UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

Algunos Problemas que se pueden Resolver con Polinomios Simétricos Elementales en el Bachillerato

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE
Maestro en Educación en Matemáticas

P R E S E N T A
Víctor Manuel Pérez Torres

Asesor: M. en C. Juan B. Recio Zubieta
Facultad de Estudios Superiores Acatlán

MÉXICO, D. F. MARZO DE 2013

Agradecimientos

A mi familia, a mis amigos y en especial
a mi profesor y amigo Guillermo Gómez Alcaraz

ALGUNOS PROBLEMAS QUE SE PUEDEN RESOLVER CON POLINOMIOS SIMÉTRICOS ELEMENTALES EN EL BACHILLERATO

ÍNDICE

ALGUNOS PROBLEMAS QUE SE PUEDEN RESOLVER CON POLINOMIOS SIMÉTRICOS ELEMENTALES

INTRODUCCIÓN

El álgebra es la columna vertebral de las matemáticas escolares de los grados medio y medio superior y su aprendizaje es en general, un problema para la mayoría de los estudiantes en todo el mundo. El aprendizaje del álgebra es un problema global en más de un sentido: hay dificultades conceptuales, de significados, de habilidades sintácticas, etc.

Si entre estudiantes de secundaria y bachillerato es fácil detectar limitaciones en las actividades transformacionales del álgebra escolar, así como concepciones erróneas de sus conceptos centrales, ahora también es común encontrar personal de reciente ingreso a las plantas docentes de matemáticas de bachillerato, con serias limitaciones en varias ramas de las matemáticas escolares de este nivel educativo, incluida el álgebra.

Esta situación y que el Estado deberá ofrecer educación de doce años, garantizando a todo joven acceso a estudios hasta el nivel medio superior, genera ya, el problema de contar con profesores formados como tales, profesores que en estos momentos no existen ni para la demanda presente. Entonces, se requiere contar con un programa en que se formen profesores, en particular de matemáticas, con la capacidad para enfrentar los retos abiertos por la enseñanza y el aprendizaje en esta área del conocimiento y que contemple la actualización de los profesores en servicio.

En este contexto, la formación de profesores de matemáticas en bachillerato abre varias preguntas, por ejemplo:

¿De dónde se tomarán los candidatos para profesor?

¿Qué características debe reunir un futuro profesor?

¿Qué conocimientos de la disciplina debe tener el docente de bachillerato?

¿Quién debe formar a los futuros docentes? y, ¿cómo?

Para contribuir a intentar responder las preguntas anteriores, he venido trabajando desde hace más de cinco años en un Seminario integrado por profesores del CCH quienes han obtenido el grado de doctor, maestro en ciencias, concluidos los créditos de la maestría, todos en matemática educativa, además de profesores de nuevo ingreso y otros con más de 30 años de antigüedad en el CCH. Con dicho grupo de trabajo hemos diseñado, cuatro diplomados, de los cuales hemos impartido tres dirigidos a profesores del CCH, dos sobre tecnologías digítales y uno de álgebra, en los que se trato la necesidad de dominar la disciplina, al igual que conocer las propuestas didácticas planteadas por la matemática educativa, así como la de elaborar trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Durante el año escolar 2012-2013 impartiremos el Diplomado de Geometría ya diseñado. En particular en el Seminario elaboramos una propuesta sobre formación y actualización de profesores de Matemáticas, marco en el que nos basamos para el diseño de los diplomados[1]. También elaboramos un documento sobre el uso de tecnologías digitales en la educación[2]. He pertenecido por más de 18 años al Consejo Académico de Matemáticas en donde apoye la revisión de los proyectos y productos de los profesores de carrera y de los grupos de trabajo. Además he participado por más de tres años en el seminario del doctor Luz Manuel Santos Trigo, que se imparte en el Cinvestav los miércoles, cada quince días.

Este trabajo se ubica dentro de la problemática de la formación de profesores de matemáticas de bachillerato y en particular, aborda conocimientos que, se propone, deben manejar los docentes en el tema de ecuaciones algebraicas. Que los profesores cuenten con el recurso que proporcionan los polinomios simétricos elementales en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones de grado mayor a dos, lo cual les puede permitir establecer nuevas heurísticas para encontrar la solución de ese tipo de problemas.

El álgebra y la formación y actualización de profesores de matemáticas de bachillerato

Las matemáticas escolares de los niveles medio y medio superior tienen en el álgebra su elemento esencial. Formalmente, desde el primer año de secundaria, los estudiantes tienen acercamientos al álgebra y en el bachillerato se profundizan los conocimientos y habilidades que después, serán la plataforma para acceder al cálculo y otras matemáticas. Esta estructura curricular obliga a los profesores a tener conocimientos no sólo del álgebra escolar, los docentes necesariamente requieren tener mayores conocimientos algebraicos

[1] Véase el Apéndice 1
[2] Véase el Apéndice 2

pues estos les permiten una visión global y con sentido claro de los porqués asociados al álgebra escolar.

Las ideas sobre la formación de profesores de matemáticas está evolucionado incesantemente, la investigación ha pasado de estudios sobre los conocimientos de matemáticas y didáctica de los profesores, a la de sus creencias sobre la enseñanza, el aprendizaje y sus relaciones, a cómo estas creencias se manifiesta en el aula.

La expansión casi universal del álgebra en los currículos hace del tema, formar a los profesores que imparten e impartirán esta materia, un problema de investigación en pleno desarrollo con una variedad de propuestas, dentro de éstas, destaca una: que los profesores de matemáticas aprendamos a través de enseñar.

En el bachillerato el papel central del álgebra es indiscutible, no solo desde el punto de vista curricular, también lo es desde la perspectiva de la formación del profesor. En el Plan de Estudios Actual del CCH, los programas de los cuatro primeros semestres de matemáticas están organizados a través de temas algebraicos. El carácter propedéutico del bachillerato determina esta orientación y esto obliga a que los conocimientos del profesor deben oscilar en esta orbita, primero en cuanto a los conocimientos de las matemáticas escolares y en profundidad, en cuanto a los conocimientos de la disciplina como tal. Todavía, el álgebra y sus desarrollos actuales siguen siendo el núcleo de las matemáticas. En este sentido, la formación del profesor de matemáticas, de bachillerato, también debe centrarse en el álgebra. Desde luego, esto no significa que se soslaye el papel de la geometría y el cálculo en la formación de profesores y estudiantes, simplemente, el álgebra, junto con la aritmética son los pilares en los que se desarrollarán nuevos conocimientos.

PLANTEAMIENTO DE LA TESIS

Desde la antigüedad las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, cuadráticas y de mayor grado, han representado una parte esencial del álgebra. Históricamente el desarrollo de esta rama de las matemáticas creció y alcanzó su formalización a través del estudio de las ecuaciones, de la búsqueda de sus soluciones y generalización hasta el descubrimiento de las estructuras algebraicas.

El álgebra inicia cuando se plantean situaciones en las que por medio del lenguaje ordinario se resuelven problemas en donde se involucra una cantidad desconocida y se resuelven expresando la solución por el mismo medio, lo cual es conocido como la *etapa retórica* del álgebra. La evolución a otra etapa surge en lo fundamental a partir de Diofanto, alrededor de 246-330 d. C., quien escribió ecuaciones y usó símbolos especiales para representarlas, inaugurando así la *etapa lacónica*. La *etapa simbólica* que inicia a finales del siglo XVI, propiamente con Vieta (1540-1603) y mostrada en el trabajo de Descartes de la geometría analítica (1637). Es de esa *etapa* el álgebra que vemos en el bachillerato, la cual trata, en lo fundamental, de la solución de ecuaciones de primer y segundo grado, así como de casos especiales de mayor grado, además de su representación gráfica y tabular.

Sin duda, los profesores o candidatos a profesor del bachillerato, deben conocer el desarrollo del álgebra, así como los problemas inherentes a su enseñanza y aprendizaje, conocer propuestas didácticas resultado de la investigación educativa, el origen de las dificultades de los estudiantes en su aprendizaje y mantenerse al tanto de la investigación educativa a la par de realizar propuestas orientadas a practicar en clase con los alumnos y estudiar sus resultados por medio de, por ejemplo, secuencias didácticas.

Una forma simplista de ver o considerar a las ecuaciones algebraicas es que en ellas sólo hay una forma de actividad, la transformacional, una actividad guiada exclusivamente por las reglas sintácticas propias del álgebra. No es así, en la solución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones aparecen significados y elementos conceptuales esenciales que no deben perderse de vista.

Si bien hay software que permite realizar simplificaciones, expansiones, factorizaciones y resolver algunas ecuaciones y sistemas de ecuaciones, no hay significados que se puedan atribuir al software, esto es, el programa no genera significados ni los usa en ningún momento; tampoco se puede atribuir al sistema computacional que use uno o varios conceptos con sentido. Pero, cuando un estudiante resuelve una ecuación, más allá de la aplicación de las reglas de transformación, puede construir significados, esenciales para su aprendizaje.

El trabajo que presento es una propuesta de un curso para aspirantes o profesores de matemáticas del bachillerato, enmarcado dentro de una propuesta para la formación y actualización de la planta docente del bachillerato, en particular para el CCH.

Como sabemos, los cursos en el bachillerato se ocupan normalmente de enseñar a los alumnos a resolver ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita, sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, sistemas no lineales en los que se trabaja con una ecuación cuadrática y una lineal, o bien a determinar en funciones polinomiales los ceros utilizando teoremas como el de las raíces racionales, el del residuo, el del valor intermedio y la regla de los signos de Descartes, auxiliados por la exploración de valores. Sin embargo, sistemas más complejos que involucren ecuaciones no lineales, se omiten. Las ecuaciones de cuarto o quinto grado, se tratan poco y las de grado mayor prácticamente no.

Por otro lado, a nivel superior, a lo sumo se trabaja en la solución de ecuaciones no lineales con una incógnita, pero un tratamiento sistemático (fuera de los cursos de análisis numérico) no se da, llegándose a lo sumo a resolver uno que otro ejemplo de manera particular, cuando el curso lo requiere. Por lo anterior, se puede asegurar que es un tema muy poco conocido por los profesores.

El trabajo establece la posibilidad de contar con una material en el cual sean tratados de manera sistemática ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales, de manera comprensible para los profesores, con ayuda de los polinomios simétricos elementales, proponiendo las soluciones como un conjunto de métodos de solución y no como soluciones particulares a casos particulares.

Se presentó el material a diez profesores, cinco de la facultad de Ciencias de la UNAM y cinco del CCH, así como un cuestionario que respondieron dando su punto de vista después de leer el material. El resumen de sus comentarios se puede consultar en las conclusiones de este trabajo.

En concreto, en este documento planteo cómo resolver problemas mediante polinomios simétricos elementales, en particular sistemas de dos ecuaciones no lineales, presentando en la medida de lo posible procedimientos generales partiendo de ejemplos resueltos y planteado problemas en los cuales se apliquen dichos procedimientos, mostrando que la matemática es una actividad teórica que sistematiza y organiza el conocimiento que se va teniendo del tema. En el estudio de Sarah D. Ledford[3], *et al, Interesting Solutions and ideas emerge when preservice and in-service teachers are asked a tradicional algebra question in new ways*, se muestra el interés actual por trabajar con temas como el que propongo.

Inicie el trabajo consultando libros y revistas sobre el tema. De manera paralela, mediante la solución de problemas, busque las generalizaciones posibles en cuanto a método de solución.

Bibliografía consultada.

A. D. Aleksandrov, et al. (1994). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Vol. 1. Ed. Alianza Editorial

Aycob, Raymond. (1980). *Paolo Ruffinín Contribution to the Quintio*". Artículo.

Abel. N. H. (1824). *Mémoire Sur les équations algébriques oú on démontre l´impossibilité de la résolution de l´équation générale du cinquième degré*. Ed. Christiana: Groendahl.

Dickson, Leonard (1922). *Theory of algebraic equations*. J. Wiley & Sons. New York, J. Inc.

Florian Cajori. (1943). *An introduction to the modern theory of equations*: Macmillan. New York.

H. Gray Funkhouser. (1930). *A Short Account of the History of Symmetric Functions of Roots of Equations*. *American Mathematical Montly*. Vol. 37, No. 7, Agos. - Sep., (pp. 357-365). Ed. Mathematical Association of America.

Uspensky. J. B. (1948). *Theory of equations*: McGraw-Hill.

[3] *Mathematics Teacher*, Vol. 106, No. 2, septiembre de 2012

I. INTRODUCCIÓN A LOS POLINOMIOS SIMÉTRICOS ELEMENTALES

Durante los estudios de bachillerato, todos nos enfrentamos, en al menos una ocasión, a problemas similares al siguiente: "Encontrar los puntos de intersección de la recta $x+y=2$ con la elipse $9x^2+4y^2=36$". Un método que se aplica normalmente en estos casos es el de sustitución, llegando a la solución como sigue:

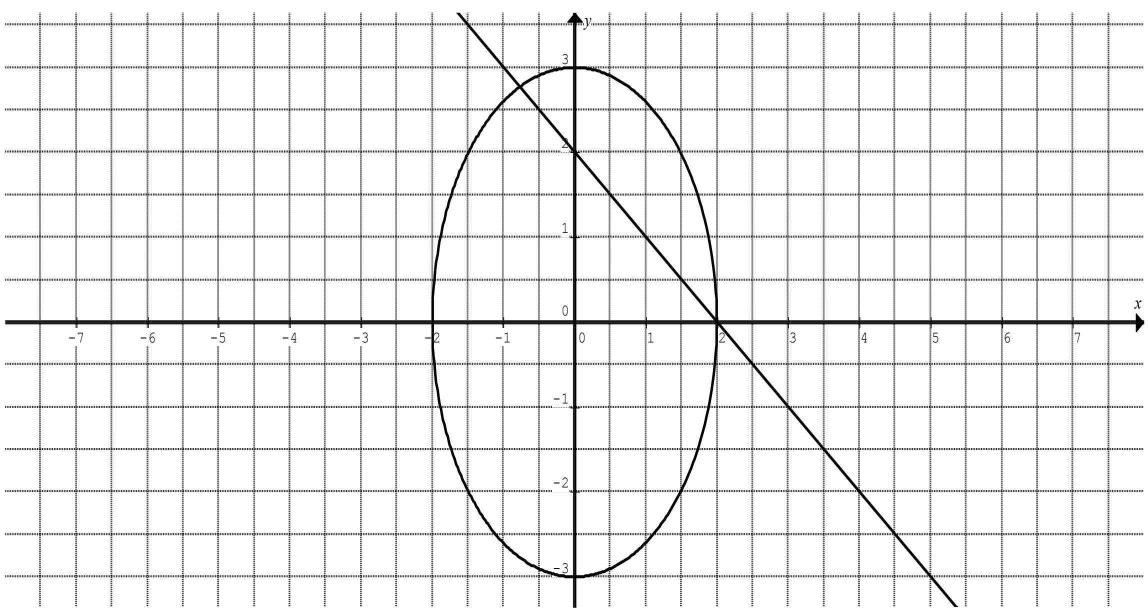
$$\begin{cases} x+y=2 \\ 9x^2+4y^2=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2-y \\ \therefore 9(2-y)^2+4y^2=36 \end{cases} \Rightarrow 13y^2-36y=0$$

$$\begin{cases} y_1=0 \\ y_2=\dfrac{36}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-\dfrac{10}{13} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1=2,\ y_1=0 \\ x_2=-\dfrac{10}{13},\ y_2=\dfrac{36}{13} \end{cases}$$

Lo anterior puede verse gráficamente en la siguiente figura:



Si bien mediante este método es posible excluir siempre una de las incógnitas, esto no significa que en otros problemas, también elementales, podamos encontrar la solución final con su ayuda. Consideremos, por ejemplo, que se intenta encontrar el punto de intersección de las siguientes curvas:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$$

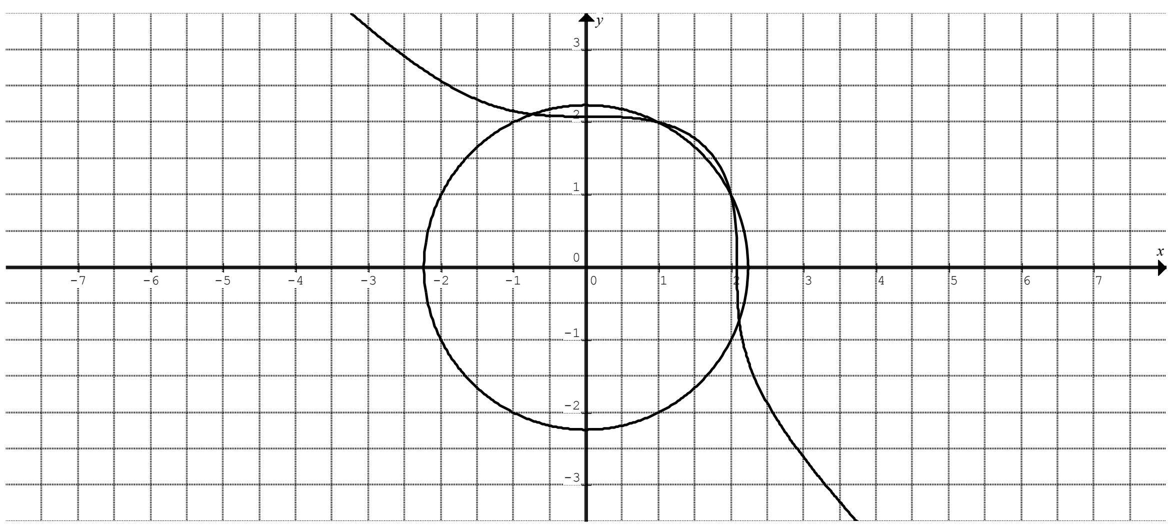
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 5 - x^2 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{5-x^2} \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x^3 + \left(\pm\sqrt{5-x^2}\right)^3 = 9 \right.$$

$$\left\{ x^3 + \left(\pm\sqrt{5-x^2}\right)^3 = 9 \right. \Leftrightarrow \left\{ x^3 \pm (5-x^2)^{3/2} = 9 \right. \Leftrightarrow \left\{ x^3 - 9 = \pm(5-x^2)^{3/2} \right. \Leftrightarrow \left\{ (x^3-9)^2 = (5-x^2)^3 \right.$$

$$(5-y^2)^3 = \left(9-y^3\right)^2 \Leftrightarrow 2y^6 - 15y^4 - 18y^3 + 75y^2 - 44 = 0$$

Hemos obtenido una ecuación de sexto grado, para las cuales no existe fórmula que mediante un número finito de operaciones (suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada) nos permita encontrar su solución.[4]

Si graficamos las dos ecuaciones originales, tendremos la solución gráfica del sistema, como se muestra a continuación.



Se puede demostrar que el método de sustitución para un sistema de ecuaciones con dos variables, lleva a ecuaciones de grado mn, en donde m es el grado de una de las ecuaciones y n el de la otra.[5]

[4] Véase el Apéndice 3.
[5] Véase el Apéndice 4.

Usualmente ese tipo de problemas se resuelve con ayuda de métodos particulares, en ocasiones muy ingeniosos aunque rebuscados, sin ningún principio general detrás de ellos. Cada sistema, por así decirlo, tiene su propio método, el cual poco tiene que ver con el método de resolver otros sistemas similares. Por ejemplo en el libro *Álgebra Superior* de Hall Knight,[6] para resolver el sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

se hace lo siguiente:[7] primero se consideran las variables auxiliares μ y ν que se establecen mediante las siguientes ecuaciones:

Al sustituirlas en el sistema (1), se obtiene

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mu+\nu)^4 + (\mu-\nu)^4 = 82 \\ \nu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (\mu+1)^4 + (\mu-1)^4 = 82$$

$$(\mu+1)^4 + (\mu-1)^4 = 82 \Leftrightarrow \mu^4 + 6\mu^2 - 40 = 0$$

que al resolverla como una bicuadrática, se llega a que:

$$\mu^2 = 4 \qquad \text{ó} \qquad \mu^2 = -10,$$

de donde

$$\mu = \pm 2 \qquad \text{ó} \qquad \mu = \pm\sqrt{-10}$$

y luego

$$x = 3, -1, 1 \pm \sqrt{-10}$$

$$y = 1, -3, -1 \pm \sqrt{-10}$$

Tanto a nivel bachillerato como a nivel superior no existe un tema dedicado específicamente a tratar con ese tipo de sistemas, quizá en parte por lo señalado en los párrafos anteriores y porque a nivel superior se le considera un tema de matemática elemental. Dando como resultado que exista una colección de métodos particulares, muchos de ellos obtenidos al resolverse problemas de gran dificultad, del tipo que se presentan en la Olimpiada Matemática. Ahora bien, de lo que se trata en este trabajo es de establecer un método guía, que en una buena cantidad de problemas sea útil y determinar

[6] Hall Knight, *Álgebra superior*, UTHEA, México, 1980.
[7] Este sistema lo resolveremos en el Capítulo 3 siguiendo las ideas desarrolladas en el Capítulo 2.

cuáles son los problemas tipo que este método puede ayudar a resolver. Dicho método se basa en los polinomios simétricos elementales y a continuación se inicia su explicación. Comencemos con la definición de polinomio simétrico.

Definición. Un polinomio en dos variables x y y es llamado *simétrico* si no cambia al sustituir x por y y y por x.

Ejemplos:

a) Son polinomios simétricos:

(i) $x^2 y + yx^2$

(ii) $xy + x + y$

b) No son polinomios simétricos:

(i) $x^2 y + xy$

(ii) $x^2 + y$

De los polinomios simétricos existentes nosotros usaremos de manera especial los siguientes polinomios, conocidos como polinomios simétricos elementales en dos variables:[8]

a) $\sigma_1 = x + y = y + x$

b) $\sigma_2 = xy = yx$

También usaremos la relación existente entre los polinomios simétricos elementales y las sumas de potencias:

$$S_1 = x + y$$
$$S_2 = x^2 + y^2$$

$$S_n = x^n + y^n$$

Éstas, al ser expresadas por medio de cuadrados perfectos, cubos perfectos, etc., nos llevan a que siempre son expresables algebraicamente mediante polinomios simétricos elementales.[9]

[8]Los cuales son un caso particular de los polinomios simétricos elementales. Véase el Apéndice 5.

Con base en las relaciones obtenidas en el Apéndice 3, que hacen plausible la proposición de que todo polinomio simétrico sea representado como una función de σ_1 y σ_2. No sobra mencionar que todo polinomio en σ_1 y σ_2 es un polinomio simétrico en x y y, lo cual es inmediato si en tal polinomio se sustituye σ_1 por $(x+y)$ y σ_2 por xy.

Podemos ahora proponernos establecer el *teorema fundamental de los polinomios simétricos de dos variables* (que es el mismo teorema fundamental para polinomios simétrico en n variables cuando $n=2$. (Véase por ejemplo el Kurosh de *Álgebra superior*).

Teorema Fundamental. Todo polinomio simétrico en x, y puede expresarse como un polinomio en σ_1 y σ_2.[10]

Finalmente, otro teorema que usaremos con frecuencia se establece a continuación:

Teorema 1. Sean σ_1 y σ_2 dos número arbitrarios, la ecuación cuadrática,

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$$

y el sistema,

$$\begin{cases} x + y = \sigma_1 \\ xy = \sigma_2 \end{cases}$$

se relacionan de la siguiente manera:

Teorema 2. Si z_1, z_2 son soluciones de la ecuación cuadrática $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$, entonces el sistema

$$\begin{cases} x + y = \sigma_1 \\ xy = \sigma_2 \end{cases}$$

tiene dos y sólo dos soluciones:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = z_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_2 = z_2 \\ y_2 = z_1 \end{cases}$$

[9]Véase el Apéndice 6.

[10]La demostración se puede ver en el Apéndice 7.

y si $x = a$ y $y = b$ es una solución del sistema, entonces a y b son soluciones de la ecuación cuadrática.[11]

[11]La demostración de puede ver en el Apéndice 8.

II. SISTEMAS NO LINEALES DE ECUACIONES SIMÉTRICAS CON DOS VARIABLES

Pasemos ahora a mostrar mediante ejemplos cómo podríamos utilizar lo mencionado anteriormente cuando tenemos sistemas de ecuaciones simétricas.

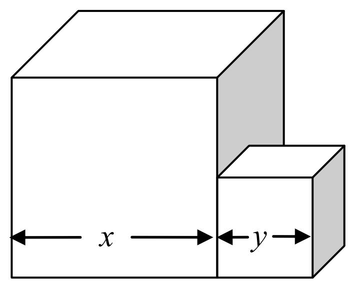
Problema 1. Se desean construir dos cisternas cúbicas que tengan una capacidad total para almacenar 35 m^3 de agua. La restricción con la que se cuenta es que la suma de los anchos de las dos cisternas deben ser igual a 5 m, ¿qué ancho debe tener cada cisterna?

Solución

Sea x el ancho de una de las cisternas y sea y el ancho de la otra.

Tendremos que:

$$(1)\begin{cases} x^3 + y^3 = 35\text{m}^3 \\ x + y = 5\text{m} \end{cases}$$



Intentemos expresar a $x + y$ y a $x^3 + y^3$ en términos de σ_1 y σ_2, en donde

$$x + y = \sigma_1$$

$$xy = \sigma_2$$

Así pues,

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$= \sigma_2^3 - 3\sigma_2\sigma_1$$

(El resultado para $x^3 + y^3$, se puede dar directamente con ayuda de la tabla A-3-1)

Por lo anterior,

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1^{\ 3} - 3\sigma_1\sigma_2 = 35 \\ \sigma_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow 125 - 15\sigma_2 = 35$$

de donde,

$$\sigma_2 = 6 \Rightarrow \sigma_1 = 5$$

de ahí que:

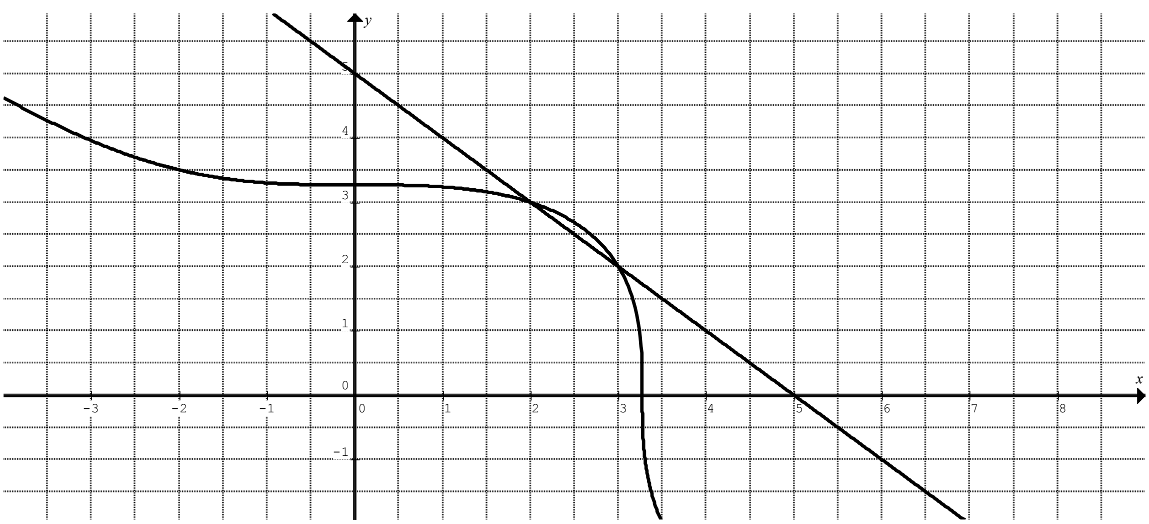
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

La solución de éste sistema, por el teorema 2, es equivalente a la solución de la ecuación:

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

$$\therefore z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases} \end{matrix}$$

Para el problema, la gráfica sería la siguiente:



Lo anterior significa que tenemos dos soluciones. Observemos que al interpretarlas podemos concluir que sólo es una, es decir, que una cisterna debe tener 2 m de ancho y la otra 3 m.

Problema 2. Encontrar los puntos de intersección de la curva y la recta siguientes:

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Solución

Iniciemos escribiendo el sistema correspondiente para luego reescribirlo en términos de σ_1 y σ_2 con ayuda de la tabla A-3-1.

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^{\ 5} - 5\sigma_1^{\ 3}\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 33 \\ \sigma_1 = 3 \end{cases}$$

$$\therefore 3^5 - 5(3)^3\sigma_2 + 5(3)\sigma_2^2 = 33$$
$$15\sigma_2^2 - 135\sigma_2 + 210 = 0$$
$$\sigma_2^2 - 9\sigma_2 + 14 = 0$$

Al resolver esta cuadrática obtenemos que:

$$\sigma_2 = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2 = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

de donde,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 7 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Ahora, por el teorema 2, obtenemos dos ecuaciones cuadráticas, cada una correspondiente a un sistema:

$$z^2 - 3z + 7 = 0 \quad \text{ó} \quad z^2 - 3z + 2 = 0$$

Al resolver las ecuaciones obtenemos,

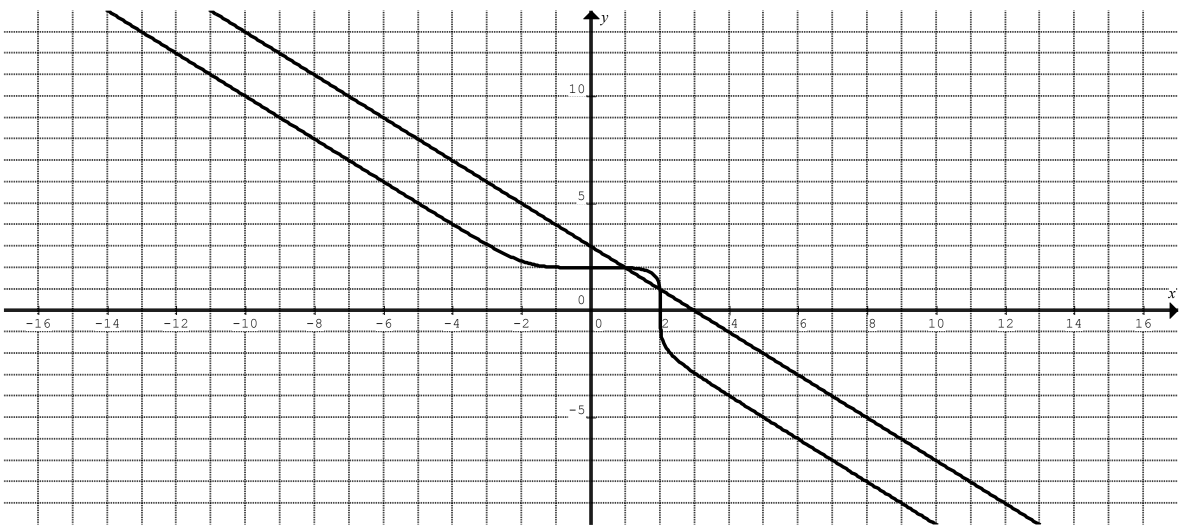
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{3+\sqrt{19}i}{2} \\ z_2 = \dfrac{3-\sqrt{19}i}{2} \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} z_3 = 2 \\ z_4 = 1 \end{cases}$$

por lo que obtenemos cuatro soluciones para el sistema original:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3+\sqrt{19}i}{2} \\ y_1 = \dfrac{3-\sqrt{19}i}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{3-\sqrt{19}i}{2} \\ y_2 = \dfrac{3+\sqrt{19}i}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 1 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x_4 = 1 \\ y_4 = 2 \end{cases}$$

Con base en lo anterior podemos concluir que se tienen dos puntos de intersección, el (2,1) y el (1,2). Podemos ilustrar esto último gráficamente como sigue:



Problema 3. Encontrar dos números cuya suma de cubos sea 8 y su suma de cuadrados 4.

Solución

Primero escribiremos el sistema correspondiente al problema planteado y a continuación, con ayuda de la tabla A-3-1, lo reescribiremos en términos de σ_1 y σ_2

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 8 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 8 \\ \sigma_2 = \dfrac{\sigma_1^2 - 4}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo σ_2 en la primera ecuación, obtenemos:

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\left(\frac{\sigma_1^2 - 4}{2}\right) = 8$$

$$\sigma_1^3 - \frac{3}{2}\sigma_1^3 + 6\sigma_1 = 8$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_1^3 + 6\sigma_1 = 8$$

$$\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = 0$$

Esta última ecuación la podríamos resolver mediante la fórmula correspondiente, o bien intentar encontrar una de sus raíces por tanteos. Haremos esto último. Observamos que $\sigma_1 = 0, \pm 1$ no son solución; sin embargo, $\sigma_1 = 2$ sí es raíz de la ecuación. Con ayuda del procedimiento de división sintética[12] podemos dividir a $\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = 0$ por $\sigma_1 - 2$

1	0	-12	16
	2	4	-16
1	2	-8	0

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16}{\sigma_1 - 2} = \sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8 = 0$$

Ahora resolvamos la ecuación cuadrática que nos resultó

$$\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 2 \quad \text{ó} \quad \sigma_1 = -4$$

Hemos obtenido las soluciones: $\sigma_1 = 2$ y $\sigma_1 = -4$, siendo $\sigma_1 = 2$ una raíz de multiplicidad 2.

$$\sigma_1 = 2 \Rightarrow \sigma_2 = 0$$

y

$$\sigma_1 = -4 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{(-4)^2 - 4}{2} = 6$$

[12]Véase Apéndice 9

Con base en lo anterior y en el teorema 2, obtenemos:

$$\begin{cases}\sigma_1 = 2\\ \sigma_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=2\\ xy=0\end{cases} \Rightarrow z^2 - 2z = 0$$

de donde,

$$\begin{cases}z_1 = 0\\ z_2 = 2\end{cases} \qquad\qquad \begin{cases}x_1 = 0,\ \ y_1 = 2\\ x_2 = 2,\ \ y_2 = 0\end{cases}$$

y

$$\begin{cases}\sigma_1 = -4\\ \sigma_2 = 6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=-4\\ xy=6\end{cases}$$

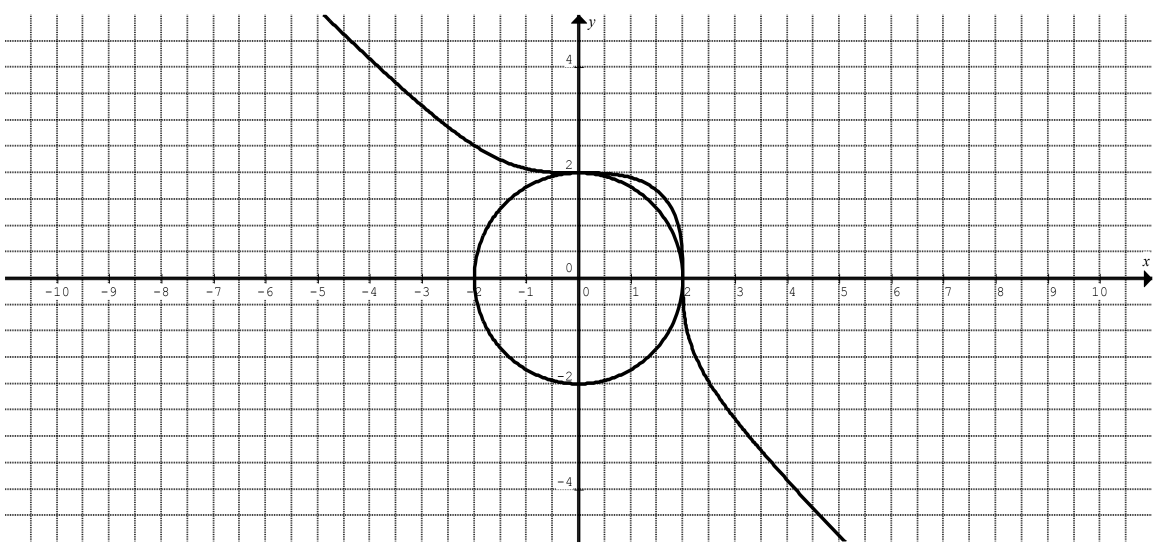
$$\Rightarrow z^2 + 4z + 6 = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases}z_1 = -2+\sqrt{2}i\\ z_2 = -2-\sqrt{2}i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_3 = -2+\sqrt{2}i\\ y_3 = -2-\sqrt{2}i\\ x_4 = -2-\sqrt{2}i\\ y_4 = -2+\sqrt{2}i\end{cases}$$

Podemos concluir que existen dos pares de números que satisfacen las condiciones del problema: (0,2), (2,0), y $\left(-2+\sqrt{2}i, -2-\sqrt{2}i\right)$ y $\left(-2-\sqrt{2}i, -2+\sqrt{2}i\right)$

Para este caso la gráfica sería la siguiente:



Si observamos con cuidado la manera en que hemos resuelto los tres ejemplos anteriores, podríamos llegar a la conclusión de que el procedimiento que hemos seguido es el que a continuación se describe:

Procedimiento que utilizamos para resolver los problemas.

A. Verificamos que las ecuaciones consideradas sean simétricas.

B. Expresamos las ecuaciones simétricas en x y y, como ecuaciones en σ_1 y σ_2 con base en el teorema fundamental. Para lo cual podemos auxiliarnos con la tabla A-3-1.

C. De la ecuación de menor grado despejamos a la sigma de menor grado y la sustituimos en la otra ecuación.

D. Resolvemos la ecuación resultante. Esto último se puede hacer mediante fórmula, si la ecuación es de grado menor a cinco.

E. Con ayuda del teorema 2 encontramos todas las soluciones del sistema original.

F. Verificamos heurísticamente que el resultado es correcto.

A continuación se presentan una serie de ejemplos que serán resueltos siguiendo la propuesta anterior.

Ejemplo 1. Encontrar los puntos de intersección de la curva $x^2 - xy + y^2 = 7$ con la recta $x + y = 5$.

Solución:

Para encontrar los puntos de intersección tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Usando los polinomios simétricos elementales σ_1 y σ_2, el sistema lo podemos reescribir como:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 7 \\ \sigma_1 = 5 \end{cases}$$

Sustituyendo la última ecuación en la anterior obtenemos:

$$5^2 - 3\sigma_2 = 7$$

$$\sigma_2 = 6$$

Así pues, $\sigma_1 = 5$ y $\sigma_2 = 6$. Con base en el teorema 2, encontramos que:

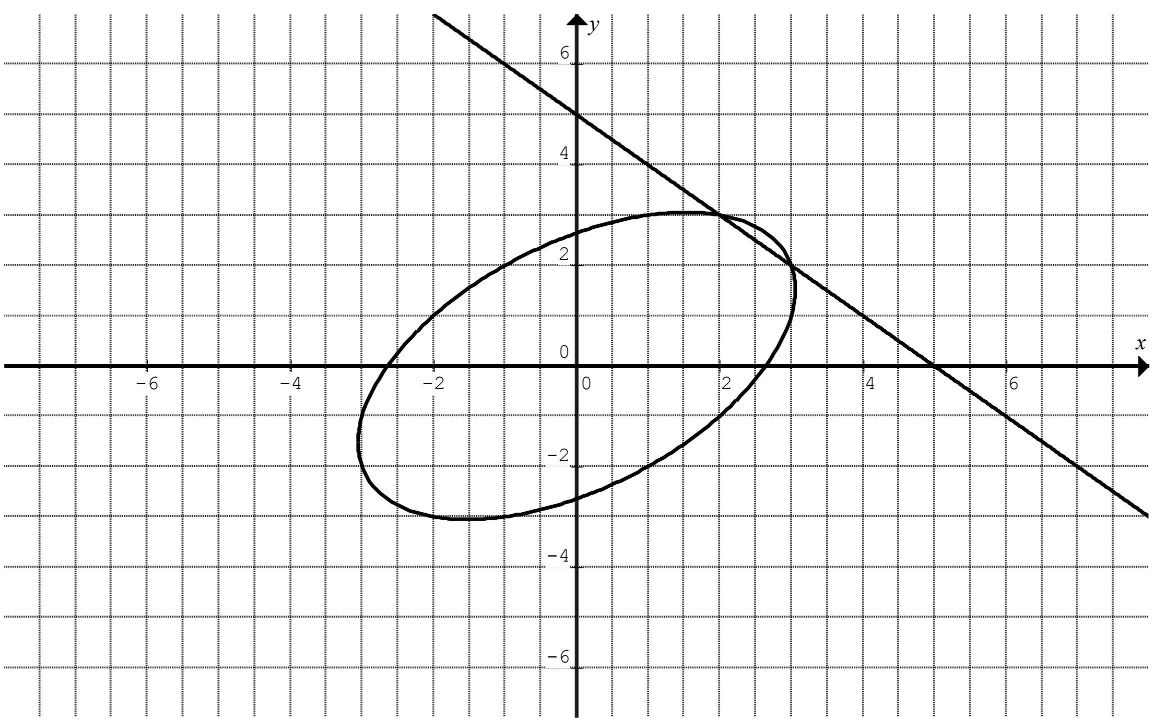
$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 - 5z + 6 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

es decir, los puntos de intersección son: (2, 3) y (3,2).

La representación gráfica, aparece a continuación:



Ejemplo 2. Encontrar la solución al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12} \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Solución:

Iniciamos multiplicando la primera ecuación por xy y reescribiendo el sistema en términos de σ_1 y σ_2.

$$xy\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12} \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{25}{12}xy \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \dfrac{25}{12}\sigma_2 \\ \sigma_1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 = \dfrac{49}{12}\sigma_2 \\ \sigma_1 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 49 = \frac{49}{12}\sigma_2$$

$$\therefore \sigma_2 = 12$$

Por lo tanto $\sigma_1 = 7$ y $\sigma_2 = 12$. Usando el teorema 2, podemos obtener que:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 7 \\ \sigma_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 - 7z + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

Ejemplo 3. Dos cubos de hielo tenían un volumen total de 65 cm^3. Si el ancho total que ocupaban era de 5 cm, ¿cuántos cm^3 tenía cada cubo?

Solución:

Como el volumen total es de 65 cm.^{3}, podemos escribir

$$x^3+y^3=65$$

y como el ancho total es de 5 cm

$$x+y=5$$

Ahora, al sistema obtenido lo vamos a escribir en términos de σ_1 y σ_2

$$\begin{cases} x^3+y^3=65 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=65 \\ \sigma_1=5 \end{cases}$$

Sustituimos $\sigma_1=5$ en la primera ecuación y aplicamos el teorema 2.

$$5^3-3(5)\sigma_2=65 \therefore \sigma_2=4$$

$$\begin{cases} \sigma_1=5 \\ \sigma_2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$$

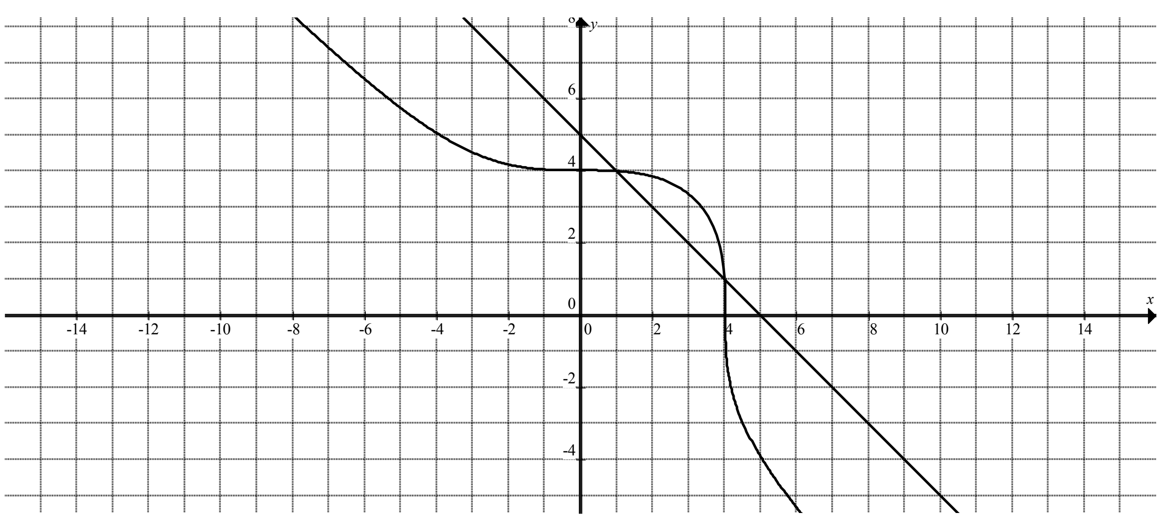
$$\Rightarrow z^2-5z+4=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1=1 \\ z_2=4 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$$

Es decir, el cubo mayor tenía 4^3=64 cm^3 y el menor $(1)^3$=1 cm^3.

A continuación se muestra la solución gráfica.



Proponemos a continuación una serie de ejercicios y problemas para que se resuelvan mediante el procedimiento señalado.

Ejercicios

1. La suma de dos números es 24 y la de sus inversos $\frac{3}{16}$. Encontrar dichos números.
2. Dos almacenes cúbicos tiene capacidad para almacenar 407 m^3 en total. Si a lo largo ocupan un total de 11 m, encontrar cuánto puede almacenar cada uno de ellos.
3. Encontrar los puntos de intersección de la hipérbola $xy = 40$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 89$.
4. La suma de dos números da 23 y la suma de sus cubos 3059. ¿Cuáles son tales números?
5. ¿Qué dimensiones tiene un rectángulo cuyo perímetro es de 20 cm y su área de 22.75 cm^2.
6. Encontrar dos números cuya suma de inversos da $\frac{3}{2}$ y su suma de cuadrados de los inversos da $\frac{5}{4}$.
7. La media aritmética de dos números es igual a 15, y la media geométrica 12. Encontrar esos números.
8. El área de un rectángulo es igual 108 cm^2 y su diagonal mide 15 cm. Encontrar los lados del rectángulo.

III INTRODUCCIÓN DE VARIABLES AUXILIARES EN SISTEMAS NO SIMÉTRICOS

Es frecuente, en particular para sistemas de dos ecuaciones no lineales con dos variables, que se pueda pasar de ecuaciones no simétricas a ecuaciones simétricas mediante algún cambio de variables. Veamos cómo se puede hacer esto con un caso concreto.

Problema 1. Un número al cubo menos otro al cubo da 5; y el cuadrado del segundo por el primero, menos el cuadrado del primero por el segundo es 1. Encontrar dichos números.

Solución

Llamaremos x al primero y y al segundo. El problema lo podemos escribir mediante ecuaciones:

$$(1) \qquad \begin{cases} x^3 - y^3 = 5 \\ xy^2 - x^2 y = 1 \end{cases}$$

Obsérvese que las ecuaciones no son simétricas, por lo que no es posible aplicarles el método propuesto en el Capítulo I. Sin embargo, podemos hacer notar que si en las dos ecuaciones del sistema el signo negativo es cambiado a positivo, las dos ecuaciones se vuelven simétricas. El cambio de signo lo podríamos obtener mediante el cambio de variable $v = -y$. Hagamos esto último,

$$(2) \qquad \begin{cases} x^3 + v^3 = 5 \\ xz^2 + x^2 v = 1 \end{cases}$$

El sistema (2) es simétrico, por lo que para resolverlo podemos emplear el método propuesto en el capítulo I. Primero escribiremos el sistema (2) en términos de los polinomios simétricos elementales $\sigma_1 = x + v$ y $\sigma_2 = xv$, para lo cual nos apoyaremos en la tabla A-3-1, obteniendo:

$$(3) \qquad \begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 5 \\ \sigma_1\sigma_2 = 1 \end{cases}$$

Al despejar de la segunda ecuación del sistema (3) a σ_2, tenemos $\sigma_2 = \frac{1}{\sigma_1}$, que al sustituirla en la primera ecuación resulta:

$$\sigma_1^3 - 3 = 5$$

o lo que es lo mismo,

$$\sigma_1^3 = 8,$$

de donde

$$\sigma_1 = 2 \text{ y } \sigma_2 = \frac{1}{2}$$

Por lo anterior, tenemos que

$$(4) \qquad \begin{cases} x + v = 2 \\ xv = \frac{1}{2} \end{cases},$$

lo que implica que

$$w^2 - 2w + \frac{1}{2} = 0,$$

luego

$$w_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2},$$

lo cual nos permite determinar las soluciones del sistema (4) y para encontrar las del sistema (1), bastará con recordar que $y = -v$, así pues:

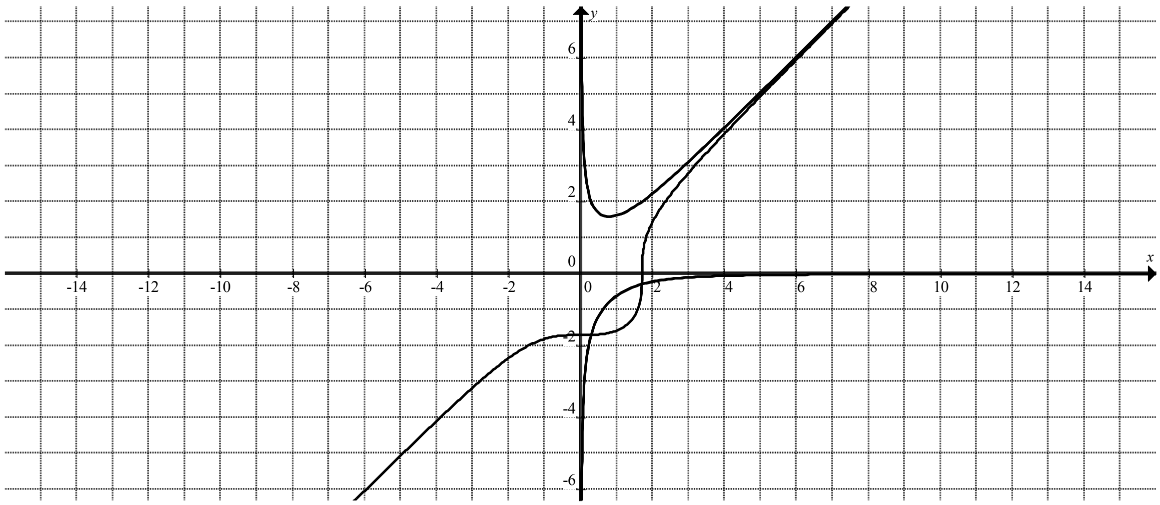
$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},\ y_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y

$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},\ y_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El problema planteado tiene dos soluciones: x_1, y_1, x_2, y_2.

A continuación presento las gráficas del sistema



Desafortunadamente, los cambios de variable no siempre son tan claros como en el problema anterior, es necesario en muchos casos realizar varios intentos, e ingeniárselas para lograrlo, esto último se podrá ver en el siguiente problema.

Problema 2. Encontrar los puntos de intersección de la curva

$$81x^4 + 16y^4 = 2944$$

con la recta

$$3x - 2y = 4$$

Solución

Para resolver el sistema

$$(5) \qquad \begin{cases} 81x^4 + 16y^4 = 2944 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

observemos que como 81 es 3 a la cuarta potencia y -2 a la cuarta potencia es 16, podemos proponer un cambio de variable simultáneo en x, y del tipo:

$$(6) \qquad \begin{cases} u = 3x \\ v = -2y \end{cases}$$

de manera que el sistema (5) puede rescribirse como:

$$(7)\qquad \begin{cases} u^4+v^4=2944 \\ u+v=4 \end{cases}$$

Pasemos a encontrar las soluciones del sistema (7) y a continuación las del sistema (5). El sistema (5) en términos de $\sigma_1 = u+v$ y $\sigma_2 = uv$, utilizando la tabla A-3-1, quedará

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 2944 \\ \sigma_1 = 4 \end{cases}$$

Ahora sustituyamos $\sigma_1 = 4$ en la primera ecuación del sistema:

$$256 - 64\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 2944,$$

de donde,

$$2\sigma_2^2 - 64\sigma_2 - 2688 = 0,$$

o bien,

$$\sigma_2^2 - 32\sigma_2 - 1344 = 0$$

Al resolver la ecuación, obtenemos:

$$\sigma_2 = \frac{32 \pm 80}{2},$$

es decir, las soluciones son: $\sigma_2 = 56$, $\sigma_2 = -24$.

Hasta aquí hemos logrado encontrar dos pares de soluciones para σ_1 y σ_2. Ahora con base en el teorema 2, pasaremos a determinar los valores de u, v.

La solución $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 56$ los podemos escribir como

$$\begin{cases} u+v=4 \\ uv=56 \end{cases}$$

sistema que puede ser resuelto con ayuda de la ecuación:

$$z^2 - 4z + 56 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática llegamos a que

$$z_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{13}\, i$$

La solución $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = -24$ nos lleva al sistema:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = -24 \end{cases}$$

el cual vamos a resolver por medio de la ecuación cuadrática

$$z^2 - 4z - 24 = 0,$$

que tiene como soluciones a

$$z_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16+96}}{2},$$

o lo que es lo mismo

$$z_{3,4} = 2 \pm 2\sqrt{7}$$

Las cuatro soluciones para z a las que hemos llegado implican cuatro soluciones para el sistema (7):

$$u_1 = 2 + 2\sqrt{13}\, i,\ v_1 = 2 - 2\sqrt{13}\, i$$

$$u_2 = 2 - 2\sqrt{13}\, i,\ v_2 = 2 + 2\sqrt{13}\, i$$

$$u_3 = 2 + 2\sqrt{7},\ v_3 = 2 - 2\sqrt{7}$$

$$u_4 = 2 - 2\sqrt{7},\ v_4 = 2 + 2\sqrt{7}$$

Finalmente, los cambios de variable descritos en (6), nos llevan a encontrar las cuatro soluciones del sistema (5):

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{13}\, i}{3},\ y_1 = -1 + \sqrt{13}\, i$$

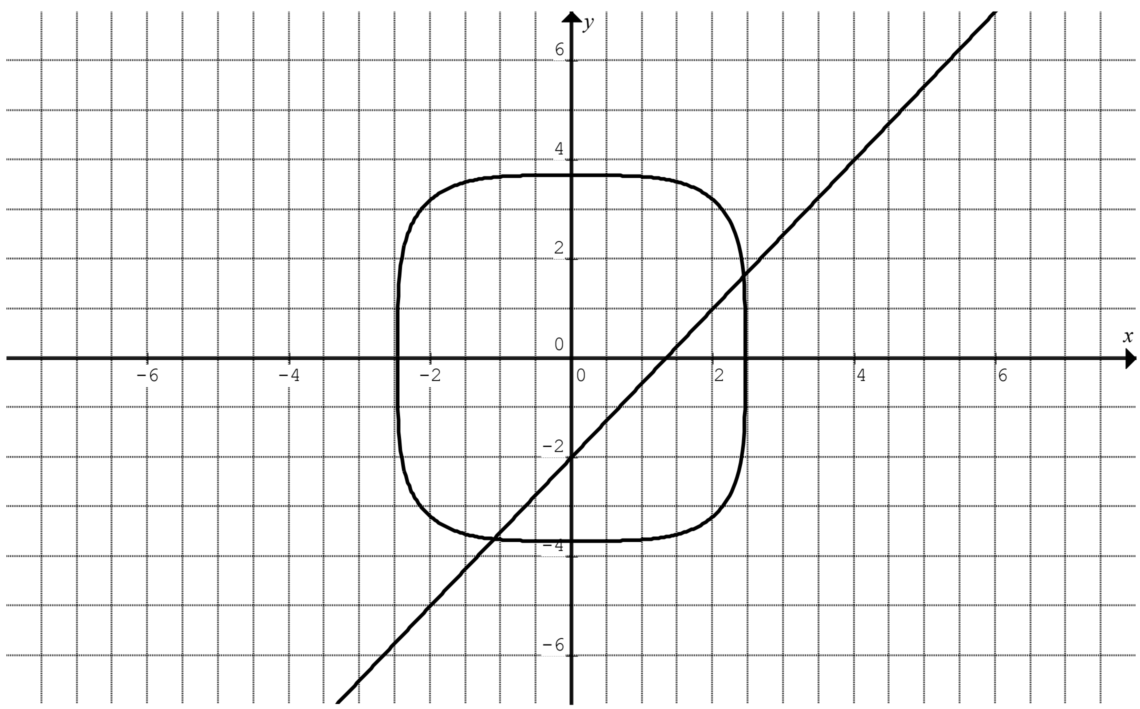
$$x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{13}\, i}{3},\ y_2 = -1 - \sqrt{13}\, i$$

$$x_3 = \frac{2+2\sqrt{7}}{3}, \ y_3 = -1+\sqrt{7}$$

$$x_4 = \frac{2-2\sqrt{7}}{3}, \ y_4 = -1-\sqrt{7}$$

En resumen, la curva $81x^4+16y^4=2944$ y la recta $3x-2y=4$, tiene dos soluciones reales, por lo que sus gráficas se intersectan en los puntos (x_3, y_3), (x_4, y_4).

A continuación se presenta la gráfica en donde se puede observar lo antes dicho:



Para terminar pasemos a resolver el sistema propuesto en la introducción de este trabajo.

Problema 3. Resolver el sistema de ecuaciones que se muestra

$$(8) \qquad \begin{cases} x^4+y^4=82 \\ x-y=2 \end{cases}$$

Solución

Es fácil darse cuenta que la primera ecuación es simétrica y que la segunda puede transformarse en una ecuación simétrica mediante el cambio de variable $z=-y$, cambio que no modifica la simetría de la primera ecuación. Al efectuar dicho cambio de variable se obtiene:

$$(9) \qquad \begin{cases} x^4 + z^4 = 82 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Para resolver este último sistema lo escribiremos, como ya es costumbre, en términos de $\sigma_1 = x + z$, $\sigma_2 = xz$, para lo cual recurriremos a la tabla A-3-1, de tal modo que:

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 82 \\ \sigma_1 = 2 \end{cases}$$

Al sustituir la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$$2^4 - 4(2)^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 82,$$

que al simplificar nos queda

$$\sigma_2^2 - 8\sigma_2 - 33 = 0,$$

que tiene como soluciones a

$$\sigma_2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 132}}{2}$$

o sea: $\sigma_2 = 11$, $\sigma_2 = -3$.

Hemos llegado a dos soluciones para σ_1 y σ_2. Ahora con base en el teorema 2 pasaremos a la solución de los sistemas que surgen de cada solución.

De la solución $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 11$ se pueden escribir:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ xz = 11 \end{cases},$$

de donde,

$$w^2 - 2w + 11 = 0,$$

que tiene como soluciones:

$$w_1 = 1 + \sqrt{10}\, i, \; w_2 = 1 - \sqrt{10}\, i$$

Si consideramos la solución $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = -3$ obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ xz = -3 \end{cases}$$

que implica la ecuación cuadrática

$$w^2 - 2w - 3 = 0$$

la cual tiene como raíces

$$w_3 = 3, \; w_4 = -1$$

Por todo lo anterior, las soluciones para x, z son:

$$x_1 = 1 + \sqrt{10}\, i, \; z_1 = 1 - \sqrt{10}\, i$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{10}\, i, \; z_2 = 1 + \sqrt{10}\, i$$

$$x_3 = 3, \; z_3 = -1$$

$$x_4 = -1, \; z_4 = 3$$

Como $y = -z$, las soluciones del sistema (8) son:

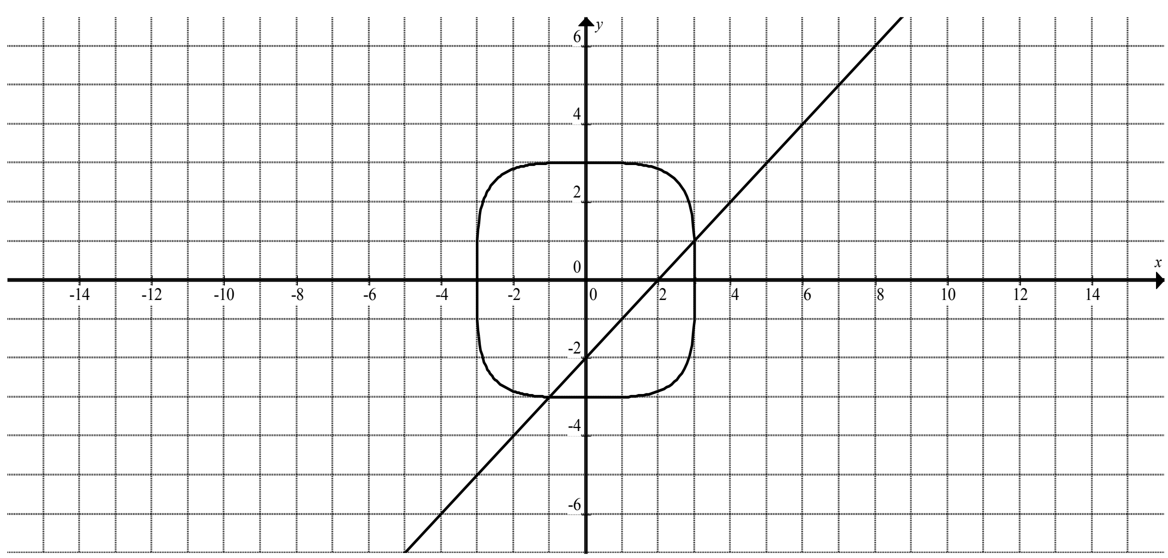
$$x_1 = 1 + \sqrt{10}\, i, \; y_1 = -1 + \sqrt{10}\, i$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{10}\, i, \; y_2 = -1 - \sqrt{10}\, i$$

$$x_3 = 3, \; y_3 = 1$$

$$x_4 = -1, \; y_4 = -3$$

La solución grafica es la que sigue:



Quiero hacer notar que si bien encontrar los cambios de variable apropiados sigue dependiendo de la habilidad del estudiante, ahora hemos avanzado un poco, pues sabemos que en todos los casos se trata de transformar un sistema no simétrico en uno simétrico.

A continuación señalo una serie de sugerencias que pueden aplicarse a una buena cantidad de casos, con el fin de encontrar los cambios de variable apropiados para hacer la transformación de un sistema no simétrico a uno simétrico, en el entendido de que esto no siempre es posible.[13] Estas sugerencias han surgido al tratar de sintetizar la experiencia obtenida al resolver problemas de este tipo, sin duda alguna el lector podrá, si lo intenta, encontrar mejores sugerencias o bien, otras que considere más apropiadas.

Procedimiento que utilizamos para transformar un sistema no simétrico a uno simétrico.

A. En el caso de que las ecuaciones contengan todos los términos necesarios para ser simétricas, pero no lo sean debido a un signo, sugiero se intente

$$\begin{cases} x = -u \\ y = -v \end{cases}$$

(véase el ejemplo 1 de este capítulo)

B. Si la ecuación no contiene los coeficientes adecuados, pero sí el resto de los términos, puede intentarse

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases}$$

[lo anterior se hace en el sistema (3)]

C. Si los términos contienen radicales, debe intentarse un cambio de variable del tipo

$$\begin{cases} u^n = x \\ v^n = y \end{cases}$$

[13] Si siempre fuera posible bastaría con estudiar los polinomios simétricos haciendo caso omiso de los demás.

D. Si las ecuaciones no son simétricas porque las potencias de las variables no lo permiten, intente

$$\begin{cases} u = x^n \\ v = y^m \end{cases}$$

En algunos casos quizá sea necesario intentar una combinación de sugerencias. La experiencia que se adquiere al resolver este tipo de sistemas sirve como guía para usar las sugerencias dadas, o bien, para buscar las propias. A continuación proponemos una serie de ejercicios en los que es posible introducir variables auxiliares en los sistemas no simétricos para transformarlos a simétricos, y así poder aplicar las ideas vistas en el Capítulo II.

Ejercicios.

1. Dos volúmenes cúbicos difieren en 8 m^3 y el lado del cubo mayor excede al menor en 2 m. Encontrar el lado de cada cubo.
2. Encontrar los puntos de intersección de la curva $x^5 - y^5 = 3093$ con la recta $x - y = 3$.
3. La suma de dos números es 13 y la suma de sus raíces cuadradas es cinco sextos el producto de sus raíces. Encontrar dichos números.
4. Si a y b son constantes, resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 4 \end{cases}$$

5. Encontrar las soluciones de:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}xy \\ x - y = \dfrac{1}{4}xy \end{cases}$$

6. Si a y b son constantes, encontrar las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x^5 - y^5 = b^5 \\ x - y = a \end{cases}$$

7. Encontrar los puntos de intersección de las curvas:

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^6 - y^3 = 65 \end{cases}$$

8. Hallar las soluciones reales del sistema:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - x^2y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$$

9. Encontrar las soluciones de:

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = a \\ \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} + \dfrac{y^2}{\sqrt{x}} = b \end{cases}$$

10. La suma de dos números es 20 y su diferencia es igual al doble de la raíz cuadrada de su producto. Encontrar dichos números.

11. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{y^3x} = 78 \end{cases}$$

12. Encontrar las soluciones de:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

13. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + xy + y = 12 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y} = 0 \end{cases}$$

14. La suma de dos números más la raíz cuadrada de su producto da 14, y la suma de cada número elevado al cuadrado más su producto da 84, ¿de qué números se trata?

15. Encontrar las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35 \\ x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{5}} = 5 \end{cases}$$

16. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{61}{\sqrt{xy}} + 1 \\ \sqrt[4]{x^3 y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78 \end{cases}$$

17. La suma de dos números es 72 y la suma de la raíz cúbica de cada número da 6. Encontrar dichos números.

18. Encontrar las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x + xy + y = 12 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y} = 0 \end{cases}$$

19. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{y^3 - 1} + \sqrt{x} = 3 \\ x^2 + y^3 = 82 \end{cases}$$

20. El producto de dos números es igual a 8 y la suma de la raíz cúbica de cada número da 3, ¿de qué números se trata?

21. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} + \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = a \\ x + y = b \end{cases}$$

22. La suma de dos números es igual a 10 y la suma de la raíz cúbica de cada uno es igual a cinco medios la raíz sexta de su producto. Encontrar dichos números.

23. En el Libro 5 de la *Arithmetica* de Diofanto, matemático griego, aparecen los siguientes problemas, resuélvelos:

a. Queremos encontrar dos números tales que su diferencia sea 10 y la diferencia de sus cubos 2170.

b. $\begin{cases} x + y = 20 \\ x^3 + y^3 = 140(x - y)^2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - y = 10 \\ x^3 - y^3 = \left(8 + \dfrac{1}{8}\right)(x + y)^2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^3 + y^3 = 28(x+y) \end{cases}$

24. Hallar las soluciones reales del sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \dfrac{5}{6}\sqrt{xy} \\ x + y = 13 \end{cases}$$

25. Hallar las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x + \sqrt{xy} + y = a \\ x^3 + 2xy\sqrt{xy} + y^3 = a^3 \end{cases}$$

26. Hallar todos los valores de a para los cuales el sistema mixto

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \le 1 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

tiene solución única.

IV. Variables auxiliares en una ecuación no lineal con una incógnita

Al utilizar el cambio de variable como una herramienta para obtener ecuaciones simétricas, nos podemos encontrar con situaciones en las que a pesar de tener sólo una ecuación con una incógnita, es posible llevarla a un sistema del mismo tipo a los que se han tratado en el capítulo I.

Problema 1. Supongamos que deseamos encontrar las raíces reales de la ecuación

$$(1) \quad \sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$$

Solución

La idea en este problema es la de considerar a cada una de las raíces como una nueva variable y a continuación obtener dos ecuaciones que incluyan a las dos nuevas variables. Esto último se puede hacer aprovechando la ecuación inicial y efectuando una sustitución. Ilustraré lo antes dicho en la ecuación (1). Primero, consideremos las variables auxiliares

$$(2) \quad \begin{cases} u=\sqrt[4]{97-x} \\ v=\sqrt[4]{x} \end{cases}$$

que al sustituirlas en la ecuación (1) se obtiene

$$u+v=5$$

Ahora, del sistema (2) obtengamos u^4 y v^4:

$$(3) \quad \begin{cases} u^4=97-x \\ v^4=x \end{cases}$$

de donde,

$$(4) \quad \begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=97 \end{cases}$$

El sistema (4) consiste de dos ecuaciones simétricas a las que podemos aplicar las ideas propuestas en el capítulo I.

Consideremos las funciones simétricas elementales $\sigma_1=u+v$, $\sigma_2=uv$. Con ayuda de la tabla A-3-1, el sistema (4) lo escribimos como

$$(5)\quad \begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97 \end{cases}$$

de donde,

$$625 - 100\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97,$$

es decir,

$$\sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0$$

Al resolver esta ecuación obtenemos dos soluciones: $\sigma_2 = 6$, $\sigma_2 = 44$. Lo anterior significa que el sistema (5) tiene como soluciones: $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 6$; $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 44$. La primera de las soluciones implica que:

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases}$$

y la segunda

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 44 \end{cases}$$

Ahora, con base en el teorema 2, sabemos que las ecuaciones

$$z^2 - 5z + 6 = 0,$$
$$z^2 - 5z + 44 = 0$$

tienen las mismas soluciones que los sistemas anteriores, respectivamente.

De la primera ecuación cuadrática obtenemos

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

es decir:

$$z_1 = 3,\ z_2 = 2.$$

De la segunda ecuación tenemos

$$z_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 178}}{2}$$

o lo que es lo mismo:

$$z_3 = \frac{5 + \sqrt{151}\,i}{2},\ z_4 = \frac{5 - \sqrt{151}\,i}{2}$$

Las soluciones para u, v son:

$$u_1 = 3,\ v_1 = 2;$$

$$u_2 = 2,\ v_2 = 3;$$

$$u_3 = \frac{5+\sqrt{151}\,i}{2},\ v_3 = \frac{5-\sqrt{151}\,i}{2};$$

$$u_4 = \frac{5-\sqrt{151}\,i}{2},\ v_4 = \frac{5+\sqrt{151}\,i}{2}$$

Consideremos cada una de las cuatro soluciones y obtengamos los valores de la incógnita original x con ayuda del sistema (3).

Para u_1, v_1 tenemos:

$$\begin{cases} 3^4 = 97 - x \\ 2^4 = x \end{cases}$$

Con la solución u_2, v_2:

$$\begin{cases} 2^4 = 97 - x \\ 3^4 = x \end{cases}$$

Con la tercera solución:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{5+\sqrt{151}\,i}{2}\right)^4 = 97 - x \\ \left(\dfrac{5-\sqrt{151}\,i}{2}\right)^4 = x \end{cases}$$

Así pues, obtenemos cuatro soluciones para x:

$$x_1 = 16,$$

$$x_2 = 81,$$

$$x_3 = \left(\frac{5-\sqrt{151}\,i}{2}\right)^4,$$

$$x_4 = \left(\frac{5+\sqrt{151}\,i}{2}\right)^4.$$

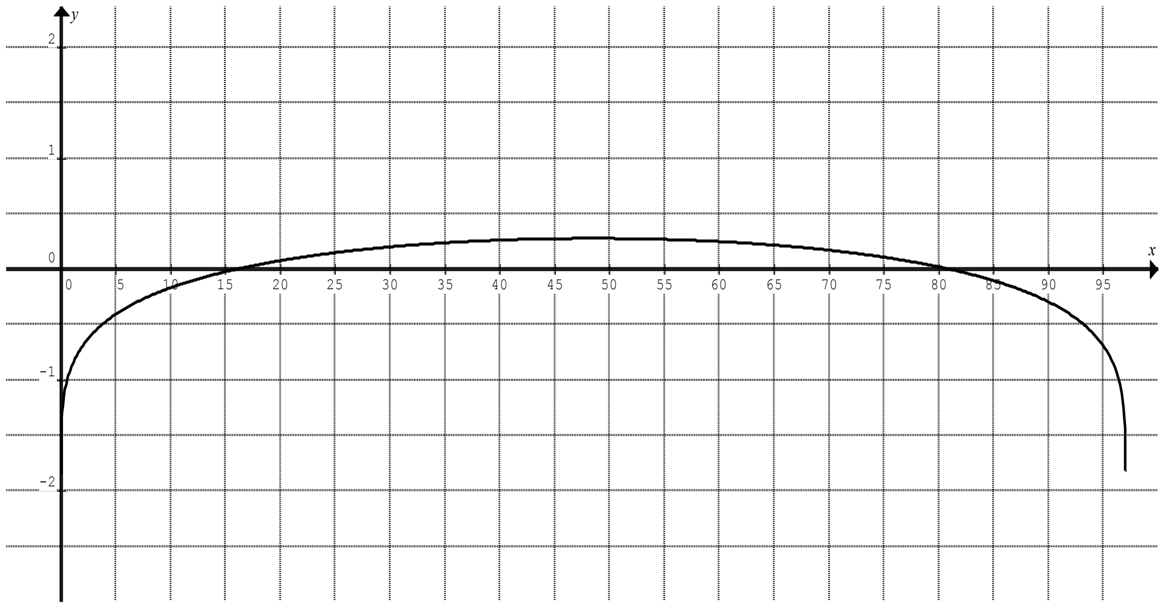
Con base en todo lo anterior, podemos afirmar que la ecuación no lineal

$$\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$$

tiene dos soluciones reales:

$$x = 16\,,\ \ x = 81$$

Al graficar $f(x) = \sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} - 5$, podemos observar las soluciones de la ecuación $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$



Como segundo problema, planteo el siguiente.

Problema 2. Encontrar las raíces reales de la ecuación

$$(6)\quad \left(\frac{x+a}{2}\right)^6 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^6 = a^6,$$

en donde a es un número real.

Solución

Nuevamente debemos preguntarnos qué cambios de variable nos pueden llevar a un sistema de dos ecuaciones simétricas con dos variables. Podemos observar que cada uno de los términos que involucran a la variable están elevados a la sexta potencia, por lo que podríamos intentar avanzar con los siguientes cambios de variable:

$$(7)\quad \begin{cases} u = \dfrac{x+a}{2} \\ v = \dfrac{x-a}{2} \end{cases}$$

Al sustituir en la ecuación (6), tenemos que

$$u^6 + v^6 = a^6$$

Ahora intentemos obtener otra ecuación simétrica a partir del sistema (7). Iniciemos despejando a la variable x de la primera ecuación

$$x = 2u - a,$$

a continuación la sustituimos en la segunda ecuación del sistema (7)

$$v = \frac{(2u-a)-a}{2},$$

de donde

$$2v - 2u = -2a$$

o lo que es lo mismo,

$$u - v = a$$

Con los cambios de variable, hemos llegado al sistema

$$\begin{cases} u^6 + v^6 = a^6 \\ u - v = a \end{cases}$$

Pero este sistema aún no es simétrico, por lo que nos vemos obligados a efectuar el siguiente cambio de variable: $w = -v$. Haciendo esto obtenemos

$$(8)\quad \begin{cases} u^6 + w^6 = a^6 \\ u + w = a \end{cases}$$

Ahora con la ayuda de la tabla A-3-1, con $\sigma_1 = u + w$ y $\sigma_2 = uw$, apliquemos al sistema (8) la estrategia planteada en el Capítulo I. Comenzamos escribiendo el sistema (8) en función de σ_1, σ_2:

$$\begin{cases} \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 = a^6 \\ \sigma_1 = a \end{cases}$$

Al sustituir la segunda ecuación en la primera obtenemos

$$a^6 - 6a^4\sigma_2 + 9a^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 = a^6$$

de donde

$$2\sigma_2^3 - 9a^2\sigma_2^2 + 6a^4\sigma_2 = 0$$

es decir,

$$\sigma_2(2\sigma_2^2 - 9a^2\sigma_2 + 6a^4) = 0$$

De esta última ecuación resultan tres soluciones:

$$\sigma_2 = 0$$

y

$$\sigma_2 = \frac{9a^2 \pm \sqrt{33}a^2}{4}$$

Estas tres soluciones implican tres soluciones de u, w:

$$\begin{cases} u + w = a \\ uw = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} u + w = a \\ uw = \dfrac{a^2(9+\sqrt{33})}{4} \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} u + w = a \\ uw = \dfrac{a^2(9-\sqrt{33})}{4} \end{cases}$$

Para resolver cada uno de estos tres sistemas, establecemos una ecuación cuadrática que, conforme el teorema 2, tiene las mismas soluciones. Para cada sistema, su ecuación correspondiente será

$$z^2 - az = 0,$$
$$z^2 - az + \frac{a^2(9+\sqrt{33})}{4} = 0$$
$$z^2 - az + \frac{a^2(9-\sqrt{33})}{4} = 0$$

respectivamente.

Al resolver las ecuaciones cuadráticas en el orden presentado obtenemos:

$$z_1 = 0,\ z_2 = a;$$
$$z_{3,4} = \frac{a\left(1 \pm \sqrt{8+\sqrt{33}}\ i\right)}{2}$$
$$z_{5,6} = \frac{a\left(1 \pm \sqrt{8-\sqrt{33}}\ i\right)}{2}$$

Por lo anterior las soluciones de los tres sistemas las podemos escribir a continuación:

a) Para el primero: $u = z_1$, $w = z_2$

$u = z_2$, $w = z_1$

b) Para el segundo: $u = z_3$, $w = z_4$

$u = z_4$, $w = z_3$

c) Para el tercero: $u = z_5$, $w = z_6$

$u = z_6$, $w = z_5$

Tomando en cuenta que en el sistema (7) cuando sumamos u con v obtenemos

$$x = u + v,$$

y como

$$w = -v,$$

obtenemos

$$x = u - w$$

Consideremos ahora que los valores de u y w se toman de los diferentes valores de z, como se indica en los incisos a, b y c anteriores, pasemos a encontrar las soluciones de la ecuación (6).

1) $x_1 = z_1 - z_2$, es decir, $x_1 = 0 - a$, de donde

$$x_1 = -a$$

2) $x_2 = z_2 - z_1$, es decir, $x_2 = a - 0$, de donde

$$x_2 = a$$

3) $x_3 = z_3 - z_4$, esto es, $x_3 = \dfrac{a(1+\sqrt{8+\sqrt{33}i})}{2} - \dfrac{a(1-\sqrt{8+\sqrt{33}i})}{2}$, de donde

$$x_3 = a\sqrt{8+\sqrt{33}i}$$

4) $x_4 = z_4 - z_3$, esto es, $x_4 = \dfrac{a(1-\sqrt{8+\sqrt{33}i})}{2} - \dfrac{a(1+\sqrt{8+\sqrt{33}i})}{2}$, de donde

$$x_4 = -a\sqrt{8+\sqrt{33}i}$$

5) $x_5 = z_5 - z_6$, esto es, $x_5 = \dfrac{a\left(1+\sqrt{8-\sqrt{33}\ i}\right)}{2} - \dfrac{a\left(1-\sqrt{8-\sqrt{33}\ i}\right)}{2}$, de donde

$$x_5 = a\sqrt{8-\sqrt{33}i}$$

6) $x_6 = z_6 - z_5$, esto es, $x_6 = \dfrac{a\left(1-\sqrt{8-\sqrt{33}\ i}\right)}{2} - \dfrac{a\left(1+\sqrt{8-\sqrt{33}\ i}\right)}{2}$, es decir

$$x_6 = -a\sqrt{8-\sqrt{33}i}$$

En resumen, la ecuación

$$\left(\frac{x+a}{2}\right)^6 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^6 = a^6$$

tiene dos soluciones reales: $x = a$, $x = -a$, lo cual se puede comprobar fácilmente al sustituir esos valores en la ecuación anterior.

En ocasiones se requiere de una búsqueda especial del tipo de sustitución que debe hacerse para que la ecuación se pueda escribir como un sistema de ecuaciones simétricas.

Problema 3. Resolver la ecuación

$$(9) \quad x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$$

Solución

Este caso se diferencia del primero porque no se tienen raíces en cada uno de los términos; y del segundo, porque cada término no está elevado a la misma potencia. Además, la clave de la cuestión estuvo en que al sumar o restar las dos nuevas variables, la variable original era eliminada y en que al introducirlas a la ecuación original daban como resultado una ecuación simétrica.

La ecuación (9) no tiene las características que nos permitan hacer lo antes dicho, a excepción de lo último, si consideramos las siguientes variables auxiliares.

$$(10) \quad \begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

Al hacer la sustitución de la ecuación (9) se obtiene

$$u+v=\frac{35}{12}$$

Al sustituir la primera ecuación del sistema (10) en la segunda, se tiene

$$v=\frac{u}{\sqrt{u^2-1}},$$

de donde

$$v^2=\frac{u^2}{u^2-1},$$

es decir

$$(u^2-1)v^2=u^2,$$

luego

$$u^2v^2-v^2=u^2,$$

o sea

$$u^2v^2-(u^2+v^2)=0$$

Así pues, hemos obtenido las ecuaciones simétricas:

$$(11)\quad \begin{cases} u+v=\dfrac{35}{12} \\ u^2v^2-(u^2+v^2)=0 \end{cases}$$

Con ayuda de la tabla A-3-1, el sistema anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$(12)\quad \begin{cases} \sigma_1=\dfrac{35}{12} \\ \sigma_2^2-(\sigma_1^2-2\sigma_2)=0 \end{cases}$$

Al sustituir la primera ecuación del sistema (12) en la segunda, se llega a:

$$\sigma_2^2-\left[\left(\frac{35}{12}\right)^2-2\sigma_2\right]=0,$$

que al desarrollar nos queda

$$\sigma_2^2+2\sigma_2-\left(\frac{35}{12}\right)^2=0$$

La ecuación cuadrática obtenida tiene como soluciones

$$\sigma_2=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\left(\dfrac{35}{12}\right)^2}}{2}$$

o bien

$$\sigma_2=-1\pm\frac{37}{12},$$

Así pues las soluciones son:

$$\sigma_2=\frac{25}{12},\ \sigma_2=-\frac{49}{12}$$

Por lo anterior, las soluciones del sistema (12) son:

$$\begin{cases} \sigma_1=\dfrac{35}{12},\quad \sigma_2=\dfrac{25}{12} \\ \sigma_1=\dfrac{35}{12},\quad \sigma_2=-\dfrac{49}{12} \end{cases}$$

Con base en lo anterior, escribimos los sistemas:

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{35}{12} \\ uv=\dfrac{25}{12} \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{35}{12} \\ uv=-\dfrac{49}{12} \end{cases}$$

Considerando el teorema 2, sabemos que las ecuaciones cuadráticas siguientes

$$z^2-\frac{35}{12}z+\frac{25}{12}=0$$

y

$$z^2-\frac{35}{12}z-\frac{49}{12}=0$$

tienen las mismas soluciones que los sistemas anteriores. Las soluciones de la primera ecuación cuadrática son:

$$z_{1,2}=\frac{35\pm 5}{24},$$

y la solución de la segunda

$$z_{3,4}=\frac{35\pm\sqrt{1127}i}{24}$$

Las soluciones del sistema (11) son:

$$u=z_1,\ v=z_2;$$

$$u=z_2,\ v=z_1;$$

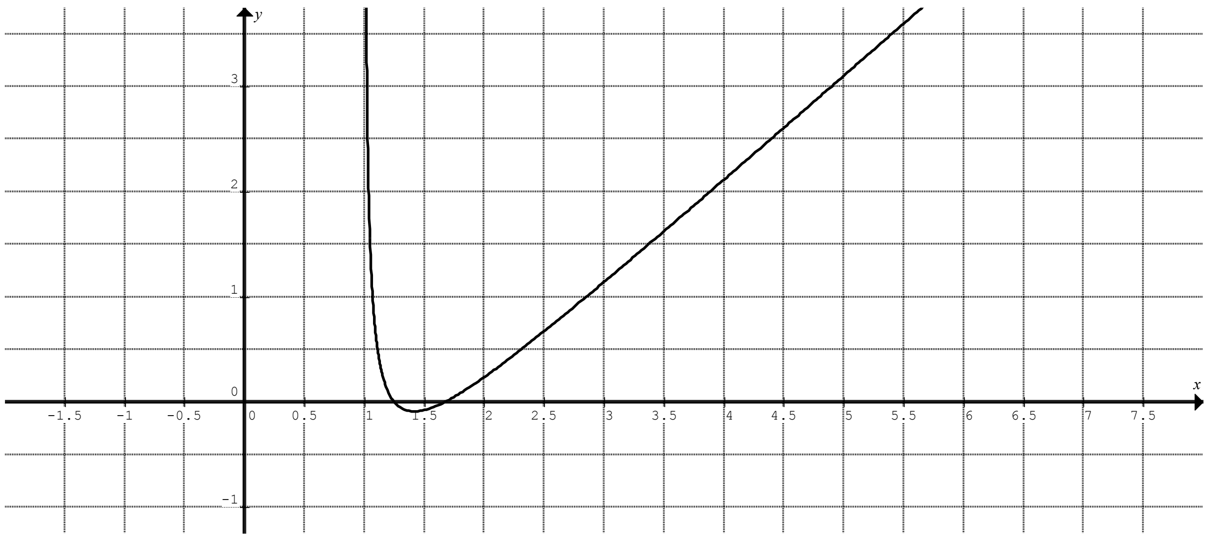
$$u=z_3,\ v=z_4;$$

$$u=z_4,\ v=z_3.$$

Finalmente, como $u=x$, las raíces de la ecuación (9) son:

$$x_1=\frac{5}{3},\ x_2=\frac{5}{4},\ x_{3,4}=\frac{35\pm\sqrt{1127}i}{2}$$

Al graficar $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \dfrac{35}{12}$ podemos visualizar las soluciones reales de la ecuación original.



Procedimiento que utilizamos para resolver los problemas.

A. Consideramos a cada una de las raíces como una nueva variable $(u,\ v)$.

B. Con base en la ecuación inicial, obtener dos ecuaciones que incluyan a las dos nuevas variables.

C. Escribir ese sistema como uno con ecuaciones simétricas con respecto a las dos raíces. Para ello es necesario realizar los cambios de variable necesarios mediante los cuales logremos lo anterior.

D. Si hicimos lo anterior, aplicamos lo propuesto en el capítulo 1 para resolver el sistema.

E. Las soluciones obtenidas las utilizamos para que con base en los cambos de variable utilizados lleguemos a las soluciones de la ecuación inicial.

Invito a que se intente resolver cada una de las siguientes ecuaciones.

Ejercicios.

1. Encontrar las soluciones reales de la ecuación:

$$\left(z^2+1\right)^7-\left(z^2-1\right)^7=2^7$$

2. Resolver la ecuación:

$$z^4+\left(1-z\right)^4=1$$

3. Determinar las raíces de la ecuación:

$$\left(x+a+b\right)^5=x^5+a^5+b^5$$

4. $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1$

5. $x+\sqrt{17-x^2}+\sqrt{17-x^2}=9$

6. $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$

7. $x\frac{19-x}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84$

8. $\operatorname{sen}^3x+\cos^3x=1$

9. $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$

10. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$

11. $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$

12. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}$

13. $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$

14. $\sqrt[4]{78+\sqrt[3]{24}+\sqrt{x}}-\sqrt[4]{84+\sqrt[3]{30}+\sqrt{x}}=0$

15. $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$

16. $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=2$

17. $\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{a+x}=\sqrt[5]{2a}$

18. $\sqrt[7]{a-x}+\sqrt[7]{x}=\sqrt[7]{a}$

19. $\left(x+a\right)^4+\left(x+b\right)^4=c^4$

20. $\left(ax^2+bx+c\right)^5-\left(ax^2+bx+d\right)^5=e$

21. $\sqrt{1-x^2}=\left(a-\sqrt{x}\right)^2$

V PROBLEMAS ASOCIADOS CON LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Existen problemas en los cuales aparecen involucradas las soluciones de una ecuación cuadrática dada. Normalmente dichas soluciones están sujetas a una o más condiciones, con base en las cuales se pide encontrar otra ecuación cuadrática o algún elemento del problema. A continuación mostramos dos problemas.

Problema 1. Dada la ecuación

$$x^2 + px + q = 0$$

Que tiene como soluciones a x_1, x_2 encontrar otra ecuación cuadrática cuyas raíces y_1, y_2 cumplan con las siguientes condiciones:

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = x_1^2 + x_2^2 \\ y_2 = x_1^3 + x_2^3 \end{cases}$$

Solución

Consideremos a las funciones simétricas elementales

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 \\ \sigma_2 = x_1 x_2 \end{cases}$$

Con base en las ecuaciones de Vieta[14] sabemos que:

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$$

es decir,

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_1 = -p \\ \sigma_2 = q \end{cases}$$

Para resolver nuestro problema necesitamos escribir a y_1, y_2 en términos de los coeficientes de la ecuación cuadrática dada, es decir, en términos de p y q.

[14] Véase el Apéndice 4.

Observemos que el sistema (1) consta de dos ecuaciones simétricas en x_1, x_2 por lo que, debido al teorema fundamental, lo podemos expresar en términos de los polinomios simétricos elementales σ_1 y σ_2, apoyándonos en la tabla A-3-1. Al hacerlo obtenemos:

$$\begin{cases} y_1 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ y_2 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 \end{cases}$$

Bastará ahora con sustituir a σ_1 y a σ_2, conforme lo indica el sistema (4), para obtener a y_1 y a y_2 en términos de p y q, es decir:

$$(5) \quad \begin{cases} y_1 = p^2 - 2q \\ y_2 = -p^3 + 3pq \end{cases}$$

Para terminar, hay que recordar que si la ecuación cuadrática de la que son soluciones y_1 y y_2 es:

$$y^2 + ay + b = 0,$$

entonces

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -a \\ y_1 y_2 = b \end{cases}$$

Ahora sustituyamos a y_1 y a y_2 por los valores obtenidos en el sistema (5):

$$\begin{cases} -p^3 + p^2 + 3pq - 2q = -a \\ \left(p^2 - 2q\right)\left(-p^3 + 3pq\right) = b \end{cases}$$

Así, la ecuación cuadrática buscada, que satisface la condición (1), es:

$$y^2 + \left(p^3 - p^2 - 3pq + 2q\right)y + \left(p^2 - 2q\right)\left(-p^3 + 3pq\right) = 0$$

Problema 2. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0,$$

si

$$x_1^2 + x_2^2 = 175,$$

encontrar qué valor debe tomar a.

Solución

Sean

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 \\ \sigma_2 = x_1 x_2 \end{cases}$$

sabemos que:

Como

$$x_1^2 + x_2^2 = 175,$$

es una ecuación simétrica en x_1 y x_2, podemos escribirla en términos de σ_1 y σ_2, es decir:

$$x_1^2 + x_2^2 = 175 \Rightarrow \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 175$$

Sustituyendo los valores de σ_1 y σ_2, obtenemos:

$$(-3a)^2 - 2\left(a^2\right) = 175,$$

de donde

$$a = \pm 5$$

Para comprobar los resultados, resolvemos la dos ecuaciones que generan los valores de $a = \pm 5$

$$x^2 - 15x + 25 = 0$$

$$x^2 + 15x + 25 = 0$$

Pues bien, la primera ecuación tiene como soluciones:

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

y la segunda

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

En ambos casos al sumar los cuadrados de las raíces se obtiene 175.

Por otra parte, resulta que sin aplicar los polinomios simétricos elementales se puede resolver el problema de una manera menos complicada, como se puede ver a continuación. Si aplicamos la solución general de las ecuaciones cuadráticas escritas en su forma general, resultará que:

$$x_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{5}a}{2}$$

que a elevarlas al cuadrado y sumarlas e igualarlas a la condición, se obtiene

$$\frac{9a^2 + 6\sqrt{5}a^2 + 5a^2}{4} + \frac{9a^2 - 6\sqrt{5}a^2 + 5a^2}{4} = 175$$

Simplificando llegamos a que

$$\frac{28a^2}{4} = 175$$

de donde obtenemos el resultado al que hemos llegado de una manera tortuosa.

Así pues, debemos tener cuidado de no utilizar caminos que nos compliquen más los problemas, por lo que es necesario revisar cada situación que les vamos a presentar a los alumnos.

Procedimiento que utilizamos para resolver problemas asociados con la ecuación cuadrática

A. Partimos de una ecuación cuadrática del tipo

$$x^2 + px + q = 0,$$

de la cual conocemos sus raíces x_1, x_2 y que está sujeta a una o dos condiciones.

B. La condición o condiciones que deben cumplirse para resolver el problema, deben estar escritas o poder escribirse como ecuaciones simétricas en x_1, x_2.

C. Esto último permite introducir los polinomios simétricos elementales escritos en términos de los coeficientes de la ecuación cuadrática.

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 = -p \\ \sigma_2 = x_1 x_2 = q \end{cases}$$

D. Realizado lo anterior, procedemos a resolver el problema.

De manera similar a como lo hemos hecho anteriormente, a continuación proponemos una serie de ejercicios, esperando que el lector intente resolverlos.

Ejercicios.

1. Dada la ecuación

$$x^2+6x+10=0$$

formar una nueva ecuación

$$y^2+py+q=0,$$

cuyas soluciones y_1 y y_2 sean los cuadrados de las soluciones x_1, x_2 de la ecuación dada.

2. Supongamos que x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación:

$$ax^2+bx+c=0, \quad (ac\neq 0)$$

sin resolver la ecuación, expresar por medio de los coeficientes a, b y c las cantidades:

a) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$

b) $x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4$

3. Si x_1 y x_2 son raíces de

$$x^2-px+q=0$$

calcular el valor de:

a) $x_1^2+x_2^2$

b) $x_1^3+x_2^3$

4. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación

$$x^2+mx+n=0,$$

hallar la ecuación cuyas raíces son $\dfrac{x_1}{x_2}$ y $\dfrac{x_2}{x_1}$.

5. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación

$$ax^2+bx+c=0$$

encontrar los valores de:

a) $x_1^4x_2^7+x_1^7x_2^4$

b) $\left(\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}\right)$

6. Si x_1 y x_2 son las raíces de

$$x^2+px+q=0,$$

formar la ecuación cuyas raíces son $(x_1-x_2)^2$ y $(x_1+x_2)^2$.

7. Si α y β son las raíces de

$$x^2-px+q=0,$$

hallar el valor de:

a) $\alpha^2\left(\alpha^2\beta^{-1}-\beta\right)+\beta^2\left(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha\right)$

b) $(\alpha-\beta)^{-4}+(\beta-\alpha)^{-4}$

8. Si las raíces de

$$x^2+mx+n=0,$$

están en la razón $p:q$, demostrar que

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{1}}=0$$

VI DESIGUALDADES

Otra aplicación que tienen los polinomios simétricos elementales se da en las desigualdades. Es claro que para poder hacer uso de ellos necesitamos que en la desigualdad aparezca un polinomio simétrico, o bien, una expresión que pueda transformarse a un polinomio simétrico, caso en el que podríamos aplicar las ideas de los capítulos II y III. Como ya es costumbre, intentaremos inducir el método más apropiado para este tipo de problemas. Es por ello que presentamos el siguiente ejemplo.

Problema 1. Demostrar que la expresión

$$(1) \quad 3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10$$

no es negativa para cualesquiera x y y reales y no iguales a cero.

Demostración

Consideremos a los polinomios simétricos elementales

$$\begin{cases} \sigma_1 = x+y \\ \sigma_2 = xy \end{cases}$$

y escribamos la expresión (1) en términos de σ_1 y σ_2, para lo cual conviene escribir la ecuación (1) como:

$$3\left(\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}\right)-8\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)+10,$$

Esta última expresión, con base en la tabla A-3-1, en términos de σ_1 y σ_2, nos queda

$$3\left(\frac{\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2}{\sigma_2^2}\right)-8\left(\frac{\sigma_1^2-2\sigma_2}{\sigma_2}\right)+10,$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{\sigma_2^2}\left[3\sigma_1^4-12\sigma_1^2\sigma_2+6\sigma_2^2-8\sigma_1^2\sigma_2+16\sigma_2^2+10\sigma_2^2\right],$$

que al simplificarla obtenemos

$$(2) \quad \frac{1}{\sigma_2^2}\left[3\sigma_1^4 - 20\sigma_1^2\sigma_2 + 32\sigma_2^2\right]$$

Ahora, para escribir la expresión (2) en términos de una sola variable, y para ayudarnos a establecer la desigualdad que deseamos, introducimos la cantidad no negativa z

$$(3) \quad z = (x-y)^2$$

la cual puede expresarse como

$$(4) \quad z = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 ,$$

por lo que

$$(5) \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1^2 - z}{4}$$

Sustituyamos a σ_2 en la expresión (2):

$$\frac{1}{\sigma_2^2}\left[3\sigma_1^4 - 20\sigma_1^2\left(\frac{\sigma_1^2 - z}{4}\right) + 32\left(\frac{\sigma_1^2 - z}{4}\right)^2\right]$$

Desarrollando, obtenemos

$$\frac{1}{\sigma_2^2}\left[3\sigma_1^4 - 5\sigma_1^4 + 5\sigma_1^2 z + 2\left(\sigma_1^4 - 2\sigma_1^2 z + z^2\right)\right]$$

La última expresión, al simplificarla nos queda

$$(6) \qquad \frac{z}{\sigma_2^2}\left[\sigma_1^2 + 2z\right]$$

En la expresión (6), tenemos las cantidades σ_2^2 y σ_1^2 que son mayores que cero y la cantidad $z \geq 0$, por lo que

$$\frac{z}{\sigma_2^2}\left[\sigma_1^2 + 2z\right] \geq 0$$

Como las expresiones (1) y (6) son equivalentes

$$3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10 \geq 0$$

Problema 2. Si a, b y c son números reales, tales que $c \geq 0$ y

$$(7) \quad a + b \geq c$$

entonces se cumple que

$$(8) \quad a^4 + b^4 \geq \frac{c^4}{8}$$

Demostración

Escribamos al miembro izquierdo de la desigualdad (8) en términos de los polinomios simétricos elementales

$$\begin{cases} \sigma_1 = a + b \\ \sigma_2 = ab \end{cases}$$

$$(9) \quad a^4 + b^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

Introducimos la cantidad no negativa

$$z = (a - b)^2,$$

la escribimos en términos de σ_1 y σ_2

$$z = \sigma_1^2 - 4\sigma_2,$$

despejamos σ_2

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1^2 - z}{4},$$

y la sustituimos en (9)

$$a^4 + b^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\left(\frac{\sigma_1^2 - z}{4}\right) + 2\left(\frac{\sigma_1^2 - z}{4}\right)^2,$$

luego,

$$a^4 + b^4 = \sigma_1^4 - \sigma_1^4 + z\sigma_1^2 + \frac{\sigma_1^4 - 2z\sigma_1^2 + z^2}{8},$$

así pues,

$$(10) \quad a^4 + b^4 = \frac{\sigma_1^4 + 6\sigma_1^2 z + z^2}{8}$$

De la desigualdad (7), tenemos que

$$\sigma_1 \geq c,$$

lo cual utilizamos en (10), para llegar a

$$a^4+b^4 \ge \frac{c^4+6c^2z+z^2}{8},$$

Con base en que z y c son mayores e iguales a cero,

$$\frac{6c^2z+z^2}{8} \ge 0$$

y al sumar la misma cantidad de ambos lados,

$$\frac{c^4+6c^2z+z^2}{8} \ge \frac{c^4}{8}$$

es decir,

$$a^4+b^4 \ge \frac{c^4}{8}$$

Veamos que está detrás de la solución de estos problemas. En ambos casos hemos hecho intervenir a la cantidad no negativa z, a la cual hemos asignado el valor de

$$z=(a-b)^2$$

o bien

$$z=\sigma_1^2-4\sigma_2$$

Pero qué justifica esa elección de z, ¿por qué z debe de ser mayor o igual a cero? Bien, recordemos que por el teorema 2 el sistema

$$\begin{cases} x+y=\sigma_1 \\ xy=\sigma_2 \end{cases}$$

y la ecuación cuadrática

$$w^2-\sigma_1 w+\sigma_2=0$$

tienen las mismas soluciones. En particular, las soluciones de la ecuación cuadrática son

$$w_{1,2}=\frac{\sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2-4\sigma_2}}{2}$$

Para que estas soluciones, o lo que es lo mismo, las soluciones del sistema, sean números reales, es necesario que

$$\sigma_1^2-4\sigma_2 \ge 0,$$

es decir

$$(x+y)^2 - 4xy \geq 0,$$

luego

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

esto es

$$(x-y)^2 \geq 0$$

En resumen, si $z \geq 0$, donde $z = (x-y)^2$, tendremos que la ecuación cuadrática y el sistema tendrán soluciones reales. Además, esta elección de z nos permite que en lugar de σ_2 escribamos $\frac{\sigma_1^2 - z}{4}$, o bien, en lugar de σ_1^2 a $z - 4\sigma_2$. Lo anterior tiene la gran ventaja de que sabemos que $z \geq 0$ (si usamos la primera sustitución también se introduce la cantidad no negativa σ_1^2), lo cual es de gran ayuda cuando se trabaja con desigualdades. Con base en lo anterior se puede establecer el siguiente teorema:

Teorema 3. Sean σ_1 y σ_2 números reales. Para que los números x y y, definidos como

$$\begin{cases} x + y = \sigma_1 \\ xy = \sigma_2 \end{cases},$$

sean números reales, es necesario y suficiente que

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0$$

Demostración

Sabemos que el sistema para definir a σ_1 y a σ_2, tiene las mismas soluciones que la ecuación cuadrática

$$w^2 - \sigma_1 w + \sigma_2 = 0$$

y que las soluciones de la ecuación cuadrática son

$$w_{1,2} = \frac{\sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}}{2},$$

de donde se obtiene que las soluciones serán reales solamente si $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0$

También podemos concluir que la igualdad se alcanza, es decir

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_2 = 0$$

si

$$\sigma_1^2 = 4\sigma_2$$

o lo que es lo mismo

$$(x+y)^2 = 4xy,$$

o bien

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4xy,$$

$$x^2 + y^2 = 2xy$$

igualdad que se alcanza si

$$x = y.$$

Otra situación que queremos hacer notar en la solución de este tipo de problemas, es que las condiciones, si las hay, adicionales a la desigualdad, deberán involucrar expresiones simétricas, en el caso de que contengan a las dos variables de la desigualdad.

Procedimiento que utilizamos demostrar desigualdades

A. El problema debe pedir que las variables que satisfacen la desigualdad sean números reales.

B. Verificar que la desigualdad contiene una expresión simétrica. Denotaremos, para fines de esta exposición, a la expresión por $f(x,y)$ y a la desigualdad por $f(x,y) \geq 0$.

C. Verificar que si la condición contiene a las variables x y y, sea mediante una expresión simétrica.

D. Expresar a la desigualdad en términos de los polinomios simétricos elementales de σ_1 y σ_2, esto es:

$$f(x,y) = g(\sigma_1, \sigma_2) \geq 0$$

E. Sustituir a σ_2 por

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1^2 - z}{4},$$

o bien, según convenga, a σ_2 por

$$\sigma_1^2 = z + 4\sigma_2$$

donde

$$z = (x - y)^2$$

Al efectuar la sustitución más apropiada, obtendremos una desigualdad en términos de σ_1 y z, o de σ_2 y z, es decir

$$h(\sigma_1, z) \geq 0,$$

o bien

$$l(\sigma_2, z) \geq 0$$

F. La condición mencionada en el paso 2, se escribe en términos de σ_1, σ_2. Así escrita, se busca la manera más adecuada de usarla en la última desigualdad obtenida. A continuación aplicaremos el método propuesto en un problema.

Ejemplo 1. Sean x y y dos números reales, tales que

$$x + y = 2$$

demuéstrese que

$$x^4 + y^4 \geq 2$$

Demostración

Observemos que las variables son números reales, que la desigualdad y la condición son expresiones simétricas.

Ahora pasemos a escribir la desigualdad en términos de los polinomios simétricos elementales de σ_1 y σ_2, para lo cual primero la escribimos como sigue

$$x^4 + y^4 - 2 \geq 0,$$

luego, auxiliándonos de la tabla A-3-1 y de que

$$\begin{cases} x+y=\sigma_1 \\ xy=\sigma_2 \end{cases} \text{ y } \ \sigma_1^2-4\sigma_2\geq 0,$$

Obtenemos

$$(11) \qquad x^4+y^4-2=\sigma_1^2-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2-2\geq 0$$

y al sustituir σ_2 en términos de σ_1

$$\sigma_1^4-4\sigma_1^2\left(\frac{\sigma_1^2-z}{4}\right)+2\left(\frac{\sigma_1^2-z}{4}\right)^2-2\geq 0,$$

de donde

$$\sigma_1^4-\sigma_1^4+\sigma_1^2z+\frac{1}{8}\left(\sigma_1^4-2\sigma_1^2z+z^2\right)-2\geq 0$$

Simplificando obtenemos que

$$\frac{1}{8}\left(\sigma_1^4+6\sigma_1^2z+z^2-16\right)\geq 0$$

Con base en que la condición de que

$$x+y=2=\sigma_1,$$

la última expresión queda

$$\frac{1}{8}\left(16+24z+z^2-16\right)\geq 0,$$

que al simplificar y tomando en cuenta a (11), nos queda

$$x^4+y^4-2=\frac{z}{8}(z+24)$$

finalmente, como $z\geq 0$

$$x^4+y^4-2\geq 0,$$

lo que implica que

$$x^4+y^4\geq 2$$

Pasamos ahora a proponer una serie de ejercicios en los que es necesario demostrar una desigualdad.

Ejercicios.

1. Si a y b son números reales mayores que cero, demostrar que

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

2. Demostrar la desigualdad

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

donde $a>0$ y $b>0$

3. Demostrar que si

$$x^2+y^2=1$$

entonces

$$-\sqrt{2}\leq x+y\leq\sqrt{2}$$

4. Demostrar que el cuadro tiene mayor área que cualquier rectángulo del mismo perímetro.

5. Demostrar que la suma de los catetos de un triángulo rectángulo no es mayor que la diagonal de un cuadrado construido sobre la base de la hipotenusa.

6. Si x y y son positivos y desiguales, demostrar que

$$\frac{x^6+y^6}{2}>\left(\frac{x+y}{2}\right)^6$$

7. Si a y b son dos números positivos, demostrar que

$$\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

8. Si a, b y c son números reales, tales que

$$a+b\geq c$$

entonces se cumplen:

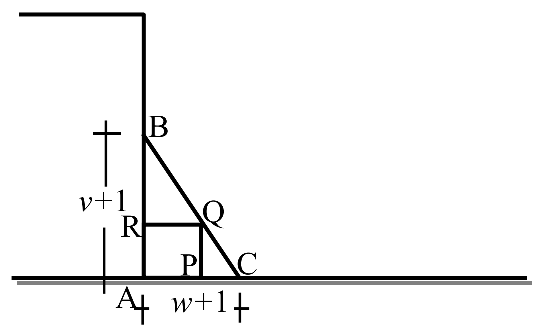
(i) $\quad a^2+b^2\geq\dfrac{c^2}{2}$

(ii) $\quad a^8+b^8\geq\dfrac{c^8}{128}$

VII ECUACIONES RECURRENTES

Existen otro tipo de ecuaciones en las que es posible aplicar las ideas que hemos venido desarrollando sobre los polinomios simétricos elementales. En el problema que a continuación presentamos se llega a este tipo de ecuaciones, conocidas como ecuaciones recurrentes.

Problema 1. Junto a una pared de un edificio de cinco pisos, hay un pequeño depósito de 1m de frente, 1m de ancho y 1m de alto. Para pintar una parte de la pared se ha colocado una escalera de 3m de longitud que toca al depósito como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la escalera en la pared?



Solución

Llamaremos $v+1$ al alto que logra la escalera sobre la pared y $w+1$ a la distancia que hay entre la pared y el punto de apoyo de la escalera en el suelo. Con ayuda de la figura podemos observar que los triángulos BRQ y QPC son semejantes, por lo que podemos escribir,

$$(1) \quad \frac{v}{1} = \frac{1}{w},$$

de donde

$$(2) \quad w = \frac{1}{v}$$

Ahora por el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$(3) \quad (w+1)^2 + (v+1)^2 = 3^2$$

Al desarrollar la ecuación (3), tenemos:

$$(4) \quad w^2 + v^2 + 2w + 2v - 7 = 0$$

Si sustituimos la ecuación (2) en la ecuación (4), llegamos a lo siguiente:

$$\left(\frac{1}{v}\right)^2 + v^2 + 2\frac{1}{v} + 2v - 7 = 0$$

$$(5) \quad v^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 + 2(v + \frac{1}{v}) - 7 = 0$$

Consideremos los siguientes polinomios simétricos elementales:

$$(6) \quad \begin{cases} \sigma_1 = v + \frac{1}{v} \\ \sigma_2 = v\frac{1}{v} \end{cases}$$

Ahora expresemos la ecuación (5) en términos de σ_1 y σ_2, esto último lo haremos también con ayuda de la tabla A-3-1:

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 + 2\sigma_1 - 7 = 0$$

Como $\sigma_2 = 1$,

$$\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 9 = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática, obtenemos dos valores para σ_1: $-1+\sqrt{10}$ ó $-1-\sqrt{10}$. Así pues, tenemos dos pares de soluciones para σ_1 y σ_2:

$$\begin{cases} \sigma_1 = -1+\sqrt{10} \\ \sigma_2 = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -1-\sqrt{10} \\ \sigma_2 = 1 \end{cases}$$

Con base en el teorema 2, obtenemos dos ecuaciones cuadráticas:

$$z^2 - \left(-1+\sqrt{10}\right)z + 1 = 0 \quad \text{y} \quad z^2 - \left(-1-\sqrt{10}\right)z + 1 = 0$$

Al resolverlas llegamos a cuatro soluciones para z:

$$z_{1,2}=\frac{-1+\sqrt{10}\pm\sqrt{\left(1-\sqrt{10}\right)^2-4}}{2} \quad \text{y} \quad z_{3,4}=\frac{-1-\sqrt{10}\pm\sqrt{\left(1+\sqrt{10}\right)^2-4}}{2}$$

Por lo que tenemos cuatro pares de soluciones para v y $\frac{1}{v}$. Bastará con escribir las cuatro soluciones para v, esto es

$$v_1=\frac{-1+\sqrt{10}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}{2}$$

$$v_2=\frac{-1+\sqrt{10}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}}{2}$$

$$v_3=\frac{-1-\sqrt{10}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{2}$$

$$v_4=\frac{-1-\sqrt{10}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{2}$$

Podemos determinar que v_1 es positiva porque $\sqrt{10}>1$. También que $v_4<0$ porque todos los términos del numerador son negativos.

Ahora veamos que con v_2 y con v_3. Comparemos los términos positivos y negativos en ambos casos. En el primero observemos que:

$$(2\sqrt{10})^2=40<7^2,$$

por lo que

$$7-2\sqrt{10}>0,$$

$$\left(1+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2=8+2\sqrt{7-2\sqrt{10}}-2\sqrt{10},$$

Ahora compararemos a $8+2\sqrt{7-2\sqrt{10}}-2\sqrt{10}$ con $\left(\sqrt{10}\right)^2=10$, o lo que es lo mismo, a $8+2\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ con $10+2\sqrt{10}$, o mejor aún, a $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ con $1+\sqrt{10}$, de donde obtenemos que

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}}<1+\sqrt{10},$$

porque

$$\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2 = 7-2\sqrt{10} < \left(1+\sqrt{10}\right)^2 = 11+2\sqrt{10}$$

Así pues, $v_2 > 0$.

Finamente, vamos a determinar el signo de v_3. Observemos que

$$\left(1+\sqrt{10}\right)^2 = 11+2\sqrt{10} > 7+2\sqrt{10},$$

en consecuencia $v_3 < 0$

Por las condiciones del problema, sólo debemos considerar a v_2 como solución. Finalmente, como $(v+1)$ es la altura que alcanza la escalera sobre la pared, la altura máxima será:

$$v_2 + 1 = \frac{1+\sqrt{10}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}}{2}\ \mathrm{m}$$

Cuando tengamos una ecuación del mismo tipo que la ecuación (4), podemos escribirla en términos de σ_1 y σ_2, debido a que la ecuación (5) es simétrica con respecto a las variables v y $\frac{1}{v}$. Respecto a esto queremos indicar que como $\sigma_2 = 1$, la ecuación que resulta después de la sustitución queda en términos de σ_1 exclusivamente. A continuación se resuelve dicha ecuación y después, con base en el teorema 2, se encuentran las soluciones para v y $\frac{1}{v}$. En este caso, bastará con escribir las soluciones de v.

Como se habrá notado, el sistema constituido por las ecuaciones (1) y (3), pudo ser resuelto de la misma forma que los sistemas del capítulo I, pero debido a que se trataba de mostrar un tipo especial de ecuaciones de una sola variable las ecuaciones recurrentes o recíprocas, no se hizo así. Obsérvese que si en la ecuación (4) sustituimos a v por $\frac{1}{v}$, dicha ecuación no se altera.

Normalmente, las ecuaciones recurrentes no aparecen escritas como la ecuación (5), sino en forma de polinomios igualados a cero. Por ejemplo, la ecuación (5) si la multiplicamos por v^2 quedará:

$$(6) \quad v^4 + 2v^3 - 7v^2 + 2v + 1 = 0$$

Otro ejemplo de ecuación recurrente es:

$$3x^6 + 5x^5 + 7x^3 + 5x + 3 = 0$$

Para darnos cuenta de que se trata de una ecuación de ese tipo, basta con dividirla por x^3, obteniendo:

$$3x^3 + 5x^2 + 7 + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3} = 0, \; x \neq 0$$

Se puede notar que en este tipo de ecuaciones los coeficientes extremos coinciden al igual que los que les siguen.

Consideramos que con lo expuesto anteriormente, las siguientes definiciones no serán ninguna sorpresa:

Definición 1. Al polinomio

$$(7) \quad \mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \; , \; x \neq 0$$

se le llama **recurrente,**[15] si los coeficientes en índice equidistantes coinciden. Esto es, si:

$$(8) \quad a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \ldots$$

Son ejemplos de polinomios recurrentes:

$$\text{a) } z^9 - 3z^8 + 8z^7 + z^6 + 10z^5 + 10z^4 + z^3 + 8z^2 - 3z + 1$$

$$\text{b) } 3x^6 + x^4 + x^2 + 3$$

$$\text{c) } y^n + 1$$

Definición 2. La ecuación $f(x) = 0$, se llama **ecuación recurrente** si $f(x)$ es un polinomio recurrente. Habiendo determinado lo anterior pasemos a los siguientes ejercicios.

[15] También son conocidos como polinomios recíprocos.

Problema 2. Resolver la ecuación

$$12z^4 - 16z^3 - 11z^2 - 16z + 12 = 0$$

Solución

El lado izquierdo de la ecuación es un polinomio recurrente de grado 4, que puede transformarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
12z^4 - 16z^3 - 11z^2 - 16z + 12 &= z^2\left(12z^2 - 16z - 11 - \frac{16}{z} + \frac{12}{z^2}\right) \\
&= z^2\left[12\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 16\left(z + \frac{1}{z}\right) - 11\right] \\
&= z^2\left[12\left(\sigma_1^2 - 2\right) - 16\sigma_1 - 11\right] \\
&= z^2\left(12\sigma_1^2 - 16\sigma_1 - 35\right),
\end{aligned}$$

donde $\sigma_1 = z + \frac{1}{z}$, la ecuación original es equivalente a

$$z^2\left(12\sigma_1^2 - 16\sigma_1 - 35\right) = 0$$

En la ecuación original podemos verificar que $z = 0$ no es solución de la misma, luego podemos, en esta última ecuación, dividir por z^2, reduciendo el problema a resolver a la ecuación cuadrática:

$$12\sigma_1^2 - 16\sigma_1 - 35 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 48(35)}}{24} \\
&= \frac{16 \pm 44}{24} = \begin{cases} \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{7}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

Así pues, si consideramos las funciones simétricas elementales

$$\begin{cases} \sigma_1 = z + \dfrac{1}{z} \\ \sigma_2 = z\dfrac{1}{z} = 1 \end{cases},$$

tendremos que la solución de la ecuación original será igual a la solución de los sistemas:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{1}{z} + z = \dfrac{5}{2} \\ \sigma_2 = 1 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} \sigma_1 = z + \dfrac{1}{z} = -\dfrac{7}{6} \\ \sigma_2 = 1 \end{cases}$$

Estos sistemas implican, por el teorema 2, las ecuaciones cuadráticas

$$w^2 - \frac{5}{2}w + 1 = 0 \text{ y } w^2 + \frac{7}{6}w + 1 = 0,$$

de las cuales obtenemos las soluciones:

$$w_{1,2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} \text{ y } w_{3,4} = \frac{-\frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} - 4}}{2}$$

de donde:

$$w_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ y } w_{3,4} = \begin{cases} \dfrac{-7 + i\sqrt{95}}{12} \\ \dfrac{-7 - i\sqrt{95}}{12} \end{cases}$$

Lo que implica que tenemos cuatro soluciones para z :

$$\begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = \dfrac{1}{2} \\ z_3 = \dfrac{-7 + i\sqrt{95}}{12} \\ z_4 = \dfrac{-7 - i\sqrt{95}}{12} \end{cases}$$

Problema 3. Resolver la ecuación recurrente

$$(9) \quad x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$$

Solución

Tanto en el problema 1 como en el ejercicio 2, hemos llegado a ecuaciones donde aparece la variable y su recíproca. En particular, en el problema anterior, factorizamos a z^2 para obtener una ecuación escrita de esa manera. Sin embargo, si intentamos factorizar en nuestra ecuación a x, x^2, x^3, x^4 o x^5, no obtendremos en el otro factor una expresión que contenga a la variable y a su recíproca término a término

Si observamos con cuidado la ecuación (9), nos podemos dar cuenta que los términos en donde sus coeficientes son iguales, la potencia de la variable es en un caso par o cero y en otro impar. Por lo tanto, si sustituimos a la variable por -1, obtendremos como resultado cero, es decir, $x=-1$ es una raíz de la ecuación (9).

Utilizando el procedimiento de división sintética, podemos dividir a la ecuación (9) por $x+1$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & -2 & -5 & -5 & -2 & 1 \\ & & -1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

Esto último significa que nuestra ecuación (9) es equivalente a la ecuación:

$$(10)\quad (x+1)\left(x^4-3x^3-2x^2-3x+1\right)=0,$$

o lo que es lo mismo, equivalente al sistema:

$$(11)\quad \begin{cases} x+1=0 \\ x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0 \end{cases}$$

Ya sabemos que una solución es $x=-1$. El resto de las soluciones las obtendremos al resolver la segunda ecuación del sistema (11), lo cual haremos a continuación. Comencemos observando que ahora sí nos conviene factorizar a x^2, con lo que obtenemos:

$$(12)\quad x^2\left(x^2-3x-2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

Como $x=0$ no es raíz de la ecuación original, podemos dividir a la ecuación por x^2, con lo que llegamos a:

$$x^2 - 3x - 2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

de donde,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

Ahora, si escribimos a esta última ecuación en términos de σ_1 y σ_2, obtendremos:

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - 3\sigma_1 - 2 = 0,$$

como $\sigma_2 = 1$,

$$\sigma_1^2 - 3\sigma_1 - 4 = 0$$

La última ecuación implica que:

$$\sigma_1 = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Y así hemos llegado a los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 4 \\ x\dfrac{1}{x} = 1 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = -1 \\ x\dfrac{1}{x} = 1 \end{cases},$$

que podemos resolver con ayuda del teorema 2:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 4 \\ \sigma_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z^2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

y

$$\begin{cases} \sigma_1 = -1 \\ \sigma_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2},$$

luego, tomando en cuenta la solución que ya se tiene, las soluciones de la ecuación (9) son:

$$\begin{cases} x_1 = 2+\sqrt{3} \\ x_2 = 2-\sqrt{3} \\ x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ x_5 = -1 \end{cases}$$

De los dos problemas vistos, podemos concluir que lo que está detrás de ellos es lo siguiente:

Teorema 4. Todo polinomio recurrente de grado par,

$$P_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} a_k z^{n-k}, \; a_0 \neq 0$$

puede presentarse como:

$$(13) \quad P_{2n}(z) = z^n f_n(\sigma)$$

donde $\sigma = z + \frac{1}{z}$ y $f_n(\sigma)$ es un polinomio de grado n en σ. Y todo polinomio recurrente de grado impar $P_{2n+1}(z)$, es divisible por $z+1$, por lo que puede ser representado como:

$$(14) \quad P_{2n+1}(z) = (z+1) g_{2n}(z) = (z+1) z^n f_n(\sigma)$$ [16]

Pasemos a señalar cuál sería la estrategia a seguir cuando nos enfrentemos a una ecuación recurrente y pretendamos resolverla.

Procedimiento que utilizamos para resolver ecuaciones recurrentes

A. Verificar que se trata de una ecuación recurrente.

B. Escribir la ecuación recurrente según lo establecido en el teorema 3. Con lo que en particular obtendremos que $f_n(\sigma) = 0$, y cuando el grado de la ecuación recurrente sea impar, algunas de sus soluciones.

[16] La demostración se puede ver en el Apéndice 7.

C. Con base en el teorema 2, obtener las soluciones para la ecuación en σ, en términos de la variable de la ecuación original.

D. Establecer todas las soluciones de la ecuación original, conjuntando las obtenidas en el segundo paso (si las hay), con las del tercer paso.

Apliquemos lo que hemos dicho en el siguiente ejemplo

Ejemplo. Hallar las soluciones de la ecuación

$$4z^{11}+4z^{10}-21z^{9}-21z^{8}+17z^{7}+17z^{6}+17z^{5}+17z^{4}-21z^{3}-21z^{2}+4z+4=0$$

Solución

Como se puede notar, nuestra ecuación es recurrente, además de grado impar 11. Así pues, por el teorema 3, es divisible por $z+1$. En efecto,

$\underline{-1\rfloor}$	4	4	-21	-21	17	17	17	17	-21	-21	4	4
		-4	0	21	0	-17	0	-17	0	21	0	-4
	4	0	-21	0	17	0	17	0	-21	0	4	0

luego

$$(z+1)\left(4z^{10}-21z^{8}+17z^{6}+17z^{4}-21z^{2}+4\right)=0,$$

esta ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{cases} z+1=0 \\ 4z^{10}-21z^{8}+17z^{6}+17z^{4}-21z^{2}+4=0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, obtenemos

$$z_1=-1$$

y de la segunda, al factorizar z^5

$$(15)\quad z^5\left(4z^5-21z^3+17z+17\frac{1}{z}-21\frac{1}{z^3}+4\frac{1}{z^5}\right)=0$$

Como $z=0$ no es raíz de la ecuación original, entonces la ecuación (15) es equivalente a:

$$4z^5-21z^3+17z+17\frac{1}{z}-21\frac{1}{z^3}+4\frac{1}{z^5}=0$$

de donde,

$$(16)\quad 4\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)-21\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+17\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$$

Sustituyendo a $z+\frac{1}{z}$ por σ y con ayuda de la tabla A-3-1, tenemos que a la ecuación (16) la podemos escribir como:

$$4\sigma^5-20\sigma^3+20\sigma-21\sigma^3+63\sigma+17\sigma=0,$$

es decir,

$$4\sigma^5-41\sigma^3+100\sigma=0,$$

de donde,

$$\sigma\left(4\sigma^4-41\sigma^2+100\right)=0$$

Esta última ecuación puede resolverse como bicuadrática, o sea, si $\sigma^2=u$:

$$4u^2-41u+100=0$$

por lo que,

$$u_{1,2}=\frac{41\pm\sqrt{41^2-1600}}{8}=\frac{41\pm 9}{8}=\begin{cases}\frac{25}{4}\\ 4\end{cases},$$

luego,

$$\sigma=\begin{cases}\pm\frac{5}{2}\\ \pm 2\end{cases}$$

Resumiendo, tenemos cinco soluciones de σ:

$$\sigma=0,\ \sigma=\frac{5}{2},\ \sigma=-\frac{5}{2},\ \sigma=2,\ \sigma=-2$$

Ahora con ayuda del teorema 2, obtenemos cinco ecuaciones cuadráticas, cada una correspondiente a un valor de σ:

$$\begin{cases} \sigma = 0 \\ \sigma = \dfrac{5}{2} \\ \sigma = -\dfrac{5}{2} \\ \sigma = 2 \\ \sigma = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 + 1 = 0 \\ z^2 - \dfrac{5}{2} z + 1 = 0 \\ z^2 + \dfrac{5}{2} z + 1 = 0 \\ z^2 - 2z + 1 = 0 \\ z^2 + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

de donde obtenemos diez soluciones para z, que aunadas a la que ya encontramos ($z_1 = -1$), conforman las once soluciones de la ecuación original. Las once soluciones son:

$$z_{2,3} = \pm i$$

$$z_4 = 2$$

$$z_5 = \frac{1}{2}$$

$$z_6 = -\frac{1}{2}$$

$$z_7 = -2$$

$z_{8,9} = 1$ (raíz de multiplicidad 2)

$z_{10,11} = -1$ (raíz de multiplicidad 3 al considerar z_1)

Cuando tenemos una ecuación recurrente, la podemos escribir como la ecuación (13) si es de grado par, y como la ecuación (14) si es de grado impar. Queremos ahora determinar para qué grados de la ecuación recurrente, ésta tiene solución por medio de la fórmula general.

Sea m el grado de la ecuación:

a) Si $m = 2n$, podemos escribir nuestra ecuación, con base en el teorema 3, como:

$$z^n f_n(\sigma) = 0$$

En este caso, nuestro problema se reduce a resolver

$$f_n(\sigma)=0,$$

ecuación que tendrá solución del tipo que estamos tratando, si $n<5$

b) Si $m=2n+1$, nuestra ecuación se puede representar, con base en el teorema 3, como:

$$(z+1)z^n f_n(\sigma)=0$$

También en este caso basta con que $n<5$ para que tenga solución.

Tomando en cuenta las dos opciones posibles analizadas, una ecuación recurrente tendrá solución mediante fórmula general si es de grado menor o igual a nueve.

Ejercicios.

Resuelve las siguientes ecuaciones

1. $3x^6+5x^5+7x^3+5x+3=0$

2. $z^7+z^6+z^5-2z^4-2z^3+z^2+z+1=0$

VII CONCLUSIONES

Como lo mencioné en el planteamiento de la tesis, mi intención se enfocaba a presentar una "propuesta de un curso para aspirantes o profesores de matemáticas del bachillerato, enmarcado dentro de una propuesta para la formación y actualización de la planta docente del bachillerato, en particular para el CCH". Dicha propuesta inscrita dentro del *Programa de Formación de Profesores de Matemáticas* elaborado por profesores del CCH, aprobado por el consejo técnico del CCH y del documento *Tecnologías Digitales en la Enseñanza y Aprendizaje. Una propuesta para la Formación y Actualización de los Profesores de Matemáticas del CCH*, que establece también una propuesta al respecto, trabajos en los que participé.

También fueron muy importantes los estudios curriculares de la maestría y el seminario de doctorado en el que participo, desde hace más de dos años, encabezado por el doctor Luz Manuel Santos Trigo en el Cinvestav. Además del apoyo recibido por el maestro Juan B. Zubieta Recio y los sinodales que me han asignado.

Considero haber logrado el propósito de la tesis, presentando este documento en el cual contiene, como su nombre lo indica, problemas que se pueden resolver con polinomios simétricos elementales. Esos problemas los clasifiqué en siete tipos diferentes: Polinomios simétricos elementales, Sistemas no lineales de ecuaciones simétricas con dos variables, Introducción de variables auxiliares en sistemas no simétricos, Variables auxiliares en una ecuación no lineal con una incógnita, problemas asociados con la ecuación cuadrática, Desigualdades y Ecuaciones recurrentes. Además de cinco teoremas y diez Apéndices en los que una nota histórica, una explicación matemática o las demostraciones de los teoremas se presentan. En los siete tipos en los que clasifiqué los problemas en cuya solución utilicé los polinomios simétricos, incluyo un: Problemas y sus soluciones, paso a paso, en los que construyo el método a utilizar en esos casos; síntesis de sus soluciones en el apartado *Procedimiento que utilizamos para resolver los problemas* y finalmente una sección en la que se presentan una serie de ejercicios en los cuales se puede aplicar el *Procedimiento*.

Presenté el material, como ya lo mencioné en la introducción, a diez profesores, cinco de la facultad de Ciencias de la UNAM y cinco del CCH, además de un cuestionario que contestaron. Los comentarios de los profesores son favorables al material aunque expresan diversas dudas.

Todos están de acuerdo en que los profesores de bachillerato tienen los conocimientos previos para que se les imparta un curso

Consideran que es apropiado que amplíen su conocimiento los profesores, aunque no es necesario que dominen el tema. De igual manera, que la representación gráfica es conveniente utilizarla, entendiendo que no siempre se logrará visualizar las ecuaciones y las soluciones correspondiente. También proponen utilizar una hoja de cálculo para observar la variación y los intervalos de crecimiento y decrecimiento, en particular para verificar las soluciones.

Con el nivel de formalidad están de acuerdo, recordando que se trata de una propuesta que los profesores deben adecuar para los estudiantes del último semestre de bachillerato o de inicio de facultad. En particular se puede observar el interés en tratar esos temas, como lo muestra la revista *Mathematics Teacher*, con el ejemplo señalado en la presentación de la tesis.

Se muestran escépticos sobre la necesidad de un curso de ese tipo, señalando que hace falta dar una justificación más sólida para convencer de las bondades de la propuesta.

Finalmente señalan, que la propuesta no refleja uno de los objetivos de la misma: “Que la matemática está estrechamente vinculada con la experiencia y la actividad práctica del hombre”, ni que se muestre que “la matemática es una actividad teórica que sistematiza y organiza el conocimiento humano”.

No considero totalmente cierto lo que afirman. La primera afirmación la sostengo en la medida que las matemáticas surgen de observar la realidad y abstraer lo que se percibe estableciendo modelos, que poco a poco, se van ajustando a la realidad hasta conformar ideas matemáticas que siguen elaborándose a lo largo de siglos. Es así como surge la geometría, según lo plantea Howard Eves en *A Survey of Geometry*, primer capítulo, al igual que A. D. Aleksandrov y Kolmogorov en su libro *La Matemática, su Contenido, Método y Significado*. Si bien en la propuesta no se realiza la construcción que se plantea en los libros referidos, es importante que profesores y estudiantes manejen esas ideas como posibles, es decir que nosotros en el aula realicemos esa construcción de la matemática a un nivel muy primitivo, pero que se comprenda que ese camino se ha seguido.

Respecto a la segunda afirmación, considero que la crítica es correcta. Pues a partir del intento de organizar los métodos de resolución de los problemas planteados, no se puede generalizar y realizar esa afirmación como resultado del trabajo que se presenta.

APÉNDICE 1

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
ÁREA DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DEL CCH

Seminario de Matemáticas de Azcapotzalco, Oriente y Vallejo

Mayo de 2011

Programa de Formación de Profesores de Matemáticas
Orientaciones Generales

Introducción

Los ejes principales de la actividad de toda institución educativa son la enseñanza y el aprendizaje. El aprendizaje de los alumnos es el objetivo central de universidades, escuelas y colegios. Toda institución educativa procura la mejora continua de la enseñanza, uno de los componentes en el aprendizaje[17]. Pero mejorar la enseñanza requiere esencialmente actualizar a los profesores y formar mejores profesores.

Históricamente la formación de profesores ha sido tarea de las escuelas normales y de los departamentos de educación. Hoy, una tendencia plantea que el profesor de matemáticas de nivel medio básico en adelante egrese de una universidad, en la que tomó cursos en los departamentos de matemáticas y educación, y regrese regularmente a la universidad para actualizarse. A partir de su implementación en Alemania y Francia, este modelo de formación docente se ha adoptado en toda la comunidad europea. ¿Podemos aplicar algo semejante en el CCH? No, el Colegio y el país tienen características diferentes, propias. Un programa de formación y actualización de profesores de matemáticas para el Colegio debe diseñarse tomando como base las características y problemas del CCH hoy y adaptando experiencias valiosas de otras partes del mundo.

En este momento, de manera muy general, el Colegio enfrenta un doble problema: bajos niveles de aprendizaje en matemáticas y la renovación de la planta docente de esta área de conocimientos. Abordar esta situación conjuntamente demanda una estrategia con objetivos generales claros, realizables y una serie de planes operacionales detallando qué hacer, cuándo y cómo para alcanzar las metas intermedias y finales.

Al diseñar un programa de formación de profesores no se parte de cero, el Colegio tiene algunas experiencias. En 1971 abrió un programa de entrenamiento para docentes que se iniciaban en su nueva actividad. Después de 1974 se

[17] La compleja y delicada relación entre enseñanza y aprendizaje se discute adelante.

abandonó esta modalidad, creando en 1978 una maestría en matemática educativa (en la UACPyP), una de las experiencias más interesantes del proyecto original del Colegio. Sin conexión con este proyecto, actualmente existe un programa de maestría en todas las áreas académicas del CCH, la MADEMS, que para matemáticas no representa un programa de formación de profesores porque no fue planteado como su meta. Más aún, a lo largo de las diferentes administraciones generales del Colegio se han ofrecido cursos interanuales e intersemestrales con carácter obligatorio. Si bien algunos cursos pueden considerarse aceptables, incluso unos pocos muy buenos, no se han organizado en el marco de un programa general, estructurado a largo plazo y con una orientación definida por una concepción del aprendizaje o teorización didáctica, por lo que no han tenido coherencia ni objetivos, limitándose sólo a cubrir una formalidad: ofrecer los cursos. Estas experiencias exhiben la importancia de un plan general, estratégico, que en el caso del CCH, no ha existido para la formación o actualización de profesores.

1. El CCH necesita un programa coherente de formación de profesores de matemáticas articulado a través de dos líneas generales: *la profesionalización y la actualización permanente* del cuerpo docente. La coherencia de tal programa debe mostrarse, entre otras cosas, planteando objetivos realizables y respondiendo a interrogantes como:

¿Qué áreas de conocimiento deben articular la formación de un profesor de matemáticas?

¿Qué habilidades, conocimientos y actitudes deben caracterizar a los profesores de matemáticas de bachillerato?

¿Qué distingue a los profesionales de la enseñanza de matemáticas de los maestros tradicionales o no profesionales?

De manera resumida, un profesional de la docencia en matemáticas está capacitado para enseñar esta disciplina porque sabe matemáticas. Saber matemáticas es primera condición, sin ésta ninguna otra tiene sentido, pero saber matemáticas es una condición necesaria, no suficiente para enseñar esta materia, también se requiere saber enseñar matemáticas. El profesional de la docencia guía su actividad en el aula a partir de algunos modelos didácticos para aritmética, álgebra, geometría o cálculo. Modelos que al plantear ciertas situaciones como resolver un problema[18], modelar un fenómeno o desarrollar una secuencia de actividades, ponen en juego varios conceptos, lo que puede desencadenar las acciones en el aula.

Los modelos didácticos están ligados a teorías del aprendizaje y éstas a la Psicología o a sus distintas escuelas vigentes en la actualidad. El profesional en la enseñanza de matemáticas de bachillerato debe tener algunos conocimientos de psicología, por ejemplo, sobre los fenómenos cognitivos inherentes a los procesos de generalización, abstracción, formación de esquemas, etc., fenómenos propios en el aprendizaje de matemáticas. Además, el docente necesita entender las interacciones fundamentales en el aula[19], para esto, debe tener conocimientos de algunos desarrollos teóricos de corte sociocultural y semiótico para poder interpretar esas interacciones.

Desde luego, la formación de profesores debe darse paso a paso, en secuencia, de acuerdo a las prioridades establecidas de antemano en un plan general. Además, se requiere *dar tiempo al tiempo* para que la enseñanza vertida en cursos o diplomados se vaya asimilando conjuntamente con las experiencias en el aula. La formación de un profesor no ocurre en el momento en que toma cursos o seminarios por buenos que estos sean, en ellos solamente recibe información; es necesaria la experiencia para confrontar la teoría con la práctica. Como el buen vino, el profesor necesita madurar, entonces aflorará toda su riqueza, por eso se planean con anticipación todos los procesos involucrados en la formación y se asume el requisito de cuidados especiales y continuos del proceso.

La formación de profesores planteada así, estratégicamente, marca objetivos y fines muy generales, como tal, orienta a largo plazo. Pero la profesionalización como estrategia no debe quedarse en declaración de buenas intenciones, requiere un plan de actividades detallado en donde se resuelva qué

[18] Problema en el sentido de una actividad no rutinaria, diferente totalmente del ejercicio.

[19] Entre éstas, alumnos-alumnos, alumnos-profesor, alumnos-actividades (secuencias diseñadas por el profesor para el trabajo en el aula), etc.

etapas son necesarias, en qué orden y cuáles son los objetivos, partiendo de medios reales disponibles hoy y en el futuro cercano, no de buenas intenciones.

2. Además de señalar dificultades y obstáculos en la enseñanza y aprendizaje, las investigaciones en didáctica de las matemáticas han propuesto rutas o trayectorias de aprendizaje, como el modelo de Van Hiele en geometría, o algunas trayectorias hipotéticas de aprendizaje cercanas a la teoría APOS para comprender conceptos del cálculo. Este tipo de conocimientos, llamados genéricamente *modelos didácticos*, son instrumentos valiosos para planear las actividades en el aula; guiarse o no con ellos o con algunos desarrollos teóricos, puede distinguir a los profesionales de la docencia de los maestros empiristas que por ensayo y error pretenden encontrar *el método* para enseñar y lo peor, hay profesores que creen tener ya la solución para asegurar el aprendizaje de sus alumnos. Al desdeñar la reflexión sistemática, el docente empirista poco a poco va tejiendo una red de concepciones y creencias[*] en las que finalmente queda atrapado. Hoy, las creencias de los docentes son una de las causas de problemas en el aula; de manera sutil las creencias van conformando los puntos de vista de los docentes sobre las relaciones enseñanza-aprendizaje y al trascurrir el tiempo, se mezclan conocimientos ciertos y/o de tipo científico con creencias, en tal forma que no será nada fácil decidir cuál es cuál. Un profesional tiene presente este riesgo y se previene. La actitud: *ir a la raíz* de las cosas, estudiarlas, y la actualización permanente son su vacuna.

3. Ante las Tecnologías de la Información y Comunicación[20] (TIC) o tecnologías avanzadas, el profesional de la enseñanza asume una posición crítica, las explora, valorando sus potenciales y limitaciones; no las considera la panacea para el aprendizaje en matemáticas y tampoco se cierra negando sus posibilidades para presentar los conceptos tradicionales en formatos diferentes y así, generar nuevos modelos de enseñanza o trayectorias para el aprendizaje de los alumnos.

[20] Estas tecnologías no se limitan a las computadoras e Internet, deben considerarse también los sensores y las calculadoras con capacidad de graficación y cálculo simbólico, de uso cada vez mayor en las aulas.

Desde hace más de veinticinco años las computadoras se han utilizado en la enseñanza de las matemáticas y en la actualidad hay algunos modelos teóricos proponiendo cómo sacar provecho de estas herramientas en varios aspectos muy puntuales. Una enorme cantidad de publicaciones documentan trabajos de investigación y propuestas de enseñanza-aprendizaje en matemáticas apoyadas con calculadoras, computadoras y otros dispositivos digitales.

Hoy disponemos de software libre para simular fenómenos físicos, graficar funciones y explorar procesos de cambio, por ello, se requiere estudiar y planificar cómo usar estas herramientas y varios resultados de investigaciones a nuestra disposición para apoyar la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas.

4. El aspecto distintivo del profesional en docencia en matemáticas es su formación para estudiar las interacciones en el aula y enfrentar los problemas derivados de éstas. ¿Cómo enfrentar tales problemas? Estudiándolos, requerimos investigar y esto demanda formación, conocimientos y experiencia. Estratégicamente, la formación de profesores debe apuntar a introducir a los docentes hacia el campo de la investigación en didáctica de las matemáticas pues, en la investigación está la clave para mejorar la enseñanza y enfrentar el problema de los aprendizajes con posibilidades reales de ir resolviéndolo. Sin investigación y teorías derivadas de ésta no puede haber respuesta a la pregunta: ¿cómo se aprende? Y no puede haber solución a los problemas de aprendizaje en matemáticas.

El importante papel de las teorías y la investigación en didáctica de las matemáticas puede exhibirse ante preguntas como la siguiente:

¿Por qué presenta tantos problemas para la mayoría de los estudiantes el aprendizaje del álgebra?

La posible respuesta sólo puede originarse a partir de estudiar la razón de las dificultades, la naturaleza de los problemas, y esto requiere de experimentación y teoría. En la formación de docentes, plantear preguntas como la anterior ayuda a organizar las actividades en más de un sentido.

5. Cuestionar a los profesores de muy reciente ingreso sobre las relaciones e interacciones entre modelos de enseñanza, secuencias didácticas y trayectorias hipotéticas de aprendizaje abre una veta de trabajo con estos docentes. Plantear la problemática de la transición de la aritmética al álgebra, la necesidad de construir *puentes* y detallar su naturaleza; discutir qué enseñar en geometría y cómo; plantear el problema de la demostración, de su enseñanza, aprendizaje y de resultados de algunos estudios al respecto, deben ser temas obligados de un programa de formación de profesores de matemáticas de bachillerato. La formulación de las nociones de *corte didáctico* y *obstáculo epistemológico* pueden representar un enorme potencial en la formación de profesores. Discutir la estructura del programa de una materia del plan de estudios puede abrir una vía muy amplia al estudio y discusión con los nuevos profesores.

Consideremos ahora el potencial que una adecuada selección de temas de matemáticas, de los mismos programas vigentes del PEA, puede jugar para organizar los temas del área disciplinaria en un programa de formación. Quizá aquí está la forma, junto a una adecuada selección de problemas y actividades de modelación, que debería asumir el curso básico de matemáticas para profesores de reciente ingreso.

6. Dicho lo anterior, creemos que un proyecto de formación docente debe articularse, en principio, a través de tres áreas: a) La disciplinaria, que aborda los conocimientos propios del área, la matemática; b) la didáctica, enfocada en los modelos de enseñanza de las ramas principales de la matemática (aritmética, álgebra, etc.); c) Las TIC y su papel como mediadores de la cognición de sus usuarios junto con el planteamiento de temas de historia y filosofía de las matemáticas. Como áreas generales, necesitan detallarse y precisar las conexiones que le den funcionalidad. Nosotros asumimos al área disciplinaria como la fundamental y en ese sentido en la que debe darse mayor atención desde el diseño mismo, aclarando cuáles son los objetivos a corto y largo plazo y cuáles serán los medios a utilizar (notas, textos, problemas, entrevistas interactivas filmadas en video, etc.). En el área disciplinaria debe resolverse qué aspectos de

matemáticas abordar, en qué orden y en qué modalidad se trabajará (curso regular, taller, seminario o combinación).

7. La formación de docentes requiere de textos, prácticas, materiales de referencia a los que pueda recurrirse para aclarar dudas, precisar ideas y principalmente para estudiar y asimilar las experiencias de otras partes. Un programa de formación debe generar no sólo textos o antologías sino publicaciones regulares especializadas en temas de matemáticas y didáctica, con énfasis en las experiencias generadas en el Colegio. Esto último puede convertirse en una forma útil de socializar varios aspectos de la didáctica de las matemáticas y del avance de la actividad de formación de profesores.

Si bien la parte correspondiente a la formación disciplinaria requiere una especie de cursos regulares de álgebra, análisis, geometría, etc., otras áreas pueden organizarse en seminarios y talleres. Por experiencia, la estructura general del proyecto de formación de profesores debe ser la de una serie de diplomados organizados de acuerdo a niveles de profundidad: básico, intermedio y avanzado en las tres áreas: matemáticas, didáctica y generalidades que incluyan nuevas tecnologías, filosofía y sociología de la matemática.

8. Todo programa académico requiere evaluación. La evaluación sistemática es el principal mecanismo de control para mantener el rumbo, orientando cuándo corregir para alcanzar los objetivos. Este programa debe ser evaluado por sus diseñadores y por los profesores que participaran en él. La primera evaluación debe realizarse antes de ponerse en práctica, tiene que mostrar viabilidad y coherencia. Después, la evaluación debe abordar los problemas prácticos reales del proceso de formación en marcha, en cada paso corrigiendo las acciones erróneas El programa también necesita ser evaluado por los participantes. Los señalamientos y críticas de estos profesores permitirán comparar entre metas definidas previamente y lo logrado. La evaluación interna funciona como retroalimentación, pero el proyecto no se opone a las evaluaciones externas.

Como en cualquier proyecto profesional debe estar claro que las bondades y limitaciones de este proyecto deberán calibrarse, ajustarse regularmente y hacer los cambios necesarios que la práctica demanda.

Este grupo de trabajo en formación docente ha ensayado ya varios formatos y ahora está en condiciones de probar la línea disciplinaria en un terreno concreto, con los aspirantes a profesor o profesores en activo que deben presentar examen de conocimientos. En ese sentido, proponemos ensayar nuestra propuesta en un curso de veinte/cuarenta horas para apoyar la presentación del examen de conocimientos de matemáticas, en dos planteles: Vallejo y Oriente. Con esta experiencia podemos avanzar y presentar una propuesta formal próximamente.

9. A nivel mundial se están realizando algunas propuestas educativas en las que el papel del docente sufrirá modificaciones de fondo. En este momento, en nuestro país, las relaciones entre enseñanza y aprendizaje se han vuelto delicadamente problemáticas, particularmente en matemáticas y en especial para los niveles de secundaria y bachillerato. Este grupo de trabajo debe asumir una posición en cuanto a esas relaciones, a su naturaleza; por ejemplo, quizá debemos abordar la discusión sobre la causalidad entre lo enseñado y lo aprendido, el papel y responsabilidad del docente en este proceso de enseñanza y aprendizaje. Nuestro proyecto debe adoptar una posición, hacerla explícita y defenderla en los foros académicos.

10. Por último, explicitamos que este o cualquier programa de formación docente tiene poco sentido, está incompleto, sino se ofrecen plazas de tiempo completo a los participantes. La administración central del CCH debe comprometerse a abrir plazas de carrera para interesar a los participantes, para engancharlos en el proyecto del Colegio y en un proyecto personal de vida que gire en torno a la carrera magisterial y desemboque en la profesionalización de la enseñanza de las matemáticas.

* Al menos desde las ideas desarrolladas por Schoenfeld sobre resolución de problemas en su texto: *Mathematical Problem Solving* (1985), las creencias han sido un tema recurrente de investigación en didáctica de las matemáticas. Hay creencias de todo tipo, por ejemplo, sobre qué es la matemática, qué debe ser un profesor de matemáticas y cómo debe enseñar; cómo se aprende, qué es un problema en matemáticas, etc. Para mayor información, se puede consultar:

Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. Randolph A. Philipp, en Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Frank K. Lester Jr. (Ed.) 2007, (257-315). NCTM.

APÉNDICE 2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

ÁREA DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DEL CCH

Tecnologías Digitales en la Enseñanza y Aprendizaje

Una propuesta para la Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas del CCH

Mayo de 2011

Tecnologías Digitales en la Enseñanza y Aprendizaje
Una propuesta para la Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas del CCH

Resumen

A partir de una revisión crítica del desarrollo y estado actual de la investigación sobre aplicaciones de las tecnologías digitales (*TD*) en el aula, exponemos una propuesta de formación y/o actualización de profesores del área de matemáticas sobre *TD* en procesos de enseñanza-aprendizaje de temas curriculares del PEA del CCH.

Introducción

La historia de las *TD* en las aulas, en particular en las de matemáticas, es anterior a la década de los 70s y desde los 80s está presente en las agendas de investigación de la comunidad internacional de Matemática Educativa. Grupos de investigación nacional e internacional han publicado sus opiniones, estudios y propuestas en libros o revistas especializados en donde puede hacerse un seguimiento puntual de los avances, así como de los problemas de investigación y propuestas de nuevos estudios. Tempranamente Freudenthal (1981), asumiendo la premisa: *las TD influyen en la educación*, indicó que uno de los *problemas mayores* de la matemática educativa consistía en estudiar:

> *¿Cómo usar las calculadoras y computadoras para despertar el entendimiento matemático?*

Sin embargo, antes de 1990 el tratamiento de las relaciones entre educación y *TD* tenía la tendencia de promover ésta señalando sus *bondades* para el aprendizaje sin aclarar cómo incidía en él, cómo lo apoyaba. Así, desde los años 70s aparecieron propuestas de diverso tipo invitando a *sacar ventaja del poder de calculadoras y computadoras*, sin aclarar cómo, pues se carecía de investigaciones sistemáticas.

Para 1990 la experiencia acumulada en la aplicación de computadoras y calculadoras en las clases de matemáticas era enorme, sobre esta base se procedió a recopilar resultados, analizarlos y proponer acciones. Por ejemplo, en un estudio sistemático de las *TD* y la matemática Kaput (1992), afirmó que para el entendimiento de la interacción entre tecnología y aprendizaje de las matemáticas:

> *Necesitamos identificar qué es diferente en los nuevos medios electrónicos y qué significan esas diferencias en términos de cognición, aprendizaje, enseñanza y otros temas relacionados.*

En el caso de las calculadoras, Penglase y Arnold (1996), después de una revisión de la investigación en los diez años anteriores, consultando varios trabajos sobre calculadoras y una gran cantidad de artículos en revistas internacionales, llegan a un resultado contundente: *La investigación, en ese momento, no permite sacar conclusiones bien cimentadas* (p. 82). Cuestionando las afirmaciones encontradas en varios artículos, relativas a la efectividad de esta herramienta, los mismos autores señalan que tales declaraciones:

> *Frecuentemente se basan en procedimientos de evaluación que erróneamente identifican el aprendizaje con resultados en exámenes y no pueden explicar la influencia de las calculadoras en el entendimiento conceptual. (p. 83)*

Señalamientos y preguntas como los anteriores promovieron la investigación de este tipo de tecnología.

Investigación en enseñanza y aprendizaje apoyado con TD

El fin del milenio y el inicio del siglo XXI fue un buen pretexto para revisar el estado de la investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas, incluido el uso de *TD*, y desde allí, proponer líneas de estudio para el nuevo siglo. Por ejemplo English (2002), editora del *Handbook of International Research in Mathematics Education*, afirmó que uno de los problemas prioritarios de investigación en

Educación Matemática para el nuevo siglo es la influencia de las tecnologías avanzadas en el aprendizaje y relata que entre los temas y preguntas presentadas a los invitados a colaborar en ese texto estaban las siguientes:

> *¿Cómo impactan estas tecnologías en la forma de aprender de los estudiantes?*
> *¿Cuáles son los contenidos matemáticos de lo que aprenden?*
> *¿Cómo cambian estas tecnologías los procesos de pensamiento?*

English (p.12), finaliza con la siguiente pregunta:

> *¿Qué modelos teóricos están emergiendo o necesitan desarrollarse con relación a los problemas señalados arriba?*

Para la segunda edición del texto (2008), estas preguntas seguían vigentes y hoy aún lo están, porque inciden en el núcleo de la problemática del uso de las *TD* en el aprendizaje de matemáticas, no ajeno a la problemática general del aprendizaje, con y sin *TD*, en esta área del conocimiento, y su pregunta central: ¿*Cómo se aprende matemáticas*?

Estas preguntas muestran la preocupación de una comunidad comprometida con aclarar de qué forma se puede apoyar el aprendizaje de los alumnos en matemáticas, con y sin tecnología. A contrapelo de esta comunidad hay grupos o individuos promoviendo las *bondades* de las *TD* sin ofrecer pruebas basadas en estudios sistemáticos, o intentar sustentar sus afirmaciones.

La comunidad internacional de Matemática Educativa estudia a las *TD* asumiendo una actitud crítica sobre su influencia en los aprendizajes, por ejemplo, ha cuestionado una de las *bondades* generalmente asociadas a estas tecnologías, la de un supuesto “valor agregado” (en los aprendizajes) proporcionado para el aprendizaje. Contra ese tipo de afirmaciones, sin prueba, Kieran y Hershkowitz (2001, p. 95), señalaron:

> *Hay trabajos de investigación que muestran que esta componente de 'valor agregado' no se obtiene fácilmente y, en ciertos contextos, el uso de la tecnología puede bloquear procesos de aprendizaje como la resolución de problemas*.

Afirmando además, que sin investigación a fondo,

> *Sin entendimiento de las formas en que los artefactos tecnológicos median la construcción de las estructuras mentales de los estudiantes, nuestras consideraciones y decisiones sobre el aprendizaje de las matemáticas, apoyado en la tecnología, pueden carecer de fundamento y potencialmente, pueden llegar a tener dificultades*. (Ibíd.)

En la actualidad, el estudio de las *TD* en procesos de aprendizaje en matemáticas asume la necesidad de tematizar las diferentes áreas de la matemática y tratar por separado la especificidad de las diversas herramientas para avanzar en su entendimiento. De esta forma, aparecen estudios sobre aprendizajes en álgebra apoyados con hojas de cálculo (Rojano, 2002 y 2008); enseñanza y aprendizaje de geometría con software dinámico (Mariotti, 2000 y Laborde 2006); aprendizajes en cálculo diferencial e integral con *Derive* (Camacho y Depool, 2003); programas para generar gráficas y tablas numéricas, como en Tall (2008), o uso de varias herramientas digitales en resolución de problemas (Santos-Trigo, 2007), entre otros.

Las herramientas para apoyar procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas han proliferado, destacan entre ellas, software de graficación como *Graphmatica* y *Winplot*; software de cálculo simbólico como *Derive* o *Maple*; software dinámico como *Cabri, Sketchpad* o *Geogebra* para geometría o *Fhatom* para probabilidad y estadística. Además, existe una enorme cantidad de programas para simular fenómenos físicos, o de propósito general como *Descartes* e instrumentos como las calculadoras con capacidad gráfica y *CAS* (Computer Algebra Systems) o sensores para registrar datos en *tiempo real* de variables físicas y los servidores e Internet. Este boom en las herramientas obliga a su tematización, al estudio de lo específico de cada una de ellas.

La tecnología ha producido los libros electrónicos e hipertextos en los que el usuario *viaja* a través de ellos y mediante *ligas*, accede a diferentes páginas e integra datos de distintos niveles jerárquicos, lo que permite al *lector*, además de mostrar varios cuadros simultáneamente, pasar del texto principal a las figuras, notas u otras partes con sólo dar clic en el ícono correcto. Esta es la base de la *interactividad* que articula los elementos de esta forma de libro y genera una especie de contigüidad, aunque la información esté estratificada. Algunos teóricos de estas tecnologías, por ejemplo Vanderdorpe (2002, p. 55), señalan que la función primaria de este nuevo formato de libro consiste en

> *retener a un lector cuya atención es inestable o que sólo la concede por algunos instantes, contrariamente a una organización lineal, que se dirige a un "lector de fondo"*.

Las obvias mutaciones al texto típico y su lectura, asociadas a esta tecnología, no se han estudiado suficientemente, no se conocen investigaciones sistemáticas, mucho menos en enseñanza y aprendizaje de matemáticas. Por cierto, en este tipo de formato es en donde hay una cantidad considerable de material, lamentablemente tan tradicional como listas de ejercicios y respuestas; presentaciones de temas o unidades y capítulos o libros de texto completos en formato CD-ROM, DVD, al igual que en direcciones de Internet.

En las tecnologías ligadas a Internet como la multimedia, cursos en línea o blogs, se encuentran las mayores expectativas y paradójicamente es en donde, hasta el momento, hay menos estudios y poco se sabe de su incidencia en el aprendizaje. Existe poca o casi nula investigación sobre el impacto de estas modalidades en la enseñanza, al menos en matemáticas[21], y lo sorprendente: su principal sustento

[21] Un caso excepcional está representado por el grupo del Departamento de Matemáticas del CUCEI de la U. de G., que estudia esta tecnología. Para más información ver (Smith, 2004) en Referencias.

teórico y metodológico descansa en pedagogías conductistas de estímulo-respuesta, originando así, otra paradoja: utilizar nuevas tecnología en la enseñanza y aprendizaje con métodos tradicionales, algo como guardar *vino nuevo en odres viejos*.

La naturaleza de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas, de sí complejas, adquieren un *valor agregado* de complejidad en los medios virtuales, no presenciales o a distancia porque en este caso la interacción es diferente, virtual, el aprendiz está solo, no existe una contraparte sensible e inteligente, de este modo, la dialéctica enseñanza - aprendizaje, el *juego* entre lo comunicado por el *profesor* y la acción del aprendiz cuando existe, es mínima. Pero, la limitación más importante de estos medios radica en ser casi vírgenes en cuanto a investigación, no hay estudios sistemáticos ni el análisis de lo experimentado en ellos, al menos en matemáticas.

No hay mala intención en innovar para mejorar, el problema está en introducir lo nuevo sin saber cómo, sin experiencias de primera mano ni marcos teóricos o conceptuales que señalen el rumbo orientando en el *qué hacer*; en otras palabras, requerimos de teoría y práctica y, sin una o ninguna, no podemos esperar mucho o puede esperarse lo obvio: el fracaso.

Enciclomedia, un proyecto sexenal, pretendió dotar de pizarrones electrónicos a 60,000 aulas de nivel básico, complementando así, los libros de texto gratuito. En los temas de matemáticas y ciencias, los principales del proyecto, se solicitó la participación de varias instituciones y personal dedicado a la investigación para generar materiales interactivos de temas curriculares que apoyaran a profesores y alumnos. De los productos entregados, desde el punto de vista didáctico, había de todo, buenos, malos y regulares, algunos exigían toda la atención de los alumnos y poca interacción de los mismos, lo que obviamente repercutió en el aprendizaje, en la calidad de lo aprendido. Desde su inicio, este multimillonario proyecto quedó condenado a fracasar al no planear adecuadamente ni resolver, el proceso de formación de los profesores, los usuarios de esta modalidad de enseñanza en el aula.

En 2010 apareció un proyecto con *TD* en el nivel de bachillerato proponiendo usar un software específico para

> *contribuir a la formación y actualización continua de los profesores de matemáticas mediante el establecimiento de una comunidad de dichos maestros que desarrollen contenidos interactivos usando las herramientas de Descartes y Arquímedes y, mediante un portal ad-hoc, los comparta en la web junto con las experiencias de uso de dichos contenidos en situaciones de enseñanza-aprendizaje* (Proyecto Arquímedes)

Este proyecto, respaldado por la capacidad y seriedad del responsable, claramente plantea sus objetivos pero, puede limitar la visión de los profesores en este proceso de formación y/o actualización en las TD.

Por otra parte, hoy es común citar el "alto índice de reprobados en matemáticas" como premisa para justificar la introducción de la *TD* en las aulas en una especie de silogismo que concluye, o *¿argumenta?*, veladamente que con la *TD* aumentará el número de aprobados, casi por el simple hecho de usarla Otro *argumento* plantea usar a la *TD* para "evitar la frustración de los alumnos que no aprenden" y, afirmando que para superar los problemas anteriores "requerimos estrategias innovadoras", obviamente asociadas a las nuevas tecnologías o cursos en la modalidad *no presencial*, sin aclarar en qué consisten esas estrategias y, la innovación, representada en la tecnología misma. Hoy es común recurrir a los malos resultados de evaluación nacional e internacional, para urgir a "tomar medidas serias para mejorar", medidas que por supuesto, consideran prioritario introducir las *TD*. Tales argumentos, ahora de moda, siguen la *lógica*:

1) Hay problemas serios en el aprendizaje
2) Los métodos tradicionales no han funcionado

|---

3) Lo nuevo sí funcionará (mejorará el aprendizaje)

Sin establecerse de la necesaria relación de las premisas con la conclusión y la validez de los juicios involucrados, tales silogismos son falacias.

El proyecto EMAT (Enseñando MAtemáticas con Tecnología), ubicado en el nivel de secundaria y ligado a la Subdirección de Enseñanza Media Básica de la SEP, se enfocó con resultados de investigación. EMAT desarrolló materiales propios, trabajó en varios estados de la república con personal entrenado previamente y, como proyecto de investigación, obtuvo resultados en formación de profesores en cómo enseñar con *TD* y cómo apoyar aprendizajes en algunos temas de matemáticas.

Teorización en aprendizajes apoyados con TD

Enfocada inicialmente en la clasificación de los errores de sintaxis, propios del álgebra, la primitiva Matemática Educativa, inspirada principalmente en las investigaciones de Piaget, giró hacia el estudio de los elementos cognitivos del aprendizaje como la generalización y abstracción o hacia el desarrollo de la habilidad para demostrar y resolver problemas y el estudio sobre formación de conceptos, propios de matemáticas. Este giro llevó a la Matemática Educativa a estudiar y discutir sobre la ontología de los objetos matemáticos, la epistemología ligada a los aprendizajes y a las teorizaciones sobre el papel de los símbolos (Harel y Kaput, 1991) o de las definiciones formales (Vinner, 1991); de las representaciones matemáticas (Janvier, 1987); la formación de esquemas (Skemp, 1999) o teorizaciones como APOS (Dubinsky, 1991), entre otros temas. Estos elementos aportaron y siguen aportando formas de ver, entender y enfrentar los fenómenos cognitivos ligados al aprendizaje de matemáticas.

La aparición de la computadora personal o microcomputadora en 1978 y la calculadora con capacidad gráfica en 1985, impulsaron la investigación de la

Matemática Educativa en general y del aprendizaje en matemáticas con *TD*, en particular. Por ejemplo, con las *TD* renació la noción de *visualización* (Zimmermann, 1991), y aparecieron términos típicos como *dragging* (arrastre) en geometría dinámica, *ventana*, *trace* y *zoom* en las calculadora con capacidad gráfica, *celda* con las hojas de cálculo, etc., con significados y connotaciones específicas en algunas teorizaciones.

La noción de *mediación* abrió una ruta importante en la reflexión teórica sobre el uso de herramientas para apoyar procesos de aprendizaje en matemáticas. Chassapis (1999), por ejemplo, reseña cómo diferentes herramientas modelan diferentes concepciones de los objetos matemáticos y aprendizajes diferentes de éstos. A su vez, Mariotti (2002), muestra ejemplos de la influencia de las tecnologías avanzadas en el aprendizaje en matemáticas en varios niveles. Con la noción de *mediación* la reflexión sobre el papel de las herramientas abrió la puerta a enfoques de corte cultural o sociocultural que ayudan a entender las interacciones en el aula con y sin tecnología. Desde los 90s, la tecnología ha impulsado los acercamientos teóricos semióticos y de mediación semiótica que ven a diversos instrumentos de las *TD* como mediadores semióticos (Bartolini, 2002; Radford, 2003; Arzarello, 2006).

La escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas ha introducido varias nociones teóricas para discutir el papel de las *TD* en el aprendizaje, entre ellas: la *mediación instrumental* (Guin, 1999); la *orquestación* (Trouche, 2004) y las nociones: *artefacto-instrumento*, *instrumentalización*, *instrumentación* y *génesis instrumental* (Hoyles, 2010, cap, VII). Desde luego, lo anterior es una pequeña muestra del desarrollo teórico asociado con las TD.

En reuniones internacionales[22] o en revistas especializadas como *Journal for Research in Mathemaics Education* o *Educational Studies in Mathematics* es más

[2222]Como las del Grupo de **P**sychology of **M**athematics **E**ducation (PME) o la **I**nternational **C**onference of **M**athematics **E**ducation (ICME).

evidente la importancia de la componente teórica para guiar la investigación y obtener aproximaciones en el entendimiento del papel de las *TD* en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en todos sus campos, desde el nivel básico, hasta ecuaciones diferenciales, álgebra lineal o *problem solving*.

Actualmente, hay en Matemática Educativa al menos tres corrientes[23] fuertes asociadas a ciertas formas de ver, entender y teorizar sobre el aprendizaje, caracterizadas cada una, por un grupo de principios explícitos e implícitos, una lista de preguntas clave y una metodología para estudiar la respuesta a tales preguntas. Las teorizaciones sobre el papel de las *TD* en el aprendizaje de matemáticas son tributarias de esas corrientes, no están al margen de ellas.

Con relación a la tecnología hay optimistas bien y mal intencionados, ambos <u>creen</u> que en ella está la solución del aprendizaje en matemáticas y de toda área de conocimiento. También, hay aquellos que sustituyen la teoría y la investigación con <u>voluntarismo</u>[24].

Como contraparte de los optimistas de las *TD* están los escépticos. Dentro de éstos, hay al menos de dos tipos, los que dudan y los que no creen y, también hay matices.

En la discusión de las *TD* como instrumento para apoyar el aprendizaje en matemáticas, desde luego, se deben presentar reflexiones, argumentos y evidencia experimental, de otra forma, opinar por opinar puede carecer de valor. ¿Qué aportan opiniones apoyadas sólo en creencias? El asunto es diferente si el cuestionamiento se funda en una teoría del aprendizaje o en una concepción epistemológica desde la cual se presenten argumentos coherentes. Por otra parte,

[23] El constructivismo, esencialmente norteamericano; la teoría francesa de las situaciones didácticas y el interaccionismo, esencialmente alemán o europeo.

[24] Asumiendo así, una posición semejante a la de cierta gente que, si le piden hacer un hoyo en la pared, a falta de herramientas, lo intentan a cabezazos.

la duda como método tiene valor como primer paso, no como el último, dudar debe conducir a estudiar qué hay detrás.

Entre los escépticos hay profesores que sin conocer algunos programas con orientación didáctica, sin explorarlos y apoyándose sólo en afirmaciones aisladas de entusiastas de la tecnología, le niegan cualquier valor; estos profesores no conocen o no quieren ver que, en la comunidad de Matemática Educativa hay personas serias, comprometidas con las investigaciones de los aprendizajes, estudiando con rigor qué papel se debe asignar a las *TD* en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

Algunos entusiastas y escépticos se identifican, quizá sin saberlo, en un aspecto crucial, desdeñan la investigación y la teoría. Como contraparte, la comunidad de Matemática Educativa ha dejado atrás la etapa de fascinación ejercida por las *TD*, ha madurado, ahora tiene en desarrollo programas de investigación abarcando áreas del álgebra, geometría, cálculo y aritmética, con preguntas puntuales sobre procesos de aprendizaje apoyados con *TD* que orientan nuevos estudios y, hay también, resultados que, sin ser generales, muestran avances.

Los comentarios, señalamientos y críticas anteriores exhiben de manera resumida, los problemas y bondades reales, de las tecnologías modernas. Tratan de mostrar el importante papel de la investigación para orientar la introducción y uso adecuado de las *TD* para apoyar la enseñanza y aprendizaje de matemáticas, sobre esta base, hacemos las observaciones, propuestas y señalamientos siguientes:

Observaciones y Propuestas

1. ¿Por qué es importante la introducción de las *TD* a las aulas? Uno de los argumentos fuertes radica en su capacidad para ofrecer nuevas formas de expresión y manipulación de los objetos matemáticos, lo que las herramientas tradicionales, físicas y simbólicas, de la matemática no pueden ofrecer: <u>procesar la</u>

información y en esto, descansa un enorme poder didáctico que posibilita al estudiante realizar actividades relevantes de la matemática como generalizar, abstraer, razonar, representar y, explorar y resolver problemas, apoyado y guiado en esta tecnología y diseños de actividad adecuados.

2. Desde nuestra perspectiva, la implementación de las nuevas tecnologías en el aula está asociada a un problema central, exhibido ya en la experiencia de Enciclomedia. Por ejemplo, una evaluación de ese proyecto detectó algunos vacíos metodológicos de implementación originados en fallas de concepción o de diseño, de modo que:

> *Uno de tales huecos metodológicos ha sido el haber dejado de lado en los diseños a la figura más importante para poner en obra un modelo de uso de tecnología en la clase de matemáticas, el maestro, quien una vez que se apropia de las herramientas tecnológicas en los niveles cognitivo, epistemológico y didáctico es capaz de transformar de manera significativa, junto con sus alumnos, las prácticas matemáticas del aula*. (Rojano, 2010)

La cita es contundente, viene de alguien con información de primera mano y su trabajo de investigación respalda sus opiniones.

3. Prácticamente todas las experiencias nacionales o internacionales coinciden en señalar que usar *TD* apegadas rígidamente al programa de un curso, ahoga el potencial de estas herramientas y que al introducir esta tecnología en las aulas, tarde o temprano se deben realizar modificaciones curriculares. La tecnología presiona fuertemente al currículo, muestra las limitaciones y debilidades de programas, planes de estudio y de políticas educativas tradicionales. Las *TD* obligan a realizar modificaciones en todos los órdenes de la actividad educativa, las aulas incluidas, produciendo el impacto mayor en qué y cómo se enseña, obligando a transformar la práctica del profesor, lo que tiene consecuencias.

4. ¿Qué enseñar y qué aprendizajes privilegiar? La experiencia mundial indica que no se puede enseñar lo mismo y de la misma manera. Desde siempre, las *TD* permitieron nuevos tratamientos de los datos numéricos, funciones y ecuaciones. Hoy, posibilitan enseñar otras habilidades como:

a) Visualizar y clasificar patrones numéricos y gráficos.

b) Descubrir relaciones invariantes y conexiones estructurales.

c) Apoyar al aprendiz a conjeturar.

d) Representar y entender diversas formas de representación y relaciones entre diferentes representaciones de un mismo objeto.

Las modernas herramientas tecnológicas apoyan a los estudiantes a entender y resolver problemas y modelar fenómenos físicos. Bajo diseños de actividad adecuados, las *TD* apoyan la enseñanza de cuestionamientos sistemáticos y exhibe el poder didáctico de formular *buenas* preguntas, con sentido, oportunas e interesantes. Se pueden diseñar actividades de exploración y resolución de problemas que conduzcan a los alumnos hacia la reflexión. La geometría dinámica ha replanteado la enseñanza de la demostración abriendo vías distintas a las tradicionales. El tratamiento de datos, la estadística y la probabilidad, apoyados en software dinámico, se pueden enseñar ahora desde nuevos y ricos acercamientos que pueden favorecer un entendimiento conceptual más profundo.

En cuanto a los aprendizajes, del párrafo anterior es obvio que debe privilegiarse aprender a preguntar, conjeturar, representar o hacer exploraciones de datos con hojas de cálculo o cualquier otra herramienta. Las *TD* facilitan aprender la exploración de ideas u objetos matemáticos, a descubrir relaciones invariantes y validar suposiciones. Esta tecnología puede promover otras formas de actividad y fomentar el trabajo colaborativo, pero el agente responsable de poner en práctica estas ideas en el aula es el profesor, la tecnología es inerte, no mueve nada ella sola, el papel del profesor es decisivo. Las *TD* demandan profesores comprometidos seriamente con el aprendizaje de los alumnos, con conocimiento a fondo de estas tecnologías, las teorías del aprendizaje y actualizados en los resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas.

Debería ser evidente entonces, que el diseño de las actividades, las estrategias didácticas y las secuencias de actividad deben replantearse, rediseñarse, no pueden seguir siendo las mismas.

5. El Colegio necesita una visión estratégica del uso de la tecnología, la que sólo puede derivarse de los resultados de la investigación actual y futura. Una aportación del CCH al bachillerato nacional puede y debe darse en este terreno de las *TD* promoviéndolas a partir de promover su estudio serio. Se trata de impulsar la investigación en esta área con una orientación muy clara: apoyar el aprendizaje de las matemáticas del Colegio.

6. Una conclusión fundamental es la siguiente: Antes de introducir una nueva tecnología en el aula debemos experimentar, estudiarla[25] y lo principal, formar a los profesores. Para el Área de Matemáticas y para este momento, la formación significa ofrecer a los profesores sólidos conocimientos en software de matemáticas y en las *matemáticas* ligadas a las *TD* a partir de temas curriculares. ¿Cómo? Metodológicamente a partir de explorar y resolver problemas de matemáticas.

El segundo paso debe abordar la formación y actualización en didáctica, con el objetivo de analizar, discutir qué significa enseñar en general y en particular usando *TD*, además, los profesores deben formarse con ideas claras sobre cómo se aprende matemáticas.

[25] En este caso, la investigación ya realizada en el país y la internacional, son el apoyo inmediato para iniciar el proceso de formación con orientaciones y objetivos claros.

El tercer movimiento en la formación debe enfocarse en hacer evidente que, quien usa las *TD* se obliga a estudiarlas, esto es, debe comprometerse a investigar cómo sacar el mejor provecho de ellas.

El docente que incorpora las *TD* debe estudiar a fondo las relaciones entre matemáticas, tecnologías y didáctica, lo que significa, comprometerse con la profesionalización de la enseñanza.

7. Asumiendo a la formación de profesores como uno de los objetivos más estratégicos de las instituciones educativas públicas, debe aceptarse como parte de su capacitación, instruirlos en el uso de las *TD* y fomentar su espíritu crítico hacia ellas. Con relación a los nuevos profesores debe tenerse presente lo siguiente, si bien un nuevo profesor puede estar más familiarizado con estas tecnologías, no significa necesariamente que sabe cómo usarlas en el aula, tampoco que conoce o está al día en la investigación sobre didáctica de las matemáticas para apoyar procesos de enseñanza y aprendizaje. El tema de las *TD* es importante en la formación de nuevos profesores y en la actualización de aquellos con varios años en activo.

8. La Dirección General del CCH debe impulsar la introducción de las *TD* en las aulas a partir de fomentar su investigación seria. Las personas con responsabilidad de dirección del CCH deben argumentar y defender ante cualquier instancia universitaria o de educación que si bien hay potencial didáctico en las *TD*, este potencial lo explota el docente con una sólida formación en matemáticas y didáctica.
Por nuestra parte, en lo inmediato tenemos la posibilidad de ofrecer una serie de cursos, estructurados en forma de diplomado, de formación y actualización de profesores de matemáticas de nivel bachillerato en *TD*.

Para trabajar a mediano y largo plazo en la formación y actualización de profesores en *TD*, proponemos la creación de un **Departamento**[26] **de Formación y Actualización Continua de Profesores de Matemáticas de Bachillerato en Nuevas Tecnologías**, con sede en el CCH.

Un *Programa* dependiente directamente de la Dirección General del Colegio, independiente de cualquier Secretaría o plantel, con la responsabilidad de:

a) Formar y/o actualizar profesores de matemáticas de la Escuela Nacional Preparatoria, del Colegio de Ciencias y Humanidades o de otras instituciones de este nivel educativo.
b) Desarrollar investigación sobre procesos de interacción de usuarios-tecnología en actividades de aprendizaje.
c) Planear, analizar y evaluar secuencias y estrategias de aprendizaje o *Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje*, apoyadas con *TD*.
d) Diseñar y evaluar proyectos académicos usando *TD*.
e) Difundir resultados de investigación y teorización nacionales e internacionales del uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas.
f) Organizar conferencias, seminarios y reuniones académicas sobre el tema de las TD y enseñanza y aprendizaje.

Esta propuesta concibe este *Programa* con dos funciones fundamentales:

i) La formación y actualizar de profesores en *TD*
ii) La investigación sobre este tipo tecnología.

Para este fin, contamos con la asesoría y apoyo de los Doctores Luz Manuel Santos Trigo y Luis Enrique Moreno Armella, miembros del SNI e investigadores titulares del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Además, hay varios profesores del CCH con la formación académica y experiencia suficiente en enseñanza y aprendizaje con *TD* para colaborar en este proyecto.

[26]Un Departamento o Programa que coordine la investigación con la formación y actualización de profesores hacia el objetivo de apoyar el aprendizaje de los alumnos en matemáticas.

Los profesores de carrera podríamos dedicar el *área complementaria* a las actividades del Departamento o Programa y a los profesores de asignatura, que se integraran, se les podría asignar horas de comisión para trabajar en él.

A cuarenta años de fundado, el Colegio puede y debe ofrecer al bachillerato nacional su rica experiencia en la aplicación de las TD para apoyar procesos de enseñanza y de aprendizaje en matemáticas. El CCH debe asumir este reto con la confianza de sacarlo adelante y consolidarse como la institución de bachillerato con capacidad para ofrecer alternativas académicas a los retos de la educación del siglo XXI.

Referencias

Arzarello, F. (2006) *Semiosis as a multimodal process*, Relime, 9, 267-299.

Bartolini, M. & Mariotti, M. (2002) *Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a vygotskian perspective*. En Lyn D. English (Ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education. (pp. 3-16). LEA, Mahwah, NJ.

Camacho, M. y Deppol, R. (2003). *Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando Derive*. En Revista: Educación Matemática 15(3), págs. (119-140).

Chassapis, D. (1999) *The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: the compass and the circle as an example*. En Educational Studies in Mathematics 37: 275,293.

Dubinsky, E. (1991) *Refletive abstraction in advanced mathematical thinking*. En David Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking, KluwerAcademic Publisher, pp. 95-123

English, L. (2002) *Priority Themes and Issues in International Research in Mathematics Education*. Chapter 1. En Lyn D. English (Ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education. (pp. 3-16). LEA, Mahwah, NJ.

Guin, D. & Trouche, L. (1999) The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators, International Journal of Computer for Mathematical Learning, 3, 195-227.

Harel, G. & Kaput, J. (1991) *The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts*. En David Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers. Netherlands. (pp. 82-94).

Hoyles, C & Lagrange, J. (2010) *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. C. Hoyles and J. B. Lagrange (Eds.) Springer

Janvier, C. (1987) *Problems of representation in mathematics learning and problem solving*. En C. Janvier (Ed.), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1992) *Technology and Mathematics Education*. En Douglas A. Grouws (Ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (A project of the National Council of Teachers of Mathematicas), (pp. 515-556), New York. Mcmillan.

Kieran, C. & Hershkowitz, R. (2001) *Potential and pitfalls of Technological tools in learning mathematics: introductory remarks*. En Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (V. 1, p 95.), Utrecht,Netherlands.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006) *Teaching and Learning Geometry with Technology*. En Ángel Gutierrez and Paolo Boero (Eds.) Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Sense Publishers. UK.

Mariotti, M. (2000) *Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment*. En Educational Studies in Mathematics 44: (pp. 25-53). Kluwer Acadmic Publishers. Netherlands.

Mariotti, M. (2002) *Influence of technologies advances on students' math learning*. En
En Lyn D. English (Ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education. (pp. 143-164). LEA, Mahwah, NJ.

Penglase, M. & Arnold, S. (1996) *The graphic calculators in mathematics education: a critical review of recent research*. En Mathematics Education Research Journal. 8(1), pp. 58-90.

Radford, L. (2003) *Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization*. Mathematical Thinking and Learning, 5(1), 37-70.

Rojano, T. (2002) *Mathematics Learning in the Secondary School: Students' Access to Significant Mathematical Ideas*. En Lyn D. English (Ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education. (pp. 143-164). LEA, Mahwah, NJ.

Rojano, T. (2008) *Mathematics learning in the middle school/junior secondary school: Student access to powerful mathematical ideas*. En Lyn D. English (Ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education. (pp. 136-153). Taylor and Francis.

Rojano, T. (2010) *La educación matemática y las tecnologías digitales en México: Los proyectos gubernamentales* (Conferencia magistral). En Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de Matemáticas, U de G.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. En ZDM Mathematics Education (2007) 39: 523-536. Springer.

Skemp, R. (1999) *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (R. R. Skemp,1980 Psychology of learning mathematics. Penguin Books). Morata, España.

Smith, G., Ferguson, D. & Gupta, S. (2004) *Diagrams and math notation in e-learning: Growing pains of a new generation*. En International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35(1), 681-695.

Smith, G. & Ferguson, D. (2004) *Learning math problem solving in online curses*. Proceedings of ED-Lear 2004: World Conference on E-Learning in Corporate Healthcare & Higher Education, Washington, DC.

Tall, D., Smith, D. & Piez, C. (2008) *Technology and Calculus*. En Kathleen Heid & Glendon B. Blume (Eds.) Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. Vol. I Research Syntheses, (pp. 207-258)

Vanderdorpe, C. (2002) *Del papiro al hipertexto (Ensayo sobre las mutaciones del texto y la lectura)* Fondo de Cultura Económica. Argentina.

Vinner, S. (1991) *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*. En David Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers. Netherlands. (pp. 65-81)

Zimmermann, W & Cunningham, S (1991) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Walter Zimmermann & Steve Cunningham (Eds.). MAA Notes, #19

APÉNDICE 3

Solución de las ecuaciones de quinto grado en adelante por medio de radicales

Desde la civilización babilónica se conocía cómo resolver ecuaciones cuadráticas, algunas ecuaciones cúbicas y otras bicuadráticas, esto lo sabemos gracias a las tablillas de arcilla encontradas y que proceden de alrededor del año 2100 a.C. hasta aproximadamente el año 300 d.C.

Durante el siglo IX vivió Al-Khwarizmi, quien escribió su famoso libro *Hisab al-jabr wal-muqabola* que significa "Ciencia de la reducción y la confrontación", y de donde tomó su nombre el "algebra" al transcribir la palabra *al-jabr* al latín, que era el lenguaje científico usado en Europa Occidental. En este trabajo aparece la primera fórmula general para la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Es durante esa época en la que el álgebra es considerada como la ciencia de resolver ecuaciones, concepción que prevaleció hasta finales del siglo XIX.

En el Renacimiento fue creciendo poco a poco el interés por las matemáticas, iniciado fundamentalmente por las necesidades que iban surgiendo conforme se desarrollaban las primeras ciudades comerciales como Génova, Pisa, Venecia, Milán y Florencia; por la llegada a Italia de manuscritos de la civilización griega, llevados por emigrantes procedentes de Constantinopla, ciudad invadida por los turcos en 1453 y visitada por los mercaderes italianos, quienes estudiaron el Oriente y su civilización.

Fue un profesor de la Universidad de Bologna, Scipione del Ferro (1465-1526) quien al parecer (porque no publicó su solución) resolvió por primera vez la ecuación cúbica de la forma $x^3 + px = q$, aunque se la dio a conocer a su discípulo Antonio María Fior. Cuando se difundió que se había encontrado la solución a la ecuación cúbica, sin dar a conocer cuál era, Nicolás Tartaglia se dedicó a buscarla, encontrándola en 1534. Tartaglia deseaba publicar su solución en algún libro que escribiera, por lo que no la dio a conocer, motivo por el cual se dudó que la hubiese encontrado, por lo que Fior lo retó a resolver treinta ecuaciones, cada una de las cuales resolvió Tartaglia. Girolamo Cardano (1501-1576) convenció a Tartaglia para que le diera a conocer su secreto, bajo juramento de que no lo difundiría; sin embargo, en 1545 Cardano publicó su libro sobre álgebra *Ars Magna*, en el cual explicaba el método de Tartaglia. En el libro de Cardano también apareció el método de su alumno Leudovico Ferrari (1522-1565) para resolver la ecuación de cuarto grado, dejando pendiente lo que llamó el caso irreductible, que fue resuelto por Rafael Bombelli en su *Algebra* publicada en 1572.

Hay que señalar que una dificultad que se tenía era la falta de una notación como la actual, pues del álgebra retórica en donde todo se debía escribir, se pasó al álgebra sincopada en la que sólo aparecen algunas abreviaturas. La fase simbólica del álgebra se puede decir que se inicia con Francisco Vieta (1540-1603), que en su libro de álgebra *In artem analyticam Isagoge,* publicado en 1591, propone un simbolismo muy similar al que usamos nosotros.

En el libro *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* que apareció en 1770, Joseph Lagrange (1736-1813) examinó las soluciones de las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado y llegó a la conclusión de que las ecuaciones de quinto grado en adelante no se podían resolver siguiendo las mismas ideas que las de grados menores, es decir, encontrar soluciones en las que se usaran únicamente sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y radicación con exponentes enteros positivos y los coeficientes de la ecuación. Este método es conocido como el método de radicales.

Niels Henrik Abel (1802-1829) publicó en 1824 la demostración de que era imposible resolver la ecuación de quinto grado por medio de radicales, demostración a la que había llegado Paolo Ruffini en 1799, pero que no fue tomada en cuenta porque a los matemáticos de su época les pareció demasiado vaga. Es necesario aclarar que hay muchas ecuaciones especiales de cualquier grado, que tienen solución por radicales, por ejemplo $x^7 = 1$. Correspondió a Evaristo Galois (1811-1832) resolver el problema de determinar cuáles ecuaciones se pueden resolver por medio de radicales.

APÉNDICE 4

Las Fórmulas de Vieta

Cuando tenemos una ecuación de segundo grado con una incógnita de la forma

$$(1) \quad x^2 + p_1 x + p_2 = 0,$$

que tiene como soluciones a x_1 y a x_2, la podemos reescribir como

$$(2) \quad (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Al efectuar la multiplicación indicada en la ecuación (2), obtenemos

$$(3) \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

Si comparamos la ecuación (1) con la (3), llegaremos a la conclusión de que

$$p_1 = -(x_1 + x_2)$$

$$p_2 = x_1 x_2$$

Ahora, sigamos los mismos pasos partiendo de la ecuación cúbica

$$(4) \quad x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$$

que tiene como soluciones a x_1, x_2 y x_3.

La ecuación (4) la podemos reescribir como

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0,$$

de donde

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - x_1 x_2 x_3 = 0$$

De lo anterior podemos decir que

$$\begin{aligned} p_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3) \\ p_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ p_3 &= -x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Pues bien, ¿qué obtendríamos si aplicáramos el mismo procedimiento con la ecuación de cuarto grado?,

$$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0\,?$$

¿a qué serían iguales p_1, p_2, p_3 y p_4?

Si ya se tiene la respuesta, o si se hace paso por paso hasta llegar a ella, se debe obtener que:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)\\
p_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\\
p_3 &= -\left(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4\right)\\
p_4 &= x_1x_2x_3x_4
\end{aligned}$$

Obsérvese que lo anterior lo podemos decir con palabras como sigue:

$p_1 = -$(suma de las soluciones)

$p_2 =$ (suma de los productos por parejas de las soluciones)

$p_3 = -$(suma de los productos de tres soluciones)

$p_4 =$ (producto de cuatro soluciones)

Respecto al signo, podemos notar que cuando el subíndice de p es par, p es positivo; y cuando el subíndice es impar, p es negativo. Por lo que podría quedar que el signo para p_i es $(-1)^i$.

Lo que se conoce como fórmula de Vieta parte de considerar la ecuación:

$$(5) \quad x^n + p_1x^{-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

Si desarrollamos esta última ecuación escribiendo los coeficientes de cada término $p_1, p_2, \ldots, p_n$, en términos de las soluciones de la ecuación, obtendremos:

$$x^n - \text{(suma de las soluciones)}\, x^{n-1}$$

$$+ \text{(suma de los productos de dos soluciones)}\, x^{n-2}$$

$$- \text{(suma de los producto de tres soluciones)}\, x^{n-3} +$$

$$\dots$$

$$+(-1)^k \text{ (suma de los productos de } k \text{ soluciones)}\, x^{n-k} +$$

$$\dots$$

$$+(-1)^n \text{ (producto de } n \text{ soluciones)} = 0$$

Así pues, al comparar las ecuaciones (5) y (6) llegamos a la conclusión de que

$$p_1 = -\text{(suma de todas las soluciones)}$$

$$p_2 = \text{(suma de los productos de dos soluciones)}$$

$$p_3 = -\text{(suma de los productos de tres soluciones)}$$

$$\dots$$

$$P_k = (-1)^k \text{(suma de los productos de } k \text{ soluciones}$$

$$\dots$$

$$P_n = (-1)^n \text{(producto de las } n \text{ soluciones}$$

Las anteriores ecuaciones son las fórmulas de Vieta y, si se observa, son polinomios simétricos en n variables. En particular son conocidos como funciones o polinomios simétricos elementales en n variables.

APÉNDICE 5

Relación entre las sumas de las potencias naturales de dos variables y los polinomios simétricos elementales

Vamos a establecer la relación que existe entre las sumas de las potencias naturales de x y y.

$$\begin{aligned}s_1 &= x+y\\ s_2 &= x^2+y^2\\ &\cdots\\ s_n &= x^n+y^n\end{aligned}$$

y los polinomios simétricos elementales

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= x+y\\ \sigma_2 &= xy\end{aligned}$$

Iniciemos con algunos ejemplos:

$$s_1 = x+y=\sigma_1$$

$$s_2 = x^2+y^2=\left(x+y\right)^2-2xy=\sigma_1^2-2\sigma_2$$

$$s_3 = x^3+y^3=\left(x+y\right)^3-3x^2y-3x^2y=\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=\sigma_1^3-3\sigma_2\sigma_1$$

$$s_4 = x^4+y^4=\left(x+y\right)^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3=\left(x+y\right)^4-4xy\left(x^2+y^2\right)-6x^2y^2=\sigma_1^4-4\sigma_2s_2-6\sigma_2^2$$

$$\begin{aligned}s_5 &= x^5+y^5=\left(x+y\right)^5-5x^4y-10x^3y^2-10x^2y^3-5xy^4\\ &=\left(x+y\right)^5-5xy\left(x^3+y^3\right)-10x^2y^2\left(x+y\right)=\sigma_1^5-5\sigma_2s_3-10\sigma_2^2\sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_6 &= x^6+y^6=\left(x+y\right)^6-6x^5y-15x^4y^2-20x^3y^3-15x^2y^4-6xy^5\\ &=\left(x+y\right)^6-6xy\left(x^4+y^4\right)-15x^2y^2\left(x^2+y^2\right)-20x^3+y^3=\sigma_1^6-6\sigma_2s_4-15\sigma_2^2s_2-20\sigma_2^3\end{aligned}$$

En resumen tendremos que:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= x + y = \sigma_1 \\
s_2 &= x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\
s_3 &= x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_2 s_1 \\
s_4 &= x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_2 s_2 - 6\sigma_2^2 \\
s_5 &= x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_2 s_3 - 10\sigma_2^2 s_1 \\
s_6 &= x^6 + y^6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_2 s_4 - 15\sigma_2^2 s_2 - 20\sigma_2^3
\end{aligned}
$$

Ahora pasemos a la demostración, que se hará por inducción, de que las sumas de las potencias naturales de x y y, siempre pueden expresarse a través de σ_1 y σ_2.

En efecto, para $n=1$, por definición

$$s_1 = x + y = \sigma_1$$

Para $n=2$

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Supongamos ahora que todas las sumas de potencias

$$s_3, s_4, s_5, \ldots, s_{k-2}, s_{k-1}$$

se expresan a través de σ_1 y σ_2.

Intentemos demostrar que entonces s_k también puede expresarse mediante σ_1 y σ_2. Para ello basta con multiplicar a

$$s_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$$

por σ_1, es decir

$$s_{k-1}\sigma_1 = \left(x^{k-1} + y^{k-1}\right)\left(x + y\right),$$

luego

$$s_{k-1}\sigma_1 = x^k + x^{k-1}y + y^{k-1}x + y^k,$$

de donde

$$s_{k-1}\sigma_1 = \left(x^k + y^k\right) + xy\left(x^{k-2} + y^{k-2}\right),$$

es decir

$$s_{k-1}\sigma_1 = s_k + \sigma_2 s_{k-2}\,,$$

lo que implica que

$$s_k = s_{k-1}\sigma_1 - \sigma_2 s_{k-2}$$

En esta última ecuación notamos que s_k se expresa a través de s_{k-1}, s_{k-2}, σ_1 y σ_2, siendo los dos primeros suma de potencias, que por hipótesis de inducción son expresables a través de σ_1 y σ_2, por lo que consecuentemente obtenemos que s_k queda expresado mediante σ_1 y σ_2. Luego por el principio de inducción para toda $n \in \mathrm{N}$, la suma $s_n = x^n + y^n$ es expresable mediante σ_1 y σ_2.

Por ser de ayuda a lo largo del trabajo, haciendo las sustituciones y simplificaciones correspondientes, obtenemos la siguiente tabla:

$$\begin{aligned}
&s_1 = \sigma_1 \\
&s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\
&s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 \\
&s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 \\
&s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 \\
&s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 \\
&s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 \\
&s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 \\
&s_9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4
\end{aligned}$$

Tabla A-3-1

APÉNDICE 6

Demostración del Teorema Fundamental

Antes de pasar a la demostración de nuestro teorema fundamental de los polinomios simétricos en dos variables, ilustremos la idea en la que se basa la demostración con un ejemplo.

Consideremos el polinomio simétrico

$$f(x,y) = 3x^4y^2 - 5x^3y + 9x + 3x^2y^4 - 5xy^3 + 9y - 2$$

Lo anterior lo podemos escribir como sigue:

$$f(x,y) = 3x^2y^2(x^2+y^2) - 5xy(x^2+y^2) + 9(x+y) - 2$$

Ahora, ordenémoslo alfabéticamente en primera instancia, y de mayor a menor potencia en segunda. Haciendo lo anterior llegamos a

$$f(x,y) = 3x^4y^2 - 5x^3y + 3x^2y^4 - 5xy^3 + 9x + 9y - 2$$

$$f(x,y) = (3x^2y^2 - 5xy)(x^2+y^2) + 9(x+y) - 2$$

Obsérvese que por ser $f(x,y)$ un polinomio simétrico, el primer término tiene necesariamente su término simétrico. Así pues, debemos escribir al primer término y a su término simétrico en función de σ_1 y σ_2, lo cual haremos de la siguiente forma.

Consideremos el polinomio simétrico α_1

$$\alpha_1 = 3\sigma_1^2\sigma_2^2 = 3(x+y)^2(xy)^2$$

y observemos que

$$\alpha_1 = 3(x^2+2xy+y^2)(xy)^2 = 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + 6x^3y^3$$

Restamos α_1 a $f(x,y)$ y al resultado lo llamamos f_1,

$$f_1 = f(x,y) - \alpha_1 = -6x^3y^3 - 5x^3y - 5xy^3 + 9x + 9y - 2$$

De manera similar como lo hicimos con α_1 y f_1, consideremos el polinomio simétrico α_2 y a f_2,

$$\alpha_2 = -6\sigma_1^0\sigma_2^3 = -6(x+y)^0(xy)^3$$

$$f_2 = f_1 - \alpha_2,$$

luego

$$f_2 = -5x^3y - 5xy^3 + 9x + 9y - 2$$

Continuando, tendremos que

$$\alpha_3 = -5\sigma_1^2\sigma_2 = -5(x+y)^2 xy,$$

por lo tanto

$$\alpha_3 = -5(x+y)^2 xy = -5x^3y - 10x^2y^2 - 5xy^3$$

y

$$f_3 = f_2 - \alpha_3,$$

de donde

$$f_3 = -5x^3y - 5xy^3 + 9x + 9y - 2 - (-5x^3y - 10x^2y^2 - 5xy^3)$$

$$f_3 = 10x^2y^2 + 9x + 9y - 2$$

Consideremos

$$\alpha_4 = 10\sigma_1^0\sigma_2^2$$

y

$$f_4 = f_3 - \alpha_4,$$

esto es

$$f_4 = 9x + 9y - 2$$

En este caso tomemos

$$\alpha_5 = 9\sigma_1\sigma_2^0$$

y

$$f_5 = f_4 - \alpha_5,$$

de donde

$$f_5 = -2$$

Finalmente, consideremos

$$\alpha_6 = -2\sigma_1^0\sigma_2^0$$

y

$$f_6 = f_5 - \alpha_6,$$

lo que implica que

$$f_6 = 0$$

Con base en los pasos efectuados, podemos asegurar que

$$f(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6,$$

y como,

$$\alpha_1 = 3\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$\alpha_2 = -6\sigma_1^0\sigma_2^3$$

$$\alpha_3 = -5\sigma_1^2\sigma_2$$

$$\alpha_4 = 10\sigma_1^0\sigma_2^2$$

$$\alpha_5 = 9\sigma_1\sigma_2^0$$

$$\alpha_6 = -2\sigma_1^0\sigma_2^0$$

$$f(\sigma_1,\sigma_2) = 3\sigma_1^2\sigma_2^2 - 6\sigma_2^3 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 10\sigma_2^2 + 9\sigma_1 - 2$$

En resumen, el camino seguido, nos muestra cómo expresar un polinomio simétrico en dos variables en términos de los polinomios simétricos elementales.

Pasemos ahora a la demostración teorema.

Teorema Fundamental. Todo polinomio simétrico en x y y, puede expresarse como un polinomio en σ_1 y σ_2.

Demostración

Sea $f(x,y)$ un polinomio simétrico en las variables x y y. Ordenamos los términos del polinomio alfabéticamente, en primera instancia y en seguida de mayor a menor potencia.

El término superior de $f(x,y)$, así ordenado, será

$$a_o x^{k_1} y^{k_2},$$

en donde $k_1 \geq k_2$ y $a_o \neq 0$.

Consideremos ahora el siguiente producto

$$\alpha_1 = a_o \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2},$$

esto es

$$\alpha_1 = a_o (x+y)^{k_1-k_2} (xy)^{k_2}$$

Si al polinomio α_1 lo desarrollamos y lo ordenamos de la misma manera que al polinomio $f(x,y)$, su término superior será igual a

$$a_o x^{k_1} y^{k_2}$$

Al restarle σ_1, a $f(x,y)$, eliminamos al término superior. Al resultado de la resta le llamaremos f_1, es decir

$$f_1 = f(x,y) - \sigma_1,$$

de donde

$$f(x,y) = \sigma_1 + f_1$$

Si repetimos el mismo procedimiento, obtendremos un α_2, tal que al efectuar la resta

$$f_2 = f_1 - \sigma_2,$$

eliminaremos al término superior de f_1. Además tendremos que

$$f(x,y)=\alpha_1+\alpha_2+f_2$$

Continuando con este proceso, en cierto momento obtendremos

$$f_n=f_{n-1}-\sigma_n=0$$

Por lo que

$$f(x,y)=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n,$$

en donde $\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n$ estarán expresadas en términos de σ_1 y σ_2.

APÉNDICE 7

Demostración del Teorema 2

Teorema 2. Sean σ_1 y σ_2 dos números arbitrarios. La ecuación cuadrática

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$$

y el sistema

$$\begin{cases} x + y = \sigma_1 \\ xy = \sigma_2 \end{cases}$$

se relacionan de la manera siguiente: si z_1 y z_2 son soluciones de la ecuación cuadrática, entonces el sistema tiene 2 y sólo 2 soluciones

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = z_2 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x_2 = z_2 \\ y_2 = z_1 \end{cases}$$

y si $x = a$ y $y = b$ es una solución del sistema, entonces a y b son soluciones de la ecuación cuadrática.

Demostración

i) Sean z_1 y z_2 soluciones de la ecuación

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0,$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - z_2) &= z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 \\ z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 &= z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 \end{aligned},$$

de donde

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \sigma_1 \\ z_1 z_2 = \sigma_2 \end{cases},$$

luego

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = x + y \\ z_1 z_2 = xy \end{cases},$$

por lo tanto:

$$\begin{cases}\begin{cases}x_1 = z_1\\ y_1 = z_2\end{cases}\\ \begin{cases}x_2 = z_2\\ y_2 = z_1\end{cases}\end{cases}$$

son soluciones de

$$\begin{cases}x + y = \sigma_1\\ xy = \sigma_2\end{cases}$$

El que el sistema

$$\begin{cases}x + y = \sigma_1\\ xy = \sigma_2\end{cases}$$

ya no admita más soluciones, se sigue de la segunda parte del teorema a cuya demostración pasamos

ii) Ahora supongamos que $x = a$ y $y = b$ son solución del sistema

$$\begin{cases}x + y = \sigma_1\\ xy = \sigma_2\end{cases},$$

así pues

$$\begin{cases}a + b = \sigma_1\\ ab = \sigma_2\end{cases}$$

entonces tendremos que:

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = z^2 - (a+b)z + ab = (z-a)(z-b)$$

lo cual significa que $x = a$ y $y = b$ son raíces de la ecuación cuadrática, pues si las sustituimos en la expresión anterior la reduce a cero, que es lo que se quería demostrar.

APÉNDICE 8

División Sintética

Cuando deseemos dividir un polinomio $f(x)$ por $x-c$, podemos proceder de manera análoga a como se divide en aritmética. Por ejemplo si

$$f(x)=3x^5+4x^4-x^3+2x^2+x-4$$

y $c=-2$, $x-c=x+2$,

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^4-2x^3+3x^2-4x+9 \\
\hline
x+2 & 3x^5+4x^4-x^3+2x^2+x-4 \\
 & -3x^5-6x^4 \\
 & \quad -2x^4-x^3+2x^2+x-4 \\
 & \quad 2x^4+4x^3 \\
 & \qquad 3x^3+2x^2+x-4 \\
 & \qquad -3x^3-6x^2 \\
 & \qquad\quad -4x^2+x-4 \\
 & \qquad\quad 4x^2+8x \\
 & \qquad\qquad 9x-4 \\
 & \qquad\qquad -9x-18 \\
 & \qquad\qquad\quad -22
\end{array}
$$

Podemos observar que se obtiene un cociente,

$$q(x)=3x^4-2x^3+3x^2-4x+9$$

y un residuo de $r=-22$

Lo anterior nos permite expresar a nuestro polinomio $f(x)$ como sigue:

$$f(x)=(x+2)q(x)+r$$

Ahora bien, siempre que tengamos un polinomio $f(x)$ dividido por $x-c$, obtendremos un cociente $q(x)$, y su residuo r. Es decir, que todo polinomio $f(x)$ lo podemos expresar como:

$$(1) \quad f(x)=(x-c)q(x)+r$$

Hagamos un pequeño análisis de la ecuación (1). Para esto consideremos que $f(x)$ es un polinomio de grado n,

$$f(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$

Como estamos dividiendo a $f(x)$ por $x-c$, $q(x)$ debe ser un polinomio de grado $n-1$, el cual lo expresaremos como:

$$q(x)=b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + ... + b_{n-1}$$

Al sustituir $q(x)$ en la ecuación (1), nos queda:

$$f(x)=(x-c)\left(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + ... + b_{n-1}\right)+r$$

$$= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + ... + x b_{n-1} - \left(c b_0 x^{n-1} + c b_1 x^{n-2} + ... + c b_{n-1}\right) + r$$

$$f(x)=b_0 x^n + (b_1 - c b_0) x^{n-1} + (b_2 - c b_1) x^{n-2} + ... + (b_{n-1} - c b_{n-2}) x + r - c b_{n-1}$$

Este último polinomio, por ser igual a $f(x)$, debe coincidir término a término con $f(x)$. Esto sólo puede ocurrir si:

$$(2) \qquad \begin{aligned} a_0 &= b_0 \\ a_1 &= b_1 - b c_0 \\ a_2 &= b_2 - c b_1 \\ &\cdots \\ a_n &= r - c b_{n-1} \end{aligned}$$

Cuando realizamos una división específica, conocemos los valores de los coeficientes de $f(x)$ y el valor de c, siendo nuestro interés encontrar qué valor tienen los coeficientes de $q(x)$ y r. es por esto que en el sistema (2) despejaremos los coeficientes de $q(x)$, y en la última ecuación del sistema al residuo r, quedándonos:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= a_1 - cb_0 \\
b_2 &= a_2 - cb_1 \\
&\ldots \\
b_{n-1} &= an_1 + cb_{n-2} \\
r &= a_n + cb_{n-1}
\end{aligned}
$$

Obsérvese que para obtener el valor de cada coeficiente necesitamos conocer todos los anteriores. Afortunadamente existe una forma práctica para encontrar los que deseamos. Para calcular cada b_1, primero colocamos a su correspondiente a_i y luego le sumamos (cb_{i-1}). En donde b_{i-1} lo obtuvimos en un paso anterior, iniciándose cuando igualamos a b_0 con a_0. Este procedimiento se ilustra en la siguiente figura:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\underline{c} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
 & & cb_0 & cb_1 & \cdots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\
\hline
 & b_0 & b_1 & b_2 & & b_{n-1} & r
\end{array}
$$

Veamos cómo funciona el procedimiento descrito en el ejemplo inicial, en donde

$$f(x) = 3x^5 + 4x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 4$$

y $c = -2$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\underline{-2} & 3 & 4 & -1 & 2 & 1 & -4 \\
 & & -6 & 4 & -6 & 8 & -18 \\
\hline
 & 3 & -2 & 3 & -4 & 9 & -22
\end{array}
$$

Así pues

$$q(x)=3x^4-2x^3+3x^2-4x+9$$

y

$$r=-22$$

El procedimiento anterior es conocido como **división sintética**.

Finalmente, queremos señalar otro resultado que es posible encontrar con ayuda de la división sintética. En muchas ocasiones necesitamos encontrar los valores que toma un polinomio para diversos valores de su variable. Por ejemplo, encontrar el valor de $f(x)$ cuando $x=-2$, si

$$f(x)=3x^6-7x^5+5x^4-x^2-6x-8$$

Por otro lado, si nosotros dividimos a $f(x)$ por $x+2$ ($c=-2$), obtendremos:

-2	3	-7	5	0	-1	-6	-8
		-6	26	-62	124	-246	504
	3	-13	31	-62	123	-252	496

Es decir:

$$f(x)=(x+2)\left(3x^5-13x^4+31x^3-62x^2+123x-252\right)+496$$

El residuo que hemos obtenido es igual a $f(-2)$

Lo anterior lo podemos explicar si en la última ecuación sustituimos a x por -2. En verdad obtendremos que $f(-2)=496$.

En general, podemos ver que si en la ecuación (1),

$$f(x)=(x-c)q(x)+r$$

y si nosotros evaluamos a $f(x)$ en $x=c$, obtenemos que:

$$f(c) = r$$

En otras palabras, cuando nosotros dividimos a un polinomio $f(x)$ por $x - c$, el residuo será igual a la función $f(x)$ evaluada en $x = c$, es decir

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$$

APÉNDICE 9

Demostración del Teorema 4

Teorema 4. Todo polinomio recurrente de grado par,

$$P_{2n}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{2n}a_k z^{2n-k}\ ,\ a_0\neq 0$$

puede representarse como:

$$P_{2n}\left(z\right)=z^n f_n\left(\sigma\right),$$

donde

$$\sigma=z+\frac{1}{z}$$

Y $f_n\left(\sigma\right)$ es un polinomio de grado n en σ. Y todo polinomio recurrente de grado impar $P_{2n+1}\left(z\right)$, es divisible por $z+1$, por lo que puede ser representado como:

$$P_{2n+1}\left(z\right)=\left(z+1\right)g_{2n}\left(z\right)=\left(z+1\right)z^n f_n\left(\sigma\right)$$

Demostración

a. El polinomio recurrente de grado par $P_{2n}\left(z\right)$, tiene un número impar de coeficientes

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{2n}$$

que están relacionados de la manera siguiente:

$$a_0=a_{2n},\ a_1=a_{2n-1},\ a_2=a_{2n-2},\ ...,\ a_i=a_{2n-i},\ ...,\ a_n=a_n$$

Al factorizar los coeficientes obtenemos

$$P_{2n}\left(z\right)=a_0\left(z^{2n}+1\right)+a_1\left(z^{2n-1}+1\right)+...+a_i\left(z^{2n-i}+z^i\right)+...+a_n z^n,$$

de donde

$$P_{2n}\left(z\right)=z^n\left[a_0\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)+a_1\left(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}\right)+...+a_i\left(z^{n-i}+\frac{1}{z^{n-i}}\right)+...+a_n\right]$$

Ahora consideremos los polinomios simétricos elementales $\sigma = \sigma_1 = z + \frac{1}{z}$ y $\sigma_2 = z\frac{1}{z} = 1$. La expresión que está entre los paréntesis cuadrados es una expresión simétrica en las variables z y $\frac{1}{z}$, por lo que es posible expresarla en términos exclusivos de σ y σ_2, pero $\sigma_2 = 1$, por lo que quedará expresada en términos exclusivos de σ. Así pues

$$P_{2n}(z) = z^n f(\sigma)$$

Para determinar el grado de $f(\sigma)$, basta con observar que el término de grado mayor en donde se va a sustituir a σ es $z^n + \frac{1}{z^n}$.

APÉNDICE 10

Cuestionario y Respuestas de los Profesores del CCH y de la Facultad de Ciencias

Como ya lo comenté, solicité a profesores de bachillerato y facultad que leyeran la propuesta y que me contestaran un cuestionario. A continuación muestro las preguntas, así como un resumen de sus respuestas. Las respuestas que aparecen con diferentes tipos de letra, corresponden al punto de vista de diferentes profesores. Cuando sólo aparece una respuesta se debe a que ella refleja el punto de vista del resto de profesores.

1. **Consideras que los profesores de bachillerato tienen los conocimientos previos necesarios para impartirles un curso conforme la propuesta.**

   La respuesta fue unánime señalando que sí los tenían.

2. **¿Un profesor de bachillerato necesita dominar el tema de la propuesta?**

   Sí, manejar la propuesta le permitiría ampliar su conocimiento sobre polinomios, cierto tipo de sistemas de ecuaciones y extender sus estrategias de solución, pero no necesariamente debe dominarlo, pues en pocas ocasiones se presentan problemas como los que se plantean.

3. **Será necesario utilizar la representación gráfica en esta propuesta.**

   Sin duda, porque permite indagar qué tipo de curvas describen las ecuaciones simétricas que se trabajan, además para lograr una mayor comprensión sobre el tema, contar con una representación en donde puedan ver si sus operaciones algebraicas los condujeron a la solución y para obtener un panorama más amplio del problema.

   Sí, porque la propuesta se enfoca en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales donde se incluyen ecuaciones cuya representación gráfica no es sencilla o generalmente no conduce a gráficas que resulten familiares, por lo que es necesaria una representación gráfica y numérica al abordar la temática

   El uso de aproximaciones numéricas permite trabajar la exploración y elaborar conjeturas. Es importante que para una mejor comprensión y un aprendizaje significativo, que los profesores puedan resolver por distintos caminos una situación, *que a su vez les permitirá enfrentar con mayor probabilidad de éxito nuevos problemas que se le presenten.*

Claro que un acercamiento a la idea de solución, sin embargo sabemos que se puede convertir en un obstáculo cuando se limita a ello o cuando los valores propuestos no son los más adecuados, sobre todo cuando se observa que en algunos casos los resultados corresponden a número imaginarios. Sin embargo, podríamos hacer una combinación con el uso de representaciones gráficas para entonces hacer una aproximación más adecuada y tenga un sentido real.

4. ¿Cómo usarías la tecnología digital (Excel, calculadoras, Derive, Mathematica, Maple, etc.) en la propuesta?

En una hoja de cálculo se podrían observar los valores que ellos comúnmente proponen como una tabla, en este contexto se podrían analizar intervalos de crecimiento, decrecimiento y de proximidad de valores entre dos o más ecuaciones, así como los posibles ceros. Se podría pedir que realicen un esbozo de la representación de dichos valores. Posteriormente se podría realizar la gráfica con algún software y comparar con los esbozos de los profesores, esto permitiría reflexionar acerca de la interpretación o lectura que hacen los profesores de los datos que están trabajando. Graficar y encontrar un valor aproximado, sería un paso para que tener una idea si la solución obtenida está en concordancia con la solución por esos medios.

Se me ocurre utilizar Excel para acceder a la representación gráfica y numérica. Y derive para la manipulación algebraica. O una combinación de estos.

Como herramienta de aproximación o como graficador para corroborar las soluciones algebraicas.

La interacción con la tecnología digital puede tiene varias vertientes que hay que estudiar y analizar con cuidado, de hecho yo usaría la computadora como un gran laboratorio y después que experimente comprobaría todos sus resultados y conjeturas.

La utilizaría para graficar y efectuar los cálculos numéricos. También para comprobar conjeturas.

5. **Cómo calificas la propuesta desde el punto de vista matemático.**

    a) formal

    b) necesita mayor formalidad

    c) es innecesaria

    Estoy de acuerdo en el nivel de formalidad y tratar las demostraciones en los apéndices, así dependiendo del nivel de rigor matemático que se requiera serán tratados o no los apéndices.

    Hacen falta pequeños comentarios para justificar algunos pasos en los desarrollos. La propuesta es lo suficientemente formal para los profesores con los que se propone trabajar.

    Me parece que la formalidad empleada es suficiente.

6. **¿Qué propones añadir o eliminar para mejorar la propuesta?**

    Se necesita una justificación más sólida para convencer de las bondades de usar éste método, en particular por su planteamiento de enseñanza tradicional

    Propondría mayor número de problemas de aplicación y mayor profundidad en el tratamiento geométrico. No eliminaría nada, en mi opinión es una propuesta bastante adecuada para profesores que tienen intenciones de mejorar su conocimiento de la disciplina.

    Añadir problemas verbales.

7. **Expresa los puntos de vista adicionales que consideres conveniente.**

    No veo que en la propuesta se refleja el objetivo: "Que la matemática está estrechamente vinculada con la experiencia y la actividad práctica del hombre", tampoco hay sustento en cuanto a que: "También se intentará mostrar que la matemática es una actividad teórica que sistematiza y organiza el conocimiento humano"