



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**ESTUDIO DE UN POLARÍMETRO DE
RETARDADORES VARIABLES DE
CRISTAL LÍQUIDO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

CARLOS ALBERTO VELÁZQUEZ OLIVERA

DIRECTOR DE TESIS: DR. NEIL CHARLES BRUCE

**COMITÉ TUTORAL: DR. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES
DR. RUFINO DÍAZ URIBE**





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres.

ÍNDICE

0. Resumen.	1
1. Introducción.	3
1.1. Nueva propuesta para la medición experimental: Esparcímetro.	4
1.2. Componente bajo estudio: Polarímetro.	5
1.3. Desviaciones de la situación ideal en el polarímetro.	6
1.4. Objetivo de esta tesis.	7
2. Teoría de la medición de la polarización:	
Vectores de Stokes y Matrices de Mueller.	9
2.1. Introducción histórica.	9
2.2. La elipse de polarización.	11
2.2.1. El campo óptico instantáneo y la elipse de polarización.	12
2.2.2. Casos especiales de la elipse de polarización.	14
2.3. Vectores de Stokes.	15
2.3.1. Parámetros de polarización de Stokes.	16
2.3.2. El vector de Stokes.	19
2.3.3. Medición del vector de Stokes.	21
2.3.4. Parámetros de Stokes para luz no polarizada y luz parcialmente polarizada.	24
2.4. Matrices de Mueller.	25
2.4.1. Matriz de Mueller de un polarizador.	26
2.4.2. Matriz de Mueller de un retardador.	28
2.4.3. Matriz de Mueller de un rotador.	30
2.4.4. Matrices de Mueller para elementos polarizadores rotados.	32
3. Modelo y correcciones.	35
3.1. Diseño experimental: componentes y características.	35
3.2. Matrices de Mueller del sistema ideal.	39
3.3. Correcciones.	43
3.3.1. Deducción de las expresiones analíticas para los errores.	43
3.3.2. Programa para desplegar el comportamiento gráfico de los parámetros de Stokes inducido por los errores.	52
3.3.3. Ajuste de la curva voltaje-retardancia.	58
3.4. Propuesta de método de alineación.	61
4. Conclusiones.	63
4.1. Correspondencia del modelo con el experimento.	63
4.2. Implementación de los resultados.	63

4.3. Investigaciones a futuro.	64
A1. Bibliografía y artículos de referencia.	67
A2. Programa.	69
A3. Artículos publicados.	73

0. RESUMEN

A continuación se presenta el trabajo realizado para caracterizar el comportamiento de un polarímetro de retardadores variables de cristales líquidos. Se estudiaron con detalle los casos en que dicho polarímetro se encuentra ligeramente fuera de la situación ideal donde los ejes de todos sus componentes están correctamente alineados. Para lograr esto, primero se extendieron las formulas que expresan la relación entre los parámetros de Stokes de la luz incidente y la intensidad detectada a otras más generales. Estas nuevas formulas corrigen la aparición de posibles errores en la alineación. Luego se creó un programa para analizar gráficamente la variación de la señal detectada respecto de la señal ideal que se debería detectar. Por último, se consideró el error debido a la no linealidad de la relación entre el voltaje aplicado a los retardadores y la retardancia obtenida. A partir de los resultados de los tres estudios anteriores se determinó cuales de las componentes de la señal detectada al final del dispositivo eran las más estables y se propuso un protocolo de alineación para el polarímetro.

0. ABSTRACT

This work consists of the characterization of the behavior of a variable retarder polarimeter made with liquid crystal retarders. We study in detail the cases where the polarimeter is located slightly off the ideal situation where the axes of all the components are properly aligned. To accomplish this, we first extend the formulas expressing the relationship between the Stokes parameters of the incident light and the intensity detected to other more general formulas. These new formulas correct the effects of the possible errors in the alignment. Then a program was written to analyze graphically the variation of the detected signal with respect to the ideal signal which should be detected. Finally, we consider the error due to the nonlinearity of the relationship between the voltage applied to the retarders and retardance obtained. From the results of the these studies we determine which of the components of the detected signal at the output of the device are the most stable and propose a protocol for the alignment of the polarimeter.

1. INTRODUCCIÓN

La medición de las propiedades de la luz esparcida por superficies rugosas tiene muchas aplicaciones en áreas científicas y tecnológicas, por ejemplo en la interpretación de imágenes de sensores de percepción remota o en el escaneo y comprobación de circuitos impresos. Aunque muchos de los avances teóricos, numéricos y experimentales en este ámbito han utilizado superficies con estructura unidimensional (por ejemplo, líneas sobre un soporte plano) muchas de las aplicaciones implican esparcimiento sobre superficies con estructura bidimensional. Este tipo de superficies han resultado ser más difíciles de medir experimentalmente y de analizar teóricamente. Sin embargo, los avances recientes en este campo han abierto mayores posibilidades de estudiar el problema del esparcimiento bidimensional [3] [4]. Para verificar la validez de las nuevas teorías y métodos numéricos desarrollados para estos casos es importante comparar sus resultados con mediciones experimentales. Para una superficie bidimensional esto implica medir la luz esparcida en el hemisferio por encima de la superficie rugosa. Este es el análogo de la medición en un solo plano para el caso de superficies rugosas unidimensionales.

La medición de la polarización de la luz esparcida, a través de la matriz de Mueller, es esencial para obtener más información sobre la interacción de la luz con la superficie. En superficies unidimensionales, por la simetría de la superficie, solo hay 4 componentes de la matriz de Mueller que no son iguales a cero, pero en superficies bidimensionales los 16 elementos de la matriz de Mueller pueden ser distintos de cero. En consecuencia, la medición de la matriz de Mueller es mucho más complicada y tardada en este último caso.

Este trabajo es un primer paso en la búsqueda de un método rápido y eficiente para la medición de los 16 elementos de la matriz de Mueller de dispersión bidimensional. Como paso previo para realizar esto se estudia un polarímetro de Stokes, que es la mitad de un polarímetro de matriz de Mueller. Para implementar el polarímetro de Stokes se adquirieron los retardadores variables de cristal líquido que se analizan en esta tesis.

1.1 NUEVA PROPUESTA PARA LA MEDICIÓN EXPERIMENTAL: ESPARCÍMETRO

En el CCADET se está desarrollando un esparcímetero de luz polarizada que se utilizará para medir las propiedades de la luz esparcida por superficies rugosas con estructura bidimensional. En un artículo previo se presentó el diseño mecánico de este esparcímetero [19]; actualmente se encuentra en proceso de fabricación en los talleres del CCADET. La Figura 1 muestra el diseño del esparcímetero, que consiste en una mesa giratoria más dos brazos móviles, uno de ellos se encuentra montado sobre la mesa misma y el otro tiene un soporte independiente.

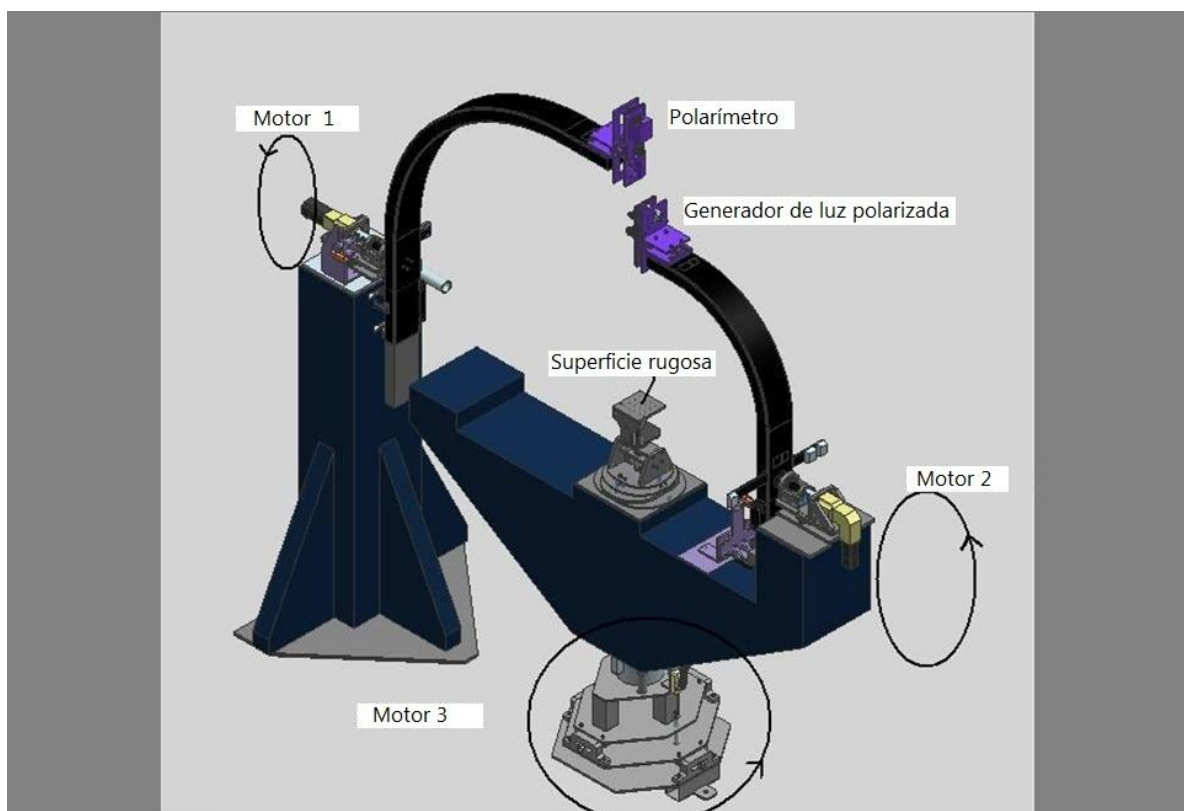


Figura 1. Esparcímetero para la medición de propiedades de sustratos con estructura bidimensional.

La superficie rugosa a analizar se encuentra en el centro de la mesa sobre una montura especial que se puede ajustar en altura considerando los diferentes tipos de sustratos y grosores. Los componentes ópticos de iluminación consisten en un diodo láser con una longitud de onda de 633nm, una lente colimadora y los componentes generadores de polarización, que cambiarán de acuerdo al tipo de experimento que deseemos realizar. El brazo con los componentes de iluminación se puede girar para dar a la luz el ángulo de incidencia deseado sobre la superficie a analizar. En el otro brazo se encuentra la óptica de detección, que consiste en una lente de recolección, los componentes para el análisis del

estado de polarización (que describiremos brevemente más adelante) y un detector (PMT o fotodiodo). Este brazo del esparcímetro también se puede girar a cualquier ángulo de inclinación. Un motor hace girar la mesa en 360° , mientras otros giran los brazos con la óptica de iluminación y detección para recorrer el ángulo cenital de 0° a 90° , con lo que se logra una exploración completa del hemisferio sobre la superficie rugosa. La única parte que no se puede medir es la parte bloqueada por el brazo que sostiene la óptica de iluminación, lo que corresponde a aproximadamente 1.5° . La resolución de todas las rotaciones es de 0.25° . Las rotaciones y la lectura de los datos del detector se llevan a cabo mediante un programa escrito para LabVIEW™.

1.2. COMPONENTE BAJO ESTUDIO: POLARÍMETRO

Respecto a los componentes ópticos para analizar el estado de polarización de la luz se decidió implementar un polarímetro de retardadores variables de cristales líquidos; los retardadores utilizados fueron surtidos por Medowlark™, y funcionan cambiando su valor de retardancia en función del voltaje que se les aplica. Para comprender el funcionamiento del polarímetro es necesario utilizar la teoría de vectores de Stokes y matrices de Mueller.

La teoría de la medición de la polarización está bien establecida para el caso de polarímetros hechos con componentes ópticos de propiedades fijas [1]. El uso de retardadores variables como componentes para polarímetros es relativamente reciente [9][10][12]; los retardadores de cristales líquidos solo son un ejemplo de este tipo de retardadores.

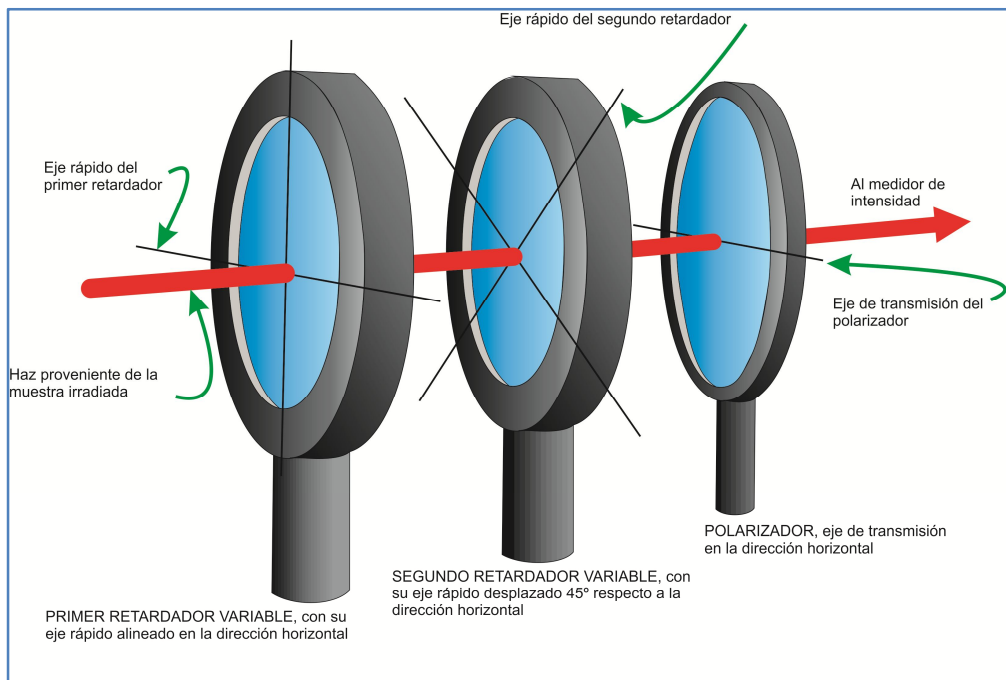


Figura 2. Polarímetro de retardadores variables, corresponde a la parte analizadora del esparcímetro.

A la temperatura y voltajes utilizados durante los experimentos, los cristales líquidos que componen los retardadores están en fase nemática; se utiliza como cara del retardador una capa de material transparente y capaz de mantener alineadas paralelamente a ella a las moléculas del cristal líquido, y de esta manera, sin aplicación de voltaje se tiene la máxima anisotropía de la sustancia; las propiedades de las moléculas del cristal líquido son tales que estas tratan de alinearse en la dirección de un campo eléctrico aplicado, y por ello se coloca uno de tal manera que tienda a hacerlas quedar en dirección perpendicular a la cara del elemento polarizador, disminuyendo la anisotropía en la dirección del haz y por tanto disminuyendo la retardancia hasta un valor mínimo.

El esquema básico del polarímetro que se ha implementado en este caso se encuentra en la Figura 2, su funcionamiento es como sigue: primero la luz pasa a través de dos retardadores de cristales líquidos con una diferencia de alineación de sus ejes rápidos de 45° y finalmente a través de un polarizador lineal con su eje de transmisión paralelo al eje rápido del primer retardador; mientras se lleva a cabo la medición, cada uno de los retardadores recibe una señal de voltaje sinusoidal a frecuencias distintas, al final se miden las componentes armónicas de la señal detectada por el medidor de intensidad; un análisis posterior de estos valores nos permite conocer el estado de polarización de la luz incidente en el polarímetro.

1.3. DESVIACIONES DE LA SITUACION IDEAL EN EL POLARIMETRO

Los retardadores y el polarizador utilizado tienen monturas que permiten variar el ángulo de alineación de los ejes rápidos (en el caso de los retardadores) y del eje de transmisión del polarizador. Esta característica, que los hace muy versátiles a la hora de su utilización en distintos experimentos dentro del laboratorio de óptica, tiene la desventaja de obligarnos a considerar lo que puede pasar cuando no están alineados perfectamente; en algunos experimentos esta desalineación puede no tener consecuencias prácticas, sin embargo en otras instancias su alineación correcta resulta crucial. Entonces, en cada nuevo experimento es importante determinar cuál es la sensibilidad de los resultados a la alineación de los componentes.

Respecto a la señal detectada en el medidor de intensidad existen ecuaciones reportadas en la literatura que nos indican cómo hacer su análisis para calcular el estado de polarización de la luz incidente, sin embargo, debido a las características particulares de los retardadores que hemos utilizado se han tenido que modificar estas ecuaciones usuales.

Además en los retardadores utilizados la relación voltaje-retardancia no es lineal y también hemos querido tomar en cuenta esto como un posible generador de errores en las mediciones (ver la Figura 3).

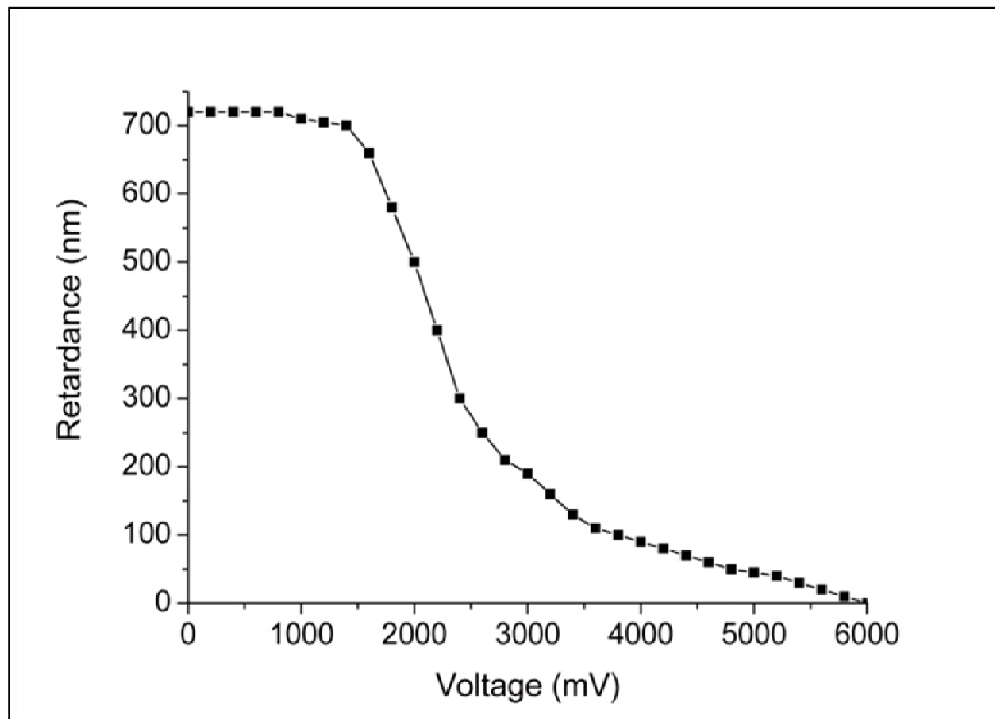


Figura 3. Variación de la retardancia con el voltaje aplicado en los retardadores de cristales líquidos.

1.4. OBJETIVO DE ESTA TESIS

El primer objetivo de esta tesis es caracterizar el comportamiento del polarímetro en una situación de funcionamiento ideal; esto significa que la alineación de los componentes que lo constituyen (ejes de retardadores, eje de transmisión del polarizador) sea óptima; luego interesa saber cuál es el efecto que tendría la desalineación de estos componentes en la medición de las características de un haz de luz; a partir de esto se desea determinar si la alineación de los ejes de los componentes ópticos es un factor crítico para la medición correcta de la polarización de la luz esparcida por la superficie y de ser necesario sugerir cómo corregir el dispositivo cuando se encuentra que este no está en la situación ideal. Además, se analizará el efecto de la no linealidad de la relación voltaje-retardancia en los retardadores.

Además se ha diseñado un programa que muestra gráficamente los resultados teóricos, de manera que se puedan comparar fácilmente con las mediciones en el laboratorio, y así determinar de una manera práctica si los componentes de detección de polarización están debidamente alineados. Este programa está escrito en *Mathematica*TM, y su estructura y los resultados comparados con mediciones se presentarán en capítulos subsiguientes.

2. TEORÍA DE LA MEDICIÓN DE LA POLARIZACIÓN: VECTORES DE STOKES Y MATRICES DE MUELLER

Para poder hacer una discusión apropiada de los experimentos que se llevaron a cabo y de las propuestas que hacemos para mejorarlos, necesitamos un conjunto de conocimientos previos, sobre todo en el campo de la medición de la polarización, por ello en los siguientes apartados expondremos ampliamente esta teoría, sus bases históricas, sus enunciados matemáticos y las consecuencias prácticas que de ella se derivan. Una vez que terminemos esta breve exposición tendremos los conceptos necesarios, tanto físicos como matemáticos, para poder plantear de una manera clara y consistente el trabajo que hemos desarrollado acerca del experimento y principalmente sobre el comportamiento del polarímetro.

2.1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

A mediados del siglo XIX la teoría ondulatoria de la luz desarrollada por Augustin Jean Fresnel (1788-1827) y sus sucesores era un triunfo. Esta teoría explicaba satisfactoriamente los principales fenómenos ópticos de la época: interferencia, difracción y polarización. Por otra parte, Fresnel había aplicado con éxito la teoría ondulatoria al problema de la propagación y la polarización de la luz en medios anisotrópicos (presente en algunos tipos de cristales). Otro experimento llevado a cabo en 1851 por Armand Hypolite Louis Fizeau (1819-1896), mostró que la velocidad de la luz en un medio ópticamente denso es menor que en el vacío, un resultado predicho por la teoría ondulatoria. La teoría corpuscular, en cambio, había predicho que en un medio ópticamente denso la velocidad de la luz sería mayor que en el vacío. Por lo tanto, la teoría ondulatoria de Fresnel parecía ser exitosa en todos los aspectos. Sin embargo, para el año 1852 había una crisis de proporciones bastante significativas en la óptica. Irónicamente esta crisis había sido iniciada por él mismo Fresnel 35 años antes.

En el año de 1817 Fresnel, con la ayuda de su colega François Dominique Arago (1786-1853), llevó a cabo una serie de experimentos para determinar la influencia de la

polarización en los experimentos de interferencia de Thomas Young (1773-1829). Al finalizar estos experimentos resumieron sus resultados en una serie de enunciados que hoy conocemos como las leyes de interferencia de Fresnel-Arago; sin embargo fueron incapaces de dar una explicación satisfactoria a los resultados en base a su hipótesis original de que la luz consistía en vibraciones longitudinales. Arago comunicó estos resultados desconcertantes a Young, quien sugirió que los experimentos se podrían entender si las vibraciones de la luz fueran transversales, las cuales contendrían dos componentes ortogonales, y no tuvieran componente longitudinal; esto explicó una parte de lo que se había observado, pero otros aspectos aun quedaron sin solución.

Después de esto, Fresnel se dio a la tarea de buscar la descripción matemática correcta de sus leyes de interferencia. La teoría ondulatoria de Fresnel es una descripción de la luz en términos de su amplitud, y fue un éxito para la descripción de la luz completamente polarizada, es decir luz con polarización elíptica y sus estados degenerados, polarización lineal y circular. Sin embargo, los experimentos de Fresnel-Arago se llevaron a cabo con luz que no estaba completamente polarizada. Para hacer la formulación matemática de los experimentos de Fresnel-Arago era necesaria una descripción para este tipo de luz, pero para sorpresa de Fresnel, fue incapaz de encontrar las expresiones matemáticas adecuadas sobre la base de su formulación.

Para 1852 ya habían transcurrido 35 años desde que se habían enunciado las leyes de Fresnel-Arago y el problema aún seguía abierto. Al parecer, la luz no polarizada, así como la luz que hoy llamamos parcialmente polarizada, no se podía describir dentro del marco de la teoría ondulatoria de Fresnel, lo cual implicaba una crisis dentro de la óptica.

El año 1852 es un hito en la óptica, porque en ese año Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) publicó dos artículos notables en este campo. El primero apareció con el título “Sobre la composición y resolución de corrientes de luz polarizada a partir de diferentes fuentes”, un título que parece estar muy lejos de las leyes de la interferencia de Fresnel-Arago; el documento en si no parece haber atraído mucha atención. Sin embargo, ahora es considerado como uno de los grandes artículos de la óptica clásica. Después de una lectura cuidadosa de este artículo, se encuentra que proporciona la formulación matemática necesaria para describir cualquier estado de polarización de la luz, pero sobre todo, la formulación matemática para la luz no polarizada; ahora se podrían escribir los enunciados matemáticos de las leyes de interferencia de Fresnel-Arago. Por último, Stokes mostró que cualquier estado de polarización (incluso la luz no polarizada) podía describirse dentro del marco de la teoría ondulatoria.

Stokes tuvo éxito donde todos los demás habían fracasado debido a que desarrolló un enfoque muy novedoso para abordar el problema de la polarización. Comenzó abandonando el camino infructuoso de sus predecesores que intentaba describir la luz en términos solo de amplitudes y recurrió a una definición experimental. En concreto, llegó a una formulación de la polarización en términos de la intensidad, o sea, en términos de una cantidad medible (que es equivalente a lo que hoy día conocemos como “una observable”). Este fue un punto de vista completamente único para el siglo XIX.

Stokes mostró que su formulación podía ser utilizada para describir no sólo luz no polarizada o parcialmente polarizada, sino cualquier estado de polarización, incluyendo a la luz completamente polarizada. Por lo tanto este punto de vista es completamente general. Su artículo está dedicado a describir con detalle, con álgebra de mediados del siglo XIX, las propiedades de varias combinaciones de luz polarizada y sin polarizar. Casi al final, Stokes muestra su descubrimiento de cuatro parámetros, que ahora se conocen como los parámetros de polarización de Stokes, que pueden caracterizar cualquier estado de polarización. A diferencia de la formulación en términos de la amplitud del campo óptico, estos son directamente accesibles a la medición. A continuación, utilizó estos parámetros para obtener una fórmula matemática correcta para la luz no polarizada.

El gran artículo sobre polarización de Stokes fue prácticamente olvidado porque a mediados del siglo XIX se creía que la óptica estaba completa y los físicos habían volcado toda su atención a la investigación del campo electromagnético y la mecánica estadística de moléculas. Su artículo fue enterrado en la literatura científica casi por un siglo. Su importancia fue reconocida finalmente con su redescubrimiento en 1940 por el Premio Nobel Chandrasekhar Subrahmanya (1910-1995), que utilizó los parámetros de Stokes para incluir los efectos de la luz polarizada en las ecuaciones de transferencia radiativa.

2.2. LA ELIPSE DE POLARIZACIÓN

Huygens fue el primero en sugerir que la luz no era una cantidad escalar basado en sus trabajos sobre propagación de luz a través de cristales. Más tarde Newton retomaría estos resultados y diría que la luz parecía tener “lados”. Este carácter vectorial de la luz se llama polarización. Si establecemos una analogía con la mecánica y equiparamos un medio óptico a un medio elástico isotrópico, entonces tendremos que describir el campo óptico mediante oscilaciones en tres grados de libertad independientes: $u_x(r,t)$, $u_y(r,t)$ y $u_z(r,t)$. En consecuencia, necesitamos tres ecuaciones de onda independientes para describir la propagación de la perturbación óptica, esto es:

$$\nabla^2 u_i(r, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u_i(r, t)}{\partial t^2} \quad i = x, y, z \quad (2.1)$$

donde $v = \omega/k$ es la velocidad de propagación de la oscilación y $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ es un sistema de coordenadas cartesiano. Las funciones $u_x(r, t)$ y $u_y(r, t)$ se conocen como las componentes transversales, y $u_z(r, t)$ como la componente longitudinal, cuando la propagación es en la dirección z . De acuerdo con (2.1) los componentes de campo óptico son:

$$u_x(\mathbf{r}, t) = u_{0x} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_x) \quad (2.2a)$$

$$u_y(\mathbf{r}, t) = u_{0y} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_y) \quad (2.2b)$$

$$u_z(\mathbf{r}, t) = u_{0z} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_z) \quad (2.2c)$$

En 1818, Fresnel y Arago llevaron a cabo sus investigaciones fundamentales sobre el experimento de interferencia de Young, usando combinaciones de luz polarizada y sin polarizar. Después de una cantidad considerable de esfuerzo se vieron obligados a concluir que la componente longitudinal (2.2c) no existe. Es decir, la luz consiste únicamente de las dos componentes transversales (2.2a) y (2.2b). Por tanto, si tomamos la dirección de propagación en la dirección z el campo óptico en el espacio libre se describe mediante:

$$u_x(\mathbf{r}, t) = u_{0x} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_x) \quad (2.3a)$$

$$u_y(\mathbf{r}, t) = u_{0y} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_y) \quad (2.3b)$$

donde u_{0x} , u_{0y} son las amplitudes máximas y δ_x , δ_y son fases arbitrarias. No hay ninguna razón a priori para suponer que solo existen las componentes transversales basándose en la suposición de que la luz se propaga en un medio elástico (el éter de la óptica). Este resultado fue explicado con el desarrollo de una nueva teoría, que ahora llamamos la teoría electrodinámica de Maxwell. Uno de los resultados inmediatos de la resolución de las ecuaciones de Maxwell es que en el espacio libre sólo existen las componentes transversales del campo electromagnético (que se identifican como las componentes del campo óptico) y no hay componente longitudinal.

2.2.1. EL CAMPO ÓPTICO INSTANTÁNEO Y LA ELIPSE DE POLARIZACIÓN

En la Figura 4 se muestra el campo óptico propagándose en la dirección z con sus componentes transversales. Las componentes transversales están representadas por:

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x) \quad (2.4a)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\tau + \delta_y) \quad (2.4b)$$

donde $\tau = \omega t - kz$ se conoce como el propagador. Los subíndices x e y hacen referencia a las componentes en las direcciones ortogonales del sistema coordenado; E_{0x} y E_{0y} son las amplitudes máximas, y δ_x y δ_y son las fases respectivas. A medida que el campo se propaga, $E_x(z, t)$ y $E_y(z, t)$ dan lugar a un vector resultante. Este vector describe un lugar geométrico de puntos en el espacio, o sea generan una curva. Para saber que curva es esta, escribamos a (2.4a) y (2.4b) de la siguiente manera:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x \quad (2.5a)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y \quad (2.5b)$$

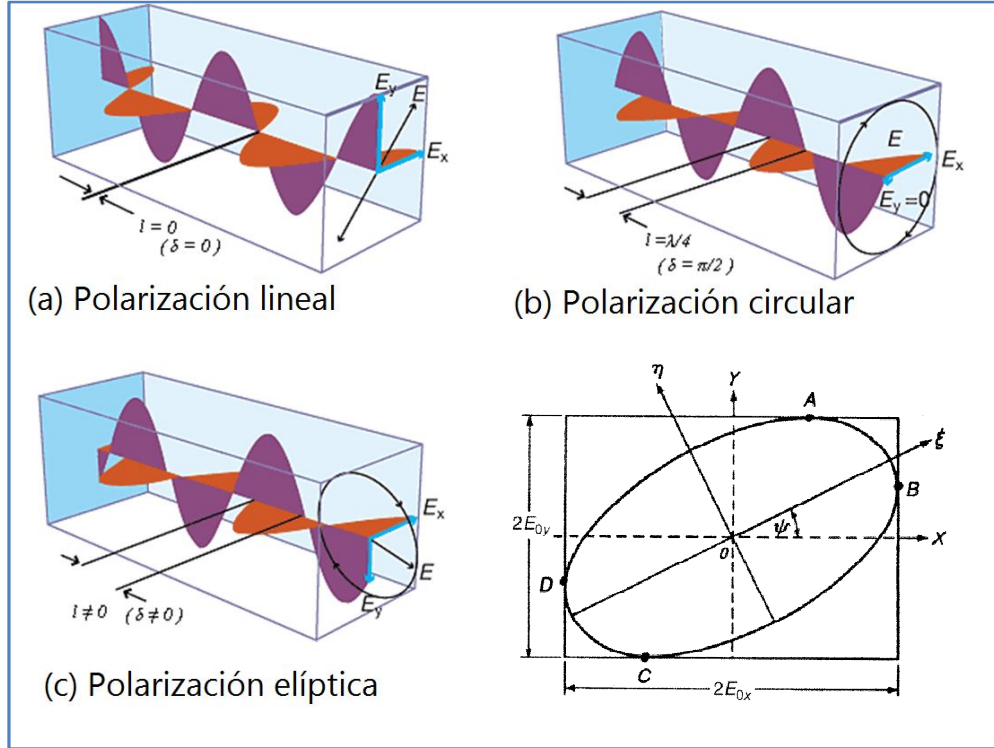


Figura 4. Distintos estados de polarización y ángulos característicos de la elipse de polarización.

Por lo tanto:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \sin \delta_x = \cos \tau \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2.6a)$$

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta_x = \sin \tau \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2.6b)$$

Elevando (2.6a) y (2.6b) al cuadrado y sumándolos obtenemos:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.7)$$

donde

$$\delta = \delta_y - \delta_x \quad (2.8)$$

La ecuación (2.7) corresponde a la ecuación de una elipse. Esto nos muestra que en cualquier instante de tiempo el vector del campo óptico traza una elipse a medida que se propaga. Este comportamiento se conoce como polarización de la luz, y la curva descrita por (2.7) es llamada la elipse de polarización. En la Figura 5 se muestra la elipse inscrita en un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y cuyas longitudes son $2E_{0x}$ y $2E_{0y}$.

2.2.2. CASOS ESPECIALES DE LA ELIPSE DE POLARIZACIÓN

La elipse de polarización (2.7) tiene casos especiales para ciertos valores de E_{0x} , E_{0y} y δ que son de interés y a continuación describimos brevemente.

a) $E_{0y} = 0$. En este caso $E_y(z,t)$ es cero y (2.4) se convierte en:

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x) \quad (2.9)$$

Solo hay oscilación en la dirección x . Llamamos a este caso polarización lineal horizontal. Del mismo modo, si $E_{0x} = 0$ y $E_y(z,t) \neq 0$, entonces tenemos una oscilación lineal a lo largo del eje y , y decimos que tenemos polarización lineal vertical.

b) $\delta = 0$ ó $\delta = \pi$. La ecuación (2.7) se reduce a:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} \pm 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \quad (2.10)$$

O bien:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \pm \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 0 \quad (2.11)$$

De dónde deducimos que:

$$E_y = \pm \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right) E_x \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) es de una recta con pendiente $\pm(E_{0y}/E_{0x})$ que pasa por el origen, entonces decimos que tenemos polarización lineal con pendiente $\pm(E_{0y}/E_{0x})$. Si $E_{0x}=E_{0y}$, entonces:

$$E_y = \pm E_x \quad (2.13)$$

El valor positivo nos dice que tenemos luz linealmente polarizada a $+45^\circ$, y el valor negativo nos dice que tenemos la luz linealmente polarizada a -45° .

c) $\delta=\pi/2$ ó $\delta = 3\pi/2$. La elipse de polarización se reduce a:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1 \quad (2.14)$$

Esta es la ecuación estándar de una elipse.

d) $E_{0x} = E_{0y}$ y $\delta = \pi/2$ ó $\delta = 3\pi/2$. La elipse de polarización ahora se reduce a:

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{E_0^2} = 1 \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) es la ecuación de un círculo. En esta condición decimos que tenemos luz con polarización circular derecha o izquierda (para $\delta = \pi/2$ ó $3\pi/2$, respectivamente). Una vez más, observemos que (2.15) no puede determinar por si misma si el valor de δ es $\pi/2$ ó $3\pi/2$.

Aparte del hecho de que estos estados degenerados aparecen de manera natural como casos especiales de la elipse de polarización, hay otra razón fundamental para resaltar su importancia: son relativamente fáciles de crear en un laboratorio de óptica y se puede realizar una gran cantidad de experimentos a partir de ellos, y pueden ser utilizados para generar otros estados de polarización más generales.

2.3. VECTORES DE STOKES

La descripción de la luz en términos de la elipse de polarización es muy útil porque nos permite representar muchos estados a partir de una sola ecuación, además de que su deducción a partir de leyes fundamentales es sencilla y directa.

Sin embargo es insuficiente por varias razones. Primero, a medida que el haz de luz se avanza por el espacio el vector eléctrico o magnético traza una elipse en el plano transversal a la dirección de propagación, pero en un intervalo de tiempo del orden de 10^{-15} segundos. Este período es demasiado corto para permitirnos seguir el trazo de esta elipse; por lo tanto, nos es imposible observarla. Otra limitación es que la elipse sólo es aplicable a luz completamente polarizada, no se puede utilizar para describir luz parcialmente polarizada o luz no polarizada. Esta es una limitación especialmente grave porque en la naturaleza la luz suele encontrarse en estos estados.

Esto quiere decir que la elipse de polarización es una idealización del comportamiento real de la luz, y solo es correcta en un instante determinado de tiempo o por intervalos extremadamente cortos. Estas limitaciones nos obligan a considerar una descripción alternativa en la que sólo entren cantidades que podamos medir.

La cantidad que se puede observar es la intensidad, que se obtiene haciendo un promedio en el tiempo del cuadrado de la amplitud del campo. Esto sugiere que si hacemos un promedio temporal de la elipse de polarización debemos arribar a las observables de la polarización. Cuando hacemos esto se obtienen cuatro parámetros, que son exactamente los parámetros de Stokes. Por lo tanto los parámetros de Stokes son una consecuencia lógica de la teoría ondulatoria. Por otra parte, los parámetros de Stokes dan una descripción completa de cualquier estado de polarización de la luz. Y más importante, los parámetros de Stokes son directamente medibles.

2.3.1. PARÁMETROS DE POLARIZACIÓN DE STOKES

Consideremos un par de ondas planas ortogonales entre sí desplazándose en la dirección $+z$, y situémonos en el punto $z = 0$, estas ondas no son necesariamente monocromáticas, y están representadas por las ecuaciones:

$$E_x(t) = E_{0x}(t) \cos[\omega t + \delta_{0x}(t)] \quad (2.16a)$$

$$E_y(t) = E_{0y}(t) \cos[\omega t + \delta_{0y}(t)] \quad (2.16b)$$

donde E_{0x} y E_{0y} son las amplitudes instantáneas, ω es la frecuencia angular instantánea, y $\delta_{0x}(t)$ y $\delta_{0y}(t)$ son los factores de fase instantáneos. En todo momento las amplitudes y los factores de fase oscilan lentamente en comparación con las rápidas variaciones asociadas a la frecuencia angular de las ondas. Al hacer la eliminación explícita del término ωt entre (2.16a) y (2.16b) se obtiene la elipse de polarización, la cual en general solo es válida en un instante dado de tiempo:

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2(t)} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2(t)} - 2 \frac{E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}(t)E_{0y}(t)} \cos \delta(t) = \sin^2 \delta(t) \quad (2.17)$$

donde hemos definido $\delta(t) = \delta_y(t) - \delta_x(t)$.

En el caso de ondas monocromáticas, las amplitudes y las fases son constantes en todo momento, por lo que (2.17) se reduce a:

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.18)$$

Mientras E_{0x} , E_{0y} y δ son constantes, E_x y E_y siguen siendo dependiendo implícitamente del tiempo, como vemos en (2.16a) y (2.16b). Por eso hemos escrito $E_x(t)$ y $E_y(t)$ en (2.18). Para representar (2.18) en términos de las observables, hay que hacer un promedio de su valor durante el tiempo de observación. Debido a que este intervalo es muy largo en comparación con el tiempo de oscilación de la onda, podemos considerarlo como infinito. Sin embargo, en vista de la periodicidad de $E_x(t)$ y $E_y(t)$, el promedio de (2.18) sobre todo el tiempo de medición es equivalente al promedio durante un único periodo de oscilación. El promedio temporal se representa mediante $\langle \dots \rangle$, por lo que podemos escribir (2.18) como:

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2} - 2 \frac{\langle E_x(t)E_y(t) \rangle}{E_{0x}E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.19)$$

donde:

$$\langle E_i(t)E_j(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_i(t)E_j(t) dt \quad i, j = x, y \quad (2.20)$$

Multiplicando (2.19) por $4E_{0x}^2(t)E_{0y}^2(t)$, vemos que:

$$4E_{0y}^2\langle E_x^2(t)\rangle + 4E_{0x}^2\langle E_y^2(t)\rangle - 8E_{0x}E_{0y}\langle E_x(t)E_y(t)\rangle \cos \delta = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2 \quad (2.21)$$

A partir de (2.16a), (2.16b) y (2.20) podemos encontrar los valores medios de (5):

$$\langle E_x^2(t)\rangle = \frac{1}{2}E_{0x}^2 \quad (2.22a)$$

$$\langle E_y^2(t)\rangle = \frac{1}{2}E_{0y}^2 \quad (2.22b)$$

$$\langle E_x(t)E_y(t)\rangle = \frac{1}{2}E_{0x}E_{0y} \cos \delta \quad (2.22c)$$

Sustituyendo (2.22a), (2.22b) y (2.22c) en (2.21) obtenemos:

$$2E_{0y}^2E_{0x}^2 + 2E_{0y}^2E_{0x}^2 - (2E_{0x}E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2 \quad (2.23)$$

Dado que queremos expresar el resultado final en términos de intensidades es conveniente sumar y restar la cantidad $E_{0x}^4 + E_{0y}^4$ al lado izquierdo de (2.23); luego completamos el trinomio cuadrado perfecto y agrupamos términos para llegar a:

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - (2E_{0x}E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2 \quad (2.24)$$

Ahora escribimos las cantidades dentro de los paréntesis de la siguiente manera:

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.25a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.25b)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \quad (2.25c)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \quad (2.25d)$$

Y por último reescribimos (2.24) como:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.26)$$

Las cuatro ecuaciones dadas por (2.25) son las definiciones de los parámetros de polarización de Stokes. Notemos que son cantidades reales y también observables de la elipse de polarización. El primer parámetro, S_0 , es la intensidad total. El parámetro S_1 describe la cantidad de polarización lineal horizontal o vertical; S_2 describe la cantidad de polarización lineal a $+45^\circ$ ó -45° , y S_3 describe la cantidad polarización circular derecha o izquierda contenida en el haz. Estas correspondencias se mostrarán en breve.

Si ahora consideramos luz que no esté completamente polarizada, las relaciones dadas por (2.25) seguirán siendo válidas en intervalos de tiempo del orden de magnitud de la variación de las amplitudes y las fases de las ondas. Usando la desigualdad de Schwarz, se puede demostrar que cualquier estado de polarización satisface la relación:

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.27)$$

El signo de igualdad se aplica cuando tenemos luz completamente polarizada, y el signo de la desigualdad cuando tenemos luz parcialmente polarizada o luz no polarizada.

Podemos saltarnos el proceso de promedio temporal (2.19) representando las amplitudes (reales) del campo (2.16a) y (2.16b) como amplitudes complejas:

$$E_x(t) = E_{0x} \exp[i(\omega t + \delta_x)] = E_x \exp(i\omega t) \quad (2.29a)$$

$$E_y(t) = E_{0y} \exp[i(\omega t + \delta_y)] = E_y \exp(i\omega t) \quad (2.29b)$$

donde:

$$E_x = E_{0x} \exp(i\delta_x) \quad (2.30a)$$

y

$$E_y = E_{0y} \exp(i\delta_y) \quad (2.30b)$$

son las amplitudes complejas. Los parámetros de Stokes para una onda plana se obtienen a partir de las fórmulas:

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^* \quad (2.31a)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* \quad (2.31b)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^* \quad (2.31c)$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \quad (2.31d)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y el asterisco representa el complejo conjugado. Sustituyendo (2.30a) y (2.30b) en (2.31) obtenemos

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.32a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.32b)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \quad (2.32c)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \quad (2.32d)$$

que son los parámetros de Stokes que obtuvimos de la elipse de polarización.

2.3.2. EL VECTOR DE STOKES

Los cuatro parámetros de Stokes se pueden arreglar en una matriz columna de la siguiente manera:

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

La matriz columna (2.39) se denomina vector de Stokes. Matemáticamente no es un vector pero por costumbre se le llama así. La ecuación (2.39) debería ser llamada correctamente matriz columna de Stokes. El vector de Stokes para luz polarizada elípticamente se escribe, a partir de (2.32), como:

$$S = \begin{pmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \\ 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

La ecuación (2.40) también se conoce como el vector de Stokes para una onda plana. Los vectores de Stokes para luz linealmente polarizada y luz circularmente polarizada se encuentran fácilmente a partir de (2.40). A continuación derivaremos sus expresiones.

Polarización lineal horizontal (PLH)

Para este caso $E_{0y} = 0$, y encontramos a partir de (2.40) que:

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

donde I_0 es la intensidad total.

Polarización lineal vertical (PLV)

Para este caso $E_{0x} = 0$, y (2.40) se reduce a:

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Polarización lineal +45° (L+45)

En este caso $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y $\delta = 0^\circ$, así que (2.40) se convierte en:

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

donde $I_0 = 2E_0^2$.

Polarización lineal -45° (L-45)

Una vez más, $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, pero ahora $\delta = 180^\circ$. (2.40) se convierte en:

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Polarización Circular hacia la Derecha (PCD)

En este caso $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y $\delta = 90^\circ$. Por tanto (2.40) se convierte en:

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Polarización Circular hacia la Izquierda (PCI)

Una vez más tenemos que $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, pero ahora el cambio de fase entre las amplitudes ortogonales es $\delta = -90^\circ$. La ecuación (2.40) se reduce a:

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Notemos que si $\delta = 0^\circ$ o 180° , entonces (2.40) se reduce a:

$$S = \begin{pmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ \pm 2E_{0x}E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

2.3.3. MEDICIÓN DEL VECTOR DE STOKES

Comencemos basándonos en el esquema de la Figura 6, que muestra un haz de luz monocromática incidiendo en un elemento llamado retardador. Este elemento óptico es seguido por otro elemento llamado polarizador. Los componentes del haz incidente son:

$$E_x = E_{0x} e^{i\delta_x} e^{i\omega t} \quad (2.48a)$$

$$E_y = E_{0y} e^{i\delta_y} e^{i\omega t} \quad (2.48b)$$

En el apartado anterior vimos que los parámetros de Stokes de una onda plana escritos con notación compleja son:

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^* \quad (2.31a)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* \quad (2.31b)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^* \quad (2.31c)$$

$$S_3 = i(E_x E_x^* - E_y E_y^*) \quad (2.31d)$$

Para medir los parámetros de Stokes, el campo incidente se propaga a través de un elemento de cambio de fase (llamado retardador) que tiene la propiedad de que la fase de la componente x del campo (E_x) avanza $\varphi/2$, y la fase de la componente y (E_y) es retardada por $\varphi/2$, representado por $-\varphi/2$. Los componentes E'_x y E'_y emergentes del elemento de cambio de fase son:

$$E'_x = E_x e^{i\varphi/2} \quad (2.49a)$$

$$E'_y = E_y e^{-i\varphi/2} \quad (2.49b)$$

A continuación, el campo descrito por (2.49) incide en un componente llamado polarizador, este tiene la propiedad de que el campo óptico se transmite sólo a lo largo de un eje conocido como el eje de transmisión. Lo ideal sería que si el eje de transmisión del polarizador se encuentra a un ángulo θ , sólo los componentes de E'_x y E'_y en esta dirección se transmitirían perfectamente y no habría transmisión para las otras componentes. La componente de E'_x a lo largo del eje de transmisión es $E'_x \cos \theta$. Del mismo modo, la componente de E'_y es $E'_y \sin \theta$.

El campo transmitido a lo largo del eje de transmisión es la suma de estos componentes por lo que el campo total E emergente del polarizador es:

$$E = E'_x \cos \theta + E'_y \sin \theta \quad (2.50)$$

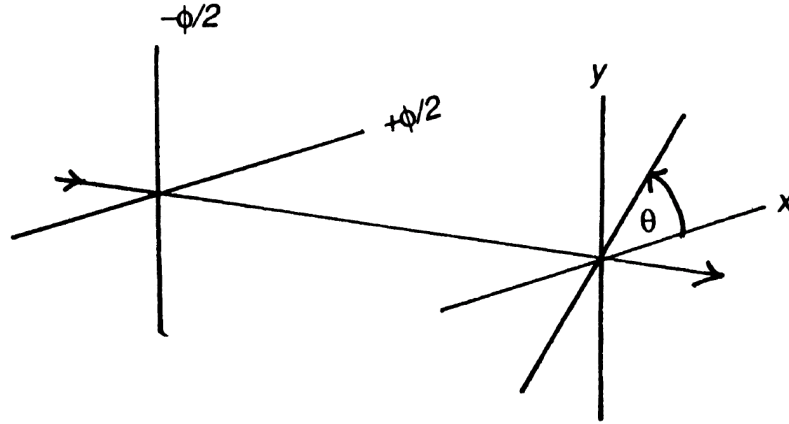


Figura 6. Representación esquemática del dispositivo utilizado para medir los parámetros de Stokes.

Sustituyendo (2.49) en (2.50), el campo emergente del polarizador es:

$$E = E_x e^{i\varphi/2} \cos \theta + E_y e^{-i\varphi/2} \sin \theta \quad (2.51)$$

La intensidad del haz se determina mediante:

$$I = E \cdot E^* \quad (2.52)$$

Tomando el complejo conjugado de (2.51) y haciendo el producto indicado en (2.52), la intensidad del haz emergente es:

$$I = E_x E_x^* \cos^2 \theta + E_y E_y^* \sin^2 \theta + E_x^* E_y e^{-i\varphi} \sin \theta \cos \theta + E_x E_y^* e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta \quad (2.53)$$

La ecuación (2.53) se puede reescribir usando las fórmulas trigonométricas del ángulo doble:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (2.54a)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (2.54b)$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (2.54c)$$

Usando (2.54) en (2.53) y agrupando términos, nos encontramos con que la intensidad $I = I(\theta, \varphi)$, se convierte en:

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \left[(E_x E_x^* + E_y E_y^*) \cos^2 \theta + (E_x E_x^* - E_y E_y^*) \cos 2\theta + (E_x E_y^* + E_x^* E_y) \cos \varphi \sin 2\theta + i(E_x E_y^* - E_x^* E_y) \sin \varphi \sin 2\theta \right] \quad (2.55)$$

Los términos entre paréntesis son exactamente los parámetros de Stokes dados en (2.32). Esta ecuación fue derivada por primera vez por Stokes y es la manera en que se reportaron por primera vez en la literatura de óptica. Al sustituir los términos en (2.55) por las definiciones dadas en (2.32), llegamos a:

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}[S_0 \cos^2 \theta + S_1 \cos 2\theta + S_2 \cos \varphi \sin 2\theta + S_3 \sin \varphi \sin 2\theta] \quad (2.56)$$

De este modo vemos que los parámetros de Stokes se pueden medir directamente, es decir, son cantidades observables.

Los tres primeros parámetros de Stokes se miden por la eliminación del retardador ($\varphi = 0^\circ$) y girando el eje de transmisión del polarizador a los ángulos $\theta = 0^\circ$, 45° , y 90° respectivamente. El último parámetro, S_3 , se mide insertando un retardador de un cuarto de onda ($\varphi = 90^\circ$) en la trayectoria óptica y el poniendo el eje de transmisión del polarizador a $\theta = 45^\circ$. La relación de las intensidades con los parámetros se encuentra a partir de (2.56), y resultan ser:

$$I(0^\circ, 0^\circ) = \frac{1}{2}[S_0 + S_1] \quad (2.57a)$$

$$I(45^\circ, 0^\circ) = \frac{1}{2}[S_0 + S_2] \quad (2.57b)$$

$$I(90^\circ, 0^\circ) = \frac{1}{2}[S_0 - S_1] \quad (2.57c)$$

$$I(45^\circ, 90^\circ) = \frac{1}{2}[S_0 + S_3] \quad (2.57d)$$

en donde $I(a, b)$ es la intensidad medida con el polarizador a un ángulo a y con un retardador de retardancia b . Resolviendo (2.57) para los parámetros de Stokes, obtenemos:

$$S_0 = I(0^\circ, 0^\circ) + I(90^\circ, 0^\circ) \quad (2.58a)$$

$$S_1 = I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (2.58b)$$

$$S_2 = 2I(45^\circ, 0^\circ) - I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (2.58c)$$

$$S_3 = I(45^\circ, 90^\circ) - I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (2.58d)$$

Las ecuaciones (2.58) son realmente notables. Para medir los parámetros de Stokes solo es necesario medir la intensidad en cuatro ángulos. Sin embargo en el momento de su deducción era imposible medirlas ya que no existían los aparatos que lo posibilitaran, pero se pueden utilizar para establecer las propiedades fundamentales de la polarización, como veremos a continuación.

2.3.4. PARÁMETROS DE STOKES PARA LUZ NO POLARIZADA Y LUZ PARCIALMENTE POLARIZADA

Hasta ahora hemos visto que los parámetros y el vector de Stokes pueden describir un haz completamente polarizado. A primera vista sólo hemos proporcionado una descripción alternativa para este tipo de luz. Sin embargo podemos ir más lejos. En la sección anterior vimos que la intensidad $I(\theta, \varphi)$ de un haz de luz que emerge de la combinación de retardador y polarizador es:

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}[S_0 \cos^2 \theta + S_1 \cos 2\theta + S_2 \cos \varphi \sin 2\theta + S_3 \sin \varphi \sin 2\theta] \quad (2.56)$$

Con esta ecuación podemos medir cada uno de los parámetros, pero la intención de Stokes al deducirla no era hacer mediciones cuantitativas de polarización, sino describir a la luz no polarizada. Tratando de lograrlo, Stokes notó una propiedad crucial de este tipo de luz, a saber, su intensidad no se debía ver afectada por la rotación del polarizador o por la presencia del retardador. Por lo tanto la intensidad observada $I(\theta, \varphi)$ debía ser independiente de θ y φ , y la única forma para que esto se cumpliera era que:

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}S_0 \quad (2.59a)$$

Y

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0 \quad (2.59b)$$

Las ecuaciones (2.59a) y (2.59b) son los enunciados matemáticos que caracterizan a la luz no polarizada. Para un haz de luz totalmente polarizado vimos que:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.26)$$

Las ecuaciones (2.26) y (2.59) representan estados de polarización extremos. Es evidente que debe haber estados de polarización intermedios. Estos estados intermedios se denominan luz parcialmente polarizada. Entonces, en general tenemos que:

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.27)$$

Una cantidad importante que describe estas diferentes condiciones es el grado de polarización P que se define en términos de los parámetros de Stokes mediante:

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{\frac{1}{2}}}{S_0^2} \quad 0 \leq P \leq 1 \quad (2.28)$$

Por lo tanto, $P = 0$ indica que la luz no está polarizada, $P = 1$ que la luz está completamente polarizada, y $0 < P < 1$ que la luz es parcialmente polarizada.

2.4. MATRICES DE MUELLER

Ahora centraremos nuestra atención en el estudio de la interacción de la luz con elementos que pueden cambiar su estado de polarización. Supongamos que un haz incide sobre un elemento polarizador para producir un haz emergente. El haz incidente se caracteriza por sus parámetros S_i con $i = 0, 1, 2, 3$. El haz incidente interactúa con el elemento óptico, y el haz emergente se caracteriza por un nuevo conjunto de parámetros de Stokes S'_i donde nuevamente $i = 0, 1, 2, 3$. Ahora supongamos que S'_i se puede expresar como una combinación lineal de los parámetros de Stokes del haz incidente, esto es:

$$S'_0 = m_{00}S_0 + m_{01}S_1 + m_{02}S_2 + m_{03}S_3 \quad (2.61a)$$

$$S'_1 = m_{10}S_0 + m_{11}S_1 + m_{12}S_2 + m_{13}S_3 \quad (2.61b)$$

$$S'_2 = m_{20}S_0 + m_{21}S_1 + m_{22}S_2 + m_{23}S_3 \quad (2.61c)$$

$$S'_3 = m_{30}S_0 + m_{31}S_1 + m_{32}S_2 + m_{33}S_3 \quad (2.61d)$$

En forma de matricial, la ecuación (2.61) se escribe como:

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.62a)$$

O

$$S' = M \cdot S \quad (2.62b)$$

donde S y S' son vectores de Stokes y M es una matriz de 4x4 conocida como la matriz de Mueller.

Los efectos de componentes ópticos son fáciles de entender si escribimos las expresiones de las componentes transversales del campo:

$$E_x(z, t) = E_{0x}(\omega t - kz + \delta_x) \quad (2.63a)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y}(\omega t - kz + \delta_y) \quad (2.63b)$$

Las ecuaciones (2.63a) y (2.63b) pueden cambiar debido a una variación de la amplitud E_{0x} ó E_{0y} , o de las fases δ_x ó δ_y , o por un cambio en la dirección de $E_x(z, t)$ ó $E_y(z, t)$. Los dispositivos correspondientes que causan estos cambios son polarizador, retardador, y rotador. A continuación derivaremos las matrices de Mueller para estos elementos ópticos.

2.4.1. MATRIZ DE MUELLER DE UN POLARIZADOR

Un polarizador es un elemento que atenúa las componentes ortogonales de un haz luminoso de manera desigual; esto quiere decir que un polarizador es un atenuador anisotrópico; los dos ejes ortogonales de transmisión se designan como p_x y p_y .

Las componentes del haz incidente se representan por E_x y E_y . Después de que el haz emerge del polarizador las componentes son E'_x y E'_y , y son paralelas a los ejes originales. Los campos se relacionan mediante:

$$E'_x = p_x E_x \quad 0 \leq p_x \leq 1 \quad (2.64a)$$

$$E'_y = p_y E_y \quad 0 \leq p_y \leq 1 \quad (2.64b)$$

Los factores p_x y p_y son los coeficientes de atenuación de la amplitud a lo largo de los ejes de transmisión. Si uno de los ejes tiene coeficiente de absorción cero de modo que no hay transmisión a lo largo de este eje, decimos que el polarizador tiene un solo eje de transmisión.

Los parámetros de polarización para el haz incidente y emergente son, respectivamente:

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^* \quad (2.65a)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* \quad (2.65b)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^* \quad (2.65c)$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \quad (2.65d)$$

y

$$S'_0 = E'_x E'_x{}^* + E'_y E'_y{}^* \quad (2.66a)$$

$$S'_1 = E'_x E'_x{}^* - E'_y E'_y{}^* \quad (2.66b)$$

$$S'_2 = E'_x E'_y{}^* + E'_y E'_x{}^* \quad (2.66c)$$

$$S'_3 = i(E'_x E'_y{}^* - E'_y E'_x{}^*) \quad (2.66d)$$

Sustituyendo (2.64) en (2.66) y usando (2.65), encontramos que:

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

La matriz de 4x4 en la ecuación (2.67) es:

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{pmatrix} \quad 0 \leq p_{x,y} \leq 1 \quad (2.68)$$

La ecuación (2.68) es la matriz de Mueller para un polarizador con coeficientes de atenuación p_x y p_y respectivamente. En general, la existencia del término m_{33} muestra que la polarización del haz emergente es elíptica.

Para un filtro de densidad neutra tenemos que $p_x = p_y = p$ y (2.68) se convierte en:

$$M = p^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Que es la matriz unidad multiplicada por un escalar. La ecuación (2.69) nos muestra que el estado de polarización no cambia al pasar por un filtro de densidad neutra, pero si la intensidad del haz incidente, que se reduce por un factor p^2 .

La ecuación (2.68) representa la matriz de Mueller para un polarizador, y lo describe en términos de atenuaciones desiguales p_x y p_y sobre cada eje. Un polarizador lineal ideal es uno que sólo permite la transmisión a lo largo de uno de los ejes ortogonales pero no en el otro. Podemos describir este comportamiento definiendo $p_y = 0$, por ejemplo. Entonces (2.68) se convierte en:

$$M = \frac{p_x^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

La ecuación (2.71) es la matriz de Mueller de un polarizador lineal ideal, que permite la transmisión sólo a lo largo del eje x . Se suele conocer como polarizador lineal horizontal, donde hemos identificado de manera arbitraria la dirección horizontal con el eje x . Sería un polarizador lineal perfecto si el factor de transmisión p_x fuera igual a uno ($p_x = 1$). De este modo, la matriz de Mueller para un polarizador lineal perfecto con su eje de transmisión en la dirección x es:

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

Si el haz original estaba completamente despolarizado, la máxima intensidad que podemos tener con un polarizador ideal perfecto es sólo 50% de la intensidad original. Este es el precio que debemos pagar para obtener luz perfectamente polarizada. Si el haz original tiene polarización horizontal perfecta, entonces no habrá cambio la intensidad.

Si ahora elegimos que el eje de transmisión sea el eje vertical, entonces $p_x = 0$ y $p_y = 1$, entonces la ecuación (2.68) adopta la forma:

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

que es la matriz de Mueller para un polarizador lineal vertical.

Finalmente, resulta conveniente reescribir la matriz de Mueller de modo que los ejes ortogonales tengan valores de transmisión distintos de 0 ó 1 usando un ángulo γ auxiliar. Para esto definimos:

$$p_x^2 + p_y^2 = p^2 p_x = p \cos \gamma \quad p_y = p \sin \gamma \quad (2.74)$$

Sustituyendo (2.74) en (2.68) llegamos a:

$$M = \frac{p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\gamma & 0 & 0 \\ \cos 2\gamma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2\gamma \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

donde $0 < \gamma < 90^\circ$. En el caso de un polarizador lineal perfecto $p = 1$. Para un polarizador lineal horizontal $\gamma = 0^\circ$, y para un polarizador lineal vertical $\gamma = 90^\circ$, para un filtro de densidad neutra $\gamma = 45^\circ$.

2.4.2. MATRIZ DE MUELLER DE UN RETARDADOR

Un retardador es un elemento óptico que cambia la fase de la luz incidente. El retardador induce un cambio de fase de magnitud ϕ entre las componentes ortogonales del campo incidente. Podemos imaginar que esto se logra causando un cambio de fase de $\phi/2$ a lo largo del eje X y un cambio de fase de $-\phi/2$ a lo largo del eje Y. Estos ejes se conocen como el eje rápido y el eje lento, respectivamente. Las componentes del haz emergente se relacionan con las del incidente mediante:

$$E'_x = e^{+i\phi/2} E_x(z, t) \quad (2.76a)$$

$$E'_y = e^{-i\phi/2} E_y(z, t) \quad (2.76b)$$

Utilizando las definiciones de los parámetros de Stokes obtenemos:

$$S'_0 = S_0 \quad (2.77a)$$

$$S'_1 = S_1 \quad (2.77b)$$

$$S'_2 = S_2 \cos \phi + S_3 \sin \phi \quad (2.77c)$$

$$S'_3 = -S_2 \sin \phi + S_3 \cos \phi \quad (2.77d)$$

Podemos reescribir la ecuación (2.77) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Notemos que para un retardador ideal no hay pérdida en la intensidad. La matriz de Mueller para un retardador con un cambio de fase ϕ es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Hay dos casos especiales de (2.79) que suelen aparecer en los experimentos. El primer es el retardador de un cuarto de onda ($\phi = 90^\circ$). En este caso (2.79) se convierte en:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

El retardador de un cuarto de onda transforma a los haces con polarización lineal a $+45^\circ$ o -45° en luz con polarización circular derecha o izquierda, respectivamente. El otro tipo de retardador de fase es el de media longitud de onda ($\phi = 180^\circ$). Con esta condición la ecuación (2.79) se convierte en:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

Los retardadores de media longitud de onda se caracterizan por esta matriz diagonal. Los términos negativos revierten la elipticidad y orientación del estado de polarización del haz incidente.

2.4.3. MATRIZ DE MUELLER DE UN ROTADOR

Otra de las formas de cambiar el estado de polarización del campo óptico es hacerlo pasar a través de un elemento que rote las componentes ortogonales del campo, $E_x(z,t)$ y $E_y(z,t)$, por un ángulo θ . Para obtener la matriz de Mueller para una rotación, consideremos la Figura 7. El ángulo θ describe la rotación de E_x hasta E'_x y de E_y hasta E'_y .

De manera similar, el ángulo beta es el ángulo entre E_x y E . En la figura el punto P está descrito en el sistema E'_x, E'_y mediante:

$$E'_x = E \cos(\beta - \theta) \quad (2.82a)$$

$$E'_y = E \sin(\beta - \theta) \quad (2.82b)$$

En el sistema E_x, E_y tenemos que:

$$E_x = E \cos \beta \quad (2.83a)$$

$$E_y = E \sin \beta \quad (2.83b)$$

Desarrollando las funciones trigonométricas en (2.82) obtenemos:

$$E'_x = E(\cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta) \quad (2.84a)$$

$$E'_y = E(\sin \beta \cos \theta - \sin \theta \cos \beta) \quad (2.84b)$$

Agrupando términos en (2.84) y usando (2.83) llegamos a:

$$E'_x = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta \quad (2.85a)$$

$$E'_y = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta \quad (2.85b)$$

Las ecuaciones (2.85a) y (2.85b) son las ecuaciones para la rotación en términos de amplitud. Para obtener la matriz de Mueller primero formamos los vectores de Stokes correspondientes a (2.85), como habíamos hecho anteriormente, y de esta manera encontramos que la matriz es:

$$M(2\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Notemos que una rotación física por un ángulo θ hace que aparezcan expresiones con argumento 2θ , en vez de expresiones que sólo tengan argumento θ ; esto se debe a que estamos trabajando en términos de intensidad; si trabajáramos en términos de amplitudes lo natural sería obtener términos que sólo dependieran de θ .

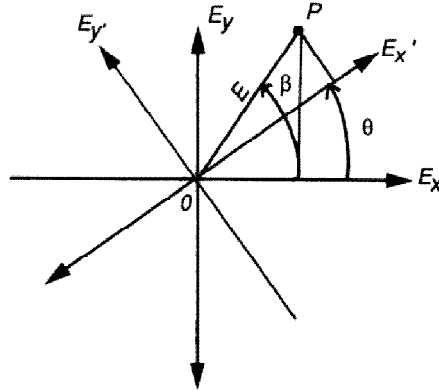


Figura 7. Rotación de las componentes del campo.

Los rotadores se utilizan principalmente para cambiar el ángulo de orientación de la elipse de polarización. Para verlo explícitamente, supongamos que el ángulo de orientación de la elipse de un haz incidente es ψ (ver Figura 5). Es posible probar que el ángulo de orientación de la elipse de polarización se relaciona con los parámetros de Stokes mediante:

$$\tan 2\psi = \frac{S_2}{S_1} \quad (2.87)$$

Para el haz emergente tendremos una expresión similar con las variables de la ecuación (2.87) reemplazadas con variables primarias. Usando (2.86) obtenemos la siguiente expresión para el ángulo de orientación ψ' :

$$\tan 2\psi' = \frac{-S_1 \sin 2\theta + S_2 \cos 2\theta}{S_1 \cos 2\theta + S_1 \sin 2\theta} \quad (2.88)$$

Escribamos la ecuación (2.87) de la siguiente manera:

$$S_2 = S_1 \tan 2\psi \quad (2.89)$$

Sustituyendo (2.89) en (2.88), obtenemos lo siguiente:

$$\tan 2\psi' = \tan(2\psi - 2\theta) \quad (2.90)$$

De modo que:

$$\psi' = \psi - \theta \quad (2.91)$$

La ecuación (2.91) nos muestra que un rotador no hace más que rotar la elipse de polarización del haz incidente; la elipticidad se mantiene sin cambios. El signo de la ecuación (2.91) es negativo porque la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. Si la rotación fuera en contra de las manecillas del reloj, se reemplazaría θ por $-\theta$ en (2.86).

2.4.4. MATRICES DE MUELLER PARA ELEMENTOS POLARIZADORES ROTADOS

En las derivaciones que hemos hecho para las matrices de Mueller del polarizador, retardador y el rotador hemos asumido que los ejes de estos elementos están alineados con los ejes E_x y E_y (ó x e y); sin embargo en la práctica encontramos que estos elementos suelen estar rotados respecto a estos ejes. En consecuencia, necesitamos conocer la forma de las matrices de Mueller para estos elementos cuando están rotados.

Consideremos la situación en la Figura 8. Notemos que los ejes del componente polarizador están rotados por un ángulo θ hasta llegar a los ejes x' e y' . Por tanto debemos considerar las componentes del haz incidente a lo largo de los ejes x' e y' . En términos del vector de Stokes del haz incidente S tenemos que:

$$S' = M_R(2\theta)S \quad (2.93)$$

donde $M_R(2\theta)$ es la matriz de Mueller para rotación de la ecuación (2.86) y S' es el vector de Stokes del haz cuyos ejes se encuentran a lo largo de x' e y' .

El haz S' ahora interactúa con el elemento polarizador caracterizado por su matriz de Mueller M . El vector de Stokes S'' emergente del elemento polarizador rotado será:

$$S'' = MS' = MM_R(2\theta)S \quad (2.94)$$

donde hemos utilizado (2.93). Finalmente, debemos recuperar las componentes del haz emergente a lo largo de los ejes x e y originales. Esto se puede describir como una rotación en contra de las manecillas del reloj del vector S'' por un ángulo θ , o sea una rotación por $-\theta$, de modo que obtenemos:

$$S''' = M_R(-2\theta)S'' = [M_R(-2\theta)MM_R(2\theta)]S \quad (2.95)$$

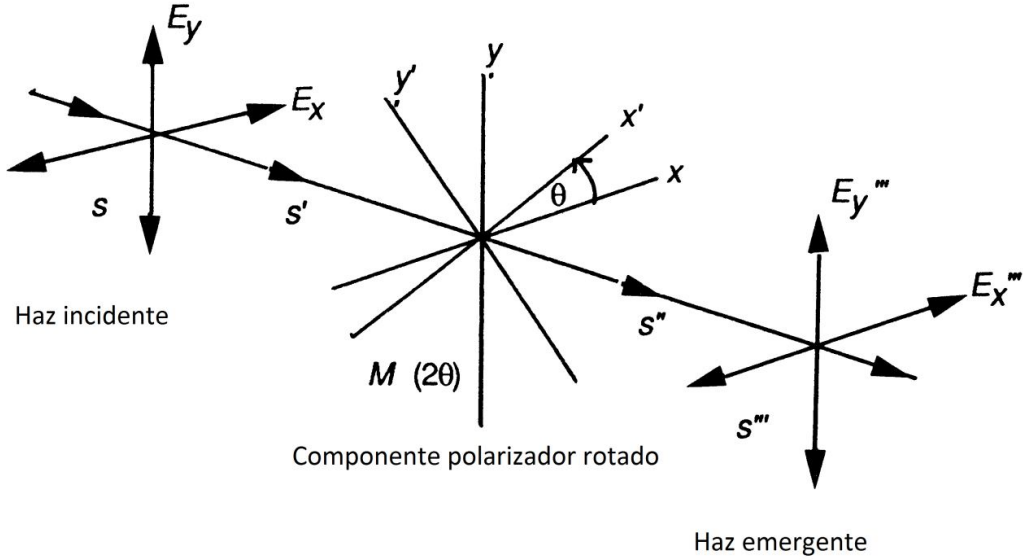
donde $M_R(2\theta)$ sigue representando la matriz de Mueller de una rotación y S''' es el vector de Stokes del haz emergente. La ecuación (2.95) se puede describir como:

$$S''' = M(2\theta)S \quad (2.96)$$

donde:

$$M(2\theta) = M_R(-2\theta)MM_R(2\theta) \quad (2.97)$$

La ecuación (2.97) es la matriz de Mueller de un elemento polarizador rotado.


Figura 8. Elementos polarizadores rotados

La manera más conveniente de expresar la matriz de Mueller de un polarizador rotado es en forma angular, o sea:

$$M = \frac{p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\gamma & 0 & 0 \\ \cos 2\gamma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2\gamma \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

Ahora hacemos la multiplicación indicada en (2.97) y usamos (2.98), para obtener la siguiente expresión para la matriz de un polarizador rotado:

$$M = \frac{p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\gamma \cos 2\theta & \cos 2\gamma \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\gamma \cos 2\theta & \cos^2 2\theta + \sin 2\gamma \sin^2 2\theta & (1 - \sin 2\gamma) \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \cos 2\gamma \sin 2\theta & (1 - \sin 2\gamma) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \sin 2\gamma \cos^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2\gamma \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

En la ecuación (2.99) hemos hecho $p^2=1$. La forma más común de (2.99) es la matriz de Mueller para un polarizador lineal horizontal ($\gamma=0^\circ$). Para este caso la ecuación (2.99) se reduce a:

$$M_P(2\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

Ahora determinemos la matriz de Mueller para un retardador rotado. Recordemos que la matriz de Mueller para un retardador con cambio de fase ϕ está dada por:

$$M_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

Utilizando la ecuación (2.97) y combinándola con la ecuación anterior encontramos que la matriz de Mueller para un retardador rotado es:

$$M_c(\phi, 2\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \phi \sin^2 2\theta & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin \phi \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \phi \cos^2 2\theta & \sin \phi \sin 2\theta \\ 0 & \sin \phi \sin 2\theta & -\sin \phi \sin 2\theta & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

Hay formas de (2.103) que son especialmente importantes. Tomando $\phi=180^\circ$ tenemos un retardador de media longitud de onda. En este caso (2.103) se convierte en:

$$M_c(180^\circ, 4\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\theta & \sin 4\theta & 0 \\ 0 & \sin 4\theta & -\cos 4\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

Finalmente, consideremos la matriz de Mueller de un retardador de un cuarto de longitud de onda rotado. Para ello ponemos $\phi = 90^\circ$ en (2.103) y obtenemos:

$$M_c(90^\circ, 2\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

3. MODELO Y CORRECCIONES

Ahora que tenemos los conceptos y las herramientas necesarias introducidas en el capítulo anterior podemos pasar a analizar el modelo que es tema de esta tesis. Empezaremos describiendo las particularidades del sistema experimental y veremos su representación ideal en términos de vectores de Stokes y matrices de Mueller, luego introduciremos algunas modificaciones en estas expresiones para capturar mejor el comportamiento real de los elementos ópticos involucrados, posteriormente presentaremos los resultados de un programa que permite calcular explícitamente el valor de los parámetros de Stokes cuando damos valores concretos a los ángulos de error de los componentes del dispositivos experimental, y por último revisaremos el efecto de la no linealidad y una manera de abordar su análisis.

3.1. DISEÑO EXPERIMENTAL: COMPONENTES Y CARACTERÍSTICAS

Antes que nada, hay que notar que los capítulos precedentes supusimos que las propiedades tanto del haz de luz como de los elementos ópticos no cambiaban en el tiempo, o sea, en todo momento el haz original que incidía sobre el elemento óptico estaba caracterizado por sus parámetros de Stokes S_i que no variaban a lo largo de todo el experimento; igualmente el elemento óptico se suponía caracterizado por una matriz de Mueller cuyas componentes permanecían invariantes en el tiempo, y consecuentemente el haz de luz a la salida también quedaba especificado por su conjunto de parámetros de Stokes S'_i constantes en el tiempo.

Sin embargo, en los años recientes se ha hecho uso de elementos polarizadores que pueden variar sus propiedades en el tiempo [7] [8] [9] [10]; en los experimentos que vamos a describir se utilizaron retardadores de fase cuyo valor de retardancia varía aplicando una diferencia de voltaje en las terminales correspondientes; estos retardadores variables están hechos de cristales líquidos; las propiedades de anisotropía de estas sustancias, derivadas de

las formas geométricas y otras propiedades de las moléculas que las componen, han resultado en una gran variedad de aplicaciones a la hora de su utilización como materia prima para componentes ópticos.

Para fabricar un retardador de cristales líquidos nemáticos se construyen un par de ventanas planas formadas por 3 capas: una capa de sílice fundido transparente y químicamente neutra en su interacción con el aire y la siguiente capa que es un recubrimiento de óxido de indio, este material también es transparente y además es conductor de corriente eléctrica, por ultimo una capa de un material dieléctrico que aísla el cristal líquido y además es capaz de alinear a las moléculas que están en contacto con él en una dirección determinada; típicamente esto se logra frotándolo suavemente, creando pequeños surcos en la dirección de alineación de las moléculas. Para el correcto funcionamiento del retardador se deben tomar en cuenta factores tales como el espesor de la capa de cristal líquido, la retardancias residuales debido a la inmovilidad de las moléculas adheridas a la capa interior, la velocidad de respuesta al voltaje aplicado, etc. En nuestro caso los retardadores cumplen las expectativas requeridas por el experimento, excepto que la relación voltaje retardancia es complicada.

En la Figura 10 se ilustra de una manera esquemática el funcionamiento de los retardadores. Cabe mencionar que uno de los beneficios prácticos más importantes del uso de este tipo de retardadores es que su utilización no implica movimientos mecánicos, por tanto se incrementa considerablemente la estabilidad y se eliminan vibraciones que de otra manera interferirían en el desarrollo del experimento.

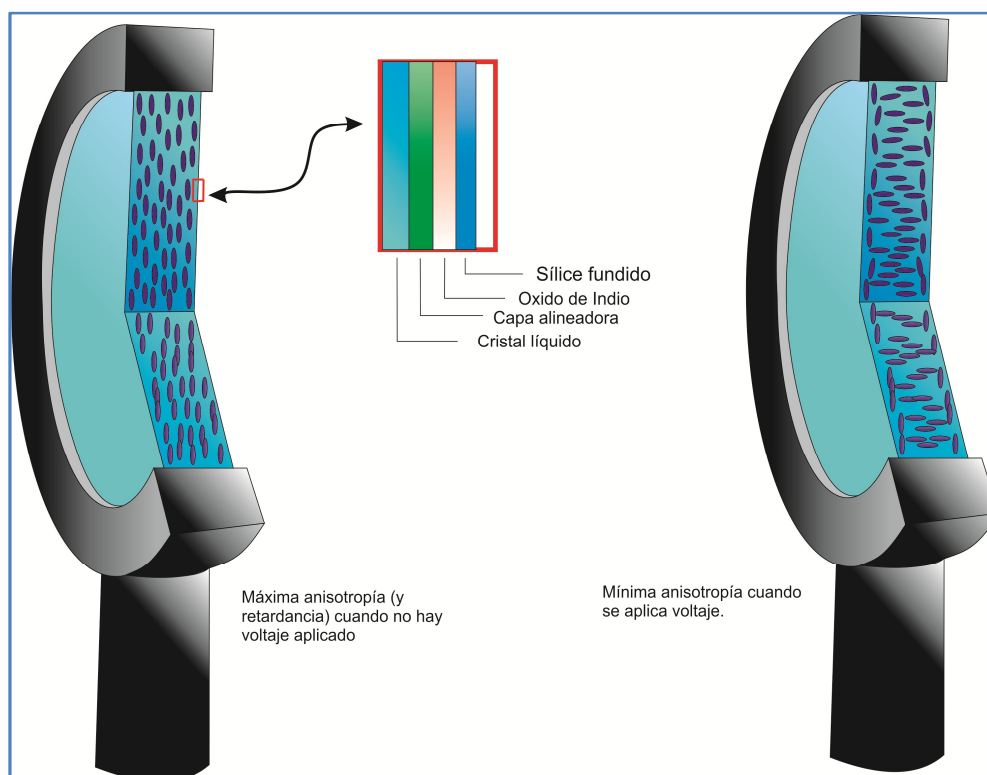


Figura 10. Representación esquemática del funcionamiento de los retardadores variables.

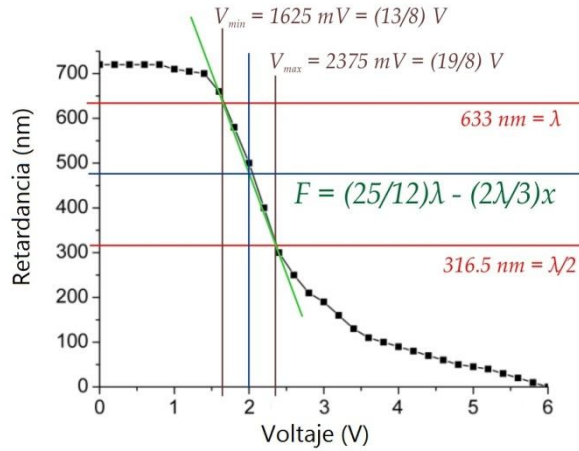


Figura 11. Comportamiento de la retardancia como función del voltaje aplicado y aproximación utilizada para el modelo.

La Figura 11 es una gráfica que relaciona la retardancia al voltaje aplicado, provista por el fabricante; aquí se aprecia que la curva es altamente no lineal, y esto es más acentuado en los extremos de la curva, cerca del valor máximo y mínimo de retardancia.

A pesar de esto, observamos que en la parte media de la curva se encuentra una región que podemos representar bien mediante una recta, y por ello se decidió trabajar en esta zona, ya que como detallaremos más adelante, solo es necesario tener un intervalo de media longitud de onda con comportamiento lineal. El sistema se irradia con un láser de color rojo de longitud de onda $\lambda = 633 \text{ nm}$. La zona que elegimos se extiende de 1.625 Volts (que corresponde a $\lambda = 633 \text{ nm}$) hasta 2.375 Volts (correspondiente a $\lambda/2 = 316.5 \text{ nm}$), que cumple con los requisitos.

El uso zonas con comportamiento lineal simplifica el procedimiento experimental y el análisis teórico. Por lo pronto notemos que el experimento demanda mandar una señal de voltaje a los retardadores entre los valores:

$$1.625 \text{ V} \leq x \leq 2.375 \text{ V} \quad (3.1)$$

Si utilizamos una señal sinusoidal esto implica una dependencia temporal de la siguiente forma:

$$x(t) = 2 - (3/8) \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

Notemos que nuestra aproximación a la curva de retardancia es:

$$F(x) = (25/12)\lambda - \lambda(2/3)x \quad (3.3)$$

Sustituyendo (3.2) en (3.3) obtenemos:

$$F(t) = \left(\frac{25}{12}\right)\lambda - \lambda\left(\frac{2}{3}\right)\left[2 - \left(\frac{3}{8}\right)\sin(\omega t)\right] = \left(\frac{3\lambda}{4}\right) + \left(\frac{\lambda}{4}\right)\sin(\omega t) \quad (3.4)$$

Esta es la dependencia de la retardancia en el tiempo, pero observemos que hemos expresado la retardancia en unidades de longitud de onda, y en la sección anterior trabajamos en términos de variables angulares, para pasar de unas a otras aplicamos la siguiente transformación:

$$F \rightarrow \delta \quad \text{si} \quad \lambda \rightarrow 2\pi \quad (3.5)$$

Donde δ representa la retardancia angular, por lo tanto:

$$\delta = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sin(\omega t) \quad (3.6)$$

Donde ω es la frecuencia angular de la señal que se le aplica al dispositivo, la cual es a nuestra elección.

Para la medición de los parámetros de Stokes se implementó el dispositivo experimental representado en la Figura 12.

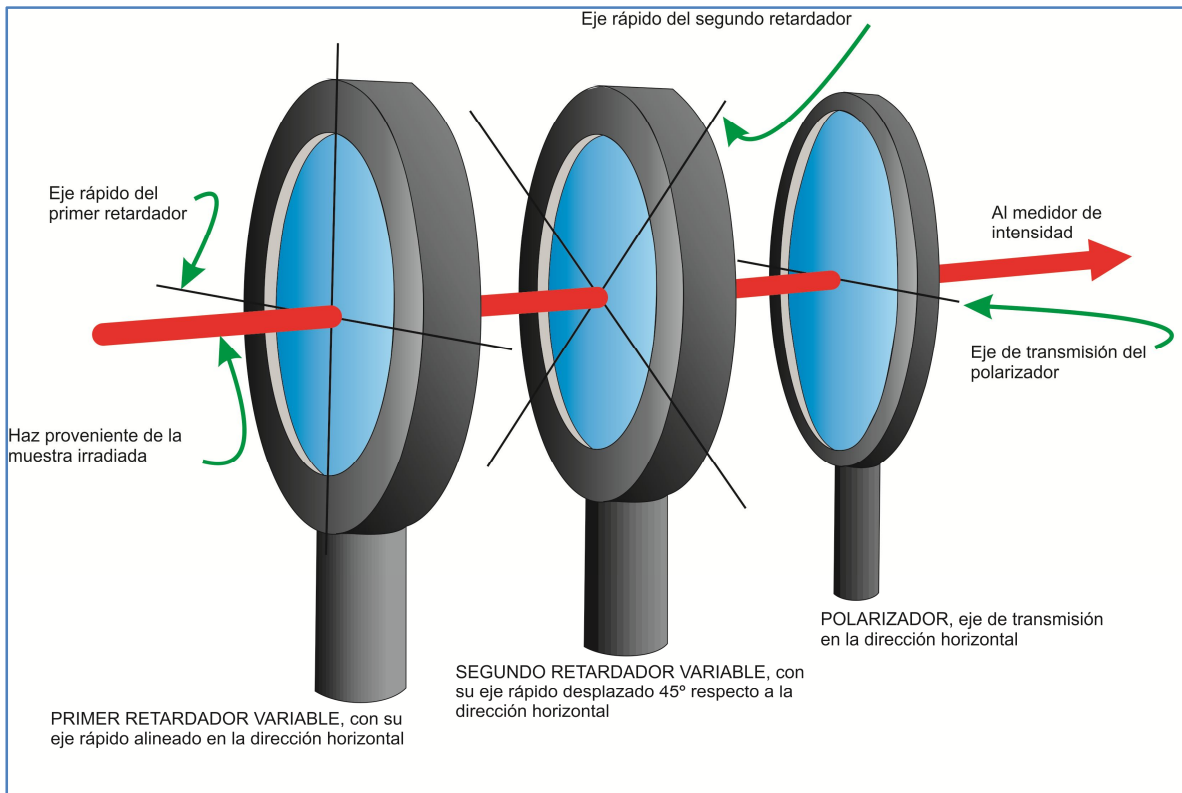


Figura 12. Dispositivo experimental.

Aquí tenemos dos de estos retardadores de fase variables, a cada uno de ellos se le aplicará una señal oscilatoria con frecuencias ω_1 y ω_2 , el primer retardador tiene su eje rápido en la dirección horizontal, el siguiente tiene su eje rápido a 45° respecto al primero, luego un polarizador, con su eje de máxima transmisión alineado con el eje rápido del primer retardador, esto es a 0° , por último un detector de intensidad luminosa.

3.2. MATRICES DE MUELLER DEL SISTEMA IDEAL

Ahora pasamos a la representación en términos de vectores de Stokes y matrices de Mueller de este sistema. Para empezar, notemos que el primer retardador de fase se obtiene a partir de la expresión (2.103) para retardadores con retardancia δ y alineación del eje rápido θ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \delta \sin^2 2\theta & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin \delta \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \delta \cos^2 2\theta & \sin \delta \sin 2\theta \\ 0 & \sin \delta \sin 2\theta & -\sin \delta \sin 2\theta & \cos \delta \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

El primer retardador debe estar alineado con la horizontal, o sea $\theta = 0^\circ$, de modo que este elemento está caracterizado por:

$$M_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ 0 & 0 & -\sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Para el segundo retardador el ángulo del eje rápido es $\theta = 45^\circ$, de modo que la ecuación (3.7) se convierte en:

$$M_{R2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & 0 & -\sin \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \delta_2 & 0 & \cos \delta_2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Por último para el polarizador tenemos que el ángulo del eje de transmisión corresponde al eje x , o bien a un ángulo de 0° , por lo que su matriz de Mueller es:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Para obtener la matriz que representa al sistema completo hacemos la multiplicación matricial de estos elementos de la siguiente manera:

$$T = P \cdot M_{R2} \cdot M_{R1} \quad (3.11)$$

Calculando explícitamente obtenemos lo siguiente:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos \delta_2 & \sin \delta_1 \sin \delta_2 & -\cos \delta_1 \sin \delta_2 \\ 1 & \cos \delta_2 & \sin \delta_1 \sin \delta_2 & -\cos \delta_1 \sin \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Esta es la matriz de Mueller ideal del sistema, a continuación mostraremos como usar esta expresión para determinar el estado de polarización de cualquier haz incidente en este dispositivo. Para ello supongamos que un haz de luz con polarización arbitraria incide sobre esta configuración, el haz estará caracterizado por un vector de Stokes, que representamos de manera general mediante:

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

El haz de luz a la salida del dispositivo tendrá un vector de Stokes que será el resultado de multiplicar este vector por la matriz de Mueller del sistema, o sea:

$$S' = T \cdot S = P \cdot M_{R2} \cdot M_{R1} \cdot S \quad (3.14)$$

Explícitamente:

$$S' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0 + S_1 \cos \delta_2 + S_2 \sin \delta_1 \sin \delta_2 - S_3 \cos \delta_1 \sin \delta_2 \\ S_0 + S_1 \cos \delta_2 + S_2 \sin \delta_1 \sin \delta_2 - S_3 \cos \delta_1 \sin \delta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

De todos estos, solo el primer parámetro, que se refiere a la intensidad del haz, es lo que se puede medir mediante un detector de intensidad, de modo que debemos trabajar con este valor.

$$S'_0 = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cos \delta_2 + S_2 \sin \delta_1 \sin \delta_2 - S_3 \cos \delta_1 \sin \delta_2) \quad (3.16)$$

Ahora recordemos la expresión para las retardancias (3.6), entonces tendremos para cada una de las frecuencias:

$$\delta_1 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sin(\omega_1 t) \quad (3.17a)$$

$$\delta_2 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sin(\omega_2 t) \quad (3.17b)$$

Notemos que al sustituir estas expresiones obtendremos funciones dependientes del tiempo bastante complicadas, que involucran términos del tipo $\sin(\sin(\omega_1 t))$ u otras combinaciones de funciones trigonométricas y frecuencias aplicadas, pero nosotros no estamos interesados en un resultado que involucre las frecuencias particulares que hemos utilizado, es más, ni siquiera estamos interesados en expresiones dependientes del tiempo, solo queremos conocer los valores de los parámetros de Stokes del haz incidente, o sea S_0 , S_1 , S_2 y S_3 los cuales son constantes, aunque para medirlos estemos utilizando dispositivos con propiedades que varían en el tiempo.

Para satisfacer todas estas condiciones, notemos que tras un corto tiempo después de que el haz comienza a incidir en el dispositivo, llegaremos a una situación estacionaria, donde la intensidad del haz resultante a la salida variará en el tiempo ($S'_0 = S'_0(t)$), pero de una manera predecible, con oscilaciones características de frecuencia constante. Por tanto, una posibilidad es ver si podemos relacionar estos valores de frecuencias resultantes a la salida con los parámetros de Stokes de entrada, o sea debemos hacer un análisis del espectro de frecuencias de la señal de salida y encontrar su relación con el haz incidente.

Recordemos la expansión en series de Fourier de las siguientes funciones:

$$\sin(\phi \sin \omega t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\phi) \sin[(2n+1)\omega t] \approx 2J_1(\phi) \sin(\omega t) \quad (3.18a)$$

$$\cos(\phi \sin \omega t) = J_0(\phi) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n}(\phi) \cos[2n \omega t] \approx J_0(\phi) + 2J_2(\phi) \cos(2\omega t) \quad (3.18b)$$

Ahora sustituyendo (3.17) en (3.16) y utilizando (3.18) para simplificar podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sin(\delta) &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sin(\omega t)\right) = \sin\left[\frac{3\pi}{2}\right] \cos\left[\frac{\pi}{2} \sin(\omega t)\right] + \cos\left[\frac{3\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi}{2} \sin(\omega t)\right] = \\ &= -\cos\left[\frac{\pi}{2} \sin(\omega t)\right] \approx -\left\{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(2\omega t)\right\} \quad (3.19a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cos(\delta) &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sin(\omega t)\right) = \cos\left[\frac{3\pi}{2}\right] \cos\left[\frac{\pi}{2} \sin(\omega t)\right] - \sin\left[\frac{3\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi}{2} \sin(\omega t)\right] = \\ &= \sin\left[\frac{\pi}{2} \sin(\omega t)\right] \approx 2J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega t) \quad (3.19b) \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores hicimos la aproximación de tomar los términos dominantes en la expansión. Sustituyendo en la expresión para la intensidad detectada a la salida del dispositivo (3.12) tenemos lo siguiente:

$$S'_0 = \frac{1}{2} \left\{ S_0 + 2J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega_2 t) S_1 + \left[J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(2\omega_1 t) \right] \left[J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(2\omega_2 t) \right] S_2 - 2J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega_1 t) \left[J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(2\omega_2 t) \right] S_3 \right\} \quad (3.20)$$

Podemos utilizar las propiedades de las funciones trigonométricas para rescribir esta expresión de la siguiente manera:

$$S'_0 = \frac{1}{2} \left\{ S_0 + J_0^2\left(\frac{\pi}{2}\right) S_2 \right\} + J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) S_1 \sin(\omega_2 t) + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) S_3 \sin(\omega_1 t) + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) S_2 \cos(2\omega_1 t) + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) S_2 \cos(2\omega_2 t) + J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) S_3 \cos((\omega_1 - 2\omega_2)t) + J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) S_3 \cos((\omega_1 + 2\omega_2)t) - J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) S_2 \cos((2\omega_1 - 2\omega_2)t) - J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) S_2 \cos((2\omega_1 + 2\omega_2)t) \quad (3.21)$$

Como vemos esta es una suma de términos que dependen de combinaciones de las frecuencias que le aplicamos a los retardadores; vale la pena recalcar que cada uno de los sumando en la expresión anterior son independientes entre si, o sea, varían con frecuencias distintas.

En este punto realizamos la transformada de Fourier sobre la señal detectada (3.21); pero debido a que tenemos una suma de términos oscilatorios independientes, esto solo eliminará la dependencia temporal y por tanto es equivalente a hacer la comparación término a término del lado izquierdo y el lado derecho de (3.21):

$$S_0 = 2S'_0(0) - J_0^2\left(\frac{\pi}{2}\right) S_2 \quad (3.22a)$$

$$S_1 = \frac{S'_0(\omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (3.22b)$$

$$S_2 = \frac{S'_0(2\omega_1)}{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{S'_0(2\omega_2)}{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{S'_0(2\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (3.22c)$$

$$S_3 = \frac{S'_0(\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{S'_0(\omega_1)}{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (3.22d)$$

Donde $S'_0(0)$, $S'_0(2\omega_1)$, $S'_0(2\omega_2)$, $S'_0(2\omega_1 \pm 2\omega_2)$, $S'_0(\omega_1 \pm 2\omega_2)$ son los coeficientes que obtenemos al hacer la transformada de S'_0 (medición experimental), donde aparecen cada una de las frecuencias indicadas en los paréntesis.

Este es el resultado ideal del sistema. Debemos notar que hasta ahora hemos tratado una situación donde no hay incertidumbre en la alineación de ninguno de los elementos ópticos, además implícitamente hemos supuesto una relación lineal entre el voltaje de entrada de los retardadores y la retardancia obtenida.

Hay varios aspectos que resaltar, en primer lugar resulta bastante notable el hecho de que el parámetro S_2 tenga tres expresiones posibles que lo representan, y que el parámetro S_3 tenga dos expresiones distintas. Estas formas alternativas para estos parámetros nos dan la posibilidad de hacer un chequeo de la consistencia de los resultados obtenidos hasta ahora. En un artículo de 2010 [19], se presentó una serie de dichos resultados, obteniendo una concordancia cualitativa de los resultados experimentales y estas predicciones.

3.3. CORRECCIONES

3.3.1. DEDUCCIÓN DE LAS EXPRESIONES ANALÍTICAS PARA LOS ERRORES.

Hay una gran cantidad de parámetros de este sistema que pueden variar ligeramente su valor respecto a la situación ideal descrita en la sección anterior, entre otros la alineación de los ejes rápidos de los retardadores de fase, la alineación del eje del polarizador, las eficiencias de absorción de los ejes ortogonales del polarizador; también las constantes que aparecen en las expresiones para la retardancia (3.17), las cuales pueden tener errores asociados; además, debemos esperar efectos debidos a la no linealidad de la respuesta de los retardadores con el voltaje aplicado.

Para empezar el análisis de todas estas posibles desviaciones de la situación ideal se eligió comenzar de manera arbitraria suponiendo que todos los componentes tenían un comportamiento perfecto excepto el polarizador, para este se supuso que había un pequeño error en el ángulo (que debería ser 0°) y teníamos un valor α de desviación. De las tres matrices solo cambiará la que corresponde al polarizador:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \cos 2\alpha & \cos^2 2\alpha & \cos 2\alpha \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \sin 2\alpha & \sin^2 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

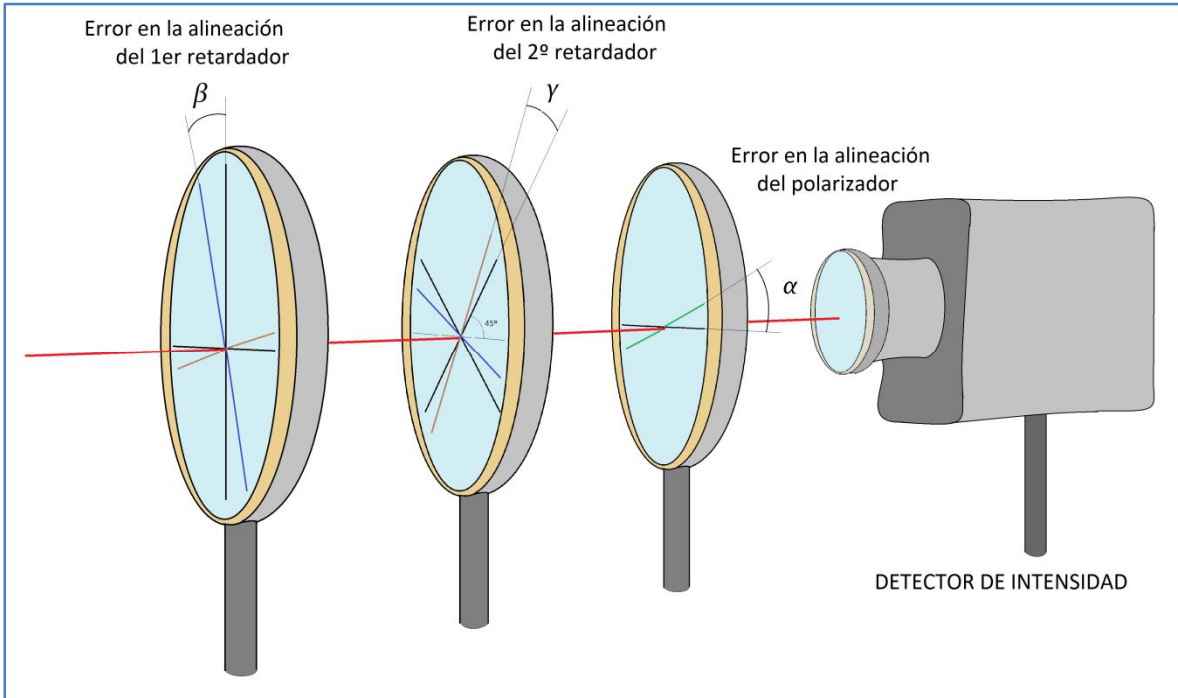


Figura 13. Ángulos de error en el polarímetro.

En la página 46 se detalla el cálculo de como este cambio afectará al sistema. Para los demás casos se utilizó un programa escrito en *Mathematica*TM. Los resultados de este programa se compararon con los resultados que obtuvimos en el cálculo del primer caso como una forma de comprobación. A continuación escribimos explícitamente las expresiones resultantes cuando el polarizador esta desalineado:

$$S_0 = 2S'_0(0) - J_0^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha S_2 + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin 2\alpha S_3 \quad (3.24a)$$

$$S_1 = \frac{S'_0(\omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha} \quad (3.24b)$$

$$S_2 = \frac{S'_0(2\omega_2)}{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha} = \frac{S'_0(2\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha} \quad (3.24c)$$

$$S_3 = \frac{S'_0(\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha} \quad (3.24d)$$

$$S'_0(\omega_1) = J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin 2\alpha S_2 + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha S_3 \quad (3.24e)$$

$$S'_0(2\omega_1) = J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha S_2 - J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin 2\alpha S_3 \quad (3.24f)$$

Notemos que en las dos últimas ecuaciones tenemos una mezcla de los parámetros originales, lo que no ocurriría para el caso ideal (excepto por la frecuencia cero que involucra a S_0 y a S_2). Sin embargo, podemos tratar estas expresiones como un sistema de ecuaciones y obtener el siguiente resultado para todas las expresiones:

$$S_0 = 2S'_0(0) - J_0^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha S_2 + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin 2\alpha S_3 \quad (3.25a)$$

$$S_1 = \frac{S'_0(\omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha} \quad (3.25b)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{S'_0(2\omega_2)}{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha} = \frac{S'_0(2\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha} \\ &= \frac{1}{\sin^2 2\alpha + J_0^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos^2 2\alpha} \left[\frac{\sin 2\alpha}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)} S'_0(\omega_1) + \frac{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha}{J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} S'_0(2\omega_1) \right] \end{aligned} \quad (3.25c)$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{S'_0(\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha} \\ &= \frac{1}{\sin^2 2\alpha + J_0^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos^2 2\alpha} \left[\frac{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\alpha}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)} S'_0(\omega_1) + \frac{\sin 2\alpha}{J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} S'_0(2\omega_1) \right] \end{aligned} \quad (3.25d)$$

El siguiente caso investigado correspondió a suponer que todos los elementos se encontraban en una disposición óptima excepto que el eje rápido del primer retardador estaba ligeramente desalineado por un ángulo β ; en este caso la matriz de Mueller de este elemento cambiará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} M_{R1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ 0 & 0 & -\sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow M_{R1}(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta \cos \delta_1 & \sin 2\beta \cos 2\beta (1 - \cos \delta_1) & -\sin 2\beta \sin \delta_1 \\ 0 & (1 - \cos \delta_1) \sin 2\beta \cos 2\beta & \sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta \cos \delta_1 & \cos 2\beta \sin \delta_1 \\ 0 & \sin 2\beta \sin \delta_1 & -\cos 2\beta \sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
 S' &= T \cdot S = P \cdot M_{R2} \cdot M_{R1} \cdot S = \\
 &= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & 0 & -\sin \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \delta_2 & 0 & \cos \delta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ 0 & 0 & -\sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & \sin \delta_1 \sin \delta_2 & -\cos \delta_1 \sin \delta_2 \\ 0 & 0 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ 0 & \sin \delta_2 & -\sin \delta_1 \cos \delta_2 & \cos \delta_1 \cos \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \cos 2\alpha & \cos^2 2\alpha & \cos 2\alpha \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \sin 2\alpha & \sin^2 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & \sin \delta_1 \sin \delta_2 & -\cos \delta_1 \sin \delta_2 \\ 0 & 0 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ 0 & \sin \delta_2 & -\sin \delta_1 \cos \delta_2 & \cos \delta_1 \cos \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\alpha \cos \delta_2 & \cos 2\alpha \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \sin 2\alpha \cos \delta_1 & -\cos 2\alpha \cos \delta_1 \sin \delta_2 + \sin 2\alpha \sin \delta_1 \\ \cos 2\alpha & \cos^2 2\alpha \cos \delta_2 & \cos^2 2\alpha \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos \delta_1 & -\cos^2 2\alpha \cos \delta_1 \sin \delta_2 + \sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin \delta_1 \\ \sin 2\alpha & \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos \delta_2 & \sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \sin^2 2\alpha \cos \delta_1 & -\cos 2\alpha \sin 2\alpha \cos \delta_1 \sin \delta_2 + \sin^2 2\alpha \sin \delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) & \cos 2\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) + \sin 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) & \cos 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) - \sin 2\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \\ \cos 2\alpha & \cos^2 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) & \cos^2 2\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) + \sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) & \cos^2 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) - \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \\ \sin 2\alpha & \sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) & \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) + \sin^2 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) & \cos 2\alpha \sin 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) - \sin^2 2\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow S'_i &= \frac{1}{2} \left\{ S_0 + S_1 \left[\cos 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) \right] + S_2 \left[\cos 2\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) + \sin 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \right] + S_3 \left[\cos 2\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_2 t\right) - \sin 2\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\pi \sin \omega_1 t\right) \right] \right\} \\
 \Rightarrow S'_i &\approx \frac{1}{2} \left\{ S_0 + S_1 \left[\cos 2\alpha 2 J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin \omega_2 t \right] \right. \\
 &\quad + S_2 \left[\cos 2\alpha \left\{ J_0^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\omega_1 t + 2 J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\omega_2 t + 2 J_2^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(2\omega_1 t + 2\omega_2 t) + 2 J_2^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(2\omega_1 t - 2\omega_2 t) \right\} + 2 J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin 2\alpha \cos 2\omega_1 t \right] \\
 &\quad \left. + S_3 \left[\cos 2\alpha \left\{ 2 J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin \omega_1 t + 2 J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega_1 t - 2\omega_2 t) + 2 J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega_1 t + 2\omega_2 t) \right\} - \sin 2\alpha \left\{ J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\omega_1 t \right\} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

El efecto final en la intensidad medida es:

$$\begin{aligned}
 S'_0 &= \left\{ \frac{1}{2} S_0 \right. \\
 &+ \left[-\frac{1}{2} J_0^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta - J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta \cos(2\omega_1 t) - J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta \cos(2\omega_2 t) \right. \\
 &\quad - J_2^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta \cos(2\omega_1 t - 2\omega_2 t) - J_2^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta \cos(2\omega_1 t + 2\omega_2 t) \\
 &\quad + J_1^2 \sin^2 2\beta \cos(\omega_1 t - \omega_2 t) - J_1^2 \sin^2 2\beta \cos(\omega_1 t + \omega_2 t) \\
 &\quad \left. + J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos^2 2\beta \sin(\omega_2 t) \right] S_1 \\
 &+ \left[\frac{1}{2} J_0^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\beta + J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\beta \cos(2\omega_1 t) + J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\beta \cos(2\omega_2 t) \right. \\
 &\quad + J_2^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\beta \cos(2\omega_1 t - 2\omega_2 t) + J_2^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\beta \cos(2\omega_1 t + 2\omega_2 t) \\
 &\quad - J_1^2 \cos 2\beta \sin 2\beta \cos(\omega_1 t - \omega_2 t) + J_1^2 \cos 2\beta \sin 2\beta \cos(\omega_1 t + \omega_2 t) \\
 &\quad \left. + J_1 \cos 2\beta \sin 2\beta \sin(\omega_2 t) \right] S_2 \\
 &+ \left[J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin(\omega_1 t) + J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta \sin(\omega_2 t) + J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin(\omega_1 t - 2\omega_2 t) \right. \\
 &\quad - J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta \sin(2\omega_1 t - \omega_2 t) \\
 &\quad + J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta \sin(2\omega_1 t + \omega_2 t) \\
 &\quad \left. + J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin(\omega_1 t + 2\omega_2 t) \right] S_3 \} \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Y por tanto los parámetros de Stokes que obtenemos serán:

$$S_0 = 2S'_0(0) + J_0^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta S_1 - J_0^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\beta S_2 \tag{3.28a}$$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{S'_0(\omega_2)}{J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)} - \frac{\sin 2\beta S'_0(2\omega_{1,2})}{J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right)} - J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta S_3 \\
 &= \frac{S'_0(\omega_2)}{J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)} - \frac{\sin 2\beta S'_0(2\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right)} - J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta S_3 \tag{3.28b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \frac{\cos 2\beta S'_0(2\omega_{1,2})}{J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right)} + \frac{\tan 2\beta S'_0(\omega_2)}{J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)} - J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta \tan 2\beta S_3 \\
 &= \frac{\cos 2\beta S'_0(2\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right)} + \frac{\tan 2\beta S'_0(\omega_2)}{J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)} - \frac{J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta \tan 2\beta S_3}{J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)} \tag{3.28c}
 \end{aligned}$$

$$S_3 = \frac{S'_0(\omega_1)}{J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{S'_0(\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right)} = \pm \frac{S'_0(2\omega_1 \pm \omega_2)}{J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin 2\beta} \tag{3.28d}$$

Notemos que las expresiones son mucho más complicadas, sin embargo podemos aun extraer mucha información interesante de ellas, en primer lugar notemos que a medida que $\beta \rightarrow 0$ recuperamos las expresiones originales que teníamos para los parámetros de Stokes, excepto en el caso de la última expresión para S_3 . Respecto al caso anterior notemos que han aparecido frecuencias que no estaban presentes ni en la situación ideal ni cuando solo el ángulo del polarizador está rotado (en particular en la última expresión para S_3 tenemos $2\omega_1 \pm \omega_2$, que no apareció antes). Además, notemos que se han mezclado las frecuencias correspondientes a S_1 y S_2 , pero a cambio S_3 ahora tiene expresiones más sencillas, a diferencia del caso anterior, donde S_2 y S_3 eran las que aparecían mezcladas.

El siguiente caso es suponer todo bien excepto que la alineación del segundo retardador esta errada por un pequeño ángulo gama, en este caso el cambio en la matriz de Mueller de este elemento es:

$$\begin{aligned}
 M_{R2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & 0 & -\sin \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \delta_2 & 0 & \cos \delta_2 \end{pmatrix} \\
 \rightarrow M_{R2}(\gamma) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 2\gamma + \cos^2 2\gamma \cos \delta_2 & \sin 2\gamma \cos 2\gamma (\cos \delta_2 - 1) & -\cos 2\gamma \sin \delta_2 \\ 0 & (\cos \delta_2 - 1) \sin 2\gamma \cos 2\gamma & \cos^2 2\gamma + \sin^2 2\gamma \cos \delta_2 & -\sin 2\gamma \sin \delta_2 \\ 0 & \cos 2\gamma \sin \delta_2 & \sin 2\gamma \sin \delta_2 & \cos \delta_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Y el efecto en la intensidad medida es:

$$\begin{aligned}
 S'_0 &= \left\{ \frac{1}{2} S_0 \right. \\
 &+ \left[\frac{1}{2} \sin^2 2\gamma + J_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos^2 2\gamma \sin(\omega_2 t) \right] S_1 \\
 &+ \left[\frac{1}{2} J_0^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\gamma - J_1 \cos 2\gamma \sin 2\gamma \sin(\omega_1 t) + J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\gamma \cos(2\omega_1 t) \right. \\
 &\quad + J_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) J_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\gamma \cos(2\omega_2 t) + J_1^2 \cos 2\gamma \sin 2\gamma \cos(\omega_1 t - \omega_2 t) \\
 &\quad - J_1^2 \cos 2\gamma \sin 2\gamma \cos(\omega_1 t + \omega_2 t) + J_2^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\gamma \cos(2\omega_1 t - 2\omega_2 t) \\
 &\quad \left. + J_2^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos 2\gamma \cos(2\omega_1 t + 2\omega_2 t) \right] S_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{1}{2} J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma \sin 2\gamma + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma \sin(\omega_1 t) \right. \\
 & \quad - J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin 2\gamma \cos 2\gamma \sin(\omega_2 t) + J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin 2\gamma \cos 2\gamma \cos(2\omega_1 t) \\
 & \quad + J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma \sin(\omega_1 t - 2\omega_2 t) \\
 & \quad + J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma \sin(\omega_1 t + 2\omega_2 t) \\
 & \quad + J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma \sin 2\gamma \sin(2\omega_1 t - \omega_2 t) \\
 & \quad \left. + J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma \sin 2\gamma \sin(2\omega_1 t + \omega_2 t) \right] S_3 \} \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Para los parámetros de Stokes tenemos que:

$$S_0 = 2S'_0(0) - \sin^2 2\gamma S_1 - J_0^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma S_2 - J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma \sin 2\gamma S_3 \quad (3.31a)$$

$$S_1 = \frac{S'_0(\omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos^2 2\gamma} + \frac{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin 2\gamma}{\cos 2\gamma} S_3 \quad (3.31b)$$

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \frac{\sec 2\gamma J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) S'_0(2\omega_1) - J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \tan 2\gamma S'_0(\omega_1)}{\left(\sin^2 2\gamma + J_0^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = + \frac{S'_0(2\omega_2)}{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma} \\
 &= \mp \frac{S'_0(\omega_1 \pm \omega_2)}{J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma \sin 2\gamma} = \frac{S'_0(2\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma} \quad (3.31c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \frac{\sec 2\gamma \left(J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) S'_0(\omega_1) + \sin 2\gamma J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) S'_0(2\omega_1) \right)}{\left(\sin^2 2\gamma + J_0^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{S'_0(\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\gamma} \\
 &= \mp \frac{S'_0(2\omega_1 \pm \omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin 2\gamma \cos 2\gamma} \quad (3.31d)
 \end{aligned}$$

Notemos que ahora solo tenemos una expresión posible para el valor de S_1 , además solo hay mezcla de frecuencias para los parámetros S_2 y S_3 . Al igual que en el caso anterior se puede comprobar que al tomar el límite cuando $\gamma \rightarrow 0$ recuperamos las expresiones originales.

Observemos que el efecto de un error en el primer retardador es muy distinto del error que obtenemos cuando el que está mal es el segundo retardador, de modo que al hacer mediciones con un haz de luz controlado (o sea uno del que conocemos sus parámetros de Stokes) podríamos en principio saber cuál es el elemento que está desalineado, si es uno solo de ellos el que no está correctamente puesto.

Antes de pasar a la siguiente sección, donde detallamos nuestro trabajo con un programa para observar gráficamente las desviaciones, queremos presentar con más detalle como se llegó a las expresiones anteriores ya que la manera en que se hizo esto nos parece clara y podría tener importancia a la hora de aplicarlo a situaciones más generales que involucran este tipo de dispositivos y arreglos experimentales.

Primero, notemos que por las propiedades de las funciones trigonométricas involucradas en todo nuestro desarrollo, lo más natural es suponer que solamente algunas combinaciones de las frecuencias que aplicamos a los retardadores variables van a terminar apareciendo en la señal detectada al final del dispositivo, y como ya se vio en las expresiones obtenidas, estas frecuencias son:

$$0, \omega_1, \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 \pm \omega_2, \omega_1 \pm 2\omega_2, 2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_1 \pm 2\omega_2 \quad (3.32)$$

O sea, combinaciones simples de las frecuencias originales o del doble de las frecuencias originales. Esto se debe a que hemos hecho la aproximación de solo tomar los términos dominantes, los cuales involucran solo a las frecuencias más bajas. Notemos que tenemos 13 frecuencias en total, a primera vista no es sencillo determinar cuáles son las que se combinarán y de qué manera se puede separar su contribución para cada uno de los parámetros de Stokes del haz incidente. Lo que podemos obtener directamente es la expresión para la intensidad detectada al final del dispositivo experimental. Las expresiones para cada uno de estos están detalladas en las páginas anteriores.

Para observar con más facilidad las contribuciones de cada frecuencia, hicimos una tabla que las contenía a todas, donde además se indica cual es el coeficiente de Stokes que están multiplicando. En la siguiente página mostramos cual sería el esquema correspondiente a la situación ideal. Notemos que hemos hecho las siguientes convenciones de notación:

$$\begin{aligned} A_i &= J_i\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ C_x &= \cos(x) \\ S_x &= \sin(x) \end{aligned} \quad (3.33)$$

TABLA PARA INTENSIDADES, TODOS LOS ELEMENTOS ALINEADOS

	0	ω_1 [S]	ω_2 [S]	$2\omega_1$ [C]	$2\omega_2$ [C]	$\omega_1 \pm \omega_2$ [C]	$\omega_1 \pm 2\omega_2$ [S]	$2\omega_1 \pm \omega_2$ [S]	$2\omega_1 \pm 2\omega_2$ [C]	
$S'_o =$ ($\frac{1}{2}$) S_0
+			A_1) S_1
+	$\frac{1}{2} A_0^2$			$A_0 A_2$	$A_0 A_2$				A_2^2) S_2
+		$A_0 A_1$					$A_1 A_2$) S_3

SOLO POLARIZADOR DESALINEADO

	0	ω_1 [S]	ω_2 [S]	$2\omega_1$ [C]	$2\omega_2$ [C]	$\omega_1 \pm \omega_2$ [C]	$\omega_1 \pm 2\omega_2$ [S]	$2\omega_1 \pm \omega_2$ [S]	$2\omega_1 \pm 2\omega_2$ [C]	
$S'_o =$ ($\frac{1}{2}$) S_0
+			$A_1 C_{2\alpha}$) S_1
+	$\frac{1}{2} A_0^2 C_{2\alpha}$	$A_1 S_{2\alpha}$		$A_0 A_2 C_{2\alpha}$	$A_0 A_2 C_{2\alpha}$				$A_2^2 C_{2\alpha}$) S_2
+	$-\frac{1}{2} A_0 S_{2\alpha}$	$A_0 A_1 C_{2\alpha}$		$-A_2 S_{2\alpha}$			$A_1 A_2 C_{2\alpha}$) S_3

SOLO PRIMER RETARDADOR DESALINEADO

	0	ω_1 [S]	ω_2 [S]	$2\omega_1$ [C]	$2\omega_2$ [C]	$\omega_1 \pm \omega_2$ [C]	$\omega_1 \pm 2\omega_2$ [S]	$2\omega_1 \pm \omega_2$ [S]	$2\omega_1 \pm 2\omega_2$ [C]	
$S'_o =$ ($\frac{1}{2}$) S_0
+	$-\frac{1}{2} A_0^2 S_{2\beta}$		$A_1 C_{2\beta}^2$	$-A_0 A_2 S_{2\beta}$	$-A_0 A_2 S_{2\beta}$	$\mp A_1^2 S_{2\beta}^2$			$-A_2^2 S_{2\beta}$) S_1
+	$\frac{1}{2} A_0^2 C_{2\beta}$		$A_1 C_{2\beta} S_{2\beta}$	$A_0 A_2 C_{2\beta}$	$A_0 A_2 C_{2\beta}$	$\pm A_1^2 C_{2\beta} S_{2\beta}$			$A_2^2 C_{2\beta}$) S_2
+		$A_0 A_1$	$A_0 A_1 S_{2\beta}$				$A_1 A_2$	$\pm A_1 A_2 S_{2\beta}$) S_3

SOLO SEGUNDO RETARDADOR DESALINEADO

	0	ω_1 [S]	ω_2 [S]	$2\omega_1$ [C]	$2\omega_2$ [C]	$\omega_1 \pm \omega_2$ [C]	$\omega_1 \pm 2\omega_2$ [S]	$2\omega_1 \pm \omega_2$ [S]	$2\omega_1 \pm 2\omega_2$ [C]	
$S'_o =$ ($\frac{1}{2}$) S_0
+	$\frac{1}{2} S_{2\gamma}^2$		$A_1 C_{2\gamma}^2$) S_1
+	$\frac{1}{2} A_0^2 C_{2\gamma}$	$-A_1 C_{2\gamma} S_{2\gamma}$		$A_0 A_2 C_{2\gamma}$	$A_0 A_2 C_{2\gamma}$	$\mp A_1^2 C_{2\gamma} S_{2\gamma}$			$A_2^2 C_{2\gamma}$) S_2
+	$\frac{1}{2} A_0 C_{2\gamma} S_{2\gamma}$	$A_0 A_1 C_{2\gamma}$	$-A_0 A_1 C_{2\gamma} S_{2\gamma}$	$A_2 C_{2\gamma} S_{2\gamma}$			$A_1 A_2 C_{2\gamma}$	$\mp A_1 A_2 S_{2\gamma}$) S_3

A partir de este esquema es sencillo ver cuáles son los casos en que hay mezcla; estos corresponden a cuando una columna tiene más de un valor, ya que en este caso una frecuencia dada en la señal a final involucra una mezcla de los parámetros de Stokes del haz incidente. En la situación ideal solamente en el primer parámetro (S_0) se tiene una expresión que implica más de una frecuencia.

3.3.2. PROGRAMA PARA DESPLEGAR EL COMPORTAMIENTO GRAFICO DE LOS PARÁMETROS DE STOKES INDUCIDO POR LOS ERRORES.

Después de haber obtenido las expresiones analíticas se propuso crear un programa para comparar gráficamente los valores de los parámetros de Stokes medidos en una configuración con errores respecto de los obtenidos en una configuración ideal.

Para hacer esta implementación numérica, tenemos que simular una fuente de luz polarizada que genere un conjunto de haces de luz que incidirán en el polarímetro, para esto se decidió utilizar un generador que va de polarización lineal horizontal a polarización circular (derecha e izquierda).

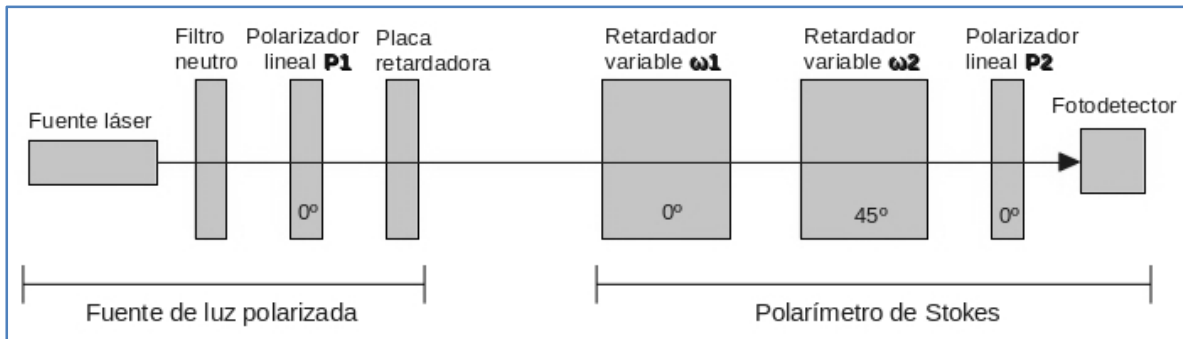


Figura 13. Arreglo considerado para el programa.

En la Figura 13 la parte marcada como “Polarímetro de Stokes” es lo que se ha explicado a lo largo de las secciones precedentes; la parte marcada como “Fuente de luz polarizada” corresponde a un generador de estados de polarización. Este generador funciona simplemente rotando a distintos ángulos la placa retardadora, esto va generándolos distintos estados de polarización. El valor de retardancia de la placa es constante y es de un cuarto de longitud de onda.

El programa muestra gráficamente cuales son los valores que toman los parámetros de Stokes al asignar números concretos a cada uno de los posibles errores mencionados al inicio de esta sección, el programa se encuentra en el anexo apropiado al final de esta tesis, pero a continuación mostramos la estructura de los resultados que se obtiene al correr el programa:

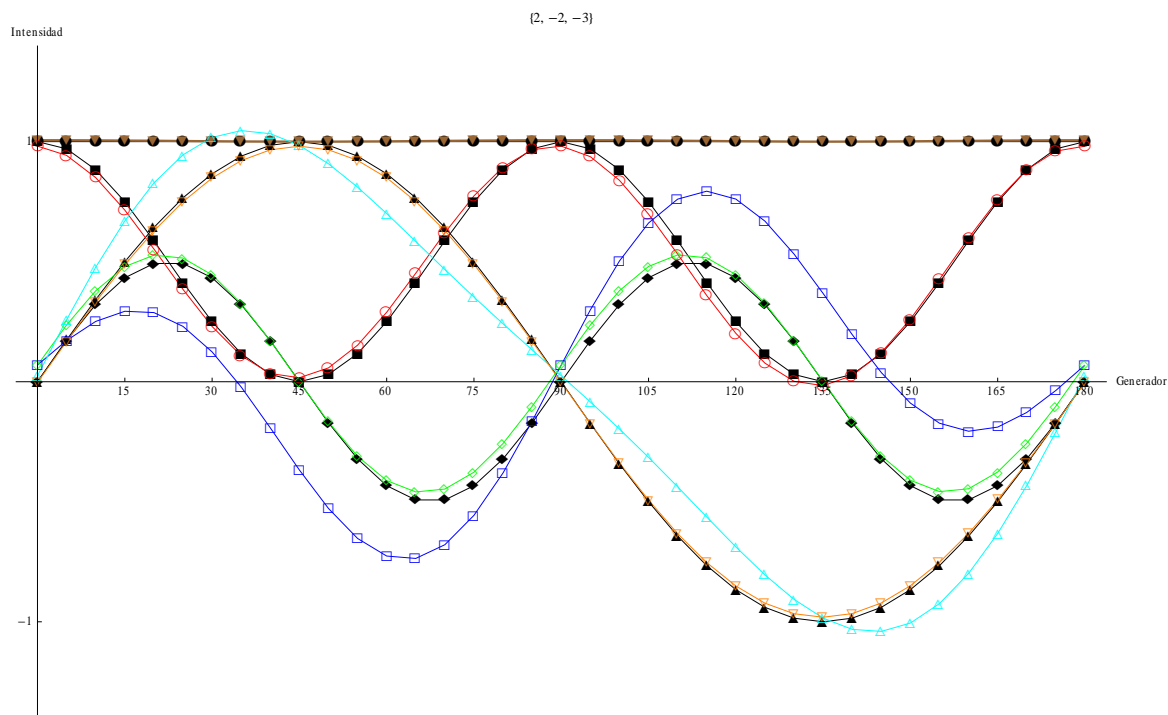


Figura 14. Resultado típico del programa graficador de parámetros de Stokes. ● S_0 , ■ S_1 , ◆ S_2 , ▼ S_3 , ▼ $S_0(2\omega_1)$, ○ $S_1(\omega_2)$, □ $S_2(2\omega_1)$, ◇ $S_2(2\omega_2)$, △ $S_3(\omega_1)$, ▽ $S_3(\omega_1 - 2\omega_2)$.

El eje horizontal indica los distintos ángulos en los que se posiciona el retardador generador. El eje vertical indica la intensidad luminosa medida en el detector, y está normalizada a uno en las unidades apropiadas para cada experimento. En la parte superior aparecen los valores de error de los elementos del dispositivo; en este caso $\{2, -2, -3\}$ indica $\alpha = 2^\circ$, $\beta = -2^\circ$, $\gamma = -3^\circ$. Las gráficas en negro indican los valores óptimos, que se medirían si no hubiese errores. Las gráficas de distintos colores indican los resultados que se miden para los distintos parámetros de Stokes cuando se considera el error de alineación especificado en la parte superior.

Este despliegue de los distintos valores que obtendremos para distintos errores en el dispositivo experimental nos da la posibilidad de analizar el comportamiento de la señal ante una diversidad de situaciones, además nos posibilita hacer una comparación directa con mediciones experimentales, las cuales se hicieron para algunos casos, de modo que podemos verificar si lo que se ha propuesto hasta ahora representa una situación real, reproducible en experimentos; después de esto podemos analizar de una manera cómoda como se ven modificados los valores medidos cuando la alineación no es perfecta, y con esto también podemos hacer algunas propuestas para llegar a una alineación óptima o a la hora de elegir entre la multitud de señales que en principio nos deberían dar la misma información.

La correspondencia entre medición experimental y modelo parece ser correcta a juzgar por las siguientes comparaciones:

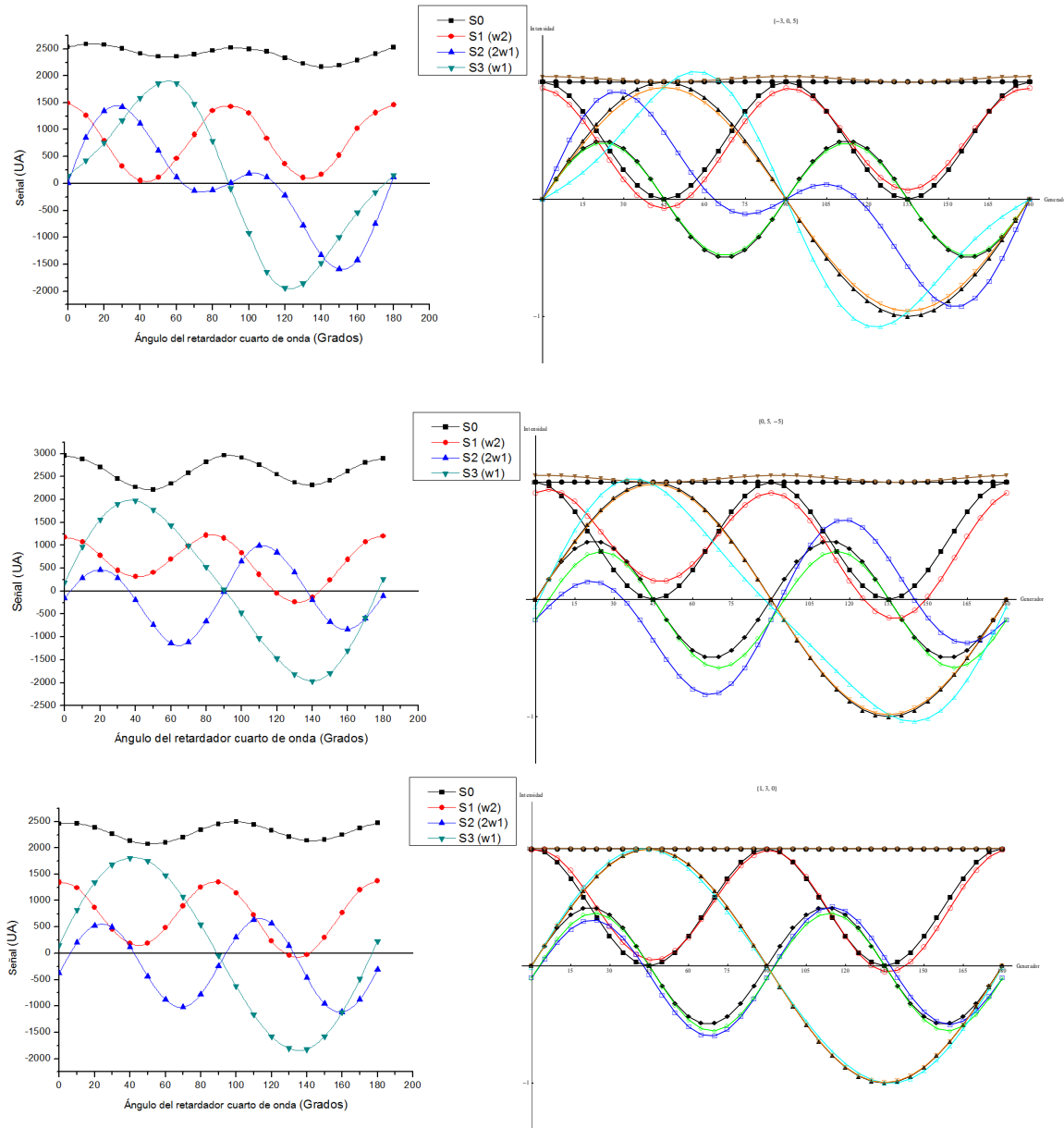


Figura 15. Comparación entre mediciones experimentales y modelo.

Para experimento ● $S_1(\omega_2)$, ▲ $S_2(2\omega_1)$, ▼ $S_3(\omega_1-2\omega_2)$.

Para el modelo ● S_0 , ■ S_1 , ◆ S_2 , ▼ S_3 , ▼ $S_0(2\omega_1)$, ○ $S_1(\omega_2)$, □ $S_2(2\omega_1)$, ◇ $S_2(2\omega_2)$, △ $S_3(\omega_1)$, ▽ $S_3(\omega_1-2\omega_2)$.

Al respecto de esta comparaciones habría mucho que destacar; en primer lugar hay que aclarar que mientras en las mediciones experimentales solo se consideraron algunas de las expresiones posibles (de hecho una por parámetro de Stokes) en el programa están graficadas todas las posibles expresiones para los parámetros. Por otra parte, en la medición experimental resultaron elegidas las frecuencias que, por lo que se observó en el programa, son las menos estables, de modo que presentan comportamientos marcadamente alejados del ideal incluso de manera cualitativa. Hay algunos detalles que no parecen corresponderse, por ejemplo una separación acusada entre los máximos valores de los

parámetros S_1 , S_2 y S_3 respecto a S_0 en el caso experimental que no se observa en el modelo, sin embargo, se cree que esto se debe al hecho de que en la medición experimental de S_0 intervienen todas las frecuencias posibles generadas y no solo las más importantes como en el modelo, lo cual da origen a esta separación. Es notable también el hecho de que a pesar de que las frecuencias utilizadas en experimento y modelo no coinciden, los resultados sean independientes de estas.

Ya que la correspondencia cualitativa está asegurada, podemos pasar a revisar las propiedades que se encontraron al explorar una zona cercana a la alineación correcta de los dispositivos, en particular se eligió hacer una exploración de la zona:

$$-5^\circ \leq \alpha \leq 5^\circ$$

$$-5^\circ \leq \beta \leq 5^\circ$$

$$-5^\circ \leq \gamma \leq 5^\circ (3.34)$$

Con una precisión de 1° entre cada una de ellas, esto implica explorar una red cubica de longitud 11, lo cual implica $11 \times 11 \times 11 = 1331$ puntos, o sea 1331 gráficas, todas estas fueron procesadas y se encuentran disponibles para su análisis. Se había hecho la propuesta de extender este rango hasta 10° , pero eso implicaría aumentar el número de graficas por aproximadamente un factor de 8, al igual que el tiempo de cálculo computacional, que en esta caso ya fue relativamente alto, además que requeriría un análisis mucho más laborioso y no necesariamente mucho más fructífero; por último se consideró que errores de más de 5° de alineación son poco probables para un experimento suficientemente cuidadoso.

Al hacer el análisis de estas gráficas, queda claro que hay componentes que son menos sensibles a los errores, en particular $S_0(0)$, $S_1(\omega_2)$, $S_2(\omega_2)$ y $S_3(\omega_1 - 2\omega_2)$ resultan ser las componentes más estables, mientras que $S_2(\omega_1)$ y $S_3(\omega_1)$ resultan altamente inestables, esto es, ante el mismo error en la alineación, podemos obtener información más fiable de las componentes estables que de las inestables. Este comportamiento se puede notar mejor en el siguiente conjunto de gráficas:

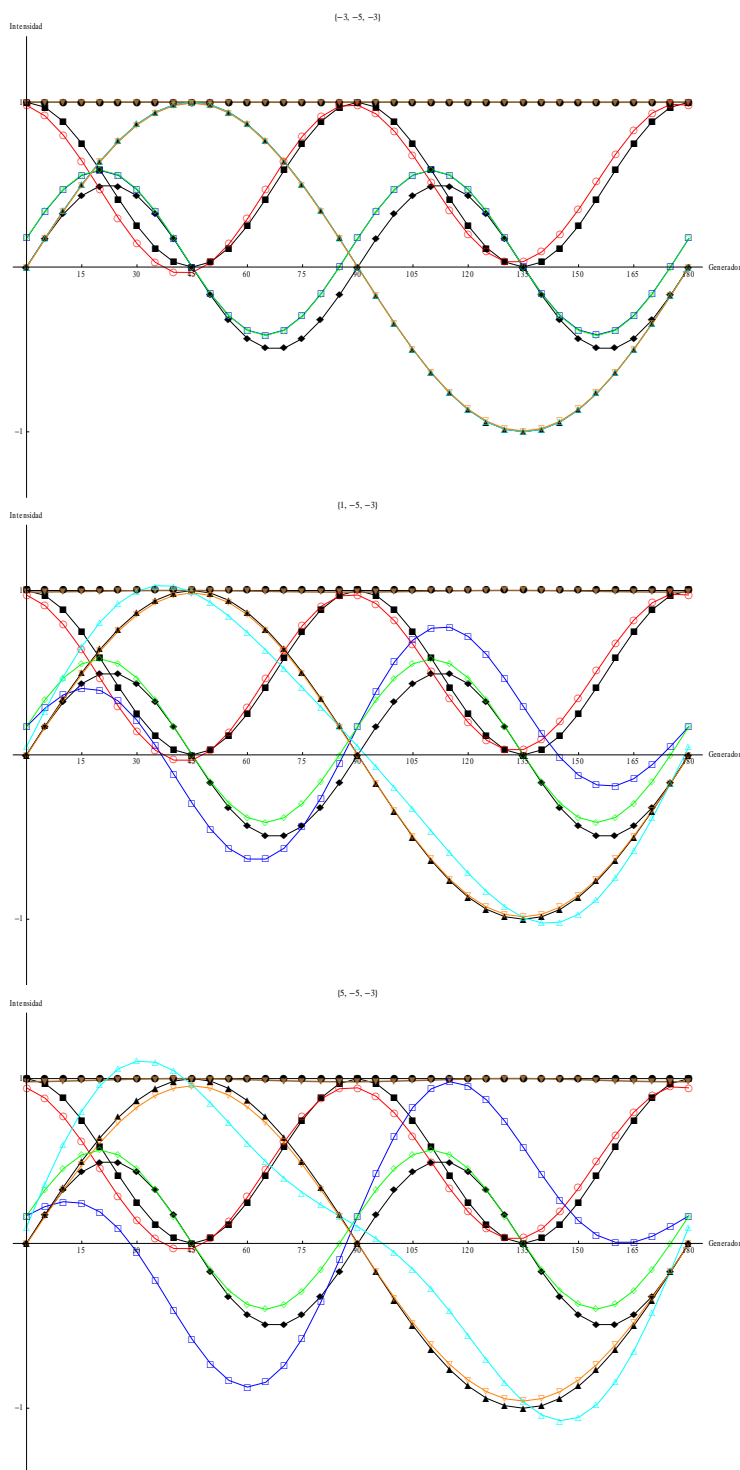


Figura 16. Componentes estable e inestable, en las gráficas se aprecia como $S_2(2\omega_1)$ y $S_3(\omega_1 - 2\omega_2)$ se alejan rápidamente de los valores ideales. ● S_0 , ■ S_1 , ◆ S_2 , ▼ S_3 , ▼ $S_0(2\omega_1)$, ○ $S_1(\omega_2)$, □ $S_2(2\omega_1)$, ◇ $S_2(2\omega_2)$, △ $S_3(\omega_1)$, ▽ $S_3(\omega_1 - 2\omega_2)$. El orden de revisión es columna por columna para notar la continuidad en la deformación.

Como siguiente punto, se encontró que la alineación relativa del primer retardador y el polarizador juegan un papel importante a la hora de considerar la divergencia de comportamiento de las diferentes frecuencias equivalentes. De hecho, si la alineación relativa es correcta, las distintas componentes no se separaran y nos darán la misma información, sin importar si son estables o inestables.

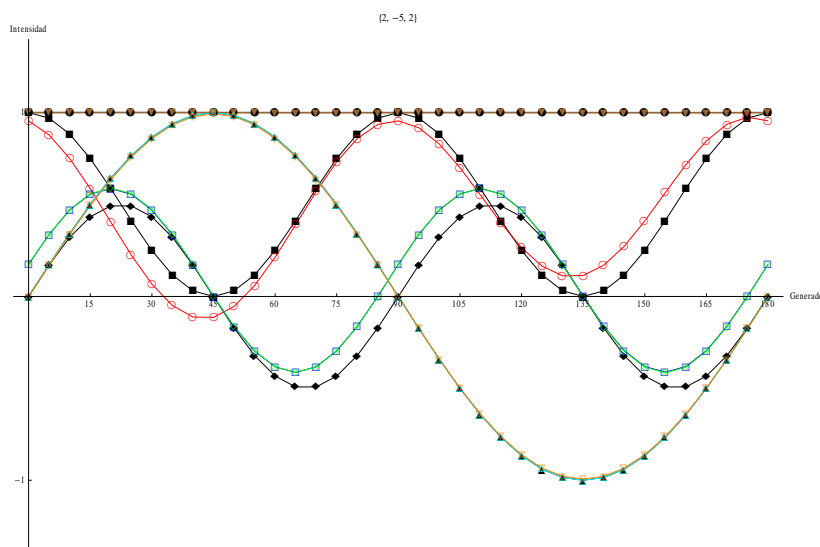


Figura 17. Ejemplo de configuración donde no se da separación de parámetros representados por distintas frecuencias. ● S_0 , ■ S_1 , ◆ S_2 , ▼ S_3 , ▼ $S_0(2\omega_1)$, ○ $S_1(\omega_2)$, □ $S_2(2\omega_1)$, ◇ $S_2(2\omega_2)$, △ $S_3(\omega_1)$, ▽ $S_3(\omega_1-2\omega_2)$.

Otra característica interesante del comportamiento se encontró en las frecuencias inestables. Estas a pesar de que en la mayoría de los valores no se corresponden tan bien como las estables, resultan estar “amarradas” a las estables en algunos puntos específicos. Los parámetros $S_2(2\omega_1)$ y $S_2(2\omega_2)$ están amarrados en 0° (polarización lineal horizontal) y 90° (polarización lineal horizontal) del retardador generador mientras que $S_3(\omega_1-2\omega_2)$ y $S_3(\omega_1)$ están amarrados en 0° , 45° (polarización circular derecha), 90° y 135° (polarización circular izquierda) del retardador generador. Aunque esto a primera vista nos podría decir que podemos confiar en la información de los pares de parámetros amarrados estos es falso, de hecho como se detallará más adelante en la propuesta de alineación, dificulta más su uso para alinear el dispositivo. Podemos apreciar el comportamiento de amarre en la figura 16.

Como último punto se constató que al mover los tres dispositivos por el mismo ángulo y en la misma dirección el efecto es igual a que si el haz incidente hubiera estado rotado en la dirección contraria por el mismo ángulo. Este resultado, aunque era de esperarse, resulta importante de comprobar, ya que así se tiene asegurado que se puede quitar un grado de libertad al sistema, por ejemplo a la hora de elegir cual será la dirección horizontal, y de esta manera facilitar la alineación del dispositivo.

3.3.3. AJUSTE DE LA CURVA VOLTAJE-RETARDANCIA

En cierto sentido, hasta ahora hemos propuesto errores que entran en las expresiones de una manera simple, ya que solo hemos sumado una pequeña cantidad a algunos de los parámetros que pueden variar en cualquier experimento de óptica, principalmente la alineación; sin embargo, dentro de las reuniones del equipo de trabajo se sugirió que el componente clave del comportamiento del polarímetro podría estar dado por la no linealidad de la relación voltaje-retardancia en los retardadores. En otro artículo de 2011 [18] se presentó un modelo de ajuste para la curva de voltaje-retardancia que trata de captar en una primera aproximación el comportamiento no lineal de esta función, en concreto se sugirió un polinomio de tercer grado ajustando la zona de interés. A continuación presentamos los resultados que se obtienen. Para el ajuste de la curva tenemos:

$$\delta' = 16.9262 - 0.00903V + 1.684 * 10^{-6} V^2 - 1.085 * 10^{-10} V^3 \quad (3.35)$$

Aquí V es el voltaje aplicado y está dado por:

$$V = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2} + \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} \sin \omega t \quad (3.36)$$

Y V_{\max} y V_{\min} son los voltajes máximos y mínimos aplicados. Usando (3.35) y (3.36) podemos obtener la intensidad detectada en al final del dispositivo, que será:

$$S_0 = \frac{1}{2} S_{i0} - \frac{1}{2} S_{i1} \cos \delta'_2 + S_{i2} \left(0.035 \cos \delta'_1 + \frac{1}{2} \sin \delta'_1 \sin \delta'_2 \right) + S_{i3} \left(0.035 \sin \delta'_1 + \frac{1}{2} \cos \delta'_1 \sin \delta'_2 \right) \quad (3.37)$$

Podemos utilizar esta ecuación para hacer un ajuste de mínimos cuadrados de los coeficientes del vector de Stokes incidente. A continuación mostramos una comparación entre los valores teóricos que se obtienen con el dispositivo generador-analizador discutido en la sección anterior y los resultados que se han obtenido utilizando el modelo de ajuste de la curva voltaje-retardancia.

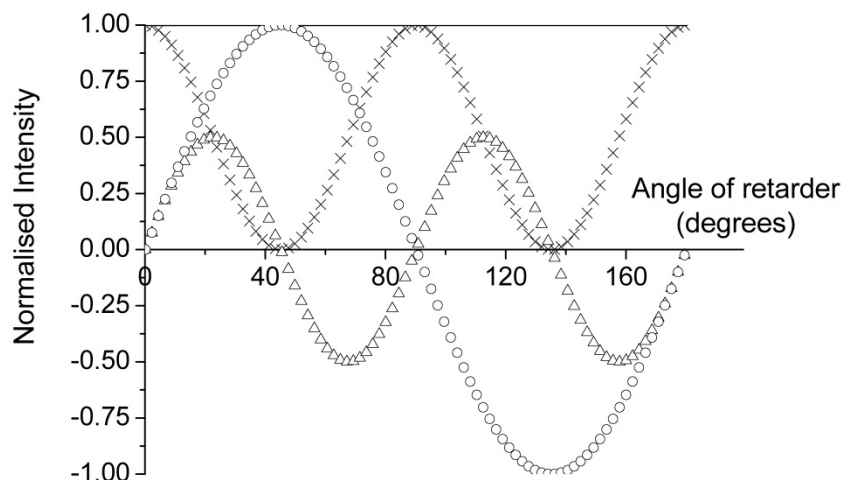


Figura 18. Valores de los parámetros de Stokes incidentes a medida que se va rotando el retardador de $\frac{1}{4}$ de longitud de onda. Línea continua S_{i0} ; cruces S_{i1} ; triángulos S_{i2} ; círculos, S_{i3}

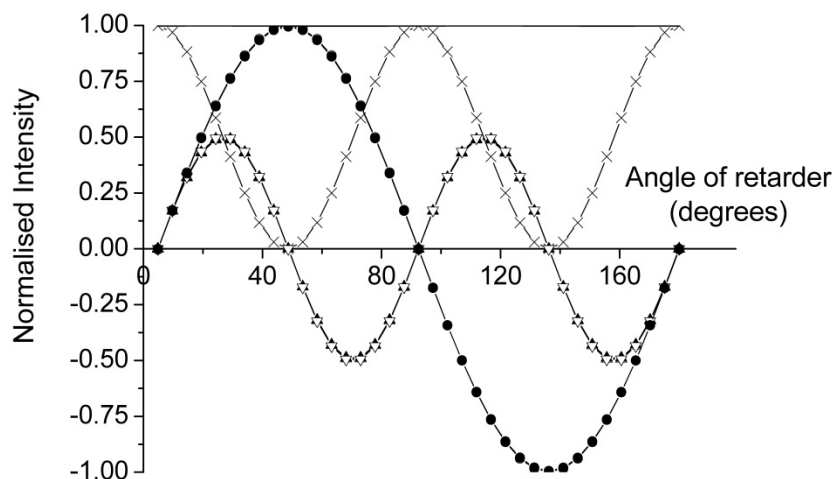


Figura 19. Valores simulados de las componentes detectadas del vector de Stokes incidente usando el método de la transformada de Fourier. Línea continua S_{i0} ; cruces S_{i1} ; Δ S_{i2} a frecuencia $2\omega_1$; S_{i2} a frecuencia $2\omega_1 + 2\omega_2$;

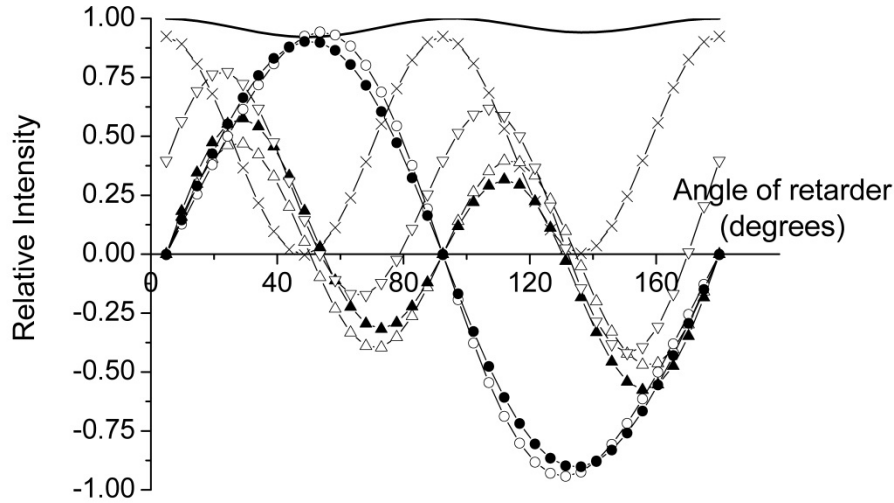


Figura 20. Valores simulados de las componentes detectadas del vector de Stokes usando el método de la transformada de Fourier incluyendo la relación no lineal entre el voltaje y la retardancia. Línea continua S_{i0} ; cruces S_{i1} ; Δ S_{i2} a la frecuencia $2\omega_1$; ∇ S_{i2} a la frecuencia $2\omega_1 + 2\omega_2$; ∇ , S_{i2} a la frecuencia $2\omega_2$; \circ , S_{i3} a la frecuencia ω_1 ; \bullet , S_{i3} a la frecuencia $\omega_1 + 2\omega_2$

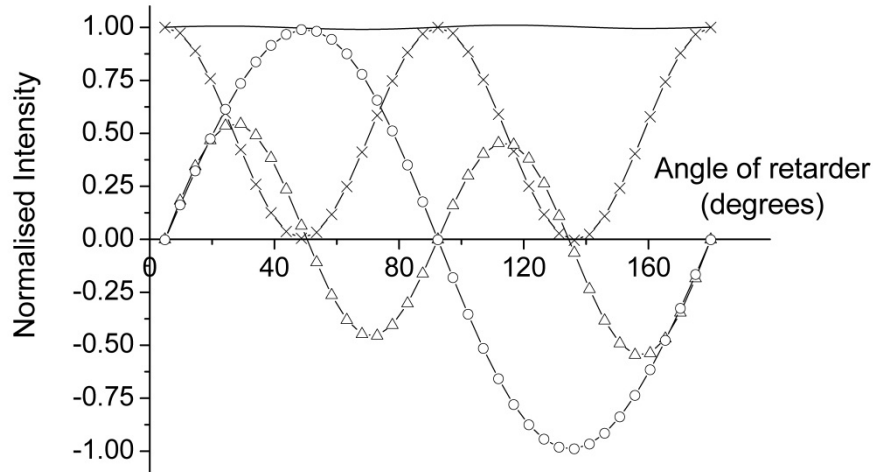


Figura 21. Valores de los parámetros utilizando el método de ajuste de mínimos cuadrados. Línea continua, S_{i0} ; cruces, S_{i1} ; triángulos, S_{i2} ; círculos, S_{i3}

Se puede mostrar que el efecto de la no-linealidad es distorsionar algunas de las componentes del vector de Stokes incidente, por ejemplo el término S_{i0} que ahora no será constante como debería ser, y también separar las distintas frecuencias que deberían dar el mismo valor. La Figura 21 muestra una simulación de los valores obtenidos mediante un ajuste de mínimos cuadrados, y podemos observar que el método es mucho más robusto en este caso.

3.4. PROPUESTA DE METODO DE ALINEACIÓN

La parte principal del trabajo de esta tesis ha versado sobre entender la influencia de la alineación en el comportamiento del polarímetro; el despliegue de correcciones, gráficas y propuestas en los apartados anteriores nos han llevado sugerir un protocolo de alineación para este dispositivo que puede ser probado en el laboratorio.

Primero, hay que notar que al mover los tres componentes del polarímetro (retardadores y polarizador) por el mismo ángulo, el efecto total es igual al que se obtendría si hubiera ingresado al dispositivo un estado de polarización rotado en el sentido contrario. Para poder aprovecharnos de este hecho de una manera óptima, también hay que notar que existe cierta arbitrariedad a la hora de elegir cual es la dirección que nombraremos como la dirección horizontal, que en este caso ha sido a la que a final de cuentas siempre nos hemos referido. Además, ya notamos que cuando el segundo retardador y el polarizador se encuentran desalineados hay una separación de las frecuencias que nos deberían dar los mismos valores. Por último, el comportamiento de las frecuencias cuando el ángulo del primer retardador esta desalineado está bien caracterizado.

Entonces el método que proponemos es el siguiente:

- 1) Antes de colocar los dos retardadores se determina cual es la dirección que se tomará como la horizontal y se alinea el polarizador del polarímetro con esta dirección, esto depende del experimento en cuestión y puede estar dado por una variedad de factores y consideraciones, pero en general se sabe que la alineación de un polarizador es uno de los ejercicios más rutinarios y mejor estudiados en un laboratorio de óptica, por lo que podemos suponer que este paso se puede llevar a cabo sin mayores complicaciones.
- 2) A continuación se colocan ambos retardadores, y se procede a alinear el segundo; esto se logrará variando su ángulo relativo al polarizador y procurando que las distintas componentes de la señal a la salida, que deberían dar los mismos valores, en efecto se igualen.
- 3) Por último se varía la orientación del primer retardador hasta llegar a las condiciones óptimas. En este caso se recomienda hacer incidir luz con polarización horizontal y tratar de anular el valor de la componente S_2 , ya que debería ser cero cuando mandamos este tipo de luz.

Como vemos, el problema se ha podido descomponer en pasos simples, donde está bien claro cuál debe ser el procedimiento y que resultado debemos esperar y perseguir en cada uno de ellos, con lo que el protocolo está bien establecido, sin embargo podemos hacer algunas aclaraciones para mayor precisión del método. En primer lugar, en el segundo paso buscaremos que $S_2(\omega_1)$ [que es inestable] se iguale a $S_2(\omega_2)$ [que es estable] y que $S_3(\omega_1)$ [inestable] se iguale a $S_3(\omega_1 - 2\omega_2)$ [estable]. En este caso también podemos elegir, ya que en los resultados se ha visto que al igualarse una de las frecuencias inestable a su frecuencia estable, la otra se iguala automáticamente; se recomienda usar como guía las dos distintas

frecuencias para el parámetro S_2 , especialmente en el caso de hacer incidir luz con polarización circular, donde debemos buscar igualar a cero el valor de $S_2(\omega_1)$, ya que $S_2(\omega_2)$ aparece automáticamente anulada para este valor. La igualación de frecuencias es igualmente posible utilizando S_3 , pero en este caso resulta más difícil ya que las señales estable e inestable se igualan en 4 puntos de amarre, mientras que en el caso de S_2 solo hay dos puntos de amarre. En el caso de la alineación del segundo retardador se considera que un buen método consiste en hacer incidir luz con polarización horizontal y buscar anular la componente S_2 , ya que S_3 aparece automáticamente anulada.

4. CONCLUSIONES

La teoría desarrollada hasta aquí puede utilizarse de manera provechosa para hacer ajustes a la alineación de los componentes ópticos del dispositivo particular que hemos discutido o para otros parecidos o con funcionamiento análogo; es independiente del tipo de retardador que se esté usando, esto puede ser relevante si en el futuro se decide usar otro tipo de retardadores variables en vez de los empleados para este experimento, por ejemplo se podrían usar cristales líquidos con una mayor linealidad en su relación voltaje-retardancia, lo cual eliminaría la necesidad de considerar las correcciones que se describieron en la última parte de la sección anterior.

4.1. CORRESPONDENCIA DEL MODELO CON EL EXPERIMENTO

Considerando la comparación con las mediciones experimentales, podemos decir que el comportamiento que se había observado se reproduce de una manera acorde con el modelo propuesto, con una correspondencia cualitativa muy buena, aunque hay algunas inconsistencias cuantitativas que valdrá la pena seguir investigando, ya sea por el camino propuesto en la última parte de la sección anterior o por algún otro que tome en cuenta lo que se ha avanzado con el modelo que propusimos, en particular la separación del valor de S_0 respecto a las otras componentes, y del que ya se han propuesto algunas posibles explicaciones, como la contribución de otras frecuencias en la señal de salida.

4.2. IMPLEMENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

Se pueden tomar a partir de los resultados anteriores dos caminos distintos: se puede implementar un protocolo de alineación previo a las mediciones del esparcímetro o se

puede robustecer el análisis de los datos durante el experimento o una vez que se tengan las medidas.

Para el primer enfoque los resultados obtenidos a partir del programa graficador son los que pueden guiar mejor; como ya se había indicado en el capítulo anterior, se sugiere primero hacer una alineación previa de los polarizadores correspondientes a la parte generadora de luz y a la parte analizadora de luz esparcida, con lo que se elimina uno de los grados de libertad de la parte analizadora; este tipo de alineaciones son los más comunes durante los experimentos de óptica y su explicación o discusión están más allá de nuestro propósito momentáneo y podemos dar por supuesto que es posible lograr esto con el grado de precisión necesario o deseado. A continuación se puede lograr alinear el primer retardador con el polarizador (manteniendo este último ya fijo) analizando la divergencia entre las distintas componentes que en la situación ideal nos deberían dar la misma información. Por último, el segundo retardador se alinea procurando anular el valor que se mide para las componentes de polarización a 45° y circular cuando la polarización incidente es lineal horizontal. Se puede tomar el camino alternativo de utilizar un polarizador circular para generar un par de estados de polarización bien determinados y distintos, lineal horizontal y circular, y con estos hacer el análisis anterior.

Si se toma el camino de mejorar el análisis de los datos, los resultados de la parte algebraica son mejores. Para ver esto basta darse cuenta de que cuando los dispositivos están desalineados, aparecen frecuencias en la señal a la salida que no deberían aparecer, y esto quiere decir que parte de la energía se está utilizando en producir estos picos en la señal y no se consideran en el análisis. Los resultados algebraicos que presentamos toman en cuenta estas frecuencias, y por tanto nos pueden ayudar a hacer más precisos los resultados cuando la alineación no es perfecta pero también sabemos que no están muy lejos de la situación ideal. Además es posible continuar por este camino y extender el número de frecuencias consideradas y hacer un análisis más complejo, pero que tolera mayores errores en la alineación de los componentes del analizador.

4.3. INVESTIGACIONES A FUTURO

Como se había mencionado al principio de esta tesis, el análisis que se ha hecho de este dispositivo está enmarcado en la construcción de un esparcímetero que servirá para hacer mediciones de la matriz de Mueller característica de superficies bidimensionales. En el camino de su construcción se ha pasado por hacer una investigación a fondo de las características de los componentes que la formaran, entre otros la estructura mecánica del aparato (que es un diseño novedoso), la óptica de generación de luz polarizada, la de detección (de la cual, en su aspecto teórico, esta tesis ha tratado), medición experimental del comportamiento de los componentes propuestos, etc., y estas indagaciones nos han llevado a conocer aspectos interesantes, poco explorados y novedosos en el campo de la polarización; bajo esta perspectiva es claro que en el futuro cercano se estarán utilizando los modelos propuestos en esta tesis para probarlos con el esparcímetero, esta será la prueba que juzgue realmente su provecho práctico en primera instancia. Luego de esta prueba, lo lógico será continuar revisando teóricamente, proponiendo modelos, interpretaciones, comparando con resultados previos todo lo que se obtenga una vez que el esparcímetero esté

terminado y funcionando; a este respecto hay que resaltar que se estará trabajando en un área de frontera donde se espera encontrar resultados novedosos e interesantes y donde las posibilidades que se abren son muchas, con una gran cantidad de materiales por analizar, una gran cantidad de pruebas que hacer (incluso sobre sustratos del mismo material pero, por ejemplo, variando geometrías de las superficies, variando la intensidad, longitud de onda y estado de polarización de la luz incidente) además de que con seguridad se tendrán que crear nuevas técnicas, tanto teóricas como experimentales para dar sentido a todo este torrente de información y fenómenos que se podrán medir y se deberán caracterizar.

En este sentido, esta tesis lejos de ser un objetivo en si forma parte de un camino que en cierta sentido parece ser largo y atareado, pero que sin duda depara el descubrimiento de muchos aspectos interesantes y desconocidos de la naturaleza.

APÉNDICES

A1. BIBLIOGRAFÍA Y ARTÍCULOS DE REFERENCIA

LIBROS

- [1] Goldstein, Dennis H., *Polarized Light, Second Edition*, Marcel Dekker, New York, 2003
- [2] Collet, Edward, *Field Guide to Polarization*. SPIE, Bellingham, Washington USA, 2005
- [3] Maradudin, Alexei A., *Light Scattering and Nanoscale Surface Roughness*, Springer, New York, 2007
- [4] J.A. Ogilvy, *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces*, IOP Publishing, Bristol, 1991
- [5] Joseph Larmor, *Memoir and Scientific Correspondence of the Late Sir George Gabriel Stokes*, Cambridge University Press, New York, 2010
- [6] Andrew Robinson, *The Last Man Who Knew Everything. Thomas Young, The Anonymous Polymath Who Proved Newton wrong, Explained How We See, Cured the Sick, and Deciphered the Rosetta Stone, Among Other Feats of Genius*, One World Publications, GB, 2006

ARTÍCULOS

- [7] Azzam R.M.A, "Oscillating-analyzer ellipsometer", *Rev. Sci. Instrum.*, 47(5), 624-628 (1976)
- [8] Azzam R.M.A, "Photopolarimeter using two modulated optical rotators", *Opt. Lett.*, 1(5), 181-183 (1977)
- [9] Azzam R.M.A, "Photopolarimetric measurement of the Mueller matrix by Fourier analysis of a single detected signal", *Opt. Lett.*, 2, 148-150 (1978)
- [10] Goldstein D.H., "Mueller matrix dual-rotating-retarder polarimeter", *Appl. Opt.*, 31, 6676-6683 (1992)
- [11] Rodríguez-Herrera O.G., Lara D. and Dainty C., "Far-field polarization-based sensitivity to sub-resolution displacements of a sub-resolution scatterer in tightly focused fields", *Opt. Express* 18(6), 5609-5628 (2010)
- [12] Lara D. and Dainty C., "Axially resolved complete Mueller matrix confocal microscopy," *Applied Optics*, 45(9), 1917-1930 (2006)
- [13] E. Jakeman and B.J. Hoenders, 1982, *Scattering by a random surface of rectangular grooves*, *Optica Acta*, **29**, p.p. 1587-1598.
- [14] R.A. Depine and D.C. Skigin, 1994, Scattering from metallic surfaces having a finite number of rectangular grooves, *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, pp. 2844-2850.
- [15] A. Mendoza-Suárez and E. R. Méndez, 1997, Light scattering by a reentrant fractal surface, *Applied Optics*, **36**, 3521-3531.
- [16] N.C. Bruce, 2003, Scattering from infinitely sloped surfaces by use of the Kirchhoff approximation, *Applied Optics*, **42**, pp. 2398-2406.

[17] N.C. Bruce, 2005, Control of the backscattered intensity in random rectangular-groove surfaces with variations in the groove depth, *Applied Optics*, **44**, 784-791.

[18] C.A. Velázquez Olivera, J.M. López Tellez and N.C. Bruce .*Stokes polarimetry using liquid-crystal variable retarders and non-linear voltaje-retardance function* .CCADET,UNAM, México, D.F. 04510

[19]N.C. Bruce, Alejandro Dominguez Báez, Tonatiuh Santana Sánchez, Xanat Téllez Díaz, Arturo Nogueira Jiménez, Rigoberto Nava Sandoval. *Design of a scanning polarimetricscatterometer for rough surface scattering measurements*.CCADET, UNAM, México, D.F. 04510

RECURSOS ELECTRÓNICOS

[20] <http://www.meadowlark.com/products/lcVariableRetarders.php>

A2. PROGRAMA

A continuación incluimos el programa que se creo para analizar el modelo propuesto en esta tesis.

```
(*Programa graficador. Este programa grafica el comportamiento de los parámetros de Stokes medidos cuando los retardadores y el polarizador tienen angulos de error en su alineacion*)
```

```
(*Inicializacion de variables*)
Clear["Global`*"];
```

```
(*A continuación esta la definición general de un polarizador rotado*)
```

$$POL = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & B \cos[2\alpha] & B \sin[2\alpha] & 0 \\ B \cos[2\alpha] & A \cos[2\alpha]^2 + G \sin[2\alpha]^2 & (A - G) \cos[2\alpha] \sin[2\alpha] & 0 \\ B \sin[2\alpha] & (A - G) \cos[2\alpha] \sin[2\alpha] & G \cos[2\alpha]^2 + A \sin[2\alpha]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix};$$

```
(*Definicion general de un retardador de fase rotado*)
```

$$RET = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[2\theta]^2 + \cos[\phi] \cos[2\theta]^2 & (1 - \cos[\phi]) \sin[2\theta] \cos[2\theta] & -\sin[\phi] \sin[2\theta] \\ 0 & (1 - \cos[\phi]) \sin[2\theta] \cos[2\theta] & \sin[2\theta]^2 + \cos[\phi] \cos[2\theta]^2 & \sin[\phi] \sin[2\theta] \\ 0 & \sin[\phi] \sin[2\theta] & -\sin \phi \sin[2\theta] & \cos[\phi] \end{pmatrix};$$

```
(*Definimos el polarizador generador de estados de polarizacion*)
```

```
A=1/2; B=1/2; G=0; α=0; PolGen=POL;
```

```
(*Retardador generador de estados de polarizacion*)
```

```
φ=π/2; θ=χ; RetGen=RET;
```

```
(*Haz de luz no polarizada*)
```

```
Snp={2,0,0,0};
```

```
(*Haz de luz con distintos estados de polarizacion*)
```

```
Si=RetGen.PolGen.Snp;
```

```
(*Definimos el primer retardador variable*)
```

```
Clear[φ, θ]; θ=beta; φ= φ1; RET1=RET ; φ1=((3 π/2)+ δ)+ ((π/2)+ ε) Sin[ω1*t];
```

```
(*Definimos el segundo retardador variable*)
```

```
Clear[φ, θ]; θ=gama+(π/4); φ= φ2; φ2=((3 π/2)+ψ)+ ((π/2)+ι)
```

```
Sin[ω2*t]; RET2=Simplify[RET];
```

```
(*Definimos el polarizador analizador*)
```

```
Clear[A,B,G,α]; A=(1/2)(px^2+py^2); B=(1/2)(px^2-py^2); G=px*py; MT=POL.RET.RET1;
```

```
(*Vector de Stokes a la salida*)
```

```
Sf =MT.Si;
```

```
(*Parametros para el programa*)
```

```
F0=15.819292019556375;
```

```
ω1=5(2π); ω2=2(2π); px=1; py=0; δ=0*π/180; ε=0*π/180; ψ=0*π/180; ι=0*π/180;
```

```
a0=BesselJ[0, Pi/2]; a1=BesselJ[1, Pi/2]; a2=BesselJ[2, Pi/2];
```

```
(*Hacemos las tablas para los distintos parámetros de Stokes*)
```

```
xSi0=Table[Si[[1]],{χ,0, Pi, Pi/36}];
```

```
xSi1=Table[Si[[2]],{χ,0, Pi, Pi/36}];
```

```
xSi2=Table[Si[[3]],{χ,0, Pi, Pi/36}];
```

```
xSi3=Table[Si[[4]],{χ,0, Pi, Pi/36}];
```

```

Si0=Table[{r,0},{r,0,180,5}];Do[Si0[[h,2]]=xSi0[[h]],{h,1,37}];
Si1=Table[{r,0},{r,0,180,5}];Do[Si1[[h,2]]=xSi1[[h]],{h,1,37}];
Si2=Table[{r,0},{r,0,180,5}];Do[Si2[[h,2]]=xSi2[[h]],{h,1,37}];
Si3=Table[{r,0},{r,0,180,5}];Do[Si3[[h,2]]=xSi3[[h]],{h,1,37}];

(*Tabla auxiliar*)
Sft = Table[0, {t, 0, 2, 0.002}, {χ, 0, Pi, Pi/36}];

(*Valor de los angulos de error beta y gama*)
beta = -4*π/180; gama = -4*π/180;

(*Iteracion para graficar los parámetros de Stokes para distintos valores del
angulo de error alfa*)
For[ k = -5, k < 6, k++, α = k*π/180;

(*Intensidad medida a la salida*)
S = Sf[[1]];

(*Tabla de intensidades para cada angulo del retardador generador*)
Stabla = Table[S, {t, 0, 2, 0.002}, {χ, 0, Pi, Pi/36}];

(*Transformada de Fourier aplicada a todos los parametros*)
Do[Sft[[All, j]] = Fourier[Stabla[[All, j]]], {j, 1, 37}];

(*Tablas de todas las transformadas de Fourier de los parámetros de Stokes*)
xs00 = Table[(Re[Sft[[1]]] - a0*a0*Re[Sft[[21]]]/(a0*a2))/F0];
xslw2 = Table[Im[Sft[[5]]]/(a1*F0)];
xs22w1 = Table[Re[Sft[[21]]]/(a0*a2*F0)];
xs22w2 = Table[Re[Sft[[9]]]/(a0*a2*F0)];
xs3w1 = Table[Im[Sft[[11]]]/(a0*a1*F0)];
xs3wlm2w2 = Table[Im[Sft[[19]]]/(a1*a2*F0)];
s00 = Table[{r,0},{r,0,180,5}];Do[s00[[h,2]]=xs00[[h]],{h,1,37}];
slw2 = Table[{r,0},{r,0,180,5}];Do[slw2[[h,2]]=xslw2[[h]],{h,1,37}];
s22w1 = Table[{r,0},{r,0,180,5}];Do[s22w1[[h,2]]=xs22w1[[h]],{h,1,37}];
s22w2 = Table[{r,0},{r,0,180,5}];Do[s22w2[[h,2]]=xs22w2[[h]],{h,1,37}];
s3w1 = Table[{r,0},{r,0,180,5}];Do[s3w1[[h,2]]=xs3w1[[h]],{h,1,37}];
s3wlm2w2 = Table[{r,0},{r,0,180,5}];Do[s3wlm2w2[[h,2]]=xs3wlm2w2[[h]],{h,1,37}];

(*Comando para graficar todas las tablas con los valores de las transformadas de
Fourier de los parámetros de Stokes*)
Print[ListPlot[{Si0, Si1, Si2, Si3, s00, slw2, s22w1, s22w2, s3w1, s3wlm2w2},
AspectRatio -> 1/1.5, PlotRange -> {-1.4, 1.4}, Joined -> True, PlotMarkers ->
{Automatic, 15}, Ticks -> {{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165,
180}, {1, -1}}, AxesLabel -> {Generador, Intensidad}, PlotLabel -> {α*180/π,
beta*180/π, gama*180/π}, PlotStyle -> {Directive[Black, Thin], Black,
Black, Black, Directive[Brown, Thick], Red, Blue, Green, Cyan, Orange}]]]

```

A3. PUBLICACIONES REALIZADAS

Uno de los artículos que se han mencionado a lo largo de la tesis fue publicados en colaboración con colegas del CCADET, está publicado en *SPIE proceedings*.

Stokes polarimetry using liquid-crystal variable retarders and non-linear voltage-retardance function

C.A. Velázquez Olivera, J.M. López Tellez and N.C. Bruce
 Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico,
 Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F. 04510

ABSTRACT

Stokes polarimetry using variable retardance elements such as Pockel's cells and liquid crystals is a well-developed technique. There are two standard methods of analysis to extract the Stokes vector from the data using only one detector. One is to use only certain values of the retardances to obtain data for a number of fixed polarization combinations. The other is to use all the polarization combinations of the retardances for an oscillating voltage applied to the cells, and perform a Fourier analysis on the time varying signal. This method requires a linear relationship between the applied voltage and the obtained retardance. However, in general, for liquid-crystal variable retarders, this relationship is not linear. We present an analysis of a proposed method to use a nonlinear voltage-retardance relation to extract the Stokes parameters of a light beam. The method assumes a known nonlinear function relating the voltage and the retardance and uses a least-squares fit of the measured data to the calculated Mueller matrix of the polarimeter.

Stokes polarimeter, variable retardance

INTRODUCTION

Variable-retardance elements such as Pockel's cells or liquid crystals are routinely used in polarimeters to measure the Stokes vector of a light beam or the Mueller matrix of a system [1-7]. In the literature, two methods have been proposed and implemented to extract the useful information from measured data with only one detector. One method is to use a limited number of fixed retardances, determined by the voltages applied to the elements, and use the known polarization states generated to calculate the Stokes vector or Mueller matrix required. The second method requires the use of an oscillating voltage giving an oscillating retardance. The detected signal is then Fourier transformed to detect the principle frequency contributions and these Fourier coefficients can be related to the components of the Stokes vector or Mueller matrix to be measured. This second method requires a linear relationship between the applied voltage and the retardance generated in the variable-retardance element, so that the relationship between the Fourier coefficients of the signal and the required parameters can be found.

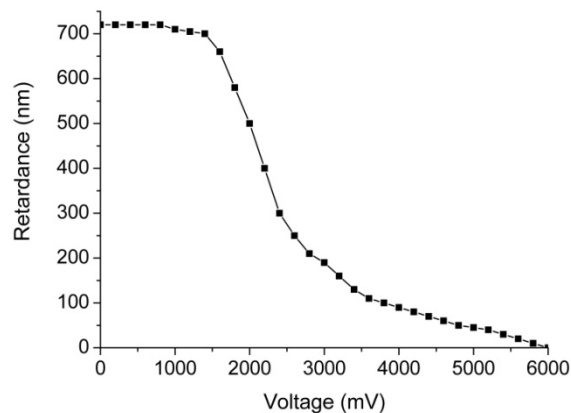


Figure 1. Retardance vs voltage for a typical liquid crystal retarder for a wavelength of 633nm. We have recently acquired a set of liquid-crystal retarders which do not have a linear relationship between the applied voltage and the generated retardance (see figure 1) [8]. This non-linear relationship generates errors when using the Fourier transform technique to calculate the Stokes vector of a light beam. To avoid these errors, we propose a least-squares fit of the detected signal to the calculated signal terms for the Stokes vector of the output. In section 2 the theory of the Fourier calculations and the proposed method are presented and in section 3 some simulation results are presented to verify the method.

THEORY

Figure 2 shows the set-up for a Stokes polarimeter [1-7]. The light beam passes through two variable retarders with their axes at 45° to one another, and then through a linear polarizer with its axis parallel to the axis of the first variable retarder. A detector registers the total intensity passing through the system. This system affects the Stokes vector of the light through the relation

$$S = MS_i \quad (1)$$

where S_i is the Stokes vector to be measured, and S is the Stokes vector of the light at the detector. In particular, the detected intensity is the first term of the Stokes vector S . The term M is the Mueller matrix of the system and can be analyzed in terms of the Mueller matrices of the components:

$$M = M_p(0^\circ)M_R(\delta_2, 45^\circ)M_R(\delta_1, 0^\circ) \quad (2)$$

where $M_p(0^\circ)$ is the Mueller matrix of a linear polarizer with its transmission axis at 0°, and $M_R(\delta, \theta)$ is the Mueller matrix of a retarder of retardance δ with its fast axis at θ . These matrices are given by

$$M_p(0^\circ) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$M_R(\delta, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \delta \sin^2 2\theta & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin \delta \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \delta) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \delta \cos^2 2\theta & \sin \delta \cos 2\theta \\ 0 & \sin \delta \sin 2\theta & -\sin \delta \cos 2\theta & \cos \delta \end{pmatrix} \quad (4)$$

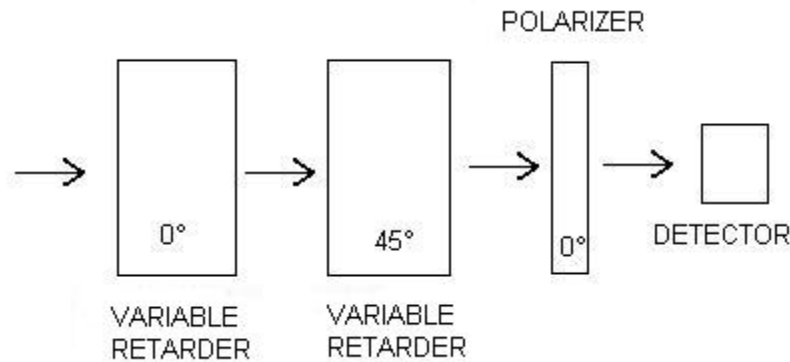


Figure 2. the set-up for a Stokes polarimeter. The angles associated with each component refer to the relative angle of the axis of that component.

Assuming a linear voltage-retardance relationship and using the most linear part of the curve shown in figure 1, we have

$$\delta = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sin \omega t \quad (5)$$

for both retarders, with ω being the frequency of oscillation of the applied voltage.

Substituting equation (5) in equation (2) the Mueller matrix for the system with a linear voltage-retardance relationship becomes

$$M_R(\delta, \theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_2 t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_2 t\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_2 t\right) \\ 1 & \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_2 t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_2 t\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_2 t\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

where the subindices 1 and 2 refer to the first or second retarder, respectively. The detected intensity is the first element of the detected Stokes vector

$$S_0 = \frac{1}{2} \left\{ S_{i0} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_2 t\right) S_{i1} + \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_2 t\right) S_{i2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \omega_2 t\right) S_{i3} \right\} \quad (7)$$

Now, using the expansions

$$\sin(\phi \sin \omega t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\phi) \sin[(2n+1)\omega t] = 2J_1(\phi) \sin(\omega t) \quad (8)$$

$$\cos(\phi \sin \omega t) = J_0(\phi) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n}(\phi) \cos[2n\omega t] = J_0(\phi) + 2J_2(\phi) \cos[2\omega t]$$

where $J_i(\phi)$ is the Bessel function of order I and frequencies up to the double of the original frequency have been taken. Substituting equation (9) in equation (8) gives

$$S_0 = \frac{1}{2} \left\{ S_{i0} + 2J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega_2 t) S_{i1} + \left(J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos[2\omega_1 t] \right) \left(J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos[2\omega_2 t] \right) S_{i2} + 2J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega_1 t) \left(J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos[2\omega_2 t] \right) S_{i3} \right\} \quad (9)$$

Combining the trigonometric terms the measured signal can be written in terms of the frequencies of the variations of the retardances:

$$\begin{aligned}
 S_0 = & \frac{1}{2} \left\{ S_{i0} + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)S_{i2} \right\} + J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)S_{i1} \sin(\omega_2 t) + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)S_{i3} \sin(\omega_1 t) \\
 & + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)S_{i2} (\cos[2\omega_1 t] + \cos[2\omega_2 t]) \\
 & + J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)S_{i3} (\cos[(\omega_1 - 2\omega_2)t] + \cos[(\omega_1 + 2\omega_2)t]) \\
 & + J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)S_{i2} (\cos[(2\omega_1 - 2\omega_2)t] + \cos[(2\omega_1 + 2\omega_2)t]) \quad (10)
 \end{aligned}$$

And finally, resolving this equation for the components of the unknown Stokes vector, in terms of the frequency components of the detected signal

$$\left\{ \begin{aligned}
 S_{i0} &= 2S_0(0) - J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)S_{i2} \\
 S_{i1} &= \frac{S_0(\omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\
 S_{i2} &= \frac{S_0(2\omega_1)}{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{S_0(2\omega_2)}{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{S_0(2\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\
 S_{i3} &= \frac{S_0(\omega_1 \pm 2\omega_2)}{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{S_0(\omega_1)}{J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)J_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}
 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Now, fitting the curve of figure 1 to a third-order polynomial we obtain

$$\delta' = 16.9262 - 0.00903 V + 1.684 * 10^{-6} V^2 - 1.085 * 10^{-10} V^3 \quad (12)$$

where V is the applied voltage and is given by

$$V = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2} + \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} \sin \omega t \quad (13)$$

and V_{\max} and V_{\min} are the maximum and minimum applied voltages, respectively.

Equations (13) and (14) can be substituted in equations (2), (3) and (4) to obtain the first term of the Stokes vector of the light reaching the detector (which is the total detected intensity) in terms of the Stokes vector of the incident light

$$S_0 = \frac{1}{2} S_{i0} - \frac{1}{2} S_{i1} \cos \delta'_2 + S_{i2} \left(0.035 \cos \delta'_1 + \frac{1}{2} \sin \delta'_1 \sin \delta'_2 \right) + S_{i3} \left(0.035 \sin \delta'_1 + \frac{1}{2} \cos \delta'_1 \sin \delta'_2 \right) \quad (14)$$

Equation (14) can be used in a least-squares fit to obtain the coefficients of the incident Stokes vector.

RESULTS

We have simulated the Stokes polarimeter in a Mathematica program. We have used a linear polarizer and a quarter-wave plate to produce the incident light beam and the quarter-wave plate is rotated to change the incident Stokes vector. Figure 3 shows how the incident Stokes vector changes as the quarter-wave plate is rotated, and figure 4 shows the results of the simulation of the detected components of the incident Stokes vector using the Fourier transform method, and assuming a perfectly linear relationship between the voltage and the retardance. Note that the different frequency terms which give the same component of the incident Stokes vector are very similar and cannot be separated in figure 4. It can be seen that in this case the detected values agree very well with the expected values.

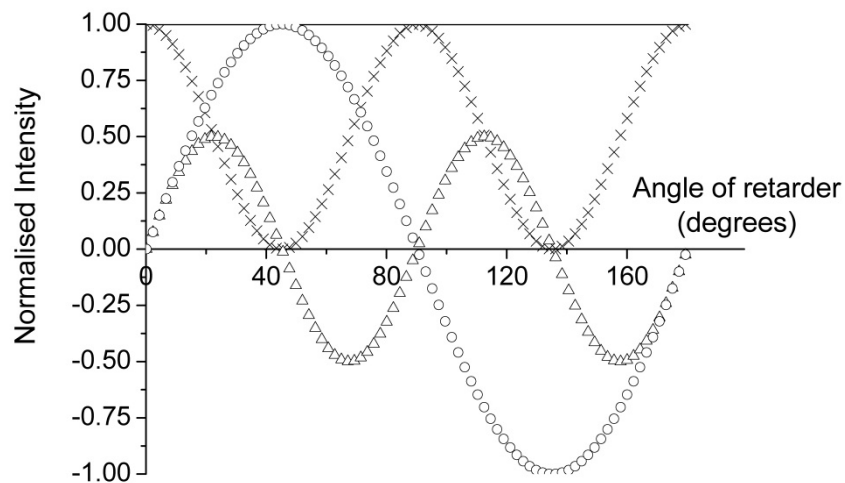


Figure 3: the values of the parameters of the incident Stokes vector as the quarter-wave plate is rotated.

Continuous line, S_{i0} ; crosses, S_{i1} ; triangles, S_{i2} ; and circles, S_{i3}

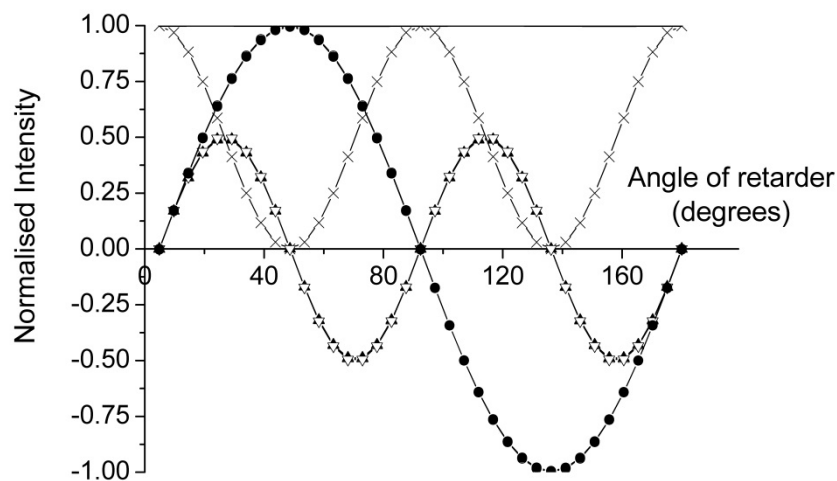


Figure 4: simulated values of the detected components of the incident Stokes vector using the Fourier transform method.

Continuous line, S_{i0} ; crosses, S_{i1} ; Δ , S_{i2} at frequency $2\omega_1$; ∇ , S_{i2} at frequency $2\omega_1 + 2\omega_2$;

\circ , S_{i3} at frequency ω_1 and \bullet , S_{i3} at frequency $\omega_1 + 2\omega_2$

Introducing the nonlinear relation between the voltage and the retardance, given by equations (12) and (13), the results of simulating the Fourier transform method are shown in figure 5. It can be seen that the effect of the nonlinearity is to distort some of the components of the incident Stokes vector, for example the S_{i0} term which is now not constant, as it should be, and to separate the different frequencies which should give the same value. Figure 6 shows the simulated values obtained by the least-squares fitting method and it can be seen that this method is much more robust in this case.

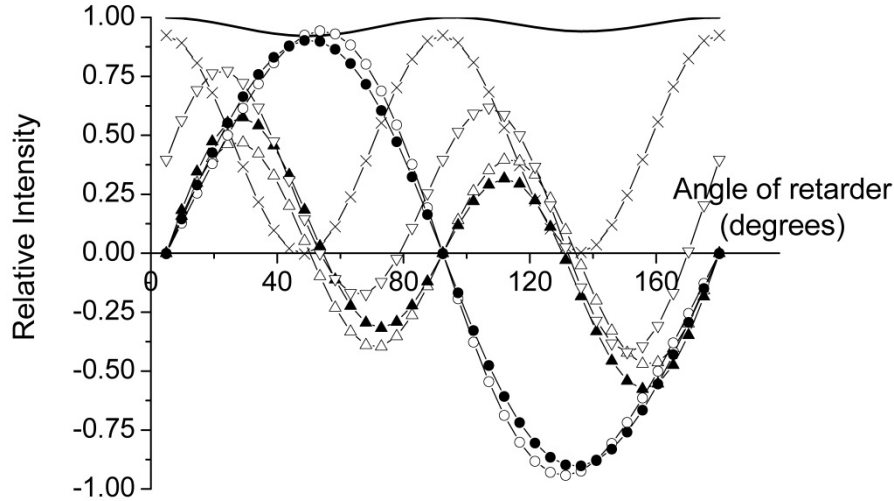


Figure 5: simulated values of the detected components of the incident Stokes vector using the Fourier transform method including the nonlinear relationship between the voltage and the retardance.

Continuous line, S_{i0} ; crosses, S_{i1} ; Δ , S_{i2} at frequency $2\omega_1$; ∇ , S_{i2} at frequency $2\omega_1 + 2\omega_2$;

\circ , S_{i3} at frequency ω_1 and \bullet , S_{i3} at frequency $\omega_1 + 2\omega_2$

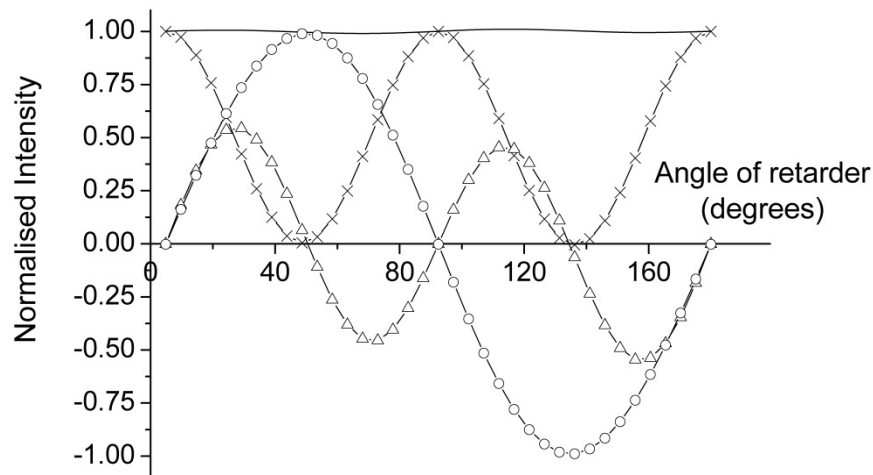


Figure 6: the values of the simulated least-squares fit for the incident Stokes vector.

Continuous line, S_{i0} ; crosses, S_{i1} ; triangles, S_{i2} ; and circles, S_{i3}

Conclusions

A method for extracting the incident Stokes vector parameters from an oscillating voltage variable retarder Stokes polarimeter has been presented. Preliminary simulated results show that the method is robust when there is a known nonlinearity between the applied voltage and the retardance of the variable retarders. We are currently implementing the method experimentally.

REFERENCES

- [1] Goldstein D., [Polarized Light, 2nd Edition], CRC Press, Boca Raton, chs. 27,28 (2003)
- [2] Azzam R.M.A, "Oscillating-analyzer ellipsometer", Rev. Sci. Instrum., 47(5), 624-628 (1976)
- [3] Azzam R.M.A, "Photopolarimeter using two modulated optical rotators", Opt. Lett., 1(5), 181-183 (1977)
- [4] Azzam R.M.A, "Photopolarimetric measurement of the Mueller matrix by Fourier analysis of a single detected signal", Opt. Lett., 2, 148-150 (1978)
- [5] Goldstein D.H., "Mueller matrix dual-rotating-retarder polarimeter", Appl. Opt., 31, 6676-6683 (1992)
- [6] Rodríguez-Herrera O.G., Lara D. and Dainty C., "Far-field polarization-based sensitivity to sub-resolution displacements of a sub-resolution scatterer in tightly focused fields", Opt. Express 18(6), 5609-5628 (2010)
- [7] Lara D. and Dainty C., "Axially resolved complete Mueller matrix confocal microscopy," Applied Optics, 45(9), 1917-1930 (2006)
- [8] <http://www.meadowlark.com/products/lcVariableRetarders.php>