrica cordal (cf. [2], p. 22). El grupo formado por ellas se denota por  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ .

**Teorema 2.1.1.** Cada isometría euclidiana de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es la composición de a lo más  $n + 1$  reflexiones en planos. En particular cada isometría es una transformación de Möbius.

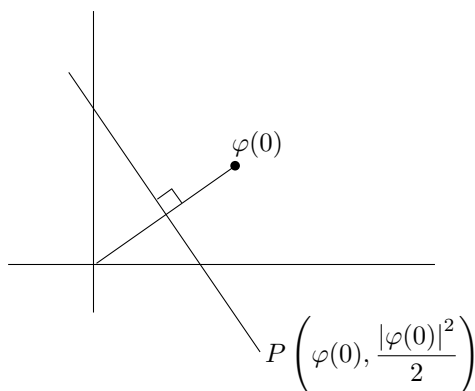


Figura 2.1: El caso en el que  $\varphi(0) \neq 0$ , en el Teorema 2.1.1

**DEMOSTRACIÓN.** Como cada reflexión en un plano es una isometría euclidiana, es suficiente considerar sólo aquellas isometrías  $\varphi$  que satisfacen

$\varphi(0) = 0$ , ya que si  $\varphi(0) \neq 0$ , un cálculo sencillo muestra que la reflexión en el plano

$$P\left(\varphi(0), \frac{|\varphi(0)|^2}{2}\right)$$

manda  $\varphi(0)$  al 0 (véase la Figura 2.1).

Dichas isometrías preservan las normas de los vectores puesto que

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(0)| = |x - 0| = |x|$$

y también productos escalares:

$$\begin{aligned} 2(\varphi(x) \cdot \varphi(y)) &= |\varphi(x)|^2 + |\varphi(y)|^2 - |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 \\ &= 2(x \cdot y). \end{aligned}$$

Esto significa que los vectores  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  son mutuamente ortogonales y por lo tanto son linealmente independientes: si

$$\sum_{j=1}^n c_j \varphi(e_j) = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(e_i) \cdot 0 \\ &= \varphi(e_i) \cdot \sum_{j=1}^n c_j \varphi(e_j) \\ &= \varphi(e_i) \cdot (c_i \varphi(e_i)) = c_i. \end{aligned}$$

Como son  $n$  vectores, forman una base para  $\mathbb{R}^n$ , por lo cual si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  es un elemento de  $\mathbb{R}^n$ , existen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  tales que

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \mu_j \varphi(e_j).$$

Además, los vectores  $\varphi(e_j)$  son mutuamente ortogonales:

$$\begin{aligned} \mu_j &= \left( \sum_{j=1}^n \mu_j \varphi(e_j) \right) \cdot \varphi(e_j) \\ &= (\varphi(x) \cdot \varphi(e_j)) \\ &= (x \cdot e_j) = e_j = x_j. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \varphi(e_j)$  y esto muestra que  $\varphi$  es una transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Como las isometrías son inyectivas, el kernel de  $\varphi$  tiene dimensión cero, así que  $\varphi$  es biyectiva.

Si  $A$  es la matriz de  $\varphi$  respecto a la base  $e_1, \dots, e_n$ , entonces  $\varphi(x) = Ax$  y  $A$  tiene columnas  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ . Esto muestra que la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $A^t A$  está dada por  $(\varphi(e_i) \cdot \varphi(e_j)) = (e_i \cdot e_j)$ , esto es 1 si  $i = j$  y cero si  $i \neq j$ . De aquí se concluye que  $A$  es una matriz ortogonal.

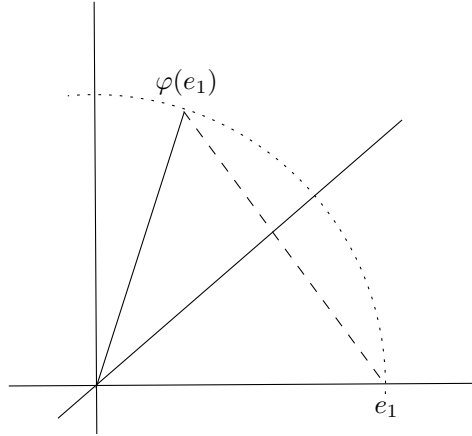


Figura 2.2: Prueba del Teorema 2.1.1

Se probará ahora que  $\varphi$  es composición de a lo más  $n$  reflexiones en planos. Primero, sea  $a_1 = \varphi(e_1) - e_1$  (véase la Figura 2.2). Si  $a_1 \neq 0$ , se toma  $\psi_1$  como la reflexión en el plano  $P(a_1, 0)$  y entonces se tiene que  $\psi_1 \varphi(e_1) = e_1$ . Esto se sigue, ya que si  $a_1^* = a_1 / |a_1|^2$

$$\begin{aligned}
 \psi_1(e_1) &= e_1 - 2[e_1 \cdot a_1]a_1^* \\
 &= e_1 - 2[e_1 \cdot (\varphi(e_1) - e_1)]a_1^* \\
 &= e_1 - 2[(e_1 \cdot \varphi(e_1)) - 1]a_1^* \\
 &= e_1 + (|e_1 - \varphi(e_1)|^2)a_1^* \\
 &= e_1 + (|a_1|^2)a_1^* \\
 &= e_1 + a_1 = \varphi(e_1),
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

y como  $\psi_1$  es una involución,  $\psi_1 \varphi(e_1) = e_1$ .

Si  $a_1 = 0$  se toma  $\psi_1 = Id$ , en ambos casos  $\psi_1 \varphi(e_1) = e_1$ . Por lo cual  $\varphi_1 = \psi_1 \varphi$  es una isometría que fija 0 y  $e_1$ .

Ahora, sea  $a_2 = \varphi_1(e_2) - e_2$ . Como antes, si  $a_2 = 0$  se toma  $\psi_2 = Id$ , y si  $a_2 \neq 0$  se toma  $\psi_2$  como la reflexión en  $P(a_2, 0)$ .

Se tiene que  $e_1 \in P(a_2, 0)$ , ya que

$$\begin{aligned}(e_1 \cdot a_2) &= (e_1 \cdot \varphi_1(e_2)) - (e_1 \cdot e_2) \\ &= (\varphi_1(e_1) \cdot \varphi_1(e_2)) - 0 \\ &= (e_1 \cdot e_2) = 0.\end{aligned}$$

Se puede ver como en el caso anterior que  $\psi_2\varphi_1(e_2) = e_2$  y entonces  $\varphi_2 = \psi_2\varphi_1$  fija  $0, e_1$  y  $e_2$ .

De manera inductiva se puede ver que  $\varphi_k = \psi_k\varphi_{k-1}$  es una isometría que fija  $0, e_1, \dots, e_k$ , y análogamente sea  $a_{k+1} = \varphi_k(e_{k+1}) - e_{k+1}$ .

De nuevo, se toma  $\psi_{k+1} = Id$  (si  $a_{k+1} = 0$ ) o como la reflexión en  $P(a_{k+1}, 0)$  (si  $a_{k+1} \neq 0$ ) y el mismo argumento usado en (2.4) prueba que  $\psi_{k+1}\varphi_k$  fija  $0$  y  $e_{k+1}$ .

Además, si  $1 \leq j \leq k$  entonces

$$\begin{aligned}(e_j \cdot a_{k+1}) &= (e_j \cdot \varphi_k(e_{k+1})) - (e_j \cdot e_{k+1}) \\ &= (\varphi_k(e_j) \cdot \varphi_k(e_{k+1})) - 0 \\ &= (e_j \cdot e_{k+1}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

y entonces  $e_j \in P(a_{k+1}, 0)$ , por lo que  $\psi_{k+1}(e_j) = e_j$ .

Como  $\varphi_k$  también fija  $0, e_1, \dots, e_k$  deducimos que  $\psi_{k+1}\varphi_k$  fija  $0, e_1, \dots, e_{k+1}$ . En conclusión, existen transformaciones  $\psi_j$  (cada una la identidad o la reflexión en un plano) tales que la isometría  $\psi_n \cdots \psi_1\varphi$  fija  $0, e_1, \dots, e_n$ . Dicha isometría es necesariamente una transformación lineal y por lo tanto es la identidad. Entonces  $\varphi = \psi_1 \cdots \psi_n$  es composición de a lo más  $n + 1$  reflexiones en planos, ya que por la primera observación si  $\varphi(0) \neq 0$  es necesario componer con la reflexión en

$$P\left(\varphi(0), \frac{|\varphi(0)|^2}{2}\right)$$

□

**Teorema 2.1.2.** *Una función  $\varphi$  es una isometría euclidiana si y sólo si es de la forma*

$$\varphi(x) = Ax + x_0,$$

donde  $A$  es una matriz ortogonal y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

DEMOSTRACIÓN.

$\Rightarrow$ ] Si  $\varphi$  es una isometría euclidiana, entonces  $\varphi(x) - \varphi(0)$  es una isometría



que fija el origen por lo que está representada por una matriz ortogonal  $A$ . Por lo tanto  $\varphi(x) - \varphi(0) = Ax$  y así se tiene que

$$\varphi(x) = Ax + \varphi(0).$$

$\Leftarrow$ ] Como las matrices ortogonales preservan normas, se tiene que si

$$\varphi(x) = Ax + x_0,$$

entonces

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |(Ax + x_0) - (Ay + x_0)| = |Ax - Ay| = |A(x - y)| = |x - y|.$$

Por lo tanto  $\varphi$  es una isometría euclidiana.  $\square$

**Definición 15.** Sea  $A$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable en  $A$ . Se dice que  $f$  es conforme en  $x_0 \in A$ , si  $D_f(x_0)$  es un múltiplo escalar  $\mu_f(x_0)$  de una transformación ortogonal.

Al escalar  $\mu_f(x_0)$  se le llama *factor de conformalidad*, un ejemplo de transformaciones conformes son las de Möbius. No es difícil probar que

$$\mu_f(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}. \quad (2.5)$$

## 2.2. Propiedades

Un hecho sobre las transformaciones de Möbius que se usará con frecuencia en esta sección es que dada una esfera o plano, su imagen bajo una transformación de Möbius es otra esfera o plano (cf. [2], p. 28).

**Definición 16.** Sean  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  dos “esferas” con vectores coeficientes  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  y  $(b_0, \dots, b_{n+1})$  respectivamente. El producto inversivo  $(\Sigma, \Sigma')$  de  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  está dado por

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2(a \cdot b) - a_0 b_{n+1} - a_{n+1} b_0|}{2(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{1/2} (|b|^2 - b_0 b_{n+1})^{1/2}}.$$

Es útil obtener expresiones explícitas para  $(\Sigma, \Sigma')$  en los siguientes casos.

*Caso I.* Si  $\Sigma = S(a, r)$  y  $\Sigma' = S(b, t)$ , entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = \left| \frac{r^2 + t^2 - |a - b|^2}{2rt} \right|. \quad (2.6)$$

*Caso II.* Si  $\Sigma = S(a, r)$  y  $\Sigma' = P(b, t)$ , entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|(a \cdot b) - t|}{r|b|}. \quad (2.7)$$

*Caso III.* Si  $\Sigma = P(a, r)$  y  $\Sigma' = P(b, t)$ , entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|(a \cdot b)|}{|a||b|}. \quad (2.8)$$

Además, se prueba también que en todos los casos, si  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  se intersecan entonces  $(\Sigma, \Sigma') = \cos \theta$  donde  $\theta$  es uno de los ángulos de intersección (el agudo). En particular,  $(\Sigma, \Sigma') = 0$  si y sólo si  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  son ortogonales. Más aún, en el Caso II,

$$(\Sigma, \Sigma') = \delta/r,$$

donde  $\delta$  es la distancia del centro de  $S(a, r)$  al plano  $P(a, t)$ : por lo tanto  $(\Sigma, \Sigma') = 0$  si y sólo si  $a \in P(b, t)$ . Otro hecho es que el producto inversivo de dos “esferas” tangentes es 1.

Lo anterior se puede consultar en [2], p. 29, y con mas detalle en [1], pp. 25-37 .

**Lema 2.2.1.** *Dadas dos “esferas”  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  en  $\mathbb{R}^n$ , existe  $\psi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  tal que  $\psi(\Sigma) = \Sigma'$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Basta probar que cualquier “esfera”  $\Sigma$  se puede mandar mediante alguna  $\varphi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  al plano  $P(e_n, 0)$ . Para esto probamos que si  $\varphi$  es la reflexión en  $S(e_n, \sqrt{2})$ ,  $\varphi(\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}) = S^{n-1}$  y viceversa (ya que  $\varphi$  es involución).

Para esto sea  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ , como  $\varphi(x) = e_n + 2(x - e_n)^*$ , se sigue que

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^2 &= \varphi(x) \cdot \varphi(x) \\ &= 1 + 4(x - e_n)^* \cdot (x - e_n)^* + 4e_n \cdot (x - e_n)^* \\ &= 1 + \frac{4}{|x - e_n|^2} + \frac{4}{|x - e_n|^2}(-1) = 1, \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\varphi(x) \in S^{n-1}$ .

Nótese también que cualquier esfera se puede mandar mediante traslaciones y homotecias a la esfera unitaria  $S^{n-1}$  y que cualquier plano se puede mandar mediante una traslación a un plano por el origen. Finalmente, un plano por el origen se puede mandar mediante una transformación ortogonal al plano  $\mathbb{R}^{n-1}$  (tomando bases ortonormales).  $\square$

**Teorema 2.2.2.** *Sea  $\Sigma$  cualquier “esfera”,  $Id$  la transformación identidad y  $\sigma$  la reflexión en  $\Sigma$ . Si  $\varphi$  es cualquier transformación de Möbius que fija puntualmente a  $\Sigma$ , entonces  $\varphi = Id$  o  $\varphi = \sigma$ .*

DEMOSTRACIÓN. Primero se considera el caso cuando  $\Sigma$  es el plano  $x_n = 0$ , es decir  $P(e_n, 0)$ . Sea  $\Sigma' = S(a, r)$ , donde  $a \in \Sigma$  y  $r > 0$ . Como  $\infty \in \Sigma$  y  $\varphi(\infty) = \infty$ , así que  $\varphi$  manda  $\Sigma'$  a otra esfera  $\Sigma'' = S(b, t)$ . Como  $a \in \Sigma$  se tiene que  $(\Sigma, \Sigma') = 0$  (cf. [1], p 35). Como las transformaciones de Möbius preservan el producto inversivo (cf. [2], p. 30), se tiene que

$$(\Sigma, \Sigma') = (\varphi(\Sigma), \varphi(\Sigma')) = (\Sigma, \Sigma'') = 0,$$

por lo que  $b \in \Sigma$  y por lo tanto  $b_n = 0$ . Ahora, si se toma el segmento de recta por  $a$  y  $b$ , que está contenido en  $\Sigma$ , por ser este convexo, la recta interseca exactamente en dos puntos a la esfera  $\Sigma'$ , digamos  $z$  y  $w$ ;  $z, w$  también están en  $\Sigma''$ , ya que  $\varphi$  fija puntualmente a  $\Sigma$ . Este argumento unidimensional implica que necesariamente  $a = b$  y  $r = t$ , es decir que  $\varphi(\Sigma') = \Sigma'$ .

Tomemos ahora  $x \notin \Sigma$  y sea  $y = \varphi(x)$ . Ahora se selecciona cualquier punto  $a \in \Sigma$  y  $r = |x - a|$ , por lo que  $x \in S(a, r)$ . Como  $\varphi$  preserva las esferas de este tipo,  $y \in S(a, r)$  y entonces

$$|x|^2 - 2(x \cdot a) + |a|^2 = |y|^2 - 2(y \cdot a) + |a|^2, \quad (2.9)$$

nótese que esto es válido para cualquier  $a \in \Sigma$ . Tomando  $a = 0$  se tiene que  $|x| = |y|$ . Se sigue entonces de 2.9 que para cualquier  $a \in \Sigma$ ,

$$(x \cdot a) = (y \cdot a).$$

Tomando  $a = e_1, \dots, e_{n-1}$ , se tiene que  $x_j = y_j$  para  $j = 1, \dots, n-1$ . Como  $|x| = |y|$ , entonces  $y_n = \pm x_n$  por lo que  $\varphi(x) = x$  o  $\varphi(x) = \sigma(x)$ . Como  $\Sigma$  es invariante bajo  $\varphi$ , esta transformación preserva (o intercambia) las componentes de  $\widehat{\mathbb{R}}^n - \Sigma$ . Finalmente, se sigue por continuidad y conexidad que

$$\varphi = Id \quad \text{o} \quad \varphi = \sigma.$$

Se prueba ahora el caso general. Primero, dada cualquier “esfera”, se sigue del Lema 2.2.1 que existe una transformación de Möbius  $\psi$  que manda  $\Sigma$  al plano  $P(e_n, 0)$ . Sea  $\sigma$  la reflexión en  $\Sigma$  y  $\eta$  la reflexión en el plano  $P(e_n, 0)$ . La transformación  $\psi\sigma\psi^{-1}$  fija puntualmente a  $P(e_n, 0)$  y no es la identidad, por la primera parte de la prueba se tiene que  $\psi\sigma\psi^{-1} = \eta$ . Si  $\varphi$  es ahora cualquier transformación de Möbius que fija puntualmente  $\Sigma$ , entonces  $\psi\varphi\psi^{-1} = Id$  o  $\psi\varphi\psi^{-1} = \eta$ , por lo tanto  $\varphi = Id$  o  $\varphi = \sigma$ .  $\square$

**Corolario 2.2.3.** *Cualesquiera dos reflexiones son conjugadas en  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Esto se sigue fácilmente del Lema 2.2.1 y de los argumentos al final de la prueba del Teorema 2.2.2.  $\square$

**Definición 17.** Sea  $\Sigma$  una “esfera”, se dice que  $x, y$  son puntos inversos con respecto a  $\Sigma$ , si  $\sigma(x) = y$ , donde  $\sigma$  es la reflexión en  $\Sigma$ .

**Teorema 2.2.4.** Sean  $x, y$  puntos inversos con respecto a la “esfera”  $\Sigma$  y  $\varphi$  cualquier transformación de Möbius. Entonces  $\varphi(x)$  y  $\varphi(y)$  son puntos inversos con respecto a la “esfera”  $\varphi(\Sigma)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\Sigma$  una “esfera” y  $\sigma$  la reflexión en ella, como  $x, y$  son puntos inversos con respecto a  $\Sigma$  se tiene que  $y = \sigma(x)$  y  $x = \sigma(y)$ . Sean  $\varphi$  una transformación de Möbius y  $\sigma_1$  la reflexión en la “esfera”  $\varphi(\Sigma)$ , se sigue de la prueba del Teorema 2.2.2 que  $\varphi^{-1}\sigma_1\varphi = \sigma$ , lo cual es equivalente a  $\sigma_1\varphi = \varphi\sigma$ . Por lo tanto  $\varphi(x)$  y  $\varphi(y)$  son puntos inversos con respecto a la “esfera”  $\varphi(\Sigma)$ .  $\square$

**Definición 18.** Dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$  distintos. El bisector perpendicular euclidiano entre  $x, y$  es el plano ortogonal a la recta que pasa por  $x, y$  y que contiene a su punto medio, es decir  $\frac{x+y}{2}$ .

**Lema 2.2.5.** Dados  $x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ , el bisector perpendicular euclidiano entre  $x, y$  es el lugar de los puntos que equidistan euclidianamente de  $x, y$ .

DEMOSTRACIÓN. Un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  satisface

$$|p - x|^2 = |p - y|^2$$

si y sólo si

$$-2(p \cdot x) + |x|^2 = -2(p \cdot y) + |y|^2$$

si y sólo si

$$p \cdot (x - y) = \frac{1}{2}(|x|^2 - |y|^2).$$

Como  $\frac{(x+y)}{2} \cdot (x - y) = \frac{1}{2}(|x|^2 - |y|^2)$ , el bisector perpendicular está dado por el plano  $P(x - y, t)$  donde  $t = \frac{1}{2}(|x|^2 - |y|^2)$ , que consiste exactamente de los puntos que equidistan de  $x, y$ .  $\square$

**Lema 2.2.6.** Sean  $x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n$  dos puntos distintos y  $\Sigma$  una “esfera”. Entonces  $x, y$  son puntos inversos con respecto a la “esfera”  $\Sigma$  si y sólo si toda “esfera”  $\Sigma'$  que pasa por  $x, y$  es ortogonal a  $\Sigma$ .

DEMOSTRACIÓN.

Caso 1.  $\Sigma = P(e_n, 0)$ .

$\Rightarrow$ ] Sean  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y su reflejado  $y = (x_1, x_2, \dots, -x_n)$ . Ahora si  $\Sigma'$  es un plano  $P(a, t)$  por  $x, y$  se tiene  $a \cdot x = a \cdot y$ , es decir  $a \cdot (x - y) = 0$  y  $a \cdot e_n = 0$ , esto es,  $(\Sigma, \Sigma') = 0$ . Se sigue entonces que  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  son ortogonales (cf. [1], p. 34 o [2], p. 29).

Por otra parte, si  $\Sigma' = S(b, r)$  es una esfera por  $x$  y  $y$ , entonces el centro de  $\Sigma'$   $b$  equidista de  $x$  y  $y$ . Usando el Lema 2.2.5 se sigue que  $b \in \Sigma$ , ya que el bisector perpendicular euclidiano es precisamente  $\Sigma$ , por lo cual  $(\Sigma, \Sigma') = 0$ .

$\Leftarrow$ ] Supongamos ahora que toda “esfera” por  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$  es ortogonal a  $\Sigma$ , hay que probar que  $x$  y  $y$  son inversos con respecto a  $\Sigma$ . Sea

$$z = \frac{x + y}{2}$$

y  $r = |z - x|$ , entonces  $S(z, r)$  pasa por  $x, y$  (ya que  $z$  es el punto medio entre ellos).

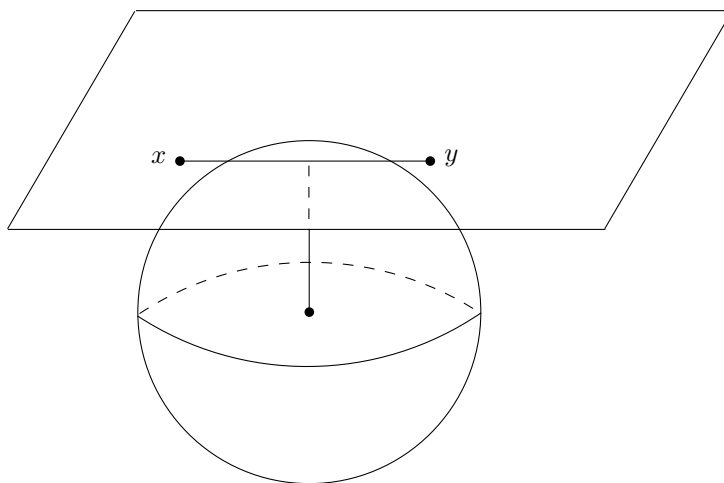


Figura 2.3: Esfera con centro en el bisector perpendicular entre  $x$  y  $y$ .

Por hipótesis  $S(z, r)$  es ortogonal a  $\Sigma$ , por lo que  $z \in \Sigma$  y por lo tanto  $x_n = -y_n$ . Nótese que  $x_n = 0 = y_n$  no puede suceder, ya que tomando una esfera con centro en el bisector perpendicular entre  $x$  y  $y$ , pero que no esté en  $\Sigma$  se contradicen las hipótesis, por lo que  $x_n, y_n \neq 0$  (véase la Figura 2.3).

Probamos ahora que  $x_j = y_j$  si  $1 \leq j \leq n - 1$ , esto es equivalente a que  $(x - y) \cdot e_j = 0$  para toda  $j$ . En caso contrario, si  $x - y$  no es paralelo a  $e_n$ , se construye un plano por  $x, y$  que no es ortogonal a  $e_n$ . Si para alguna  $j < n$ ,  $(x - y) \cdot e_j \neq 0$ , tomando el vector  $a = (0, 0, \dots, -2x_n, \dots, x_j - y_j)$  se

tiene

$$a \cdot x = (-2x_n)x_j + x_n(x_j - y_j) = -x_n(x_j + y_j)$$

y

$$a \cdot y = (-2x_n)y_j - x_n(x_j - y_j) = -x_n(x_j + y_j).$$

Por lo cual  $a \cdot x = a \cdot y$ , y se tiene que el plano  $P(a, t)$  con normal  $a$ , donde  $t = a \cdot x$ , contiene a  $x$  y  $y$ , sin embargo  $a \cdot e_n \neq 0$ , lo cual contradice la hipótesis. Por lo que  $x_j = y_j$  para toda  $j < n$  y  $x, y$  son puntos inversos.

La motivación para la elección del vector  $a = (0, 0, \dots, -2x_n, \dots, x_j - y_j)$  proviene de la notación compleja: si  $z_1 = x_1 + ix_2$  y  $z_2 = y_1 + iy_2$ , donde  $x_2 = -y_2$  se tiene que un vector normal a la recta que pasa por  $z_1$  y  $z_2$  está dado por

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2)i &= (x_1 - y_1 + 2ix_2)i \\ &= (x_1 - y_1)i - 2x_2 \\ &= (-2x_2, x_1 - y_1) \end{aligned}$$

(véase la Figura 2.4).

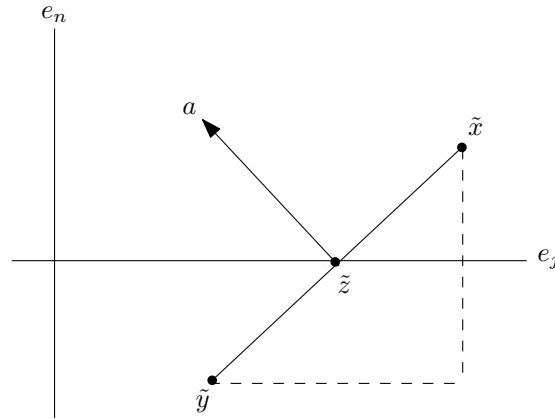


Figura 2.4:  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  proyecciones de  $x, y, z$  en el 2-plano  $e_j, e_n$ .

*Caso 2.  $\Sigma$  es una "esfera" arbitraria.*

$\Rightarrow$ ] Se sigue del Lema 2.2.1 que existe  $\varphi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  tal que  $\varphi(\Sigma) = P(e_n, 0)$ . Sean  $x, y$  puntos inversos con respecto a  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  una esfera que pasa por  $x, y$ , se sigue del Teorema 2.2.4 que  $\varphi(x)$  y  $\varphi(y)$  son puntos inversos con respecto a  $\varphi(\Sigma)$ .

En consecuencia, usando el caso anterior, se tiene que  $(\varphi(\Sigma), \varphi(\Sigma')) = 0$  y por lo tanto, como las transformaciones de Möbius preservan el producto inversivo (cf. [2], p. 30 o [1], p. 37), se sigue que  $(\Sigma, \Sigma') = 0$  y así  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  son

ortogonales (cf. [2], p. 29 o [1], pp. 34-37).

⇐] Supongamos ahora que las “esferas”  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  son ortogonales y sean  $x, y \in \Sigma'$ . Tomando  $\varphi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  tal que  $\varphi(\Sigma) = P(e_n, 0)$ , se sigue de la invariabilidad del producto inversivo que  $\varphi(\Sigma')$  es una “esfera” ortogonal a  $\varphi(\Sigma)$ . Se sigue entonces del caso anterior que  $\varphi(x)$  y  $\varphi(y)$  son puntos inversos con respecto a  $\varphi(\Sigma)$ . Usando el Teorema 2.2.4 se sigue el resultado.  $\square$

Dados cuatro puntos distintos  $x, y, u, v$  en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , se define su *razón cruzada* como

$$[x, y, u, v] = \frac{d(x, u)d(y, v)}{d(x, y)d(u, v)},$$

donde  $d$  denota la distancia cordal.

De la expresión para la distancia cordal en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  se obtiene que

$$[x, y, u, v] = \frac{\frac{2|x-u|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|u|^2}} \cdot \frac{2|y-v|}{\sqrt{1+|y|^2}\sqrt{1+|v|^2}}}{\frac{2|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}} \cdot \frac{2|u-v|}{\sqrt{1+|u|^2}\sqrt{1+|v|^2}}},$$

por lo cual si  $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$[x, y, u, v] = \frac{|x-u| \cdot |y-v|}{|x-y| \cdot |u-v|}.$$

En el caso en el que uno de los puntos sea  $\infty$ , se obtiene la misma expresión omitiendo los factores que involucran a  $\infty$ . Por ejemplo si  $x = \infty$ , se tiene

$$[\infty, y, u, v] = \frac{\frac{2}{\sqrt{1+|u|^2}} \cdot \frac{2|y-v|}{\sqrt{1+|y|^2}\sqrt{1+|v|^2}}}{\frac{2}{\sqrt{1+|y|^2}} \cdot \frac{2|u-v|}{\sqrt{1+|u|^2}\sqrt{1+|v|^2}}}$$

y

$$[\infty, y, u, v] = \frac{|y-v|}{|u-v|},$$

los demás casos se siguen de manera análoga.

Se prueba una útil fórmula sobre la distorsión de las reflexiones en esferas.

**Lema 2.2.7.** *Dada una esfera  $S(a, r)$  y  $\sigma$  la reflexión en ella, entonces*

$$|\sigma(y) - \sigma(x)| = \frac{r^2|y-x|}{|x-a||y-a|}, \quad (2.10)$$

para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^n - \{a\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Usamos la identidad  $|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2(a \cdot b)$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} |\sigma(x) - \sigma(y)|^2 &= r^4 |(x - a)^* - (y - a)^*|^2 \\ &= r^4 \left( \frac{1}{|x - a|^2} + \frac{1}{|y - a|^2} - 2 \frac{(x - a) \cdot (y - a)}{|x - a|^2 |y - a|^2} \right) \\ &= r^4 \left( \frac{|y - a|^2 + |x - a|^2 - 2(x - a) \cdot (y - a)}{|x - a|^2 |y - a|^2} \right) \\ &= r^4 \frac{|x - y|^2}{|x - a|^2 |y - a|^2}. \end{aligned}$$

□

Como consecuencia de este lema, se sigue que el factor de conformalidad de  $\sigma$  la reflexión en  $S(a, r)$  está dado por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sigma(x + h) - \sigma(x)|}{|h|} = \frac{r^2}{|x - a|^2}. \quad (2.11)$$

**Teorema 2.2.8.** *Una transformación  $\varphi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  es de Möbius si y sólo si preserva la razón cruzada.*

DEMOSTRACIÓN.

⇒] La expresión de la razón cruzada implica de manera inmediata que las similitudes euclidianas preservan la razón cruzada, por lo que basta probar que la reflexión en la esfera unitaria  $S(0, 1)$  dada por  $x \mapsto x^*$  preserva la razón cruzada. Esto se sigue ya que el grupo de Möbius está generado por las traslaciones, homotecias, transformaciones ortogonales y  $x \mapsto x^*$  (cf. [2], p. 22, 23).

Si  $\sigma$  es la reflexión en la esfera  $S(0, 1)$ , usando el Lema 2.2.7 se tiene que

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = |x^* - y^*| = \frac{|x - y|}{|x||y|}. \quad (2.12)$$

Se consideran casos de acuerdo a que  $0, \infty$  estén, o no, en  $\{x, y, u, v\}$ .

*Caso 1.*  $0, \infty \notin \{x, y, u, v\}$ .

Usando (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} [x^*, y^*, u^*, v^*] &= \frac{|x^* - u^*| \cdot |y^* - v^*|}{|x^* - y^*| \cdot |u^* - v^*|} \\ &= \frac{|x - u| \cdot |y - v|}{|x - y| \cdot |u - v|} = [x, y, u, v]. \end{aligned}$$



Nótese que en este caso y en los demás, si  $x_j, x_k \in \{x, y, u, v\}$ , con  $x_j \neq x_k$  y aparece un factor de la forma  $|x_j - x_k|^{\pm 1}$  en la razón cruzada de  $[x, y, u, v]$ ,  $x_j, x_k \neq 0$ , entonces por definición aparece un factor de la forma  $|x_j^* - x_k^*|^{\pm 1}$  en la razón cruzada de  $[x^*, y^*, u^*, v^*]$ , esto se sigue del orden y selección que define la razón cruzada.

Obsérvese también que si aparece un factor de la forma  $|x_j|^{\pm 1}$ ,  $x_j$  está “apareada” con 0 y entonces  $x_j^*$  está “apareada” con  $\infty$ , es decir, no aparece y viceversa: si  $x_j$  no aparece en algún factor, es decir,  $x_j$  está “apareada” con  $\infty$ , entonces debe aparecer un factor de la forma  $|x_j^*|^{\pm 1}$ , ya que  $x_j^*$  está “apareada” con 0.

Por ejemplo, usando (2.12)

$$\begin{aligned} [0, y^*, u^*, v^*] &= \frac{|u^*||y^* - v^*|}{|y^*||u^* - v^*|} \\ &= \frac{|y^* - v^*||y||v|}{|u^* - v^*||u||v|} \\ &= \frac{|y - v|}{|u - v|} = [\infty, y, u, v]. \end{aligned}$$

*Caso 2.*  $\infty \in \{x, y, u, v\}, 0 \notin \{x, y, u, v\}; \infty \neq x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3} \in \{x, y, u, v\}$ .  
Usando (2.12) se tiene

$$\frac{|x_{j_1} - x_{j_2}|}{|x_{j_1} - x_{j_3}|} = \frac{|x_{j_1}^* - x_{j_2}^*||x_{j_3}^*|}{|x_{j_1}^* - x_{j_3}^*||x_{j_2}^*|},$$

las observaciones anteriores muestran que todos estos factores aparecen en  $[x^*, y^*, u^*, v^*]$  y no puede haber más, por lo que esta es la razón cruzada de las imágenes.

*Caso 3.*  $0 \in \{x, y, u, v\}, \infty \notin \{x, y, u, v\}, 0 \neq x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3} \in \{x, y, u, v\}$ .  
La razón cruzada es de la forma

$$\frac{|x_{j_1} - x_{j_2}||x_{j_3}|}{|x_{j_1} - x_{j_3}||x_{j_2}|} = \frac{|x_{j_1}^* - x_{j_2}^*|}{|x_{j_1}^* - x_{j_3}^*|},$$

las observaciones muestran que esta es la razón cruzada de las imágenes.

*Caso 4.*  $0, \infty \in \{x, y, u, v\}$ .

La razón cruzada es de una de las formas siguientes:

$$\frac{|x_{j_1} - x_{j_2}|}{|x_{j_1}|}, \frac{|x_{j_1}|}{|x_{j_1} - x_{j_2}|} \quad \text{o} \quad \frac{|x_{j_1}|}{|x_{j_2}|}; \quad x_{j_1}, x_{j_2} \neq 0,$$

que se transforman en

$$\frac{|x_{j_1}^* - x_{j_2}^*|}{|x_{j_2}^*|}, \frac{|x_{j_2}^*|}{|x_{j_1}^* - x_{j_2}^*|}, \frac{|x_{j_2}^*|}{|x_{j_1}^*|},$$

todos los factores aparecen en  $[x^*, y^*, u^*, v^*]$  y no puede haber más por lo que esta es la razón cruzada de las imágenes.

⇐] Supongamos ahora que  $\varphi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  preserva la razón cruzada, se sigue de la definición de razón cruzada que  $\varphi$  es necesariamente inyectiva. Componiendo  $\varphi$  con una transformación de Möbius, si es necesario, se puede suponer que  $\varphi(\infty) = \infty$ , pues ya se probó que las transformaciones de Möbius preservan la razón cruzada.

Tomando cuatro puntos distintos  $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$ , como  $\frac{[\infty, y, u, v]}{[x, y, \infty, v]}$  es invariante bajo  $\varphi$  se tiene que

$$\frac{[\infty, y, u, v]}{[x, y, \infty, v]} = \frac{\frac{|y-v|}{|u-v|}}{\frac{|y-v|}{|x-y|}} = \frac{|x-y|}{|u-v|} = \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|\varphi(u) - \varphi(v)|},$$

por lo cual

$$\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|} = \frac{|\varphi(u) - \varphi(v)|}{|u-v|} = k,$$

por lo que  $\varphi$  es una similitud euclidiana ya que cumple  $|\varphi(x) - \varphi(y)| = k|x-y|$  y por lo tanto es una transformación de Möbius.

Nótese que esto se cumple aún si  $\{x, y\}$  y  $\{u, v\}$  si  $x, y, u, v$  no se intersecan, ya que se pueden elegir dos puntos  $a$  y  $b$  distintos de  $x, y, u, v$  y al tomar

$$\frac{[\infty, y, a, b]}{[x, y, \infty, b]}$$

se tiene que

$$\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|} = \frac{|\varphi(a) - \varphi(b)|}{|a-b|} = \frac{|\varphi(u) - \varphi(v)|}{|u-v|} = k.$$

□

**Teorema 2.2.9.** *Sea  $\varphi$  una transformación de Möbius donde  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(B^n) = B^n$ . Entonces  $\varphi(x) = Ax$ , donde  $A$  es una matriz ortogonal.*

DEMOSTRACIÓN. Como  $\varphi(B^n) = B^n$ , por continuidad y conexidad, se tiene que  $\varphi(S^{n-1}) = S^{n-1}$ . De este último hecho y la hipótesis  $\varphi(0) = 0$

se sigue que  $\varphi(\infty) = \infty$  en virtud del Teorema 2.2.4. Ahora, la prueba del Teorema 2.2.8 indica que una transformación de Möbius que fija  $\infty$  es una similitud euclidiana, por lo que  $|\varphi(x) - \varphi(y)| = k|x - y|$ . En particular, como  $\varphi$  preserva  $S^{n-1}$ , si  $|x| = 1$  se tiene

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(0)| &= |\varphi(x)| \\ &= k|x| \end{aligned}$$

lo cual implica que  $k = 1$  y  $\varphi$  es una isometría euclidiana.

Por lo tanto, usando el Teorema 2.1.2 se tiene que  $\varphi(x) = Ax + \varphi(0) = Ax$ , donde  $A$  es una matriz ortogonal.  $\square$

**Teorema 2.2.10.** *Sea  $\varphi$  la reflexión en la esfera  $S(a, r)$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $S(a, r)$  y  $S^{n-1}$  son ortogonales,
- (ii)  $\varphi(a^*) = 0$  (equivalentemente  $\varphi(0) = a^*$ ),
- (iii)  $\varphi(B^n) = B^n$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $S(a, r)$  y  $S^{n-1}$  son ortogonales. De la fórmula para la reflexión en  $S(a, r)$  se obtiene que

$$\varphi(0) = a - r^2 a^* = a^* (|a|^2 - r^2).$$

Ahora, usando el producto inversivo (cf. [2], p. 29),  $S(a, r)$  y  $S^{n-1}$  son ortogonales si y sólo si

$$(S(a, r), S^{n-1}) = \left| \frac{r^2 + 1 - |a|^2}{2r} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow |a|^2 - r^2 = 1 \Leftrightarrow \varphi(0) = a^* \Leftrightarrow \varphi(a^*) = 0,$$

lo cual prueba que (i) y (ii) son equivalentes.

Supongamos ahora que  $\varphi(B^n) = B^n$ . Por continuidad y conexidad, se tiene que  $\varphi(S^{n-1}) = S^{n-1}$  y como  $a$  y  $a^*$  son puntos inversos con respecto a  $S^{n-1}$ , se sigue del Teorema 2.2.4 que  $\varphi(a)$  y  $\varphi(a^*)$  son puntos inversos con respecto a  $S^{n-1}$ . Como  $a$  es el centro de  $S(a, r)$ ,  $\varphi(a) = \infty$ , se sigue de la observación anterior que  $\varphi(a^*) = 0$  por lo que (iii) implica (ii).

Probamos ahora que (i) y (ii) implican (iii). Las hipótesis junto con

la ecuación (2.10) implican que

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= |\varphi(x) - \varphi(a^*)| = \frac{r^2|x - a^*|}{|x - a||a^* - a|} \\ &= \frac{r^2|x - a^*|}{|x - a|\left|\frac{a-a|a|^2}{|a|^2}\right|} = \frac{|a|^2 r^2|x - a^*|}{|a||1 - |a|^2||x - a|} \\ &= \frac{|a||x - a^*|}{|x - a|}. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$1 - |\varphi(x)|^2 = \frac{|x - a|^2 - |a|^2|x - a^*|^2}{|x - a|^2}. \quad (2.13)$$

El numerador de 2.13 está dado por

$$\begin{aligned} |x - a|^2 - |a|^2|x - a^*|^2 &= |x|^2 - 2(x \cdot a) + |a|^2 - |a|^2 \left[ \left(x - \frac{a}{|a|^2}\right) \cdot \left(x - \frac{a}{|a|^2}\right) \right] \\ &= |x|^2 - 2(x \cdot a) + |a|^2 - |a|^2|x|^2 + 2(x \cdot a) - 1 \\ &= |x|^2 - 1 + |a|^2(1 - |x|^2) = (1 - |x|^2)(|a|^2 - 1) \\ &= (1 - |x|^2)r^2, \end{aligned}$$

de donde

$$1 - |\varphi(x)|^2 = \frac{(1 - |x|^2)r^2}{|x - a|^2}.$$

Esto prueba que **(i)** y **(ii)** implican **(iii)**, ya que si  $|x| < 1$ , entonces  $|\varphi(x)| < 1$  y si  $|x| = 1$ , entonces  $|\varphi(x)| = 1$ .  $\square$

### 2.3. Forma general de las transformaciones de Möbius

En esta última sección establecemos un resultado que caracteriza a todas las transformaciones de Möbius, las que fijan  $\infty$ , las que no lo fijan, así como las que preservan la bola unitaria. Esta caracterización nos permitirá en el siguiente capítulo introducir la esfera isométrica para aquellas transformaciones que no fijan  $\infty$ .

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $\varphi$  una transformación de Möbius. Entonces,*

(i) *si  $\varphi(B^n) = B^n$ , se tiene*

$$\varphi(x) = A(\sigma x),$$

*donde  $\sigma$  es la reflexión en alguna esfera ortogonal a  $S^{n-1}$  y  $A$  es una matriz ortogonal,*

(ii) *si  $\varphi(\infty) = \infty$ , se tiene*

$$\varphi(x) = r(Ax) + x_0,$$

*donde  $r > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $A$  es ortogonal,*

(iii) *si  $\varphi(\infty) \neq \infty$ , se tiene*

$$\varphi(x) = rA(\sigma x) + x_0,$$

*donde  $A$  es una matriz ortogonal,  $r > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\sigma$  es la reflexión en alguna esfera de  $\mathbb{R}^n$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** (i) Supongamos que  $\varphi$  preserva  $B^n$  y sea  $\sigma$  la reflexión en  $S(a, r)$ , donde  $a = \varphi^{-1}(\infty)$  y  $|a|^2 = 1 + r^2$ . Por el Teorema 2.2.10  $S(a, r)$  y  $S^{n-1}$  son ortogonales y por lo tanto  $\sigma$  y  $\varphi\sigma$  preservan  $B^n$ . Además  $\sigma(0) = a^*$  por lo que  $\varphi(\sigma(0)) = \varphi(a^*) = 0$  (ya que  $\varphi(a) = \infty$  y  $\varphi$  preserva puntos inversos). Finalmente, como  $\varphi\sigma(0) = 0$  se tiene que  $\varphi\sigma(\infty) = \infty$  y en virtud del Teorema 2.2.9 se sigue que  $\varphi\sigma(x) = Ax$ , donde  $A$  es una matriz ortogonal. Como  $\sigma$  es una involución, se tiene que  $\varphi(x) = A(\sigma x)$ .

(ii) Si  $\varphi$  fija  $\infty$ ,  $\varphi$  manda la esfera unitaria en la esfera  $S(x_0, r)$ , por lo que al tomar

$$\psi : x \mapsto (x - x_0)/r,$$

la composición  $\psi\varphi$  preserva  $B^n$  y fija  $\infty$ . Más aun,  $\psi\varphi(0) = 0$ . Se sigue del Teorema 2.2.9 que  $\psi\varphi(x) = Ax$ , donde  $A$  es una matriz ortogonal. Por lo tanto  $\varphi(x) = \psi^{-1}(Ax) = r(Ax) + x_0$ .

(iii) Si  $\varphi(x_0) = \infty$  y  $\Sigma$  es cualquier esfera con centro en  $x_0$ . Tomando  $\sigma$  la reflexión en  $\Sigma$  se sigue que  $\varphi\sigma(\infty) = \varphi(x_0) = \infty$ . Se sigue entonces de (ii) que  $\varphi\sigma(x) = r(Ax) + x_0$ . Finalmente del hecho de que  $\sigma$  es una involución se sigue el resultado al reemplazar  $x$  por  $\sigma x$ .  $\square$

# Capítulo 3

## Círculos y esferas isométricas

### 3.1. Esfera isométrica

Sea  $\varphi$  una transformación de Möbius que no fija  $\infty$ , se sigue entonces de la tercera parte del Teorema 2.3.1 que

$$\varphi(x) = rA(\sigma x) + x_0,$$

donde  $\sigma$  es la reflexión en una esfera  $S(a, t)$ , donde  $a = \varphi^{-1}(\infty)$ .

Ahora, usando el Lema 2.2.7

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= r|\sigma(x) - \sigma(y)| \\ &= \frac{rt^2|x - y|}{|x - a| \cdot |y - a|}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por consiguiente,  $\varphi$  actúa como una isometría euclidiana en la esfera con ecuación  $|x - a| = t_1$ , donde  $t_1 = t\sqrt{r}$ . A esta esfera  $S(a, t_1)$  se le llama *esfera isométrica*. De hecho, si escribimos

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y - x|} = \frac{rt^2}{|x - a|^2} = \frac{t_1^2}{|x - a|^2}$$

por  $\mu_{\varphi(x)}$ , es decir el factor de conformalidad, se tiene usando (3.1) que:

$$\mu_{\varphi}(x) \begin{cases} > 1, & \text{si } x \in \text{int } S(a, t_1); \\ = 1, & \text{si } x \in S(a, t_1); \\ < 1, & \text{si } x \in \text{ext } S(a, t_1), \end{cases}$$

denotamos la esfera isométrica de  $\varphi$  por  $I(\varphi)$  o  $I_{\varphi}$ . Se sigue fácilmente de la regla de la cadena que  $\varphi(I_{\varphi}) = I_{\varphi^{-1}}$ ,  $\varphi(\text{int } I_{\varphi}) = \text{ext } I_{\varphi^{-1}}$  y por supuesto que  $\varphi(\text{ext } I_{\varphi}) = \text{int } I_{\varphi^{-1}}$ .

Nótese que si  $\sigma$  denota la reflexión en la esfera isométrica de  $\varphi$  entonces  $\varphi\sigma$  fija  $\infty$  y también actúa como una isometría euclidiana en la esfera isométrica. Se sigue entonces de la segunda parte del Teorema 2.3.1 que

$$\varphi\sigma(x) = r(Ax) + x_0,$$

donde  $r > 0$ ,  $A$  es una matriz ortogonal y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Ahora, si  $x, y \in I(\varphi\sigma)$ ,

$$|\varphi\sigma(x) - \varphi\sigma(y)| = r|Ax - Ay| = r|x - y|,$$

sin embargo como  $\varphi\sigma$  actúa euclidianamente en  $I(\varphi)$ ,  $r = 1$  y

$$\varphi\sigma(x) = Ax + x_0.$$

Por lo cual, usando el Teorema 2.1.2 se sigue que

$$\varphi(x) = \psi\sigma(x), \tag{3.2}$$

donde  $\sigma$  es la reflexión en la esfera isométrica y  $\psi$  es una isometría euclidiana. Es decir, *cualquier transformación de Möbius que no fija  $\infty$  se puede expresar como la composición de la reflexión en la esfera isométrica seguida de una isometría euclidiana.*

**Proposición 3.1.1.** *Sea  $\varphi$  una transformación de Möbius que no fija  $\infty$ , entonces la única esfera en donde esta transformación actúa euclidianamente es la esfera isométrica.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $\varphi$  actúa euclidianamente en otra esfera  $S(a, t)$ . Tomemos  $x \in S(a, t) - I(\varphi)$  y una sucesión de puntos  $x_n \in S(a, t)$  que convergen a  $x$ , se tiene que

$$\lim_{x_n \rightarrow x} \frac{|\varphi(x) - \varphi(x_n)|}{|x - x_n|} = 1,$$

lo cual contradice que  $x \notin I(\varphi)$ . Por consiguiente, la única esfera en donde  $\varphi$  actúa euclidianamente es  $I(\varphi)$ .  $\square$

En el caso en el que  $\varphi$  preserve  $B^n$ , la reflexión  $\sigma$  en el Teorema 2.3.1 (i) debe ser la reflexión en la esfera isométrica de  $\varphi$ , ya que  $\sigma$  y  $A$  actúan como isometrías euclidianas en esta esfera. Se concluye que, en este caso, *la esfera isométrica es ortogonal a  $S^{n-1}$ .*

## 3.2. Círculos isométricos

**Lema 3.2.1.** *La traslación  $T_b(z) = z + b$ ,  $b \in \mathbb{C}$ , es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a la traslación  $T_{x_0}(z) = z + x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que  $T_b T_{x_0} = T_{x_0} T_b$  y por lo tanto se tiene que  $T_{x_0} = T_b^{-1} T_{x_0} T_b$ .  $\square$

Para definir una recta en el plano complejo extendido usamos el producto punto en  $\mathbb{R}^2$ . Con este producto, los puntos de una recta en  $\widehat{\mathbb{R}^2}$  están determinados por la expresión

$$R(a, t) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z \cdot a = t, a \in \mathbb{R}^2 - \{0\}, t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

**Lema 3.2.2.** *La traslación  $z \rightarrow z + x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , se puede expresar como la composición de la reflexión en la recta  $R(e_1, m)$  seguida de la reflexión en la recta  $R(e_1, m + x_0/2)$ , donde  $e_1 = (1, 0)$  y  $m \in \mathbb{R}^+$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\sigma_1, \sigma_2$  estas reflexiones, respectivamente, y  $z = (x, y)$ . Se tiene que

$$\sigma_1(x, y) = (x, y) - 2(x - m)(1, 0) = (-x + 2m, y)$$

y

$$\sigma_2(x, y) = (x, y) - 2(x - m - x_0/2)(1, 0) = (-x + 2m + x_0, y).$$

Finalmente

$$\sigma_2 \sigma_1(x, y) = (-(-x + 2m) + 2m + x_0, y) = (x + x_0, y).$$

$\square$

**Lema 3.2.3.** *La rotación  $z \rightarrow e^{i\theta} z$  es la composición de la reflexión en la recta  $L_1$  que pasa por el origen y por  $e^{i\alpha}$ , seguida de la reflexión en la recta  $L_2$  que pasa por el origen y por  $e^{i(\alpha+\theta/2)}$ , donde  $\alpha$  es cualquier real.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  las reflexiones en dichas rectas y  $a_1 = ie^{i\alpha}$  un vector normal a  $L_1$ . Si  $z = x + iy$  y  $a_1 = a + ib$ , un cálculo sencillo muestra que  $z \cdot a_1 = \operatorname{Re}(z \bar{a}_1)$  y de esta manera se tiene que  $\sigma_1(z) = z - 2\operatorname{Re}(z \bar{a}_1)a_1$ , lo que quiere decir que  $\sigma_1(z) = z - (z \bar{a}_1 + \bar{z} a_1)a_1 = -a_1^2 \bar{z}$ . Análogamente, si  $a_2 = ie^{i(\alpha+\theta/2)}$  es un vector normal a  $L_2$ , entonces  $\sigma_2(z) = -a_2^2 \bar{z}$ .

Por lo tanto  $\sigma_2 \sigma_1(z) = -a_2^2 \overline{-a_1^2 \bar{z}} = e^{i(\theta+2\alpha)} e^{i(-2\alpha)} z = e^{i\theta} z$ .  $\square$

Dado  $u \in \mathbb{C}, u \neq 0$ , denotaremos por  $u^*$  a  $u/|u|^2$  y al círculo con centro en  $a$  y radio  $r$  por

$$C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}.$$



**Lema 3.2.4.** *Dada  $m \in \mathbb{R}^+$ , la homotecia  $z \rightarrow kz$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ , se puede expresar como la composición de la reflexión en  $C(0, m)$ , seguida de la reflexión en  $C(0, m + t)$ . Esto se cumple si  $m + t = \sqrt{k}m$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  estas reflexiones. Entonces  $\sigma_1(z) = m^2 z^*$ ,  $\sigma_2(z) = (m + t)^2 z^*$ , y por lo tanto se tiene que

$$\sigma_2 \sigma_1(z) = (m + t)^2 (m^2 z^*)^* = \left( \frac{m + t}{m} \right)^2 z = kz.$$

Por continuidad, existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $m + t > 0$  y  $\frac{m + t}{m} = \sqrt{k}$ .  $\square$

La siguiente definición es la misma que se estableció en la primera sección, sin embargo es conveniente adaptarla a la notación compleja.

**Definición 19.** *Sea*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad c \neq 0,$$

*una transformación en  $PSL(2, \mathbb{C})$ , se define el círculo isométrico de  $T$ , denotado por  $I(T)$ , o  $I_T$ , como*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |T'(z)| = 1\}.$$

Como  $T'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}$ , se tiene que

$$I(T) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \left( \frac{-d}{c} \right) \right| = \frac{1}{|c|} \right\}.$$

De la misma manera que en el caso general, si  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  no fija  $\infty$ , entonces  $T$  actúa euclidianamente en  $I(T)$ , y además, es el único círculo donde lo hace.

**Teorema 3.2.5.** *Sea  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $T$  no fija  $\infty$ . Supóngase también que  $T$  no es loxodrómica y que tampoco es elíptica de orden 2, entonces  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  se intersecan en dos puntos, son tangentes o son ajenos, dependiendo si  $T$  es elíptica, parabólica o hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los siguientes casos.

*Caso 1:  $T$  es elíptica.*

Sea  $T$  elíptica con puntos fijos  $\alpha$  y  $\beta$ , y  $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $\varphi(\alpha) = 0$  y  $\varphi(\beta) = \infty$ . Se sigue entonces que  $S = \varphi T \varphi^{-1}$  es una rotación.

En la familia de “círculos” ortogonales a los “círculos” fijos para  $T$  (cf. [4], pp. 23-30), uno de ellos es una recta, que denotamos por  $L_2$ . Ahora, usando el Lema 3.2.3 existe una recta que pasa por el origen, que denotamos por  $M_1$ , de tal manera que si  $\psi_1$  es la reflexión en  $M_1$  y  $\psi_2$  es la reflexión en  $\varphi(L_2)$ , que denotamos por  $M_2$ , entonces  $S = \psi_2 \psi_1$ . Nótese que como  $S$  no es de orden 2,  $M_1$  es distinta de  $M_2$ . Por consiguiente

$$T = \varphi^{-1} \psi_2 \psi_1 \varphi = \varphi^{-1} \psi_2 \varphi \varphi^{-1} \psi_1 \varphi.$$

Resulta que  $\varphi^{-1} \psi_2 \varphi$  es la reflexión en  $L_2$ , ya que se tiene que

$$\varphi^{-1} \psi_2 \varphi(L_2) = \varphi^{-1} \psi_2(M_2) = \varphi^{-1}(M_2) = L_2$$

y no es la identidad (cf. [4], p. 71). También, por el mismo razonamiento,  $\varphi^{-1} \psi_1 \varphi$  es la reflexión en  $\varphi^{-1}(M_1)$ , que denotamos por  $L_1$ , y es otro “círculo” ortogonal a un “círculo” fijo para  $T$ .

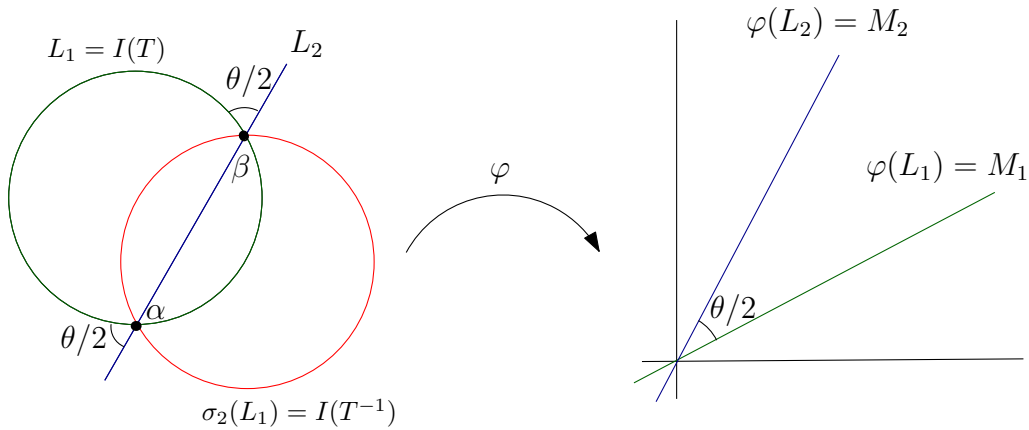


Figura 3.1: Círculos isométricos de una transformación elíptica

Como  $\varphi^{-1} \psi_2 \varphi$  es una isometría euclidiana, ya que es la reflexión en una recta, se sigue que  $T$  actúa euclidianamente en  $L_1$ , por lo cual  $L_1$  es el círculo isométrico de  $T$ . Finalmente, si  $\sigma_1 = \varphi^{-1} \psi_1 \varphi$  y  $\sigma_2 = \varphi^{-1} \psi_2 \varphi$ , se tiene que

$$T^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2(\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2).$$

Nótese que  $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$  es la reflexión en  $\sigma_2(L_1)$ , por lo cual  $T^{-1}$  actúa euclidianamente en  $\sigma_2(L_1)$ , y así  $\sigma_2(L_1)$  es el círculo isométrico de  $T^{-1}$ . Esto prueba que  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  se intersecan precisamente en  $\alpha$  y  $\beta$  (véase la Figura 3.1).

*Caso 2:  $T$  es parabólica.*

Sea  $T$  parabólica con punto fijo  $\alpha$  y  $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $\varphi(\alpha) = \infty$ . Se sigue entonces que  $S = \varphi T \varphi^{-1}$  es una traslación, más aún, usando el Lema 3.2.1 podemos suponer que  $S(z) = z + x_0$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

En la familia de “círculos” ortogonales a los “círculos” fijos para  $T$ , uno de ellos es una recta, que denotamos por  $L_2$ . Ahora, usando el Lema 3.2.2, existe una recta vertical, que denotamos por  $M_1$ , de tal manera que si  $\psi_1$  es la reflexión en  $M_1$  y  $\psi_2$  es la reflexión en  $\varphi(L_2)$ , que denotamos por  $M_2$ , entonces  $S = \psi_2\psi_1$ . Por consiguiente

$$T = \varphi^{-1}\psi_2\psi_1\varphi = \varphi^{-1}\psi_2\varphi\varphi^{-1}\psi_1\varphi.$$

De nuevo  $\varphi^{-1}\psi_2\varphi$  es la reflexión en  $L_2$ , por el mismo argumento del caso elíptico. Asimismo  $\varphi^{-1}\psi_1\varphi$  es la reflexión en  $\varphi^{-1}(M_1)$ , que denotamos por  $L_1$ , que es otro “círculo” ortogonal a un “círculo” fijo para  $T$ . Se sigue entonces que como  $\varphi^{-1}\psi_2\varphi$  es una isometría euclidiana, ya que es la reflexión en una recta,  $T$  actúa euclidianamente en  $L_1$ , por lo cual  $L_1$  es el círculo isométrico de  $T$ .

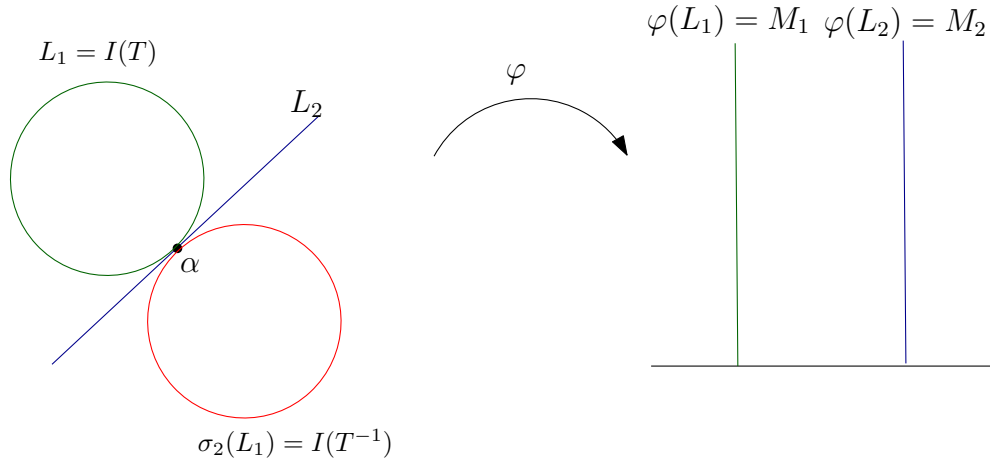


Figura 3.2: Círculos isométricos de una transformación parabólica

Finalmente, si  $\sigma_1 = \varphi^{-1}\psi_1\varphi$  y  $\sigma_2 = \varphi^{-1}\psi_2\varphi$ , se tiene que

$$T^{-1} = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2(\sigma_2\sigma_1\sigma_2).$$

Por el mismo argumento del caso elíptico se tiene que  $T^{-1}$  actúa euclidianamente en  $\sigma_2(L_1)$ , así  $\sigma_2(L_1)$  es el círculo isométrico de  $T^{-1}$ . Esto prueba que

$I(T)$  y  $I(T^{-1})$  son tangentes en  $\alpha$  (véase la Figura 3.2).

*Caso 3:  $T$  es hiperbólica.*

Sea  $T$  hiperbólica con puntos fijos  $\alpha$  y  $\beta$ , y  $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $\varphi(\alpha) = 0$  y  $\varphi(\beta) = \infty$ . Se sigue entonces que  $S = \varphi T \varphi^{-1}$  es una homotecia.

En la familia de “círculos” ortogonales a los “círculos” fijos para  $T$ , uno de ellos es una recta, que denotamos por  $L_2$ . Ahora, usando el Lema 3.2.4, existe un círculo con centro en el origen, que denotamos por  $M_1$ , de tal manera que si  $\psi_1$  es la reflexión en  $M_1$  y  $\psi_2$  es la reflexión en  $\varphi(L_2)$ , que denotamos por  $M_2$ , entonces  $S = \psi_2 \psi_1$ . Por consiguiente

$$T = \varphi^{-1} \psi_2 \psi_1 \varphi = \varphi^{-1} \psi_2 \varphi \varphi^{-1} \psi_1 \varphi.$$

De nuevo, por el mismo argumento de los casos anteriores,  $\varphi^{-1} \psi_2 \varphi$  es la reflexión en  $L_2$ . Asimismo  $\varphi^{-1} \psi_1 \varphi$  es la reflexión en  $\varphi^{-1}(M_1)$ , que denotamos por  $L_1$ , que es otro “círculo” ortogonal a un “círculo” para  $T$ . Como  $\varphi^{-1} \psi_2 \varphi$  es una isometría euclidiana, ya que es la reflexión en una recta, se sigue que  $T$  actúa euclidianamente en  $L_1$ , por lo cual  $L_1$  es el círculo isométrico de  $T$ .

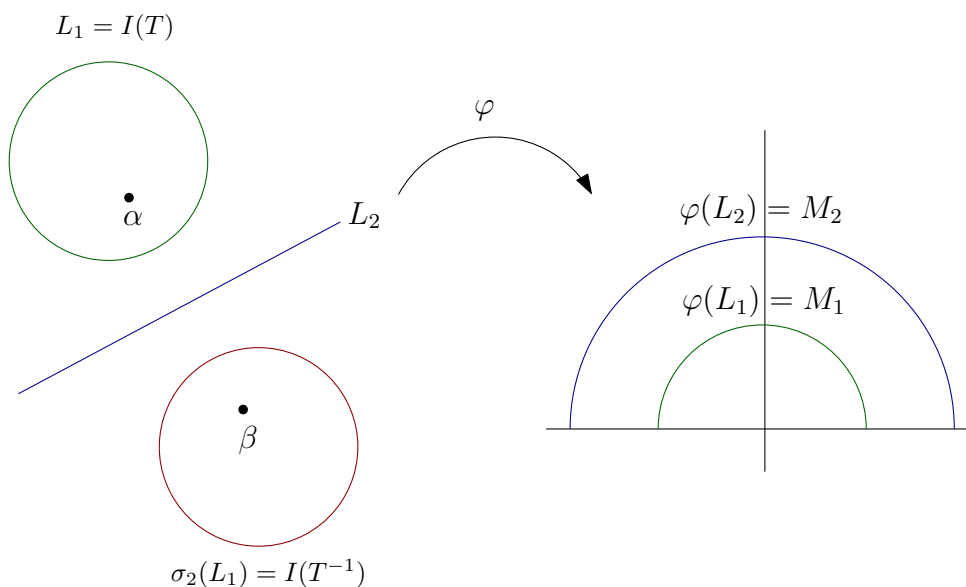


Figura 3.3: Círculos isométricos de una transformación hiperbólica

Finalmente, si  $\sigma_1 = \varphi^{-1} \psi_1 \varphi$  y  $\sigma_2 = \varphi^{-1} \psi_2 \varphi$ , se tiene que

$$T^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 (\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2).$$

Por el mismo argumento de los casos anteriores se tiene que  $T^{-1}$  actúa euclidianamente en  $\sigma_2(L_1)$ , por lo cual  $\sigma_2(L_1)$  es el círculo isométrico de  $T^{-1}$ . Esto prueba que  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  son ajenos (véase la Figura 3.3).  $\square$

Se exhibe ahora una segunda prueba más rápida, sin embargo menos geométrica de este hecho, que también incluye el caso loxodrómico y elíptico de orden 2. Nótese que de la definición de  $I(T)$  se puede ver que

$$I(T^{-1}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \left( \frac{a}{c} \right) \right| = \frac{1}{|c|} \right\}.$$

Además, esto permite observar que  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  tienen el mismo radio que es  $1/|c|$ . Denotaremos por  $\chi(T)$  a la traza de  $T$ .

En el caso en el que  $T$  es parabólica,  $\chi(T) = \pm 2$ , esto quiere decir que

$$|a + d| = 2 \iff \left| \frac{a}{c} - \left( \frac{-d}{c} \right) \right| = \frac{2}{|c|},$$

es decir que la distancia entre los centros de  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  es exactamente la suma de sus radios, por lo tanto  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  son tangentes (véase la Figura 3.4).

Si  $T$  es elíptica y no es de orden 2,  $\chi(T) \in (-2, 2) - \{0\}$ , o sea que

$$|a + d| < 2 \iff \left| \frac{a}{c} - \left( \frac{-d}{c} \right) \right| < \frac{2}{|c|},$$

es decir que la distancia entre los centros de  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  es menor que la suma de sus radios pero no es cero, por lo tanto  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  se intersecan en dos puntos (véase la Figura 3.5).

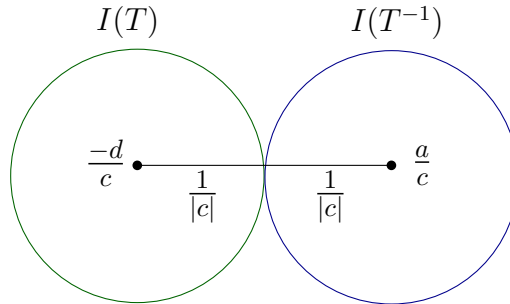


Figura 3.4: Caso parabólico

Si  $T$  es hiperbólica,  $\chi(T) \in (2, \infty) \cup (-\infty, -2)$ , entonces se tiene que

$$|a + d| > 2 \iff \left| \frac{a}{c} - \left( \frac{-d}{c} \right) \right| > \frac{2}{|c|},$$

es decir que la distancia entre los centros de  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  es mayor que la suma de sus radios, por lo tanto  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  son ajenos (véase la Figura 3.6).

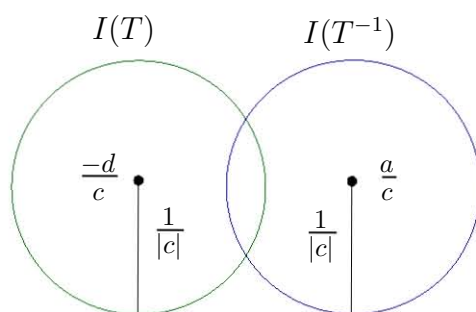


Figura 3.5: Caso elíptico

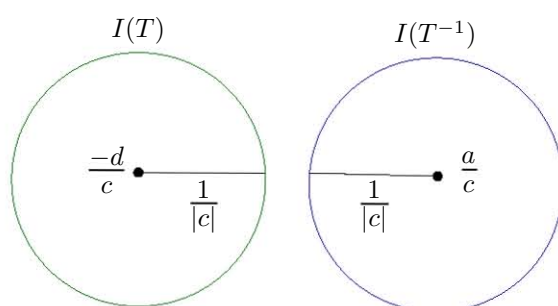


Figura 3.6: Caso hiperbólico

**Teorema 3.2.6.** *Si  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  es elíptica de orden 2, entonces  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  son iguales. Si  $T$  es loxodrómica  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  se intersectan en dos puntos, son tangentes o son ajenos, dependiendo si  $|\chi(T)|$  es menor que 2, igual a 2 o mayor a 2, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Si  $T$  es elíptica de orden 2, entonces  $T$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a  $S(z) = e^{i\theta}z$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Como también  $S$  es de orden 2, necesariamente  $e^{2i\theta} = 1$  y  $\theta = \pi$ , y la traza de

$$S = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

es cero. Por lo cual

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

y  $I(T) = I(T^{-1})$ .

En el caso loxodrómico, si

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

se sigue que la distancia entre los centros de los círculos isométricos está dada por

$$\left| \frac{-d}{c} - \left( \frac{a}{c} \right) \right| = \left| \frac{\chi(T)}{c} \right|.$$

Finalmente, como los radios de  $I(T)$  y  $I(T^{-1})$  son  $1/|c|$ , se sigue que estos se intersecan, son tangentes o son ajenos, si  $|\chi(T)| < 2$ ,  $|\chi(T)| = 2$ , o  $|\chi(T)| > 2$ .  $\square$

**Definición 20.** *Dados  $z, w$  en el plano hiperbólico  $\Delta(oH^2)$ , se define el bisector perpendicular, o mediatriz hiperbólica, al segmento de geodésica  $[z, w]$ , como la única geodésica ortogonal a  $[z, w]$  que pasa por el punto medio hiperbólico entre  $z$  y  $w$ .*

Se puede probar que dados  $z, w \in \Delta(oH^2)$  distintos, el bisector perpendicular al segmento  $[z, w]$  consiste en los puntos de  $\Delta(oH^2)$  que equidistan hiperbólicamente de  $z$  y  $w$ , es decir,

$$\{u \in \mathbb{P} \mid \rho(u, z) = \rho(u, w)\},$$

$\mathbb{P} = \Delta o H^2$ , (cf. [4], p. 136).

**Teorema 3.2.7.** *Dada  $g$  una isometría del plano hiperbólico  $\Delta$  y  $I_g$  su círculo isométrico, entonces*

$$I_g = \{z \in \Delta \mid \rho(z, 0) = \rho(z, g^{-1}(0))\},$$

*es decir el círculo isométrico es el bisector perpendicular hiperbólico de  $0$  y  $g^{-1}(0)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Probamos primero el caso en que  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ . De acuerdo a la prueba del Teorema 3.2.5, se puede expresar a esta isometría como  $g = \sigma_2 \sigma_1$ , donde  $\sigma_j$  es la reflexión en una geodésica  $L_j$ ,  $j = 1, 2$ . Se probó que se puede tomar  $L_2$  de tal manera que pase por el origen, por lo que  $\sigma_2$  es una isometría euclidiana (ya que es la reflexión en una recta). Se deduce de la Proposición 3.1.1 que  $I_g = L_1$ , ya que  $g$  actúa euclidianamente

en  $L_1$ .

Se sigue entonces que

$$\sigma_1(0) = \sigma_1\sigma_2(0) = g^{-1}(0),$$

y como  $\sigma_1$  es una isometría hiperbólica, al tomar  $z \in L_1$  se tiene

$$\rho(z, 0) = \rho(\sigma_1(z), \sigma_1(0)) = \rho(z, g^{-1}(0)),$$

por lo que  $I_g$  es el bisector perpendicular hiperbólico de 0 y  $g^{-1}(0)$ .

En el caso en el que  $g \notin PSL(2, \mathbb{C})$ , por la primera parte del Teorema 2.3.1,  $g$  se puede expresar de la forma  $g = A(\sigma x)$ , donde  $A$  es una matriz ortogonal y  $\sigma$  es la reflexión en un círculo  $C(a, r)$  ortogonal a  $\partial\Delta$ . Deducimos de la Proposición 3.1.1 que  $I_g = C(a, r)$ , ya que  $g$  actúa euclidianamente en este círculo.

Se sigue entonces que

$$\sigma(0) = \sigma \circ A^{-1}(0) = g^{-1}(0),$$

y como  $\sigma$  es una isometría hiperbólica, al tomar  $z \in C(a, r)$  se tiene

$$\rho(z, 0) = \rho(\sigma(z), \sigma(0)) = \rho(z, g^{-1}(0)),$$

por lo que  $I_g$  es el bisector perpendicular hiperbólico de 0 y  $g^{-1}(0)$ .  $\square$

Nótese que la prueba del segundo caso es más general y de hecho abarca ambos casos. Se incluye la primera prueba ya que por su naturaleza geométrica es más ilustrativa.

A continuación generalizamos el concepto de círculo isométrico. Dado  $w$  en el plano hiperbólico  $\Delta$  o en el círculo al infinito  $\partial\Delta$ , supongamos que  $g(w) \neq w$ . Se puede escribir  $g = \sigma_2\sigma_1$ , donde  $w \in L_2$ . Se define a  $L_1$  como el  $w$ -círculo isométrico de  $g$  y lo denotamos por  $I_g(w)$ . Nótese que este círculo es único. Además, este círculo es invariante bajo conjugación, es decir,

$$I_{hgh^{-1}}(h(w)) = I_g(w),$$

puesto que

$$hgh^{-1}(h(w)) = h\sigma_2h^{-1}h\sigma_1h^{-1}(h(w)),$$

donde  $h\sigma_ih^{-1}$  es la reflexión en  $h(L_i)$ ,  $i = 1, 2$ , y  $h(w) \in h(L_2)$ . De esta manera el caso  $w = 0$  representa el círculo isométrico. Nótese que  $g$  actúa de forma simétrica en  $\partial\Delta$ , por lo que  $w$  puede ser cualquier punto del plano complejo extendido, y entonces

$$I_g(w) = I_g(1/\bar{w}),$$



esto se sigue del Lema 2.2.6, puesto que al ser  $L_2$  ortogonal a  $\partial\Delta$ ,  $L_2$  pasa por  $w$  si y sólo si pasa por  $1/\bar{w}$ .

En particular,

$$I_g(0) = I_g(\infty).$$

Este último hecho se entenderá con más precisión en el siguiente capítulo.

# Capítulo 4

## Polígono de Dirichlet Generalizado

Dado un subgrupo  $\Gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , la acción de  $\Gamma$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  induce una partición que consiste en las órbitas.

**Definición 21.** Sea  $\Gamma$  un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  actuando en un subdominio  $A$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , un conjunto fundamental  $F$  para la acción de  $\Gamma$  en  $A$  es cualquier conjunto que contiene uno y sólo un elemento en  $A$  por cada órbita, es decir,

1. si  $z_1, z_2 \in F$ , no existe  $T \in \Gamma$ , tal que  $T(z_1) = z_2$ ;
2.  $\forall z \in A$  existe  $T \in \Gamma$ , tal que  $T(z) \in F$ .

Un conjunto fundamental no puede ser abierto ya que no puede tener puntos equivalentes a puntos de su frontera, lo cual motiva a la siguiente definición para el caso del plano hiperbólico  $H^2$  o  $\Delta$ , que denotamos por  $\mathbb{P}$ .

**Definición 22.** Sea  $\Gamma$  un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , se dice que una región  $R$  es un dominio fundamental en  $H^2$  para  $\Gamma$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

1. cualesquiera dos puntos  $z_1, z_2 \in R$  no son  $\Gamma$  - equivalentes;
2. dado  $w \in H^2$ , existe  $z \in \tilde{R}$  y  $T \in \Gamma$ , tal que  $T(z) = w$ , donde  $\tilde{R}$  denota la cerradura de  $R$  en  $H^2$ ;
3.  $\partial R$  tiene medida bidimensional de Lebesgue cero.

De manera análoga se define para subgrupos que presevan  $\Delta$ .

## 4.1. Polígono de Dirichlet

Sea  $G$  un grupo discontinuo actuando sobre  $\mathbb{P}$  y sea  $w$  cualquier punto de  $\mathbb{P}$  que no es punto fijo de  $G - \{Id\}$ . Para cada  $g \in G - \{Id\}$  se define

$$b_g(w) = \{z \in \mathbb{P} \mid \rho(z, w) = \rho(z, g(w))\}$$

y

$$A_g(w) = \{z \in \mathbb{P} \mid \rho(z, w) < \rho(z, g(w))\}.$$

Nótese que  $b_g(w)$  es una geodésica que no contiene a  $w$  y que  $A_g(w)$  es el semiplano que contiene a  $w$  y está delimitado por  $b_g(w)$ .

**Definición 23.** Sean  $G$ ,  $w$  y  $A_g(w)$  como arriba. El polígono de Dirichlet  $D_G(w)$  para  $G$  con centro  $w$  se define como

$$D_G(w) = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} A_g(w).$$

Si  $h$  es cualquier isometría del plano hiperbólico, no es difícil probar que

$$h(A_g(w)) = A_{hgh^{-1}}(h(w))$$

y consecuentemente

$$h(D_G(w)) = D_{hGh^{-1}}(h(w)),$$

en particular, si  $h \in G$ ,

$$h(D_G(w)) = D_G(h(w)).$$

Este polígono resulta ser una región fundamental para  $G$  (cf. [2], pp. 227, 228).

## 4.2. Polígono de Dirichlet Generalizado

Sea  $G$  un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  que actúa discontinuamente en un conjunto abierto  $G$ -invariante  $\Sigma$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Supongamos que  $\infty \in \Sigma$  y que  $g(\infty) \neq \infty$  para toda  $g \in G - \{Id\}$ . Estas hipótesis aseguran la existencia del círculo isométrico  $I_g$  para  $g \in G - \{Id\}$ . Sea  $H_g = ext I_g$ .

**Definición 24.** Se define la región fundamental de Ford como

$$F_G = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} H_g. \quad (4.1)$$

En un sentido estricto, se debería decir *abierto* fundamental de Ford, ya que éste puede no ser conexo. Se puede probar que  $F_G$  es esencialmente una región (o abierto fundamental) para la acción de  $G$ . Más precisamente, el abierto fundamental es  $ext(\cup D_g)$ , donde  $D_g = int I_g$ . La sutileza consiste en que la igualdad

$$ext(\cup D_g) = \cap ext D_g$$

se cumple solamente en el conjunto ordinario, por lo que puede ser necesario quitar algunos puntos frontera (cf. [5], capítulo 4 y con más detalle [6], capítulo 3).

Volviendo al caso fuchsiano, sea  $G$  un grupo actuando sobre  $\Delta$  tal que  $\infty$  no es punto fijo de  $G$  (y por lo tanto el origen tampoco lo es, véase el Teorema 2.2.4). Se pueden construir  $F_G$  y  $D_G(0)$ , se probará que  $\Delta \cap F_G = D_G(0)$ .

Esto identifica a dos conjuntos, uno de tipo euclidiano y el otro de tipo hiperbólico. Además el primero no es invariante bajo conjugación mientras que el segundo sí lo es. La última observación se puede entender con el siguiente ejemplo.

Sean

$$g(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{y} \quad h(z) = \frac{3z+4}{2z+3},$$

claramente  $I_g$  es el círculo unitario  $\partial\Delta$ . Ahora, la transformación  $hgh^{-1}$  está determinada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 25 \\ -13 & 18 \end{pmatrix},$$

y

$$I_{hgh^{-1}} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z + \frac{18}{13} \right| = \frac{1}{13} \right\},$$

sin embargo  $h$  transforma  $I_g$  en el círculo que pasa por  $7/5$  y  $1 = 5/5$ , por lo que  $h(I_g) \neq I_{hgh^{-1}}$ .

Las dos construcciones (Dirichlet y Ford), aparentemente distintas, son dos casos de una construcción única que se describe a continuación. Sea  $\mathbb{P}$  un modelo del plano hiperbólico, usaremos a  $\Delta$  o  $H^2$  indistintamente, y  $\partial\mathbb{P}$  denotará el círculo al infinito, es decir  $\partial\Delta$  o  $\widehat{\mathbb{R}}$  y  $G$  un grupo fuchsiano actuando en  $\mathbb{P}$ . Se puede tomar  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  arbitrario tal que no es punto fijo de ningún elemento no trivial de  $G$ . Ahora  $\forall g \in G - \{Id\}$  existen geodésicas  $L_1$  y  $L_2$  tales que  $w \in L_2$  y  $g = \sigma_2\sigma_1$ , donde  $\sigma_i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  es la reflexión en  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ . La justificación de este hecho se deriva fácilmente de los Lemas

3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4. Esto determina de manera única a  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $L_1$  y  $L_2$ , las cuales se denotarán por  $\sigma_g$ ,  $\sigma_g^*$ ,  $L_g$  y  $L_g^*$ , respectivamente. Por lo cual

$$g = \sigma_g^* \sigma_g.$$

Por definición  $w \in L_g^*$  y esto implica que  $w \notin L_g$ , ya que de otra manera  $\sigma_g$  y  $\sigma_g^*$  fijarían a  $w$ , y se tendría que  $g(w) = w$ . Con esta observación se puede notar que  $L_g$  divide a  $\mathbb{P}$  en dos semiplanos: el que contiene a  $w$ , que denotamos por  $H_g$ , y su complemento  $K_g = \mathbb{P} - \widetilde{H}_g$  (véanse las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3).

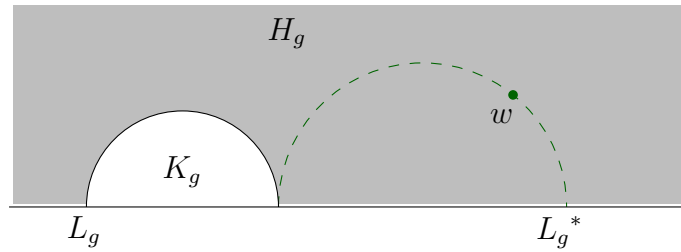


Figura 4.1: Caso parabólico para  $\mathbb{P} = H^2$

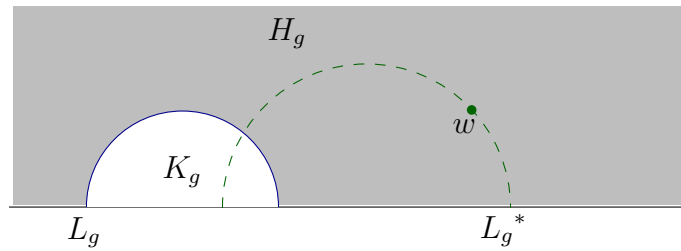


Figura 4.2: Caso elíptico para  $\mathbb{P} = H^2$

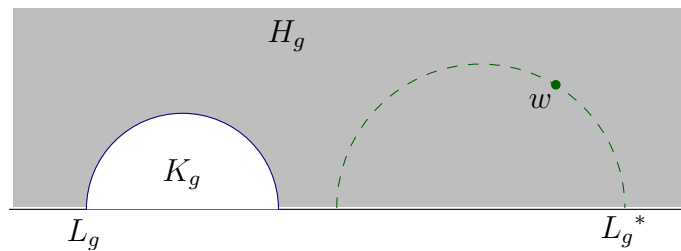


Figura 4.3: Caso hiperbólico para  $\mathbb{P} = H^2$

**Definición 25.** Sea  $G$  un grupo fuchsiano actuando sobre  $\mathbb{P}$  y  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  tal que  $g(w) \neq w$  para toda  $g \in G - \{Id\}$ . Entonces a

$$\Pi_G(w) = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} H_g$$

se le llama el polígono de Dirichlet generalizado con centro en  $w$ .

Nótese que, por el Teorema 2.2.6, si  $\phi$  denota la reflexión en  $\mathbb{P}$ , entonces como  $L_g^*$  (extendido) es ortogonal a  $\partial\mathbb{P}$ , se tiene que  $w \in L_g^*$  si y sólo si  $\phi(w) \in L_g^*$ . Por lo tanto, se cumple

$$\Pi_G(w) = \Pi_G(\phi(w)). \quad (4.2)$$

En particular, si  $\mathbb{P} = \Delta$ , entonces

$$\Pi_G(\infty) = \Pi_G(0). \quad (4.3)$$

**Lema 4.2.1.** Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  actuando en el plano hiperbólico  $\mathbb{P}$  y  $R$  una región fundamental para  $G$  en  $\mathbb{P}$ , donde  $\mathbb{P} = \Delta$  o  $H^2$ . Supóngase también que  $h$  es la función de Cayley (o su inversa), o una isometría hiperbólica de  $\Delta$ , o de  $H^2$ , entonces  $h(R)$  es una región fundamental para la acción de  $hGh^{-1}$  en  $h(\mathbb{P})$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Denotemos por  $G'$  a  $hGh^{-1}$  y supongamos que existen  $h(z)$  y  $h(w)$   $G'$ -equivalentes en  $h(R)$ , entonces existe  $hgh^{-1} \in G'$  tal que  $hgh^{-1}(h(z)) = h(w)$ . Esto implica que  $g(z) = w$ , por lo cual  $z = w$ , ya que  $R$  es una región fundamental. Como consecuencia de esto, no existen puntos  $G'$ -equivalentes en  $h(R)$ .

Ahora, dado  $h(w) \in h(\mathbb{P})$ , existen  $z \in \widetilde{R}$  y  $g \in G$  tales que  $g(z) = w$ , así que  $hgh^{-1}(h(z)) = h(w)$ , por lo tanto existen  $hgh^{-1} \in G'$  y  $h(z) \in h(\widetilde{R})$  tales que  $hgh^{-1}(h(z)) = h(w)$ , además  $h(\widetilde{R}) = \widetilde{h(R)}$ .

Finalmente, como  $\partial R$  tiene medida de Lebesgue cero,  $h(\partial R) = \partial h(R)$  tiene medida de Lebesgue cero.  $\square$

**Lema 4.2.2.** Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  fuchsiano actuando en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , y  $\infty \in \mathcal{O}(G)$ . Dada una sucesión  $\{g_n\}$  de elementos distintos en  $G - \{Id\}$ , donde

$$g_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}, \quad a_n d_n - b_n c_n = 1,$$

entonces  $|c_n| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que no se cumple  $|c_n| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces se puede encontrar una subsucesión  $\{c_{n_k}\}$  tal que  $c_{n_k} \rightarrow \gamma \in \mathbb{C}$ . Como  $\infty \in \mathbb{O}(G)$ , entonces las sucesiones

$$g_{n_k}(\infty) = \frac{a_{n_k}}{c_{n_k}}, \quad g_{n_k}^{-1}(\infty) = \frac{-d_{n_k}}{c_{n_k}}, \quad g_{n_k}(0) = \frac{b_{n_k}}{d_{n_k}}, \quad g_{n_k}^{-1}(0) = \frac{-b_{n_k}}{a_{n_k}}$$

están acotadas. Nótese que se puede suponer que  $\{a_{n_k}\}$  y  $\{c_{n_k}\}$  son distintas de cero, ya que como  $\infty$  es ordinario, el valor  $\infty$  es tomado un número finito de veces.

Se pueden tomar entonces subsucesiones convergentes  $\{g_{n_j}\}$  (renombrando si es necesario) tales que  $\{g_{n_j}(\infty)\}$ ,  $\{g_{n_j}^{-1}(\infty)\}$ ,  $\{g_{n_j}(0)\}$  y  $\{g_{n_j}^{-1}(0)\}$  sean convergentes, además como la sucesión  $\{c_{n_j}\}$  y la sucesión  $\{a_{n_j}/c_{n_j}\}$  son convergentes, su producto es convergente, por lo que existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $a_{n_j} \rightarrow \alpha$ .

Este mismo argumento nos indica que podemos encontrar  $\beta, \delta \in \mathbb{C}$  tales que  $b_{n_j} \rightarrow \beta$  y  $d_{k_j} \rightarrow \delta$ , por lo que la sucesión de matrices distintas

$$\begin{pmatrix} a_{k_j} & b_{k_j} \\ c_{k_j} & d_{k_j} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

lo cual implica que  $G$  no es discreto y por lo tanto no es discontinuo (cf. [4], p. 102).  $\square$

**Corolario 4.2.3.** *Sea  $G$  como en el Lema 4.2.2, entonces los radios de los círculos isométricos tienden a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de manera inmediata del Lema 4.2.2 ya que los radios de los círculos isométricos están dados por  $1/|c|$ , si

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

$\square$

**Corolario 4.2.4.** *Sea  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  fuchsiano actuando en  $\mathbb{P} = \Delta$  o  $H^2$  y  $K \subset \mathbb{P}$  compacto, entonces  $K$  interseca solamente un número finito de círculos isométricos  $I_g$ , donde  $g \in G - \{Id\}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $\mathbb{P} = H^2$ , como los subconjuntos compactos de los espacios métricos son acotados, existe un número  $r > 0$  tal que  $K$  está totalmente contenido en el disco hiperbólico  $D_h(i, r)$ , y solamente un número finito de círculos isométricos intersecan a  $D_h(i, r)$ , ya que dada  $\epsilon > 0$  solamente un número finito de círculos isométricos tienen radio mayor a  $\epsilon$ .

El caso  $\mathbb{P} = \Delta$  es similar, se puede tomar el compacto  $K$  como  $D_h(0, \rho)$ , que es igual a un disco euclidiano de la forma  $D_E(0, r)$ , como los centros de los círculos isométricos están en el exterior de  $\Delta$  (cf. Teorema 2.2.10), se sigue el argumento.  $\square$

**Teorema 4.2.5.** *Sea  $G$  un grupo fuchsiano actuando sobre  $\mathbb{P}$  y  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  un punto ordinario de  $G$ , tal que  $g(w) \neq w$  para toda  $g \in G - \{Id\}$ . Entonces*

- (i)  $\Pi_G(w)$  es una región fundamental para  $G$  en  $\mathbb{P}$ ,
- (ii) si  $w \in \mathbb{P}$ , entonces  $\Pi_G(w)$  es el polígono de Dirichlet con centro en  $w$ . Si  $w = \infty$ , entonces  $\Pi_G(w)$  es la región exterior a los círculos isométricos de todos los elementos de  $G - \{Id\}$ ,
- (iii) finalmente, si  $h$  es la función de Cayley (o su inversa), o una isometría de  $\Delta$ , o de  $H^2$ , o una composición de éstas, se tiene

$$h(\Pi_G(w)) = \Pi_{hGh^{-1}}(h(w)). \quad (4.4)$$

Nótese que se usa  $\mathbb{P}$  en lugar de  $\Delta$  o  $H^2$  para tratar adecuadamente al punto  $\infty$ . Esto se debe a que si  $\mathbb{P} = H^2$ ,  $\infty \in \partial\mathbb{P}$ , pero si  $\mathbb{P} = \Delta$ ,  $\infty \notin \partial\mathbb{P}$ .

DEMOSTRACIÓN. Se prueba primero la igualdad (4.4) en **(iii)**. Nótese que en virtud del Teorema 2.2.2, si  $\sigma_g$  es la reflexión en  $L_g$ ,  $h\sigma_g h^{-1}$  es la reflexión en  $h(L_g)$ , análogamente  $h\sigma_g^* h^{-1}$  es la reflexión en  $h(L_g^*)$ . Ahora, como  $g = \sigma_g^* \sigma_g$ , se tiene que  $hgh^{-1} = (h\sigma_g^* h^{-1})(h\sigma_g h^{-1}) = \sigma_{hgh^{-1}}^* \sigma_{hgh^{-1}}$ , por lo cual  $h(H_g) = H_{hgh^{-1}}$ . Esto se sigue ya que, como  $w \in H_g$ ,  $h(w) \in h(H_g)$ , y también  $w \in L_g^*$ , por lo que  $h(w) \in h(L_g^*) = L_{hgh^{-1}}^*$ .

Por consiguiente

$$\begin{aligned} h(\Pi_G(w)) &= h\left(\bigcap_{g \in G, g \neq Id} H_g\right) \\ &= \bigcap_{g \in G, g \neq Id} h(H_g) = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} H_{hgh^{-1}} = \Pi_{hGh^{-1}}(h(w)), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple ya que  $h$  es biyectiva, esto prueba (4.4).

A continuación se demuestra **(ii)**. Probemos primero que si  $w \in \mathbb{P}$ , entonces  $\Pi_G(w) = D_G(w)$ . Se afirma que basta probar el caso en el que  $\mathbb{P} = \Delta$  y  $w = 0$ . Esto se sigue ya que, por una parte, la relación (4.4) nos dice que el polígono de Dirichlet generalizado es invariante bajo conjugación, además no es difícil probar que el polígono de Dirichlet también lo es (cf. [2],



p. 227). Más aún, para  $w \in \mathbb{P}$  arbitrario existe  $h$  tal que  $h(w) = 0$ , donde  $h$  es la función de Cayley (o su inversa), o una isometría de  $\Delta$ , o de  $H^2$  o una composición de algunas de éstas.

En consecuencia, habiendo probado que  $\Pi_{hGh^{-1}}(0) = D_{hGh^{-1}}(0)$  se tiene

$$h(\Pi_G(w)) = \Pi_{hGh^{-1}}(0) = D_{hGh^{-1}}(0) = h(D_G(w)).$$

Probamos ahora el caso en que  $w = 0$  y  $\mathbb{P} = \Delta$ . Se tiene que  $0 \in L_g^*$  y si  $z \in L_g$ , como  $\sigma_g$  es una isometría hiperbólica, se tiene

$$\begin{aligned} \rho(z, g^{-1}(0)) &= \rho(z, \sigma_g \sigma_g^*(0)) \\ &= \rho(\sigma_g(z), \sigma_g^*(0)) = \rho(z, 0). \end{aligned}$$

Usando la notación del polígono de Dirichlet (sección 4.1), se sigue de estas igualdades que  $L_g \subset b_{g^{-1}}(0)$ , pero al tratarse de geodésicas, necesariamente  $L_g = b_{g^{-1}}(0)$ . Debido a esto, se tiene además que  $A_{g^{-1}}(0) = H_g$ , por lo cual al tomar a todos los elementos  $g \in G - \{Id\}$

$$\bigcap_{g \in G, g \neq Id} A_g(0) = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} H_g,$$

y por lo tanto  $\Pi_G(0) = D_G(0)$ .

Si  $w = \infty$  y  $P = H^2$ , se tiene que  $L_g^*$  es una recta, de donde se sigue que  $g$  actúa euclidianamente en  $L_g$ , y por consiguiente  $L_g$  es el círculo isométrico de  $g$  y  $H_g = ext I_g$ . Se sigue entonces que

$$\Pi_G(\infty) = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} ext I_g.$$

Nótese que el caso en el que  $w = \infty$  y  $\mathbb{P} = \Delta$  es el mismo que  $w = 0$  y  $\mathbb{P} = \Delta$  en virtud de (4.3). En este caso, como  $0 \in L_g^*$ , dicha geodésica es una recta, por lo cual  $g$  actúa euclidianamente en  $L_g$  y se tiene que  $L_g$  es el círculo isométrico de  $g$  por lo que en este caso también se cumple

$$\Pi_G(\infty) = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} ext I_g.$$

Falta probar ahora **(i)**, es decir que  $\Pi_G(w)$  es una región fundamental para  $G$  en  $\mathbb{P}$ . Esto es cierto cuando  $w \in \mathbb{P}$  pues se probó que en este caso  $\Pi_G(w) = D_G(w)$ . También es cierto cuando  $w \notin \mathbb{P} \cup \partial\mathbb{P}$  en virtud de (4.2),

basta probar el caso cuando  $w \in \partial\mathbb{P}$ , para esto, usando nuevamente (4.4), podemos suponer en virtud del Lema 4.2.1 que  $\mathbb{P} = H^2$  y  $w = \infty$ . Si  $w \in \partial H^2$  existe una isometría hiperbólica  $h$  tal que manda  $w$  a  $\infty$  en el modelo de  $H^2$ . Si  $w \in \partial\Delta$ , usando Cayley y (4.4) se puede mandar  $w$  a  $\partial H^2$ .

Primero, la frontera hiperbólica  $\Pi_G(w)$  tiene medida bidimensional de Lebesgue cero pues está contenida en la unión numerable de geodésicas  $L_g$ , las cuales tienen medida cero.

Ahora, nótese que

$$\begin{aligned} g^{-1} &= \sigma_g \sigma_g^* \\ &= \sigma_g^* (\sigma_g^* \sigma_g \sigma_g^*), \end{aligned} \quad (4.5)$$

más aún,  $\sigma_g^* \sigma_g \sigma_g^*$  es la reflexión en  $\sigma_g^*(L_g)$ . Por la unicidad de la descomposición de  $g^{-1}$  (como  $\infty \in L_g^*$ ), se tiene que

$$\begin{aligned} L_{g^{-1}} &= \sigma_g^*(L_g) \\ &= \sigma_g^* \sigma_g(L_g) = g(L_g), \end{aligned}$$

lo cual significa que los semiplanos  $g(H_g)$  y  $g(K_g)$  están separados por  $L_{g^{-1}}$ .

Consecuentemente

$$H^2 = g(H_g) \cup g(L_g) \cup g(K_g) = H_{g^{-1}} \cup L_{g^{-1}} \cup K_{g^{-1}}$$

donde ambas uniones son ajenas, y como

$$\begin{aligned} g^{-1}(\infty) &= \sigma_g \sigma_g^*(\infty) \\ &= \sigma_g(\infty) \in K_g, \end{aligned}$$

se tiene que  $\infty \in g(K_g) \subset H_{g^{-1}}$ , por lo cual  $g(K_g) = H_{g^{-1}}$  y  $g(H_g) = K_{g^{-1}}$ .

Una prueba más ilustrativa es la siguiente. Dada cualquier  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$  que no fije  $\infty$ , no es difícil probar que

$$g(\text{Int } I_g) = \text{ext}(I_{g^{-1}}) \quad \text{y} \quad g(\text{ext } I_g) = \text{int}(I_{g^{-1}})$$

(cf. [4], pp. 159, 160). Como  $\infty \in L_g^*$ , se sigue fácilmente que  $L_g^*$  es una recta y así

$$L_g = I_g,$$

de donde  $K_g = \text{int}(I_g)$  y  $H_g = \text{ext}(I_g)$ , por lo cual  $g(K_g) = \text{ext}(I_{g^{-1}})$ , y  $g(H_g) = \text{int}(I_{g^{-1}})$ , además,  $g(L_g) = L_{g^{-1}} = I_{g^{-1}}$ . Por lo tanto, como

$$K_{g^{-1}} = \text{int}(I_{g^{-1}}) \quad \text{y} \quad H_{g^{-1}} = \text{ext}(I_{g^{-1}}),$$

se sigue que  $g(K_g) = H_{g^{-1}}$  y  $g(H_g) = K_{g^{-1}}$  (véase la Figura 4.4 para el caso hiperbólico).

Como  $H_g \cap K_g = \emptyset$ , se tiene que

$$g(\Pi_G(w)) \cap \Pi_G(w) = \emptyset,$$

por lo cual  $\Pi_G(w)$  no contiene puntos  $G$ -equivalentes.

Sea  $z \in H^2$  cualquiera. Como  $\infty$  es un punto ordinario de  $G$ , la órbita de  $z$  está contenida en un compacto  $K \subset \mathbb{C}$  por lo que existe  $z'$  en la órbita de  $z$  tal que

$$\text{Im}[z'] \geq \text{Im}[g(z)]$$

para todas las transformaciones  $g \in G$ .

Tomemos ahora  $z_0 \in K_g$ , si

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

como  $K_g = \text{int } I_g$  se tiene

$$|g'(z_0)| = \frac{1}{|cz_0 + d|^2} > 1$$

se sigue que

$$\text{Im}[g(z_0)] = \frac{\text{Im}[z_0]}{|cz_0 + d|^2} > \text{Im}[z_0],$$

por lo que la acción de  $g$  en  $K_g$  incrementa la parte imaginaria y se sigue entonces que  $z' \in L_g \cup H_g, \forall g \in G$ .

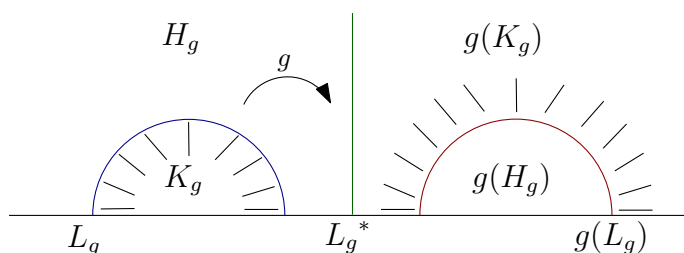


Figura 4.4: Caso hiperbólico de la idea geométrica

Por consiguiente en virtud del Corolario 4.2.4, dado un disco hiperbólico  $D_h(z', r)$ , dicho disco solamente interseca un número finito de círculos isométricos  $I_g$ , más aún, haciendo este disco suficientemente pequeño, se puede suponer que los círculos isométricos  $I_g$  que lo intersecan pasan por  $z'$ , por lo cual  $z'$  está en la cerradura hiperbólica de  $\Pi_G(\infty)$ . En consecuencia

cualquier  $z \in H^2$  es equivalente a algún punto en la cerradura hiperbólica de  $\Pi_G(w)$ . En particular, se tiene que  $\Pi_G(w)$  es no vacío, pues al tomar cualquier  $z \in H^2$  y  $z'$  en la órbita de  $z$  como se describió anteriormente, el segmento de geodésica  $(z', \infty) \subset \Pi_G(w)$ .

Finalmente, dado un punto  $z \in \Pi_G$ , en virtud del Corolario 4.2.4 se puede encontrar un disco hiperbólico  $D_h(z, r)$  que interseque a un número finito de círculos isométricos  $I_g$ . Sean  $I_{g_1}, \dots, I_{g_n}$  éstos círculos y  $r_1, \dots, r_n$  las distancias desde  $z$  a cada uno de ellos, por tratarse de un número finito se alcanza el mínimo.

Si

$$r' = \min_{i=1, \dots, n} \{r_i\},$$

entonces el disco  $D_h(z, r'/2)$  no interseca a ningún círculo isométrico  $I_{g_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , por lo cual  $\Pi_G$  es abierto.

Por lo tanto  $\Pi_G(w)$  es una región fundamental para  $G$  en  $\mathbb{P}$ .  $\square$

En conclusión, obsérvese que si  $P = \Delta$  y  $w = 0$ , se sigue del Teorema 4.2.5 y de (4.3) que

$$\begin{aligned} D_G(0) &= \Pi_G(\infty) \\ &= \Delta \cap F_G. \end{aligned}$$

Usando la notación de esta sección, nótese que la identidad (4.5) en la prueba del Teorema 4.2.5 implica que

$$L_g^* = L_{g^{-1}}^* ,$$

no solamente si  $w = \infty$  sino para todo  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  tal que  $w$  no es punto fijo de ningún elemento no trivial de  $G$ . Esto se sigue de la unicidad de la descomposición  $g = \sigma_g^* \sigma_g$ .

También, escribiendo

$$g^{-1} = \sigma_g^* (\sigma_g^* \sigma_g \sigma_g^*) = \sigma_g^* \sigma'_g,$$

se sigue que  $\sigma'_g$  es la reflexión en

$$g(L_g), \tag{4.6}$$

ya que

$$\sigma_g^*(L_g) = \sigma_g^* \sigma_g(L_g) = g(L_g). \tag{4.7}$$

Estas dos afirmaciones son evidentes en el caso de los círculos isométricos, sin embargo estos argumentos muestran que se cumplen de manera general.

**Proposición 4.2.6.** Sean  $G$ ,  $w$ ,  $g$ ,  $L_g$  y  $L_g^*$  como en el Teorema 4.2.5, entonces  $g$  es elíptica, parabólica o hiperbólica dependiendo si  $L_g$  y  $L_g^*$  se intersecan, son tangentes o son ajenas, respectivamente. Más aún

- (i) si  $g$  es elíptica, entonces  $g$  fija el punto en común en  $\mathbb{P}$  de  $L_g$  y  $L_g^*$  ;
- (ii) si  $g$  es parabólica, entonces  $g$  fija el punto de tangencia de  $L_g$  y  $L_g^*$  ;
- (iii) si  $g$  es hiperbólica sus puntos fijos son inversos con respecto a  $L_g$ ,  $L_g^*$  y  $L_{g^{-1}}$ .

DEMOSTRACIÓN. Usando la prueba de la ecuación (4.4) en el Teorema 4.2.5 podemos suponer que  $\mathbb{P} = H^2$  y  $w = \infty$ , ya que esto implica que

$$h(L_g) = L_{hgh^{-1}} \text{ y } h(L_g^*) = L_{hgh^{-1}}^*.$$

Por consiguiente,  $L_g^*$  es una recta y  $L_g = I_g$ . Con estas observaciones el resultado se sigue como consecuencia del Teorema 3.2.5 y de su prueba. En el caso de las elípticas de orden 2, como  $I_g = I_{g^{-1}}$ , es claro que  $L_g^*$  debe intersecar a  $I_g$ , ya que de otra manera  $g$  no sería elíptica, evidentemente el punto de intersección es fijo.  $\square$

**Proposición 4.2.7.** Sea  $g$  parabólica tal que  $g(\infty) \neq \infty$  y  $r_n$  el radio del círculo isométrico de  $g^n$ , entonces  $r_n = r_1/|n|$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1.$$

Mostraremos de manera inductiva que

$$g^n = \begin{pmatrix} * & * \\ nc & nd - (n-1) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

si  $n > 0$ , lo cual prueba la proposición en este caso.

Como  $g$  es parabólica se puede suponer que  $a + d = 2$ . Entonces

$$\begin{aligned} g^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ac + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ c(a+d) & ad - 1 + d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ 2c & 2d - 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo tanto  $r_2 = 1/2c$ .

Ahora

$$\begin{aligned} g^3 &= \begin{pmatrix} * & * \\ 2c & 2d-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 2ac+2cd-c & 2bc+2d^2-d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ 3c & 3d-2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo cual  $r_3 = 1/3c$ .

Supongamos ahora que se cumple

$$g^{n-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ (n-1)c & (n-1)d - (n-2) \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} g^n &= g^{n-1} \circ g \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ (n-1)c & (n-1)d - (n-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ ac(n-1) + cd(n-1) - c(n-2) & bc(n-1) + d^2(n-1) - d(n-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ c(a+d)(n-1) - c(n-2) & (ad-1+d^2)(n-1) - d(n-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ nc & nd - (n-1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo tanto  $r_n = r_1/|n|$ .

El caso  $n < 0$  se sigue al tomar la matriz inversa en (4.8).  $\square$

Poincaré observó que cada transformación de Möbius  $\varphi$  actuando en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  se puede extender naturalmente a una transformación de Möbius  $\widehat{\varphi}$  actuando en  $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ , y que de esta manera  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  se puede pensar como un subgrupo de  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$  mediante la función  $\psi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ ,  $x \mapsto \widehat{x}$ , donde

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{y} \quad \widehat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0).$$

Para cada reflexión  $\varphi$  actuando en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , se define la reflexión  $\widehat{\varphi}$  actuando en  $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$  de la siguiente manera. Si  $\varphi$  es la reflexión en  $S(a, r)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\widehat{\varphi}$  es la reflexión en  $S(\widehat{a}, r)$ , y si  $\varphi$  es la reflexión en  $P(a, t)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$\widehat{\varphi}$  es la reflexión en  $P(\widehat{a}, t)$ .

Si  $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ , se sigue de las fórmulas para reflexiones en “círculos” que

$$\widehat{\varphi}(x, 0) = (\varphi(x), 0).$$

**Definición 26.** Dada  $\varphi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ ,  $\varphi = \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_m$ , donde  $\varphi_j$  es la reflexión en una “esfera”,  $j = 1, 2, \dots, m$ , se define su extensión de Poincaré en  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$  como  $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_2\cdots\widehat{\varphi}_m$ .

La consistencia de esta definición se puede checar por ejemplo en [2], pp. 33-35.

Se puede probar que los subgrupos discretos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  actúan discontinuamente en  $H^3$  (cf. [2], p. 95). Por otra parte, si un grupo tiene puntos ordinarios, entonces es discreto (cf. [4], pp. 104, 105). Dado  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$  discreto, al grupo correspondiente de extensiones de Poincaré se le denotará por  $\widehat{\Gamma}$ .

**Teorema 4.2.8.** Sea  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$  discreto tal que  $g(\infty) \neq \infty$  para cualquier transformación  $g \in \Gamma - \{Id\}$ . Supóngase también que  $\infty \in \mathbb{O}(\Gamma)$ , entonces

$$P = \bigcap_{g \in \Gamma, g \neq Id} ext I_{\widehat{g}}$$

es una región fundamental para la acción de  $\widehat{\Gamma}$  en  $H^3$ , donde  $I_{\widehat{g}}$  es la semiesfera isométrica de  $g$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $g(ext I_{\widehat{g}}) = int I_{\widehat{g}^{-1}}$ , se tiene que  $g(P) \cap P = \emptyset$  para cualquier  $g \in \Gamma - \{Id\}$  y por lo tanto no existen puntos  $\Gamma$ -equivalentes en  $P$ .

Dada  $x \in H^3$ , esta se puede escribir como  $x = z + x_3j$ , donde  $z \in \mathbb{C}$ ,  $x_3 > 0$  y  $j = (0, 0, 1)$ . También, dada  $g \in \Gamma - \{Id\}$  se tiene que  $g = E \circ \sigma$ , donde  $\sigma$  denota la reflexión en  $I_g$  y  $E$  es una isometría euclidiana (véase el Teorema 2.3.1 y la observación previa a la Proposición 3.1.1), por lo cual  $\widehat{g} = \widehat{E} \circ \widehat{\sigma}$ .

Ahora, geoméricamente es claro que la acción de  $\widehat{\sigma}$  en  $int I_{\widehat{g}}$  incrementa la altura (tercera coordenada), esto también es cierto para  $\widehat{g}$ . Para esto basta probar analíticamente que  $\widehat{\sigma}$  cumple con dicha propiedad ya que  $\widehat{E}$  preserva la altura. La última afirmación se sigue ya que el Teorema 2.1.1 dice que cada isometría euclidiana de  $\mathbb{R}^n$  es la composición de a lo más  $n + 1$  reflexiones en planos y también es claro que la reflexión sobre un plano en  $\mathbb{R}$  ortogonal a  $\mathbb{C}$

preserva la *altura*.

Si  $x \in \text{int } I_{\hat{g}}$ ,

$$\left| z - \left( -\frac{d}{c} \right) \right|^2 + x_3^2 = \left| x - \left( -\frac{d}{c}, 0 \right) \right|^2 < \frac{1}{|c|^2},$$

por lo tanto

$$|c|^2 \left| x - \left( -\frac{d}{c}, 0 \right) \right|^2 < 1,$$

y usando la fórmula para la reflexión en una esfera

$$[\hat{\sigma}(x)]_3 = \frac{x_3}{|c|^2 \left( \left| z + \frac{d}{c} \right|^2 + x_3^2 \right)} > x_3.$$

Tomemos ahora  $x \in H^3$  cualquiera, como  $\infty \in \mathbb{O}(\Gamma)$ , la órbita de  $x$  no se acumula en  $\infty$ , por lo cual existe un compacto  $K \subset H^3$  tal que la órbita de  $x$  está contenida en  $K$ . Se sigue entonces que existe  $x' \in H^3$  en la órbita de  $x$  tal que

$$[x']_3 \geq [g(x)]_3$$

para toda  $g \in \Gamma$ . De esta manera se puede concluir que  $x' \in \tilde{P}$ , donde la cerradura es con respecto al espacio hiperbólico tridimensional  $H^3$ , y por lo tanto cualquier  $x \in H^3$  es equivalente a algún punto de  $\tilde{P}$ .

Como los radios de los círculos isométricos  $I_g$  tienden a cero (Corolario 4.2.3), es claro que los radios de las semiesferas isométricas  $I_{\hat{g}}$  también tienden a cero y un argumento tridimensional similar al que se usa al final de la prueba del Teorema 4.2.5 muestra que  $P$  es abierto.

Finalmente, como la frontera de  $P$  en  $H^2$  está contenida en la unión numerable de círculos isométricos  $I_g$ , se tiene que la frontera de  $P$  en  $H^3$  está contenida en la unión numerable de semiesferas isométricas, por lo cual la frontera de  $P$  con respecto a  $H^3$  tiene medida tridimensional de Lebesgue cero.  $\square$

### 4.3. Regiones fundamentales derivadas de clases laterales

Sea  $G$  un grupo fuchsiano actuando en  $\mathbb{P}$  y  $H < G$ . Se puede construir una región fundamental para  $G$  haciendo referencia a  $H$ , supóngase que

$$G = \bigcup_n g_n H. \quad (4.9)$$



La esencia de esta construcción es encontrar un conjunto  $H$ -invariante  $\Sigma$  tal que los conjuntos  $\{g_n(\Sigma)\}_n$  forman una teselación para  $\mathbb{P}$  y así obtener una región fundamental  $D \subset \Sigma$  para la acción de  $G$  en  $\mathbb{P}$  de manera que el conjunto

$$H(D) = \bigcup_{h \in H} h(D)$$

forme una teselación para  $\Sigma$ .

**Definición 27.** Sea  $\Sigma \subset \widehat{\mathbb{C}}$  y  $H < PSL(2, \mathbb{C})$  actuando en  $\Sigma$ , se dice que el conjunto  $\Sigma$  es estable bajo la acción de  $H$  si satisface

1.  $g(\Sigma) = \Sigma$ , si  $g \in H$ ;
2.  $g(\Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$ , si  $g \notin H$ .

Bajo estas hipótesis se dice que  $\Sigma$  es  $H$ -estable.

Nótese que si  $\Sigma$  es  $H$ -estable y  $H < G < PSL(2, \mathbb{C})$ , cada clase lateral  $g_n H$  determina  $g_n(\Sigma)$  de manera única (e independientemente de la elección del representante). Dicha afirmación se sigue ya que por ejemplo, al tomar  $f, h$  representantes de  $gH$  se tiene que  $f^{-1}h \in H$  y  $f(H) = h(H)$ . Más aún,

$$g_n(\Sigma) \cap g_m(\Sigma) = \emptyset, \quad \text{si } n \neq m, \quad (4.10)$$

ya que de otra manera  $(g_m)^{-1}g_n \in H$ , lo cual es una contradicción.

Se debe suponer también que

$$\bigcup_n g_n(\widetilde{\Sigma}) = \mathbb{P}.$$

Nótese que esta hipótesis junto con (4.10) nos remiten a la definición de región fundamental, sin embargo estas condiciones son sólo sobre las clases laterales y no sobre todos los elementos de  $G$ .

Entenderemos por polígono convexo a un subconjunto del plano hiperbólico definido por la intersección a lo sumo numerable de semiplanos.

Un dominio fundamental  $D$  para un grupo fuchsiano actuando en  $\mathbb{P}$  se dice que es localmente finito si cualquier compacto en  $\mathbb{P}$  interseca un número finito de imágenes de  $\widetilde{D}$ .

Resulta que si  $D$  es un dominio fundamental convexo localmente finito,  $D$  es un polígono que se le llama *polígono fundamental convexo* (cf. [2] capítulo 9 o [6]).

El siguiente teorema es de suma importancia pues proporciona condiciones para obtener una región fundamental para un grupo fuchsiano  $G$  que actúa en  $\mathbb{P}$  a partir de un polígono fundamental convexo para un subgrupo  $H < G$  y un polígono estable bajo la acción de  $H$  convexo abierto  $\Sigma$  de  $\mathbb{P}$ .

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $G$  un grupo fuchsiano actuando en  $\mathbb{P}$  y  $H < G$  con la descomposición en clases laterales dada por (4.9). Supóngase que  $\Pi$  es un polígono fundamental convexo para  $H$  y que un polígono convexo abierto  $\Sigma$  de  $\mathbb{P}$  satisface*

(i)  $\Sigma$  es estable bajo la acción de  $H$  y

$$(ii) \bigcup_n g_n(\tilde{\Sigma}) = \mathbb{P},$$

entonces  $\Pi \cap \Sigma$  es una región fundamental para  $G$  en  $\mathbb{P}$ .

DEMOSTRACIÓN. Es claro que  $\Pi \cap \Sigma$  es convexo y abierto, y su frontera tiene medida de Lebesgue cero, ya que la frontera hiperbólica de  $\Pi \cap \Sigma$  está contenida en  $\partial\Pi \cap \partial\Sigma$  (hiperbólica). Basta probar que

$$\bigcup_{g \in G} g(\tilde{\Pi} \cap \tilde{\Sigma}) = \mathbb{P} \quad (4.11)$$

y que, si  $f$  y  $g$  son elementos distintos de  $G$ , entonces

$$g(\Pi \cap \Sigma) \cap f(\Pi \cap \Sigma) = \emptyset. \quad (4.12)$$

Si  $z \in \mathbb{P}$ , en virtud de (ii), existe  $n$  tal que  $g_n^{-1}(z) \in \tilde{\Sigma}$ , y como  $\Pi$  es una región fundamental para  $H$ , existe  $h_n \in H$  tal que

$$h_n g_n^{-1}(z) \in \tilde{\Pi}.$$

Además, como  $g_n^{-1}(z) \in \tilde{\Sigma}$  y  $\Sigma$  es estable bajo la acción de  $H$ ,

$$h_n g_n^{-1}(z) \in h_n(\tilde{\Sigma}) = \tilde{\Sigma}$$

lo cual prueba (4.11).

Supongamos ahora que  $f(\Pi \cap \Sigma) \cap g(\Pi \cap \Sigma) \neq \emptyset$ . De acuerdo a (4.9) se puede escribir  $f = g_n h_n$  y  $g = g_m h_m$ , donde  $h_n, h_m \in H$ . Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} f(\Pi \cap \Sigma) \cap g(\Pi \cap \Sigma) &\subset f(\Sigma) \cap g(\Sigma) \\ &= g_n h_n(\Sigma) \cap g_m h_m(\Sigma) \\ &= g_n(\Sigma) \cap g_m(\Sigma) \neq \emptyset, \end{aligned}$$

y en virtud de (i) y (4.10), se sigue que  $g_n = g_m$ .

De la última observación y del hecho que

$$f(\Pi \cap \Sigma) \cap g(\Pi \cap \Sigma) \subset f(\Pi) \cap g(\Pi),$$

se deduce por la biyectividad de  $g_n$  que

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq g_n^{-1}[f(\Pi \cap \Sigma) \cap g(\Pi \cap \Sigma)] \\ &= h_n(\Pi \cap \Sigma) \cap h_m(\Pi \cap \Sigma) \\ &\subset h_n(\Pi) \cap h_m(\Pi), \end{aligned}$$

y como  $\Pi$  es una región fundamental para  $H$  se tiene que  $h_n = h_m$ , por lo cual  $f = g$  y esto prueba (4.12).  $\square$

Consideremos ahora algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.** Consideremos un grupo fuchsiano  $G$  que contenga un subgrupo propio  $H = \langle h \rangle$ , donde  $h$  es parabólica. Conjugando se puede suponer que  $\mathbb{P} = H^2$  y que  $h(z) = z + 1$  (véase el Lema 4.2.1). Como  $g(\infty) \neq \infty$ , si  $g \in G - H$ , es claro que todo elemento de  $G - H$  tiene un círculo isométrico. Bajo estas condiciones se afirma que

$$\Sigma = \bigcap_{g \in G-H} \text{ext } I_g$$

y

$$\Pi = \{z \in H^2 : x_0 < \text{Re } z < x_0 + 1\}$$

cumplen las condiciones del Teorema 4.3.1.

i)  $\Sigma$  es estable bajo la acción de  $H$ . Para probar esto, veamos primero que si existe  $g \in G - H$  tal que

$$I_g = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|} \right\}$$

entonces existe  $f \in G - H$  tal que

$$I_f = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z + n + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|} \right\}.$$

Esto se sigue ya que si  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  se identifica con la matriz

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

al conjugar con  $h^n \in H$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} f = h^n g h^{-n} &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a - nc & b - nd \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ c & -cn + d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que  $I_f$  tiene su centro en  $n - d/c$  y radio  $1/|c|$ .

Esto prueba que  $\Sigma$  es  $H$ -estable pues si  $g \in G - H$ , existe  $f \in G - H$  tal que  $h^n(I_g) = I_f$ , y si  $g \in G - H$ ,  $g(\Sigma) \subset \text{int } I_{g^{-1}} \subset H^2 - \Sigma$  y se cumple la propiedad 2 de la definición de  $H$ -estable. Ahora, dada  $h^n \in H$ , usando la prueba de *i*) se tiene que

$$\begin{aligned} h^n(\Sigma) &= h^n \left( \bigcap_{g \in G-H} \text{ext } I_g \right) = \bigcap_{g \in G-H} h^n(\text{ext } I_g) \\ &= \bigcap_{g \in G-H} \text{ext } (I_{h^n g h^{-n}}) = \bigcap_{f \in G-H} \text{ext } I_f = \Sigma, \end{aligned}$$

ya que cualquier  $f \in G - H$  se puede escribir como  $h^n g h^{-n}$ ,  $g \in G - H$ .

**ii)** Se prueba ahora que

$$\bigcup_n g_n(\tilde{\Sigma}) = H^2.$$

Se afirma que dada  $z \in H^2$  existe  $z' \in G(z)$  tal que  $\text{Im } z' \geq \text{Im } f(z)$  para toda  $f \in G$ . La afirmación implica que  $z' \in \tilde{\Sigma}$  y se sigue *ii*). De otra manera  $z' \in \text{int } I_g$  para alguna  $g \in G$ , donde

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

y se tendría que

$$\text{Im } g(z') > \frac{\text{Im } z'}{|cz' + d|^2} > \text{Im } z',$$

lo cual contradice la afirmación.

Se prueba ahora la afirmación. Construimos una sucesión de la siguiente manera, si  $z \in \Pi$ , escribimos  $z_1 = z_0$ , de otra manera, escribimos  $z_1 = h^n(z)$ , donde  $h^n(z) \in \Pi$ . Si  $z_1 \in \tilde{R}$ , donde  $R = \Pi \cap \Sigma$  se sigue la afirmación, de otra

manera  $z_1 \in \text{int } I_g$  para alguna  $g \in G - H$ . Nótese que el punto  $z_2 = g(z_1)$  satisface

$$\text{Im } z_2 = \frac{\text{Im } z_1}{|c_1 z_1 + d_1|^2} > \text{Im } z_1,$$

donde

$$g(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1.$$

El siguiente paso es trasladar  $z_2$  a un punto  $z_3 \in \tilde{\Pi}$ . Si  $z_2 \in \tilde{\Pi}$ , se toma  $z_2 = z_3$ , si  $z_3 \notin \tilde{R}$ , entonces  $z_3 \in \text{int } g_n$ , para alguna  $g_n \in G$  y se procede de la misma manera que antes.

Se obtiene entonces una sucesión de puntos  $G$ -equivalentes

$$z, z_1, z_2, \dots, z_n,$$

tales que los números de la forma  $z_{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  están en  $\Pi$  y

$$\text{Im } z = \text{Im } z_1 < \text{Im } z_2 = \text{Im } z_3 < \text{Im } z_4 = \dots$$

Finalmente, esta sucesión es necesariamente finita. Esto se sigue ya que existe

$$M = \sup_{g \in G-H} \text{radio } I_g$$

(cf. [4], pp. 156, 157), lo cual implica que si  $z \in \Pi$  y  $\text{Im } z > M$ , necesariamente  $z \in \tilde{R}$ . Como el rectángulo compacto

$$\Pi \cap \{w \in H^2 \mid \text{Im } z \leq \text{Im } w \leq M\}$$

contiene solamente puntos ordinarios, la sucesión  $z_{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  no se puede acumular en dicho rectángulo, pues de otra manera no habría acción discontinua. Así, necesariamente existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $z_{2n+1} \in \Sigma$  y se sigue el resultado.

**Definición 28.** *Dado un polígono fundamental convexo  $P$  y sea  $G$  un grupo fuchsiano actuando en  $\mathbb{P}$ , se define un ciclo  $C$  como la intersección de una de las  $G$ -órbitas con  $\tilde{P}$ .*

Como  $P$  es localmente finito, necesariamente  $C$  es un conjunto finito  $\{z_1, \dots, z_n\}$ . Como consecuencia del ejemplo anterior se afirma que dado un ciclo  $C$  cuyos elementos están en  $\partial D$ , donde  $D = \Sigma \cap \Pi$ , entonces  $C$  está contenido en un horociclo basado en  $\infty$ , es decir, todos los vértices tienen la misma parte imaginaria. Para probar esto basta ver que dados  $z_1, z_2 \in \partial D$  tales que  $g(z_1) = z_2$ , para alguna  $g \in G$ , se tiene  $\text{Im } z_1 = \text{Im } z_2$ . Esto es claro si  $g \in H$  puesto que  $H$  está generado por traslaciones por reales.

Si  $g \in G - H$ , entonces  $g(\infty) \neq \infty$ . Ahora, es claro que  $z_1 \notin \text{int } I_g$  pues de otra manera  $z_1$  tendría una vecindad totalmente contenida en  $\text{int } I_g$ , y se tendría que  $z_1 \notin \partial D$ . Análogamente se tiene que  $z_2 \notin \text{int } I_g$ .

Además,  $z_1 \notin \text{ext } I_g$ , pues si  $z_1 \in \text{ext } I_g$ , se tendría que su imagen bajo  $g$ ,  $g(z_1) = z_2 \in \text{int } I_{g^{-1}}$ . Análogamente  $z_2 \notin \text{ext } I_g$  (cf. [4], pp. 159-160).

Si  $z_1 \in I_g$ , entonces  $z_2 \in I_{g^{-1}}$ , y si  $g$  está dada por

$$g = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

se tiene que

$$\text{Im } z_2 = \frac{\text{Im } z_1}{|cz_1 + d|^2} = \text{Im } z_1$$

lo cual prueba la afirmación.

**Ejemplo 2.** Consideramos ahora un grupo fuchsiano  $G$  que contiene un subgrupo propio  $H = \langle h \rangle$ , donde  $h$  es elíptica. Se puede suponer que  $G$  actúa en  $\Delta$  y que  $h(z) = e^{2\pi i/n}z$ . Se afirma que

$$\Sigma = \bigcap_{g \in G-H} \text{ext } I_g$$

y

$$\Pi = \left\{ z \mid \theta < \arg z < \theta + \frac{2\pi}{n} \right\}$$

cumplen las condiciones del Teorema 4.3.1.

i)  $\Sigma$  es estable bajo la acción de  $H$ . Recordamos que si  $g \in G$  y  $g(0) \neq 0$ , entonces

$$I_g = \{z \mid \rho(z, 0) = \rho(z, g^{-1}(0))\}, \quad (4.13)$$

por lo cual

$$\Sigma = \{z \in \Delta \mid \rho(z, 0) < \rho(z, g(0)), g \in G - H\}.$$

Se sigue entonces que  $\Sigma$  es no vacío pues  $0 \in \Sigma$ . Dada  $g \in G - H$ , se tiene que  $g(\Sigma) \subset g(\text{ext } I_g) \subset \text{int } I_{g^{-1}}$ . Como  $\text{int } I_{g^{-1}} \cap \Sigma = \emptyset$ , se sigue que  $g(\Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$ .

Si  $h \in H$  basta probar que dado el círculo isométrico

$$I_g = \{z \mid |\bar{c}z + \bar{a}| = 1\}$$

de una transformación

$$g(z) = \frac{az + c}{\bar{c}z + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1,$$

el círculo isométrico de la transformación conjugada bajo  $h^k$  tiene el mismo radio y el centro rotado, es decir, tiene centro en  $(e^{2\pi ik/n})(-\bar{a}/\bar{c})$ , donde  $k = 0, \dots, n-1$ . Ya que esto implica que  $\Sigma$  es invariante bajo la acción de elementos  $H$ .

Para probar esto, sea  $\alpha = e^{\pi ik/n}$  y  $h^k(z) = e^{2\pi ik/n}z$  representada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

conjugando se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \bar{\alpha} \bar{c} & \bar{\alpha} \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ (\bar{\alpha})^2 c & d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo cual implica que el nuevo círculo isométrico tiene radio igual a

$$\frac{1}{|(\bar{\alpha})^2 c|} = \frac{1}{|\bar{c}|} = \frac{1}{|c|}$$

y centro

$$\frac{-\bar{a}}{(\bar{\alpha})^2 \bar{c}} = \left( \frac{-\bar{a}}{\bar{c}} \right) \alpha^2 = e^{2\pi ik/n} \left( \frac{-\bar{a}}{\bar{c}} \right).$$

Por lo tanto  $\Sigma$  es  $H$ -estable.

**ii)** Probamos ahora que

$$\bigcup_n g_n(\tilde{\Sigma}) = \Delta.$$

Sea  $z \in \Delta$ ,  $z \neq 0$  y  $z^* \in G(z)$  tal que  $\rho(z^*, 0) \leq \rho(g(z), 0)$  para toda  $z \in G(z)$ . Esto es posible ya que 0 no es un punto límite de  $G$ . Veamos que  $[0, z^*) \subset \Sigma$ . Si  $[0, z^*) \cap I_g \neq \emptyset$  para alguna  $g \in G - H$ , entonces usando (4.13) se sigue que  $z^* \in \text{int } I_g$  y

$$\rho(g^{-1}z^*, 0) < \rho(z^*, 0).$$

A su vez esto implica que

$$\rho(z^*, 0) > \rho(z^*, g(0))$$

lo cual es una contradicción pues esto indicaría que  $z^*$  no es el punto más cercano a 0 en su órbita. Esto implica que  $[0, z^*) \subset \Sigma$  y  $z^* \in \tilde{\Sigma}$ , además  $z^* = g(z)$ , donde  $g \in G - H$  y entonces  $z = g^{-1}(z^*) \in g^{-1}(\tilde{\Sigma})$ , lo cual prueba esta afirmación.

**Definición 29.** Sea  $h$  un elemento hiperbólico de un grupo fuchsiano  $G$  y sea  $A$  el eje de  $h$ . Decimos que  $h$  es un elemento simple de  $G$  si y sólo si para toda  $g \in G$ ,  $g(A) = A$  o  $g(A) \cap A = \emptyset$ . De otra manera decimos que  $h$  es no simple.

Antes del siguiente ejemplo probamos unos resultados.

**Lema 4.3.2.** Sea  $G$  fuchsiano,  $h \in G$  hiperbólica simple y  $K$  un compacto en  $\mathbb{P}$ . Entonces, en toda clase lateral derecha  $h^n g$ ,  $g \in G - \langle h \rangle$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , solamente un número finito de círculos  $h^n g(A)$  interseca a  $K$ , donde  $A$  es el eje de  $h$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $a$  y  $b$  los puntos fijos de  $h$ . Se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $a$  es el atractor de  $h$  y  $b$  el repulsor, para toda  $z \neq b \in A$ , se tiene que  $h^n(z) \rightarrow a$  uniformemente en compactos de  $\widehat{\mathbb{C}} - \{b\}$  (cf. [2], p. 73).

Se sigue entonces que a partir de cierta  $n \in \mathbb{N}$ , todas las imágenes de  $g(A)$  están contenidas en un disco euclidiano con centro en  $a$  que se puede suponer disjunto a  $K$ .  $\square$

**Definición 30.** Sea  $h \in PSL(2, \mathbb{C})$  hiperbólica simple con eje  $A$  y  $M$  un segmento de  $A$ . Se dice que  $M$  es fundamental si

$$\bigcup_n \{h^n(M)\} = A,$$

y para  $n \neq m$   $h^n(M) \cap h^m(M)$  consiste a lo más de un punto.

**Lema 4.3.3.** Bajo las hipótesis del Lema 4.3.2, sea  $M$  un segmento fundamental de  $A$ . Si  $g(A)$  dista de  $A$  menos de  $\delta$ , existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $h^n g(A)$  dista de  $A$  menos de  $\delta$  en  $M$ .

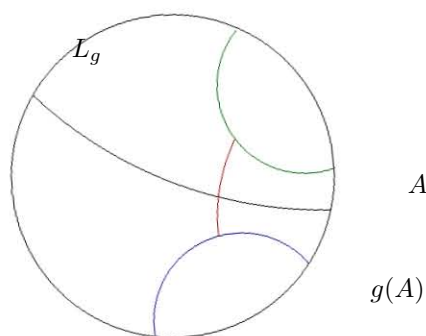
DEMOSTRACIÓN. Sean  $t_1 \in A$  y  $t_2 \in g(A)$  los pies de la ortogonal común a  $A$  y  $g(A)$ , entonces  $\rho(t_1, t_2) < \delta$ ; nótese que  $\rho(A, g(A))$  se alcanza en esta ortogonal común. Tomemos  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $h^n(t_1) \in M$ , como  $h$  es una isometría,

$$\rho(t_1, t_2) = \rho(h^n(t_1), h^n(t_2)) < \delta$$

y  $[t_1, t_2]$  está en la ortogonal común a  $A$  y  $h^n g(A)$ . La distancia  $\rho(A, g(A))$  se alcanza en  $[h^n t_1, h^n t_2]$  (véase la Fig 4.5).  $\square$

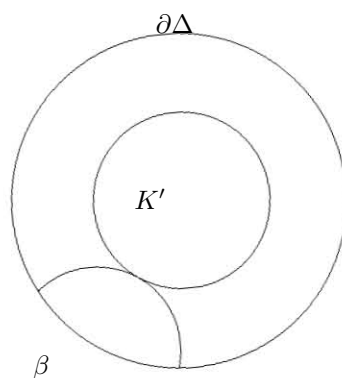
**Lema 4.3.4.** Bajo las hipótesis de los lemas anteriores  $\rho(g, A) < \delta$  solamente para un número finito de elementos  $g \in G - \langle h \rangle$ .



Figura 4.5: Distancia entre  $A$  y  $g(A)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $r < 1$  tal que el disco  $K \subset D_E(0, r)$ , donde  $K$  es el compacto  $K = \{z \in \Delta \mid \rho(z, M) \leq \delta\}$ , donde  $M$  es un segmento fundamental de  $A$ . Ahora, si  $g \in G - H$ , solamente para un número finito de clases laterales derechas  $h^n g$ ,  $h^n g(A)$  interseca a  $K$  en virtud del Lema 4.3.2.

Si un número infinito de clases laterales  $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ , cumplen que  $\rho(g(A), A) < \delta$ , por el Lema 4.3.3 podemos suponer que tomando representantes adecuados  $h^{k_n} g_n(A)$ , estos intersecan a  $D_E(0, r)$ . Además, estos ejes  $h^{k_n} g_n(A)$  son todos ajenos y distintos, ya que representan clases laterales distintas y  $h$  es simple. Cada una de estas geodésicas subtiende un arco mayor a  $\beta$  en  $\partial\Delta$ , en donde  $\beta$  es la medida en radianes de un ángulo mayor a 0. Finalmente, sólo existe un número finito de geodésicas de este tipo debido a que la longitud de  $\partial\Delta$  es igual a  $2\pi$  (véase la Fig 4.6).  $\square$

Figura 4.6: Arco  $\beta$ 

**Teorema 4.3.5.** *Bajo las hipótesis de los Lemas 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.4, cualquier región hipercíclica  $\Omega$  alrededor de  $A$  interseca un número finito de imágenes de  $A$  distintas de  $A$ .*

DEMOSTRACIÓN. Una región hipercíclica alrededor de  $A$  está definida por el lugar de los puntos que distan de  $A$  menos que  $\delta$ ,  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , por lo que el teorema es consecuencia del Lema 4.3.4 (véase [4], p. 59, [2], pp. 139 y 145 y la Fig. 4.7).  $\square$

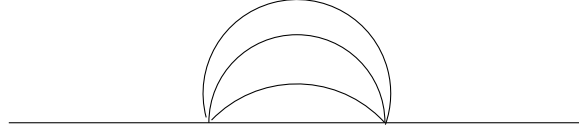


Figura 4.7: Región hipercíclica

Nótese que, en el contexto del teorema anterior,

$$\rho(h^n g(A), A) = \rho(g(A), h^{-n}(A)) = \rho(g(A), A),$$

y si  $L_g$  es el bisector perpendicular entre  $A$  y  $g(A)$ , entonces

$$2\rho(L_g, A) = \rho(g(A), A) = \rho(h^n g(A), A) = 2\rho(L_{h^n g}, A)$$

y por lo tanto  $\rho(L_g, A) = \rho(L_{h^n g}, A)$ , donde  $L_{h^n g}$  es el bisector perpendicular entre  $A$  y  $h^n g(A)$ .

**Ejemplo 3.** Consideremos un grupo fuchsiano  $G$  actuando en  $\Delta$  y que contiene un subgrupo propio  $H = \langle h \rangle$ , donde  $h$  es una transformación hiperbólica simple. De esta manera el eje de  $h$ ,  $A$ , es  $H$ -estable pues todo elemento de  $H$  fija los puntos de  $A \cap \partial\Delta$ . Si  $g \notin H$ , entonces  $g(A) \cap A = \emptyset$  y el conjunto

$$K_g = \{z \in \Delta : \rho(z, A) < \rho(z, g(A)), g \in G - H\}$$

es un semiplano. Para probar esto, como  $A$  y  $g(A)$  son ajenas, la distancia entre ellas se alcanza en la perpendicular común, que denotamos como  $M$ . De hecho, la geodésica ortogonal a  $M$  por el punto medio entre  $A$  y  $g(A)$  equidista de ambas. Una prueba de este hecho aparece en [2], pp. 166-167. En conclusión  $K_g$ , la región que contiene a  $A$  y delimitada por  $L_g$  es un semiplano ya que es abierta, convexa y es la intersección de semiplanos (véase la Figura 4.8).

Se afirma que  $\Pi$ , la región comprendida entre  $L$  y  $h(L)$ , donde  $L$  es una geodésica ortogonal a  $A$ , es una región fundamental para  $H$ . No es difícil ver que  $\Pi$  es no vacío, abierto y convexo (ya que es la intersección de semiplanos).

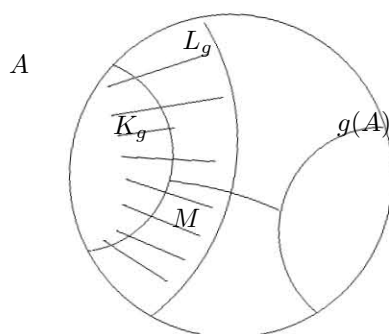


Figura 4.8: El semiplano  $K_g$  consiste en los puntos más cercanos a  $A$  que a  $g(A)$ .

Para probar que

$$\bigcup_{h \in H} h(\Pi) = \Delta$$

y que no hay puntos equivalentes en  $\Pi$ , basta conjugar este subgrupo a un grupo cíclico de homotecias, donde la afirmación es inmediata.

Con estas observaciones se puede probar que

$$\Sigma = \bigcap_{g \in G-H} K_g = \{z \in \Delta : \rho(z, A) < \rho(z, g(A)), \forall g \in G-H\}$$

y  $\Pi$  satisfacen las condiciones **i)** y **ii)** del Teorema 4.3.1.

**i)**  $\Sigma$  es  $H$ -estable.

Veamos primero que si  $h \in H$ , entonces  $h(\Sigma) = \Sigma$ . Sea  $h \in H$  y  $L_g$ ,  $g \in G-H$ , el bisector perpendicular entre  $A$  y  $g(A)$ , es decir,

$$L_g = \{z \in \Delta \mid \rho(z, A) = \rho(z, g(A))\},$$

se tiene entonces que

$$h(L_g) = \{w \in \Delta \mid \rho(w, A) = \rho(w, hg(A)), g \in G-H\} = L_{gh},$$

puesto que  $h(A) = A$ . Se sigue que  $h(K_g) = K_f$ , en donde  $f = gh \in G-H$ , al tomar la intersección de todos los elementos  $K_g$ ,  $g \in G-H$  se tiene que  $h(\Sigma) = \Sigma$ .

Probamos ahora que si  $g \in G-H$ ,  $g(\Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$ . Si  $z \in \Sigma$ , en particular  $z \in K_{g^{-1}}$ , llamemos  $H_g$  al conjunto de puntos que están más cercanos a  $g(A)$  que a  $A$ . Se sigue entonces que

$$\rho(z, A) < \rho(z, g^{-1}(A)),$$

al aplicar  $g$  se tiene que

$$\rho(g(z), g(A)) < \rho(g(z), g(A))$$

y si  $w = g(z)$

$$\rho(w, g(A)) < \rho(w, A)$$

por lo tanto  $w \in H_g$  y  $g(\Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$ .

Se sigue entonces que  $\Sigma$  es  $H$ -estable.

**ii)** Se prueba ahora que

$$\bigcup_n g_n(\tilde{\Sigma}) = \Delta.$$

Sea  $z \in \Delta - A$  y  $z^* \in G(z)$  un punto más cercano a  $A$ . Esto es posible puesto que  $G$  es discreto, de otra manera existe una sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\rho(z_n, A) \rightarrow 0$ . Se puede tomar una vecindad compacta  $N$  de un segmento de geodésica de  $A$  de longitud  $T_A$ , donde  $T_A$  denota la longitud de traslación de  $h$ , determinado por dos segmentos de geodésica ortogonales a  $A$  y dos segmentos hipercíclicos (véase la fig. 4.9).

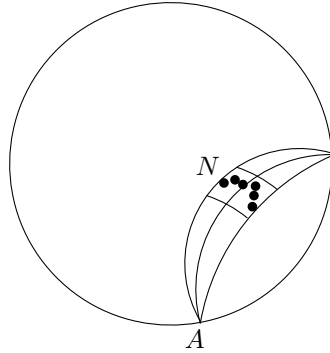


Figura 4.9: Vecindad compacta  $N$

Al usar elementos de  $H$  se obtendría una sucesión infinita de puntos distintos en la órbita  $G(z)$  que se acumulan en el compacto  $N$  (se pueden suponer distintos suponiendo que la distancia hiperbólica de  $z_k$  a  $A$  es menor que  $1/k$ ) y de esta manera no habría acción discontinua.

Se afirma que  $(z^*, P_A] \subset \Sigma$ , donde  $P_A$  es el pie de geodésica de  $z^*$  a  $A$ . Nótese que  $(z^*, P_A]$  no interseca a ninguna  $L_g$ , de otra manera se tendría que

$$\rho(z^*, gA) < \rho(z^*, A),$$

lo cual es una contradicción. Esto se sigue ya que  $\rho(z^*, gA) = \rho(g^{-1}(z^*), A)$  y se tendría que existe un punto en  $G(z)$  más cercano a  $A$  que  $z^*$ . Se tiene

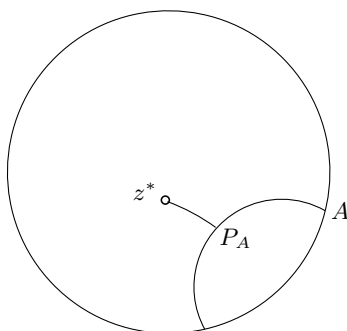


Figura 4.10: Las imágenes de  $\tilde{\Sigma}$  cubren  $\Delta$ .

entonces que  $(z^*, P_A] \subset \Sigma$  y por lo tanto  $z^* \in \tilde{\Sigma}$ , lo cual prueba **ii)** (véase la Figura 4.10).

En virtud de los Lemas 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.4, la región descrita tiene interior no vacío y como consecuencia es abierta, y por lo tanto  $\Pi \cap \Sigma$  es un polígono fundamental convexo.

**Ejemplo 4.** Consideremos un grupo fuchsiano  $G$  actuando en  $\Delta$  y que contiene un subgrupo propio  $H = \langle h, \sigma \rangle$ , donde  $h$  es una transformación hiperbólica simple con eje  $A$  y  $\sigma$  es una transformación elíptica de orden 2 con un punto fijo  $\alpha$  en  $A$ .

Tomemos las regiones  $K_g$  y  $\Sigma$  como en el ejemplo anterior. Sea  $\varepsilon$  determinada por la ecuación  $h = \varepsilon\sigma$ , se tiene que  $\varepsilon$  es una transformación que intercambia los puntos fijos de  $h$  y preserva  $A$ , por lo tanto es elíptica de orden 2.

El eje  $A$  divide a  $\Delta$  en dos semiplanos, elegimos uno de ellos y tomamos una geodésica  $L$  ortogonal a  $A$ , tal que  $L$  corta a  $A$  a una distancia de  $T_h/2$  de  $\alpha$  en la dirección de  $h$ ; donde  $T_h$  es la longitud de traslación de  $h$ . De esta manera  $h(L)$  también corta ortogonalmente a  $A$  a una distancia  $T_h/2$  de  $\alpha$  y podemos tomar a  $\Pi$  como la intersección de la región comprendida entre  $L$  y  $h(L)$  con uno de los semiplanos determinados por  $A$  (véase la Figura 4.11).

La prueba de que  $\Sigma$  es  $H$ -estable es idéntica a la del ejemplo anterior, pues claramente  $A$  es  $H$ -estable. Para probar que

$$\bigcup_n g_n(\tilde{\Sigma}) = \Delta,$$

de nuevo tomamos  $z \in \Delta - A$  y  $z^* \in G(z)$  un punto más cercano a  $A$ , lo cual es posible porque  $G$  es discreto; el punto  $z^*$  se puede suponer que pertenece al semiplano en  $\Delta - A$  que contiene a  $\Pi$  (aplicando  $\sigma$  si es necesario).

La demostración es similar a la del caso hiperbólico, tomando en cuenta que para que una sucesión infinita de puntos en  $G(z)$  que se acumulen en una vecindad compacta  $N$  (como la del Ejemplo 3), se debe aplicar  $\sigma$  a los elementos de la sucesión que estén en la región comprendida entre  $L$  y  $h(L)$  pero que no estén en  $\Pi$ . Se sigue entonces (usando los argumentos del ejemplo anterior) que  $z^* \in \tilde{\Sigma}$  y así  $\Pi \cap \Sigma$  es una región fundamental para la acción de  $G$  en  $\Delta$ .

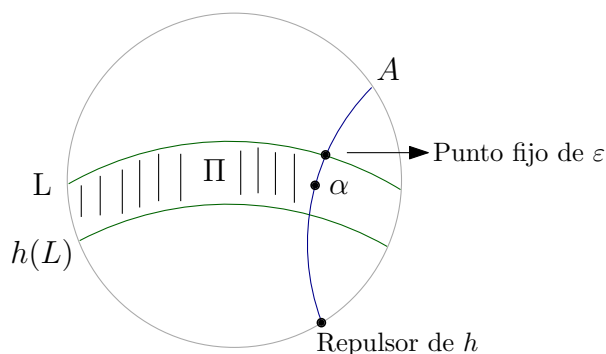


Figura 4.11: Región II.

**Teorema 4.3.6.** *Sea  $G$  un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{C})$  (kleiniano) de tal manera que  $G_\infty$  es un subgrupo de  $G$  doblemente periódico, es decir,  $G_\infty = \langle z \mapsto z + \lambda, z \mapsto z + \mu \rangle$ , donde  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  son vectores linealmente independientes. Supóngase también que los radios de las esferas isométricas  $I_{\hat{g}}$  tienden a cero (equivalentemente  $|c_n| \rightarrow \infty$ ). Entonces un dominio fundamental  $D$  para  $\hat{G}$  consiste de  $D = \Sigma \cap P_\infty$ , donde*

$$\Sigma = \bigcap_{\hat{g} \in \hat{G} - \hat{G}_\infty} \text{ext } I_{\hat{g}},$$

y

$$P_\infty = \{(x_1, x_2, x_3) \in H^3 \mid (x_1, x_2) = t\lambda + s\mu, 0 < t, s < 1\}$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que no existen puntos  $G$ -equivalentes en  $D$ . Sea  $x_0 \in D$  y  $f \in G$ . Si  $\hat{f} \in \hat{G}_\infty$ , entonces  $\hat{f}$  traslada a  $x_0$  fuera de  $D$ . Si  $\hat{f} \in \hat{G} - \hat{G}_\infty$ , como  $x_0 \in \Sigma$ ,  $x_0 \in \text{ext } I_{\hat{f}}$ , y por lo tanto  $\hat{f}(x_0) \in \text{int } I_{\hat{f}^{-1}}$  (véase el inicio del Capítulo 3), es decir,  $\hat{f}(x_0) \notin D$ . Se tiene entonces que no existen puntos  $G$ -equivalentes.

Como  $G$  es a lo sumo numerable, el conjunto de esferas isométricas es a lo sumo numerable y cada una de ellas tiene medida tridimensional de Lebesgue

cero. Por lo tanto  $\partial D$  tiene medida tridimensional de Lebesgue cero.

Ahora probamos que todo punto en  $H^3$  está representado por un punto en  $\tilde{D}$ . Nótese primero que dado un compacto  $K$  en  $H^3$  existe un número finito de esferas isométricas que lo intersecan, esto se sigue del hecho de que los radios de las esferas isométricas tienden a cero. Sea  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$  dada por

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

se probó en el Capítulo 2 que  $g = E \circ \psi$ , donde  $\psi$  es la reflexión en el círculo isométrico  $I_g$  y  $E$  es una isometría euclidiana. De este hecho se sigue que la extensión de Poincaré de  $g$  está dada por  $\hat{g} = \hat{E} \circ \hat{\psi}$  (donde  $\hat{\psi}$  es la reflexión en la esfera  $S$  con centro en  $(-d/c, 0)$  y radio  $1/|c|$ ). Como  $\hat{E}$  es la composición finita de reflexiones en planos ortogonales a  $\hat{\mathbb{C}}$ , esta función también es una isometría euclidiana. Se sigue entonces que  $\hat{g}$  actúa euclidianamente en la esfera  $S$ , por lo cual  $S = I_{\hat{g}}$ .

Probemos ahora que dada  $x \in \text{int } I_{\hat{g}}$ ,  $\hat{g}$  incrementa la *altura* de  $x$ , es decir,  $[\hat{g}(x)]_3 > x_3$ . Si  $x \in \text{int } I_{\hat{g}}$ , escribiendo  $x = (z, x_3)$ , donde  $z = (x_1, x_2)$ , se tiene que

$$\left| z - \left( -\frac{d}{c} \right) \right|^2 + x_3^2 = \left| x - \left( -\frac{d}{c}, 0 \right) \right|^2 < \frac{1}{|c|^2}$$

y

$$|c|^2 \left| x - \left( -\frac{d}{c}, 0 \right) \right|^2 < 1.$$

Se sigue entonces de la fórmula para la reflexión en una esfera que

$$[\hat{\psi}(x)]_3 = \frac{x_3}{|c|^2 \left( \left| z + \frac{d}{c} \right|^2 + x_3^2 \right)} > x_3.$$

Se afirma que dada  $\omega \in H^3$ , existe  $\omega'$  en la órbita de  $\omega$  tal que  $[\omega']_3 \geq [f(\omega)]_3$ , para toda  $f \in G$ . Para probar esto se construye una sucesión de la siguiente manera:

Si  $\omega \in P_\infty$ , hacemos  $\omega_1 = \omega$ ; de otra manera se toma  $\hat{T} \in \hat{G}_\infty$  tal que  $\hat{T}(\omega) \in \tilde{P}_\infty$ . Si  $T(\omega) \in \tilde{D}$ , se sigue el resultado; de otra manera se sigue de la observación anterior que  $T(\omega) \in \text{int } I_{\hat{g}}$  para alguna  $g \in G - G_\infty$  y se escribe  $\hat{T}(\omega) = \omega_1$ . Tomemos ahora el punto  $\omega_2 = \hat{g}(\omega_1)$ , este punto satisface  $[\omega_2]_3 > [\omega_1]_3$ . Trasladamos  $\omega_2$  a  $\omega_3 \in P_\infty$ , si  $\omega_2 \in \tilde{P}_\infty$  tomamos  $\omega_3 = \omega_2$ . Si  $\omega_3 \notin \tilde{D}$ , entonces  $\omega_3 \in \text{int } I_{\hat{g}}$  para alguna  $g \in G - G_\infty$ . Procediendo de la misma manera que antes, se forma una sucesión  $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ , tal que

$$[\omega]_3 = [\omega_1]_3 < [\omega_2]_3 = [\omega_3]_3 < [\omega_4]_3 = \dots$$

y  $\omega_{2n+1} \in \tilde{P}_\infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Se afirma que esta sucesión consta de un número finito de puntos  $(\omega_{2n+1}) \in \tilde{D}$ . Esto se sigue ya que si

$$M = \sup_{g \in G - G_\infty} \text{radio } I_{\hat{g}},$$

y se considera el compacto  $P_\infty \cap \{\alpha \in H^3 \mid [\omega]_3 \leq [\alpha]_3 \leq M\}$ , como los puntos  $\omega_{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pertenecen a dicho compacto y no se pueden acumular por la acción discontinua de  $G$  en  $H^3$ , necesariamente para alguna  $n$ ,  $[\omega_{2n+1}]_3 \geq M$  y entonces  $\omega_{2n+1} \in \tilde{D}$  (véase [2], p. 95).  $\square$

#### 4.4. Transformaciones que aparean lados

**Definición 31.** *Dado un polígono fundamental convexo  $P$  para un grupo fuchsiano  $G$  actuando en el plano hiperbólico, decimos que un lado de  $P$  es un segmento de geodésica de la forma  $\tilde{P} \cap (\tilde{P})$ , para alguna  $g \in G$  distinta de la identidad.*

**Definición 32.** *Un elemento parabólico o hiperbólico  $g$  de un grupo fuchsiano  $G$  se dice que es primitivo si y sólo si  $g$  genera al estabilizador de alguno de sus puntos fijos. Si  $g$  es elíptica, es primitiva cuando genera al estabilizador y tiene un ángulo de rotación de la forma  $2\pi/n$ .*

Nótese que en el caso hiperbólico, si  $g$  genera al estabilizador de alguno de los puntos fijos,  $g$  lo hace para los dos puntos fijos (ya que  $G$  es discreto, cf. [2], pp. 86, 87).

Dado un grupo fuchsiano  $G$  y un polígono fundamental convexo  $P$  para  $G$ , se puede probar que los elementos que aparean lados de  $P$  generan a  $P$  (ver [2], sección 9.3). Cada elemento elíptico primitivo y cada elemento parabólico primitivo de  $G$  aparean los lados de un dominio fundamental, de hecho de un polígono de Dirichlet. Esto se sigue de los Ejemplos 3 y 4 de la sección anterior, véase también las secciones 9.2 y 9.4 de [2].

El siguiente resultado analiza el caso hiperbólico.

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $g$  un elemento hiperbólico primitivo de un grupo fuchsiano  $G$  y  $A$  el eje de  $g$ . Entonces  $g$  aparean lados de un polígono fundamental convexo  $P$  si y sólo si para toda  $h \in G$ ,  $h(A) = A$  o  $h(A) \cap A = \emptyset$ , es decir,  $g$  es simple.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que  $g$  es simple, es decir que para toda  $h \in G$   $h(A) = A$  o  $h(A) \cap A = \emptyset$ . Sea

$$H = \{h \in G \mid h(A) = A\}.$$



Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $G$  actúa en  $H^2$  y que  $g$  está dada por la homotecia  $g(z) = kz$ . Entonces puede ser que  $H = \langle h \rangle$  o que  $H = \langle h, \sigma \rangle$ , donde  $\sigma$  es una transformación elíptica de orden 2 con un punto fijo en  $A$ .

Se puede construir una región  $\Sigma$  como en los Ejemplos 3 y 4 de la sección anterior que satisfaga las condiciones del Teorema 4.3.1. Si  $H$  es cíclico tomamos

$$\Pi = \{z \in H^2 \mid 1 < |z| < k\}.$$

Si  $H$  no es cíclico, conjugando podemos suponer que está generado por  $g$  y una transformación elíptica de orden 2 que fija  $i\sqrt{k}$ , y en este caso tomamos

$$\Pi = \{z \in H^2 \mid 1 < |z| < k, \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

En ambos casos  $\Pi \cap \Sigma$  es una región fundamental para la acción de  $G$  en  $H^2$ , y  $g$  apareja lados de  $\Pi \cap \Sigma$  que contienen arcos de  $|z| = 1$  y  $|z| = k$ , respectivamente; esto se sigue ya que dada una región horocíclica, esta interseca a un número finito de imágenes de  $A$  bajo elementos de  $G - H$ , tomándola suficientemente pequeña, esta región no interseca a ninguna geodésica  $f(A)$ ,  $f \in G - H$  (véase la Figura 4.12).

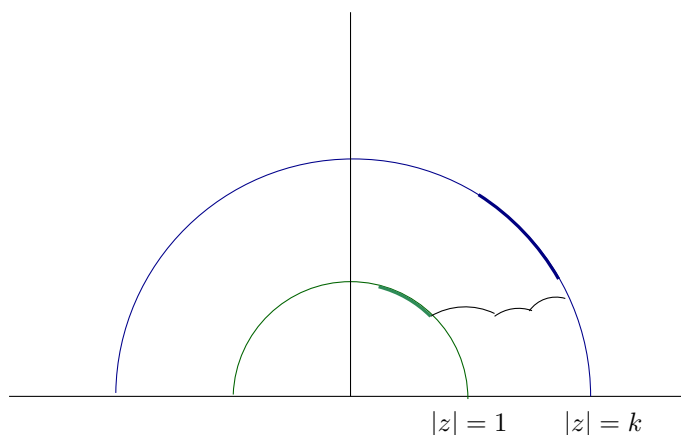


Figura 4.12: Apareamiento de lados de  $\Pi \cap \Sigma$ .

Supongamos ahora que  $g$  es hiperbólica con puntos fijos  $\alpha$  y  $\beta$  y apareja dos lados  $s$  y  $s'$  de  $P$ . Sea  $w$  un punto interior de  $s$  que no sea fijo de los elementos no triviales de  $G$  y  $\gamma = [w, g(w)]$ ; entonces  $\gamma - \{w, g(w)\} \subset \operatorname{int} P$  debido a que  $g$  no es elíptica de orden 2, y a que  $\tilde{P}$  es convexo.

Ahora, la curva

$$\Gamma = \bigcup_n g^n(\gamma)$$

es una curva simple  $g$ -invariante en  $\Delta$  que tiene como extremos a los puntos fijos de  $g$ . Nótese que el eje  $A$  de  $g$  también comparte estas propiedades.

Supongamos ahora que para alguna  $h \in G$ ,  $h(A) \cap A \neq \emptyset$ , esto significa que las geodésicas  $A$  y  $h(A)$  se intersecan en un punto o  $h(A) = A$  ( $h(A)$  no puede ser paralela a  $A$  puesto que  $h(A)$  es el eje de  $hgh^{-1}$  y dos transformaciones hiperbólicas no comparten un punto fijo en común en un grupo fuchsiano, cf. [2], Teorema 5.1.2).

Supongamos que  $h(A)$  interseca en al menos un punto un punto a  $A$  y que  $h(A) \neq A$ , esto implica por conexidad que las curvas  $\Gamma$  y  $h(\Gamma)$  se intersecan en al menos un punto  $z_0 \in \Delta$ . Para probar esto, se puede observar que  $\Gamma$  divide a  $\Delta$  en dos componentes, de manera que una de ellas contiene a  $h(\alpha)$  y la otra a  $h(\beta)$ . De esta manera  $h(\Gamma)$  es una curva simple que une a  $h(\alpha)$  con  $h(\beta)$ ; recordemos que  $A$  y  $\Gamma$  tienen los mismos puntos extremos al igual que los tienen sus respectivas imágenes bajo  $h$  (véase la Figura 4.13).

Se sigue entonces que existen  $z_1, z_2 \in \gamma$  y enteros  $n$  y  $m$  tales que

$$z_0 = g^n(z_1) = hg^m(z_2),$$

lo cual implica que  $z_1 = g^{-n}hg^m z_2$ . Debido a que los únicos puntos de  $\gamma$  equivalentes bajo elementos de  $G$  son  $w$  y  $g(w)$ , puede pasar que  $z_1 = z_2$ ,  $g(z_1) = z_2$  o  $z_1 = g(z_2)$ . En todos los casos, se sigue entonces que  $h$  es alguna potencia de  $g$  y por lo tanto  $h(A) = A$ .  $\square$

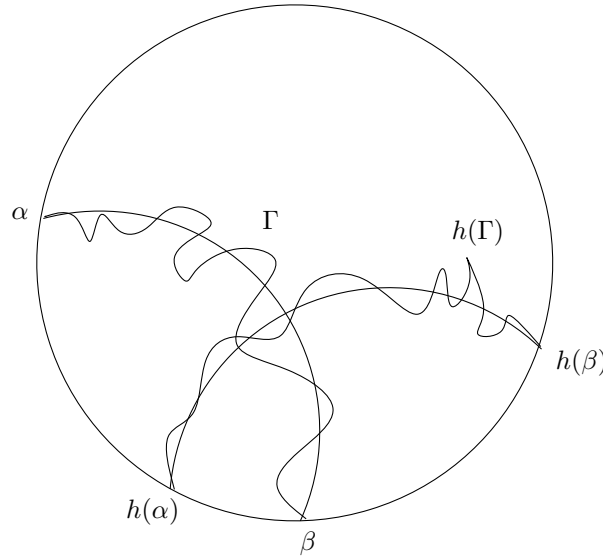


Figura 4.13: Prueba de la necesidad en el Teorema 4.4.1.



# Bibliografía

- [1] ÁVILA BAEZ, V. M., *Producto inversivo y polígonos hiperbólicos*, Tesis de licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias, 2005.
- [2] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [3] GROMOV, M., *Hyperbolic Manifolds (according to Thurston and Jørgensen)*, *Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80, pp. 40-53*, Lecture Notes in Math., 842, Springer, Berlin-New York, 1981.
- [4] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, UNAM, Facultad de Ciencias, 2005.
- [5] LEHNER, J., *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, American Mathematical Society, 1964.
- [6] PÉREZ GUERRERO, J. S., *Polígonos Fundamentales Convexos y Regiones de Ford en  $\mathbb{C}$* , Tesis de licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias, 2010.
- [7] SHIMURA, G., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Tokio Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1971.
- [8] THURSTON, W. P., *Three Dimensional Geometry and Topology, vol 1*, Princeton University Press, 1997.