

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales

**Convección de fluidos viscoelásticos en
un gradiente de temperatura**

TESIS DOCTORAL

DOCTORADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

Ildebrando Pérez Reyes

Comité Tutorial

Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco

Dr. Gerardo Ruiz Chavarría Dr. Carlos I. Mendoza Ruiz



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Tabla de Contenido

Resumen	5
Agradecimientos	7
Declaración de originalidad	8
Introducción	9
Justificación	11
Objetivos	12
Antecedentes	14
Convección natural	14
Convección natural en fluidos viscoelásticos de Maxwell y de Oldroyd	15
Importancia de las propiedades de las paredes	17
1 Marco teórico	18
1.1 Las ecuaciones básicas de la hidrodinámica	18
1.1.1 La ecuación de conservación de masa	18
1.1.2 La ecuación de conservación de momento	18
1.1.3 La ecuación de conducción de calor	19
1.1.4 La ecuación constitutiva del fluido viscoelástico	19
1.1.5 Las ecuaciones de balance de momento para un fluido no newtoniano	22
1.1.6 La aproximación de Boussinesq	23
1.1.7 Las condiciones de frontera	23
2 Influencia de las conductividades y espesores de las paredes en la convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell	25
2.1 Planteamiento del problema	25

2.2	Formulación del problema	26
2.2.1	Estado inicial	27
2.2.2	Las ecuaciones perturbadas	28
2.2.3	Adimensionalización	29
2.2.4	Los parámetros adimensionales	30
2.3	Conceptos básicos de la estabilidad lineal	32
2.4	Análisis de estabilidad lineal	34
2.4.1	Las condiciones de frontera térmicas	35
2.4.2	Cálculos analíticos usando el método de Galerkin	36
2.5	Cálculos usando el método de disparo	38
2.6	Resultados	39
3	Inestabilidad no lineal de una capa de fluido viscoelástico. Aproximación a número de Biot y número de onda pequeños	45
3.1	Planteamiento del problema	45
3.2	Formulación del problema	46
3.2.1	Las ecuaciones perturbadas no lineales	47
3.2.2	Adimensionalización	48
3.3	Análisis no lineal	48
3.3.1	Aproximación a número de onda pequeño	50
3.3.2	Teoría débilmente no lineal	59
3.3.3	Selección de patrones	60
3.4	Resultados	67
4	Conclusiones	69
4.1	Convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell	69
4.2	Selección de patrones convectivos	70
4.3	Investigación en el futuro	71
	Apéndices	72
A	Otra aproximación del problema lineal con el método de Galerkin	73
B	Expresiones asintóticas del problema lineal para $Pr \rightarrow \infty$	75
B.1	Caso de $Pr \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 0$ y $D \rightarrow 0$	75
B.2	Caso de $Pr \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 0$ y $D \rightarrow \infty$	76
B.3	Caso de $Pr \rightarrow \infty$, $F \rightarrow \infty$ y $D \rightarrow 0$	77
B.4	Caso de $Pr \rightarrow \infty$, $F \rightarrow \infty$ y $D \rightarrow \infty$	79

C	Expresiones asintóticas del problema lineal para $F \rightarrow \infty$	81
C.1	Caso de $D \rightarrow 0$	81
C.2	Caso de $D \rightarrow \infty$	82
D	Expresiones analíticas del problema no lineal	85
E	Artículo publicado	87
	Bibliografía	99

Lista de Figuras

2.1	Esquema del problema de convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell	26
2.2	Esquema de un conjunto de rollos convectivos.	33
2.3	Esquema de una curva de estabilidad marginal.	34
2.4	Curvas para $F = 0.1$: a) R_c , b) k_c y c) ω_c contra X, y curvas para $F = 100$: d) R_c , e) k_c y f) ω_c contra X.	40
2.5	Curvas para $F = 0.1$: a) R_c , b) k_c y c) ω_c contra X, y curvas para $F = 100$: d) R_c , e) k_c y f) ω_c contra X.	41
2.6	Curvas de R_c contra X para $F = 0.1$	43
3.1	Esquema del problema de convección natural en una capa de fluido viscoelástico entre dos paredes pobremente conductoras	46
3.2	Diagrama de bifurcación de los patrones hexagonales.	68

Resumen

En la presente tesis doctoral se estudia la estabilidad hidrodinámica de una capa horizontal infinita de fluido. De esta manera se obtiene un problema de valor propio para el número de Rayleigh que se resuelve usando el método de Galerkin y un análisis numérico mediante el método de disparo. Aquí se investigan las siguientes dos situaciones ligadas a la naturaleza de la estabilidad hidrodinámica de la capa de fluido:

- Efecto de las propiedades térmicas y geométricas de las paredes en la estabilidad hidrodinámica lineal de una capa de fluido viscoelástico de Maxwell en un gradiente de temperatura,
- Estabilidad hidrodinámica no lineal de una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd a número de onda pequeño

Respecto al problema señalado en el primer punto, que se refiere al análisis de estabilidad lineal, se toman en cuenta el espesor y la conductividad térmica de las paredes. De esta manera es posible investigar el inicio de la inestabilidad en la capa de fluido en condiciones intermedias a las dos situaciones extremas ampliamente estudiadas: paredes conductoras; la cual corresponde a la condición de frontera térmica de temperatura fija, y paredes aislantes, la cual corresponde a la condición de frontera térmica de flujo de calor constante. En este trabajo se calcularon curvas de criticalidad, del número de Rayleigh contra el número de onda, para el inicio de la convección estacionaria y oscilatoria, las cuales muestran el papel que tienen las propiedades de las paredes en los valores que se encuentran entre los dos casos extremos arriba mencionados. Por otro lado, se calculan expresiones analíticas para determinados casos límite que se presentan en el apéndice.

También se investiga el problema de estabilidad hidrodinámica no lineal de una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd y se determinan las condiciones para la formación de los siguientes patrones convectivos: rollos, cuadrados y hexágonos. En esta parte del trabajo, se consideran los fluidos viscoelásticos convectivo superior, convectivo inferior y corrotacional del modelo de Oldroyd (y Maxwell, como caso

particular). Un aspecto importante de este problema es que se considera el efecto de la vorticidad en la aproximación a número de onda pequeño para la convección natural en una capa de fluido viscoelástico entre paredes pobremente conductoras. Se obtienen las ecuaciones de evolución para longitud de onda larga que determinan la selección de patrones. Además, se obtienen las correspondientes ecuaciones de Ginzburg-Landau de cada modelo.

Los resultados del análisis de estabilidad lineal incluyen las curvas de criticalidad del número de Rayleigh, del número de onda y de la frecuencia de oscilación contra el cociente de conductividades térmicas fluido/pared en las cuales se muestra el efecto del espesor de las paredes. Estas curvas de criticalidad muestran las condiciones en que se presenta el fenómeno de termoconvección para una gran variedad de circunstancias con materiales, trátase de las paredes o del fluido, de diferentes conductividades térmicas y espesores. Respecto a los resultados del análisis de estabilidad no lineal, además de lo mencionado anteriormente, se determinó que los rollos son el patrón más estable para una capa de fluido viscoelástico de acuerdo con la aproximación empleada.

Agradecimientos

Quiero dar un amplio y especial agradecimiento

- a mi tutor principal, el Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco por su gran paciencia y tan valiosas discusiones y asesorías,
- al Dr. Gerardo Ruiz Chavarría y al Dr. Carlos I. Mendoza Ruiz, quienes formaron parte de mi comité tutorial, por sus importantes comentarios y cuestionamientos,
- al Insituto de Investigaciones en Materiales por todas las facilidades que me brindaron durante mi estancia allí,
- al personal del Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales por el apoyo que siempre me dieron y su disposición en mis trámites,
- al CONACyT por las becas de maestría y de doctorado sin las cuales la realización de éste proyecto de investigación no hubiera sido posible.

Declaración de originalidad

En esta tesis doctoral se muestran resultados teóricos sobre la convección natural en fluidos viscoelásticos. A continuación están listadas las contribuciones originales realizadas en el proyecto de investigación doctoral Convección en fluidos viscoelásticos en un gradiente de temperatura.

- Capítulo 3.
 - La expresión para el número de Rayleigh R dada en la Ec. (2.42) que incluye las conductividades térmicas y espesores de las paredes que limitan al fluido.
 - Las curvas de criticalidad del número de Rayleigh, la frecuencia de oscilación y el número de onda de la perturbación para el inicio de la convección mostradas en las Figs. (2.4-2.5).
 - La discusión sobre el efecto de las conductividades térmicas y espesores diferentes de los ideales en la convección en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell.
- Capítulo 4.
 - Las ecuaciones de evolución para la convección natural en un fluido viscoelástico entre dos paredes pobremente conductoras dadas en las Ecs. (3.63-3.64).
 - La incorporación de los efectos viscoelásticos en las ecuaciones para la formación de los patrones convectivos dadas en las Ecs. (3.80,3.90-3.91,3.93-3.95) y su discusión.
- Apéndices B y C
 - Las expresiones límite del número de Rayleigh y de la frecuencia de oscilación para la termoconvección en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell.

Introducción

La *estabilidad hidrodinámica* es un área de estudio en la mecánica de fluidos con más de siglo y medio de antigüedad. La estabilidad hidrodinámica está presente en gran cantidad de fenómenos naturales y en diversas aplicaciones científicas y tecnológicas. Muchas técnicas analíticas y numéricas son empleadas en los cálculos de problemas de estabilidad [1] y aunque algunas de ellas, como las analíticas, consisten en aproximaciones para valores de un parámetro pequeño, han demostrado ser herramientas de gran utilidad que pueden complementarse con otro tipo de aproximaciones.

En esta tesis doctoral se presenta la investigación de dos problemas de estabilidad hidrodinámica con aplicaciones y relevancia tecnológica. El primero trata sobre el estudio del efecto de las propiedades térmicas y geométricas de las paredes en la convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell. Estas propiedades aparecen en las soluciones de las ecuaciones diferenciales a través de las condiciones de frontera. Cabe mencionar que en la solución del problema de valor propio para el número de Rayleigh se consideró que los números de onda de las perturbaciones eran finitos. El problema de valor propio fue resuelto por medio de tres técnicas: un método analítico y dos métodos numéricos. El método analítico empleado fue el de Galerkin [2, 3] con una aproximación de segundo orden con el que fue posible obtener expresiones analíticas para determinados casos límite que pueden ser consultados en el apéndice. El análisis numérico fue realizado con el método de disparo y los resultados fueron comprobados con un segundo método que expuesto en el libro de Chandrasekhar [1]. De esta manera, se calcularon las curvas de criticalidad del presente problema de estabilidad hidrodinámica lineal para valores del número de Prandtl $Pr = 1$ y 10 y del parámetro adimensional de tiempo de relajación $F = 0.1, 100$. El papel que juegan los espesores de las paredes se muestran en las curvas de criticalidad como paredes de pequeño espesor y gran espesor en relación con el espesor de la capa de fluido viscoelástico. Las propiedades conductoras de las paredes en relación con la del fluido fueron variadas desde valores muy pequeños (que corresponden a situaciones de muy buena conductividad térmica) hasta valores muy grandes (que corresponden a situaciones de

muy mala conductividad térmica) de tal manera que fue posible calcular los valores críticos del número de Rayleigh y del número de onda para condiciones intermedias entre las situaciones ideales de paredes conductoras y paredes aislantes.

El segundo problema abordado en este trabajo es el de la estabilidad hidrodinámica no lineal de una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd confinada entre dos paredes de conductividad térmica pobre. En este problema se investigan una serie de modelos viscoelásticos de Oldroyd. La finalidad del análisis no lineal propuesto es determinar las condiciones bajo las cuales aparecerían en la convección celdas en la forma de algunos patrones geométricos tales como: rollos, cuadrados y hexágonos. Todo esto en la aproximación de longitud de onda larga o bien, de número de onda pequeño. Otro aspecto que se debe resaltar de este estudio es que se considera el efecto de la vorticidad en la convección, lo cual no ha sido reportado hasta el momento en la literatura para el caso de convección en un fluido viscoelástico. Se calculan las ecuaciones de evolución de onda larga y posteriormente sus correspondientes ecuaciones de Ginzburg-Landau para los diferentes fluidos de Oldroyd considerados: fluido convectivo superior, fluido convectivo inferior y fluido corrotacional. Cabe mencionar que la característica de baja conductividad térmica de las paredes se incluyó en las condiciones de frontera térmicas a través del número de Biot.

La organización de la tesis es como sigue. En la Justificación se encuentra una revisión de las aplicaciones científicas y tecnológicas que motivaron la realización del presente proyecto de investigación sobre los problemas de estabilidad hidrodinámica arriba mencionados. En el apartado de Objetivos se establecen los fines a que se dirige este trabajo y su alcance. El capítulo primero corresponde al Marco Teórico donde se exponen, primero, las ecuaciones y conceptos de la hidrodinámica; segundo, la teoría básica de la convección natural de fluidos viscoelásticos y las ideas acerca de la formación de patrones en convección; y tercero, la teoría y conceptos de la estabilidad hidrodinámica no lineal y su relación con la selección de patrones celulares. En el capítulo segundo se muestra la formulación del problema y el análisis de estabilidad lineal de una capa de fluido viscoelástico de Maxwell en el que se incluyen las propiedades térmicas y geométricas de las paredes. En el capítulo tercero, utilizando las ecuaciones no lineales del problema, se estudia la selección de patrones de las celdas en la convección natural en una capa de fluido viscoelástico, confinada entre dos paredes horizontales infinitas pobremente conductoras. Posteriormente, se dan las conclusiones pertinentes a cada una de las situaciones de estabilidad hidrodinámica planteadas y estudiadas. Al final, se encuentran los apéndices y la bibliografía citada a lo largo del texto.

Justificación

La investigación realizada fue motivada en primer lugar por las aplicaciones tecnológicas y fundamentales que existen cuando un líquido viscoelástico está sometido a gradientes de temperatura en un campo gravitacional. En segundo lugar, los resultados obtenidos cubren aspectos de los problemas planteados que no habían sido explorados antes y que permiten una mejor comprensión física del fenómeno.

Respecto al primer problema abordado en este trabajo, la motivación académica del estudio de la convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell fue la de comprender el fenómeno y las técnicas analíticas y numéricas de estudio convenientes para poder hacer una contribución en el campo de la estabilidad hidrodinámica que fuera relevante en alguna aplicación. Desde el punto de vista de los modelos actuales para estos sistemas físicos, se vió la necesidad de incluir condiciones más realistas al modelo. De esta manera, se propuso tomar en cuenta los efectos de las propiedades térmicas y geométricas de las paredes que confinan a la capa de fluido viscoelástico de Maxwell. Estos efectos se reflejan en las condiciones de frontera térmicas a través de la relación entre las conductividades térmicas y los espesores de las paredes y aquellas de la capa de fluido. Una consecuencia directa de este análisis teórico es un mejor acercamiento a las condiciones físicas reales del fenómeno tanto en experimentos como en sus posibles aplicaciones. Los usos posibles de los resultados de esta investigación en diversas aplicaciones han motivado también este trabajo doctoral y entre ellos se pueden contar

- Aplicaciones en dispositivos donde la convección natural es usada para llevar a cabo reacciones térmicamente activadas tales como la reacción de la polimerasa (RCP) [4–9]. En este tipo de reacciones se involucran suspensiones que se comportan como fluidos viscoelásticos y la enzima polimerasa, la cual lleva a cabo una reacción en la que se hacen copias de otras moléculas.
- Aplicaciones en el desarrollo de un mecanismo para atrapar moléculas de ADN en soluciones que se comportan como fluidos viscoelásticos, a través de la interacción de la termoforesis y la termoconvección [10, 11]. En estas aplicaciones se encuentra que en ciertas condiciones las moléculas de ADN pueden ser concentradas en un punto de menor temperatura.
- Aplicaciones en el estudio de los efectos de la termoconvección en la replicación de ADN, donde también se considera la termoforesis [12, 13]. Aquí, las suspensiones de ADN que se comportan como fluidos viscoelásticos se someten a gradientes de temperatura que al alcanzar un cierto valor contribuyen a las reacciones de replicación de ADN.

Respecto al análisis débilmente no lineal de estabilidad hidrodinámica, cabe mencionar que fue motivado por el hecho de que los efectos no lineales están presentes en muchos fenómenos físicos tanto en experimentos de laboratorio como en las aplicaciones donde aparece la convección natural. El análisis débilmente no lineal se realiza como la aproximación analítica a un orden mayor, respecto a la teoría lineal, de la solución de las ecuaciones del problema en términos de un parámetro pequeño. A través del problema no lineal se busca determinar las condiciones de estabilidad bajo las cuales pueden surgir como predominantes determinados patrones de celdas convectivas tales como rollos, cuadrados o hexágonos. De esta manera, los resultados lineales y no lineales, que serán presentados aquí, contribuirán a la teoría de la hidrodinámica [14–16] presente en diversas aplicaciones.

Objetivos

Objetivo general

El objetivo general es comprender el efecto que tienen las propiedades térmicas y geométricas de las paredes en la estabilidad hidrodinámica, lineal y no lineal, de una capa de fluido viscoelástico en un gradiente de temperatura. Nótese que la convección en una capa de fluido se ve influida por diversos factores que pueden contribuir a estabilizar o desestabilizar el sistema a través de pequeñas perturbaciones. De allí la importancia de esta investigación.

Los objetivos específicos para el problema de estabilidad hidrodinámica lineal de una capa de fluido viscoelástico son:

- obtener las ecuaciones modelo de este problema incluyendo los cocientes de la conductividad térmica del fluido con respecto a las conductividades de las paredes y los cocientes de los espesores de las paredes con respecto al de la capa de fluido,
- estudiar la inestabilidad del sistema usando el método de Galerkin [1] para valores finitos del número de onda,
- realizar un análisis numérico de la inestabilidad del sistema usando el método de disparo [17] y comparar los resultados con los obtenidos por el método de Galerkin.

Los objetivos específicos para el problema de estabilidad hidrodinámica no lineal de una capa de fluido viscoelástico son:

- obtener la ecuación de evolución, en la aproximación para longitud de onda larga, de la convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd usando la derivada convectiva superior,
- obtener la ecuación de evolución, en la aproximación para longitud de onda larga, de la convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd usando la derivada convectiva inferior,
- obtener la ecuación de evolución, en la aproximación para longitud de onda larga, de la convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd usando la derivada convectiva corrotacional,
- determinar, respecto a los parámetros del problema, la estabilidad de los tipos de patrones de celdas convectivas: rollos, cuadrados y hexágonos.

Antecedentes

Convección natural

La convección es un mecanismo especial de transferencia de calor en el cual las características del flujo (distribución de velocidad, gradiente de presión, etc.) afectan la rapidez de transferencia de calor entre una pared y una corriente de fluido adyacente. El modo convectivo de transferencia de calor está dividido en dos procesos básicos.

Si el movimiento del fluido en contacto con una superficie caliente se origina debido a un agente externo, tal como un gradiente de presión, el proceso se llama convección forzada. Si el flujo surge naturalmente debido al efecto de una diferencia de densidades resultante de una diferencia de temperaturas en un campo gravitacional, el proceso se denomina convección natural, que es el fenómeno estudiado en este trabajo.

Con el objeto de hacer más claro el concepto de convección natural, considérese un pequeño elemento de fluido que se mueve en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de un circuito mientras se encuentra en la vecindad de una pared vertical calentada uniformemente y que posee una temperatura mayor a la del elemento de fluido. Entonces este elemento se calienta por difusión térmica desde la pared. Al mismo tiempo, el elemento de fluido se expande y se eleva a altitudes donde la presión hidrostática impuesta es cada vez menor.

La conservación de la masa requiere que el flujo hacia arriba del elemento de fluido sea compensado por un flujo hacia abajo. Por esta razón, el fluido ejecuta un ciclo que consta de una secuencia de calentamiento-enfriamiento que hace posible el funcionamiento básico de la convección natural.

En el estudio de la estabilidad hidrodinámica de una capa de fluido calentada por abajo, se destacan los movimientos convectivos que surgen debido a una pequeña perturbación en la temperatura generándose las celdas de convección. En la convección natural en una capa de fluido newtoniano, dos casos son muy conocidos: el de paredes conductoras, que corresponde a la condición de frontera térmica de temperatura constante, y el de paredes aislantes, que corresponde a la condición

de frontera térmica de flujo de calor constante. El caso de convección en una capa de fluido confinada entre dos paredes conductoras se expone, por ejemplo, en la monografía de Chandrasekhar [1] y en el artículo de Pellew y Southwell [18]. El caso de convección en una capa de fluido confinada entre dos paredes aislantes también ha sido ampliamente estudiado por diversos autores [19–23] desde hace varios años.

Convección natural en fluidos viscoelásticos de Maxwell y de Oldroyd

El fenómeno de convección en fluidos viscoelásticos ha sido estudiado desde hace varias décadas. Esta sección está dedicada únicamente a la convección natural de fluidos viscoelásticos de Maxwell y de Oldroyd, lineales y no lineales. Se ha demostrado que la convección en fluidos viscoelásticos se debe a movimientos oscilatorios. Por otro lado, la convección en fluidos viscoelásticos también puede ser estacionaria en circunstancias particulares. Desde el punto de vista de la teoría lineal, en la convección estacionaria el fluido viscoelástico se comporta como el newtoniano.

La convección natural en fluidos viscoelásticos de Maxwell fue primero investigada por Vest y Arpaci [24], donde consideraron el caso de fronteras sólidas y libres pero con condiciones de frontera térmicas de temperatura fija. Después, Takashima [25] investigó la estabilidad lineal termoconvectiva en una capa de fluido de Oldroyd donde también consideró paredes sólidas y libres con condiciones de temperatura fija en las paredes. Sokolov y Tanner [26] reportaron mejoras en el análisis numérico de la estabilidad lineal termo-convectiva de una capa de fluido viscoelástico de Maxwell con respecto a los resultados de Vest y Arpaci [24].

Por otro lado, la condición de frontera de flujo de calor constante en las paredes fue investigada, después por Kolkka y Ierley [27] para la convección natural en una capa de fluido viscoelástico tanto de Maxwell como de Oldroyd, con fronteras sólidas o libres. El trabajo de Kolkka y Ierley [27] es extenso ya que trata también el caso de condiciones de frontera a temperatura fija y muestra expresiones analíticas de determinadas situaciones.

Más recientemente, en 1990, Martínez-Mardones y Pérez- García [28] reportaron resultados sobre la convección estacionaria, oscilatoria y un punto de codimensión dos para el caso de temperatura fija en las paredes. El artículo de Martínez-Mardones y Pérez- García [28] está dedicado al problema de estabilidad lineal y emplea fluidos viscoelásticos de Oldroyd. Diversos avances en el estudio de la convección en fluidos viscoelásticos han sido hechos por muchos investigadores combinando condiciones y situaciones. Algunos de estos avances se deben a Rosenblat

[29] quien investigó la convección en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell en condiciones de microgravedad. Park y Lee [30, 31] realizaron un análisis no lineal de una capa de fluido viscoelástico de Maxwell y de una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd calentadas por abajo en donde emplearon la condición de temperatura fija en las fronteras. Martínez-Mardones et al. [32] investigaron la selección de patrones en una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd calentada por abajo con la condición de temperatura fija en las fronteras. Dávalos–Orozco y Vázquez Luis [33] reportaron la influencia de una superficie libre deformable en la convección oscilatoria lineal de una capa de fluido viscoelástico de Maxwell confinada entre una pared (inferior) a temperatura fija y una pared (superior) a flujo de calor constante. Martínez-Mardones et al. [34–37] reportaron resultados sobre la estabilidad hidrodinámica lineal y no lineal de fluidos binarios con propiedades viscoelásticas. Li y Khayat [38, 39] extendieron el análisis no lineal de la convección natural en fluidos viscoelásticos. El caso de convección termocapilar de un fluido viscoelástico fue investigado por Getachew y Rosenblat [40]. Otros avances en el problema acoplado de termoconvección por flotación y convección termocapilar en fluidos viscoelásticos fueron realizados por Dauby et al. [41], Lebon et al. [42] y Parmentier et al. [43]. Sajid et al. [44] investigaron los efectos de paredes verticales en la convección forzada en un fluido viscoelástico, mientras que Zhang et al. [45] presentan resultados lineales y no lineales de convección natural en una capa de fluido de Oldroyd calentada por abajo en un medio poroso.

La convección natural en fluidos viscoelásticos puede ocurrir en diversos experimentos y aplicaciones tecnológicas tales como el procesamiento de materiales, alimentos y en la industria química. Un área particular de creciente interés involucrada con la hidrodinámica de fluidos viscoelásticos es la de las propiedades del flujo de biomoléculas. En la manipulación de biomoléculas como el ADN, para el análisis genómico y otras aplicaciones, pueden surgir problemas relacionados con la hidrodinámica y puede usarse la teoría de los fluidos viscoelásticos. Algunos esfuerzos hechos al respecto desde hace algunos años son los de Bowen y Zimm [46] quienes determinaron algunas propiedades viscoelásticas del ADN.

La convección natural puede aparecer en suspensiones acuosas de ADN que se comportan como fluidos viscoelásticos, como fue reportado por Kolodner [47] por ejemplo. La convección natural en tales fluidos viscoelásticos tiene cierta complejidad debido al número de mecanismos físicos que contribuyen o compiten para dar inicio a la formación de celdas convectivas en la suspensión. Algunas aportaciones a las aplicaciones tecnológicas donde surge la convección han sido realizadas por Krishnan et al. [4] quien desarrolló un dispositivo en el cual la convección de Rayleigh es importante para llevar a cabo reacciones químicas térmicamente activadas tales como la reacción en cadena de la polimerasa conocida como PCR por sus siglas en inglés (*polymerase chain reaction*). En este caso

Krishnan et al. [4] propusieron reemplazar los equipos de reciclaje térmico convencionales por celdas de convección de Rayleigh que convierten al dispositivo en uno muy simple y de fácil ensamblaje en cualquier laboratorio. Braun y Libchaber [10] propusieron un mecanismo eficiente para atrapar ADN en una solución a través de la interacción de termoforesis y termo-convección. Braun et al. [12] y Braun [48] condujeron un estudio de la reacción en cadena de la polimerasa en la convección de Rayleigh para la replicación de ADN. En un artículo más reciente Mast y Braun [13] estudiaron la interacción de la termo-forésis y la termoconvección junto con la reacción en cadena de la polimerasa en la replicación de ADN. Avances en la teoría hidrodinámica de estas suspensiones, que exhiben comportamiento viscoelástico, han sido realizados por Sri Krishna [14], Laroze et al. [15] y Laroze et al. [16].

Importancia de las propiedades de las paredes

En los trabajos antes mencionados las condiciones de frontera térmica están restringidas a que las paredes sean muy buenas conductoras o aislantes ideales. Estos son casos extremos que representan pobremente en su totalidad la naturaleza térmica de las paredes.

La importancia de las características térmicas y geométricas de las paredes se consideró primero en la convección natural de una capa de fluido newtoniano por Metcalfe y Behringer [49], Cerisier et al [50] y Howle [51] quienes incluyeron los espesores y las conductividades de las paredes limitantes en el análisis de estabilidad lineal. Esta nueva aproximación al problema de la convección natural en un fluido newtoniano permitió realizar mejores comparaciones con el experimento. Así, resulta comprensible que las características de las paredes tengan un papel importante en los valores críticos del número Rayleigh y del número de onda de la estabilidad del sistema.

Las propiedades térmicas y geométricas de las paredes son importantes debido a que en todas las condiciones de laboratorio y aplicaciones tecnológicas, el material de las paredes tiene conductividades térmicas o espesores tales que no corresponden a las condiciones de temperatura fija o de flujo de calor constante. Aquí se hace notar que el sistema de ecuaciones en combinación con las condiciones de frontera que se presentarán más adelante, darán resultados más apegados a la realidad.

Capítulo 1

Marco teórico

Este capítulo está dedicado a presentar los conceptos e ideas principales de los problemas sobre convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell que se consideraron en la investigación doctoral. Aquí se presenta también un resumen de las contribuciones realizadas por otros investigadores tanto teóricos como experimentales al estudio de las situaciones abordadas. Por último, se plantean las ecuaciones de la hidrodinámica de las que se hacen los análisis posteriores.

1.1 Las ecuaciones básicas de la hidrodinámica

El estudio de los problemas de inestabilidad térmica atacados en el presente trabajo requiere de las ecuaciones de la hidrodinámica para el sistema físico en cuestión. En esta sección se presentan las ecuaciones donde las variables en su forma dimensional estarán indicadas con un asterisco. Estas son:

1.1.1 La ecuación de conservación de masa

A lo largo de todo este trabajo se considera que los fluidos viscoelásticos son incompresibles. De esta manera, usaremos la ecuación de continuidad

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (1.1)$$

la cual está en forma dimensional. Esta ecuación garantiza la conservación de la masa del fluido.

1.1.2 La ecuación de conservación de momento

Esta es, en forma dimensional, para un fluido incompresible,

$$\rho^* \left[\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right] = -\nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* + \rho^* \mathbf{f}^*, \quad (1.2)$$

en donde p^* es la presión, $\boldsymbol{\tau}^*$ es el tensor de esfuerzos de corte y \mathbf{f}^* representa una fuerza externa que actúa sobre el fluido. El tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\tau}^*$ depende del movimiento del fluido y está dado por una ecuación constitutiva que lo relaciona con el tensor de rapidez de deformación representado por \mathbf{e}^* . El lado izquierdo de la Ec. (1.2) expresa el cambio total de momento por unidad de volumen de fluido. El primer término del lado izquierdo, se conoce como aceleración temporal; mientras que el segundo representa la aceleración convectiva no lineal. En el lado derecho se encuentran las fuerzas causantes de la aceleración. La primera de éstas se debe a gradientes de esfuerzos representados por los primeros dos términos; mientras que la segunda es una fuerza externa. La ecuación de balance de momento que corresponde a nuestro problema se obtiene precisamente de la Ec. (1.2) junto con una relación constitutiva para el fluido no newtoniano. Esto se hace mas adelante.

1.1.3 La ecuación de conducción de calor

Esta se puede obtener directamente de la ecuación de balance de energía (ver la monografía de Chandrasekhar [1]). Para el caso de un fluido incompresible y en forma dimensional, la ecuación de conducción de calor es,

$$\rho^* C_V^* \left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) T^* \right] = X_F \nabla^2 T^*, \quad (1.3)$$

en donde se ha considerado que no hay disipación viscosa de calor. En la Ec. (1.3) C_V^* es el calor específico a volumen constante, T^* es la temperatura del fluido y X_F es su conductividad térmica.

1.1.4 La ecuación constitutiva del fluido viscoelástico

Como ya se mencionó anteriormente, la ecuación constitutiva del fluido viscoelástico permite relacionar el tensor de esfuerzos con el tensor de rapidez de deformación. Las características de los problemas estudiados en este trabajo, lineal y no lineal, se ven reflejadas en la complejidad de las ecuaciones constitutivas. A continuación se presenta la ecuación constitutiva para el fluido viscoelástico de Maxwell que se emplea en el problema de estabilidad hidrodinámica lineal. Además, se presenta la del fluido de Oldroyd con tres distintas derivadas, para el problema de estabilidad hidrodinámica no lineal.

Ecuación constitutiva del fluido viscoelástico de Maxwell

Esta ecuación constitutiva combina las ideas de viscosidad y elasticidad para expresar una ecuación simple de un fluido viscoelástico. El modelo viscoelástico de Maxwell [52] aunque es simple y fue propuesto de manera empírica constituye una buena primera aproximación a la descripción matemática de algunos materiales con propiedades viscoelásticas. El modelo de Maxwell puede ser expresado en forma tensorial como,

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t^*}\right) \boldsymbol{\tau}^* = 2\eta_0 \mathbf{e}^*, \quad (1.4)$$

donde λ_1 es una constante denominada tiempo de relajación, η_0 es el coeficiente de viscosidad dinámica y \mathbf{e}^* es el tensor rapidez de deformación,

$$\mathbf{e}^* = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^* + (\nabla \mathbf{u}^*)^T], \quad (1.5)$$

Ecuación constitutiva del fluido viscoelástico de Oldroyd

Debido a las limitaciones de modelos viscoelásticos lineales como el de Maxwell y a que muchos materiales requieren de descripciones matemáticas más complicadas, se propusieron ecuaciones constitutivas no lineales. Estas ecuaciones constitutivas no lineales han mostrado ser bastante útiles en la dinámica de fluidos poliméricos y son generalizaciones de las ecuaciones constitutivas lineales en las que aparecen derivadas más complejas que la de Lagrange pero con la propiedad de que también son invariantes ante rotaciones del sistema de coordenadas. De esta manera, se parte del modelo lineal de Jeffreys [53],

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t^*}\right) \boldsymbol{\tau}^* = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t^*}\right) \mathbf{e}^*, \quad (1.6)$$

donde λ_2 es el tiempo de retardo. Al intercambiar en la Ec. (1.6) las derivadas temporales por derivadas convectivas obtenemos el modelo convectivo de Jeffreys [53]. En este sentido la ecuación constitutiva está basada en la idea de un sistema coordinado convectivo el cual es un sistema coordinado que está embebido en un fluido en movimiento y que se deforma con éste (ver el libro de Bird et al [53] y el artículo de Oldroyd [54] para más detalles). Estas derivadas convectivas en el tiempo pueden ser de tres tipos:

- Derivada convectiva inferior. La derivada convectiva inferior de un tensor de segundo orden \mathbf{B}^* puede expresarse como

$$\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t^*}\right)_I \mathbf{B}^* = \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla\right) \mathbf{B}^* + \boldsymbol{\omega}^* \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{B}^* \cdot \boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{B}^*, \quad (1.7)$$

en donde el subíndice I es la inicial de inferior y $\boldsymbol{\omega}^*$ es la forma dimensional del tensor de rapidez de rotación definido como

$$\boldsymbol{\omega}^* = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^* - (\nabla \mathbf{u}^*)^T]. \quad (1.8)$$

- Derivada convectiva superior. La derivada convectiva superior de un tensor de segundo orden \mathbf{B}^* puede expresarse como

$$\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t^*}\right)_S \mathbf{B}^* = \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla\right) \mathbf{B}^* + \boldsymbol{\omega}^* \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{B}^* \cdot \boldsymbol{\omega}^* + \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{e}^* + \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{B}^*, \quad (1.9)$$

en donde el subíndice S es la inicial de superior. En ambas derivadas convectivas los sistemas coordenados se deforman y rotan con el material cuando éste fluye.

- Derivada convectiva corrotacional o de Jaumann. Puede verse que es una combinación lineal de las dos derivadas convectivas anteriores. De esto resulta que el sistema puede rotar pero no deformarse con el material cuando éste fluye. La derivada convectiva corrotacional de un tensor de segundo orden \mathbf{B}^* puede expresarse como

$$\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t^*}\right)_C \mathbf{B}^* = \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla\right) \mathbf{B}^* + \boldsymbol{\omega}^* \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{B}^* \cdot \boldsymbol{\omega}^*, \quad (1.10)$$

en donde el subíndice C es la inicial de corrotacional.

Los operadores mencionados anteriormente pueden condensarse en una sola expresión general,

$$\frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}t^*} \mathbf{B}^* = \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla\right) \mathbf{B}^* + \boldsymbol{\omega}^* \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{B}^* \cdot \boldsymbol{\omega}^* + a (\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{e}^* + \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{B}^*), \quad (1.11)$$

en donde la derivada convectiva inferior se recupera con $a = -1$, la derivada convectiva superior se recupera con $a = 1$ y la derivada corrotacional se recupera con $a = 0$. Entonces, usando los operadores dados en las Ecs. (1.7,1.9, 1.10) se

obtienen las ecuaciones constitutivas no lineales para tres diferentes fluidos viscoelásticos que pueden compararse con soluciones poliméricas. Es necesario mencionar, que en la práctica, el uso o elección de cualquiera de los fluidos que se consideran aquí está determinado por la similitud de los resultados teóricos, que proporcione alguno de los modelos, con los datos experimentales. El modelo del fluido de Oldroyd-B de el más empleado debido a la concordancia entre teoría y experimento. Así, con la Ec. (1.11) obtenemos el siguiente modelo de un fluido viscoelástico

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t^*}\right) \boldsymbol{\tau}^* = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_2 \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t^*}\right) \mathbf{e}^*, \quad (1.12)$$

que para $a = -1$ se reduce al de un fluido de Oldroyd-A, para $a = 1$ se reduce al de un fluido de Oldroyd-B y para $a = 0$ se reduce al fluido corrotacional de Oldroyd. Es de hacer notar, que cuando $\lambda_2 = 0$ los modelos anteriores se reducen al modelo convectivo inferior de Maxwell, al modelo convectivo superior de Maxwell y al modelo convectivo corrotacional de Maxwell, respectivamente. Otra observación importante es que al linealizar las ecuaciones constitutivas no lineales (Ecs. (1.12)) se obtiene el modelo viscoelástico lineal de Jeffreys dado por la Ec. (1.6). Las ecuaciones descritas para los modelos viscoelásticos mencionados estarán acopladas con las ecuaciones de conservación de masa, momento y de conducción de calor del problema.

1.1.5 Las ecuaciones de balance de momento para un fluido no newtoniano

Las ecuaciones de balance de momento Ec (1.2) en combinación con la ecuación constitutiva correspondiente del fluido, producen las ecuaciones de balance de momento correspondientes que describen el flujo del fluido. En este apartado se obtienen las ecuaciones de balance de momento acopladas con las ecuaciones constitutivas no lineales, Ecs.(1.12), ya que para el caso del problema de estabilidad hidrodinámica lineal basta con linealizar las ecuaciones para obtener el modelo correspondiente del sistema. Tomando en cuenta que el fluido considerado en todas las situaciones estudiadas aquí es incompresible y que la fuerza externa presente es la de gravedad, se obtiene de la Ec. (1.2),

$$\rho^* \left[\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right] = -\nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* - \rho^* g \mathbf{k}. \quad (1.13)$$

En el caso no lineal las Ecs. (1.13) están acopladas analíticamente con la Ec. (1.12) para $\boldsymbol{\tau}^*$ que a su vez está relacionada con los gradientes de velocidad. En el caso lineal en que la Ec. (1.12) se reduce a la Ec. (1.6), ésta y la forma linealizada

de la ecuación Ec. (1.13), pueden combinarse simplificando el tratamiento del problema como se demostrará más adelante.

1.1.6 La aproximación de Boussinesq

La aproximación de Boussinesq es ampliamente usada en la simplificación de las ecuaciones de movimiento en problemas de estabilidad térmica en hidrodinámica. Esta fue introducida primero por Oberbeck (1879) y después por Boussinesq (1903), y por ello en ocasiones se le llama aproximación de Oberbeck- Boussinesq.

La aproximación supone que la temperatura en el flujo varía muy poco y como consecuencia también la densidad. Entonces desprecia las variaciones de la densidad en los términos inerciales de la ecuación de balance de momento. Sin embargo, considera importantes las variaciones de la densidad en el tercer término del lado derecho de la Ec. (1.13), denominado término de flotación. Esto debido a que la aceleración resultante del campo de fuerza externa en la ecuación puede ser muy grande e incluso más grande que la aceleración debida al término inercial no lineal.

1.1.7 Las condiciones de frontera

En este apartado se expone un punto que define de manera importante el resultado de cualquier problema de valor propio. En el presente caso, las ecuaciones de continuidad, de conducción de calor y de balance de momento constituyen un sistema de ecuaciones acoplado sujeto a condiciones de frontera impuestas por el problema mismo. Las condiciones de frontera de los problemas abordados en este trabajo están dadas de acuerdo con la naturaleza de las fronteras mismas que confinan al fluido, las paredes inferior y superior. Así, se tiene dos tipos de condiciones de frontera: mecánicas y térmicas.

Las paredes que confinan al fluido viscoelástico son perpendiculares a z (ver Fig. (2.1)) e infinitas y desde el punto de vista mecánico pueden ser sólidas (rígidas) o libres (sin deformación superficial y sin fricción). Aquí se considera que las paredes inferior y superior son sólidas, como se muestra en la Fig. (2.1). Esto implica impenetrabilidad del fluido a través de las paredes, lo que significa que la componente normal de la velocidad $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$ en las paredes es cero. Además, se tiene la condición de adherencia del fluido a las paredes, por lo que las componentes tangentes (horizontales) a las paredes (u^*, v^*) son cero. Así,

$$\begin{aligned} u^* &= 0 & \text{en } z^* &= 0, d, \\ v^* &= 0 & \text{en } z^* &= 0, d, \\ w^* &= 0 & \text{en } z^* &= 0, d. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Debe tomarse en cuenta que las condiciones en las Ecs. (1.14) son válidas para cualquier x^* y y^* , es decir que las velocidades (u^*, v^*, w^*) pueden escribirse como el producto de una función de z^* por el de otra función que depende de (x^*, y^*) . Así, se puede determinar a partir de la ecuación de continuidad dada en la Ec. (1.1) que,

$$\frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{en} \quad z^* = 0, d, \quad (1.15)$$

para paredes sólidas. Las condiciones de frontera para la normal de la vorticidad a las paredes, $(\nabla \times \mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{k}$, se deducen también con ayuda de las Ecs. (1.14) para obtener

$$\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{en} \quad z^* = 0, d. \quad (1.16)$$

Respecto a las condiciones de frontera para la temperatura el proceso de deducción es más elaborado ya que incluyen el espesor y la conductividad térmica de cada una de las paredes, como se expone mas adelante en el capítulo 2.

Capítulo 2

Influencia de las conductividades y espesores de las paredes en la convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell

En este capítulo se presenta el estudio de la estabilidad lineal de una capa de fluido viscoelástico de Maxwell. Este capítulo está organizado como sigue: en la primera sección se da el planteamiento del problema, en la segunda sección se da la formulación matemática incluyendo las ecuaciones de la hidrodinámica para el problema, el estado básico del sistema y las condiciones de frontera térmicas incluyendo las conductividades y los espesores de las paredes. Además, se presentan los parámetros adimensionales que aparecen en las ecuaciones. En la tercera sección se da la solución del problema de valor propio usando técnicas analíticas. En la cuarta sección se presentan el análisis numérico y una discusión de los resultados.

2.1 Planteamiento del problema

Aquí se investiga la estabilidad lineal termo-convectiva de una capa de fluido viscoelástico de Maxwell calentada por abajo. se usará la ecuación constitutiva del fluido de Maxwell. Ésta tiene un tiempo de relajación que, cuando es grande, permite mostrar importantes propiedades elásticas. El sistema consiste en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell que es infinita en las direcciones horizontales y está confinada entre dos paredes paralelas perpendiculares a la dirección de la

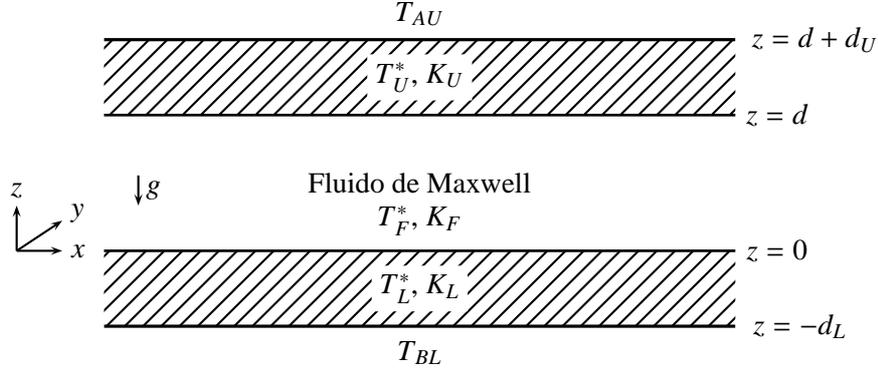


Figura 2.1: Esquema del problema de convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell

aceleración de la gravedad. El esquema de sistema en cuestión se muestra en la Fig. (2.1).

Nótese que en la Fig. (2.1) se especifican los espesores de las paredes inferior d_L y superior d_U , así como sus conductividades térmicas K_L y K_U , respectivamente. El espesor y la conductividad térmica del fluido viscoelástico de Maxwell están representados por d y K_F . Como ya se mencionó, la pared inferior está calentada por abajo a una temperatura constante T_{BL} . La temperatura constante arriba de la pared superior, que es menor que T_{BL} , se representa por T_{AU} .

2.2 Formulación del problema

Basados en el planteamiento del problema, las ecuaciones básicas que describen el fenómeno termo-convectivo son la ecuación de continuidad Ec. (1.1), la ecuación de conducción de calor Ec. (1.3) y la ecuación de balance de momento Ecs. (1.13) acopladas con la ecuación constitutiva del fluido de Maxwell, Ec. (1.4), esto es,

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho^* C_V^* \left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) T^* \right] = X_F \nabla^2 T^*, \quad (2.2)$$

$$\rho^* \left[\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right] = -\nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* - \rho^* g \mathbf{k}, \quad (2.3)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t^*} \right) \boldsymbol{\tau}^* = 2\eta_0 \mathbf{e}^*, \quad (2.4)$$

donde el sistema de Ecs. (2.1-2.4) está sujeto a la condición mecánica de adherencia para la velocidad del fluido y a condiciones de frontera térmicas especificadas más adelante en este capítulo.

2.2.1 Estado inicial

Antes de ser perturbado, el estado inicial del sistema es hidrostático y el transporte de calor es sólo por conducción y sólo depende de la componente vertical. Además, el sistema es independiente del tiempo. En el estado inicial la velocidad del fluido es $\mathbf{u}^* = 0$. Los perfiles de temperatura para las paredes y el fluido deben ser calculados apartir de la Ec. (2.2), que se simplifica como

$$\frac{d^2 T_i^*}{dz^{*2}} = 0, \quad T_i^* = a_i^* z^* + b_i^*, \quad (2.5)$$

donde el subíndice i indica (F, L, U). Las soluciones T_i^* en la Ec. (2.5) deben satisfacer las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned} T_L^* &= T_{BL} \quad \text{en} \quad z^* = -d_L, \\ T_U^* &= T_{AU} \quad \text{en} \quad z^* = d + d_L, \\ T_L^* &= T_F^*, \quad X_L \frac{dT_F^*}{dz^*} = \frac{dT_L^*}{dz^*} \quad \text{en} \quad z^* = 0, \\ T_U^* &= T_F^*, \quad X_U \frac{dT_F^*}{dz^*} = \frac{dT_U^*}{dz^*} \quad \text{en} \quad z^* = d, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde X_L y X_U están definidos en la Ec. (2.24). Entonces, las T_i^* que satisfacen las condiciones Ec. (2.6) son,

$$T_F^* = -\frac{(T_{BL} - T_{AU})z^*}{d(1 + D_U X_U + D_L X_L)} + T_{BL} - \frac{(T_{BL} - T_{AU})D_L X_L}{(1 + D_U X_U + D_L X_L)}, \quad (2.7)$$

$$T_L^* = -\frac{(T_{BL} - T_{AU})X_L z^*}{d(1 + D_U X_U + D_L X_L)} + T_{BL} - \frac{(T_{BL} - T_{AU})D_L X_L}{(1 + D_U X_U + D_L X_L)}, \quad (2.8)$$

$$T_U^* = -\frac{(T_{BL} - T_{AU})X_U z^*}{d(1 + D_U X_U + D_L X_L)} + T_{BL} - \frac{(T_{BL} - T_{AU})(1 + D_L X_L - X_U)}{(1 + D_U X_U + D_L X_L)}, \quad (2.9)$$

donde D_L y D_U están definidos en la Ec. (2.24). Las Ecs. (2.7-2.9) representan los perfiles en el estado inicial de las temperaturas en el fluido y las paredes inferior y superior, respectivamente.

2.2.2 Las ecuaciones perturbadas

El siguiente paso es perturbar el sistema de ecuaciones del problema. Antes de ello, se simplifica un poco el sistema de Ecs (2.1-2.4) al operar con $(1 + \lambda_1 \partial/\partial t^*)$ la Ec. (2.3). Usando la ecuación de continuidad Ec. (2.1) para simplificar se obtiene,

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (2.10)$$

$$\rho^* C_V^* \left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) T^* \right] = X_F \nabla^{*2} T^*, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \rho^* \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t^*} \right) \left[\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right] = & - \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t^*} \right) \nabla^* p^* + \eta_0 \nabla^{*2} \mathbf{u}^*, \\ & - \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t^*} \right) \rho_0^* [1 - \alpha(T^* - T_{BL})] g \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

en donde se usa también la siguiente ecuación de estado para la densidad del fluido

$$\rho^* = \rho_0^* [1 - \alpha(T^* - T_{BL})], \quad (2.13)$$

siendo ρ_0^* una densidad de referencia, tal como la densidad del fluido en la pared inferior. Al intercambiar T^* en la Ec. (2.13) por T_F^* en la Ec. (2.7) se obtiene la distribución de temperaturas en el fluido en el estado inicial. Ahora, se introducen pequeñas perturbaciones en el sistema en el estado inicial y después se estudia la estabilidad del sistema ante tales perturbaciones. Entonces, el sistema se perturba como sigue,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_1^* (x^*, y^*, z^*, t^*), \\ T^* &= T_F^* + T_1^* (x^*, y^*, z^*, t^*), \\ p^* &= p_H^* + p_1^* (x^*, y^*, z^*, t^*), \end{aligned} \quad (2.14)$$

en donde el subíndice 1 indica la perturbación de la variable y el subíndice H en la presión indica que se trata de la presión hidrostática. Se sustituyen las perturbaciones, Ecs. (2.14), en el sistema de Ecs. (2.10-2.12) y se obtiene un sistema de ecuaciones lineales perturbado al despreciar términos que contengan productos de las perturbaciones. Ahora, se introduce otra simplificación en el problema al separar el campo de presiones del de la velocidad al operar dos veces con el rotacional la ecuación perturbada de balance de momento. Del resultado de esta operación se obtiene que la componente vertical de la ecuación es independiente de las otras

dos ecuaciones para las componentes horizontales. De esta manera el sistema de ecuaciones para el problema se reduce a,

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial t^*} - w_1^* \frac{dT_F^*}{dz^*} = \kappa \nabla^2 T_1^*, \quad (2.15)$$

$$\rho \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t^*} \right) \frac{\partial}{\partial t^*} \nabla^2 w_1^* = \mu \nabla^4 w_1^* + \rho_0 \alpha g \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t^*} \right) \nabla^2 T_1^*. \quad (2.16)$$

2.2.3 Adimensionalización

La adimensionalización de las Ecs. (2.15-2.16) se realizará usando los siguientes escalamientos: d para la longitud, $(T_{BL} - T_{AU}) / (1 + D_U X_U + D_L X_L)$ para la temperatura, d^2/κ para el tiempo y κ/d para la velocidad. Aquí κ es la difusividad térmica del fluido. Así, las ecuaciones del problema perturbadas y adimensionalizadas son,

$$\left(1 + F \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w_1 - R \nabla_{\perp}^2 T_1 \right) = \nabla^4 w, \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) T_1 = w_1, \quad (2.18)$$

en donde w_1 y T_1 son la velocidad y la temperatura del fluido adimensionalizadas. Los parámetros adimensionales que aparecen en las Ecs. (2.17-2.18) son el parámetro de relajación F , el número de Prandtl Pr y el número de Rayleigh R , definidos en las Ecs. (2.23-2.26). Las Ecs. (2.17-2.18) están sujetas a las siguientes condiciones de frontera para la velocidad,

$$w_1 = \frac{dw_1}{dz} = 0 \quad \text{en } z = 0, 1. \quad (2.19)$$

Las condiciones de frontera para la perturbación de la temperatura T_1 se obtienen en la siguiente sección. Los perfiles de temperatura, para el fluido y las paredes, en forma adimensional son,

$$T_F = -z + 1 + X_U D_U, \quad (2.20)$$

$$T_L = -X_L z + 1 + X_U D_U, \quad (2.21)$$

$$T_U = X_U (-z + 1 + D_U). \quad (2.22)$$

2.2.4 Los parámetros adimensionales

Debido al proceso de adimensionalización de las ecuaciones, surgen parámetros adimensionales. En este apartado se abordará su significado físico y su importancia para el entendimiento del fenómeno termoconvectivo. Los números adimensionales que surgen de forma natural en el problema son el número de Rayleigh R , el número de Prandtl Pr y el parámetro de relajación F .

El número de Rayleigh, Ra se define como

$$R = \frac{\alpha g d^3 (T_{BL} - T_{AU})}{\nu \kappa (1 + D_U X_U + D_L X_L)}, \quad (2.23)$$

en donde α es el coeficiente de expansión volumétrica, d es el espesor de la capa de fluido. Como puede verse en el esquema de la Fig. (2.1), T_{BL} es la temperatura abajo de la pared inferior, T_{AU} es la temperatura arriba de la pared superior, ν es la viscosidad cinemática del fluido, κ es la difusividad térmica del fluido. D_U , D_L , X_U y X_L se definen como,

$$\begin{aligned} D_L &= \frac{d_L}{d}, & D_U &= \frac{d_U}{d}, \\ X_L &= \frac{K_F}{K_L}, & X_U &= \frac{K_F}{K_U}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

K_F es la conductividad térmica del fluido y K_L y K_U son las conductividades de las paredes inferior y superior, respectivamente. d_L y d_U son los espesores de las paredes inferior y superior, como se muestra en la Fig. (2.1). Los cocientes de espesores y conductividades definidos en las Ecs. (2.24) son de gran interés y utilidad en el presente trabajo, ya que permiten entender mejor la física del problema. La determinación del número de Rayleigh crítico R_c ayuda a comprender que tan estable es el sistema para un R dado. Cuando R alcanza su valor crítico R_c se dice que el sistema tiene estabilidad marginal, y si éste es menor o mayor a R_c se dice que el sistema es estable o inestable. Esto se debe a los efectos desestabilizadores de la flotación y a los efectos estabilizadores de la difusividad y la viscosidad. La flotación surge debido a que hay un arreglo de fluido con mayor densidad cerca de la región fría que intenta bajar por el efecto de la gravedad sobre fluido con menor densidad cerca de la región caliente. A su vez la difusividad térmica estabiliza al hacer que el fluido de la parte inferior se enfríe antes de llegar a la parte superior de la capa de fluido. Cabe mencionar que cuando se alcanza R_c las fuerzas desestabilizadoras y las estabilizadoras se hallan en equilibrio, es decir, que el sistema se halla en un estado de estabilidad marginal o neutral. Cuando se rebasa R_c las fuerzas desestabilizadoras son mayores a las fuerzas estabilizadoras,

dando origen a la inestabilidad. En caso contrario hay estabilidad. Los cocientes de espesores D_L y D_U representan las propiedades geométricas de las paredes en el presente problema y su importancia puede notarse a valores finitos de las conductividades térmicas de las paredes; pero no influyen en la estabilidad del sistema cuando las paredes son idealmente muy malas o muy buenas conductoras térmicas. Las situaciones de $d > d_L, d_U$ y $d < d_L, d_U$ dan lugar a dos valores distintos de R_c cuando las paredes tienen conductividades térmicas finitas. Los cocientes X_L y X_U representan las propiedades térmicas de las paredes dadas por sus conductividades térmicas. Con estos cocientes es posible calcular la estabilidad hidrodinámica del sistema desde la situación ideal de convección en una capa de fluido entre paredes perfectamente conductoras ($X_L, X_U \rightarrow 0$) hasta la situación ideal de convección en una capa de fluido entre paredes aislantes ($X_L, X_U \rightarrow \infty$) (ver Fig. (2.4-2.5)). Los valores entre los dos límites mencionados corresponden a situaciones en las cuales las paredes están formadas de materiales con conductividades térmicas finitas y reales como el safiro (30.3 W/mK a 24.85 °C), por ejemplo.

Otro parámetro adimensional es el número de Prandtl, definido como el cociente de la viscosidad cinemática entre difusividad térmica del fluido,

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (2.25)$$

Este parámetro se puede interpretar físicamente. Caracteriza las propiedades de transporte de momento (a través de la viscosidad cinemática) y de calor (a través de la difusividad térmica). En el presente problema, si el Pr es muy grande la viscosidad del fluido será muy importante y se podrán desprestigiar los términos inerciales de las ecuaciones de balance de momento pero la difusión de calor será lenta. Un aspecto importante del número de Prandtl en nuestro problema de convección es que aparece cuando la convección depende del tiempo, en particular cuando el flujo es oscilatorio. No tiene influencia en convección estacionaria ya que solo aparece multiplicando a la derivada temporal de la Ec. (2.17).

El parámetro de relajación F es de especial interés ya que se introduce en el problema a través de la ecuación constitutiva del fluido viscoelástico. Se define como sigue,

$$F = \frac{\lambda_1 \kappa}{d^2}. \quad (2.26)$$

Es de notar que cuando $F = 0$ la ecuación constitutiva se reduce a la de un fluido newtoniano. El parámetro F puede interpretarse en términos de los componentes, solvente y soluto, de una solución polimérica viscoelástica, tal como las suspensiones de ADN. En términos del modelo viscoelástico de Maxwell en las soluciones poliméricas el solvente aporta los efectos viscosos y el polímero los

efectos elásticos. Así, F es el cociente del tiempo de relajación λ con respecto a la escala de tiempo de difusión térmica a través de la capa de fluido. Cuando F es pequeño la difusión térmica mantiene a las moléculas de polímero en una configuración de equilibrio, de tal manera que el fluido polimérico muestra muy pequeñas diferencias cuantitativas de un fluido newtoniano. Es decir que el fluido polimérico se comporta como un fluido newtoniano. Cuando F es grande las moléculas de polímero deformadas por el flujo no tienen tiempo de relajarse y cambiar su configuración, dando lugar a un comportamiento elástico.

2.3 Conceptos básicos de la estabilidad lineal

En esta sección se presenta la teoría básica del análisis de estabilidad lineal necesaria para entender los resultados de este trabajo. El cuestionamiento acerca de la estabilidad de un sistema físico puede plantearse como sigue: dado un estado inicial de equilibrio del sistema físico en cuestión, se considera otro estado cerca del estado inicial y se investiga si con el paso del tiempo el sistema tiende o no al estado inicial de equilibrio. A la separación del estado inicial se le denomina perturbación. Si con el paso del tiempo, la perturbación tiende a cero el sistema será estable e inestable en caso contrario. Por otro lado, entre las situaciones de estabilidad e inestabilidad existe un caso límite denominado estabilidad neutral o estabilidad marginal que separa los estados iniciales estables de los inestables. La determinación de la estabilidad marginal es el objetivo principal de los problemas de estabilidad hidrodinámica.

El procedimiento a seguir para determinar la estabilidad marginal de un sistema consiste en suponer que todos los parámetros adimensionales que definen al sistema, excepto uno, son constantes mientras que el parámetro escogido se varía. Al variar tal parámetro es posible pasar del estado estable al inestable justamente cuando ése parámetro tome un valor llamado marginal. Los estados de estabilidad marginal pueden ser de dos tipos que corresponden a las dos maneras en que las perturbaciones pueden crecer o decrecer. Las estabilidades marginales pueden ser estacionarias u oscilatorias. En convección natural el parámetro adimensional que representa la estabilidad del sistema es el número de Rayleigh. Es necesario mencionar que en un medio viscoso con cierta conductividad térmica los movimientos convectivos en el fluido no se iniciarán a menos que se exceda una cierta diferencia de temperatura vertical que permita superar las fuerzas estabilizadoras viscosas y de disipación térmica. Las pequeñas perturbaciones al sistema, en forma de ondas, tienen una razón de crecimiento en el tiempo representada por σ_R que depende en general, en convección natural, del número de Rayleigh, del número de Prandtl y del número de onda, entre otros. El número de onda $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ está asociado

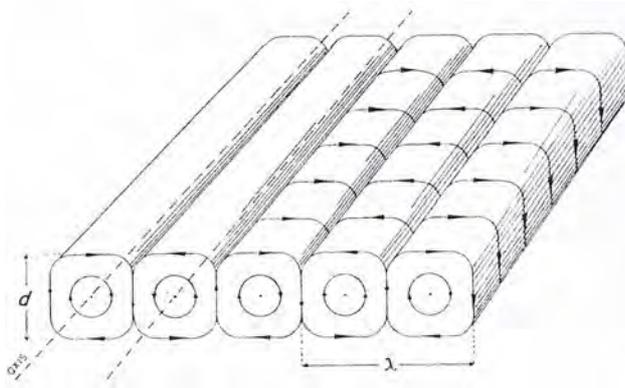


Figura 2.2: Esquema de un conjunto de rollos convectivos. d es la profundidad de la capa de fluido y λ la longitud de onda de la perturbación.

con las perturbaciones y los patrones convectivos en el fluido. La dimensión horizontal de una celda convectiva está dada por la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$. La Fig. (2.2) muestra el vínculo entre la longitud de onda y las celdas convectivas formadas en una capa de fluido de profundidad d .

La razón de crecimiento puede calcularse siguiendo alguno de los métodos que se muestran más adelante. Cuando la razón de crecimiento es cero ($\sigma_R = 0$) el sistema está en un estado de estabilidad marginal y el número de Rayleigh R se determina analítica o numéricamente de la expresión resultante que dependerá de Pr y k , entre otros parámetros. Una curva representativa de estabilidad marginal, R vs k se muestra en la Fig. (2.3) en donde el mínimo de la curva marginal determina el número de Rayleigh crítico R_c y el número de onda crítico k_c . Entonces, al considerar un sistema como el que se presenta en la Fig. (2.1), por ejemplo, en un estado inicial en el que el fluido está en reposo y la distribución de la temperatura es una función lineal de la coordenada vertical z , cuando se tiene $R < R_c$ el estado inicial con la capa de fluido en reposo es estable con respecto a perturbaciones infinitesimales. $R = R_c$ corresponde a movimientos convectivos de estado estacionario muy lentos con número de onda k_c . Si $R > R_c$ la capa de fluido es completamente inestable y las perturbaciones pueden crecer con dos posibles números de onda como se puede notar en la Fig. (2.3). En los problemas de estabilidad hidrodinámica los valores R_c y k_c son datos muy importantes ya que marcan el punto de inicio del fenómeno de convección y por ello es usual encontrar en la literatura científica solamente curvas de criticalidad de R_c vs k_c ; mientras que las curvas marginales se omiten porque lo más importante en ellas son los mínimos de éstas.

Se debe notar que en muchos problemas de termoconvección tanto los mo-

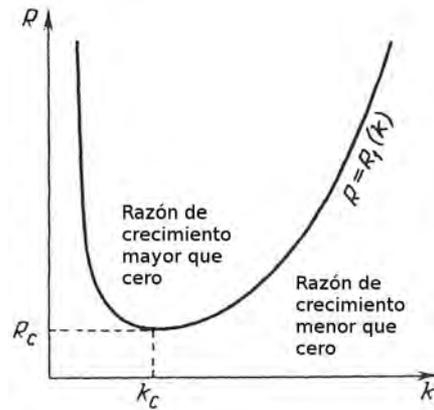


Figura 2.3: Esquema de un curva de estabilidad marginal. Cuando la razón de crecimiento es mayor que cero el sistema es inestable y cuando ésta es menor que cero el sistema es estable. Cuando la razón de crecimiento es cero el sistema tiene estabilidad marginal.

vimientos convectivos estacionarios como los oscilatorios pueden presentarse y competir entre sí para desestabilizar al sistema. Ya que $\sigma = \sigma_R + i\omega$ (ver la Ec. (2.27)) en donde ω es la frecuencia de oscilación, resulta que de la parte real de σ se obtiene la estabilidad marginal estacionaria y de la parte imaginaria de σ se obtiene la estabilidad marginal oscilatoria. Tómese en cuenta que los R_c y k_c correspondientes a la convección oscilatoria permiten calcular de forma directa la frecuencia de oscilación crítica ω_c . La frecuencia de oscilación está asociada a ondas gravitacionales internas en la capa de fluido.

2.4 Análisis de estabilidad lineal

En esta sección se analiza la estabilidad del estado inicial del sistema ante pequeñas perturbaciones. Para ello, se considerará una separación en modos normales para las Ecs. (2.17-2.18) del problema de la forma,

$$[w_1, T_1] = [W(z), \Theta(z)] \exp \left[i(k_x x + k_y y) + \sigma t \right], \quad (2.27)$$

en donde k_x y k_y son las componentes x y y del vector número de onda con magnitud $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. σ es un parámetro complejo cuya parte real σ_R y parte imaginaria ω son la razón de crecimiento y la frecuencia de oscilación, respectivamente. De esta manera, después de hacer la sustitución en las Ecs. (2.17-2.18) obtenemos

$$(1 + F\sigma) \left[\frac{\sigma}{Pr} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) W - Rk^2 \Theta \right] = \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 W, \quad (2.28)$$

$$\left[\sigma - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \right] \Theta = W, \quad (2.29)$$

con las siguientes condiciones de frontera para la velocidad,

$$W = \frac{dW}{dz} = 0 \quad \text{en } z = 0, 1. \quad (2.30)$$

Las condiciones de frontera para Θ se calculan a continuación.

2.4.1 Las condiciones de frontera térmicas

En este apartado se calculan las condiciones de frontera térmicas del problema en cuestión para la perturbación de la temperatura Θ , que deberán incluir los efectos de los espesores de las paredes y sus conductividades. Ambos efectos se traducirán en grupos adimensionales llamados números de Biot.

Considérese entonces que las superficies exteriores de las paredes inferior y superior se encuentran a temperatura constante. Entonces, la perturbación de las temperaturas dentro de las paredes inferior Θ_L y superior Θ_U debe ser cero en esas mismas,

$$\begin{aligned} \Theta_L &= 0 \quad \text{en } z = -D_L, \\ \Theta_U &= 0 \quad \text{en } z = 1 + D_U. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Además, debido a la continuidad de la temperatura y el flujo de calor en los puntos donde el fluido y cada una de las paredes están en contacto, también tenemos las siguientes condiciones a satisfacer,

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_L, \quad X_L \frac{d\Theta_1}{dz} = \frac{d\Theta_L}{dz} \quad \text{en } z = 0, \\ \Theta &= \Theta_U, \quad X_U \frac{d\Theta_1}{dz} = \frac{d\Theta_U}{dz} \quad \text{en } z = 1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Considérese ahora, las siguientes ecuaciones para las temperaturas en las paredes,

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 - \sigma\right)\Theta_L = 0, \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 - \sigma\right)\Theta_U = 0, \quad (2.34)$$

cuyas soluciones están dadas en términos de senos y cosenos hiperbólicos como sigue,

$$\Theta_L = a_1 \cosh qz + b_1 \sinh qz, \quad (2.35)$$

$$\Theta_U = a_2 \cosh qz + b_2 \sinh qz, \quad (2.36)$$

donde $q = \sqrt{k^2 + \sigma}$. Las constantes de integración de la solución de la Ec. (2.35) para la pared inferior se calculan con la condición de temperatura constante, dada en la Ec. (2.31) para $z = -D_L$ y con la condición de continuidad de la temperatura dada en la Ec. (2.32) para $z = 0$. Luego, usando la condición de continuidad de flujo de calor en $z = 0$ dada en la Ec. (2.32) se obtiene la condición de frontera para Θ en $z = 0$. Siguiendo el mismo procedimiento con la Ec. (2.36) y las condiciones correspondientes, se obtiene la condición de frontera para Θ en $z = 1$.

Finalmente, las condiciones de frontera adimensionales para Θ incluyendo las propiedades de las paredes son

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} - \frac{q}{X_L \tanh D_L}\right)\Theta &= 0 \text{ en } z = 0, \\ \left(\frac{d}{dz} + \frac{q}{X_U \tanh D_U}\right)\Theta &= 0 \text{ en } z = 1. \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.4.2 Cálculos analíticos usando el método de Galerkin

En esta sección se determinan analíticamente las condiciones para el inicio de la convección por medio del método de Galerkin. Se usará este método para resolver el problema de valor propio dado en el sistema de Ecs. (2.28-2.29) sujeto a las condiciones de frontera dado por las Ec. (2.30) y Ec. (2.37). Aunque es un método aproximado, tiene una gran precisión. Además, éste da la posibilidad de obtener una expresión analítica del número de Rayleigh R .

Considérese entonces, el siguiente desarrollo de W que satisface las condiciones de frontera

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} A_n [z(z-1)]^{2+n}. \quad (2.38)$$

Ahora, si el desarrollo propuesto para Θ es

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Theta_n, \quad (2.39)$$

entonces, después de sustituir W dada en la Ec. (2.38) y Θ dada en la Ec. (2.39) en la Ec. (2.29), obtenemos Θ_n como solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\left[\sigma - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \right] \Theta_n = [z(z-1)]^{2+n}, \quad (2.40)$$

sujeta a las condiciones de frontera apropiadas dadas en Ecs. (2.37). De esta manera al resolver la ecuación Eq. (2.40) se puede calcular Θ_n fácilmente. No se muestra la expresión para Θ_n por ser muy grande y compleja. Después, multiplicamos la ecuación Ec. (2.28) por W e integramos en el rango de $z = 0$ a $z = 1$, para obtener

$$0 = \left| \int_0^1 W_m \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \left[\frac{\sigma}{Pr} (1 + F\sigma) - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \right] W_n dz \right. \\ \left. - (1 + F\sigma) Rk^2 \int_0^1 W_m \Theta_n dz \right|, \quad (2.41)$$

para obtener esta expresión se usaron las Ecs. (2.38-2.39) y se realizaron algunas simplificaciones. El determinante expresado en la Ec. (2.41), el cual fue calculado con la ayuda del software Maple, representa la condición de solubilidad de la cual se calcula el valor propio R . Cabe mencionar que a través de la condición de solubilidad se calcula el parámetro que determina la estabilidad del sistema, mientras que desde el punto de vista matemático ésta condición permite continuar con la aproximación a órdenes mayores. Sin la condición de solubilidad no es posible calcular R para estudiar la estabilidad hidrodinámica del sistema. La primera aproximación de R , que corresponde al elemento $(0,0)$ de la matriz en el determinante de la Ec. (2.41), puede ser fácilmente calculado. De aquí en adelante se supondrá que las paredes tienen las mismas propiedades térmicas y geometría, esto es $X_L = X_U = X$ y $D_L = D_U = D$. Entonces, el resultado es:

$$R = \frac{q^{11} \coth q \left[(q^2 + B^2) \tanh q + 2qB \right] \left[C_1 + (1 + F\sigma) (k^2 + 12) \sigma Pr^{-1} \right]}{k^2 (1 + F\sigma) (C_2 B^2 + C_3 B + C_4)}, \quad (2.42)$$

en donde

$$\begin{aligned}
B &= \frac{q}{X \tanh qD}, \\
C_1 &= k^4 + 24k^2 + 504, \\
C_2 &= q(q^8 - 12q^6 + 504q^4 + 30240q^2 + 362880) - 5040 \tanh \frac{q}{2} (q^2 + 12)^2, \\
C_3 &= 2q^6(q^4 - 12q^2 + 504) \coth q + 60480q^2(q^2 + 12) \operatorname{csch} q \\
&\quad - 5040q(q^2 - 6q + 12)(q^2 + 6q + 12), \\
C_4 &= q^3(q^8 - 12q^6 + 504q^4 - 30240q^2 - 362880) + 181440q^4 \coth \frac{q}{2}.
\end{aligned}$$

El número de Rayleigh dado en la Ec. (2.42) es un resultado que no ha sido reportado antes y éste incluye k , X and D , sin ninguna restricción en sus magnitudes. Una tercera estimación de R a partir de la Ec. (2.41) fue también realizada numéricamente. Es posible obtener una expresión para R a partir de la Ec. (2.42) en el límite de $X \rightarrow 0$, la cual corresponde a la condición de frontera de temperatura fija. En este límite, solamente, el término correspondiente a B^2 sobrevive. Por lo tanto, la ecuación se reduce a,

$$R = \frac{q^{11} [C_1 + (1 + F\sigma) \sigma (k^2 + 12) \sigma Pr^{-1}]}{k^2 (1 + F\sigma) C_2}. \quad (2.43)$$

Cuando $F = 0$ se recupera el caso newtoniano y la frecuencia de oscilación es cero. El límite de $Pr \rightarrow 0$ no puede calcularse porque lleva a una singularidad, de viscosidad cero, correspondiente al caso inviscido. De cualquier manera, el límite $Pr \rightarrow \infty$ da otra expresión para el número de Rayleigh R . Ésta es,

$$R = \frac{q^{11} \coth q [(q^2 + B^2) \tanh q + 2qB] C_1}{k^2 (1 + F\sigma) (C_2 B^2 + C_3 B + C_4)}. \quad (2.44)$$

2.5 Cálculos usando el método de disparo

Los resultados obtenidos con el método de Galerkin fueron verificados con el método de disparo [17] y hubo buena concordancia entre ambos métodos. El análisis numérico fue realizado usando doble precisión. El problema de valores a la frontera dado en las Ecs. (2.28-2.29) sujeto a las condiciones dadas por Ec. (2.30) y Ec. (2.37) fue resuelto aquí con el método de disparo que consiste en, primero, integrar el sistema de ecuaciones diferenciales Ecs. (2.28-2.29) con el método de

Runge-Kutta de cuarto orden [17] entre $z = 0$ y $z = 1$. Mientras que el problema de valor propio para el número de Rayleigh R se resuelve mediante el disparo de varios intentos para satisfacer las condiciones de frontera en $z = 1$. También se usó un método de Newton global [17] para encontrar el valor de R que hace cero el determinante formado por los disparos a las condiciones de frontera en $z = 1$ (ver el libro de Press et al [17] para más detalles). Para valores fijos de D , X , Pr , F y k , los valores de R y ω que hacen cero las partes real e imaginaria de un determinante complejo, que resulta de los disparos, son los eigenvalores marginales.

Considerando la condición de frontera de temperatura fija en las paredes, en el límite de X pequeña, fue posible comparar los valores críticos R_c , k_c y ω_c para valores fijos de F con los reportados por Vest y Arpaci [24] en su Tabla I, Takashima [25] en su Tabla I, Sokolov y Tanner [26] en su Tabla I y Martínez-Mardones y Pérez-García [28] en su Fig. 5. La concordancia fue muy buena. Por otro lado, al suponer la condición de frontera de flujo de calor constante en las paredes, en el límite de X grande, los valores críticos R_c , k_c y ω_c para valores fijos de F fueron comparados con los reportados por Kolkka y Ierley [27] en sus Tablas I y II. En este caso también la concordancia fue excelente.

2.6 Resultados

Para $Pr = 1$ las curvas de R_c , k_c y ω_c contra X en los dos casos límite de $D=0.1$, pequeña, y $D=100$, grande, son mostrados en las Figs. 2.4(a-c) para $F = 0.1$ y en las Figs. 2.4(d-f) para $F = 100$, respectivamente. Nótese que las curvas correspondientes a $D < 0.1$ están muy cerca de las de $D = 0.1$. Lo mismo puede decirse de las curvas correspondientes a $D > 100$ respecto a las de $D = 100$. Puede observarse en la Fig. 2.4(a) que para $Pr = 1$ y $F = 0.1$ existe una competencia entre la convección oscilatoria y la estacionaria por desestabilizar el sistema. El cambio de convección oscilatoria a convección estacionaria, en el punto de codimensión dos como fue planteado por Martínez-Mardones y Pérez-García [28], aparece a valores intermedios de X . Este es un resultado muy interesante ya que muestra que para $Pr = 1$ la convección puede ser estacionaria y que el fluido de Maxwell se comporta como Newtoniano. La competencia entre los dos modos termina a aproximadamente $Pr = 1.4$ cuando los movimientos convectivos se inician solamente como oscilatorios, como se muestra en la Fig. 2.6.

Después del punto de codimensión dos la convección estacionaria desestabiliza al sistema y los resultados concuerdan con los reportados por Cerisier et al. [50]. En el límite de la condición de frontera de temperatura fija ($X \ll 1$) en las paredes se encontraron los siguientes valores críticos de los parámetros: $R_c = 870.5590$, $k_c = 4.92$ y $\omega_c = 15.09$ [24–26]; mientras que en el límite de la condición de fron-

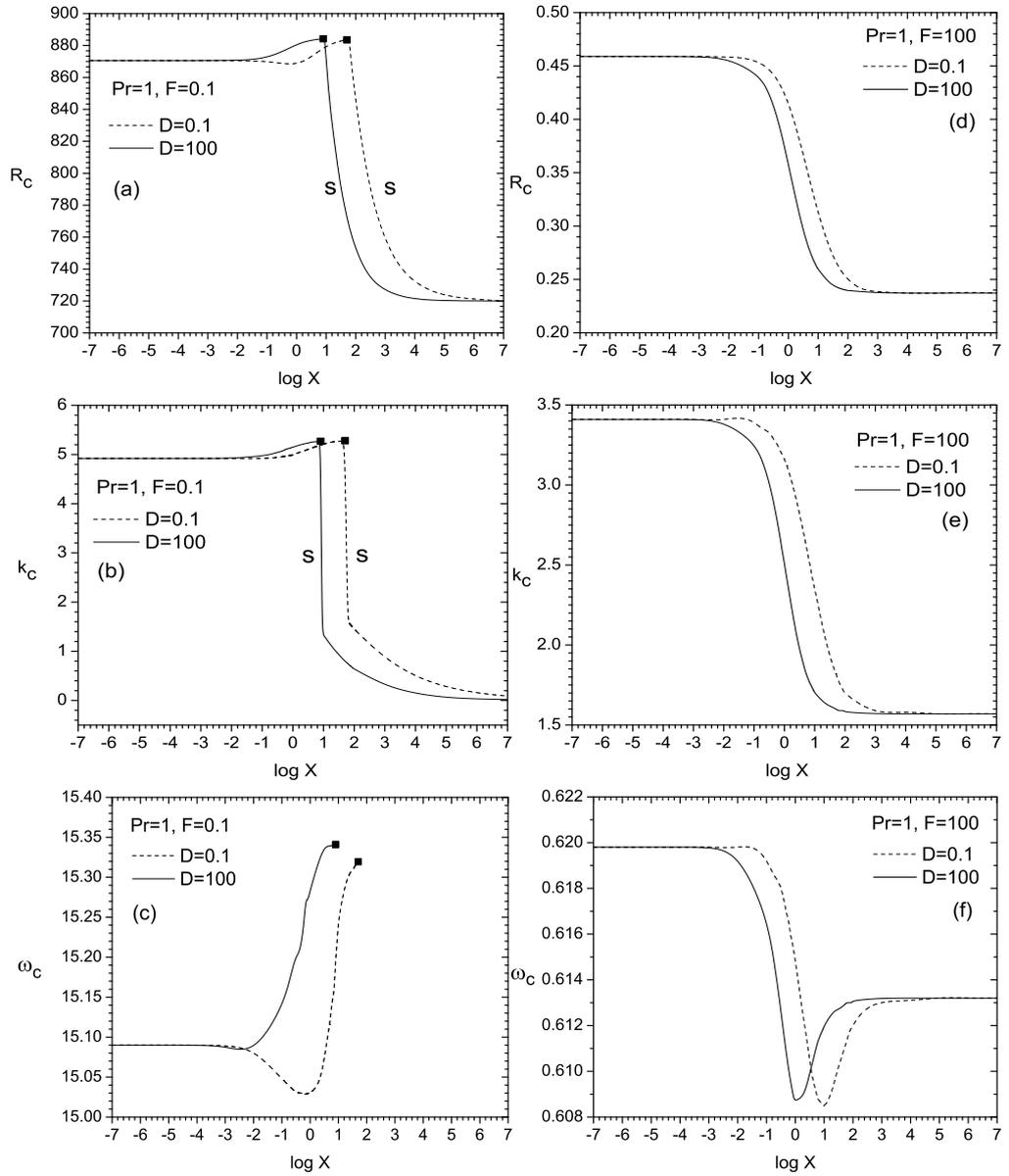


Figura 2.4: Curvas para $F = 0.1$: a) R_c , b) k_c y c) ω_c contra X , y curvas para $F = 100$: d) R_c , e) k_c y f) ω_c contra X . Aquí, $Pr = 1$, $D = 0.1$ son indicados por líneas cortadas y $D = 100$ por líneas continuas

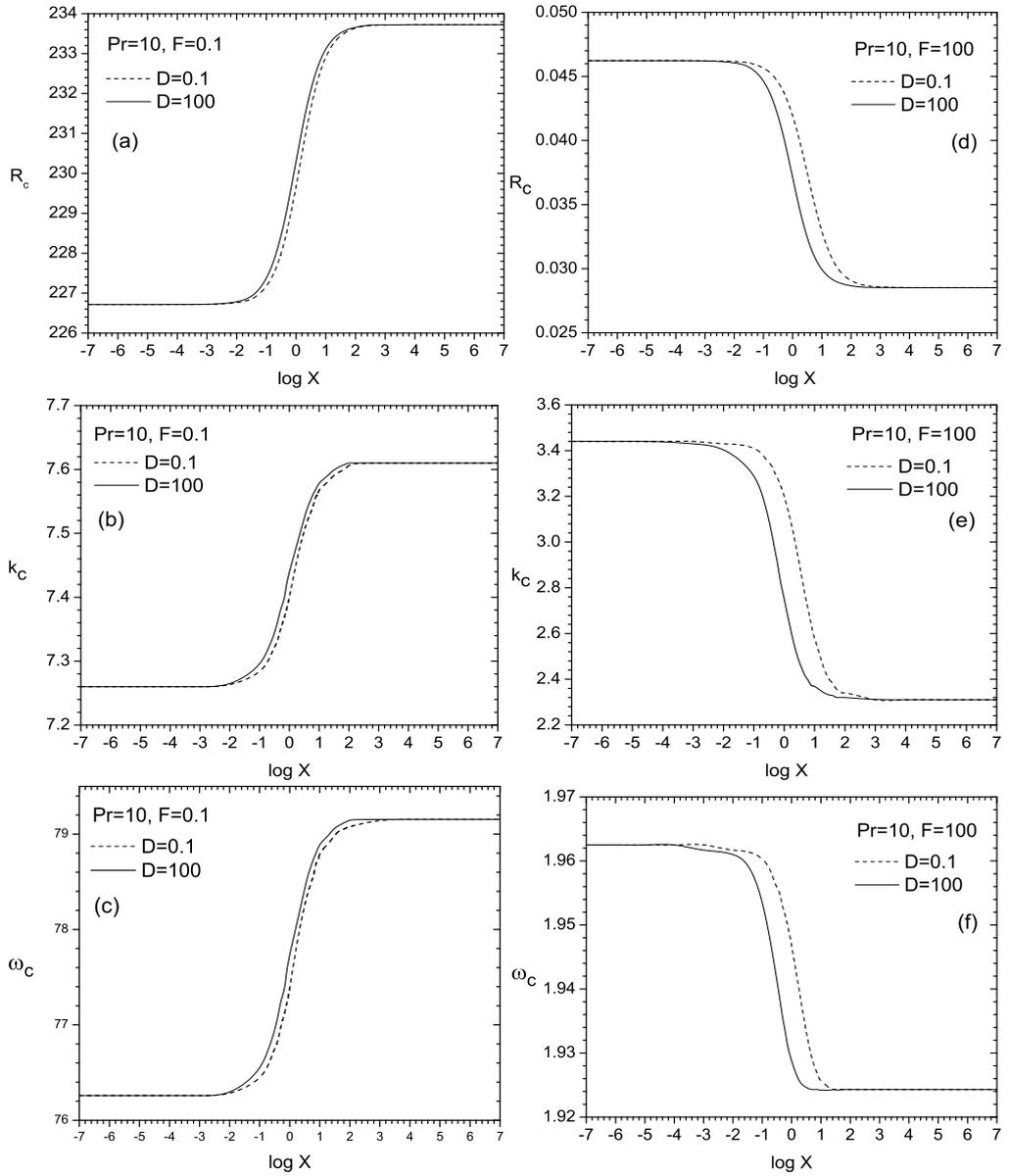


Figura 2.5: Curvas para $F = 0.1$: a) R_c , b) k_c y c) ω_c contra X , y curvas para $F = 100$: d) R_c , e) k_c y f) ω_c contra X . Aquí, $Pr = 10$, $D = 0.1$ son indicados por líneas cortadas y $D = 100$ por líneas continuas

tera de flujo de calor constante ($X \gg 1$) en las paredes se encontró: $R_c = 720.0183$, $k_c = 0.02$ y frecuencia cero ω_c [50]. Los puntos de codimensión dos para $D=0.1$ y $D=100$ están localizados aproximadamente en $X=50$ y $X=8$, respectivamente. Se encontró un comportamiento inesperado en las curvas de ω_c contra X para $F = 0.1$ y $F = 100$ mostradas en las Figs. 2.4(c) y 2.4(f). Esto es, además del valor mínimo relativo que ω_c toma en el límite de la condición de frontera de flujo de calor constante, hay un mínimo absoluto a valores intermedios de X . Las curvas para diferentes valores de Pr fueron confirmadas por los dos métodos antes mencionados, y se encontró que este mínimo absoluto desaparece solamente cuando Pr alcanza $Pr = 10$. Para $Pr = 1$ y $F = 100$ en el límite de la condición de frontera de temperatura fija en las paredes se encontraron los siguientes valores críticos: $R_c = 0.4589$, $k_c = 3.41$ y $\omega_c = 0.6198$ [24–26]; mientras que en el límite de la condición de frontera de flujo de calor constante en las paredes se encontró: $R_c = 0.2372$, $k_c = 1.57$ y $\omega_c = 0.6132$ [27]. Las curvas en la Fig. 2.4(d) para $F = 100$ muestran que el sistema se vuelve más inestable cuando se incrementa X y que en este caso los movimientos convectivos son solamente oscilatorios.

Para $Pr = 10$ las curvas de R_c , k_c y ω_c contra X en los dos casos límite de $D=0.1$, pequeña, y $D=100$, grande, son mostrados en las Figs. 2.5(a-c) correspondientes a $F = 0.1$ y en las Figs. 2.5(d-f) para $F = 100$ respectivamente. Para el caso de $Pr = 10$ y $F = 0.1$ los valores de (R_c, k_c, ω_c) se incrementan con X . Aquí, X tiene un efecto estabilizador. Nótese que este comportamiento contrasta con los de las curvas en las figuras previas. En la Fig. 2.4(a) el efecto estabilizador es incipiente antes de que el punto de codimensión dos aparezca. En el límite de la condición de frontera de temperatura fija en ambas paredes se encontraron los siguientes valores críticos: $R_c = 226.7151$, $k_c = 7.26$ y $\omega_c = 76.2593$ [24–26]; mientras que en el límite de la condición de frontera de flujo de calor constante en ambas paredes se encontró: $R_c = 233.7246$, $k_c = 7.61$ y $\omega_c = 79.1547$ [27]. Para el caso de $Pr = 10$ y $F = 100$ el valor de (R_c, k_c, ω_c) decrece con X . En el límite de la condición de frontera de temperatura fija en las paredes se encontraron los siguientes valores críticos: $R_c = 4.6230 \times 10^{-2}$, $k_c = 3.44$ y $\omega_c = 1.9625$ [24–26]; mientras que en el límite de la condición de frontera de flujo de calor constante en las paredes se encontró: $R_c = 2.8520 \times 10^{-2}$, $k_c = 2.31$ y $\omega_c = 1.9243$ [27].

La Fig. 2.6 da una presentación más explícita y clara de la competencia entre convección estacionaria y oscilatoria mostrada en la Fig. 2.4(a). En las curvas correspondientes a la convección oscilatoria presentada en la Fig. 2.6 el valor del parámetro elástico es $F = 0.1$. Allí, los dos pares de curvas de criticalidad para $Pr = 1$ y $Pr = 1.4$ corresponden a la convección oscilatoria mientras que las otras dos curvas corresponden a convección estacionaria. Nótese que los puntos de codimensión dos que surgen para $Pr = 1$ y diferentes D , desaparecen al incrementar Pr de $Pr = 1$ hasta aproximadamente $Pr = 1.4$.

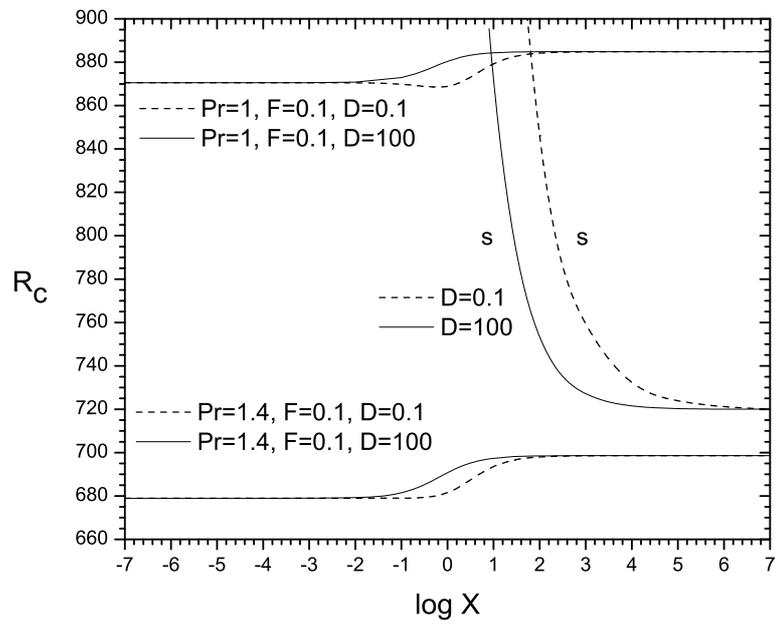


Figura 2.6: Curvas de R_c contra X para $F = 0.1$. Las curvas para $Pr = 1$ y $Pr = 1.4$ corresponden a convección oscilatoria y las curvas sin Pr indicado corresponden a convección estacionaria. Las líneas cortadas indican $D=0.1$ y las líneas continuas indican $D=100$

De las Figs. 2.4-2.5 se debe notar que en los casos límite de X pequeña y grande ambas curvas para $D= 0.1$ y $D= 100$ de R_c , k_c y ω_c colapsan en una sola, como era de esperarse. Esto quiere decir que, también para el fluido viscoelástico (ver [50]) el espesor de las paredes no tiene influencia en el inicio de la convección en estas regiones de X [24–28]. Nótese que no siempre R_c se aproxima al valor 720 cuando $X \rightarrow \infty$ (ver Hurle et al. [55], Dávalos-Orozco [22] y Dávalos-Orozco y Manero [23]). Esto quiere decir que incluso con la condición de frontera de flujo de calor constante en las paredes, la convección estacionaria no siempre puede ocurrir en un fluido viscoelástico de Maxwell [27], y bajo ciertas condiciones, los movimientos convectivos pueden iniciarse como convección oscilatoria. En la separación entre cada par de curvas a valores moderados de X en las Figs. 2.4-2.5 es claro el efecto de la diferencia entre $D= 0.1$ y $D= 100$. En esas regiones el espesor de las paredes tiene una influencia importante en la inestabilidad de la capa de fluido.

Las curvas presentadas en las Figs. 2.4-2.5 muestran el rol que juega X . Éstas muestran cómo X liga los dos casos límite ya estudiados desde hace varios años: paredes conductoras y paredes aislantes. Hemos encontrado en este estudio que para Pr fijo y X creciente, las celdas de convección aparecen más rápido en la capa de fluido cuando $F = 0.1$ que cuando $F = 100$. La influencia de la naturaleza geométrica de las paredes es notable a través de todas las curvas mostradas en las Figs. 2.4-2.5 aunque este efecto se magnifica en las curvas correspondientes a $(Pr = 1, F = 0.1)$ y $(Pr = 10, F = 0.1)$.

Es de interés dar soluciones asintóticas de R y ω del problema de convección para comparar con los resultados numéricos arriba descritos. Estas aproximaciones fueron calculadas con un método de Galerkin diferente al de Chandrasekhar. El procedimiento se explica en el Apéndice A. Los Apéndices B y C muestran los resultados de los cálculos asintóticos basados en los resultados del método de Galerkin presentado en el Apéndice A. En los apéndices se muestran las aproximaciones asintóticas: $Pr \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 0$ y $F \rightarrow \infty$; para dos límites diferentes: $D \rightarrow 0$ y $D \rightarrow \infty$.

Capítulo 3

Inestabilidad no lineal de una capa de fluido viscoelástico. Aproximación a número de Biot y número de onda pequeños

En este capítulo se desarrolla el problema de estabilidad hidrodinámica no lineal en la convección natural en una capa de fluido viscoelástico. El trabajo de investigación aquí presentado es de esta manera una extensión al análisis de estabilidad lineal expuesto anteriormente, pero para el caso particular en que la conductividad de la pared es pequeña. El objetivo de esta parte del trabajo de investigación es encontrar la selección de patrones convectivos que pueden darse en la convección de la capa de fluido. Esto permitirá conocer cuales son las condiciones bajo las que un determinado patrón celular predomina o se desestabiliza y evoluciona hacia otro más estable.

3.1 Planteamiento del problema

El planteamiento es similar, en algunos aspectos, al propuesto en el capítulo anterior. Aquí, se considerará una capa de fluido viscoelástico confinada entre dos paredes horizontales infinitas y que es calentada por abajo. El fluido viscoelástico de Oldroyd en cuestión puede ser uno de los tres siguientes de acuerdo a la derivada convectiva seleccionada: fluido viscoelástico de Oldroyd-A, fluido viscoelástico de Oldroyd-B o fluido viscoelástico de Oldroyd corrotacional. Las derivadas convectivas dan una gran complejidad a las ecuaciones constitutivas. Las ecuaciones de

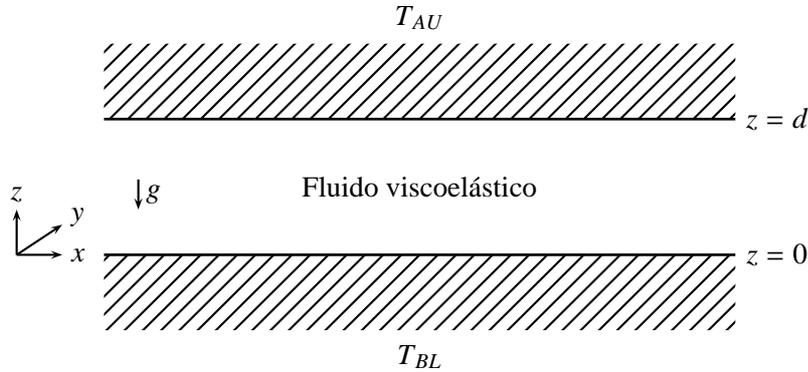


Figura 3.1: Esquema del problema de convección natural en una capa de fluido viscoelástico entre dos paredes pobremente conductoras

estos tres fluidos ya se mostraron de forma general en la Ec. (1.12).

En relación a las condiciones físicas del problema, éstas se esquematizan en la Fig. (3.1). Nótese que aquí no es de interés tener en forma explícita el efecto de los espesores y las conductividades térmicas de las paredes y es por ello que no se especifican en la Fig. (3.1). La razón es que se ha hecho el supuesto más simple de que las paredes son pobremente conductoras. Desde el punto de vista del cociente de conductividades X definido en Ec. (2.24), esto significa que X es muy grande pero sin llegar a una situación extrema de tener la condición de flujo de calor constante. Esta magnitud llevará a tener un número de Biot muy pequeño pero finito, que se reflejará en las condiciones de frontera térmicas.

3.2 Formulación del problema

Las ecuaciones no lineales generales del problema son las mismas que antes, esto es, la ecuación de continuidad, la ecuación de difusión del calor y la ecuación de balance de momento acopladas con las ecuaciones constitutivas de los fluidos viscoelásticos. A diferencia del problema lineal, las ecuación de balance de momento y las ecuaciones constitutivas no se pueden combinar en forma sencilla en el problema no lineal, lo que complica el tratamiento matemático. Estas ecuaciones, sin perturbar, son las siguientes,

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) T^* = \kappa \nabla^{*2} T^*, \quad (3.2)$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right] = -\nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* - \rho_0 [1 - \alpha(T^* - T_{BL})] g \mathbf{k}, \quad (3.3)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}t^*} \right) \boldsymbol{\tau}^* = 2\mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}t^*} \right) \mathbf{e}^*. \quad (3.4)$$

Se debe notar que la Ec. (3.4) es la ecuación constitutiva para los tres fluidos viscoelásticos arriba mencionados y $\mathbb{D}/\mathbb{D}t^*$ es un operador no lineal definido en la Ec. (1.11).

3.2.1 Las ecuaciones perturbadas no lineales

A continuación son introducidas pequeñas perturbaciones en el sistema, tal como se hizo en el problema de estabilidad lineal. Las perturbaciones son,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_1^*(x^*, y^*, z^*, t^*), \\ T^* &= T_F^* + T_1^*(x^*, y^*, z^*, t^*), \\ p^* &= p_H^* + p_1^*(x^*, y^*, z^*, t^*), \\ \boldsymbol{\tau}^* &= \boldsymbol{\tau}_1^*(x^*, y^*, z^*, t^*). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Entonces, son sustituidas las perturbaciones Ecs. (3.5) en Ecs. (3.4) para obtener las ecuaciones perturbadas que incluyen términos lineales y de segundo orden en la perturbación. Los términos lineales de las perturbaciones corresponden a los que componen las ecuaciones perturbadas en el análisis de estabilidad lineal; mientras que los términos de segundo orden de la perturbación, que aunque pequeños, son las contribuciones no lineales de los términos advectivos de la ecuación de difusión de calor Ec. (3.2), de las ecuaciones de balance de momento Ecs. (3.3) y del operador $\mathbb{D}/\mathbb{D}t^*$ en las ecuaciones constitutivas Ecs. (3.4). Las ecuaciones resultantes son,

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}_1^* = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}_1^* \cdot \nabla^*) T_1^* + w_1^* \frac{dT_F^*}{dz^*} = \kappa \nabla^{*2} T_1^*, \quad (3.7)$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{u}_1^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}_1^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}_1^* \right] = -\nabla^* p_1^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}_1^* + \rho_0 \alpha g T_1^* \mathbf{k}, \quad (3.8)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t^*} \right) \boldsymbol{\tau}_1^* = 2\mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t^*} \right) \mathbf{e}_1^*. \quad (3.9)$$

3.2.2 Adimensionalización

Ahora, se hará adimensional el sistema de Ecs. (3.6-3.9). Se usarán los siguientes escalamientos: d para la longitud, $(T_{BL} - T_{AU})$ para la temperatura, d^2/κ para el tiempo, κ/d para la velocidad y $\mu\kappa/d^2$ para los esfuerzos. Así, las ecuaciones perturbadas del sistema toman la siguiente forma adimensional.

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) T_1 + w_1 = \kappa \nabla^2 T_1, \quad (3.11)$$

$$Pr^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 \right] = -\nabla p_1 + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_1 + RT_1 \mathbf{k}, \quad (3.12)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} \right) \boldsymbol{\tau}_1 = 2\mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} \right) \mathbf{e}_1, \quad (3.13)$$

en donde las variables adimensionales ya no presentan el asterisco *.

3.3 Análisis no lineal

En esta sección se estudiarán las ecuaciones no lineales del problema termoconvectivo de una capa de fluido viscoelástico Ecs. (3.10-3.13). Como ya se mencionó al inicio del capítulo, consideraremos una situación en la que las paredes que confinan al fluido son malas conductoras. Lo anterior posibilita un tratamiento analítico del problema mediante una aproximación a números de onda y Biot pequeños. El sistema de Ecs. (3.10-3.13) se puede simplificar eliminando la presión al operar dos veces con el rotacional las Ecs. (3.12). Además, utilizaremos los potenciales ψ y χ para expresar la velocidad \mathbf{u}_1 ,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \nabla \times (\psi \mathbf{k}) + \nabla \times \nabla \times (\chi \mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi'}{\partial x}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi'}{\partial y}, -\nabla_{\perp}^2 \chi \right),\end{aligned}\quad (3.14)$$

en donde el símbolo ' indica derivada con respecto a z y el subíndice \perp indica el laplaciano en las dos dimensiones horizontales, (x, y) . Debido a la no linealidad de las ecuaciones de balance de momento, la componente vertical de la ecuación que resulta de operar con el doble rotacional, queda acoplada con las otras dos componentes a través del término advectivo. Por lo tanto, se tienen dos ecuaciones para los potenciales, una para ψ y otra para χ . Entonces, usando la Ec. (3.14) se tiene

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi'}{\partial x}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi'}{\partial y}, -\nabla_{\perp}^2 \chi \right) \cdot \nabla \right] T_1 - \nabla_{\perp}^2 \chi = \nabla^2 T_1, \quad (3.15)$$

$$Pr^{-1} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp}^2 \psi + T_{NL}^1 \right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{xy} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\tau_{xx} - \tau_{yy}) + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial y}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}Pr^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\perp}^4 \chi + \nabla_{\perp}^2 \chi'') + T_{NL}^2 \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\tau'_{xx} - \tau'_{zz}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\tau'_{yy} - \tau'_{zz}) + 2 \frac{\partial^2 \tau'_{xy}}{\partial x \partial y} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \nabla_{\perp}^2 \tau_{xz} - \frac{\partial}{\partial y} \nabla_{\perp}^2 \tau_{yz} + \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{yz}}{\partial y} - R \nabla_{\perp}^2 T_1,\end{aligned}\quad (3.17)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}t} \right) \boldsymbol{\tau}_1 = 2\mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}t} \right) \mathbf{e}_1, \quad (3.18)$$

en donde T_{NL}^1 y T_{NL}^2 son términos no lineales que provienen del término advectivo de las ecuaciones de balance de momento. T_{NL}^1 y T_{NL}^2 son expresiones grandes que se dan en el Apéndice D. La Ec. (3.16) para ψ (ecuación de la vorticidad), se obtuvo al aplicar una vez el operador rotacional a las Ecs. (3.12). La Ec. (3.17) para χ , se obtuvo al aplicar dos veces el operador rotacional a las mismas ecuaciones. El sistema de Ecs. (3.15-3.18) está sujeto a las siguientes condiciones de frontera para ψ , χ y T_1 ,

$$\begin{aligned}\chi = \chi' = \psi &= 0 \quad \text{en } z = 0, 1, \\ T_1' - B_L T_1 &= 0 \quad \text{en } z = 0, \\ T_1' + B_U T_1 &= 0 \quad \text{en } z = 1,\end{aligned}\quad (3.19)$$

en donde $B_{L,U}$ representa los números de Biot de las paredes inferior (L) y superior (U), respectivamente.

3.3.1 Aproximación a número de onda pequeño

Ahora, supondremos que la capa de fluido es somera en el sentido de que la escala de longitud de la profundidad es mucho más pequeña que la de las perturbaciones en las direcciones horizontales. En otras palabras, se supone que la longitud de onda de la perturbación es muy larga, o bien que el número de onda es muy pequeño. El caso no lineal de un fluido newtoniano ha sido estudiado por varios autores como son Chapman y Proctor [19–21]. Sin embargo aquí es de interés el trabajo de Pismen [56] pues él incluye los efectos de la vorticidad en la convección no lineal. Para que los efectos de la ecuación de la vorticidad aparezcan, es necesario introducir las escalas como sigue. Las escalas de longitud cerca del inicio de la convección son: $\bar{x} = \epsilon^{1/2}x$ y $\bar{y} = \epsilon^{1/2}y$, donde $\epsilon \ll 1$. Por otro lado, debido a que las paredes son malas conductoras, los números de Biot se reescalán como $B_{L,U} = \epsilon^2 \bar{B}_{L,U}$, es decir que ϵ es del orden de $B_{L,U}^{1/2}$. De esta manera,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Además, se introducen las siguientes escalas de tiempo.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_0} + \dots\tag{3.21}$$

Por otro lado, se considera el siguiente esquema de desarrollo para las variables del problema,

$$\chi = \chi_0 + \epsilon \chi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots,\tag{3.22}$$

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots,\tag{3.23}$$

$$T_1 = \theta_0 + \epsilon \theta_1 + \epsilon^2 \theta_2 + \dots,\tag{3.24}$$

$$R = R_0 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2,\tag{3.25}$$

$$\tau_{xx} = \epsilon \left(\tau_{xx}^{(0)} + \epsilon \tau_{xx}^{(1)} + \epsilon^2 \tau_{xx}^{(2)} + \dots \right), \quad (3.26)$$

$$\tau_{yy} = \epsilon \left(\tau_{yy}^{(0)} + \epsilon \tau_{yy}^{(1)} + \epsilon^2 \tau_{yy}^{(2)} + \dots \right), \quad (3.27)$$

$$\tau_{zz} = \epsilon \left(\tau_{zz}^{(0)} + \epsilon \tau_{zz}^{(1)} + \epsilon^2 \tau_{zz}^{(2)} + \dots \right), \quad (3.28)$$

$$\tau_{xy} = \epsilon \left(\tau_{xy}^{(0)} + \epsilon \tau_{xy}^{(1)} + \epsilon^2 \tau_{xy}^{(2)} + \dots \right), \quad (3.29)$$

$$\tau_{xz} = \epsilon^{1/2} \left(\tau_{xz}^{(0)} + \epsilon \tau_{xz}^{(1)} + \epsilon^2 \tau_{xz}^{(2)} + \dots \right), \quad (3.30)$$

$$\tau_{yz} = \epsilon^{1/2} \left(\tau_{yz}^{(0)} + \epsilon \tau_{yz}^{(1)} + \epsilon^2 \tau_{yz}^{(2)} + \dots \right), \quad (3.31)$$

en donde los desarrollos dados por las Ecs. (3.26-3.31), corresponden a las componentes de $\boldsymbol{\tau}_1$. Los desarrollos para las componentes de \mathbf{e}_1 se han omitido debido a que éstas se dan en términos de los potenciales ψ y χ . Entonces, al sustituir los escalamientos para (x, y) (Ecs. (3.20)), para el tiempo (Ec. (3.21)) y los desarrollos de las variables del problema (Ecs. (3.22-3.31)), en el sistema de Ecs. (3.15-3.18) se obtienen, a diferentes órdenes de ϵ , sistemas de ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones de frontera correspondientes, que pueden resolverse de manera analítica. De esta manera obtenemos,

A orden $O(1)$

$$\theta_0'' = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}^{(0)'}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \tau_{xz}^{(0)'}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{(0)''}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(0)''}}{\partial \bar{y}} - R_0 \nabla_{\perp}^2 \theta_0 = 0, \quad (3.34)$$

$$\tau_{xx}^{(0)} - 2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - 2 \frac{\partial^2 \chi_0'}{\partial \bar{x}^2} = F \tau_{xz}^{(0)} (a+1) \left(\frac{\partial \psi_0'}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \chi_0''}{\partial \bar{x}} \right), \quad (3.35)$$

$$\tau_{xy}^{(0)} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \bar{x}^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi_0'}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = -\frac{F}{2} (a+1) \left[\tau_{xz}^{(0)} \left(\frac{\partial \psi_0'}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \chi_0''}{\partial \bar{y}} \right) - \tau_{yz}^{(0)} \left(\frac{\partial \psi_0'}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \chi_0''}{\partial \bar{x}} \right) \right], \quad (3.36)$$

$$\tau_{xz}^{(0)} - \frac{\partial \psi_0'}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \chi_0''}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (3.37)$$

$$\tau_{yy}^{(0)} + 2 \frac{\partial \psi_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - 2 \frac{\partial \chi_0'}{\partial \bar{y}^2} = -F \tau_{yz}^{(0)} (a+1) \left(\frac{\partial \psi_0'}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \chi_0''}{\partial \bar{y}} \right), \quad (3.38)$$

$$\tau_{yz}^{(0)} + \frac{\partial \psi_0'}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \chi_0''}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zz}^{(0)} + 2\nabla_{\perp}^2 \chi'_0 = -F(a+1) & \left[\tau_{xz}^{(0)} \left(\frac{\partial \psi'_0}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \chi''_0}{\partial \bar{x}} \right) \right. \\ & \left. - \tau_{yz}^{(0)} \left(\frac{\partial \psi'_0}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \chi''_0}{\partial \bar{y}} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

sujetas a las condiciones,

$$\begin{aligned} \chi_0 = \chi'_0 = \psi_0 = 0 \quad \text{en } z = 0, 1, \\ \theta'_0 = 0 \quad \text{en } z = 0, 1. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Las Ec. (3.32) corresponde a la temperatura, la Ec. (3.33) proviene del primer rotacional de las ecuaciones de balance de momento, la Ec. (3.34) proviene del segundo rotacional de las ecuaciones de balance de momento y las Ecs. (3.35-3.40) corresponden a las componentes del tensor de esfuerzos.

A orden $O(\epsilon)$

$$\frac{\partial \chi'_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \chi'_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{x}} - \nabla_{\perp}^2 \chi_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 \chi_0 = \nabla_{\perp}^2 \theta_0 + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2}, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} Pr^{-1} \left[\frac{\partial \chi''_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \nabla_{\perp}^2 \chi_0 - \frac{\partial \chi''_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \nabla_{\perp}^2 \chi_0 \right] = -\frac{\partial^2 \tau_{xx}^{(0)}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(1)'}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}^{(0)}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right) \tau_{xy}^{(0)} - \frac{\partial \tau_{xz}^{(1)'}}{\partial \bar{y}}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} Pr^{-1} \left[4 \frac{\partial^2 \chi'_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \chi''_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \nabla_{\perp}^2 \chi_0 \nabla_{\perp}^2 \chi''_0 + \left(\frac{\partial^2 \chi''_0}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \chi''_0}{\partial \bar{y}^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \chi'_0}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \chi'_0}{\partial \bar{y}^2} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \chi_0}{\partial \bar{y}} \right) \left(\frac{\partial \chi''_0}{\partial \bar{y}} \right) - \left(\frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \chi_0}{\partial \bar{x}} \right) \left(\frac{\partial \chi''_0}{\partial \bar{x}} \right) + \left(\frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \chi''_0}{\partial \bar{y}} \right) \left(\frac{\partial \chi'_0}{\partial \bar{y}} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \chi''_0}{\partial \bar{x}} \right) \left(\frac{\partial \chi'_0}{\partial \bar{x}} \right) \right] = \frac{\partial^2 \tau_{xx}^{(0)'}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(1)'}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial^3 \tau_{yz}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(1)'}}{\partial \bar{x}} \\ - \frac{\partial^2 \tau_{zz}^{(0)'}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^2 \tau_{zz}^{(0)'}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}^{(0)'}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^3 \tau_{xz}^{(0)}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^3 \tau_{xz}^{(0)}}{\partial \bar{x}^3} - \frac{\partial^3 \tau_{yz}^{(0)}}{\partial \bar{y}^3} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}^{(0)'}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \\ - R_0 \nabla_{\perp}^2 \theta_1 - R_1 \nabla_{\perp}^2 \theta_0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

sujetas a las condiciones,

$$\begin{aligned}\chi_1 = \chi'_1 = \psi_1 = 0 & \quad \text{en } z = 0, 1, \\ \theta'_1 = 0 & \quad \text{en } z = 0, 1.\end{aligned}\tag{3.45}$$

En el sistema Ecs(3.42-3.44) se ha omitido ψ_0 para simplificar un poco las ecuaciones y porque, como se demostrará más adelante, ésta es cero. Las ecuaciones correspondientes a las componentes del tensor de esfuerzos a $O(\epsilon)$ se han omitido también debido a que son expresiones muy grandes y complicadas que en vez de ayudar al lector, entorpecen el desarrollo y seguimiento de la solución al problema. A $O(\epsilon^2)$ también se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales a resolver; pero de acuerdo con el proceso de solución sólo la ecuación que corresponde a la temperatura es necesaria. Entonces,

A orden $O(\epsilon^2)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_0}{\partial t_0} + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \chi'_1}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \chi'_1}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{y}} - \nabla_{\perp}^2 \chi_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \\ + \frac{\partial \chi'_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \chi'_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{y}} - \nabla_{\perp}^2 \chi_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 \chi_1 = \nabla_{\perp}^2 \theta_1 + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2},\end{aligned}\tag{3.46}$$

sujetas a las condiciones,

$$\begin{aligned}\theta'_2 - \bar{B}_L \theta_0 = 0 & \quad \text{en } z = 0, \\ \theta'_2 + \bar{B}_U \theta_0 = 0 & \quad \text{en } z = 1.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Condiciones de solubilidad para cada orden de aproximación

En este apartado se da solución a las ecuaciones en cada orden de aproximación. Como puede observarse, los sistemas de ecuaciones a $O(\epsilon)$ y superiores son inhomogéneos desde el punto de vista de su aproximación, por lo que deben satisfacer condiciones de solubilidad con el fin de que no se manifieste la no uniformidad en la expansión. Esto a su vez permite obtener los valores propios del número de Rayleigh en función de los otros parámetros del problema.

El procedimiento a seguir para calcular las condiciones de solubilidad, en general, es el siguiente (ver el libro de Nayfeh [57] para más detalles): a la ecuación inhomogénea se le multiplica la solución de la ecuación adjunta homogénea y se integra en el rango de la variable independiente. Enseguida, se integra por partes un número de veces igual al orden de la ecuación original hasta que aparezca factorizado el operador adjunto aplicado a la solución adjunta, lo cual deberá ser cero.

Por lo tanto, la integral del lado derecho conteniendo el término inhomogéneo deberá ser cero también. Esa es la condición de solubilidad. Esto se puede describir matemáticamente como sigue. Sea L un operador diferencial ordinario con derivadas en y y ξ la solución de $L\xi = h(y)$ y sea $\bar{\xi}$ la solución de la ecuación adjunta $\bar{L}\bar{\xi} = 0$. En general $L \neq \bar{L}$. Entonces, $\int \bar{\xi}L\xi dy = \int \bar{\xi}h(y)dy$ se transforma a través de integración por partes y con las condiciones de frontera en $\int \xi\bar{L}\bar{\xi}dy = \int \bar{\xi}h(y)dy = 0$, siendo esta última la condición de solubilidad. En el presente problema, se utilizan dos condiciones de solubilidad, a saber, una a orden $O(\epsilon)$ y otra a orden $O(\epsilon^2)$. Entonces, siguiendo el procedimiento anterior, de las Ecs. (3.42) y (3.46) obtenemos,

$$0 = \int_0^1 \theta_0 \frac{\partial \chi'_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{y}} dz + \int_0^1 \theta_0 \frac{\partial \chi'_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{x}} dz - \int_0^1 \theta_0 \nabla_{\perp}^2 \chi_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} dz + \int_0^1 \theta_0 \nabla_{\perp}^2 \chi_0 dz - \int_0^1 \theta_0 \nabla_{\perp}^2 \theta_0 dz, \quad (3.48)$$

$$0 = \int_0^1 \theta_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial t_0} + \int_0^1 \theta_0 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \chi'_1}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{x}} dz + \int_0^1 \theta_0 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \chi'_1}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{y}} dz - \int_0^1 \theta_0 \nabla_{\perp}^2 \chi_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} dz + \int_0^1 \theta_0 \frac{\partial \chi'_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{x}} dz + \int_0^1 \theta_0 \frac{\partial \chi'_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{y}} dz - \int_0^1 \theta_0 \nabla_{\perp}^2 \chi_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} dz + \int_0^1 \theta_0 \nabla_{\perp}^2 \chi_1 dz - \int_0^1 \theta_0 \nabla_{\perp}^2 \theta_1 dz + (\bar{B}_L + \bar{B}_U) \theta_0^2. \quad (3.49)$$

En la condición Ec. (3.49) se emplearon las condiciones de frontera Ecs. (3.47).

Solución para cada orden de aproximación

El primer sistema de ecuaciones diferenciales a tratar es el de orden $O(1)$, Ecs. (3.32-3.40), sujetas a las condiciones de frontera Ecs. (3.41). Éste es el sistema de ecuaciones más sencillo y permite dejar en claro el proceso de solución que se sigue a órdenes superiores. Primero se calcula $\theta_0(\bar{x}, \bar{y}, z, t_0)$ de la Ec. (3.32) junto con sus condiciones de frontera. Como es independiente de las otras variables, se obtiene,

$$\theta_0(\bar{x}, \bar{y}, z, t_0) = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, t_0). \quad (3.50)$$

El cálculo de las siguientes soluciones es más elaborado debido al acoplamiento, entre las ψ 's, χ 's y las componentes del tensor de esfuerzos en las Ecs. (3.33-3.40).

Considérese las ecuaciones para $\tau_{xz}^{(0)}$ y $\tau_{yz}^{(0)}$ dadas en las Ec. (3.37) y Ec. (3.39), respectivamente,

$$\tau_{xz}^{(0)} = \frac{\partial \psi'_0}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \chi''_0}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (3.51)$$

$$\tau_{yz}^{(0)} = -\frac{\partial \psi'_0}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \chi''_0}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (3.52)$$

Así, al sustituir las Ecs. (3.51-3.52) en la Ec. (3.33) obtenemos la ecuación para ψ_0 ,

$$\nabla_{\perp}^2 \psi''_0 = 0, \quad (3.53)$$

sujeta a las condiciones adecuadas Ecs. (3.41). La solución a la Ec. (3.53) es $\psi_0 = 0$ debido a que su ecuación es homogénea. Este resultado simplifica en gran medida el sistema de ecuaciones a orden $O(\epsilon)$, como fue planteado anteriormente. Además, al sustituir las Ecs. (3.51-3.52) en la Ec. (3.34) obtenemos la ecuación para χ_0 ,

$$\nabla_{\perp}^2 \chi_0'''' = R_0 \nabla_{\perp}^2 \Phi, \quad (3.54)$$

sujeta a las condiciones correspondientes Ecs. (3.41). La solución de la Ec. (3.53) es,

$$\chi_0 = \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^3}{12} + \frac{z^2}{24} \right) R_0 \Phi. \quad (3.55)$$

Con las soluciones $\psi_0 = 0$ y χ_0 , dada en Ec. (3.55), podemos ahora calcular las componentes del tensor de esfuerzos. Las soluciones de $\tau_{xz}^{(0)}$ y $\tau_{yz}^{(0)}$ se obtienen directamente de las Ecs. (3.51-3.52). Éstas y las demás componentes del tensor de esfuerzos, previamente calculadas, se muestran en el Apéndice D. Ahora, se evalúa la primera condición de solubilidad Ec. (3.48) para obtener,

$$0 = \left(\frac{R_0}{720} - 1 \right) \nabla_{\perp}^2 \Phi,$$

por lo que se concluye que

$$R_0 = 720. \quad (3.56)$$

Considérese ahora el sistema de ecuaciones a $O(\epsilon)$. De la Ec. (3.42) con las condiciones de frontera correspondientes Ecs. (3.45), calculamos θ_1 y obtenemos,

$$\begin{aligned} \theta_1 = & \left[720 \left(\frac{z^6}{720} - \frac{z^5}{240} + \frac{z^4}{288} - \frac{z}{720} + \frac{1}{2016} \right) - \left(\frac{z^2}{2} - z + \frac{1}{3} \right) \right] \nabla_{\perp}^2 \Phi \\ & + 720 \left(\frac{z^5}{120} - \frac{z^4}{48} + \frac{z^3}{72} - \frac{1}{1440} \right) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Siguiendo un proceso similar al empleado a $O(1)$ se calculan ψ_1 de la Ec. (3.43) sujeta a las condiciones de frontera adecuadas Ecs. (3.45). De la Ec. (3.43) sólo es posible calcular $\nabla_{\perp}^2 \psi_1$ en función de términos no lineales que imposibilitan obtener ψ_1 explícitamente para después sustituirla en la segunda condición de solubilidad Ec. (3.49). Cabe mencionar que la única manera de obtener ψ_1 analíticamente de forma explícita es añadiendo otra ecuación. Debido a la complejidad de la expresión, no se presenta ψ_1 explícitamente. Sin embargo, sí se puede dar su integral con respecto a z definida entre 0 y 1, que es lo que en realidad usaremos más adelante en la segunda condición de solubilidad Ec. (3.49). De esta manera,

$$\int_0^1 \psi_1 dz = \left[\left(60a + \frac{540}{7} \right) (E - 1) F + \frac{15}{7Pr} \right] \Psi(\bar{x}, \bar{y}, t_0), \quad (3.58)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \nabla_{\perp}^2 \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \nabla_{\perp}^2 \Phi, \quad (3.59)$$

o bien, en forma vectorial

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi = \nabla_{\perp} \Phi \wedge \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 \Phi). \quad (3.60)$$

Aquí, \wedge indica producto vectorial. La siguiente ecuación a considerar es la que corresponde a χ_1 , Ec. (3.44). Al igual que para ψ_1 , su expresión es grande y complicada, y no puede obtenerse de forma explícita. Sin embargo, para evaluar la segunda condición de solubilidad Ec. (3.49) sólo es necesario $\int_0^1 \nabla_{\perp}^2 \chi_1 dz$. La solución, $\nabla_{\perp}^2 \chi_1$, a la Ec. (3.44) sujeta a sus condiciones correspondientes Ecs. (3.45) puede calcularse fácilmente. No se presenta debido a que ocupa mucho espacio y no es necesaria para comprender el procedimiento que se sigue. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \nabla_{\perp}^2 \chi_1 dz = & \frac{R_1}{720} \nabla_{\perp}^2 \Phi + \frac{17}{462} \nabla_{\perp}^4 \Phi \\ & + \frac{10800}{7} (a^2 - 1) (E - 1) F^2 \nabla_{\perp} [(\nabla_{\perp} \Phi) (\nabla_{\perp} \Phi \cdot \nabla_{\perp} \Phi)]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Es necesario mencionar que las componentes del tensor de esfuerzos fueron calculadas con ayuda del software MAPLE. Se encontró que sus expresiones son muy grandes, con muchos términos no lineales por lo que no se presentan en este trabajo. El siguiente paso consiste en evaluar la segunda condición de solubilidad Ec. (3.49) con ayuda de los resultados mostrados en las Ecs. (3.50-3.61). Esta condición de solubilidad da lugar a una ecuación no lineal denominada ecuación de evolución o ecuación de longitud de onda larga ya que describe variaciones laterales en un sistema donde la escala de longitud vertical es menor con respecto a las horizontales. Dicha ecuación se expone en el siguiente apartado.

Las ecuaciones de evolución

Con las soluciones calculadas, la evaluación de la segunda condición de solubilidad Ec. (3.49) y la escala de tiempo propuesta Ec. (3.21) se obtiene la ecuación de evolución. El procedimiento consiste en sustituir $\partial\Phi/\partial t_0$ en,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \epsilon^2 \frac{\partial\Phi}{\partial t_0}, \quad (3.62)$$

e inmediatamente se eliminan los ϵ para regresar a las variables originales sin escalar. El resultado es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = & -(B_U + B_L)\Phi + \left(1 - \frac{R}{720}\right)\nabla_{\perp}^2\Phi - \frac{17}{462}\nabla_{\perp}^4\Phi \\ & + \frac{10}{7}\left[1 - 1080F^2(1-E)(1-a^2)\right]\nabla_{\perp}[(\nabla_{\perp}\Phi)(\nabla_{\perp}\Phi \cdot \nabla_{\perp}\Phi)] \\ & + \left[\frac{15}{7}Pr^{-1} - F(1-E)\left(\frac{540}{7} + 60a\right)\right]\nabla_{\perp}\Phi \wedge \nabla_{\perp}\Psi, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\nabla_{\perp}^2\Psi = \nabla_{\perp}\Phi \wedge \nabla_{\perp}(\nabla_{\perp}^2\Phi). \quad (3.64)$$

Las Ecs. (3.63-3.64) son las ecuaciones de evolución para convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd confinada entre dos paredes horizontales de mala conductividad térmica que incluyen los efectos de la vorticidad. En Ec. (3.63) aparece subrayado el primer término no lineal que incluye efectos viscoelásticos y que será discutido más adelante. Nótese que las ecuaciones fueron calculadas incluyendo cualquiera de los tres tipos de fluidos viscoelásticos de Oldroyd considerados: el fluido de Oldroyd-A con $a = -1$, el fluido de Oldroyd-B con $a = 1$ y el fluido corrotacional de Oldroyd con $a = 0$. La Ec. (3.63) puede reducirse, al eliminar los efectos viscoelásticos, a la ecuación de evolución en el caso newtoniano calculada por Pismen [58]. Un aspecto importante a tomar en

cuenta de la Ec. (3.63) es que cualquier influencia viscoelástica, ya sea de retardo o relajación, proviene únicamente de efectos no lineales. Esto quiere decir que el número de Rayleigh crítico, que se obtiene de la teoría lineal, no depende ni de F ni de E . Nótese también que cuando $a = -1$ o 1 los efectos viscoelásticos se introducen únicamente a través del último término no-lineal proveniente de la ecuación de la vorticidad.

De acuerdo con la aproximación realizada aquí, encontramos algunas limitaciones en las ecuaciones de evolución Ecs. (3.63-3.64). Para el fluido corrotacional de Oldroyd ($a = 0$), el único caso en que el término subrayado en Ec. (3.63) sobrevive, obtenemos

$$1 - 1080F^2(1 - E) > 0,$$

y ya que E no es mayor que 0.1 [53], hallamos que el parámetro F debe ser siempre menor que 0.032. Por otro lado, con el siguiente término viscoelástico y considerando, por ejemplo, $Pr = 10$, obtenemos que sólo los fluidos de Oldroyd-B y corrotacional de Oldroyd satisfacen la desigualdad anterior. Es de hacer notar que el rango de valores para F no es muy grande y limita el comportamiento viscoelástico de los fluidos estudiados a uno similar al del fluido newtoniano.

El número de Rayleigh crítico

Como ya se mencionó, en el análisis de estabilidad hidrodinámica no lineal consideraremos la estabilidad del sistema un poco fuera de la criticalidad. Ésta se determina a partir de la teoría lineal. Para ello, es necesario calcular los valores críticos del número de Rayleigh y del número de onda, R_c y k_c respectivamente. Entonces, debemos linealizar la Ec. (3.63) y emplear los siguientes modos normales,

$$\Phi(x, y, t) = \exp \left[i(k_x x + k_y y) + \sigma t \right], \quad (3.65)$$

en donde k_x y k_y son las componentes x y y del vector número de onda con magnitud $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. σ es un parámetro complejo cuya parte real σ_R y parte imaginaria ω son la razón de crecimiento y la frecuencia de oscilación, respectivamente. Se ha demostrado que no hay frecuencia de oscilación, o sea, σ es real. Para convección estacionaria, $\sigma_R = 0$ y el resultado es el siguiente,

$$0 = (B_U + B_L) - \left(1 - \frac{R}{720}\right)k^2 - \frac{17}{462}k^4, \quad (3.66)$$

$$R = 720 \left(\frac{B_U + B_L}{k^2} + \frac{17}{462}k^2 + 1 \right). \quad (3.67)$$

El número de Rayleigh crítico R_c se obtiene como sigue: se toma la derivada de la Ec. (3.67) con respecto a k y se iguala a cero para despejar k que en realidad es el número de onda crítico k_c que determina R_c . De esta manera,

$$R_c = 720 \left[2 \left(\frac{17(B_U + B_L)}{462} \right)^{1/2} + 1 \right], \quad (3.68)$$

$$k_c = \left(\frac{462(B_U + B_L)}{17} \right)^{1/4}. \quad (3.69)$$

3.3.2 Teoría débilmente no lineal

Aquí, se investiga el comportamiento no lineal débil de la solución a las ecuaciones de evolución Ecs. (3.63-3.64) para los tres fluidos arriba mencionados. Como se comentó, se supone que el número de Rayleigh R del sistema está cerca o un poco separado de su valor crítico R_c . También, se introducen las siguientes modificaciones en las escalas (x, y, t) , de tal forma que,

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} + \delta \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \delta^2 \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad (3.70)$$

mientras que para $\Phi(x, y, t)$, $\Psi(x, y, t)$ y R , tenemos,

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \delta \Phi_1 + \delta^2 \Phi_2 + \delta^3 \Phi_3 + \dots, \\ \Psi(x, y, t) &= \delta \Psi_1 + \delta^2 \Psi_2 + \delta^3 \Psi_3 + \dots, \\ R &= R_c + \delta^2 \bar{R}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

en donde δ es un parámetro pequeño que está relacionado con la separación de la criticalidad $\delta = (R - R_c) / \bar{R}$. Después de sustituir Ecs. (3.70-3.71) en las ecuaciones de longitud de onda larga Ec. (3.63-3.64) se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones a diferentes órdenes de δ ,

Para orden $O(\delta)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1 - \frac{R_c}{720} \right) \nabla_{\perp}^2 \Phi_1 - \frac{17}{462} \nabla_{\perp}^2 \Phi_1 - (B_U + B_L) \Phi_1, \\ \nabla_{\perp}^2 \Psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Para orden $O(\delta^2)$,

$$\begin{aligned}
0 &= \left(1 - \frac{R_c}{720}\right) \nabla_{\perp}^2 \Phi_2 + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial \mathbf{X}} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial \mathbf{Y}} \right) \Phi_1 - \frac{17}{462} \nabla_{\perp}^2 \Phi_2 \\
&\quad - \frac{68}{462} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial \mathbf{X}} + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x \partial \mathbf{X}} + \frac{\partial^4}{\partial y \partial x^2 \partial \mathbf{Y}} \right) \Phi_1 \\
&\quad - (B_U + B_L) \Phi_2 + \left[\frac{15}{7} Pr^{-1} + F(E-1) \left(\frac{540}{7} + 60a \right) \right] \nabla_{\perp} \Phi_1 \wedge \nabla_{\perp} \Psi_1, \\
\nabla_{\perp}^2 \Psi_2 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla_{\perp}^2 \Phi_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla_{\perp}^2 \Phi_1.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Para orden $O(\delta^3)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{t}} &= \left(1 - \frac{R_c}{720}\right) \nabla_{\perp}^2 \Phi_3 - \frac{\bar{R}}{720} \nabla_{\perp}^2 \Phi_1 + 2 \left(1 - \frac{R_c}{720}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial \mathbf{X}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial y \partial \mathbf{Y}} \right) \Phi_2 + \left(1 - \frac{R_c}{720}\right) \bar{\nabla}_{\perp}^2 \Phi_1 - \frac{17}{462} \nabla_{\perp}^2 \Phi_3 - \frac{17}{462} \left(4 \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial \mathbf{Y}} \right. \\
&\quad \left. + 4 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial \mathbf{X}} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x \partial \mathbf{X}} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y \partial x^2 \partial \mathbf{Y}} \right) \Phi_2 - \frac{17}{462} \left(6 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \mathbf{X}^2} \right. \\
&\quad \left. + 6 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial \mathbf{Y}^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial \mathbf{X}^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \mathbf{Y}^2} + 8 \frac{\partial^4}{\partial y \partial x \partial \mathbf{X} \partial \mathbf{Y}} \right) \Phi_1 \\
&\quad + \frac{10}{7} \left[1 + 1080F^2(E-1)(1-a^2) \right] \nabla_{\perp} [(\nabla_{\perp} \Phi_1)(\nabla_{\perp} \Phi_1 \cdot \nabla_{\perp} \Phi_1)] \\
&\quad - (B_U + B_L) \Phi_3 + \left[\frac{15}{7} Pr^{-1} + F(E-1) \left(\frac{540}{7} + 60a \right) \right] \\
&\quad \left[(\nabla_{\perp} \Phi_1 \wedge \nabla_{\perp} \Psi_2) + (\nabla_{\perp} \Phi_2 \wedge \nabla_{\perp} \Psi_1) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{Y}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right].
\end{aligned} \tag{3.74}$$

A partir de las Ecs. (3.72-3.74) se obtienen las ecuaciones para las amplitudes de las celdas convectivas de Ginzburg-Landau, a veces llamadas ecuaciones de Newell-Whitehead-Segel [59, 60] correspondientes a nuestro problema. De esta manera se podrá determinar la estabilidad de los patrones convectivos, a saber: rollos, cuadrados y hexágonos. Ésto se hace en la siguiente sección.

3.3.3 Selección de patrones

Esta sección está dedicada al estudio de la estabilidad de tres diferentes configuraciones de patrones. Los patrones convectivos (rollos, cuadrados, hexágonos, etc.)

emergen a partir del estado básico existente en la capa de fluido viscoelástico calentada por abajo (ver 2.2.1) que al exponerse a alguna fuerza o efecto externo (ver 2.2.2 y 3.2.1) alcanza un valor crítico. Estas condiciones críticas están representadas por el número crítico de Rayleigh R_c y del número de onda crítico k_c , previamente determinados en las Ecs.(3.68-3.69). Entonces, cuando esas fuerzas o efectos externos, que matemáticamente están representadas por las pequeñas perturbaciones, alcanzan una magnitud ligeramente arriba de las condiciones críticas aparece un pequeño rango de números de onda alrededor de los valores k_c . Dicho de otro modo, el patrón de celdas formado al inicio de la convección térmica puede evolucionar hacia otro completamente diferente al sobre pasar ligeramente los valores críticos R_c y k_c . Cuando esto sucede, se dice que el patrón celular es inestable y se transforma en otro más favorable en el cual se estabiliza. A lo anterior se le conoce como saturación del patrón convectivo y se debe a las interacciones no lineales.

Los patrones formados por celdas convectivas más simples son los rollos convectivos. Sus inestabilidades han sido ampliamente estudiadas tanto en forma teórica como en forma experimental en las décadas pasadas por muchos investigadores, tales como Schlüter et al. [61], Busse [62–64], Newell y Whitehead [59], Segel [60], Clever y Busse [65] y Albalbaki y Khayat [66] entre otros. Por otro lado, patrones más complejos tales como cuadrados y hexágonos han sido investigados más recientemente teórica y experimentalmente. Una revisión y comparación de la estabilidad de rollos, cuadrados y hexágonos muy completa ha sido presentada por Hoyle [67, 68]. A continuación, en el análisis de estabilidad de los patrones, seguiremos el procedimiento generalizado presentado por Hoyle [67, 68]. El procedimiento de Hoyle resulta muy práctico y conveniente ya que, como se verá más adelante se ha demostrado que las ecuaciones para las amplitudes pueden reescribirse a una forma canónica a través de un reescalamiento adecuado lo cual facilita el presente análisis.

Inestabilidad de los rollos

Considérese ahora el problema de la selección de patrones a través de las interacciones no lineales. Si se usan R_c y k_c dados en las Ecs. (3.68-3.69), la Ec. (3.72) de Φ_1 a orden $O(\delta)$ se puede reescribir como,

$$\nabla_{\perp}^4 \Phi_1 + 2k_c^2 \nabla_{\perp}^2 \Phi_1 + k_c^4 \Phi_1 = 0. \quad (3.75)$$

La solución que la satisface es de la forma

$$\Phi_1 = A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp(ik_c x) + A^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp(-ik_c x), \quad (3.76)$$

que corresponde a rollos convectivos con ejes perpendiculares al eje x . Aquí, el símbolo $*$ indica el complejo conjugado. Determinaremos cómo la amplitud $|A|$ satura un poco arriba de la criticalidad debido a las interacciones no lineales. Se puede interpretar a $A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t})$ como la envolvente de los rollos que variando lentamente. Con ayuda de las Ecs. (3.68-3.69) y Φ_1 dada en Ec. (3.76), se simplifica la Ec. (3.73) de Φ_2 . El resultado de la simplificación es una ecuación para Φ_2 idéntica a la Ec. (3.75), lo cual indica que Φ_2 no introduce información nueva al problema, y por lo tanto se desecha. Por otro lado, se obtuvo que $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$.

Para las ecuaciones a orden $O(\delta^3)$ seguimos el mismo procedimiento de simplificación. Después de sustituir Φ_1 dada en la Ec. (3.76) en la Ec. (3.74) para Φ_3 , obtenemos la siguiente ecuación para la amplitud A ,

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{t}} = \frac{\bar{R}}{720} k_c^2 A + 4 \frac{17}{462} k_c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{X}^2} - \frac{30}{7} \left[1 - 1080 F^2 (1 - E) (1 - a^2) \right] k_c^4 |A|^2. \quad (3.77)$$

También se obtiene una ecuación para A^* idéntica a ésta, pero se omite pues aporta la misma información que A . La Ec. (3.77) se obtuvo a partir de una condición de solubilidad que establece que los términos seculares debe ser cero. Cabe mencionar que desde el momento en que se propuso la solución Ec. (3.76) se supuso que los rollos convectivos estaban orientados en la dirección y , perpendiculares al eje x . Sin embargo, en el presente problema de convección queda claro que no hay ninguna dirección preferencial para la orientación de los rollos y que las direcciones de los ejes x y y en la Fig. (3.1) es puramente esquemática, ya que experimentalmente las direcciones de tales ejes estarían determinadas por la orientación de los rollos convectivos que emerjan. Una situación en la cual existiera una dirección preferencial para la orientación de los rollos podría darse en convección natural en presencia de un flujo de corte, por ejemplo (ver para el caso newtoniano Cox [69, 70]). Debido a que el número de onda está dirigido a lo largo del eje x y a que las modulaciones sobre el eje y son lentas pero más rápidas que a lo largo del eje x , se hará el cambio,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} - \frac{i}{2k_c} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{Y}^2}, \quad (3.78)$$

que es equivalente a tomar los escalamientos,

$$\bar{x} = \sqrt{\epsilon} x, \quad \bar{y} = \sqrt[4]{\epsilon} y, \quad (3.79)$$

al inicio del cálculo para obtener las Ec. (3.63-3.64) de evolución. De esta manera la Ec. (3.77) queda como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \bar{t}} &= \frac{\bar{R}}{720} k_c^2 A + 4 \frac{17}{462} k_c^2 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} - \frac{i}{2k_c} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{Y}^2} \right)^2 A \\ &\quad - \frac{30}{7} [1 - 1080F^2(1-E)(1-a^2)] k_c^4 A |A|^2. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Por otro lado, es posible escribir la Ec. (3.80) en forma canónica [71, 72] usando los siguientes escalamientos,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \sqrt{\frac{30}{7} [1 - 1080F^2(1-E)(1-a^2)]} k_c^2 A, \\ \bar{\mathbf{X}} &= \left(2k_c \sqrt{\frac{17}{462}} \right)^{-1} \mathbf{X}, \\ \bar{\mathbf{Y}} &= \left(\sqrt[4]{\frac{17}{462}} \right)^{-1} \mathbf{Y}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Así, la Ec. (3.80) se reescribe en forma más simple como,

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} = r \bar{A} + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{X}}} - i \frac{\partial^2}{\partial \bar{\mathbf{Y}}^2} \right)^2 \bar{A} - \bar{A} |\bar{A}|^2, \quad (3.82)$$

en donde $r = \bar{R}k_c^2/720$. La Ec. (3.82) describe los cambios que tienen los rollos bajo la influencia de la perturbación r . Así, en esta aproximación, válida únicamente para número de onda pequeño, cercana a la criticalidad la ecuación para la amplitud de rollos convectivos posee la misma estructura que las que surgen en otros problemas de estabilidad hidrodinámica. En particular, tiene la misma forma que la del fluido newtoniano. La única diferencia se encuentra en la magnitud de la amplitud, que depende de los parámetros viscoelásticos (ver Ec. (3.81)). La información sobre la inestabilidad de estos patrones, obtenida de la Ec. (3.82), ha sido ampliamente estudiada y puede hallarse en Maneville y Godréche [71], Manneville [72] y más recientemente, en la revisión de Hoyle [67]. De acuerdo con Ec. (3.82), los rollos convectivos pueden tener inestabilidades de Eckhaus [59, 73] en las cuales los patrones pueden comprimirse o expandirse. Esta inestabilidad puede darse en situaciones donde la longitud de onda es muy larga, que corresponde a este caso, y eventualmente puede llevar a la creación o eliminación de rollos mientras el sistema trata de ajustarse a una longitud de onda más favorable. Otro tipo de inestabilidad en rollos es la de zigzag [59, 61] la cual sucede cuando

se desprecian las perturbaciones que varían en \mathbf{X} y se crean ondulaciones en los rollos a lo largo de su eje. Esta inestabilidad también aparece cuando la longitud de onda es muy larga, y el sistema trata de reducirla debido a que es difícil mantener una celda convectiva grande.

Siguiendo los pasos de Hoyle [67, 68], hasta el momento se tiene un patrón de rollos perfecto con número de onda \mathbb{K} un poco separado de su valor crítico definido por,

$$\bar{A} = \bar{A}_0 e^{i\mathbb{K}\mathbf{X}}, \quad (3.83)$$

en donde \bar{A}_0 y \mathbb{K} están relacionados por,

$$\bar{A}_0^2 = r - \mathbb{K}^2. \quad (3.84)$$

Entonces, se investiga la inestabilidad de los rollos representados por la Ec. (3.83) aplicando pequeñas perturbaciones a su amplitud y fase. Esto se expresa como $\bar{A} = \bar{A}_0 (1 + \bar{A}_1) \exp [i\mathbb{K}\mathbf{X} + \phi]$, donde ambas $\bar{A}_1, \phi \ll 1$. Al sustituir esta última expresión para \bar{A} en Ec. (3.80) se obtienen las siguientes ecuaciones,

$$\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \bar{t}} = -2\bar{A}_0^2 \bar{A}_1 - 2\mathbb{K} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial^2 \bar{A}_1}{\partial \mathbf{X}^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{Y}^2} + \mathbb{K} \frac{\partial^2 \bar{A}_1}{\partial \mathbf{Y}^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 \bar{A}_1}{\partial \mathbf{Y}^4}, \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} = 2\mathbb{K} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{X}^2} - \frac{\partial^3 \bar{A}_1}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{Y}^2} + \mathbb{K} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{Y}^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \mathbf{Y}^4}, \quad (3.86)$$

que describen la evolución de las perturbaciones a la amplitud y fase de los rollos. Se consideran ahora, las siguientes representaciones para las perturbaciones $\bar{A}_1 = \tilde{A}_1 \exp [\Sigma \bar{t} + i\tilde{k}_X \mathbf{X} + i\tilde{k}_Y \mathbf{Y}]$, y $\phi = \tilde{\phi} \exp [\Sigma \bar{t} + i\tilde{k}_X \mathbf{X} + i\tilde{k}_Y \mathbf{Y}]$, donde \tilde{k}_X y \tilde{k}_Y son las componentes de la perturbación al número de onda crítico. Al sustituir lo anterior en Ecs. (3.85-3.86) se obtiene un problema de valor propio para la razón de crecimiento Σ . El resultado es,

$$\Sigma_1 = -2\bar{A}_0^2 + O(\tilde{k}_X^2), \quad (3.87)$$

$$\Sigma_2 = -\tilde{k}_X^2 \left(1 - \frac{2\mathbb{K}}{\bar{A}_0^2} \right) - \mathbb{K} \tilde{k}_Y^2 - \frac{2\mathbb{K}^4 \tilde{k}_X^4}{\bar{A}_0^6} + \frac{2\mathbb{K} \tilde{k}_X^2 \tilde{k}_Y^2}{\bar{A}_0^2} - \frac{\tilde{k}_Y^4}{4} + O(\tilde{k}_X^6). \quad (3.88)$$

La Ec. (3.87) corresponde a \tilde{A}_1 y Ec. (3.88) a $\tilde{\phi}$. Debe notarse que en la Ec. (3.87) que $\Sigma_1 < 0$ y por lo tanto los rollos son estables a perturbaciones en su amplitud. Los \tilde{k}_X y \tilde{k}_Y en la Ec. (3.88) dan lugar a dos diferentes inestabilidades de fase. Cuando $\tilde{k}_Y = 0$ y usando la Ec. (3.84), la Ec. (3.88) se simplifica a

$\Sigma_2 = -\tilde{k}_X^2 (r - 3\mathbb{K}^2) / (r - \mathbb{K}^2)$. Σ_2 es positiva para $r < 3\mathbb{K}^2$. Entonces, dadas las condiciones anteriores surge la inestabilidad de Eckhaus, descrita arriba. Por otro lado, cuando $\tilde{k}_X = 0$, la Σ_2 también es positiva pero para $\mathbb{K} < 0$ y $\tilde{k}_Y^2 < -4\mathbb{K}$, lo cual da origen a las inestabilidades de zigzag descritas anteriormente.

Inestabilidad de patrones cuadrados

Los patrones cuadrados son comunes en las celdas de convección natural. Éstos han sido reportados en un fluido newtoniano confinado entre dos paredes pobremente conductoras por Busse y Riahi [74], Proctor [21], Riahi [75], Le Gal y Croquette [76]. También en la convección forzada de un fluido newtoniano confinado entre dos paredes pobremente conductoras por Cox [69, 70], y en el fenómeno de convección con doble difusión por Knobloch y Proctor [77], entre otros.

Antes de continuar, se da una explicación de la naturaleza de los patrones cuadrados. Los patrones cuadrados consisten de dos conjuntos de rollos superpuestos con sus ejes en ángulo recto entre si. El mecanismo físico a través del cual se forman los cuadrados ha sido ya reportado experimentalmente por diversos investigadores [76] desde hace varios años. Al inicio de la convección natural, el patrón que surge es un conjunto de rollos axisimétricos que se desestabilizan a causa del forzamiento que lleva al sistema un poco lejos de la criticalidad y que se empiezan a ondular para después convertirse en el arreglo de cuadrados. Nuevamente, se hace la suposición de que la Ec. (3.75) satisface la siguiente solución,

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp(ik_c x) + A^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp(-ik_c x) \\ & + B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp(ik_c y) + B^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp(-ik_c y). \end{aligned} \quad (3.89)$$

No confundir la amplitud $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t})$ con el número de Biot usado en el capítulo anterior B . Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección anterior, se obtienen las ecuaciones de Ginzburg-Landau para las amplitudes de los dos conjuntos de rollos,

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} = r\bar{A} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \mathbf{X}^2} - \bar{A} \left(|\bar{A}|^2 + \frac{2}{3} |\bar{B}|^2 \right), \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{t}} = r\bar{B} + \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial \mathbf{Y}^2} - \bar{B} \left(|\bar{B}|^2 + \frac{2}{3} |\bar{A}|^2 \right), \quad (3.91)$$

las cuales también han sido escaladas de manera conveniente usando las Ecs. (3.81). Con un análisis similar al realizado en el apartado anterior siguiendo el procedimiento de Hoyle [67, 68], se determinó que, para el presente problema, los cuadrados son patrones estables a perturbaciones en su amplitud y además, el sistema

tiene preferencia a su configuración con respecto a los rollos cuando $r > 0$. Por otro lado, la estructura de los términos cruzados en las Ecs. (3.90-3.91), indica que los cuadrados pueden tener inestabilidad rectangular, es decir, que pueden comprimirse en una dirección y dilatarse en la otra dando origen a rectángulos. También se determinó que la inestabilidad de cuadrados, en la que el patrón se comprime o se dilata en la misma proporción en ambas direcciones, no es posible en este caso (ver la revisión de Hoyle [67] para más detalles).

Inestabilidad de patrones hexagonales

Los patrones hexagonales son comunes en la naturaleza. Pueden aparecer en condiciones de convección en fluidos con viscosidad que depende de la temperatura como lo reportaron Palm [78], Busse [63], White [79]. En convección forzada como lo reportó Cox [69, 70]. En convección termocapilar como lo reportaron Golovin et al. [80], Shtilman y Sivashinsky [81], entre otros.

Un patrón de celdas hexagonales en realidad está formado por un conjunto de tres rollos que se encuentran a un ángulo de 120° entre si. La forma que tiene la solución en este caso y que satisface Ec. (3.75) es,

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp(ik_c x) + A^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp(-ik_c x) \\ & + B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp\left[\frac{ik_c}{2}(-x + \sqrt{3}y)\right] + B^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp\left[-\frac{ik_c}{2}(-x + \sqrt{3}y)\right] \\ & + C(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp\left[-\frac{ik_c}{2}(x + \sqrt{3}y)\right] + C^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \bar{t}) \exp\left[\frac{ik_c}{2}(x + \sqrt{3}y)\right]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

El proceso que se sigue para obtener las ecuaciones de Ginzburg-Landau correspondientes es el mismo que en las secciones anteriores. Nótese, que todos los rollos poseen el mismo número de onda crítico. El conjunto de ecuaciones que se obtiene, se reescribe usando los escalamientos dados en Ecs. (3.81),

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} = r\bar{A} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \mathbf{X}^2} - \bar{A}(|\bar{A}|^2 + |\bar{B}|^2 + |\bar{C}|^2), \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{t}} = r\bar{B} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{X}^2} + 3\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{Y}^2}\right)\bar{B} - \bar{B}(|\bar{A}|^2 + |\bar{B}|^2 + |\bar{C}|^2), \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{t}} = r\bar{C} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{X}^2} + 3\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{Y}^2}\right)\bar{C} - \bar{C}(|\bar{A}|^2 + |\bar{B}|^2 + |\bar{C}|^2). \quad (3.95)$$

Las Ecs. (3.93-3.95) representan la evolución de los patrones hexagonales y a la vez expresan de manera general los dos casos anteriores: rollos y cuadrados. Es decir, que los patrones hexagonales pueden ser inestables a cuadrados y

rollos. Los hexágonos pueden transformarse en cuadrados o rectángulos si dos de las amplitudes, en las Ecs. (3.93-3.95), son iguales. Los hexágonos también pueden transformarse en rollos cuando dos de las amplitudes son cero en las Ecs. (3.93-3.95).

Considérese un patrón hexagonal conformado por tres conjuntos de rollos con números de onda que están ligeramente separados de k_c y definidos como,

$$\bar{A} = \bar{A}_0 e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}}, \quad \bar{B} = \bar{A}_0 e^{\frac{i\mathbf{K}}{2}(-\mathbf{X} + \sqrt{3}\mathbf{Y})}, \quad \bar{C} = \bar{A}_0 e^{-\frac{i\mathbf{K}}{2}(\mathbf{X} + \sqrt{3}\mathbf{Y})}, \quad (3.96)$$

en donde las constantes \bar{A}_0 y \mathbf{K} están relacionados como sigue,

$$\bar{A}_0^2 = \frac{r - \mathbf{K}^2}{3}. \quad (3.97)$$

A continuación, se muestra en la Fig. (3.2) un diagrama de bifurcación para los patrones hexagonales. Este diagrama se construyó a partir de las Ecs. (3.84) y (3.97). Las diferentes curvas señalan la estabilidad de los rollos y hexágonos, donde la línea sólida indica una situación estable y la línea cortada indica una situación inestable. El modo mixto representado por la línea horizontal corresponde al caso en el que ambos, rollos y hexágonos, interactúan y compiten para ser el patrón dominante. Es de hacer notar que inicialmente, al separarnos un poco de la criticalidad, los hexágonos son estables hasta el punto que su curva corta la correspondiente al modo mixto. Nótese la región donde compiten rollos y hexágonos por dominar, señalada por los dos puntos de cruce de la línea horizontal cortada de modo mixto en la que ambos patrones son estables. Sin embargo, después de que la línea para modo mixto y la correspondiente a hexágonos se intersectan éstos últimos patrones convectivos son inestables y sólo los rollos son estables. Para construir el diagrama en la Fig. (3.2) se consideró un valor de $r = 0.1$.

3.4 Resultados

Uno de los resultados más importantes del análisis no lineal de la estabilidad del presente sistema físico, fue el de incluir efectos inerciales a través del término no lineal acoplado con una ecuación extra de evolución de longitud de onda larga, las Ecs. (3.63-3.64), para los tres fluidos viscoelásticos considerados en la aproximación a número de onda pequeño. Esta ecuación es novedosa ya que añade efectos importantes en la inestabilidad de los patrones convectivos. Las Ecs. (3.63-3.64) pueden reducirse a las reportadas anteriormente por Pismen [56] al eliminar los efectos viscoelásticos. Además, se determinó que las ecuaciones de evolución Ecs. (3.63-3.64) sólo permiten pequeños efectos viscoelásticos con F y E no mayores a

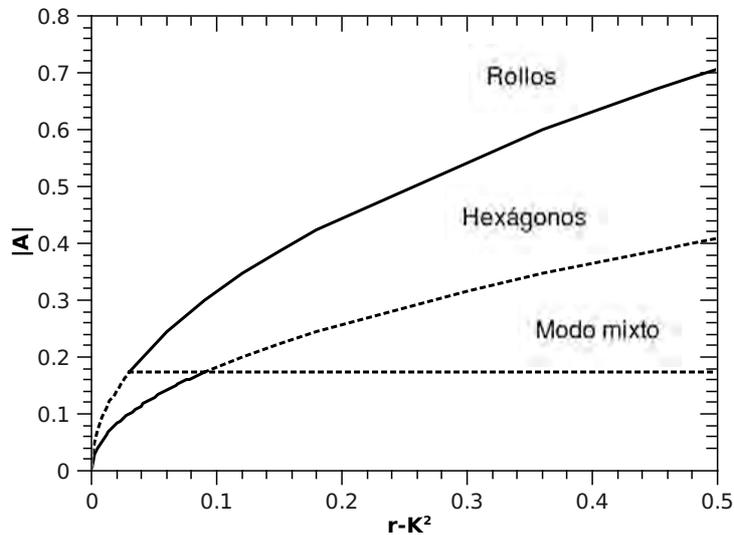


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación de los patrones hexagonales. La línea sólida corresponde a una condición estable y la línea cortada corresponde a una condición inestable.

0.032 y 0.1, respectivamente. Por otro lado, se encuentra al investigar la estabilidad de los patrones convectivos que debido al orden de aproximación a número de onda pequeño considerado la ecuación no lineal extra que se da en la Ec. (3.64) inesperadamente no proporciona una contribución al problema, implicando que el fluido viscoelástico se comporta de manera similar al newtoniano. Es probable que con un orden de aproximación mayor las contribuciones de los efectos viscoelásticos en la Ec. (3.64) modifiquen no solo el tamaño de los patrones, sino también su comportamiento. Por ello, las ecuaciones de Ginzburg-Landau obtenidas, que describen el comportamiento de las amplitudes de las celdas convectivas, no incluyen los efectos de la vorticidad arriba mencionados. Por otro lado, con un reescalamiento adecuado fue posible expresar la ecuación para la amplitud de forma canónica la cual es similar a la que se encuentra en el caso newtoniano. Es decir, que los efectos viscoelásticos no influirán en la selección de patrones; pero si influirán en el tamaño de los mismos.

Capítulo 4

Conclusiones

4.1 Convección natural en una capa de fluido viscoelástico de Maxwell

Se encontraron resultados muy interesantes cuando se tomaron en cuenta los efectos de las conductividades térmicas y espesores de las paredes en la convección lineal de una capa de fluido viscoelástico de Maxwell. El caso considerado aquí es el de un sistema que tiene paredes con igual conductividad térmica y espesor. Los números de Prandtl considerados fueron $Pr = 1, 10$ y los tiempos de relajación representativos, $F = 0.1, 100$.

En el caso de $Pr = 1$, se mostró que, en las situaciones de $F = 0.1$ y $F = 100$, valores grandes del cociente de conductividades térmicas X desestabiliza al sistema. Nótese que el efecto de los espesores de las paredes es más importante aquí cuando $F = 0.1$ que cuando $F = 100$. Una situación muy interesante ocurre para $F = 0.1$ debido a la competencia entre la convección estacionaria y la convección oscilatoria. Esta última e interesante situación puede observarse en la Fig. 2.4(c) en las curvas de ω_c vs. X cuando ω_c cae a cero y X crece. En la Fig. 2.6 donde se muestra que los movimientos oscilatorios dominan la inestabilidad del sistema cuando Pr crece hasta aproximadamente $Pr = 1.4$. En los puntos de codimensión dos, correspondientes a diferentes valores de D , la convección se convierte en estacionaria. Esto se muestra en las curvas de la Fig. 2.4(a) para R_c vs. X como una caída súbita del número de Rayleigh crítico. Un comportamiento similar puede observarse en las curvas para k_c vs. X de la Fig. 2.4(b).

Cuando $Pr = 10$ y $F = 0.1$ el efecto relativo del espesor de la pared se reduce considerablemente. Cuando $F = 100$ las magnitudes de los valores críticos son tan pequeños que es difícil notar un efecto importante del espesor de las paredes. Se encontró que, dependiendo del valor del tiempo de relajación F , el cociente de

conductividades X juega un rol diferente. Cuando F es pequeña X estabiliza y cuando F es grande X desestabiliza. Estos resultados contrastan con los de convección estacionaria en un fluido Newtoniano [49, 50] donde el sistema se vuelve mas inestable cuando el valor de X crece.

La interpretación física de lo expuesto es complicada debido al efecto combinado de los parámetros involucrados. Primero se aborda solo el efecto de X y D cuando F es grande. Del cociente X , que permite considerar desde paredes con muy buena conductividad térmica hasta paredes aislantes, por ejemplo puede decirse que para X pequeña el fluido tiene una conductividad térmica proporcional originando la estabilización del sistema como se muestra en las Figs. 2.4(a)-2.4(f) y Figs. 2.5(a)-2.5(f). Es decir que hay un decremento en la temperatura a través de la capa de fluido y no de las paredes. Una situación inversa se da cuando X es grande. El cociente D es importante para valores intermedios de X y puede ser interpretado en términos del tiempo de difusión térmico vertical (espesor/difusividad térmica) en la pared. Por ejemplo, si se considera una D grande para la pared inferior también se tiene un incremento del tiempo de difusión térmico a través de un mayor espesor de la pared o de la disminución de su difusividad térmica implicando que el tiempo que toma al flujo de calor alcanzar la capa de fluido es mayor y por lo tanto el sistema es más estable. Una situación inversa se observa cuando D es pequeña. Por otro lado, el efecto de la viscoelasticidad también se aprecia en las magnitudes de R_c , k_c y ω_c ya que indistintamente del valor de Pr el sistema siempre es más inestable cuando F es grande. Cuando F es pequeña, las curvas de criticalidad que se muestran en las Figs. 2.4(a)-2.4(c) y Figs. 2.5(a)-2.5(c) presentan un comportamiento opuesto al que se encuentra con F grande y se atribuye únicamente a F . La interpretación de éstos resultados es todavía más complicado ya que involucra convección estacionaria compitiendo con la convección oscilatoria por desestabilizar el sistema. Tal interpretación debe darse en términos de un tiempo de difusión térmico vertical de la capa de fluido considerando también a X y D .

4.2 Selección de patrones convectivos

Se hicieron avances importantes en la estabilidad hidrodinámica no lineal de una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd confinada entre dos paredes sólidas de conductividad pobre usando la aproximación de número de onda pequeño. Por un lado, se tomaron en cuenta las contribuciones de los efectos no lineales de la vorticidad a través de un término que debe ser evaluado con una ecuación extra, la Ec. (3.64). Por otro lado, se analizó la inestabilidad de rollos, cuadrados y hexágonos en la capa de fluido viscoelástico. En la aproximación a número de onda

pequeño considerada no hubo contribución de la vorticidad debido a la simetría en las derivadas de la Ec. (3.64). También se halló que las ecuaciones de evolución permiten únicamente pequeños efectos viscoelásticos limitando las posibilidades del análisis de estabilidad, esto es F no puede ser mayor que 0.032. Físicamente, se puede decir que cerca del inicio de la convección los efectos de la vorticidad son pequeños, y no afectan los patrones convectivos. Se requiere hacer un análisis numérico completo del sistema de dos ecuaciones con un número de Rayleigh más lejos de la criticalidad para determinar la importancia de la contribución de la vorticidad en la convección natural de los tres fluidos viscoelásticos investigados.

Las inestabilidades de los rollos, cuadrados y hexágonos se estudiaron por medio de sus ecuaciones de Ginzburg-Landau. Se determinaron las condiciones bajo las cuales se dan cada uno de ellos cuando el sistema está un poco lejos de la criticalidad. Aunque, al inicio de la convección los patrones formados son puramente rollos, el sistema puede buscar una mejor configuración a través de los cuadrados y hexágonos. Sin embargo, como se muestra en Fig. (3.2) el patrón de hexágonos también puede desestabilizarse. Además, se determinó que debido a que las ecuaciones de Ginzburg-Landau halladas pueden ser reescritas en forma canónica (ver Hoyle [67, 68]), los efectos viscoelásticos no influyen en la forma que adquieren los patrones convectivos dominantes, influyendo únicamente en el tamaño de los mismos. Debido a la no linealidad tanto de las ecuaciones constitutivas de los fluidos viscoelásticos considerados como de la ecuación de balance de momento los resultados encontrados son totalmente inesperados; pero cabe la posibilidad de que el empleo de un método más general para atacar el problema no lineal sí incluya los efectos que la presente aproximación no pudo.

4.3 Investigación en el futuro

En la línea de investigación que se siguió en el presente proyecto hay todavía muchas cosas por hacer. Algunos problemas inmediatos a considerar son el de la estabilidad lineal de una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd calentada por abajo incluyendo las propiedades térmicas y geométricas de las paredes, donde será de interés hacer comparaciones con los resultados aquí expuestos y ya publicados. Otra posibilidad, es la de incluir los efectos de las paredes laterales con o sin calentamiento, lo cual es de interés en muchas aplicaciones donde los movimientos convectivos están presentes. Una cuestión importante es la de ampliar en el futuro el carácter de la investigación al área experimental con el objetivo de complementar y enriquecer los trabajos que se lleven a cabo.

Apéndices

Apéndice A

Otra aproximación del problema lineal con el método de Galerkin

Aquí se expone otra aproximación que es la del método de Galerkin [2]. Con este método se pueden obtener expresiones asintóticas más simples y manejables para el presente problema de valor propio. Debido a que las magnitudes resultantes de (R, ω, k, Pr) (ver Fig. 2.4-2.5), no fue posible obtener expresiones asintóticas de R y ω de la fórmula dada en Ec. (2.42). Además, la presencia de $q = \sqrt{k^2 + \sigma}$ en el argumento de varias funciones hiperbólicas hace difícil obtener expresiones asintóticas.

De esta manera, el proceso para resolver el problema de valor propio dado por el sistema de (2.28-2.29) sujeto a las condiciones de frontera Ec. (2.30) y Ec. (2.37) consiste en considerar las siguientes funciones de prueba para W y ω , las cuales satisfacen las condiciones de frontera Ec. (2.30) y Ec. (2.37),

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} E_n [z(z-1)]^{2+n}, \quad (\text{A.1})$$

$$\Theta = G_0 (1 + Bz - Bz^2) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n z^{n+1} \left(z - \frac{n+2+B}{n+1+B} \right). \quad (\text{A.2})$$

Después de sustituir las W y Θ dadas en las Ec. (A.1) y Ec. (A.2) en el sistema de Ecs. (2.28-2.29) se forma un residuo que se hace ortogonal a las funciones de prueba correspondientes,

$$\begin{vmatrix} \int_0^1 W_m L_1 W_n dz & - (1 + F\sigma) Rk^2 \int_0^1 W_m \Theta_n dz \\ \int_0^1 \Theta_m W_n dz & - \int_0^1 \Theta_m L_2 \Theta_n dz \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{A.3})$$

endonde los operadores L_1 y L_2 están definidos como,

$$L_1 = \frac{\sigma}{Pr} (1 + F\sigma) \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2,$$
$$L_2 = \sigma - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right).$$

El determinante Ec. (A.3) es una condición de solubilidad de la cual podemos calcular R . Las primera y segunda aproximación de R pueden ser fácilmente calculadas del determinante Ec. (A.3). Estas expresiones analíticas de R no se presentan por ser complejas. En las siguientes secciones estas aproximaciones se usan para dar las expresiones asintóticas de R y ω .

Apéndice B

Expresiones asintóticas del problema lineal para $Pr \rightarrow \infty$

En esta sección se presentan expresiones asintóticas de R y ω calculadas para el caso de $Pr \rightarrow \infty$. Se tomaron algunas ideas del trabajo de Kolkka y Ierley [27] que fueron usadas para los desarrollos de R y ω . Nótese que las fórmulas son grandes y complicadas debido a que éstas incluyen el cociente de las conductividades térmicas, el cual no había sido presentado hasta ahora en el problema viscoelástico.

Como se mencionó arriba, se realizaron otras dos aproximaciones para los cocientes de espesores. Esto afecta la función hiperbólica que aparece en el número de Biot. De esta manera, cuando tenemos $D \rightarrow 0$ el número de Biot se aproxima por $B = (XD)^{-1}$ y cuando tenemos $D \rightarrow \infty$ éste es $B = qX^{-1}$, respectivamente.

Usando la aproximación de primer orden del método de Galerkin Ec. (A.3) algunas expresiones de R y ω fueron calculadas.

B.1 Caso de $Pr \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 0$ y $D \rightarrow 0$

Aquí se usó el siguiente esquema de desarrollos

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_0^2 Pr^{\frac{3}{2}} + \omega_1^2 Pr + \omega_2^2 Pr^{\frac{1}{2}} + O(1), \\ k &= k_0 Pr^{\frac{1}{4}} + O\left(Pr^{-\frac{3}{4}}\right),\end{aligned}$$

y las expresiones resultantes son

$$\begin{aligned}
R = C_5 & \left[\frac{C_6}{F^2} + \frac{1}{Fk_0^2 \sqrt{Pr}} \left[C_6 F k_0^4 + 14 + 320XD + 2940X^2D^2 + 12600X^3D^3 \right. \right. \\
& + 21600X^4D^4 \left. \right] + \frac{1}{Fk_0^4 Pr} \left[(22 + 400XD + 2820X^2D^2 + 9000X^3D^3 \right. \\
& + 10800X^4D^4) Fk_0^4 + C_6 k_0^4 + 364 + 7440XD + 62640X^2D^2 \\
& \left. + 259200X^3D^3 + 453600X^4D^4 \right] + O\left(\frac{1}{Pr^{\frac{3}{2}}}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega^2 = \frac{1}{1 + 30X^2D^2 + 10XD} & \left[C_6 \frac{k_0^2 Pr^{\frac{3}{2}}}{F} + (12F - 1) C_6 \frac{Pr}{F^2} + \left[360C_6F \right. \right. \\
& - 2 \left(1 + 40XD + 540X^2D^2 + 2700X^3D^3 + 5400X^4D^4 \right) \left. \right] \frac{\sqrt{Pr}}{F^2 k_0^2} \\
& - \left[C_6 (k_0^4 + 4320F) + 340 + 6480XD + 50400X^2D^2 + 194400X^3D^3 \right. \\
& \left. + 324000X^4D^4 \right] \frac{1}{k_0^4 F^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{Pr}}\right).
\end{aligned}$$

B.2 Caso de $Pr \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 0$ y $D \rightarrow \infty$

Aquí, el esquema de desarrollos fue modificado para incluir el efecto del cociente de conductividades X como sigue,

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \omega_0^2 Pr + \omega_1^2 Pr^{\frac{1}{2}} + \omega_2^2 + O\left(Pr^{-\frac{1}{2}}\right), \\
k &= k_0 + O\left(Pr^{-1}\right),
\end{aligned}$$

y las expresiones resultantes son

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1498}{675k_0^2 F^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{k_0^4 + 24k_0^2 + 504} \sqrt{12 + k_0^2}}{\sqrt{Pr}} \\
&+ \frac{2996X \sqrt{2} (k_0^6 + 36k_0^4 + 792k_0^2 + 6048)}{2025k_0^2 (k_0^4 + 24k_0^2 + 504)^{\frac{3}{4}} (12 + k_0^2)^{\frac{1}{4}} F^{\frac{5}{4}} Pr^{\frac{3}{4}} (1 + X)} + O\left(\frac{1}{Pr}\right), \\
\omega^2 &= \frac{(k_0^4 + 24k_0^2 + 504) Pr}{(12 + k_0^2) F} - \sqrt{\frac{(k_0^4 + 24k_0^2 + 504)}{(12 + k_0^2) F^3}} \sqrt{Pr} + O(1),
\end{aligned}$$

en donde los coeficientes C_5 y C_6 dependen de los parámetros (X, D) , y que están definidos como sigue,

$$\begin{aligned}
C_5 &= \frac{28}{3(3 + 14XD)^2 (1 + 30X^2D^2 + 10XD)}, \\
C_6 &= 1 + 20XD + 160X^2D^2 + 600X^3D^3 + 900X^4D^4.
\end{aligned}$$

B.3 Caso de $Pr \rightarrow \infty$, $F \rightarrow \infty$ y $D \rightarrow 0$

Este caso fue calculado independientemente con la aproximación de segundo orden del método de Galerkin Ec. (A.3). Es necesario mencionar que la primera aproximación no es buena en este límite. Para los casos de $D \rightarrow 0$ y $D \rightarrow \infty$ fue considerado primero un desarrollo de dos términos con respecto a $Pr \rightarrow \infty$ y después se usaron los siguientes desarrollos para $F \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \omega_0^2 F^{-1} + \omega_1^2 F^{-2} + O(F^{-3}), \\
k &= k_0 + O(F^{-1}).
\end{aligned}$$

De esta manera, para $D \rightarrow 0$ se tiene,

$$\begin{aligned}
R = C_7 & \left[\left(X^2 D^2 + \frac{XD}{3} + \frac{1}{30} \right) (5k_0^8 + 1056k_0^6 + 104544k_0^4 + 2471040k_0^2 \right. \\
& + 40772160) \left[\frac{(3k_0^4 + 520k_0^2 + 40040) X^2 D^2}{15} + \frac{(31k_0^4 + 5772k_0^2 + 463320) XD}{405} \right. \\
& \left. \frac{19k_0^4}{2430} + \frac{598k_0^2}{405} + \frac{16588}{135} \right] + \frac{1}{Pr} \left[\frac{k_0^2}{15} (15k_0^{10} + 5484k_0^8 + 949520k_0^6 \right. \\
& + 86898240k_0^4 + 4063625280k_0^2 + 38869459200) X^4 D^4 + \left(\frac{58k_0^{12}}{81} + \frac{36608k_0^{10}}{135} \right. \\
& \left. \left. + \frac{241608k_0^8}{5} + \frac{22600864k_0^6}{5} + 218366720k_0^4 + 2528477952k_0^2 + 5182594560 \right) \right. \\
& X^3 D^3 + \left(\frac{k_0^{12}}{5} + \frac{157118k_0^{12}}{2025} + \frac{1909504k_0^8}{135} + \frac{12151568k_0^6}{9} + \frac{1008587008k_0^4}{15} \right. \\
& + 905645312k_0^2 + 3109556736) X^2 D^2 + \left(\frac{94k_0^{12}}{3645} + \frac{61864k_0^{10}}{6075} + \frac{1276984k_0^8}{675} \right. \\
& \left. \left. + \frac{41371616k_0^6}{225} + \frac{141050624k_0^4}{15} + \frac{425641216k_0^2}{3} + 617723392 \right) XD \right. \\
& + \frac{(k_0^2 + 10)}{72900} (95k_0^{10} + 36942k_0^8 + 6774768k_0^6 + 637034112k_0^4 \\
& \left. + 30440494656k_0^2 + 295761248640) \right] + O\left(\frac{1}{Pr^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega^2 = & (5k_0^8 + 1056k_0^6 + 104544k_0^4 + 2471040k_0^2 + 40772160) \left[486(X^2 D^2 \right. \\
& + \frac{31XD}{81} + \frac{19}{486}) k_0^4 + 84240 \left(X^2 D^2 + \frac{37XD}{90} + \frac{23}{540} \right) k_0^2 + 6486480 \\
& \left(X^2 D^2 + \frac{3XD}{7} + \frac{29}{630} \right) \left[(2430k_0^{10} + 888408k_0^8 + 153822240k_0^6 \right. \\
& + 14077514880k_0^4 + 658307295360k_0^2 + 6296852390400) X^2 D^2 \\
& + (930k_0^{10} + 357948k_0^8 + 64370592k_0^6 + 5983870464k_0^4 + 283040334720k_0^2 \\
& + 2728636035840) XD + 95k_0^{10} + 36942k_0^8 + 6774768k_0^6 \\
& \left. + 637034112k_0^4 + 30440494656k_0^2 + 295761248640 \right]^{-1} Pr + O(Pr^2).
\end{aligned}$$

B.4 Caso de $Pr \rightarrow \infty$, $F \rightarrow \infty$ y $D \rightarrow \infty$

Aquí, las expresiones para $D \rightarrow \infty$ son,

$$\begin{aligned}
 R = C_8 & \left[(5k_0^8 + 1056k_0^6 + 104544k_0^4 + 2471040k_0^2 + 40772160) \right. \\
 & (14580k_0^4 + 2527200k_0^2 + 194594400) k_0 X^4 + (10080k_0^6 + 1797660k_0^4 \\
 & + 141523200k_0^2 + 194594400) X^3 + (2832k_0^6 + 519660k_0^4 + 41614560k_0^2 \\
 & + 64864800) k_0 X^2 + (374k_0^6 + 70248k_0^4 + 5728320k_0^2 + 4942080) k_0^2 X \\
 & + (19k_0^4 + 3588k_0^2 + 298584) k_0^5 \left. \right] + (30k_0 X + 60X + 10k_0 + 10k_0^2 X \\
 & + k_0^3) \left[(2430k_0^{10} + 888408k_0^8 + 153822240k_0^6 + 14077514880k_0^4 \right. \\
 & + 658307295360k_0^2 + 6296852390400) X^2 + (930k_0^{10} + 357948k_0^8 \\
 & + 64370592k_0^6 + 5983870464k_0^4 + 283040334720k_0^2 + 2728636035840) \\
 & k_0 X + (95k_0^{10} + 36942k_0^8 + 6774768k_0^6 + 637034112k_0^4 + 30440494656k_0^2 \\
 & \left. + 295761248640) k_0^2 \right] \frac{1}{Pr} + O\left(\frac{1}{Pr^2}\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega^2 = & (5k_0^8 + 1056k_0^6 + 104544k_0^4 + 2471040k_0^2 + 40772160) \left[19k_0^6 \right. \\
 & + 186k_0^5 X + (3588 + 486X^2) k_0^4 + 34632Xk_0^3 + (298584 + 84240X^2) k_0^2 \\
 & + 2779920Xk_0 + 6486480X^2 \left. \right] \left[95k_0^{12} + 930k_0^{11} X + (2430X^2 + 36942) \right. \\
 & k_0^{10} + 357948k_0^9 X + (888408X^2 + 6774768) k_0^8 + 64370592k_0^7 X \\
 & + (153822240X^2 + 637034112) k_0^6 + 5983870464k_0^5 X + (14077514880X^2 \\
 & + 30440494656) k_0^4 + 283040334720k_0^3 X + (658307295360X^2 \\
 & + 295761248640) k_0^2 + 2728636035840Xk_0 + 6296852390400X^2 \left. \right]^{-1} Pr \\
 & + O(Pr^2),
 \end{aligned}$$

en donde C_7 y C_8 son coeficientes grandes que dependen de los parámetros (F, k_0, X, D) , y que se definen como sigue,

$$\begin{aligned}
C_7 &= \frac{350}{297k_0^2F} \left[\left(X^2D^2 + \frac{31XD}{81} + \frac{19}{486} \right) k_0^4 + \left(\frac{520X^2D^2}{30} + \frac{1924XD}{27} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{598}{81} \right) k_0^2 + \frac{40040X^2D^2}{3} + 5720XD + \frac{16588}{27} \right]^{-2}, \\
C_8 &= \frac{7}{433026k_0^3F} \left[\left(k_0^4 + \frac{520k_0^2}{3} + \frac{40040}{3} \right) X^2 + \frac{31}{81} \left(k_0^4 + \frac{5772k_0^2}{31} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{463320}{31} \right) k_0X + \frac{19}{486} \left(k_0^4 + \frac{3588k_0^2}{19} + \frac{298584}{19} \right) \right]^{-2}.
\end{aligned}$$

Apéndice C

Expresiones asintóticas del problema lineal para $F \rightarrow \infty$

En este límite, fue necesaria la segunda aproximación del método de Galerkin Ec. (A.3). Nótese que las aproximaciones asintóticas presentadas en este apéndice son válidas para cualquier número de Prandtl Pr . Para ambos casos, $D \rightarrow 0$ y $D \rightarrow \infty$, se usó el siguiente esquema de desarrollos para $F \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_0^2 F^{-1} + \omega_1^2 F^{-2} + O(F^{-3}), \\ k &= k_0 + O(F^{-1}).\end{aligned}$$

C.1 Caso de $D \rightarrow 0$

Las expresiones para cualquier número de Prandtl son

$$\begin{aligned}
R = C_{10} & \left[C_9 \left[\left(+ \frac{254k_0^{12}}{10989} + \frac{41264k_0^{10}}{4995} + \frac{1666568k_0^8}{1665} \right. \right. \right. \\
& + \frac{4735312}{111}k_0^6 + \frac{9710272}{37}k_0^4 - \frac{286256256}{37}k_0^2 - \frac{5568076800}{37} \left. \left. \right) X^2 D^2 \right. \\
& \left. \left(\frac{347k_0^{12}}{32967} + \frac{58952k_0^{10}}{14985} + \frac{2536972k_0^8}{4995} + \frac{42840944k_0^6}{1665} + \frac{222100736k_0^4}{555} \right. \right. \\
& + \frac{38310272k_0^2}{37} - \frac{1540501248}{37} \left. \left. \right) XD + \frac{659k_0^{12}}{593406} + \frac{19324k_0^{10}}{44955} \right. \\
& + \frac{863234k_0^8}{14985} + \frac{5256808k_0^6}{1665} + \frac{35244352k_0^4}{555} + \frac{260438464k_0^2}{555} \\
& \left. - \frac{89707904}{37} \right] + \left(k_0^8 + \frac{13456k_0^6}{37} + \frac{1400784k_0^4}{37} + \frac{25534080k_0^2}{37} \right. \\
& \left. + \frac{144555840}{37} \right) \left[\left(k_0^8 + \frac{1056k_0^6}{5} + \frac{235268k_0^4}{15} \right. \right. \\
& \left. \left. + 471328k_0^2 + 7673952 \right) X^2 D^2 + \left(\frac{31k_0^8}{81} + \frac{10912k_0^6}{135} + \frac{254276k_0^4}{45} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2432144k_0^2}{15} + 2914912 \right) XD + \frac{19k_0^8}{486} + \frac{3344k_0^6}{405} + \frac{74602k_0^4}{135} \right. \\
& \left. + \frac{129272k_0^2}{9} + \frac{1397968}{5} \right] \frac{1}{F} + O\left(\frac{1}{F^2}\right), \\
\omega^2 = & \frac{(5k_0^6 + 792k_0^4 + 52272k_0^2 + 617760 - 6C_9) Pr}{(5k_0^4 + 528k_0^2 + 5148) F} + O\left(\frac{1}{F^2}\right).
\end{aligned}$$

C.2 Caso de $D \rightarrow \infty$

Aquí, para cualquier número de Prandtl, la solución es

$$\begin{aligned}
R = C_{11} & \left[C_9 \left[\left(\frac{254k_0^{12}}{10989} + \frac{41264k_0^{10}}{4995} + \frac{1666568k_0^8}{1665} + \frac{4735312k_0^6}{111} + \frac{9710272k_0^4}{37} \right. \right. \right. \\
& - \frac{286256256k_0^2}{37} - \left. \left. \frac{5568076800}{37} \right) X^2 + \left(\frac{347k_0^{13}}{32967} + \frac{58952k_0^{11}}{14985} + \frac{2536972k_0^9}{4995} \right. \right. \\
& + \frac{42840944k_0^7}{1665} + \frac{222100736k_0^5}{555} + \frac{38310272}{37} k_0^3 - \left. \left. \frac{1540501248k_0}{37} \right) X \right. \\
& + \frac{659k_0^{14}}{593406} + \frac{19324}{44955} k_0^{12} + \frac{863234k_0^{10}}{14985} + \frac{5256808k_0^8}{1665} + \frac{35244352k_0^6}{555} \\
& + \left. \left. \frac{260438464k_0^4}{555} - \frac{89707904k_0^2}{37} \right] + \left(k_0^8 + \frac{13456k_0^6}{37} + \frac{1400784k_0^4}{37} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{25534080k_0^2}{37} + \frac{144555840}{37} \right) \left[\left(k_0^8 + \frac{1056k_0^6}{5} + \frac{235268k_0^4}{15} + 471328k_0^2 \right. \right. \\
& + \left. \left. 7673952 \right) X^2 + \left(\frac{31k_0^9}{81} + \frac{10912k_0^7}{135} + \frac{254276k_0^5}{45} + \frac{2432144k_0^3}{15} \right. \right. \\
& + \left. \left. 2914912k_0 \right) X + \frac{19k_0^{10}}{486} + \frac{3344k_0^8}{405} + \frac{74602k_0^6}{135} + \frac{129272k_0^4}{9} \right. \\
& + \left. \left. \frac{1397968k_0^2}{5} \right] \right] \frac{1}{F} + O\left(\frac{1}{F^2}\right), \\
\omega^2 = & \frac{(5k_0^6 + 792k_0^4 + 52272k_0^2 + 617760 - 6C_9) Pr}{(5k_0^4 + 528k_0^2 + 5148) F} + O\left(\frac{1}{F^2}\right),
\end{aligned}$$

en donde C_9 , C_{10} y C_{11} son coeficientes que dependen de los parametros (Pr , k_0 , X , D), y son definidos como,

$$C_9 = \sqrt{1221k_0^8 + 444048k_0^6 + 46225872k_0^4 + 842624640k_0^2 + 4770342720},$$

$$C_{10} = 3398598000 \frac{\left[\left(X^2 D^2 + \frac{XD}{3} + \frac{1}{30} \right) k_0^2 + 2XD + \frac{1}{3} \right] \left(k_0^4 + \frac{528k_0^2}{5} + \frac{5148}{5} \right)}{k_0^2 Pr \left(5k_0^6 + 792k_0^4 + 52272k_0^2 + 617760 - 6C_9 \right)}$$

$$\left[\left(13716X^2D^2 + 6246XD + 659 \right) k_0^6 + \left(3441636X^2D^2 + 1617660XD \right. \right.$$

$$\left. + 178530 \right) k_0^4 + 486 \left(C_9 + \frac{1395680}{3} \right) X^2D^2 k_0^2 + (186C_9 + 104339664)$$

$$XDk_0^2 + (19C_9 + 11768328) k_0^2 + 42120 (C_9 + 29172) X^2D^2$$

$$\left. + (17316C_9 + 602316000) XD + 71474832 + 1794C_9 \right]^{-2},$$

$$C_{11} = 3398598000 \frac{\left[\frac{k_0^3}{30} + \frac{k_0^2 X}{3} + \left(\frac{1}{3} + X^2 \right) k_0 + 2X \right] \left(k_0^4 + \frac{528k_0^2}{5} + \frac{5148}{5} \right)}{k_0 Pr \left(5k_0^6 + 792k_0^4 + 52272k_0^2 + 617760 - 6C_9 \right)}$$

$$\left[\left(13716k_0^6 + 3441636k_0^4 + (226100160 + 486C_9) k_0^2 + 1228724640 \right. \right.$$

$$\left. + 42120C_9 \right) X^2 + \left(6246k_0^7 + 1617660k_0^5 + (186C_9 + 104339664) k_0^3 \right.$$

$$\left. + (602316000 + 17316C_9) k_0 \right) X + 659k_0^8 + 178530k_0^6 + (11768328$$

$$\left. + 19C_9) k_0^4 + (71474832 + 1794C_9) k_0^2 \right]^{-2}.$$

Apéndice D

Expresiones analíticas del problema no lineal

En este apéndice se presentan algunas expresiones analíticas del desarrollo del análisis no lineal de la estabilidad hidrodinámica de una capa de fluido viscoelástico. Se ha usado la siguiente notación,

$$\nabla_{\perp} f(x, y) \wedge \nabla_{\perp} g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} T_{NL}^1 = & -\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 \chi) \wedge \nabla_{\perp} \chi'' + \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 \chi) \cdot (\nabla_{\perp} \psi) - \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 \chi) \cdot (\nabla_{\perp} \chi') \\ & + \nabla_{\perp} \psi \wedge \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 \chi) + (\nabla_{\perp}^2 \psi') (\nabla_{\perp}^2 \chi) - (\nabla_{\perp}^2 \psi) (\nabla_{\perp}^2 \chi'), \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} T_{NL}^2 = & \left(\frac{\partial^2 \chi''}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \chi''}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \chi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \chi'}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \\ & + (\nabla_{\perp}^4 \chi' + \nabla_{\perp}^2 \chi'') \nabla_{\perp}^2 \chi - \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 \psi - \psi'') \wedge \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 \chi) \\ & + \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^4 \chi + \nabla_{\perp}^2 \chi'') \wedge \nabla_{\perp} \psi - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla_{\perp}^2 \chi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + 2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla_{\perp}^2 \chi + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \chi'}{\partial x \partial y} \\ & + \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^4 \chi + \nabla_{\perp}^2 \chi'') \cdot (\nabla_{\perp} \chi'). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Las componentes del tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\tau}_1$ calculadas con la aproximación a número de onda pequeño se dan a continuación. A $O(1)$ éstas son,

$$\tau_{xz}^{(0)} = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z}{2} + \frac{1}{12} \right) R_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}, \quad (\text{D.4})$$

$$\tau_{yz}^{(0)} = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z}{2} + \frac{1}{12} \right) R_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}, \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^{(0)} = & \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{z}{6} \right) R_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} + (a+1) F(1-E) \left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{2} + \frac{z^2}{3} \right. \\ & \left. - \frac{z}{12} + \frac{1}{144} \right) R_0^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \tau_{yy}^{(0)} = & \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{z}{6} \right) R_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{y}^2} + (a+1) F(1-E) \left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{2} + \frac{z^2}{3} \right. \\ & \left. - \frac{z}{12} + \frac{1}{144} \right) R_0^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} \tau_{zz}^{(0)} = & - \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{z}{6} \right) R_0 \nabla_{\perp}^2 \Phi + (a-1) F(1-E) \left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{2} + \frac{z^2}{3} \right. \\ & \left. - \frac{z}{12} + \frac{1}{144} \right) R_0^2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(0)} = & \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{z}{6} \right) R_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + (a+1) F(1-E) \left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{2} + \frac{z^2}{3} \right. \\ & \left. - \frac{z}{12} + \frac{1}{144} \right) R_0^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Apéndice E

Artículo publicado

A continuación se muestra el artículo publicado [82] con resultados del análisis de estabilidad lineal de una capa de fluido viscoelástico en un gradiente de temperatura.

Provided for non-commercial research and education use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.



This article appeared in a journal published by Elsevier. The attached copy is furnished to the author for internal non-commercial research and education use, including for instruction at the authors institution and sharing with colleagues.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

<http://www.elsevier.com/copyright>



Contents lists available at ScienceDirect

International Journal of Heat and Mass Transfer

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijhmt

Effect of thermal conductivity and thickness of the walls in the convection of a viscoelastic Maxwell fluid layer

I. Pérez-Reyes*, L.A. Dávalos-Orozco

Instituto de Investigaciones en Materiales, Departamento de Polímeros, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Circuito Exterior S/N, Delegación Coyoacán, 04510 México D.F., Mexico

ARTICLE INFO

Article history:

Received 21 October 2010

Received in revised form 5 July 2011

Accepted 5 July 2011

Available online 9 August 2011

Keywords:

Convection

Viscoelastic fluid

Thermal conductivity

Wall thickness

ABSTRACT

Results for the linear thermoconvective stability of a layer of viscoelastic Maxwell fluid are presented. The stability problem is characterized by taking into account the lower and upper wall thermal conductivities as well as their thicknesses. This allows more realistic theoretical boundary conditions. A system consisting of a horizontal infinite Maxwell fluid layer confined between two parallel walls perpendicular to gravity is considered. The critical Rayleigh number R_c , the frequency of oscillation ω_c and the wavenumber k_c were determined for fixed values of the relaxation time constant F and the Prandtl number Pr . The results are given for a range of wall thermal conductivities and thicknesses. Analytical and numerical solutions were calculated. Some unexpected results were found in comparison to those of the Newtonian fluid where the criticality curves become more unstable when the conductivities of the walls change from very good conductors to very bad conductors.

© 2011 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Thermal convection of viscoelastic fluids may occur in many experimental set-ups and technological applications such as material processing, food and chemical industries. A particular area of research of growing interest where hydrodynamics of viscoelastic fluids is involved is that of the flow properties of biomolecules. In manipulation of biomolecules like DNA, for genome analysis and other applications, problems related to hydrodynamics arise and the theory of viscoelastic fluids can be used. Some efforts on this matter have been done since many years ago such as that of Bowen and Zimm [1] who determine some viscoelastic properties of DNA.

Thermal convection appearing in aqueous suspensions of DNA which behave as viscoelastic fluids (see [2] for example) is a very complex subject. This is due to a number of physical mechanisms that contribute or compete to set in convective cells in the suspension. Krishnan et al. [3] developed a device where Rayleigh convection is relevant to perform thermally activated chemical reactions such as polymerase chain reaction (PCR). In this case Krishnan et al. [3] proposed to replace the conventional thermocyclers by Rayleigh convection cells that make the device very simple and of easily assembly in any laboratory. Braun and Libchaber [4]

proposed an efficient mechanism for trapping DNA in solution through the interaction of thermophoresis and thermoconvection. A study of the PCR in thermal convection for replication of DNA was conducted by Braun et al. [5] and by Braun [6]. In a more recent paper the interaction of thermophoresis and thermoconvection have been studied along with PCR for replication of DNA by Mast and Braun [7]. Theoretical advances on the hydrodynamics of this suspensions which exhibit viscoelastic behavior have been conducted by Sri Krishna [8] and Laroze et al. [9,10].

The aim of this paper is to study how the thermal properties and geometrical nature of the walls influence the hydrodynamic stability of a viscoelastic Maxwell fluid layer. The scenario we propose here has not been considered nor discussed before. The theory developed in this work may be significant to complement and understand the phenomena appearing in the applications.

The linear thermoconvective stability of a viscoelastic Maxwell fluid layer heated from below is investigated. The constitutive equation for the Maxwell fluid is used. It has a relaxation time that, when large, allows for important elastic properties. The physical problem investigated here is to understand the effect the thermal conductivity and thickness of the walls has on the instability. In the case of natural convection in a Newtonian fluid, this influence was investigated by Metcalfe and Behringer [11], Cerisier et al. [12] and Howle [13].

Natural convection in viscoelastic Maxwell fluids was first investigated by Vest and Arpaci [14] and in an Oldroyd fluid layer by Takashima [15]. In both papers, the temperature boundary conditions are of fixed temperature at the walls.

* Corresponding author.

E-mail addresses: ildebrando3@gmail.com (I. Pérez-Reyes), ldavalos@servidor.unam.mx (L.A. Dávalos-Orozco).

Nomenclature

D_L	ratio of thicknesses (lower wall/fluid)	T_{AU}	temperature above the upper wall
D_U	ratio of thicknesses (upper wall/fluid)	w	velocity perturbation
d_F	depth of fluid layer	X_L	ratio of thermal conductivities (fluid/lower wall)
d_L	thickness of lower wall	X_U	ratio of thermal conductivities (fluid/upper wall)
d_U	thickness of upper wall	z^*	dimensional vertical coordinate
F	relaxation time	z	dimensionless vertical coordinate
g	acceleration due to gravity		
K_L	thermal conductivity of the lower wall	Greek symbols	
K_F	thermal conductivity of the fluid	α	volumetric expansion coefficient of the fluid
K_U	thermal conductivity of the upper wall	θ	temperature perturbation
k	wavenumber	λ	relaxation time, s
Pr	Prandtl number	κ	thermal diffusivity of the fluid, $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$
R	Rayleigh number	ν	kinematic viscosity, $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$
T_F^*	dimensional fluid temperature profile	ρ	fluid density, g cm^{-3}
T_L^*	dimensional lower wall temperature profile	ω	frequency of oscillation
T_U^*	dimensional upper wall temperature profile		
T_F	dimensionless fluid temperature profile	Subscripts	
T_L	dimensionless lower wall temperature profile	c	critical value
T_U	dimensionless upper wall temperature profile	L	lower
T_{BL}	temperature below the lower wall	U	upper

The fixed heat flux boundary condition at the walls was investigated by Kolkka and Ierley [16] for natural convection of a viscoelastic Oldroyd fluid layer heated from below. Martínez-Mardones and Pérez-García [17] reported results for the stationary and oscillatory convection and a codimension-two point for the case of fixed temperature at the walls. Several advances in the study of convection in viscoelastic fluids have been made by Rosenblat [18], Park and Lee [19,20], Martínez-Mardones et al. [21], Dávalos-Orozco and Vázquez Luis [22], Martínez-Mardones et al. [23–26] and more recently by Li and Khayat [27]. Some other advances in coupled buoyancy and capillary thermoconvection in viscoelastic fluids have also been made by Dauby et al. [28], Lebon et al. [29] and Parmentier et al. [30]; and earlier for capillary thermoconvection alone by Getachew and Rosenblat [31].

The system consists of a horizontal fluid layer between two parallel walls which are perpendicular to gravity. The system is characterized by nondimensional parameters such as: the Rayleigh number R , the Prandtl number Pr , the relaxation time constant F , the thermal conductivity ratios of the fluid to the lower and upper walls (X_L, X_U), the thickness ratios of the lower and upper walls respect to that of the fluid layer (D_L, D_U), the frequency of oscillation ω and the perturbation wavenumber k . The results presented here are of great importance because the physical and geometrical properties of the walls are taken into account. This allows the theory to better simulate the real experimental conditions.

The paper is organized as follows. In Section 2 the formulation of the problem is given including the governing equations, boundary conditions as well as nondimensional parameters of the problem. In Section 3 a solution to the eigenvalue problem using analytical techniques and numerical methods is presented. Finally, a discussion of the results is presented in the last section.

2. Formulation of the problem

Consider the natural convection in a viscoelastic Maxwell fluid layer confined between two infinite horizontal walls perpendicular to gravity. The lower and upper walls have thicknesses (d_L, d_U) and thermal conductivities (K_L, K_U), respectively. The upper surface of the lower wall and lower surface of the upper wall are located at $z = 0$ and $z = 1$, respectively. The fluid layer has density ρ , dynamic

viscosity $\rho\nu$ (with ν being the kinematic viscosity), thermal conductivity K_F and thickness d_F .

The equations of momentum and energy of the incompressible Maxwell fluid are linearized and perturbed (see [14,15]). Next, the rotational operation is taken twice in the momentum equation to obtain the following system of coupled equations for the perturbations

$$\left(1 + F \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w - R \nabla_{\perp}^2 \theta\right) = \nabla^4 w \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \theta = w \tag{2}$$

where w is the fluid velocity and θ is the temperature. The dimensionless parameters in Eqs. (1) and (2) are $F = \lambda\kappa/d_F^2$ the relaxation time, $Pr = \nu/\kappa$ the Prandtl number and $R = \alpha g d_F^3 (T_{BL} - T_{AU}) / [\nu\kappa(1 + D_U X_U + D_L X_L)]$ the Rayleigh number. Dimensionless variables are obtained by using the following scales: d_F for length, d_F^2/κ for time, $(T_{BL} - T_{AU})/(1 + D_U X_U + D_L X_L)$ for temperature and κ/d_F for velocity. Notice that $T_{BL} > T_{AU}$.

In the basic state there is no motion in the fluid and the heat transport is only by conduction. Before perturbation, the main temperature profiles for the fluid and walls are calculated from the linear stationary heat diffusion equation $d^2T/dz^{*2} = 0$. These dimensional solutions satisfy the following thermal boundary conditions. The temperature is constant over the outer surface of each wall, that is, $T_L^* = T_{BL}$ at $z^* = -d_L$ and $T_U^* = T_{AU}$ at $z^* = d_F + d_U$. They satisfy the continuity of temperature and heat flux at the interface of the fluid with each wall at $z^* = 0$ and d_F , respectively. The solutions, in dimensional form, are:

$$T_F^* = -\frac{(T_{BL} - T_{AU})z^*}{d_F(1 + D_U X_U + D_L X_L)} + T_{BL} - \frac{(T_{BL} - T_{AU})D_L X_L}{(1 + D_U X_U + D_L X_L)} \tag{3}$$

$$T_L^* = -\frac{(T_{BL} - T_{AU})X_L z^*}{d_F(1 + D_U X_U + D_L X_L)} + T_{BL} - \frac{(T_{BL} - T_{AU})D_L X_L}{(1 + D_U X_U + D_L X_L)} \tag{4}$$

$$T_U^* = -\frac{(T_{BL} - T_{AU})X_U z^*}{d_F(1 + D_U X_U + D_L X_L)} + T_{BL} - \frac{(T_{BL} - T_{AU})(1 + D_L X_L - X_U)}{(1 + D_U X_U + D_L X_L)} \tag{5}$$

Lets assume that $T_i = (T_i^* - T_{AU})(1 + D_U X_U + D_L X_L)/(T_{BL} - T_{AU})$, where the subscript i stands for (F, L, U). Then, in nondimensional form they can be rewritten as

$$T_F = -z + 1 + X_U D_U \tag{6}$$

$$T_L = -X_L z + 1 + X_U D_U \tag{7}$$

$$T_U = X_U (-z + 1 + D_U) \tag{8}$$

For the perturbed governing equations a normal modes separation in the form of $[w, \theta] = [W(z), \Theta(z)] \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t]$ is considered. k_x and k_y are the x and y -components of the wave-number vector with magnitude $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. σ is a complex parameter whose real part σ_R and imaginary part ω are the growth rate and the frequency of oscillation, respectively. Thus after substitution in Eqs. (1) and (2) we obtain

$$(1 + F\sigma) \left[\frac{\sigma}{Pr} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) W - Rk^2 \Theta \right] = \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 W \tag{9}$$

$$\left[\sigma - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \right] \Theta = W \tag{10}$$

Dimensionless boundary conditions including the properties of the walls (see [12] for example) are

$$W = DW = 0 \quad \text{at } z = 0, 1$$

$$\left(\frac{d}{dz} - \frac{q}{X_L \tanh q D_L} \right) \Theta = 0 \quad \text{at } z = 0 \tag{11}$$

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{q}{X_U \tanh q D_U} \right) \Theta = 0 \quad \text{at } z = 1$$

where $q = \sqrt{k^2 + \sigma}$.

3. Analytical and numerical solutions

In this section the conditions for the onset of convection are determined by using the analytical Galerkin method (see [32] for more details) to solve the eigenvalue problem posed in the system of Eqs. (9) and (10) subject to the boundary conditions Eq. (11). Although this is an approximate method, it has very high precision. Besides, it gives the possibility to obtain an analytical expression for the Rayleigh number R . Consider the following expansion of W which already satisfies the boundary conditions

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} A_n [z(z-1)]^{2+n} \tag{12}$$

Now, if the proposed expansion of Θ is

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Theta_n \tag{13}$$

then, after substitution of W of Eq. (12) and Θ of Eq. (13) into Eq. (10), Θ_n is the solution of the following differential equation

$$\left[\sigma - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \right] \Theta_n = [z(z-1)]^{2+n} \tag{14}$$

subjected to proper boundary conditions as given in Eq. (11). In this way by solving the differential equation Eq. (14) Θ_n can be easily calculated. Θ_n is not shown here and can be obtained from the authors upon request. Next, Eq. (9) is multiplied by W and integrated in the range $z = 0$ to $z = 1$, to get

$$0 = \left| \int_0^1 W_m \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \left[\frac{\sigma}{Pr} (1 + F\sigma) - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \right] W_n dz - (1 + F\sigma) R k^2 \int_0^1 W_m \Theta_n dz \right| \tag{15}$$

where use of Eqs. (12) and (13) have been made as well as some simplifications. Determinant Eq. (15) calculated with help of the software Maple, is the solvability condition from which the

eigenvalue R is computed. The first approximation of R , corresponding to the element (0,0) of the matrix in the determinant Eq. (15), can be easily calculated. From here on, it is supposed that the walls have the same properties and geometry, that is $X_L = X_U = X$ and $D_L = D_U = D$. Then the result is:

$$R = \frac{q^{11} \coth q \left[(q^2 + B^2) \tanh q + 2qB \right] \left[C_1 + (1 + F\sigma)(k^2 + 12) \sigma Pr^{-1} \right]}{k^2 (1 + F\sigma) (C_2 B^2 + C_3 B + C_4)} \tag{16}$$

where

$$B = \frac{q}{X \tanh q D}$$

$$C_1 = k^4 + 24k^2 + 504$$

$$C_2 = q(q^8 - 12q^6 + 504q^4 + 30240q^2 + 362880) - 5040 \tanh \frac{q}{2} (q^2 + 12)^2$$

$$C_3 = 2q^6(q^4 - 12q^2 + 504) \coth q + 60480q^2(q^2 + 12) \operatorname{csch} q - 5040q(q^2 - 6q + 12)(q^2 + 6q + 12)$$

$$C_4 = q^3(q^8 - 12q^6 + 504q^4 - 30240q^2 - 362880) + 181440q^4 \coth \frac{q}{2}$$

The Rayleigh number given in Eq. (16) is a result that have not been reported before which includes k , X and D , without any restriction in their magnitudes. A second order estimate of R obtained from Eq. (15) was performed numerically.

The critical values for the Rayleigh number R_c , the wavenumber k_c and the frequency of oscillation ω_c were obtained as follows. The Rayleigh number in Eq. (16) is complex and the frequency which makes the imaginary part of R zero is used in the real part to calculate the marginal R for given D , X , Pr , F and k . In this way, k is varied until a minimum of R is found which is called the critical value R_c with corresponding k_c and ω_c . Notice from Eq. (16), that q is the argument of hyperbolic functions and, as explained above, it has the form $q = \sqrt{k^2 + \sigma}$. Therefore, it is not possible to give an explicit solution of the frequency of oscillation from the imaginary part of R in Eq. (16).

Results obtained by the Galerkin method were verified with a shooting numerical method and the agreement is very good. In order to apply this method, the Eqs. (9) and (10), subject to the boundary conditions Eq. (11) were integrated by a Runge–Kutta method while the resulting eigenvalue problem for R was solved by shooting various trials to satisfy the boundary conditions at $z = 1$. For given D , X , Pr , F and k , the R and ω which make zero the real and imaginary parts of a complex determinant of the trials are the marginal eigenvalues [33].

It is possible to obtain an expression of R in Eq. (16) in the limit of $X \rightarrow 0$, which corresponds to the fixed temperature boundary condition. In this limit only the term corresponding to B^2 will survive. Therefore, the equation becomes:

$$R = \frac{q^{11} [C_1 + (1 + F\sigma)(k^2 + 12) \sigma Pr^{-1}]}{k^2 (1 + F\sigma) C_2} \tag{17}$$

When $F = 0$ the newtonian case is recovered and the frequency is zero. The limit $Pr \rightarrow 0$ can not be taken because it is a singularity corresponding to viscosity zero (inviscid limit). However, the limit $Pr \rightarrow \infty$ gives another expression for the Rayleigh number. That is:

$$R = \frac{q^{11} \coth q [(q^2 + B^2) \tanh q + 2qB] C_1}{k^2 (1 + F\sigma) (C_2 B^2 + C_3 B + C_4)} \tag{18}$$

By considering the fixed temperature boundary condition at both walls, in the limit of small X , it was possible to compare the

critical values R_c , k_c and ω_c for fixed values of F with those reported by Vest and Arpaci [14] in their Table I, Takashima [15] in his Table I, Sokolov and Tanner [34] in their Table I and Martínez-Mardones and Pérez-García [17] in their Fig. 5. The agreement was very good. On the other hand, assuming the fixed heat flux boundary condition at both walls, in the limit of large X , the critical values R_c , k_c and ω_c for fixed values of F were also compared with those reported by Kolkka and Lerley [16] in their Tables I and II. In this case too, the agreement was excellent.

For fixed $Pr = 1$ curves of R_c , k_c and ω_c against X in the two limiting cases of small $D = 0.1$ and large $D = 100$ are shown in Fig. 1(a)–(c) for $F = 0.1$ and in Fig. 1(d)–(f) for $F = 100$, respectively. Notice that the curves corresponding to $D < 0.1$ are very near to that of $D = 0.1$. The same can be said for the curves corresponding to $D > 100$. It can be seen in Fig. 1(a) that for $Pr = 1$ and $F = 0.1$ a competition exists between oscillatory and stationary convection

to destabilize the system. The change from oscillatory to stationary convection, at the codimension two point as stated by Martínez-Mardones and Pérez-García [17], appears at intermediate values in the range of X . This very interesting result shows that at $Pr = 1$ the convection can be stationary and the viscoelastic Maxwell fluid behaves as Newtonian. The competition between these two modes comes to an end at approximately $Pr = 1.4$ when convective motions set in only as oscillatory, as shown in Fig. 3. After the codimension two point the stationary convection destabilizes with X monotonically and the results agree with those of Cerisier et al. [12]. In the limit of fixed temperature boundary condition ($X \ll 1$) at both walls the following critical values were found: $R_c = 870.5590$, $k_c = 4.92$ and $\omega_c = 15.09$ [14,15,34]; while in the limit of fixed heat flux boundary condition ($X \gg 1$) at both walls it was found: $R_c = 720.0183$, $k_c = 0.02$ and zero frequency ω_c [12]. The codimension two points for $D = 0.1$ and $D = 100$ are located approximately

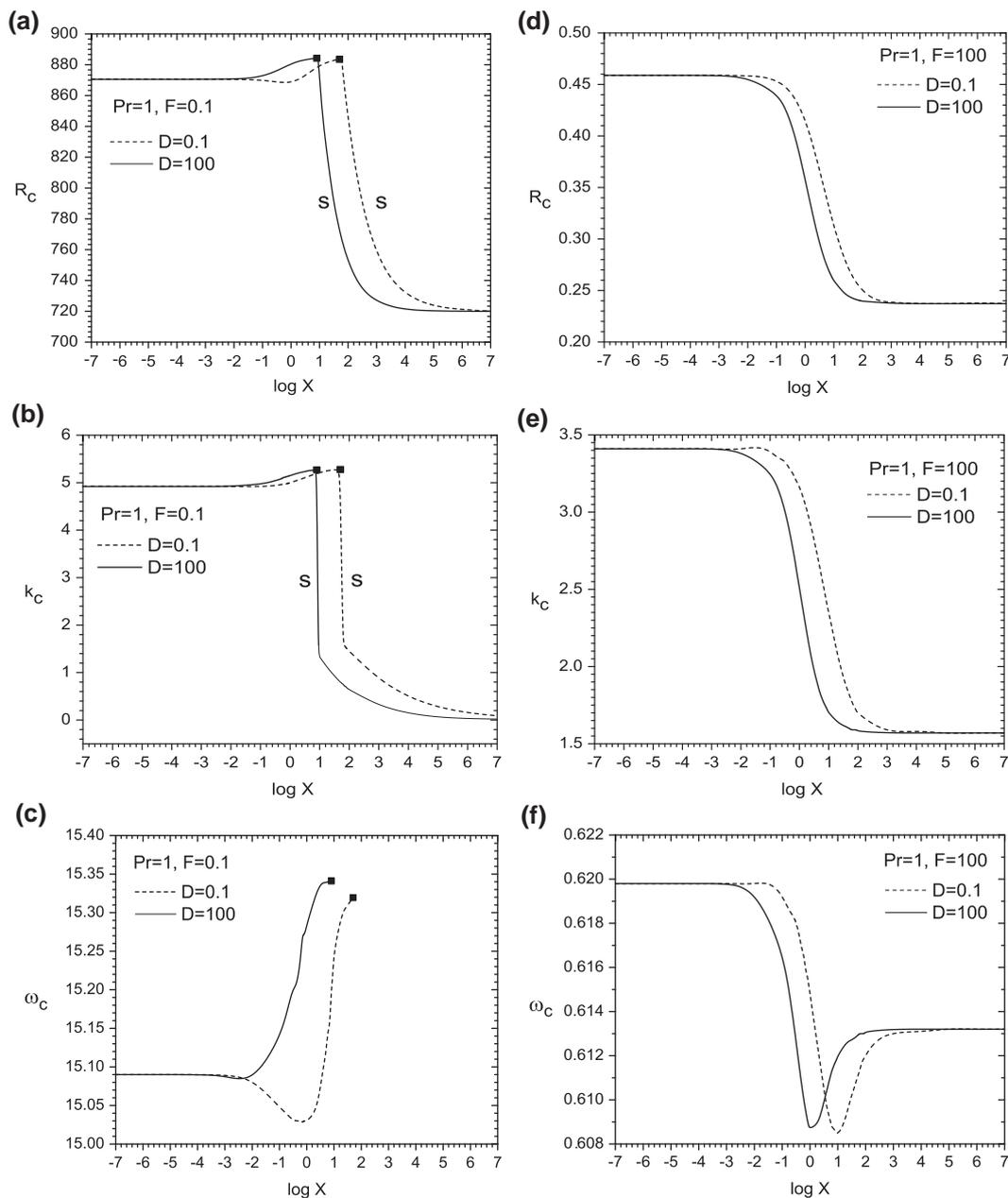


Fig. 1. Curves for $F = 0.1$: (a) R_c , (b) k_c and (c) ω_c against X , and curves for $F = 100$: (d) R_c , (e) k_c and (f) ω_c against X . Here, $Pr = 1$, $D = 0.1$ are indicated by dashed lines and $D = 100$ by continued lines.

at $X = 50$ and $X = 8$, respectively. An unexpected behavior was found in the curves of ω_c against X for $F = 0.1$ and $F = 100$ shown in Fig. 1(c) and (f). That is, besides the relative minimum that the ω_c has at the limit of fixed heat flux boundary condition, there is an absolute minimum at an intermediate value of X . We checked the curves for different values of Pr and found that this absolute minimum disappears only as Pr reaches $Pr = 10$. These results obtained by the Galerkin method were confirmed with the shooting method as well. For $Pr = 1$ and $F = 100$ in the limit of fixed temperature boundary condition at both walls the following critical values were found: $R_c = 0.4589$, $k_c = 3.41$ and $\omega_c = 0.6198$ [14,15,34]; while in the limit of fixed heat flux boundary condition at both walls it was found: $R_c = 0.2372$, $k_c = 1.57$ and $\omega_c = 0.6132$ [16]. The curves in Fig. 1(d) for $F = 100$ show that the system becomes more unstable as X increases and that in this case convective motions are only oscillatory.

For fixed $Pr = 10$ curves of R_c , k_c and ω_c against X in the two limiting cases of small $D = 0.1$ and large $D = 100$ are shown in Fig. 2(a)–(c) for $F = 0.1$ and in Fig. 2(d)–(f) for $F = 100$, respectively. For the case of $Pr = 10$ and $F = 0.1$ the value of (R_c, k_c, ω_c) increases with X . Here X has a stabilizing effect. Notice that this behavior is in contrast with that of the curves in the previous figures and in the next one. In Fig. 1(a) the stabilizing effect is incipient before the codimension two point appears. In the limit of fixed temperature boundary condition at both walls the following critical values were found: $R_c = 226.7151$, $k_c = 7.26$ and $\omega_c = 76.2593$ [14,15,34]; while in the limit of fixed heat flux boundary condition at both walls it was found: $R_c = 233.7246$, $k_c = 7.61$ and $\omega_c = 79.1547$ [16]. For the case of $Pr = 10$ and $F = 100$ the value of (R_c, k_c, ω_c) decreases with X . In the limit of fixed temperature boundary condition at both walls the following critical values were found: $R_c = 4.6230 \times 10^{-2}$, $k_c = 3.44$ and $\omega_c = 1.9625$ [14,15,34]; while in

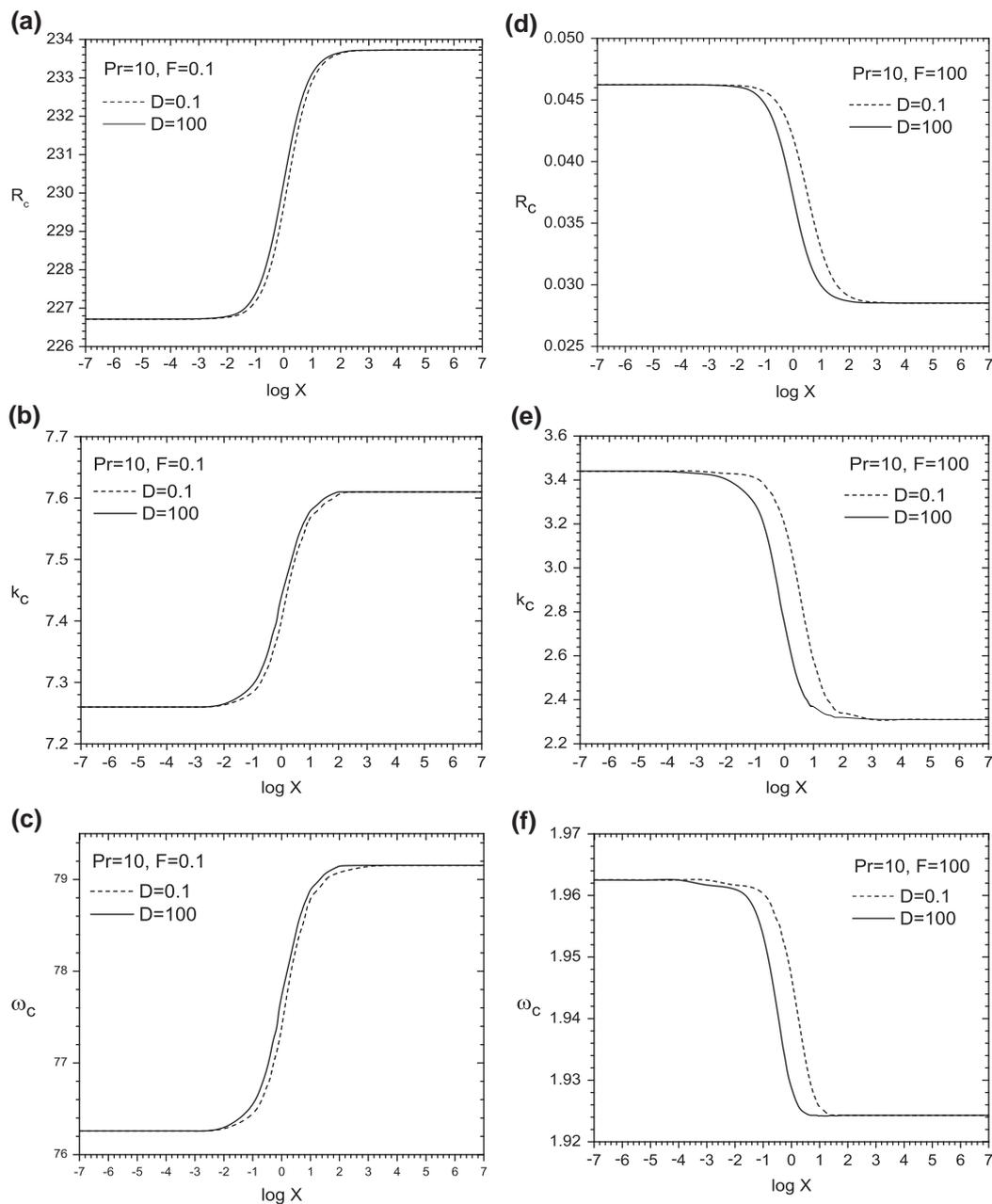


Fig. 2. Curves for $F = 0.1$: (a) R_c , (b) k_c and (c) ω_c against X , and curves for $F = 100$: (d) R_c , (e) k_c and (f) ω_c against X . Here, $Pr = 10$, $D = 0.1$ are indicated by dashed lines and $D = 100$ by continued lines.

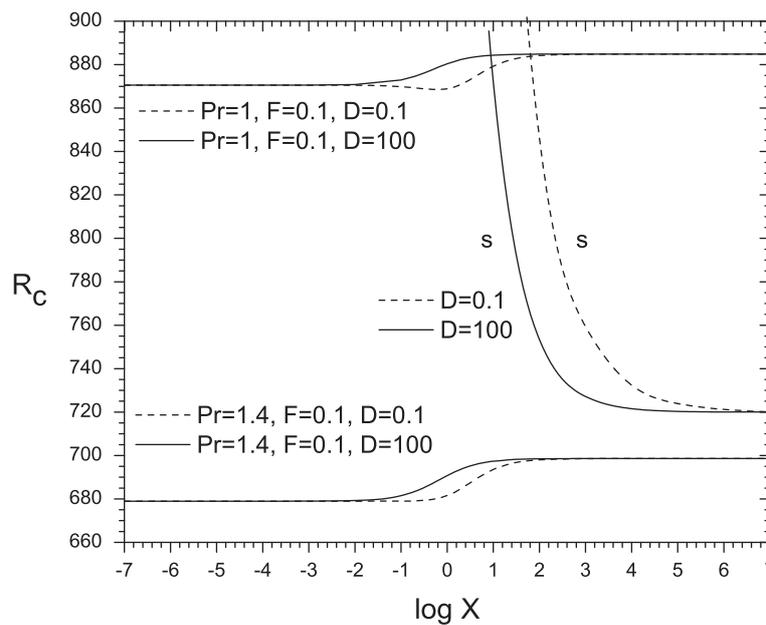


Fig. 3. Curves of R_c against X for fixed $F = 0.1$. Curves for $Pr = 1$ and $Pr = 1.4$ correspond to oscillatory convection and curves without Pr indicated correspond to stationary convection. Dashed line indicates $D = 0.1$ and continued line indicates $D = 100$.

the limit of fixed heat flux boundary condition at both walls it was found: $R_c = 2.8520 \times 10^{-2}$, $k_c = 2.31$ and $\omega_c = 1.9243$ [16].

A more explicit and clear presentation of the competition between stationary and oscillatory convection given in Fig. 1(a) is shown in Fig. 3. In the curves corresponding to oscillatory convection presented in Fig. 3 the elastic parameter is $F = 0.1$. There, the two pairs of curves of criticality for $Pr = 1$ and $Pr = 1.4$ correspond to oscillatory convection while the other two curves correspond to stationary convection. Notice that the codimension two points arising for $Pr = 1$ and different D 's, disappear as Pr increases from $Pr = 1$ to approximately $Pr = 1.4$.

On the other hand note that for decreasing values of Pr convective motions set in first as oscillatory when X is small and they set in first as stationary when X is large. It has also been found, numerically, that if F increases then ω decreases suggesting that there is a balance between these two parameters.

It should be noted from Figs. 1 and 2 that in the limiting cases of small and large X both curves of $D = 0.1$ and $D = 100$ for R_c , k_c and ω_c collapse into one curve, as expected. This means that, also for the viscoelastic fluid (see [12]) the thickness of the walls has no influence on the onset of convection in these regions of X [14,15,34,17,16]. Notice that not always R_c approaches the value of 720 when $X \rightarrow \infty$ (see [35–37]). This means that even with the fixed heat flux boundary condition at the walls, stationary convection not always can occur in a viscoelastic Maxwell fluid [16], and under certain conditions, the convective motions can set in as oscillatory convection. The separation between every pair of curves at moderate values of X in Figs. 1 and 2 is clearly the effect of the difference between $D = 0.1$ and $D = 100$. In that region the thickness of the walls has important influence on the instability.

Curves presented in Figs. 1 and 2 show the role played by X . They show how X bridges the two limiting cases already studied since many years ago: perfect conducting walls and perfect insulating walls. It has been found in this study that for fixed Pr and growing X , convection cells appear faster in the fluid layer when $F = 0.1$ than when $F = 100$. The influence of the geometrical nature of the walls is noticeable across all the curves shown in Figs. 1 and 2 although this effect is magnified for the curves corresponding to $(Pr = 1, F = 0.1)$ and $(Pr = 10, F = 0.1)$.

It is of interest to give asymptotic solutions of R and ω of the convection problem to compare with the above given numerical results. These approximations were done using a Galerkin approach different from that of Chandrasekhar. The procedure is explained in Appendix A. Appendixes B and C show the results of asymptotic calculations based on the results of the Galerkin method presented in Appendix A. There, it can be found different asymptotic approximations as for $Pr \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 0$, $F \rightarrow \infty$ and for two different limits of $D \rightarrow 0$ and $D \rightarrow \infty$. The approximate results for R and ω agree very well with the numerical calculations in their respective limit of approximation.

4. Conclusions

Very interesting results were found when the effects of the thermal conductivities and thicknesses of the bounding walls were taken into account in the convection of a viscoelastic Maxwell fluid. The case considered here is that of a system having walls with the same properties and geometry. The Prandtl numbers considered were $Pr = 1, 10$ and two representative wall relaxation times were taken into account, that is, $F = 0.1, 100$.

In the case of $Pr = 1$, it was shown that, in both cases of $F = 0.1$ and $F = 100$, the ratio of thermal conductivities X destabilizes the system. Notice that the effect of the thickness of the wall is more important here when $F = 0.1$ than when $F = 100$. A very interesting situation occurs at $F = 0.1$ due to the competition between stationary and oscillatory convection. This last interesting situation can be observed in Fig. 1(c) in the curves of ω_c vs. X when ω_c drops to zero when X increases; and in Fig. 3 where it is shown that oscillatory motions dominate the instability of the system as Pr increases to approximately $Pr = 1.4$. At the codimension two points, corresponding to different values of D , the convection becomes stationary. This is shown in the curves of Fig. 1(a) for R_c vs. X , as a sudden drop of the critical Rayleigh number, and a similar behavior is observed in the curves for k_c vs. X of Fig. 1(b) as well.

When $Pr = 10$ and $F = 0.1$ the relative effect of the thickness of the wall is reduced considerably. When $F = 100$ the magnitudes of the critical values are so small that it is difficult to notice an

important effect of the thickness of the walls. It was found that, depending on the value of the relaxation time F , the ratio of thermal conductivities X plays a different role. When F is small X stabilizes and when F is large X destabilizes.

These results are in contrast with those for stationary convection in a Newtonian fluid [11,12] where the system becomes more unstable when X increases.

Acknowledgments

The authors thank, Joaquín Morales, Cain González, Raúl Reyes, Ma. Teresa Vázquez and Oralia Jiménez for technical support. I. Pérez-Reyes would like to thank the support of CONACyT through its scholarship program.

Appendix A. Another approach with the Galerkin method

Here, another approach to the Galerkin method [38] is exposed. With this Galerkin method a more simple and tractable asymptotic approximation is available to the present eigenvalue problem. Due to the resulting magnitudes of (R, ω, k, Pr) (see Figs. 1 and 2), it was not possible to obtain asymptotic expressions for R and ω from the formula given in Eq. (16). Besides, the presence of $q = \sqrt{k^2 + \sigma}$ in the argument of several hyperbolic functions makes it difficult to obtain asymptotic expansions.

Thus, the process to solve the eigenvalue problem posed in the system of Eqs. (9) and (10) subject to the boundary conditions Eq. (11) is to consider the following trial functions for W and Θ satisfying the boundary conditions Eq. (11),

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} E_n [z(z-1)]^{2+n} \tag{A.1}$$

$$\Theta = G_0(1 + Bz - Bz^2) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n z^{n+1} \left(z - \frac{n+2+B}{n+1+B} \right) \tag{A.2}$$

After substitution of W and Θ given in Eqs. (A.1) and (A.2) in the system of Eqs. (9) and (10) the residuals are formed and they are made orthogonal to the respective trial functions

$$\begin{vmatrix} \int_0^1 W_m L_1 W_n dz & -(1 + F\sigma) R k^2 \int_0^1 W_m \Theta_n dz \\ \int_0^1 \Theta_m W_n dz & -\int_0^1 \Theta_m L_2 \Theta_n dz \end{vmatrix} = 0 \tag{A.3}$$

where the operators L_1 and L_2 are defined as

$$L_1 = \frac{\sigma}{Pr} (1 + F\sigma) \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2$$

$$L_2 = \sigma - \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)$$

Determinant Eq. (A.3) is a solvability condition from which R can be calculated. The first and second approximation of R can be easily calculated from the determinant Eq. (A.3) and although these are not presented here they can be obtained from the authors upon request. In the following sections these approximations are used to get asymptotic expressions for R and ω .

Appendix B. Asymptotics for $Pr \rightarrow \infty$

In this section asymptotic expressions were calculated for R and ω in the case of $Pr \rightarrow \infty$. Some ideas of Kolkka and Ierley [16] were used in the expansions of R and ω . Note that the formulas are large and complex because they include the conductivities ratio, not reported before for this viscoelastic problem.

As mentioned above two further approximations for the thicknesses ratio were made. These affect the hyperbolic function

appearing in the Biot number. Thus for $D \rightarrow 0$ the Biot number is approximated as $B = (XD)^{-1}$ and for $D \rightarrow \infty$ it is $B = qX^{-1}$, respectively.

By using the first order approximation of the Galerkin method Eq. (A.3) some asymptotic expressions of R and ω were calculated.

B.1. Case of $Pr \rightarrow \infty, F \rightarrow 0$ and $D \rightarrow 0$

Here, use is made of the following expansion scheme

$$\omega^2 = \omega_0^2 Pr^{\frac{3}{2}} + \omega_1^2 Pr + \omega_2^2 Pr^{\frac{1}{2}} + O(1)$$

$$k = k_0 Pr^{\frac{1}{4}} + O\left(Pr^{-\frac{3}{4}}\right)$$

and the resulting expressions are

$$\begin{aligned} R = C_5 & \left[\frac{C_6}{F^2} + \frac{1}{Fk_0^2 \sqrt{Pr}} \left[C_6 F k_0^4 + 14 + 320XD + 2940X^2 D^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 12600X^3 D^3 + 21600X^4 D^4 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{Fk_0^4 Pr} \left[(22 + 400XD + 2820X^2 D^2 + 9000X^3 D^3 + 10800X^4 D^4) \right. \right. \\ & \left. \left. \times Fk_0^4 + C_6 k_0^4 + 364 + 7440XD + 62640X^2 D^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 259200X^3 D^3 + 453600X^4 D^4 \right] \right] + O\left(\frac{1}{Pr^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 = \frac{1}{1 + 30X^2 D^2 + 10XD} & \left[C_6 \frac{k_0^2 Pr^{\frac{3}{2}}}{F} + (12F - 1) C_6 \frac{Pr}{F^2} \right. \\ & \left. + [360C_6 F - 2(1 + 40XD + 540X^2 D^2 + 2700X^3 D^3 + 5400X^4 D^4)] \right. \\ & \left. \times \frac{\sqrt{Pr}}{F^2 k_0^2} - [C_6 (k_0^4 + 4320F) + 340 + 6480XD + 50400X^2 D^2 \right. \\ & \left. + 194400X^3 D^3 + 324000X^4 D^4] \frac{1}{k_0^4 F^2} \right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{Pr}}\right) \end{aligned}$$

B.2. Case of $Pr \rightarrow \infty, F \rightarrow 0$ and $D \rightarrow \infty$

Here, the expansion scheme was modified in order to include the effect of the conductivities ratio X as follows

$$\omega^2 = \omega_0^2 Pr + \omega_1^2 Pr^{\frac{1}{2}} + \omega_2^2 + O\left(Pr^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$k = k_0 + O\left(Pr^{-1}\right)$$

and the resulting expressions are

$$\begin{aligned} R = \frac{1498}{675k_0^2 F^{\frac{3}{2}}} & \frac{\sqrt{k_0^4 + 24k_0^2 + 504} \sqrt{12 + k_0^2}}{\sqrt{Pr}} \\ & + \frac{2996X \sqrt{2} (k_0^6 + 36k_0^4 + 792k_0^2 + 6048)}{2025k_0^2 (k_0^4 + 24k_0^2 + 504)^{\frac{3}{4}} (12 + k_0^2)^{\frac{1}{4}} F^{\frac{5}{4}} Pr^{\frac{3}{4}} (1 + X)} + O\left(\frac{1}{Pr}\right) \end{aligned}$$

$$\omega^2 = \frac{(k_0^4 + 24k_0^2 + 504) Pr}{(12 + k_0^2) F} - \sqrt{\frac{(k_0^4 + 24k_0^2 + 504)}{(12 + k_0^2) F^3}} \sqrt{Pr} + O(1)$$

where C_5 and C_6 are coefficients that depend on the parameters (X, D) , and are defined as follows

$$C_5 = \frac{28}{3(3 + 14XD)^2 (1 + 30X^2 D^2 + 10XD)}$$

$$C_6 = 1 + 20XD + 160X^2 D^2 + 600X^3 D^3 + 900X^4 D^4$$

B.3. Case of $Pr \rightarrow \infty, F \rightarrow \infty$ and $D \rightarrow 0$

This case was calculated independently at a second order approximation with the Galerkin method Eq. (A.3). It is necessary to mention that the first order approximation is not good in this limit. For both cases $D \rightarrow 0$ and $D \rightarrow \infty$ it was considered first a two term expansion with respect to $Pr \rightarrow \infty$ and later the following expansion with respect to $F \rightarrow \infty$ was used

$$\omega^2 = \omega_0^2 F^{-1} + \omega_1^2 F^{-2} + O(F^{-3})$$

$$k = k_0 + O(F^{-1})$$

Thus, for $D \rightarrow 0$ we have

$$\begin{aligned} R = C_7 & \left[\left(X^2 D^2 + \frac{XD}{3} + \frac{1}{30} \right) (5k_0^8 + 1056k_0^6 + 104544k_0^4 + 2471040k_0^2 + 40772160) \right. \\ & + 2471040k_0^2 + 40772160 \\ & \times \left[\frac{(3k_0^4 + 520k_0^2 + 40040)X^2 D^2}{15} + \frac{(31k_0^4 + 5772k_0^2 + 463320)XD}{405} \right. \\ & \times \left. \left. \frac{19k_0^4}{2430} + \frac{598k_0^2}{405} + \frac{16588}{135} \right] \right. \\ & + \frac{1}{Pr} \left[\frac{k_0^2}{15} (15k_0^{10} + 5484k_0^8 + 949520k_0^6 + 86898240k_0^4) \right. \\ & + 4063625280k_0^2 + 38869459200 \left. \right] X^4 D^4 \\ & + \left(\frac{58k_0^{12}}{81} + \frac{36608k_0^{10}}{135} + \frac{241608k_0^8}{5} + \frac{22600864k_0^6}{5} \right. \\ & + 218366720k_0^4 + 2528477952k_0^2 + 5182594560 \left. \right) X^3 D^3 \\ & + \left(\frac{k_0^{12}}{5} + \frac{157118k_0^{10}}{2025} + \frac{1909504k_0^8}{135} + \frac{12151568k_0^6}{9} \right. \\ & + \frac{1008587008k_0^4}{15} + 905645312k_0^2 + 3109556736 \left. \right) X^2 D^2 \\ & + \left(\frac{94k_0^{12}}{3645} + \frac{61864k_0^{10}}{6075} + \frac{1276984k_0^8}{675} + \frac{41371616k_0^6}{225} \right. \\ & + \frac{141050624k_0^4}{15} + \frac{425641216k_0^2}{3} + 617723392 \left. \right) XD \\ & + \frac{(k_0^2 + 10)}{72900} (95k_0^{10} + 36942k_0^8 + 6774768k_0^6 + 637034112k_0^4 \\ & + 30440494656k_0^2 + 295761248640) \left. \right] + O\left(\frac{1}{Pr^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 = & (5k_0^8 + 1056k_0^6 + 104544k_0^4 + 2471040k_0^2 + 40772160) \\ & \times \left[486 \left(X^2 D^2 + \frac{31XD}{81} + \frac{19}{486} \right) k_0^4 + 84240 \left(X^2 D^2 + \frac{37XD}{90} + \frac{23}{540} \right) k_0^2 \right. \\ & + 6486480 \left(X^2 D^2 + \frac{3XD}{7} + \frac{29}{630} \right) \left. \right] \left[(2430k_0^{10} + 888408k_0^8 \right. \\ & + 153822240k_0^6 + 14077514880k_0^4 + 658307295360k_0^2 \\ & + 6296852390400) X^2 D^2 + (930k_0^{10} + 357948k_0^8 + 64370592k_0^6 \\ & + 5983870464k_0^4 + 283040334720k_0^2 + 2728636035840) XD \\ & + 95k_0^{10} + 36942k_0^8 + 6774768k_0^6 + 637034112k_0^4 \\ & + 30440494656k_0^2 + 295761248640 \left. \right]^{-1} Pr + O(Pr^2) \end{aligned}$$

B.4. Case of $Pr \rightarrow \infty, F \rightarrow \infty$ and $D \rightarrow \infty$

Here, the expressions for $D \rightarrow \infty$ are

$$\begin{aligned} R = C_8 & \left[(5k_0^8 + 1056k_0^6 + 104544k_0^4 + 2471040k_0^2 + 40772160) \right. \\ & \times \left[(14580k_0^4 + 2527200k_0^2 + 194594400) k_0 X^4 \right. \\ & + (10080k_0^6 + 1797660k_0^4 + 141523200k_0^2 + 194594400) X^3 \\ & + (2832k_0^6 + 519660k_0^4 + 41614560k_0^2 + 64864800) k_0 X^2 \\ & + (374k_0^6 + 70248k_0^4 + 5728320k_0^2 + 4942080) k_0^2 X \\ & + (19k_0^4 + 3588k_0^2 + 298584) k_0^5 \left. \right] \\ & + (30k_0 X + 60X + 10k_0 + 10k_0^2 X + k_0^3) \\ & \times \left[(2430k_0^{10} + 888408k_0^8 + 153822240k_0^6 + 14077514880k_0^4 \right. \\ & + 658307295360k_0^2 + 6296852390400) X^2 \\ & + (930k_0^{10} + 357948k_0^8 + 64370592k_0^6 + 5983870464k_0^4 \\ & + 283040334720k_0^2 + 2728636035840) k_0 X \\ & + (95k_0^{10} + 36942k_0^8 + 6774768k_0^6 + 637034112k_0^4 \\ & + 30440494656k_0^2 + 295761248640) k_0^2 \left. \right] \frac{1}{Pr} + O\left(\frac{1}{Pr^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 = & (5k_0^8 + 1056k_0^6 + 104544k_0^4 + 2471040k_0^2 + 40772160) \\ & \times \left[19k_0^6 + 186k_0^5 X + (3588 + 486X^2) k_0^4 + 34632Xk_0^3 \right. \\ & + (298584 + 84240X^2) k_0^2 + 2779920Xk_0 + 6486480X^2 \left. \right] \\ & \times \left[95k_0^{12} + 930k_0^{11} X + (2430X^2 + 36942) k_0^{10} + 357948k_0^9 X \right. \\ & + (888408X^2 + 6774768) k_0^8 + 64370592k_0^7 X \\ & + (153822240X^2 + 637034112) k_0^6 + 5983870464k_0^5 X \\ & + (14077514880X^2 + 30440494656) k_0^4 + 283040334720k_0^3 X \\ & + (658307295360X^2 + 295761248640) k_0^2 \\ & + 2728636035840Xk_0 + 6296852390400X^2 \left. \right]^{-1} Pr + O(Pr^2) \end{aligned}$$

where C_7 and C_8 are coefficients that depend on the parameters (F, k_0, X, D) , and are defined as follows

$$\begin{aligned} C_7 = & \frac{350}{297k_0^2 F} \left[\left(X^2 D^2 + \frac{31XD}{81} + \frac{19}{486} \right) k_0^4 + \left(\frac{520X^2 D^2}{30} + \frac{1924XD}{27} + \frac{598}{81} \right) k_0^2 \right. \\ & + \frac{40040X^2 D^2}{3} + 5720XD + \frac{16588}{27} \left. \right]^{-2} \\ C_8 = & \frac{7}{433026k_0^3 F} \left[\left(k_0^4 + \frac{520k_0^2}{3} + \frac{40040}{3} \right) X^2 + \frac{31}{81} \left(k_0^4 + \frac{5772k_0^2}{31} + \frac{463320}{31} \right) k_0 X \right. \\ & + \frac{19}{486} \left(k_0^4 + \frac{3588k_0^2}{19} + \frac{298584}{19} \right) \left. \right]^{-2} \end{aligned}$$

The asymptotic results of this appendix are in very good agreement with those of the numerical analysis.

Appendix C. Asymptotics for $F \rightarrow \infty$

In this limit, the second order Galerkin approximation Eq. (A.3) was necessary. Notice that the approximations presented in this appendix are valid for any Prandtl number. For both cases of $D \rightarrow 0$ and $D \rightarrow \infty$ the following expansion scheme for $F \rightarrow \infty$ was considered

$$\omega^2 = \omega_0^2 F^{-1} + \omega_1^2 F^{-2} + O(F^{-3})$$

$$k = k_0 + O(F^{-1})$$

C.1. Case for $D \rightarrow 0$

The expressions for any Prandtl number are

$$R = C_{10} \left[C_9 \left[\left(\frac{254k_0^{12}}{10989} + \frac{41264k_0^{10}}{4995} + \frac{1666568k_0^8}{1665} + \frac{4735312k_0^6}{111} \right) k_0^6 + \frac{9710272k_0^4}{37} - \frac{286256256k_0^2}{37} - \frac{5568076800}{37} \right] X^2 D^2 + \left(\frac{347k_0^{12}}{32967} + \frac{58952k_0^{10}}{14985} + \frac{2536972k_0^8}{4995} + \frac{42840944k_0^6}{1665} + \frac{222100736k_0^4}{555} + \frac{38310272k_0^2}{37} - \frac{1540501248}{37} \right) XD + \frac{659k_0^{12}}{593406} + \frac{19324k_0^{10}}{44955} + \frac{863234k_0^8}{14985} + \frac{5256808k_0^6}{1665} + \frac{35244352k_0^4}{555} + \frac{260438464k_0^2}{555} - \frac{89707904}{37} \right] + \left(k_0^8 + \frac{13456k_0^6}{37} + \frac{1400784k_0^4}{37} + \frac{25534080k_0^2}{37} + \frac{144555840}{37} \right) \times \left[\left(k_0^8 + \frac{1056k_0^6}{5} + \frac{235268k_0^4}{15} + 471328k_0^2 + 7673952 \right) X^2 D^2 + \left(\frac{31k_0^8}{81} + \frac{10912k_0^6}{135} + \frac{254276k_0^4}{45} + \frac{2432144k_0^2}{15} + 2914912 \right) XD + \frac{19k_0^8}{486} + \frac{3344k_0^6}{405} + \frac{74602k_0^4}{135} + \frac{129272k_0^2}{9} + \frac{1397968}{5} \right] \frac{1}{F} + O\left(\frac{1}{F^2}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{(5k_0^6 + 792k_0^4 + 52272k_0^2 + 617760 - 6C_9)Pr}{(5k_0^4 + 528k_0^2 + 5148)F} + O\left(\frac{1}{F^2}\right)$$

C.2. Case for $D \rightarrow \infty$

Here, for any Prandtl number, the solution is

$$R = C_{11} \left[C_9 \left[\left(\frac{254k_0^{12}}{10989} + \frac{41264k_0^{10}}{4995} + \frac{1666568k_0^8}{1665} + \frac{4735312k_0^6}{111} + \frac{9710272k_0^4}{37} - \frac{286256256k_0^2}{37} - \frac{5568076800}{37} \right) X^2 + \left(\frac{347k_0^{13}}{32967} + \frac{58952k_0^{11}}{14985} + \frac{2536972k_0^9}{4995} + \frac{42840944k_0^7}{1665} + \frac{222100736k_0^5}{555} + \frac{38310272k_0^3}{37} - \frac{1540501248k_0}{37} \right) X + \frac{659k_0^{14}}{593406} + \frac{19324k_0^{12}}{44955} + \frac{863234k_0^{10}}{14985} + \frac{5256808k_0^8}{1665} \right] \right]$$

$$\left[\frac{35244352k_0^6}{555} + \frac{260438464k_0^4}{555} - \frac{89707904k_0^2}{37} \right] + \left(k_0^8 + \frac{13456k_0^6}{37} + \frac{1400784k_0^4}{37} + \frac{25534080k_0^2}{37} + \frac{144555840}{37} \right) \times \left[\left(k_0^8 + \frac{1056k_0^6}{5} + \frac{235268k_0^4}{15} + 471328k_0^2 + 7673952 \right) X^2 + \left(\frac{31k_0^8}{81} + \frac{10912k_0^6}{135} + \frac{254276k_0^4}{45} + \frac{2432144k_0^2}{15} + 2914912 \right) X + \frac{19k_0^{10}}{486} + \frac{3344k_0^8}{405} + \frac{74602k_0^6}{135} + \frac{129272k_0^4}{9} + \frac{1397968k_0^2}{5} \right] \frac{1}{F} + O\left(\frac{1}{F^2}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{(5k_0^6 + 792k_0^4 + 52272k_0^2 + 617760 - 6C_9)Pr}{(5k_0^4 + 528k_0^2 + 5148)F} + O\left(\frac{1}{F^2}\right)$$

where C_9 , C_{10} and C_{11} are coefficients that depend on the parameters (Pr, k_0, X, D), and are defined as follows

$$C_9 = \sqrt{1221k_0^8 + 444048k_0^6 + 46225872k_0^4 + 842624640k_0^2 + 4770342720}$$

$$C_{10} = 3398598000 \frac{[(X^2 D^2 + \frac{XD}{3} + \frac{1}{30})k_0^2 + 2XD + \frac{1}{3}](k_0^4 + \frac{528k_0^2}{5} + \frac{5148}{5})}{k_0^2 Pr (5k_0^6 + 792k_0^4 + 52272k_0^2 + 617760 - 6C_9)} \times [(13716X^2 D^2 + 6246XD + 659)k_0^6 + (3441636X^2 D^2 + 1617660XD + 178530)k_0^4 + 486(C_9 + \frac{1395680}{3})X^2 D^2 k_0^2 + (186C_9 + 104339664)X D k_0^2 + (19C_9 + 11768328)k_0^2 + 42120(C_9 + 29172)X^2 D^2 + (17316C_9 + 602316000)XD + 71474832 + 1794C_9]^{-2}$$

$$C_{11} = 3398598000 \frac{[\frac{k_0^3}{30} + \frac{k_0^2 X}{3} + (\frac{1}{3} + X^2)k_0 + 2X](k_0^4 + \frac{528k_0^2}{5} + \frac{5148}{5})}{k_0 Pr (5k_0^6 + 792k_0^4 + 52272k_0^2 + 617760 - 6C_9)} \times [(13716k_0^6 + 3441636k_0^4 + (226100160 + 486C_9)k_0^2 + 1228724640 + 42120C_9)X^2 + (6246k_0^7 + 1617660k_0^5 + (186C_9 + 104339664)k_0^3 + (602316000 + 17316C_9)k_0)X + 659k_0^8 + 178530k_0^6 + (11768328 + 19C_9)k_0^4 + (71474832 + 1794C_9)k_0^2]^{-2}$$

The results given in this appendix agree very well with those of the numerical analysis.

References

- [1] B.C. Bowen, B.H. Zimm, Molecular weight of T2 NaDNA from viscoelasticity, *Biophys. Chem.* 7 (1978) 235–252.
- [2] P. Kolodner, Oscillatory convection in viscoelastic DNA suspensions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 75 (1998) 167–192.
- [3] M. Krishnan, V.M. Ugaz, M.A. Burns, PCR in a Rayleigh–Bénard convection cell, *Science* 298 (2002) 793.
- [4] D. Braun, A. Libchaber, Trapping of DNA by thermophoretic depletion and convection, *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002) 188103.
- [5] D. Braun, N.L. Goddard, A. Libchaber, Exponential DNA replication by laminar convection, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 158103.
- [6] D. Braun, PCR by thermal convection, *Mod. Phys. Lett. B* 18 (2004) 775–784.
- [7] C.B. Mast, D. Braun, Thermal trap for DNA replication, *Phys. Rev. Lett.* 104 (2010) 188102.
- [8] C.V. Sri Krishna, Effects of non-inertial acceleration on the onset of convection in a second-order fluid-saturated porous medium, *Int. J. Eng. Sci.* 39 (2001) 599–609.

- [9] D. Laroze, J. Martínez-Mardones, J. Bragard, C. Pérez-García, Realistic rotating convection in a DNA suspension, *Physica A* 385 (2007) 433–438.
- [10] D. Laroze, J. Martínez-Mardones, J. Bragard, Thermal convection in a rotating binary viscoelastic liquid mixture, *Eur. Phys. J.: Special Topics* 146 (2007) 291–300.
- [11] G.P. Metcalfe, R.P. Behringer, Critical Rayleigh numbers for cryogenic experiments, *J. Low Temp. Phys.* 78 (1990) 231–246.
- [12] P. Cerisier, A. Rahal, J. Cordonnier, G. Lebon, Thermal influence of boundaries on the onset of Rayleigh–Bénard convection, *Int. J. Heat Mass Transfer* 41 (1998) 3309–3320.
- [13] L.E. Howle, The effect of boundary properties on controlled Rayleigh–Bénard convection, *J. Fluid Mech.* 411 (2000) 39–58.
- [14] C.M. Vest, V.S. Arpaci, Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below, *J. Fluid Mech.* 36 (1969) 613–623.
- [15] M. Takashima, Thermal instability in a viscoelastic fluid layer. I, *J. Phys. Soc. Jpn.* 33 (1972) 511–518.
- [16] R.W. Kolkka, G.R. Ierley, On the convected linear stability of a viscoelastic Oldroyd B fluid heated from below, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 25 (1987) 209–237.
- [17] J. Martínez-Mardones, C. Pérez-García, Linear instability in viscoelastic fluid convection, *J. Phys.: Condens. Matter* 2 (1990) 1281–1290.
- [18] S. Rosenblat, Thermal convection in a viscoelastic liquid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 21 (1986) 201–223.
- [19] H.M. Park, H.S. Lee, Nonlinear hydrodynamic stability of viscoelastic fluids heated from below, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 60 (1995) 1–26.
- [20] H.M. Park, H.S. Lee, Hopf bifurcations of viscoelastic fluids heated from below, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 66 (1996) 1–34.
- [21] J. Martínez-Mardones, R. Tiemann, D. Walgraef, W. Zeller, Amplitude equations and pattern selection in viscoelastic convection, *Phys. Rev. E* 54 (1996) 1478–1488.
- [22] L.A. Dávalos-Orozco, E. Vázquez Luis, Natural convection of a viscoelastic fluid with deformable free surface, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 85 (1999) 257–271.
- [23] J. Martínez-Mardones, R. Tiemann, D. Walgraef, Convective and absolute instabilities in viscoelastic fluid convection, *Physica A* 268 (1999) 14–23.
- [24] J. Martínez-Mardones, R. Tiemann, D. Walgraef, Rayleigh–Bénard convection in binary viscoelastic fluid, *Physica A* 283 (2000) 233–236.
- [25] J. Martínez-Mardones, R. Tiemann, D. Walgraef, Convection in binary viscoelastic fluid, *Rev. Mex. Fis.* 44 (2002) 103–105.
- [26] J. Martínez-Mardones, R. Tiemann, D. Walgraef, Amplitude equation for stationary convection in a binary viscoelastic fluid, *Physica A* 327 (2003) 29–33.
- [27] Z. Li, R.E. Khayat, Three-dimensional thermal convection of viscoelastic fluids, *Phys. Rev. E* 71 (2005) 066305.
- [28] P.C. Dauby, P. Parmentier, G. Lebon, M. Grmela, Coupled buoyancy and thermocapillary convection in a viscoelastic Maxwell fluid, *J. Phys.: Condens. Matter* 5 (1993) 4343–4352.
- [29] G. Lebon, P. Parmentier, D. Teller, P.C. Dauby, Bénard–Marangoni instability in a viscoelastic jeffreys' fluid layer, *Rheol. Acta* 33 (1994) 257–266.
- [30] P. Parmentier, G. Lebon, V. Regnier, Weakly nonlinear analysis of Bénard–Marangoni instability in viscoelastic fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 89 (2000) 63–95.
- [31] D. Getachew, S. Rosenblat, Thermocapillary instability of a viscoelastic liquid layer, *Acta Mech.* 55 (1985) 137–149.
- [32] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover Publications, Inc., New York, NY, 1981.
- [33] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes*, third ed., *The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [34] M. Sokolov, R.I. Tanner, Convective instability of a general viscoelastic fluid heated from below, *Phys. Fluids* 15 (1972) 534–539.
- [35] D.T.J. Hurle, E. Jakeman, E.R. Pike, On the solution of the Bénard problem with boundaries of finite conductivity, *Proc. R. Soc. Lond. A* 296 (1967) 469–475.
- [36] L.A. Dávalos-Orozco, Magnetoconvection in a rotating fluid between walls of very low thermal conductivity, *J. Phys. Soc. Jpn.* 53 (1984) 2173–2176.
- [37] L.A. Dávalos-Orozco, O. Manero, Thermoconvective instability of a second-order fluid, *J. Phys. Soc. Jpn.* 55 (1986) 442–445.
- [38] B.A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, Inc., New York, 1972.

Bibliografía

- [1] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications, Inc., New York, USA, 1981.
- [2] A. B. Finlayson. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York, USA, 1972.
- [3] G. Z. Gershuni and E. M. Zhukovitskii. *Convective Instability of Incompressible Fluids*. Keter Publications, Jerusalem, Israel, 1976.
- [4] M. Krishnan, V. M. Ugaz, and M. A. Burns. PCR in a Rayleigh–Bénard convection cell. *Sci.*, 298:793, 2002.
- [5] J. Allen, M. Kenward, and K. D. Dorfman. Coupled flow and reaction during natural convection PCR. *Microfluid Nanofluid*, 6:121–130, 2009.
- [6] R. Muddu, Y. A. Hassan, and V. M. Ugaz. Rapid PCR thermocycling using microscale thermal convection. *J. Vis. Exp.*, 49:e2366, 2011.
- [7] R. Muddu, Y. A. Hassan, and V. M. Ugaz. Chaotically accelerated polymerase chain reaction by microscale Rayleigh–Bénard convection. *Angew. Chem. Int. Ed.*, 50:3048–3052, 2011.
- [8] W. P. Chou, P. H. Chen, M. Miao, L. S. Kuo, S. H. Yeh, and P. J. Chen. Rapid DNA amplification in a capillary tube by natural convection with a single isothermal heater. *Biotechniques*, 50:52–57, 2011.
- [9] H. F. G. Chang, Y. L. Tsai, C. F. Tsai, C. K. Lin, P. Y. Lee, C. Teng, P. H. Su, and C. C. Jeng. A thermally baffled device for highly stabilized convective PCR. *Biotechnol. J.*, page 201100453, 2012.
- [10] D. Braun and A. Libchaber. Trapping of dna by thermophoretic depletion and convection. *Phys. Rev. Lett.*, 89(18):188103, 2002.

- [11] P. Reineck, C. J. Wienken, and D. Braun. Thermophoresis of a single stranded DNA. *Electrophoresis*, 31:279–286, 2010.
- [12] D. Braun, N. L. Goddard, and A. Libchaber. Exponential DNA replication by laminar convection. *Phys. Rev. Lett.*, 91(15):158103, 2003.
- [13] C. B. Mast and D. Braun. Thermal trap for DNA replication. *Phys. Rev. Lett.*, 104:188102, 2010.
- [14] C. V. Sri Krishna. Effects of non-inertial acceleration on the onset of convection in a second-order fluid-saturated porous medium. *Int. J. Eng. Sci.*, 39(5):599–609, 2001.
- [15] D. Laroze, J. Martínez–Mardones, J. Bragard, and C. Pérez–García. Realistic rotating convection in a DNA suspension. *Phys. A*, 385:433–438, 2007.
- [16] D. Laroze, J. Martínez–Mardones, and J. Bragard. Thermal convection in a rotating binary viscoelastic liquid mixture. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 146(1):291–300, 2007.
- [17] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, USA, third edition, 2007.
- [18] A. Pellew and R. V. Southwell. On maintained convective motion in a fluid heated from below. *Proc. R. Soc. Londond A*, 176(966):313–343, 1940.
- [19] C. J. Chapman and M. R. E. Proctor. Nonlinear Rayleigh–Bénard convection between poorly conducting boundaries. *J. Fluid Mech.*, 101(4):759–782, 1980.
- [20] S. Chapman, C. J. Childress and M. R. E. Proctor. Long wavelength thermal convection between non-conducting boundaries. *Earth Plane. Sci. Let.*, 51(2):362–369, 1980.
- [21] M. R. E. Proctor. Planform selection by finite-amplitude thermal convection between poorly conducting slabs. *J. Fluid Mech.*, 113:469–485, 1981.
- [22] L. A. Dávalos-Orozco. Magnetoconvection in a rotating fluid between walls of very low thermal conductivity. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 53(7):2173–2176, 1984.
- [23] L. A. Dávalos-Orozco and Octavio Manero. Thermoconvective instability of a second-order fluid. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 55(2):442–445, 1986.

- [24] C. M. Vest and V. S. Arpaci. Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below. *J. Fluid Mech.*, 36:613–623, 1969.
- [25] M. Takashima. Thermal instability in a viscoelastic fluid layer. I. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 33(2):511–518, 1972.
- [26] M. Sokolov and R. I. Tanner. Convective instability of a general viscoelastic fluid heated from below. *Phys. Fluid*, 15(4):534–539, 1972.
- [27] R. W. Kolkka and G. R. Ierley. On the convected linear stability of a viscoelastic Oldroyd B fluid heated from below. *Proc. R. Soc. London B*, 231(1262):47–70, 1987.
- [28] J. Martínez–Mardones and C. Pérez–García. Linear instability in viscoelastic fluid convection. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2:1281–1290, 1990.
- [29] S. Rosenblat. Thermal convection in a viscoelastic liquid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 21:201–223, 1986.
- [30] H. M. Park and H. S. Lee. Nonlinear hydrodynamic stability of viscoelastic fluids heated from below. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 60:1–26, 1995.
- [31] H. M. Park and H. S. Lee. Hopf bifurcations of viscoelastic fluids heated from below. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 66:1–34, 1996.
- [32] J. Martínez–Mardones, R. Tiemann, D. Walgraef, and W. Zeller. Amplitude equations and pattern selection in viscoelastic convection. *Phys. Rev. E*, 54(2):1478–1488, 1996.
- [33] L. A. Dávalos-Orozco and E. Vázquez Luis. Natural convection of a viscoelastic fluid with deformable free surface. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 85(3):257–271, 1999.
- [34] J. Martínez–Mardones, R. Tiemann, and D. Walgraef. Convective and absolute instabilities in viscoelastic fluid convection. *Phys. A*, 268(1):14–23, 1999.
- [35] J. Martínez–Mardones, R. Tiemann, and D. Walgraef. Rayleigh–Bénard convection in binary viscoelastic fluid. *Phys. A*, 283(1):233–236, 2000.
- [36] J. Martínez–Mardones, R. Tiemann, and D. Walgraef. Convection in binary viscoelastic fluid. *Rev. Mex. Fís.*, 44(S3):103–105, 2002.

- [37] J. Martínez–Mardones, R. Tiemann, and D. Walgraef. Amplitude equation for stationary convection in a binary viscoelastic fluid. *Phys. A*, 327(1):29–33, 2003.
- [38] Z. Li and R. E. Khayat. Three-dimensional thermal convection of viscoelastic fluids. *Phys. Rev. E*, 71(6):066305, 2005.
- [39] Z. Li and R. E. Khayat. Finite-amplitude Rayleigh–Bénard convection and pattern selection for viscoelastic fluids. *J. Fluid Mech.*, 529:221–225, 2005.
- [40] D. Getachew and S. Rosenblat. Thermocapillary instability of a viscoelastic liquid layer. *Acta Mechanica*, 55:137–149, 1985.
- [41] P. C. Dauby, P. Parmentier, G. Lebon, and M. Grmela. Coupled buoyancy and thermocapillary convection in a viscoelastic Maxwell fluid. *J. Phys.: Condens. Matter*, 5:4343–4352, 1993.
- [42] G. Lebon, P. Parmentier, D. Teller, and P. C. Dauby. Bénard–Marangoni instability in a viscoelastic jeffreys’ fluid layer. *Rheol. Acta*, 33(4):257–266, 1994.
- [43] P. Parmentier, G. Lebon, and V. Regnier. Weakly nonlinear analysis of Bénard–Marangoni instability in viscoelastic fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 89:63–95, 2000.
- [44] M. Sajid, I. Pop, and T. Hayat. Fully developed mixed convection flow of a viscoelastic fluid between permeable parallel vertical plates. *Comput. Math. Appl.*, 59:493–498, 2010.
- [45] Z. Zhang, C. Fu, and W. Tan. Linear and nonlinear stability analyses of thermal convection for Oldroyd-B fluids in a porous media heated from below. *Phys. Fluids*, 20:084103, 2008.
- [46] B. C. Bowen and B. H. Zimm. Molecular weight of T2 NaDNA from viscoelasticity. *Biophys. Chem.*, 7:235–252, 1978.
- [47] P. Kolodner. Oscillatory convection in viscoelastic DNA suspensions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 75:167–192, 1998.
- [48] D. Braun. PCR by thermal convection. *M. Phys. Lett. B*, 18(16):775–784, 2004.
- [49] G. P. Metcalfe and R. P. Behringer. Critical Rayleigh numbers for cryogenic experiments. *J. Low Temp. Phys.*, 78(3):231–246, 1990.

- [50] P. Cerisier, A. Rahal, J. Cordonnier, and G. Lebon. Thermal influence of boundaries on the onset of Rayleigh–Bénard convection. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 41:3309–3320, 1998.
- [51] L. E. Howle. The effect of boundary properties on controlled Rayleigh–Bénard convection. *J. Fluid Mech.*, 411:39–58, 2000.
- [52] J. C. Maxwell. On the dynamical theory of gases. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 157:49–88, 1867.
- [53] R. C. Bird, R. B. Armstrong and O. Hassager. *Dynamics of Polymeric Liquids*, volume 1. Fluid Dynamics. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2nd edition, 1987.
- [54] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 200(1063):523–541, 1950.
- [55] D. T. J. Hurle, E. Jakeman, and E. R. Pike. On the solution of the Bénard problem with boundaries of finite conductivity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 296(1447):469–475, 1967.
- [56] L. M. Pismen. Inertial effects in long-scale thermal convection. *Phys. Lett. A*, 116(5):241–244, 1986.
- [57] A. H. Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley and Sons, Inc., New York, USA, 1981.
- [58] L. M. Pismen. Selection of long-scale oscillatory convective patterns. *Phys. Rev. A*, 38(5):2564–2572, Sep 1988.
- [59] A. C. Newell and J. A. Whitehead. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 38:279–303, 1969.
- [60] L. A. Segel. Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 38:203–224, 1969.
- [61] D. Schlüter, A. Lortz and F. H. Busse. On the stability of steady finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 23:129–144, 1965.
- [62] F. H. Busse. Non-stationary finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 28:223–239, 1967.
- [63] F. H. Busse. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle. *J. Fluid Mech.*, 30:625–649, 1967.

- [64] F. H. Busse. Non-linear properties of thermal convection. *Rep. Prog. Phys.*, 41:1929–1967, 1978.
- [65] R. M. Clever and F. H. Busse. Instabilities of longitudinal rolls in the presence of Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 229:517–529, 1991.
- [66] B. Albaalbaki and R. E. Khayat. Pattern selection in the thermal convection of non-Newtonian fluids. *J. Fluid Mech.*, 668:500–550, 2011.
- [67] R. B. Hoyle. Universal instabilities of rolls, squares and hexagons. In P. A. Tyvand, editor, *Time-dependent nonlinear convection*, volume 19, chapter 2, pages 83–114. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1998.
- [68] R. Hoyle. *Pattern Formation: An Introduction to Methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [69] Stephen M. Cox. The onset of thermal convection between poorly conducting horizontal boundaries in the presence of a shear flow. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(5):1317–1328, 1996.
- [70] Stephen M. Cox. Long-wavelength thermal convection in a weak shear flow. *IMA J. Appl. Math.*, 58:159–184, 1997.
- [71] C. Godréche and P. Manneville. *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*. Aléa-Saclay. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [72] P. Manneville. *Instabilities, chaos and turbulence*. Imperial College Press, London, 2004.
- [73] W. Eckhaus. *Studies in Non-Linear Stability Theory*, volume 6 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-verlag, New York, 1965.
- [74] F. H. Busse and N. Riahi. Nonlinear convection in a layer with nearly insulating boundaries. *J. Fluid Mech.*, 96(02):243–256, 1980.
- [75] N. Riahi. Nonlinear thermal convection with finite conducting boundaries. *J. Fluid Mech.*, 152:113–123, 1985.
- [76] P. Le Gal and V. Croquette. Appearance of a square pattern in a Rayleigh–Bénard experiment. *Phys. Fluids*, 31(11):3440–3442, 1988.
- [77] E. Knobloch and M. R. E. Proctor. Nonlinear periodic convection in double–diffusive systems. *J. Fluid Mech.*, 108:291–316, 1981.

- [78] E. Palm. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection. *J. Fluid Mech.*, 8(02):183–192, 1960.
- [79] D. B. White. The planforms and onset of convection with a temperature-dependent viscosity. *J. Fluid Mech.*, 191:247–286, 1988.
- [80] A. A. Golovin, A. A. Nepomnyashchy and L. M. Pismen. Pattern formation in large-scale marangoni convection with deformable interface. *Physica D*, 81(1-2):117–147, 1995.
- [81] L. Shtilman and G. Sivashinsky. Hexagonal structure of large-scale marangoni convection. *Physica D*, 52(2–3):477 – 488, 1991.
- [82] I. Pérez-Reyes and L. A. Dávalos-Orozco. Effect of thermal conductivity and thickness of the walls in the convection of a viscoelastic Maxwell fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 54:5020–5029, 2011.