UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

Grado de las separatrices de ecuaciones diferenciales polinomiales.

PRESENTA:

Adriana González Urquiza

29 de octubre de 2011

Índice general

Introducción

Una parte del estudio de las foliaciones holomorfas en $\mathbb{C}P^2$ se enfoca en la presencia de las hojas algebraicas de éstas.

En esta tesina se presentan a las foliaciones singulares definidas por una $1-forma$ polinomial

$$\omega = Pdx + Qdy.$$

Estas foliaciones definidas inicialmente en $\mathbb{C}^2$ se extienden como una foliación singular al plano complejo proyectivo.

En el primer capítulo se estudiarán dos clases de foliaciones de acuerdo al grado de una foliación polinomial en $\mathbb{C}P^2$. Y se enuncian algunas propiedades de cada una de estas clases.

En la segunda parte de la tesina, hablaremos del teorema de Levi, sobre extensión de funciones meromorfas a conjuntos analíticos. Esto con el fin de demostrar el teorema 2.2, que afirma que cerca de cada punto a de un subconjunto analítico Σ de codimensión mayor o igual que dos, una foliación $\mathcal{F}$ holomorfa no singular en $U - \Sigma$, está generada por un campo vectorial holomorfo F con locus singular Σ.

Sin embargo, en una carta afín de $\mathbb{C}P^2$ se puede decir aún más sobre el campo vectorial que define a la foliación, pues en este espacio proyectivo, el campo vectorial es polinomial.

En la última parte, se demuestra que el grado de las hojas algebraicas de una foliación genérica en $\mathbb{C}P^2$ está acotado de acuerdo al grado de la foliación misma. Así, se incluyen también resultados necesarios para cumplir el objetivo.

En el apéndice se encuentran teoremas útiles a lo largo del trabajo.

Quisiera agradecer profundamente a mi asesora Laura Ortiz Bobadilla por sus enseñanzas, haciendo todo más claro con sus palabras; su infalible apoyo y comprensión en cualquier momento; su continua disposición y motivación para que nosotros, sus alumnos conozcamos material que será de gran apoyo. Estoy contenta de trabajar con ella. Sin duda es un ejemplo valioso a seguir. ¡Gracias!

Capítulo 1

Propiedades Globales

Recordemos que una *foliación* $\mathcal{F}$ de dimensión compleja uno, de un dominio $U \subset \mathbb{C}^2$ es la partición de U en una unión de subconjuntos disjuntos conexos, $U = \bigsqcup_\alpha L_\alpha$, donde a cada L_α se le llama *hoja* de la foliación y localmente cada L_α se puede pensar como un 1-disco.

Una $1 - forma$ polinomial ω en $\mathbb{C}^2$, define una foliación de la siguiente manera: sea

$$\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy \tag{1.1}$$

donde $p, q \in \mathbb{C}[x, y]$. La foliación $\mathcal{F}$ estará dada por los ceros de ω, $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$.

$$\begin{array}{rccl} \omega : & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_0, y_0) & \longmapsto & p(x_0, y_0)dx_{(x_0,y_0)} + q(x_0, y_0)dy_{(x_0,y_0)}. \end{array}$$

Esta foliación, sobre el plano complejo, se extiende como una foliación singular sobre el plano complejo proyectivo $\mathbb{C}P^2$. A continuación veremos cómo.

Podemos pensar en el plano complejo $\mathbb{C}^2$ como una carta de $\mathbb{C}P^2$, asociándole a $\mathbb{C}^2$ las coordenadas homogéneas $[x : y : 1]$. Y en esta carta, la línea al infinito $\mathbb{I}$ corresponde a los puntos $[x : y : 0]$ en coordenadas homogéneas.

Diremos que (x_0, y_0) es un punto singular de la foliación $\mathcal{F}$ si $p(x_0, y_0) = q(x_0, y_0) = 0$.

Asumiremos que los polinomios p y q de ω son de grado a lo más r y que éstos son primos relativos entre sí, para que las singularidades de la foliación sean aisladas. Ya que si tuvieran un factor en común ($p = fp'$ y $q = fq'$), el conjunto $\{f = 0\}$ sería singular.

La manera de extender la foliación para analizar su comportamiento en una vecindad de la línea al infinito $\mathbb{I}$, es considerar las coordenadas (u, v) donde $u = 1/x$, y $v = y/x$. En esta nueva carta, la línea al infinito tendrá la ecuación $\mathbb{I} = \{u = 0\}$.

Para encontrar la ecuación que define a la 1-forma ω, calculemos la derivada del cambio de coordenadas:

$$dx = -\frac{1}{u^2}, \quad dy = \frac{udv - vdu}{u^2}$$

Así, ω se transforma en

$$\omega = -p\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\frac{du}{u^2} + q\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\frac{udv - vdu}{u^2} \tag{1.2}$$

Y separando (1.2) de acuerdo al grado de los polinomios homogeneos de p y q, tenemos:

$$\begin{aligned}\omega \quad = \quad & \left(-\tfrac{1}{u^{r+2}}\right)\left[p_r\left(1,v\right) + vq_r\left(1,v\right)\right]du \\ & + \left(-\tfrac{1}{u^{r+1}}\right)\left[-\left(p_{r-1}(1,v) + vq_{r-1}(1,v)\right)du + q_r(1,v)dv\right] \\ & + \left(-\tfrac{1}{u^{r}}\right)\left[-\left(p_{r-2}(1,v) + vq_{r-2}(1,v)\right)du + q_{r-1}(1,v)dv\right] + \ldots\end{aligned} \tag{1.3}$$

La forma ω en las coordenadas (u, v) es una forma meromorfa, que puede tener polos de orden, a lo más, r+2 en $\{u = 0\}$. Observemos que ω tiene un polo de orden exactamente $r + 2$ dependiendo si el polinomio:

$$h_{r+1}(1, v) := -p_r(1, v) - vq_r(1, v). \tag{1.4}$$

se anula o no, idénticamente.

Regresando a las coordenadas (x, y), es decir, sustituyendo el valor $v = y/x$ en la expresión (1.4),

$$h_{r+1}\left(1, \frac{y}{x}\right) = -p_r\left(1, \frac{y}{x}\right) - vq_r\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

y multiplicando por $-x^{r+1}$, queda la ecuación:

$$h_{r+1}(x, y) = xp_r(x, y) + yq_r(x, y).$$

Observemos que h_{r+1} es un polinomio homogeneo de grado $r + 1$. Estudiaremos la foliación $\mathcal{F}$ de acuerdo al valor que pueda tener la ecuación (1.4).

Consideremos primero el caso $h_{r+1} \not\equiv 0$. En este caso, se dice que la foliación es *no dicrítica*. Así, ω tiene un polo de orden $r + 2$ en $u = 0$. Al multiplicar la forma (1.3) por u^{r+2}, obtenemos la forma $\widetilde{\omega}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega} \quad = \quad & \left[-\left(p_r(1,v) + vq_r(1,v)\right) + u\left(-\left(p_{r-1}(1,v) + vq_{r-1}(1,v)\right) + O(u)\right)\right]du \\ & + u\left[q_r(1,v) + u\left(q_{r-1}(1,v) + \ldots\right)\right]dv\end{aligned}$$

Que se puede expresar como

$$\widetilde{\omega} = (h_{r+1}(1, v) + O(u))du + u(q_r(1, v) + O(u))dv.$$

Notemos que $\widetilde{\omega}$ es una 1-forma polinomial de grado $r + 1$. Como $\widetilde{\omega} = u^{r+1}\omega$, entonces define a la misma foliación que ω. Observamos que:

i) Las singularidades de $\widetilde{\omega}$ en $\mathbb{I} = \{u = 0\}$ son los ceros de h_{r+1}, de la forma $a_i = [1 : v_i : 0]$, con v_i raíz del polinomio h_{r+1}, ya que la forma restringida a este conjunto se ve sencillamente como:

$$\widetilde{\omega}|_{\{u=0\}} = h_{r+1}(1, v)du$$

Recordemos que una *separatriz local* de una foliación holomorfa singular $\mathcal{F}$ en un punto singular $a \in \mathcal{S}ing(\mathcal{F})$ es una hoja local $\mathbf{L} \subset (U, a) \backslash \Sigma$ cuya cerradura $\mathbf{L} \cup \{a\}$ es el germen de una curva analítica. Entonces,

ii) $\mathbb{I} = \{u = 0\}$ es una separatriz de $\mathcal{F}$ extendida a $\mathbb{C}P^2$. Ya que en cada $a_i = [1 : v_i : 0]$, la hoja $\mathbb{I}$ agregando el punto a_i es, localmente el germen de la curva analítica $\{u = 0\}$.

Otro caso, es cuando se tiene la igualdad

$$h_{r+1} \equiv 0. \tag{1.5}$$

Este caso se llama *dicrítico*.

Entonces, la forma ω se ve:

$$\begin{aligned}\omega \quad &= \left(\tfrac{1}{u^{r+1}}\right)\left[-\left(p_{r-1}(1, v) + vq_{r-1}(1, v)\right)du + q_r(1, v)dv\right] \\ &+ \left(\tfrac{1}{u^r}\right)\left[-\left(p_{r-2}(1, v) + vq_{r-2}(1, v)\right)du + q_{r-1}(1, v)dv\right] + \ldots\end{aligned}$$

El polo de esta forma es a lo más $r + 1$. Podemos entonces multiplicar ω por u^{r+1} y obtenemos

$$\widehat{w} = -\left(\left(p_{r-1}(1, v) + vq_{r-1}(1, v)\right)du + q_r(1, v)dv\right) + u\widetilde{\widetilde{\omega}}, \tag{1.6}$$

donde $\widetilde{\widetilde{\omega}}$ es holomorfa en $\{u = 0\}$.

Dado que desde un principio consideramos r como el grado máximo entre los polinomios p y q, podemos afirmar que $\widehat{\omega}$ tiene grado exactamente r. De lo contrario en la ecuación (1.6), $q_r(1, v)$ y $q_{r-1}(1, v)$ tendrían que anularse idénticamente. Si esto sucede, por la ecuación (1.5), sucedería que $p_r(1, v) = 0$. Lo cual reduce el grado inicial de la foliación $\mathcal{F}$.

Las propiedades de la foliación en el caso dicrítico son las siguientes:

i) En la línea al infinito $\mathbb{I}$, la forma que define a la foliación es

$$\widehat{\omega}|_{\{u=0\}} = -\left[p_{r-1}(1, v) + vq_{r-1}(1, v)\right]du + q_r(1, v)dv,$$

que tiene grado exactamente r y podría tener singularidades aisladas si existiera $(1, v_0)$ tal que $\widehat{\omega}|_{\{u=0\}}(1, v_0) = 0$. Observamos que a lo más existirían r de esos puntos pues $\widehat{\omega}|_{\{u=0\}}$ es un polinomio en una sola variable.

1.1. Clase $\mathcal{A}_r$

Con el fin de definir las foliaciones a tratar a lo largo de este trabajo, hagamos algunas observaciones.

Comenzamos con una foliación dada por una 1-forma, ω de grado r. Y al definir esta foliación en una vecindad de la línea al infinito, se tiene que la foliación son los ceros de la 1-forma $\widetilde{\omega}$, que tiene grado $r+1$.

Necesitamos entonces dar una definición del grado de una foliación en $\mathbb{C}P^2$.

Siguiendo la idea dada al principio, sobre la forma de ver al plano complejo $\mathbb{C}^2$ como una carta del plano complejo proyectivo $\mathbb{C}P^2$, podríamos considerar una línea ℓ en $\mathbb{C}^3$ que pase por el origen, y encontrar otra línea ℓ' en la que haya un representante de cada una de las otras rectas, de tal manera que ℓ juegue el papel de la línea al infinito.

Por ejemplo, sea

$$\ell = \{Ax + By + Cz = 0\}.$$

Si $\ell' = \{A(x-A) + B(y-B) + C(z-C) = 0\}$, entonces satisface lo anterior.

Con estas observaciones, definamos una clases de foliaciones.

Definición 1.1. *La clase* $\mathcal{A}_r$ consiste de foliaciones de $\mathbb{C}P^2$ que en una vecindad afín fija $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P^2 \backslash \ell$ están definidas por formas polinomiales ω en dos variables, de grado menor o igual a r, y que tienen singularidades aisladas.

Esta clase no es invariante bajo transformaciones proyectivas, esto se debe a que cuando transformamos la forma en la nueva carta, el grado de ésta cambia, siendo genéricamente, igual a $r+1$, cuando el grado de la forma inicial es r.

Al elegir una carta afín, $\mathcal{A}_r$ se identifica con el plano complejo proyectivo de campos vectoriales polinomiales de grado menor o igual a r. Es decir, el espacio $\mathcal{A}_r$ tiene dimensión $(r+1)(r+2)$, que es el número de coeficientes necesarios para definir un campo polinomial en dos variables de grado r. Recordemos que un polinomio tal, se ve como:

$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots + a_{1(r-1)}xy^{r-1} + a_{0r}y^r.$$

Este polinomio tiene $(r+1)(r+2)/2$ coeficientes, pero como la forma está definida por dos polinomios, se obtiene la dimensión arriba mencionada.

Dos campos que difieren multiplicativamente por una constante, definen a la misma foliación. Ya que si

$$\widetilde{\omega} = (h_{r+1}(1,v) + O(u))du + u(q_r(1,v) + O(u))dv,$$

y $\widetilde{\widetilde{\omega}} = c\widetilde{\omega}$ con $c \neq 0$, entonces

$$\{\widetilde{\widetilde{\omega}} = 0\} = \{\widetilde{\omega} = 0\}.$$

Dentro de las foliaciones de la clase $\mathcal{A}_r$ queremos trabajar con un conjunto amplio de ellas. Y las dividiremos entre las dicríticas y las no dicríticas.

Representamos una 1-forma, ω como un punto en el espacio $\mathbb{C}^{(r+1)(r+2)}$:

$$p = (a_{00}, a_{10}, \ldots, a_{1(r-1)}, a_{0r}) \longmapsto a_{00} + a_{10}x + \cdots + a_{1(r-1)}xy^{r-1} + a_{0r}y^r.$$

Bajo esta asignación, la imágen inversa del cero es un cerrado en $\mathbb{C}^{(r+1)(r+2)}$. Entonces, genéricamente (es decir, en todo el espacio salvo en un cerrado) la hoja al infinito es invariante.

Con esto, tenemos clasificadas a las foliaciones de acuerdo al grado que las define, dependiendo cuál es la línea al infinito que se considere. Sin embargo, es posible clasificarlas de otra manera y esto es a través del *grado proyectivo* de una foliación.

Para llegar a la definición de grado proyectivo necesitamos recordar cómo se construye el espacio proyectivo $\mathbb{C}P^2$ y definiremos una 1-forma que se proyecte bien sobre las líneas por el origen de $\mathbb{C}^3\backslash\{0\}$. Dotamos a este espacio con coordenas homogeneas $[X : Y : Z]$.

El plano complejo proyectivo se forma considerando las rectas complejas por el origen relacionando puntos $x, y \in \mathbb{C}^3\backslash\{0\}$ como sigue:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C}, y = cx. \tag{1.7}$$

Recordemos que el *campo de Euler* es el campo

$$V = X\frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial}{\partial Y} + Z\frac{\partial}{\partial Z}. \tag{1.8}$$

Y sean $A(X, Y, Z)$, $B(X, Y, Z)$ y $C(X, Y, Z)$ polinomios homogeneos de grado r. Con estos polinomios se tiene la forma

$$\Omega = A(X, Y, Z)dX + B(X, Y, Z)dY + C(X, Y, Z)dZ. \tag{1.9}$$

Evaluando estos polinomios en $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{C}^3\backslash\{0\}$, nos queda

$$\Omega_p = A(p_1, p_2, p_3)dX + B(p_1, p_2, p_3)dY + C(p_1, p_2, p_3)dZ.$$

Aplicando esta forma al campo de Euler se obtiene la expresión,

$$\Omega_p(V) = A(p)X + B(p)Y + C(p)Z.$$

Observamos que la igualdad $\Omega_p(V) = 0$, corresponde a la ecuación de un plano complejo por el origen en $\mathbb{C}^3$. Así, el conjunto $\{\Omega = 0\}$ define una distribución de $2-$ *planos*.

Donde una *k - distribución* de una variedad M es un subespacio de dimensión k del plano tangente a M en cada punto p.

Así, la proyección $\pi : \mathbb{C}^3\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ junto con la relación (1.7) define una distribución de rectas en $\mathbb{C}^3$, cuando Ω se evalua en V,

$$\Omega(V) = AX + BY + CZ \equiv 0. \tag{1.10}$$

Mediante esta condición, para Ω una forma definida en $\mathbb{C}^3\backslash\{0\}$ es posible llegar a una 1-forma definida en alguna carta afín de $\mathbb{C}P^2$.

1.2. Clase $\mathcal{B}_r$

Con lo dicho en la sección anterior, estamos en posibilidades de dar las definiciones que buscabamos.

Definición 1.2. Una foliación polinomial $\mathcal{F}$ en $\mathbb{C}P^2$ tiene *grado proyectivo r* si en coordenadas homogeneas $[X : Y : Z]$ está definida por una $1-forma$ Ω de grado r como en la ecuación (1.9) que satisface la identidad (1.10) y los coeficientes A, B, C no tienen factores en común.

Para darnos una idea de cómo se calcula el grado proyectivo de una foliación, veamos en un ejemplo, en el caso dicrítico, quiénes son la carta, la foliación y las coordendas.

Ejemplo 1.1. Sea (x, y) la carta afín dada por las coordenadas $x = X/Z$, $y = Y/Z$ en $\mathbb{C}P^2$. Dado que la coordenada Z no puede ser cero, podemos identificar esta carta como el plano complejo en $\mathbb{C}^3$, $\Pi = \{Z = 1\}$. Si se tiene definida en $\mathbb{C}^3$ una forma como (1.9), la proyección de ésta, mediante π al plano Π, está dada fijándonos en el cambio de coordenadas:

Es necesario conocer también dX y dY, ya que $X = x/Z$ y $Y = y/Z$,

$$dX = \frac{Zdx - xdZ}{Z^2}, \quad dy = \frac{Zdy - ydZ}{Z^2}, \tag{1.11}$$

y dado que $Z = 1$, $dZ = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega = \quad \Omega|_{\{Z=1\}} &= A\left(\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z}, 1\right) \tfrac{ZdX-XdZ}{Z^2} + B\left(\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z}, 1\right) \tfrac{ZdY-YdZ}{Z^2} \\ &= A(x, y, 1)dx + B(x, y, 1)dy \end{aligned} \tag{1.12}$$

Es posible también, dada una 1-forma, $\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy$ de grado r definida en la carta afín $\Pi = \{Z = 1\}$ de $\mathbb{C}P^2$, extenderla a una forma en $\mathbb{C}^3\backslash\{0\}$, y que al aplicarla al campo de Euler, se anule.

Queremos entonces definir a partir de ω una 1-forma como (1.9).

Para esto, recordemos que las coordenadas están dadas por $x = X/Z$ y $y = Y/Z$, entonces de manera análoga a las ecuaciones (1.11), tenemos

$$dx = \frac{ZdX - XdZ}{Z^2}, \quad dy = \frac{ZdY - YdZ}{Z^2}.$$

Sustituimos estos valores en ω,

$$\begin{aligned}\Omega &= p\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right)\tfrac{ZdX-XdZ}{Z^2}+q\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right)\tfrac{ZdY-YdZ}{Z^2}\\ &= p\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right)dX/Z+q\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right)dY/Z-(Xp\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right)+Yq\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right))dZ/Z^2.\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por Z^{r+2},

$$\begin{aligned}\Omega &= Z^{r+1}p\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right)dX+Z^{r+1}q\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right)dY\\ &\quad -Z^r(Xp\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right)+Yq\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right))dZ.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Así, los coeficientes de la forma que ya está definida en coordenadas homogeneas es:

$$\begin{aligned}A(X,Y,Z) &= Z^{r+1}p\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right)dX\\ B(X,Y,Z) &= Z^{r+1}q\left(\tfrac{X}{Z},\tfrac{Y}{Z}\right)dY\\ C(X,Y,Z) &= -Z^{-1}(XA(X,Y,Z)+YB(X,Y,Z))dZ\end{aligned}\tag{1.14}$$

Es posible afirmar que Ω no es necesariamente una forma polinomial, ya que el coeficiente $C(X,Y,Z)$ tiene un polo si no se satisface la siguiente igualdad:

$$XA(X,Y,Z)+YB(X,Y,Z)\equiv 0.\tag{1.15}$$

El lado derecho de la equivalencia anterior, corresponde a un polinomio de grado menor o igual que $r+1$.

La forma que tiene como coeficientes los definidos en (1.14), se anula en el campo de Euler:

$$\begin{aligned}\Omega(X,Y,Z) &= Z^{r+1}pdX(X,Y,Z)+Z^{r+1}qdY(X,Y,Z)-Z^r(Xp+Yq)dZ(X,Y,Z)=\\ &= Z^{r+1}Xp+Z^{r+1}Yq-Z^{r+1}(Xp+Yq)\\ &\equiv 0.\end{aligned}$$

Decir que se cumple la ecuación (1.15) es equivalente a pensar en

$$-Z^r\left(Xp\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)+Yq\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)\right)\equiv 0.$$

Expresando a los polinomios p y q en sus componentes homogéneas, la forma polinomial Ω se ve:

$$\begin{aligned}\Omega = &Z^{r+1}\left[p_r\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)+p_{r-1}\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)+\dots\right]dX\\ &+Z^{r+1}\left[q_r\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)+q_{r-1}\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)+\dots\right]dY\\ &-Z^r\left[Xp_r\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)+Xp_{r-1}\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)+\dots\right]dZ\\ &-Z^r\left[Yq_r\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)+Yq_{r-1}\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)+\dots\right]dZ.\end{aligned}$$

Agrupemos ahora los términos de acuerdo a su grado, comenzando por los de grado $r+1$:

$$\begin{aligned}\Omega =& Z\left[p_r(X,Y)\,dX + q_r(X,Y)\,dY\right] - \left[Xp_r(X,Y) + Yq_r(X,Y)\right]dZ\\ &+ Z^2\left[(p_{r-1}(X,Y) + Zg_1(X,Y))\,dX + (q_{r-1}(X,Y) + Zg_2(X,Y))\,dY\right]\\ &- Z\left[X(p_{r-1}(X,Y) + Zg_1(X,Y)) + Y(q_{r-1}(X,Y) + Zg_2(X,Y))\right]dZ\end{aligned}$$

En la expresión anterior, el segundo término del primer renglón se anula por hipótesis (estamos analizando el caso dicrítico). Y se puede concluir que puedo multiplicar Ω por Z^{-1}, para obtener:

$$\Omega' = Z^{-1}\Omega,$$

que es una 1-forma de grado r que también se anula en el campo de Euler, como veremos a continuación.

$$\begin{aligned}\Omega'(X,Y,Z) =& Xp_r(X,Y) + Yq_r(X,Y) + Z\left[X(p_{r-1}(X,Y) + Zg_1(X,Y))\right]\\ &+ Z\left[Y(q_{r-1}(X,Y) + Zg_2(X,Y))\right]\\ &- Z\left[X(p_{r-1}(X,Y) + Zg_1(X,Y)) + Y(q_{r-1}(X,Y) + Zg_2(X,Y))\right]\\ \equiv& 0.\end{aligned}$$

Ya que por hipótesis la suma de los primeros dos términos es cero y los términos que siguen son uno, el inverso aditivo del otro.

Y si restringimos la forma Ω' a la carta afín $\Pi = \{Z = 1\}$, resulta que es la forma inicial ω.

$$\begin{aligned}\Omega'|_\Pi &= p_r(X,Y)dX + q_r(X,Y)dY +\\ &\quad + (p_{r-1}(X,Y) + g_1(X,Y) + q_{r-1}(x,Y) + g_2(X,Y))\\ &= p(X,Y)dX + q(X,Y)dY\\ &= \omega.\end{aligned}$$

La forma Ω' tiene grado proyectivo r.

Luego del ejemplo visto, será más natural leer la siguiente definición.

Definición 1.3. *La clase* $\mathcal{B}_r$ es la colección de foliaciones de grado proyectivo menor o igual a r en $\mathbb{C}P^2$.

Podemos identificar esta clase con un espacio proyectivo de 1-formas homogéneas como en (1.9).

Para definir a Ω de grado r, necesitamos tres polinomios homogeneos de este mismo grado. La cantidad de coeficientes necesaria para definir uno de ellos es $r+1$. Así, considerando los tres polinomios y la ecuación (1.10) que deben satisfacer, tenemos un espacio de dimensión $3(r+1)-1$.

Y tal como lo muestra el ejemplo, en una carta afín, una foliación de $\mathcal{B}_r$ es descrita por una 1-forma de grado $\leq r$.

Capítulo 2

Algunos teoremas importantes

El interés de este capítulo es analizar los órdenes que pueden tener las hojas algebraicas de una foliación polinomial. Por lo cual, veremos primero un teorema que comienza a dar cotas sobre estos posibles órdenes de acuerdo al grado de la foliación.

Proposición 2.1. *El orden de tangencia entre una foliación $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_r$ y una linea invariante $\ell \subset \mathbb{C}P^2$ es igual a $r-1$.*

Hasta aquí, tenemos que dada una foliación singular en $\mathbb{C}^2$ generada por un campo vectorial polinomial, puede ser extendida al plano complejo proyectivo $\mathbb{C}P^2$. Un resultado sorprendente consiste en mostrar que cualquier foliación singular en $\mathbb{C}P^2$ está definida por un campo vectorial polinomial o por una 1-forma.

La prueba de este hecho se basa en teoremas de fundamental importancia en la teoría de foliaciones holomorfas y en geometría algebraica. A continuación enunciaremos los que nos conducirán a la afirmación previa.

Comenzaremos con un teorema de extensión de funciones meromorfas.

2.1. Teorema de Levi

Teorema 2.1 (Levi). *Si W es una subvariedad holomorfa de un subconjunto abierto $D \subset \mathbb{C}^n$ con $dim W \leq n-2$ y si f es una función meromorfa en $D - W$, entonces existe una única función meromorfa $\widetilde{f}$ en D tal que $\widetilde{f}|_{\{D-W\}} = f$.*

Demostración. El divisor de una función meromorfa f es una expresión como en (3.13), que simplificándola, se puede escribir como

$$\mathfrak{d}(f) = \sum \nu_j V_j,$$

con $\nu_j \in \mathbb{Z}$ y V_j variedades holomorfas irreducibles en $D - W$ de dimensión $n-1$.

La unión $V = \bigcup_j V_j$ también es una variedad holomorfa irreducible de $D-W$ de dimensión $n-1$.

Como $\dim V_j = n-1 > n-2 \geq \dim W$, por el teorema de Thullen - Remmert - Stein (ver apéndice, inciso (i) del teorema 3.3), cada $V_j \subset D-W$ se extiende a una variedad $\widetilde{V}_j = \bar{V}_j \cap D$, irreducible, holomorfa de dimensión $n-1$; y por lo tanto, se extiende a una subvariedad $\widetilde{V} = D \cap \bar{(V)}$ holomorfa.

El divisor $\widetilde{\mathfrak{d}} = \sum \nu_j \widetilde{V}_j$ es un divisor bien definido en D tal que $\widetilde{\mathfrak{d}}|_{D-W} = \mathfrak{d}$.

Esta última observación es necesaria para justificar que una vecindad suficientemente pequeña de un punto de W, intersecta sólo un número finito de variedades $\widetilde{V}_j$.

Para $A \in W$, el germen del divisor $\mathfrak{d}$ en A es el divisor de algún germen meromorfo $\mathbf{f}_A$. En una vecindad suficientemente pequeña U_A de A hay una función meromorfa f_A que representa al germen $\mathbf{f}_A$, y el germen del divisor $\mathfrak{d}$ en cualquier punto $z \in U_A$ es también el divisor local del germen de la función f_A en z.

El germen de las funciones meromorfas f y f_A tienen entonces el mismo divisor local en el punto $z \in U_A \cap (D-W)$.

Así, el cociente $u_A = f/f_A$ que es el cociente de dos funciones meromofas,

$$u_A = \frac{f'/f''}{f'_A/f''_A}$$

es una función holomorfa que no se anula en $U_A \cap (D-W)$. Es decir, u_A es unidad.

Se sigue del teorema 3.4, que u_A se extiende a una función holomorfa en U_A, y entonces $f = u_A f_A$ se extiende a una función meromorfa $\widetilde{f} = \widetilde{u}_A f_A$ en U_A.

Esto se satisface para cada $A \in W$. Entonces, cualquier representante de f en $D-W$ puede extenderse a un representante de una función meromorfa en D. □

2.2. Foliaciónes holomorfas no singulares

En el lema 1.5 de [2] se demuestra que si $F = (F_1, \ldots, F_n)$ es un campo vectorial holomorfo nunca nulo, definido en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, entonces las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

constituyen una foliación no singular por curvas de $\mathcal{F}$ de U. Además, si G es otro campo vectorial holomorfo en U que no se anula, entonces las foliaciones $\mathcal{F}(F)$ y $\mathcal{F}(G)$ coinciden si y sólo si existe una función holomorfa f, que no se anula en U, tal que $G = f \cdot F$.

Así, si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto, Σ es un subconjunto analítico de U y $a \in U - \Sigma$, consideramos una pareja (V_a, φ) de $\mathcal{F}$, que consta de una vecindad de a, V_a, en donde el biholomorfismo $\varphi : V_a \longrightarrow W_a \subset \mathbb{C}^n$, satisface que para todas las hojas L_α, las componentes conexas de $V_a \cap L_a$ quedan descritas por las ecuaciones:

$$w_1 = k_1, \quad \ldots \quad w_{n-1} = k_{n-1}$$

$k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{C}$. Es decir, V_a es una vecindad de a en donde las hojas de $\mathcal{F}$ se rectifican.

En esa carta (V_a, φ), definimos el campo F como:

$$F(a) = (D\varphi)_a^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial w_n}\right).$$

F es un campo vectorial no nulo en $U - \Sigma$, que es tangente a $\mathcal{F}$ y es único salvo multiplicación por una función f no nula en $U - \Sigma$.

Veamos ahora que esta construcción se extiende a los elementos del conjunto analítico Σ.

Teorema 2.2. *Supongamos que $\Sigma \subset U \subseteq \mathbb{C}^n$ es un subconjunto analítico de codimensión mayor o igual que dos y $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa no singular, 1-dimensional del $U - \Sigma$ que no se extiende a ninguna parte de Σ.*

Entonces cerca de cada punto $a \in \Sigma$, la foliación está generada por un campo vectorial holomorfo F con locus singular Σ.

Demostración. Si $a \in \Sigma$, sea U una vecindad conexa de a. Consideremos $a' \in U - (U \cap \Sigma)$. $\mathcal{F}$ está definida en una vecindad $V_{a'}$ de a' por el campo $R = (R_1, \ldots, R_n)$.

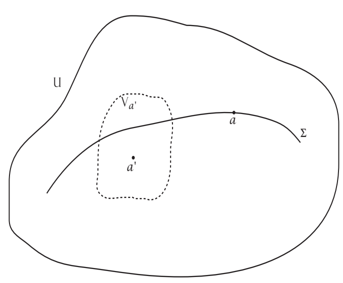

Figura 2.1: Vecindad en donde está definido el campo vectorial R.

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que la primera coordenada R_1 no se anula idénticamente. Definimos entonces $n - 1$ funciones meromorfas:

$G_2 = R_2/R_1, \ldots, G_n = R_n/R_1$, tales que para cada $z \in V_{a'}$, el vector $G(z) = (1, G_2(z), \ldots, G_n(z))$ es tangente en z a la foliación $\mathcal{F}$ en $V_{a'} - (V_{a'} \cap \Sigma)$.

Se construye de la misma forma un campo vectorial meromorfo para cada a' en $U - (U \cap \Sigma)$ tangente a las hojas de la foliación. Por la unicidad del campo tangente, tenemos un campo meromorfo en toda la vecindad $U - (U \cap \Sigma)$.

Dado que la intersección $U \cap \Sigma$ tiene codimensión mayor o igual que dos, por el teorema de Levi, podemos pensar que las funciones G_i son meromorfas en U.

Entonces, en una vecindad más pequeña si hace falta, cada G_j puede ser expresada como el cociente de funciones holomorfas en U: P_j, Q_j, donde estos son primos relativos. Es decir, el campo vectorial se ve así:

$$G = (1, P_2/Q_2, \ldots, P_n/Q_n). \tag{2.1}$$

Llamemos $\Sigma_j = \{P_j = 0, Q_j = 0\}$, para $j = 2, \ldots, n$. Como los polinomios que definen a Σ_j son irreducibles, cada uno de estos conjuntos tiene codimensión mayor o igual que dos, por lo tanto la unión $\bigcup_{j \geq 2} \Sigma_j$ tiene la misma codimensión.

Con el fin de obtener un campo vectorial holomorfo, multiplicamos al campo vectorial (2.1) por el producto de los denominadores de G, $Q_2 \cdots Q_n$ y obtenemos el campo vectorial:

$$G' = (Q_2 \cdots Q_n, P_2 Q_3 \cdots Q_n, P_3 Q_2 Q_4 \cdots Q_n, \ldots, P_n Q_2 \cdots Q_{n-1}) \tag{2.2}$$

que es un campo vectorial holomorfo y es tangente a la misma foliación en $U - (U \cap \Sigma)$.

Construiremos aún otro campo vectorial holomorfo, tangente a la foliación.

Cerca del punto a, Σ puede ser descrito por una ecuación $\{f = 0\}$ con f holomorfa y $df(a) \neq 0$. Sea $\nu \geq 1$ la potencia máxima tal que f^ν es factor de cada uno de las entradas del campo G', entonces $f^{-\nu} G'$ es un campo holomorfo F, también tangente a la foliación $\mathcal{F}$, con locus singular Σ' y por el teorema 3.5, Σ' también tiene codimensión ≥ 2.

Queda probar que $\Sigma' = \Sigma$ localmente en U.

- $\subseteq$ Si Σ' está contenido propiamente en Σ, de nuevo por el teorema 3.5, la foliación $\mathcal{F}$ puede ser extendida como foliación holomorfa a algunas partes de Σ, lo cual contradice el hecho de que el conjunto Σ era el más pequeño locus singular de $\mathcal{F}$.

- $\supseteq$ Supongamos ahora que Σ' es un conjunto más grande que Σ. Esto implica que $U - \Sigma' \subset U - \Sigma$. Es decir, existe un punto $b \in \Sigma'$ (esto nos dice que $F(b) = 0$), pero $b \in U - \Sigma$ de $\mathcal{F}$.

  Recordemos que el campo vectorial F es el campo (2.2). Entonces para que b sea un punto singular de F, necesariamente sucede

$$(Q_2 \cdots Q_n)(b) = 0. \tag{2.3}$$

Es decir, anula a la primera coordenada. Sin embargo, si esto sucede es porque para alguna j, $Q_j(b) = 0$. Regresando ahora al campo G, se tendría que b es un punto singular de G.

Por lo tanto se da la igualdad de conjuntos singulares. □

Luego de estos resultados, podemos enunciar y demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Una foliación singular en $\mathbb{C}P^2$ en alguna carta afín, es generada por un campo vectorial polinomial o por una 1-forma.*

Demostración. Dado que el campo vectorial estaría definido en el espacio tangente de $\mathbb{C}P^2$, consideremos $T(\mathbb{C}P^2)$ y para concluir que el campo vectorial ahí definido es polinomial, tomemos ahora la proyectivización de este espacio: $\mathbf{P}^3 = P(T(\mathbb{C}P^2))$. Este espacio está definido mediante la siguiente relación de equivalencia entre los elementos del espacio tangente a $\mathbb{C}P^2$. La pareja (a, v) está relacionada con la pareja (a', v') si y sólo si $a = a'$ y $v' = \lambda v$, con $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.

La foliación singular $\mathcal{F}$ con locus singular Σ, genera un mapeo $s : \mathbb{C}P^2 \longrightarrow \mathbf{P}^3$, que a cada punto no singular $a \in \mathbb{C}P^2$ le asigna la dirección de la recta tangente a $\mathcal{F}$ por a.

A continuación veremos que $s(\mathbb{C}P^2 - \Sigma)$ pertenece a un subconjunto cerrado analítico. Esto con el fin de aplicar el teorema de Chow.

Recordemos que, según el teorema 2.3, la foliación $\mathcal{F}$ está generada por un campo vectorial analítico $F = (F_1, F_2)$. Entonces, localmente, la gráfica de s está definida por una sóla ecuación analítica.

Consideremos la carta afín con coordenadas $x = (x_1, x_2)$ en $\mathbb{C}P^2$. La imagen de s en un punto x, es la dirección del espacio tangente a la foliación, a saber, $(F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$. Por lo tanto, el espacio en el que cae la imagen es un espacio proyectivo complejo de dimensión uno, cuyas coordenadas están dadas por $v = [v_1 : v_2]$, ya que estamos pensando en un espacio de direcciones.

Buscamos entonces las direcciones $[v_1, v_2]$ en $T_x(\mathbb{C}P^2)$ que también sean tangentes a $\mathcal{F}$ en x. Para ello, tomamos las direcciones ortogonales $[-v_2 : v_1]$ que satisfagan la siguiente ecuación

$$v_1 F_2(x_1, x_2) - v_2 F_1(x_1, x_2) = 0. \tag{2.4}$$

que corresponde a una recta en $\mathbf{P}^3$, que es tangente a $\mathcal{F}$.

Analicemos el conjunto $\{\overline{s(\mathbb{C}P^2 - \Sigma)}\}$. El objetivo es concluir que es un subconjunto analítico cerrado de $\mathbf{P}^3$ (un espacio proyectivo) y por el teorema de Chow 3.6, es un subconjunto algebraico.

El conjunto $\{\overline{s(\mathbb{C}P^2 - \Sigma)}\}$ se puede ver como la unión de esencialmente tres variedades algebraicas. Llamemos Σ_1 a los puntos $a \in \Sigma$ tal que tiene una infinidad de direcciones tangentes a la foliación; es decir, $F(a) = 0$ y además, todo elemento $v \in \mathbb{C}P^1$ es una dirección tangente a la foliación en a.

Consideremos también al conjunto $\Sigma_2 \subset \Sigma$, que consiste de los puntos $a \in \Sigma$ y el número de direcciones tangentes a la foliación $\mathcal{F}$ es finito.

Formamos ahora los subconjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &:= \{(a, v) | a \in \Sigma_1, v \in \mathbb{C}P^2\} \\ \mathcal{D}_2 &:= \{(a, v) | a \in \Sigma_2, v \in \Lambda\}, \end{aligned}$$

con Λ un conjunto finito de elementos de $\mathbb{C}P^1$.

Entonces

$$\overline{s(\mathbb{C}P^2 - \Sigma)} = s(\mathbb{C}P^2 - \Sigma) \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2.$$

Para ver que estos conjuntos son analíticos, los describimos como ceros de polinomios:

$$\mathcal{D}_1 = V(x - a, v - b) \tag{2.5}$$

$$\mathcal{D}_2 = V(x - a, v - b_1, v - b_2, \ldots, v - b_k), \tag{2.6}$$

donde en la ecuación (2.5), $b \in \mathbb{C}P^1$.

De esta forma, el campo vectorial F es polinomial. $\square$

Capítulo 3

Grado de las separatrices

Por definición, una *separatriz compleja* de una foliación singular holomorfa en un punto singular $a \in \mathcal{S}ing(\mathcal{F})$, es una hoja local $C \subseteq (U, a) - \Sigma$ cuya cerradura $C \cup \{a\}$ es el germen de una función analítica.

Como estamos pensando en separatrices en un espacio proyectivo, la cerradura de estas hojas corresponde al germen de una función algebraica.

Fuera de puntos singulares de la foliación $\mathcal{F}$, la separatriz C es tangente a $\mathcal{F}$ en puntos no singulares de C. Una curva así, se define mediante un polinomio homogéneo $f(X, Y, Z)$ de grado m. Es decir,

$$C = \{f(X, Y, Z) = 0\}. \tag{3.1}$$

Dado que se tiene la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\{f = 0\} = \{f^2 = 0\},$$

trabajaremos con curvas definidas por polinomios libres de cuadrados.

Si Ω es una 1-forma homogénea en $\mathbb{C}^3$ de grado r que define a $\mathcal{F}$ en coordenadas homogéneas $[X : Y : Z]$. Tomemos C como en (3.1) de grado m. Observemos que la curva C es invariante de la foliación $\mathcal{F}$ si y sólo si se satisface la siguiente igualdad:

$$\Omega \wedge df = f \cdot \Phi, \tag{3.2}$$

donde Φ es una dos forma homogenea en $\mathbb{C}^3$ de grado $r - 1$.

Lo que esta ecuación nos dice es que a lo largo de la curva $\{f = 0\}$, la derivada de la función f y la 1-forma son colineales.

Veremos que el grado de las separatrices en los puntos singulares de la foliación está acotado, y la cota está dada por el grado de la 1-forma Ω que define a la foliación.

Teorema 3.1 (Cerveau - Lins Neto, 1991)**.** *Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_r$, $C \subset \mathbb{C}P^2$ una separatriz algebraica de $\mathcal{F}$ de grado m.*

Si C es suave o a lo más tiene autointersecciones transversales, entonces $m \leq r+1$.

La demostración del teorema se auxilia de la caracteristica de Euler de la curva C, dada por los ceros y los polos de campos vectoriales sobre variedades Riemannianas.

Si F es un campo vectorial sobre la curva algebraica C, se tiene que

$$\chi(C) = \#ceros_F - \#polos_F, \tag{3.3}$$

donde el número de ceros y el número de polos se cuentan con multiplicidad.

Se construirán entonces dos campos $\mathbf{F}$ y $\mathbf{H}$, que tengan como solución a la curva algebraica C; se darán cotas sobre los órdenes de los ceros y de los polos de cada uno de estos campos. Mediantes estas cotas, que dependerán de m y de r, se llegará a la desigualdad que plantea el teorema 3.1.

Para definir a los campos vectoriales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{H}$, es necesario elegir una carta afín de $\mathbb{C}P^2$ en donde estarán definidos. Elegiremos como línea al infinito $\mathbb{I}$ de tal manera que la curva C la intersecte transversalmente. En este caso, por el teorema de Bezoút, es posible saber que el número de intersecciones entre estas dos curvas es exactamente m, dado que es el producto de los grados de cada uno de los intersectandos.

Asumiremos también que esta línea al infinito $\mathbb{I}$ no es separatriz de $\mathcal{F}$, esto se puede suponer pues estamos con foliaciones genéricas de la clase $\mathcal{B}_r$.

En la carta elegida, la foliación está definida por un campo vectorial polinomial $\mathbf{F}$ de grado r. Como C es una hoja de la foliación, el campo $\mathbf{F}$ es tangente a la curva. Denotaremos entonces, $F = \mathbf{F}|_C$. Veremos más adelante que F es un campo vectorial meromorfo en la línea al infinito, pues los polos del campo estarán en las intersecciones de $\mathbb{I}$ con C.

El siguiente campo se define a partir del polinomio que define a la curva C. Dada $f \in \mathbb{C}[x,y]$ es posible construir un campo hamiltoniano, a saber,

$$\mathbf{H} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right). \tag{3.4}$$

Es evidente que este campo es tangente a la curva C. Denotaremos H a la restricción de $\mathbf{H}$ a C.

Para el campo F y H, se calculan cotas del número de polos sobre la curva. En breve se demostrará que $P_F \leq m(r-2)$ y $P_H = m(m-3)$; también que $Z_H \leq Z_F$. De esto último y de la igualdad (3.3), se tendría $P_H \geq P_F$, que relaciona el grado de la separatriz f con el grado r de la foliación.

Probemos primero la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *(i) Para cualquier campo polinomial* $\mathbf{F} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ *de grado* r *en* $\mathbb{C}^2$*, tangente a* C*, su restricción a* C *es un campo vectorial meromorfo que tiene polos de orden menor o igual que* $r - 2$ *en cada punto al infinito* $p \in C \cap \mathbb{I}$*.*

(ii) Si H *es la restricción a* C *del campo hamiltoniano (3.4), de grado* $m - 1$*, donde* f *es el polinomio mínimo que define a* C*, entonces todos los polos de* H *tienen orden exactamente igual a* $m - 3$*.*

Demostración.

(i) Sean $a = a_r + a_{r-1} + \cdots + a_0$ y $b = b_r + b_{r-1} + \cdots + b_0$ los polinomios de grado r que definen al campo $\mathbf{F}$.

Habíamos considerado que C cruza tranversalmente a la línea al infinito $\mathbb{I} = \{AX + BY + CZ = 0\}$. Podemos pensar que hay una entrada del vector tangente a la foliación en el punto de la intersección que no se anula, sin pérdida de generalidad, tomemos $x \neq 0$, entonces las coordenadas locales pueden ser $u = 1/x$, $v = y/x$ en cada rama de C.

Después de este cambio de coordenadas, la línea al infinito tiene como ecuación $\mathbb{I} = \{u = 0\}$.

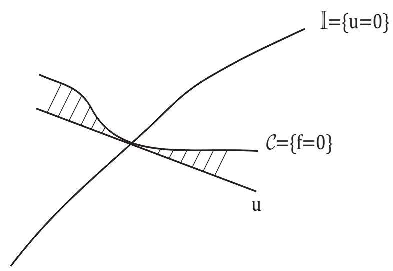

Figura 3.1: La curva C es transversal a la hoja al infinito $\mathbb{I}$, entonces es posible parametrizarla localmente, por el parámetro u.

Calculemos la ecuación del campo en esta carta coordenada. Recordemos que $\dot{u} = -\dot{x}/x^2$. Así,

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -u^2\left(a_r(x, y) + a_{r-1}(x, y) + \ldots a_0\right)\\ &= -u^2\left(a_r(1/u, v/u) + a_{r-1}(1/u, v/u) + \ldots a_0\right)\\ &= -u^{2-r}\left(a_r(1, v) + u a_{r-1}(1, v) + \ldots a_0 u^r\right).\end{aligned}$$

La curva C es transversal a $\mathbb{I}$. Aparte, queremos calcular el orden de los ceros y el orden de los polos sobre la curva C para igualar la diferencia de éstos a la carácteristica de Euler de la separatriz algebraica C. Es por esto que en el cálculo anterior, basta conocer el orden del polo en la primer componente del campo vectorial en la carta (u, v) que contiene a la linea al infinito.

Luego de esta aclaración, podemos afirmar que el orden del polo del campo F es menor o igual que $r-2$. La igualdad no se da, ya que la parte homogénea de grado r del polinomio a, a_r puede anularse.

(ii) Para demostrar esta parte de la proposición, supongamos primero que f es un polinomio homogeneo de grado m, es decir $f = f_m$. En este caso, como el polinomio f es libre de cuadrados, se descompone en factores lineales:

$$f_m = \prod_{j=1}^{m} \left(y - \alpha_j x\right), \tag{3.5}$$

donde $\alpha_j \neq \alpha_k$ si $j \neq k$.

Para conocer la primera componente del campo hamiltoniano H, derivemos la expresión anterior con respecto de la coordenada y. Esta primera componente estará dada por la ecuación:

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{m} \prod_{j\neq k} \left(y - \alpha_j\right). \tag{3.6}$$

Pensando a la separatriz C, como en la ecuación (3.5), cada rama de ésta, está dada por la ecuación $y - \alpha_k x = 0$. Si en la igualdad (3.6), evaluamos en $y = \alpha_k x$, tenemos:

$$\dot{x}|_{y=\alpha_k x} = \prod_{k\neq j} \left(\alpha_k x - \alpha_j x\right).$$

Denotando $c = \prod_{k\neq j} \alpha_k - \alpha_j$, esta primera componente se escribe:

$$\dot{x}|_{y=\alpha_k x} = cx^{m-1}. \tag{3.7}$$

Veamos ahora, esta componente en las coordenadas que contienen a la linea al infinito: (u, v),

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u^2\dot{x} \\ &= -cu^{3-m}. \end{aligned}$$

Por la misma razón que en la demostración del inciso (i), basta fijarnos sólo en esta componente del campo. El orden del polo no cambia cuando tomamos en cuenta a los términos de grado menor, $f = f_m + f_{m-1} + \ldots$. Dada la elección que hicimos de la carta afín (la curva C es transversal a la línea al infinito)podemos asegurar que la parte homogénea de mayor orden, f_m es libre de cuadrados. □

Necesitamos asegurarnos de que el campo vectorial hamiltoniano no se anula en puntos suaves de C, esto saldrá como colorario del siguiente teorema.

Proposición 3.2. *Puntos suaves de una curva afín C son no críticos para el polinomio mínimo de esta curva.*

Demostración. Si C es una curva suave, definida por el polinomio reducido f, es decir $C = \{f = 0\}$, entonces $df \neq 0$ en C.

Esto se deduce del siguiente análisis. Como la curva es suave, el germen de la curva C en cada punto $a \in C$, puede ser definido por una ecuación holomorfa $\{\varphi_a = 0\}$, con $d\varphi_a(a) \neq 0$. Localmente, el germen de f en a, es divisible por φ_a, $f = \psi_a \varphi_a$.

El germen $\{\psi_a = 0\}$ no puede ser diferente de la curva C, pues la curva tendría dos ramas en a, contradiciendo el hecho de que es una curva suave en a. Tampoco puede ser igual a la curva C, ya que tomamos en un principo f irreducible. La curva tendría una componente doble y eso también contradice la suavidad de la curva.

Lo que sucede entonces, es que $\psi_a(a) \neq 0$. Calculamos ahora la derivada de f en a. Ésta es: $df = \varphi_a(a)d\psi_a(a) + \psi_a(a)d\varphi_a(a)$. En esta ecuación el primer término se anula ya que estamos sobre la curva definida por el germen $\{\varphi_a = 0\}$.

Así, $df = \psi_a(a)d\varphi_a(a)$. El lado derecho de esta igualdad es diferente de cero. Lo que indica que a no es un punto crítico para el polinomio mínimo de la curva. □

Corolario 3.2. *El campo vectorial hamiltoniano $H = (\partial f/\partial y, -\partial f/\partial x)$, restringido a la curva $C = \{f = 0\}$ no se anula en ningún punto suave de C.*

Comencemos ahora con la demostración del teorema enunciado al principio del capítulo.

Demostración. Teorema 3.1. Sea la curva C con los dos campos meromorfos F y H sobre ella, definidos como en la proposición (3.1). Si C es una curva suave, por la proposición (3.2) tenemos que df es diferente de cero. Como el campo H está definido mediante el polinomio f, resulta que H no se anula en C.

Con esto, se concluye que $\#ceros_H = 0$. Así,

$$0 = \#ceros_H \leq \#ceros_F.$$

Entonces $-\#ceros_F \leq \#ceros_H$. Multiplicamos la ecuación (3.3) por -1, y de ésta misma, se concluye que:

$$\#polos_H \leq \#polos_F. \tag{3.8}$$

Tomando en cuenta el posible orden de los polos, establecido en la proposición (3.1) y la desigualdad (3.8), se tiene:

$$m(m-3) \leq \#polos_H \leq \#polos_F \leq m(r-2) \tag{3.9}$$

De esta última desigualdad se deduce que $m \leq r+1$, como se quería demostrar.

Para curvas con autointersección transversal, la idea de la demostración es la misma. La diferencia ahora es la manera de encontrar las cotas para $\#ceros_F$ y $\#ceros_H$.

El número de polos de cada campo no cambia respecto al caso en el que la curva es suave, pues estamos bajo la hipótesis de que los polos están justo en las intersecciones de la curva C con la linea al infinito $\mathbb{I}$.

La manera de calcular el número de ceros de los campos es distinta.

Probaremos que en cada cruce (x_0, y_0) de la curva C, el campo vectorial hamiltoniano H, tiene un cero simple en cada componente suave de una autointersección normal.

Para que la curva tenga componentes que se autointersecten transversalmente, es necesario pensar que el polinomio f que define a la curva es de la forma $f = gh$, con g y h polinomios.

Entonces, el campo hamiltoniano, $H = (-f_y, f_x)$, expresado de acuerdo a la forma de f, es:

$$H = \left(-gh_y - hg_y, gh_x + hg_x\right).$$

Necesitamos ver que la matriz DH es invertible.

$$DH = \begin{pmatrix} -f_{yx} & -f_{yy} \\ f_{xx} & f_{xy} \end{pmatrix}$$

Probaremos que $detDH \neq 0$.

$$detDH = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 \tag{3.10}$$

Recordemos que estamos restringiendonos a las componentes de la curva C. Así, $h = 0$ y $g = 0$. El lado derecho de la ecuación (3.10), es igual a:

$$\begin{aligned} f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 &= (2g_xh_x)(2g_yh_y) - (g_yh_x)^2 - (g_xh_y)^2 - (2g_xg_yh_xh_y) \\ &= -(h_xg_y - g_xh_y)^2 \end{aligned}$$

Esta igualdad es cero si $h_xg_y - g_xh_y = 0$. Lo cual sucede si el producto punto

$$(g_y, -g_x) \cdot (h_x, h_y) = 0. \tag{3.11}$$

Sin embargo, estamos bajo el supuesto de que la curva se autointersecta transversalmente, por lo que los vectores considerados en (3.11) no pueden ser ortogonales.

De esta manera, si llamamos Σ al conjunto de puntos en donde la curva C se autointersecta, tenemos que $\#ceros_H = 2|\Sigma|$, pues la multiplicidad por cada una de las componente de C.

El campo F, también se anula en (x_0, y_0) con multiplicidad mayor o igual que uno en cada rama de C. Entonces $\#ceros_F \geq \#ceros_H$.

Una vez conseguida esta comparación, se puede concluir de la misma manera que para el caso suave, que $\#polos_H \leq \#polos_F$. Y enseguida, que el grado de la curva es menor o igual que el grado de la foliación más uno. $\square$

Apéndice

3.1. Teorema sobre subvariedades holomorfas

Teorema 3.3 (Thullen - Remmert - Stein)**.** Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$, W una subvariedad irreducible, holomorfa de D y V una subvariedad de $D-W$, holomorfa, con todas sus componentes conexas de la misma dimensión,

(i) Si $dim V > dim W$, entonces $\bar{V} \cap D$ es una subvariedad holomorfa de D.

(ii) Si $dim V = dim W$ y $\bar{V}$ es una subvariedad holomorfa en una vecindad abierta de un punto de W, entonces $\bar{V} \cap D$ es una subvariedad holomorfa de D.

3.2. Teorema de extensión de funciones analíticas

Teorema 3.4 (Hartogs)**.** Si V es una subvariedad holomorfa de un subconjunto abierto $D \subset \mathbb{C}^n$, si dim $V \leq n-2$ y si f es una función holomorfa en $D-V$, entonces existe una única función holomorfa $\widetilde{f}$ en todo D tal que $\widetilde{f}(z) = f(z)$ para $z \in D - V$.

3.3. Divisores

Definición 3.1. Un *divisor local en un punto* $A \in \mathbb{C}^n$ se define como una suma finita

$$\mathfrak{d}_A = \sum \nu_j V_j, \tag{3.12}$$

con $\nu_j \in \mathbb{Z}$ y V_j germen de una subvariedad holomorfa irreducible de codimensión uno en A.

Para definir el análogo global, es decir, un *divisor global* en un subconjunto abierto $D \subset \mathbb{C}^m$, consideramos las sumas formales como en la ecuación (3.12), donde las ν_j y las V_j significan lo mismo. Como ya dijimos, en este caso no es necesario que las sumas sean finitas, sin embargo se requiere que si $U \subseteq D$ es un abierto tal que $\bar{U}$ es compacto en D, entonces U intersecta sólo una cantidad finita de subvariedades V_j, es decir, se pide que la suma sea localmente finita.

Dentoamos por $\mathcal{O}_A$ al anillo de funciones holomorfas en A. Este anillo es un dominio de factorización única, y por lo tanto, cualquier $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_A$ se escribe como:

$$\mathbf{f} = u \prod_j \mathbf{f}_j^{\nu_j},$$

donde u es una unidad en $\mathcal{O}_A$ y $\mathbf{f}_j \in \mathcal{O}_A$ son gérmenes irreducibles.

El divisor del germen $\mathbf{f}$ se define como el divisor local:

$$\mathfrak{d}_A(\mathbf{f}) = \sum \nu_j V_j$$

con $V_j = V(\mathbf{f}_j)$.

Si $\mathbf{f}$ es un germen de función meromorfa, es decir, de la forma $\mathbf{f} = \mathbf{f}'/\mathbf{f}''$, el divisor del germen $\mathbf{f}$ se defiene como la resta del divisor del germen en el numerador menos el divisor del germen en el denominador:

$$\mathfrak{d}_A(\mathbf{f}) = \mathfrak{d}_A(\mathbf{f}') - \mathfrak{d}_A(\mathbf{f}'').$$

Si f es una función meromorfa en el abierto $D \subset \mathbb{C}^n$ y no es idénticamente cero en las componentes de D, definamos dos variedades: $Z(f)$ como la variedad de ceros de f; y $P(f)$ es la variedad de polos de f. Ambas, son subvariedades holomorfas propias en cada componente de D.

Entonces $Z(f) = \bigcup_j V_j'$ y $P(f) = \bigcup_k V_k''$, donde cada V_j' y cada V_k'' es de codimensión uno.

Así, hay un único divisor

$$\mathfrak{d}(f) = \sum_j \nu_j V_j' - \sum_k \nu_k V_k'', \tag{3.13}$$

tal que el germen de este divisor en cualquier punto $A \in D$ es el divisor local del germen de la función meromorfa f en ese punto.

Teorema 3.5. *Sea U un domino abierto conexo de $\mathbb{C}^n$ y $0 \neq F$ un campo vectorial holomorfo con locus singular $\Sigma \subset U$.*

Entonces existe un subconjunto analítico $\Sigma' \subset \Sigma$ de codimensión mayor o igual que dos en U y la foliación $\mathcal{F}'$ de $U - \Sigma'$ cuya restricción a $U - \Sigma$ coincide con la foliación generada por el campo vectorial inicial F.

Teorema 3.6 (Chow). *Las subvariedades algebraicas de $\mathbb{C}P^n$ son precisamente las subvariedades holomorfas de la variedad compleja $\mathbb{C}P^n$.*

Donde una subvariedad algebraica de $\mathbb{C}P^n$ es el conjunto de ceros comunes de una cantidad finita de polinomios homogéneos.

Bibliografía

[1] Yulij Ilyašenko, Sergei Yakovenko, *Lectures on Analytic Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics, Volume 86, American Mathematical Society, 2007, 645 p.p.

[2] X. Gómez-Mont, L. Ortiz Bobadilla, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies.* Aportaciones Matemáticas, serie Notas de Investigación No.3, Sociedad Matemática Mexicana, 1989, 207 p.p.

[3] Robert C. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Volume II: Local Theory.* Wadsworth And Brooks / Cole Mathematics Series, 1990, 217 p.p.

[4] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2002, 628 p.p.