UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

Un acercamiento al modelo de Vasicek

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

A C T U A R I A

PRESENTA

Mildred Jazmín Pérez Ledezma

Asesor: Act. José Roberto Arriaga Alemán

Noviembre 2013.

Índice general

Agradecimientos.

Agradecimientos.

Le agradezco a Dios por permitirme llegar hasta este punto; por mi vida, por darme la oportunidad de vivirla junto a ti. Gracias por la fortaleza y por indicarme siempre el camino que debo seguir. Por cada regalo de gracia que me has dado e inmerecidamente he recibido. A ti mi creador, todos mis éxitos.

A mi madre Blanca, mi amiga incondicional, gracias por el apoyo en todo momento, por tu paciencia, por tus palabras sabias ante mis enojos, tristezas y momentos felices, por ayudarme a cumplir mis metas, por ser mi guía y un ejemplo a seguir. A mi padre Enrique por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación y desarrollo profesional, por tu tiempo, tus desvelos y tu comprensión.

A Roberto Arriaga por todas las enseñanzas, por ser mi maestro no sólo de carrera sino también de vida, porque por ti este proyecto se hizo realidad, gracias por ser mi mejor amigo, por no dejarme caer, por hacerme poner los pies en la tierra, por hacerme ver que las cosas difíciles son las que realmente valen la pena, gracias por querer compartir la vida conmigo, por tu amor, y apoyo. Te amo Baby y cada día es más...

A mis hermanos por ser parte de mi vida, Lalo gracias por tu apoyo y tus consejos, Mely gracias por llenar de alegría e inocencia mi vida.

A mi mejor amiga Ady, gracias por tu influencia en mi vida, por el apoyo en todo momento, por hacer de la carrera una de mis mejores experiencias.

A mis Suegris, Roberto e Irma (D.E.P.), a mi Cuñis Anahí por todo su apoyo y cariño.

A mis profesores, gracias por su tiempo, por la sabiduría que me trasmitieron en el desarrollo de mi formación profesional. Y a todos las personas que contribuyeron en la realización de este trabajo.

I. Introducción.

La presente tesina, tiene como objetivo comprender el trabajo de Vasicek que desarrolla S.M. Rogemar en su articulo *"Three Ways to Solve for Bond Prices in the Vasicek Model"* [3] en el cual se estudia el precio de un bono cupón cero que incorpora una tasa de interés estocástica. El punto de vista que abordamos es estrictamente teórico, desarrollamos las herramientas y damos la solución teórica de dicho modelo. Bajo este escenario, el precio del bono se deriva de las implicaciones de la distribución de probabilidad de la tasa de interés. En este trabajo se da una revisión de las propiedades estocásticas de las tasas a corto plazo y una ligera introducción a la teoría de procesos estocásticos a tiempo continuo, que será de gran utilidad a lo largo del mismo.

Oldrich Alfons Vasicek, de nacionalidad checa fue fundador de la empresa KMV y actualmente es asesor de Moody's KMV. Ha sido profesor de finanzas en la Universidad de Rochester, la Universidad de California de Berkeley y en la Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciale (ESSEC) en Francia. El profesor Vasicek se dedica a las matemáticas financieras, particularmente al desarrollo de modelos de evaluación de instrumentos financieros y análisis de mercados financieros; ha publicado más de 30 artículos en "Journals" financieros y matemáticos y ha recibido varios premios y reconocimientos por su destacada labor académica. Su modelo de equilibrio para determinar la estructura de plazos de la tasa de interés ("An equilibrium Characterization of the Term Structure") [4], publicado en 1977, es reconocido como pionero en la teoría de tasas de interés a tiempo continuo.

La hipótesis que se debe corroborar es que bajo el modelo de Vasicek la tasa de interés a corto plazo tendrá una distribución Normal con media μ y varianza σ^2 lo cual nos lleva precio del bono usando la distribución de la misma.

El Modelo de Vasicek es una versión especial del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, pero Vasicek utiliza una volatilidad constante. Esto implica que la tasa a corto plazo es a la vez un proceso Gaussiano y de Markov, lo cual demostraremos más adeante [5]. El modelo considera reversión a la media y por lo tanto es capaz de capturar el comportamiento de la autoridad monetaria al ajustar el rendimiento.

Como veremos, la tasa de interés estocástica $r(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana con media μ_t y varianza σ^2 , esto nos lleva a una de las debilidades del modelo de Vasicek, ya que las variables aleatorias normales pueden llegar a ser negativas con probabilidad positiva.

La presente tesina está organizada en cuatro capítulos a los que antecede una introducción que describe las caraterísticas más relevantes del trabajo y el objetivo que se persigue.

En el primer Capítulo se dan la introducción y el panorama para establecer la necesidad del modelo de Vasicek, se describe la dinámica de la tasa de interés, que en capítulos posteriores nos lleva a poder calcular el precio de un bono cupón cero. Más adelante se definen los términos financieros y características de los bonos que serán utilizados a lo largo de ste trabajo.

En el Capítulo dos damos una introducción a los procesos estocásticos a tiempo continuo, estudiamos a los procesos cuyo espacio parametral T es un intervalo en $\mathbb{R}$, así como los conceptos de integral, isometría y regla diferencial de Itô, todo esto para llegar al desarrollo del tema principal, en el que se modela la dinámica de la tasa de Interés por una ecuación diferencial estocástica, haciendo uso de estas herramientas llegamos al modelo de Vasicek para obtener el precio del bono.

En el tercer Capítulo presentaremos algunos ejemplos utilizando el modelo de Vasicek, en el primero buscamos obtener la volatilidad del Bono, en este ejemplo vemos que el modelo de vasicek tambień nos facilita la comprensión sobre la variación del precio del bono en el mercado. En el segundo ejemplo consideramos la posibilidad de una opción de compra europea sobre un bono cupón cero, en el cual veremos que el precio de un activo derivado sobre un Bono está en función del tiempo hasta el vencimiento.

Por último en el capítulo cuatro establecemos nuestras conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Bonos cupón cero y el modelo de Vasicek.

1.1. Introducción al modelo de Vasicek

Las variaciones de los tipos de interés obtenidos por el uso del dinero en bancos y otras entidades financieras afectan directamente a los mercados bursátiles. Así, por ejemplo, cuando los tipos de interés suben, se producen bajas en las cotizaciones de las acciones en la bolsa. Estos movimientos decrecientes pueden explicarse por diferentes razones. En primer lugar, los altos tipos de interés elevan las cargas financieras de las empresas y, por lo tanto, empeoran los resultados económicos, lo que provoca un descenso de los dividendos repartidos y de las cotizaciones. En segundo lugar, cuando suben los tipos de interés aumenta la rentabilidad de las inversiones en renta fija, como las obligaciones, la deuda pública o los bonos, por ejemplo. Esto provoca un desplazamiento de los inversores hacia los títulos de renta fija, al contrario de los de renta variable, que siempre implica un mayor riesgo. En tercer lugar, los tipos de interés elevados hacen disminuir el consumo al encarecerse la financiación de las ventas a crédito. Esto provoca una disminución de las ventas y, por tanto, un empeoramiento de los resultados de las empresas, lo que afecta a las cotizaciones de las acciones. Desde este simple razonamiento podemos justificar la importancia del estudio de modelos apropiados para modelar la evolución de los tipos de interés.

El modelo, en su primera formulación fue propuesto por Vasicek en 1977 [4] y pertenece a una clase de modelo estocástico, denominado de un factor. El modelo de un único factor está representado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t), \tag{1.1}$$

donde a, b y σ son constantes positivas, σ está relacionada con la variabilidad del tipo de interés y $W(t)$ es un proceso de Wiener con parámetro $\sigma^2 > 0$.

El modelo de Vasicek descrito en [3] asume que el comportamiento de la tasa de interés tiene un comportamiento regresivo hacia un valor fijo que define el valor estable de los tipos de interés. Dicho modelo es conocido como modelo de reversión a la media. El modelo de Vasicek ha sido utilizado con éxito para modelar tipos de interés denominados a corto plazo. (Ver [1] p. 483).

Los primeros modelos continuos de tipo estocásticos orientados a modelar los tipos de interés se deben a Roll (1970,1971), Merton (1973, 1974) y Long (1974). Pero fue Vasicek (1977) quien en un trabajo pionero propuso un modelo estocástico de reversión a la media para los tipos de interés.

Desde el trabajo de Vasicek se han propuesto otros modelos similares para modelar los tipos de interés. Sin embargo, hay que subrayar que en muchos casos la formulación de Vasicek sigue siendo válida y, por tanto, está en plena vigencia. Generalizaciones del modelo de Vasicek son: el modelo de CIR (Cox, Ingersoll y Ross) (1985) y el modelo de Hull-White (1990). (Ver [1] p. 269-389).

1.2. La importancia de los tipos de interés en los Mercados Financieros.

Los mercados financieros son el espacio donde se realizan los intercambios de instrumentos financieros y se obtienen sus precios. En dichos mercados, podemos encontrar una gama de tipos de interés como: el instrumento de la política monetaria, tipos de interés en la banca, tipos de interés nominales y reales y tipos de interés del mercado.

La tasa de interés fijada por el banco central de cada país para préstamos del Estado a otros bancos o para los préstamos entre los bancos, se denomina tasa interbancaria. Esta tasa corresponde a la política macroeconómica del país para promover el crecimiento económico, la estabilidad financiera y la situación en los mercados de acciones de un país determinado. Si los precios de las acciones están subiendo, la demanda por dinero aumenta, y con ello, la tasa de interés.

Las principales funciones de los mercados financieros son: establecer la posibilidad de los mecanismos en el contacto entre los participantes en la negociación, fijar los precios de los productos financieros en función de su oferta y su demanda, reducir los costes de intermediación y administrar los flujos de liquidez de productos o mercado.

1.3. Conceptos básicos.

Definimos a continuación algunos conceptos básicos que serán de utilidad para la comprensión del modelo.

a. Bono. Es un título de renta fija que emiten gobiernos o empresas para conseguir fondos directamente del mercado. El emisor se compromete a devolver el principal junto con un interés.

b. Cupón. Proviene de los antiguos titulos físicos de donde había que recortar un cupón para cobrar los dividendos o derechos de suscripción. Hoy en día se denominan así los pagos de intereses que paga un titulo de renta fija.

c. Cupón Cero. Característica de algunos tťulos de renta fija que no pagan intereses durante la vida del título, suelen ser a corto plazo y se negocian a descuento.

El valor de un bono depende básicamente de tres variables: la tasa de rendimiento libre de riesgo del mercado que implica invertir sin riesgos, la cual es la tasa de interés de bonos gubernamentales, la segunda es la tasa de interés correspondiente al riesgo intrínseco de la empresa y su estructura capital y por último la fecha de término y la estructura de cupones del bono.

El problema que se desea estudiar es la forma de determinar el precio justo de un bono cuando se acepta que el comportamiento de la tasa de interés corresponde a una variable aleatoria, por lo que el precio del bono varía conforme se modifican las condiciones de incertidumbre.

Un bono cupón cero es una promesa de pago en la que el emisor se compromete a pagar incondicionalmente una cantidad preestablecida, el valor nominal, en una fecha futura (vencimiento del título). El interesado en adquirir esta promesa de pago entrega una cantidad inicial en una fecha previa al vencimiento (fecha de colocación). En general, la cantidad inicial que se paga por este título es menor que la cantidad que se recibe al vencimiento, por esto decimos que se compra a descuento.

Cabe destacar que el propietario de este tipo de instrumentos se encuentra expuesto al riesgo de incumplimiento por parte del emisor (Ver [1] p.

17). Sin embargo en lo que sigue en la presente tesina se supondrá que todos los bonos son libres de riesgo de crédito.

1.4. Características de los bonos cupón cero

Un bono cupón cero es un instrumento de deuda emitido por un tercero que adquiere la obligación de pago en una fecha futura predeterminada hacia sus prestamistas. El inversionista le otorga un préstamo al emisor del bono y dicho inversionista recibe a cambio títulos, una vez cumplido el plazo pactado, el emisor del bono devuelve el monto prestado más una cantidad, los intereses por dicho préstamo.

Las empresas y los gobiernos usualmente emiten bonos cupón cero para financiar sus planes de crecimiento y desarrollo. Cada emisión tiene sus propias condiciones, las cuales se detallan en un documento llamado "El prospecto de la emisión". Ahí se establece la moneda, la fecha de vencimiento y la tasa de interés.

Existen varias clases de bonos. Sus diferencias dependen del emisor, de su estructura y del mercado donde fueron colocados.

a. Emisor. Los bonos pueden ser emitidos por gobiernos en cuyo caso se llama deuda soberana, por provincias, municipios u otros entes públicos o por empresas en cuyo caso recibe el nombre de bonos corporativos u obligaciones negociables. Cada emisor está sujeto a un marco regulatorio especial.

b. Estructura de plazos. Los bonos también se clasificacon por la tasa de interés que paga el bono a diferentes plazos.

c. Mercado. Los bonos se pueden emitir en el mercado nacional o internacional. Estos últimos pueden ser emitidos en moneda extranjera y colocados fuera del país emisor.

El valor de un bono se establece según la tasa de rendimiento (o de interés) ofrecida por el emisor, a un plazo y nivel de riesgo (de incumplimiento) determinados. Además de las característcas propias del bono influyen otros factores, como el riesgo país y el riesgo de crédito del emisor.

Evidentemente, el inversionista no tiene que esperar hasta el vencimiento para cobrar, puede decidir vender sus bonos en el mercado a un precio pactado entre comprador y vendedor (las libres fuerzas del mercado). Por último es importante destacar que cuando un inversionista selecciona el bono a comprar, debe tener en cuenta su liquidez, es decir, su capacidad de reventa.

El mayor riesgo de los bonos es que el emisor incumpla con sus pagos. Sin embargo, si el emisor tiene la capacidad de pago y el inversionista espera hasta el vencimiento del papel, entonces se recuperará lo prestado más el interés. En contraste, títulos como las acciones (títulos de capital) son afectadas por la situación de la empresa, el sector al que pertenecen, el entorno de negocios y la economía. Por esa razón, el inversionista nunca sabe con certeza si recuperará su dinero en el mercado accionario.

Existen varios beneficios cuando se invierte en bonos cupón cero, entre los que destacan:

1. **Variedad.** En el momento de invertir se puede elegir entre diversos bonos con diferentes vencimientos (cercanos o lejanos) emitidos por gobiernos o empresas.

2. **Capacidad de reventa.** A diferencia de otros instrumentos los bonos se pueden vender y comprar diariamente en el mercado secundario en el cual se pueden encontrar diferentes cotizaciones.

3. **Riesgo.** A diferencia de las acciones, los bonos otorgan un retorno conocido a la inversión. Cuando la emisión la realiza un gobierno, usualmente el riesgo de incumplimiento es nulo. Sin embargo, si la emisión la realiza una empresa se requiere una sobretasa que cubra el posible riesgo de incumplimiento.

Ahora bien, los principales inconvenientes de este tipo de instrumento son (Ver [1] p. 19):

1. **Procedimiento.** En muchas ocasiones, los bonos sólo pueden ser comprados y vendidos por un agente de bolsa.

2. **Dificultades para diversificar.** Al comprar bonos de un único emisor se incrementa el nivel de riesgo de la inversión.

En el siguiente capítulo verémos la relación entre la tasa de interés y el precio del bono.

Capítulo 2

El Precio de un Bono obtenido mediante la distribución de la tasa de interés a corto plazo.

A continuación presentaremos algunos conceptos fundamentales de procesos estocásticos para el desarrollo del Modelo de Vasicek.

2.1. Procesos a tiempo continuo: Introducción

En esta sección damos una introducción a los procesos estocásticos a tiempo continuo, en nuestro trabajo consideramos procesos cuyo espacio parametral T es un intervalo en $\mathbb{R}$. En lo que sigue, a menos que se especifique lo contrario, supondremos que T es el intervalo $[0, \infty)$.

Veamos a continuación algunas propiedades básicas de los procesos a tiempo continuo. Mismas que posee el Movimienro Browniano, proceso que se define más adelante y que será de gran utilidad a lo largo del trabajo.

La siguiente definición nos da dos de las características más importantes del proceso de Wiener.

Definición 2.1. *Sea $X(\cdot) := \{X(t) : t \geq 0\}$ un proceso estocástico. Decimos que el proceso $X(\cdot)$ tiene:*

(a) *Incrementos independientes. Si para cualquier entero $n \geq 1$ y cualquier colección de índices $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$ se verifica que las variables aleatorias,*

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}),$$

son independientes.

(b) *Incrementos estacionarios. Si para cualquier $t \geq 0$ y $h > 0$ la distribución del "incremento" $X(t+h) - X(t)$ depende sólo de h, es decir,*

$$X(t+h) - X(t) \sim X(s+h) - X(s) \text{ para } s, t \geq 0.$$

Definimos ahora al Proceso de Wiener (también conocido como Movimiento Browniano), proceso que es de suma importancia, pues la dinámica de la tasa de interés se rige mediante una ecuación diferencial estocástica que involucra dicho proceso.

Definición 2.2. *Se dice que el proceso $W(\cdot) = \{W(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener, si satisface las siguientes propiedades.*

(a) $W(0) = 0$,

(b) *tiene incrementos independientes, y*

(c) *tiene incrementos estacionarios, con*

$$W(t+h) - W(t) \sim N(0, \sigma^2 h) \text{ para todo } t \geq 0, h > 0, \tag{2.1}$$

en donde σ es una constante positiva. Si $\sigma^2 = 1$ se dice que $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener estándar.

Notemos que como $W(t) = W(t) - W(0)$, se sigue de (2.1) que

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \text{ para todo } t > 0.$$

El proceso de Wiener es una martingala y un proceso de Markov, conceptos que revisamos a continuación.

Definición 2.3. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Sea $X(\cdot) = \{X(t) : t \geq 0\}$ un proceso estocástico. Decimos que $X(\cdot)$ es una martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ si,*

(a) *La familia $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ es una filtración de $\mathcal{F}$ (ver definición 2.7)*

(b) *El proceso $X(\cdot)$ está adaptado a $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ (ver definición 2.7)*

(c) $X(t) \in L_1$ *para todo $t \geq 0$, y*

(d) $\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s)$ *para todo $0 \leq s \leq t$.*

El concepto de martingala es muy importante ya que más adelante utilizaremos una medida de probabilidad neutral al riesgo o también llamada medida de martingala equivalente (ver definición (2.21)) que nos ayudará a conocer el valor esperado del precio de un bono cupón cero en el tiempo t con vencimiento T. De la misma manera la siguiente definición nos ayuda a comprender porque la tasa de interés $r(t)$ en la integral de Itô (la cual definimos en el siguiente tema) es un proceso de Markov.

Definición 2.4. *Sea $X(\cdot) = \{X(t) : t \geq 0\}$ un proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados $(S, \mathcal{S})$. Decimos que $X(\cdot)$ es un proceso de Markov si,*

$$\mathbb{P}[X(t) \in B | X(r) \forall 0 \leq r \leq s] = \mathbb{P}[X(t) \in B | X(s)], \tag{2.2}$$

para todo $B \in \mathcal{S}$ y $0 \leq s \leq t$.

Gracias al siguiente resultado, vemos que el proceso de Wiener es un proceso de Markov y una martingala.

Teorema 2.5. *Si $X(\cdot) = \{X(t) : t \geq 0\}$ es un proceso estocástico con incrementos independientes, entonces*

(a) *$X(\cdot)$ es un proceso de Markov.*

(b) *Si además $X(\cdot) \in L_1$ para todo $t \geq 0$, entonces el "proceso centrado" $\overline{X}(t) := X(t) - \mathbb{E}(X(t))$ es una martingala.*

Demostración. Primero tenemos que probar que si $X(\cdot) = \{X(t) : t \geq 0\}$ es un proceso estocástico con incrementos independientes, entonces el proceso estocástico $Y(t) := X(t) - X(0)$ para $t \geq 0$, tiene incrementos independientes y $Y(0) = 0$.

Para esto sea $n \geq 1$ y sean $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ una colección de índices, entonces,

$$\begin{aligned} Y(t_0) &= X(t_0) - X(0), \\ Y(t_1) &= X(t_1) - X(0). \end{aligned}$$

Luego $Y(t_1) - Y(t_0) = X(t_1) - X(t_0)$ y,

$$\begin{aligned} Y(t_{n-1}) &= X(t_{n-1}) - X(0), \\ Y(t_n) &= X(t_n) - X(0). \end{aligned}$$

De manera general $Y(t_n) - Y(t_{n-1}) = X(t_n) - X(t_{n-1})$ y como $X(t_n) - X(t_{n-1})$ es un incremento independiente, esto implica que $Y(t_n) - Y(t_{n-1})$

es un incremento independiente, por lo tanto $Y(t) := X(t) - X(0)$ tiene incrementos independientes y $Y(0) = 0$ si $t = 0$.

Como $X(\cdot)$ tiene incrementos independientes por lo anterior podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que,

$$X(0) = 0, \tag{2.3}$$

Ahora, para demostrar (a), tomamos a n y a la colección de índices $t_{i's}$ y las vv.aa.

$$Y_k := X(t_{k+1}) - X(t_k), \text{ para } k = 0, \ldots, n, \tag{2.4}$$

las cuales son independientes, esto significa que la sucesión

$$Z_{k+1} := \sum_{j=0}^{n} Y_j, \text{ para } k = 0, \ldots, n,$$

es una Cadena de Markov; en particular,

$$P(Z_{k+1} \in B | Z_0, \ldots, Z_k) = P(Z_{k+1} \in B | Z_k) \tag{2.5}$$

Sin embargo, por (2.3) y (2.4), $Z_{k+1} = X(t_{k+1})$ para todo $k = 0, \ldots, n$, así que de hecho la condición (2.5) es la misma que (2.2). Esto demuestra (a).

Para demostrar (b), de nuevo supondremos (2.3). Además, es inmediato que el proceso centrado $\overline{X}(t) := X(t) - \mathbb{E}(X(t))$ tiene incrementos independientes y media $\mathbb{E}(\overline{X}(t)) = 0$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathbb{E}(X(t)) = 0$ para todo $t \geq 0$. Ahora consideremos de nuevo las vv.aa. independientes Y_k en (2.4). En particular, Y_n es independiente de $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$ y, por lo tanto, Y_n es independiente de $X(t_1), \ldots, X(t_n)$. Luego, escribiendo $X(t_{n+1}) = X(t_n) + Y_n$ vemos que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t_{n+1}) | X(t_1), \ldots, X(t_n)] &= X(t_n) + \mathbb{E}[Y_n | X(t_1), \ldots, X(t_n)] \\
&= X(t_n) + \mathbb{E}[Y_n] \\
&= X(t_n)
\end{aligned}$$

Esto comprueba la condición de (2.2), de modo que $X(\cdot)$ es una martingala, esto prueba (b). $\square$

Dado que el proceso Wiener tiene incrementos independientes, entonces por (a) es un proceso de Markov. Además si $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener con parámetro σ^2 es claro que $W(\cdot) \in \mathcal{L}_1$ y como tiene media cero, por el inciso (b) se sigue que el proceso de Wiener es una martingala.

Definimos a continuación los conceptos de proceso de segundo orden y proceso Gaussiano.

Definición 2.6. *Decimos que un proceso estocástico* $X(\cdot) = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es un,*

(a) *Proceso de segundo orden si para todo* $t \geq 0$, $\mathbb{E}(|X(t)|^2 < \infty)$,

(b) *Proceso Gaussiano si las combinaciones lineales,*

$$a_1X(t_1) + \cdots + a_nX(t_n),$$

son variables aleatorias Gaussianas para cualquier colección finita de índices $0 \leq t_1 <, \ldots, < t_n$ *y cualquier colección de números reales* $a_1, \ldots, a_n$.

De lo anterior se entiende que un proceso de estocástico es de segundo orden si para cada $t \geq 0$, $X(t) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dado que $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$ para todo $t \geq 0$, es fácil ver que un proceso de Wiener es Gaussiano.

2.2. La integral de Itô

En este capítulo se presentan el concepto de Integral de Itô e Isometría de Itô, mismos que serán utilizados más adelante. Comenzamos la sección definiendo los siguientes conceptos.

Definición 2.7. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* T *un subconjunto de* $\mathbb{R}$. *Sea* $\{X_t, t \in T\}$ *una familia de variables aleatorias sobre* Ω *y* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *una familia de sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$. *Decimos que:*

(a) *La familia* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *es una filtración de* $\mathcal{F}$ *si la familia es no decreciente en el siguiente sentido,*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \text{ para todo } s, t \in T, \text{ con } s < t.$$

(b) *La familia* $\{X(t), t \in T\}$ *está adaptada a la filtración* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *si* X_t *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para todo* $t \in T$.

Un caso particular de interés es el siguiente. Si $X(\cdot) := \{X(t), t \in T\}$ es un proceso estocástico, entonces la familia $\mathcal{F}^X := \{\mathcal{F}_t^X, t \in T\}$ con $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$, es la filtración natural del proceso $X(\cdot)$. Su interés radica en que todo proceso $X(\cdot)$ siempre está adaptado a su filtración natural. Más adelante veremos que en una ecuación diferencial estocástica (utilizada para modelar la dinámina de la tasa de interés del precio de un bono) se realiza la diferencial con respecto al proceso de Wiener, por lo cual se le pide que sea medible.

Ahora, consideremos un proceso de Wiener estándar, es decir, con parámetro $\sigma^2 = 1$ y sea $\mathcal{F}^W$ la filtración natural de $W(\cdot)$.

Definición 2.8. *Para $0 \leq a < b$, sea $N[a, b]$ la familia de procesos estocásticos $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ tales que*

(a) $(t, \omega) \to X(t, \omega)$ *es medible,*

(b) $X(\cdot)$ *está adaptado a $\mathcal{F}^W$, es decir, $X(t)$ es $\mathcal{F}_t^W$-medible para cada $t \geq 0$.*

(c) $X(\cdot) \in \mathcal{L}_2([a, b] \times \Omega)$

Decimos que un proceso $X \in N[a, b]$ es un proceso simple o escalonado si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b]$ tal que,

$$X(t) \equiv X(t_i) \text{ para todo } t \in [t_i, t_{i+1}), \text{ con } i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

en otras palabras,

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(t),$$

en donde por convención $[t_{n-1}, t_n) \equiv [t_{n-1}, b]$. Denotaremos por $\mathcal{E}[a, b]$ la subfamilia de procesos estocásticos escalonados $X \in N[a, b]$.

Para poder llevar a cabo la construcción de la integral de Itô, es importante la siguiente definición ya que más adelante haremos uso de este tipo de integrales y su función en este trabajo será más evidente.

Definición 2.9 (La integral de Itô para procesos escalonados)**.** *Si $X \in \mathcal{E}[a, b]$, definimos la integral de Itô de X, como*

$$\int_a^b X(t) dW(t) := \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i) \Delta W_i. \tag{2.6}$$

Algunas veces escribimos la integral de Itô como $\int_a^b X dW$ o como $I(X)$.

El siguiente resultado nos da las propiedades básicas de la integral de Itô.

Teorema 2.10 (Propiedades de la Integral de Itô)**.** *Sean* $X, Y \in \mathcal{E}[a,b]$ *y* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$*. Entonces:*

(a) $\int_a^b (\alpha X + \beta Y) dW = \int_a^b \alpha X dW + \int_a^b \beta Y dW$,

(b) *La integral de Itô es una variable aleatoria con media cero, es decir,*

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b X dW\Big) = 0, \tag{2.7}$$

y varianza

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b X dW\Big)^2 = \int_a^b \mathbb{E}[X^2(t)]dt = \mathbb{E}\Big[\int_a^b X^2(t)dt\Big]. \tag{2.8}$$

Al resultado en (2.8) *se le conoce como* ***Isometría de Itô****.*

Demostración. La demostración de (a) se sigue de que $\alpha X + \beta Y$ es un proceso estocástico en $\mathcal{E}[a,b]$.

En la demostración de (2.7) y (2.8) usaremos que por la independencia de incrementos de $W(\cdot)$, la v.a. $\Delta W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_i}^W$, que a su vez implica,

$$E(\Delta W_i | \mathcal{F}_{t_i}^W) = E(\Delta W_i) = 0. \tag{2.9}$$

y

$$E[(\Delta W_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}^W] = E[(\Delta W_i)^2] = t_{i+1} - t_i. \tag{2.10}$$

Ahora, por (2.9),

$$\begin{aligned} E[X(t_i)\Delta W_i] &= E(E[X(t_i)\Delta W_i | \mathcal{F}_{t_i}^W]) \\ &= E(X(t_i) E[\Delta W_i | \mathcal{F}_{t_i}^W]) \\ &= 0 \text{ para } i = 0, 1, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

que junto con la definición de (2.6) da la igualdad (2.7) porque,

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b X dW\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} E[X(t_i)\Delta W_i] = 0.$$

Finalmente, para demostrar (2.8), usamos de nuevo la definición (2.6) de la integral de Itô para obtener,

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b XdW\Big)^2 = A + B, \tag{2.11}$$

donde,

$$A := \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)^2(\Delta W_i)^2\Big],$$

y,

$$B := 2\mathbb{E}\Big[\sum_{i<j} X(t_i)X(t_j)\Delta W_i \Delta W_j\Big],$$

Usando (2.9) se puede ver que $B = 0$ porque, para $t_i < t_j$,

$$\begin{aligned} B &:= \mathbb{E}[X(t_i)X(t_j)\Delta W_i \Delta W_j] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X(t_i)X(t_j)\Delta W_i \Delta W_j | \mathcal{F}^W_{t_j}]) \\ &= \mathbb{E}(X(t_i)X(t_j)\Delta W_i \mathbb{E}[\Delta W_j | \mathcal{F}^W_{t_j}]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$A := \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[X(t_i)^2(\Delta W_i)^2],$$

y como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t_i)^2(\Delta W_i)^2] &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[X(t_i)^2(\Delta W_i)^2 | \mathcal{F}^W_{t_i}]) \\ &= \mathbb{E}(X(t_i)^2 \mathbb{E}[\Delta W_i^2 | \mathcal{F}^W_{t_i}]) \\ &= \mathbb{E}[X(t_i)^2](t_{i+1} - t_i) \text{por (2.10)}. \end{aligned}$$

vemos que

$$A := \int_a^b \mathbb{E}[X^2(t)]dt.$$

Sustituyendo estos resultados en (2.11) se obtiene la igualdad (2.8). □

El teorema anterior precisa dos resultados muy importantes para el desarrollo del tema central de este trabajo, ya que nos indica que la esperanza de la integral de Itô siempre es cero y gracias a la isometría de Itô podemos pasar de una integral estocástica a una integral determinística.

El siguiente lema proporciona un recurso para poder definir la Integral de Itô para procesos en $N[a,b]$, nos dice que dado cualquier proceso $X(\cdot) \in N[a,b]$ existe una sucesión $\{X_n\}$ de procesos en $\mathcal{E}[a,b]$ tal que converge a $X(\cdot)$ en la norma de $\mathcal{L}_2([a,b]\times\Omega)$, la cual está dada por $||X|| = \mathbb{E}\Big[\int_a^b |X|^2 dt\Big]$.

Lema 2.11. *El espacio $\mathcal{E}[a,b]$ es denso en $N[a,b]$ en la norma de $\mathcal{L}_2([a,b]\times\Omega)$, es decir, para cada $X(\cdot) \in N[a,b]$ existe una sucesión $\{X_n\}$ en $\mathcal{E}[a,b]$ tal que,*

$$\mathbb{E}\Big[\int_a^b |X_n(t) - X(t)|^2 dt\Big] \to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \tag{2.12}$$

Demostración. **Caso1**: X es acotada y tiene trayectorias $t \mapsto X(t,\omega)$ continuas para cada $\omega \in \Omega$.

Para $n = 1, 2, \dots$, sea $\pi_n = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ la partición de $[a,b]$ definida como $t_i := a + i(b-a)/n$ para $i = 0, \dots, n$, y sea $X_n \in \mathcal{E}[a,b]$ la función,

$$X_n(t) := \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(t).$$

Sea $||X|| := \sup_t |X(t)|$ y nótese que

$$X(t) := \sum_{i=0}^{n-1} X(t) I_{[t_i, t_{i+1})}(t).$$

Luego,

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}) : |X_n(t) - X(t)| \leq \sup_{t_i \leq t < t_{i+1}} |X(t_i) - X(t)|/n \leq 2||X||/n$$

y por lo tanto,

$$\int_a^b |X_n(t) - X(t)|^2 dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |X_n(t) - X(t)|^2 dt \leq \frac{4||X||^2}{n^2}(b-a) \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Esto implica (2.12), por el Teorema de Covergencia Acotada.

Caso 2: $X \in N[a,b]$ es acotada, es decir, existe una constante M tal que $|X(t,\omega)| \leq M$ para todo $(t,\omega) \in [a,b] \times \Omega$.

En este caso, existe una sucesión de funciones $X_n \in N[a,b]$ tales que $t \mapsto X_n(t,\omega)$ es continua para todo $\omega \in \Omega$ y, además, $|X_n(t,\omega)| \leq M$ y $X_n(t,\omega) \to X(t,\omega)$ para todo $(t,\omega) \in [a,b] \times \Omega$. Esto implica (2.12), por el Teorema de Convergencia Acotada.

Caso 3: $X \in N[a,b]$ es arbitraria.
Para cada $n = 1, 2, \ldots$, sea $X_n \in N[a,b]$ la función **truncada**,

$$\begin{aligned} X_n(t) &:= X(t) \text{ si } |X(t| \leq n \text{ (i.e. } -n \leq X(t) \leq n), \\ &:= n \text{ si } X(t) > n, \\ &:= -n \text{ si } X(t) < -n. \end{aligned}$$

Nótese que cada X_n es acotada (porque $|X_n| \leq n$), está dominada por $X(|X_n| \leq |X|$ para todo n), y $X_n(t) \to X(t)$ para todo $t \in [a,b]$ cuando $n \to \infty$. Esto implica (2.12), por el Teorema de Convergencia Dominada. □

Definimos a continuación la integral de Itô, concepto crucial para el desarrollo del trabajo.

Definición 2.12. *Si $X \in N[a,b]$, por el Lema 2.11 existe una sucesión de procesos $\{X_n\}$ en $\mathcal{E}[a,b]$ que satisface* (2.12). *Entonces la sucesión de integrales $I(X_n) = \int_a^b X_n dW$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_2(\Omega) \equiv \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pues,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|I(X_n) - I(X_m)|^2 &= \mathbb{E}\Big|\int_a^b (X_n - X_m) dW\Big|^2 \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_a^b (X_n - X_m)^2 dt\Big] \\ &\to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto existe una variable aleatoria $I(X) \in \mathcal{L}_2$ tal que $I(X_n) \to I(X)$ en $\mathcal{L}_2$. Al límite $I(X)$ se le llama ***Integral de Itô*** *de X y escribimos,*

$$I(X) := \int_a^b X(t) dW(t) = (\mathcal{L}_2) \lim_{n\to\infty} \int_a^b X_n(t) dW(t).$$

Además la integral $I(X)$ satisface (2.7) *y* (2.8)

En resumen vemos que la integral de Itô de un proceso $X \in N[a,b]$ es una variable aleatoria en $\mathcal{L}_2$ la cual es el límite de una sucesión de integrales de procesos escalonados que aproximan a X.

Es posible definir la integral de un proceso no anticipante que no está en $\mathcal{L}_2$ mediante el paso al límite y una idea similar a lo anterior. Ver, por ejemplo el capítulo 23 de [6].

El siguiente teorema es de gran utilidad para conocer la esperanza y la varianza de la integral de Itô, conceptos que serán utilizados más adelante.

Teorema 2.13. *Sean f, g funciones en $C^1[a,b]$. Entonces,*

(a) *$\int_a^b f dW$ es una variable aleatoria con media cero, es decir,*

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b f dW\Big) = 0, \tag{2.13}$$

y varianza,

$$Var\Big(\int_a^b f dW\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_a^b f dW\Big)^2 = \sigma^2 \int_a^b f^2 dt. \tag{2.14}$$

(b) *Si $a \leq b \leq c$,*

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b f dW \int_a^c g dW\Big) = \sigma^2 \int_a^b f(t)g(t) dt. \tag{2.15}$$

(c) *Si $a \leq b \leq c \leq d$,*

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b f dW \int_c^d g dW\Big) = 0. \tag{2.16}$$

Demostración. Ver Poposición 22.3 de [6]. □

2.3. La regla diferencial de Itô

En esta sección estudiamos la regla diferencial de Itô, misma que será de utilidad para encontrar la solución de una ecuación diferencial estocástica, por ejemplo: la dinámica que describe el comportamiento de las tasas de interés.

Revisamos a continuación algunas condiciones de estabilidad para los procesos u y v que se ven involucrados en la definición de diferencial estocástica. Comenzamos definiendo el concepto de filtración no-anticipante con respecto al proceso de Wiener.

Definición 2.14. *Sea $W(\cdot) = \{W(t), t \geq 0\}$ un proceso de Wiener sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathcal{G}(\cdot) = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Decimos que $\mathcal{G}(\cdot)$ es no-anticipante con respecto a $W(\cdot)$ si:*

(a) *La familia $\mathcal{G}(\cdot)$ es no decreciente en el siguiente sentido,*

$$\mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_t \text{ para todo } s, t \in T, \text{ con } s < t.$$

(b) *El proceso $W(\cdot)$ está adaptado a $\mathcal{G}(\cdot)$, es decir, $W(t)$ es $\mathcal{G}_t$-medible para todo $t \geq 0$.*

(c) *Para todo $t \geq 0$ y $h > 0$, $W(t+h) - W(t)$ es independiente de $\mathcal{G}_t$.*

Sea $\mathcal{G}(\cdot)$ una filtración no-anticipante con respecto a $W(\cdot)$. Sean $u(t,\omega)$, $v(t,\omega)$: $[0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ dos procesos estocásticos, adaptados a $\mathcal{G}(\cdot)$ tales que, con probabilidad 1:

$$\int_0^t |u(s)|ds < \infty \text{ y } \int_0^t v^2(s)ds < \infty \text{ para todo } t \geq 0.$$

Definición 2.15 (Diferencial Estocástica)**.** *Si $X(\cdot) := \{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ es un proceso estocástico tal que*

$$X(b) - X(a) = \int_a^b u(t)dt + \int_a^b v(t)dW(t) \text{ con } 0 \leq a \leq b \leq T, \tag{2.17}$$

decimos entonces que $X(\cdot)$ es un proceso de Itô, o que $X(\cdot)$ es una ecuación diferencial estocástica en $[0,T]$ y escribimos

$$dX(t) = u(t)dt + v(t)dW(t). \tag{2.18}$$

Las siguientes observaciones serán útiles más adelante.

Observación 2.16. **(a)** *Considere la regla formal,*

$\cdot$	dt	dW
dt	0	0
dW	0	dt

Entonces, vemos de (2.18) *que,*

$$(dX(t))^2 = u^2(dt)^2 + v^2(dW)^2 + 2uv(dt)(dW) = v^2 dt. \qquad (2.19)$$

(b) *Denotaremos por* $C^{1,2}([[0,\infty) \times \mathbb{R}])$*, o simplemente* $C^{1,2}$ *el espacio de funciones* $g(t,x)$ *que son de clase* C^1 *en* $t \geq 0$ *y de clase* C^2 *en* $x \in \mathbb{R}$*. Las derivadas parciales se denotan con subíndices, por ejemplo,*

$$g_t := \partial g/\partial t \ , \ g_x := \partial g/\partial x, \ \textit{etc.}$$

El siguiente resultado, brinda la herramienta para poder encontrar la diferencial de procesos estocásticos.

Teorema 2.17 (Regla diferencial de Itô)**.** *Sea* $X(\cdot)$ *como en* (2.18)*, y sea* $g \in C^{1,2}$*. Entonces el proceso estocástico* $Y(t) := g(t, X(t))$ *tiene la diferencial estocástica,*

$$dY(t) = g_t(t,X(t))dt + g_x(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(t,X(t))(dX(t))^2. \qquad (2.20)$$

Es decir, por (2.18) *y* (2.19)*,*

$$\begin{aligned} dY(t) &= [g_t(t,X(t)) + g_x(t,X(t))u(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(t,X(t))v^2(t)]dt \\ &+ g_x(t,X(t))v(t)dW(t). \end{aligned}$$

Demostración. Ver Teorema 4.16.6 de [8]. □

Ejemplo 2.18. *Use la regla diferencial de Itô 2.17, para demostrar que la diferencial del proceso estocástico* $Y(t) = e^{(\alpha - \beta^2/2)t + \beta W(t)}$ *es*

$$dY(t) = \alpha Y(t)dt + \beta Y(t)dW(t). \qquad (2.21)$$

Demostración. Tome $Y(t) = g(t, X(t))$ con $g(t,x) = e^{(\alpha-\beta^2/2)t+\beta x}$ y $X(\cdot) \equiv W(\cdot)$. Entonces $g_t = (\alpha - \beta^2/2)g$, $g_x = \beta g$ y $g_{xx} = \beta^2 g$. Sustituyendo estos valores en (2.20) vemos que,

$$dY(t) = [(\alpha - \beta^2/2)Y(t) + \frac{1}{2}\beta^2 Y(t)]dt + \beta Y(t)dW(t),$$

que se reduce al resultado en (2.21). □

2.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En esta sección se presentan las condiciones para la existencia y unicidad de la solución de una ecuacíon diferencial estocástica (estos conceptos se desarrollan en [7] y [9]) de la forma,

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t) \text{ para todo } t_0 \leq t \leq T, \tag{2.22}$$

con condición inicial $X(t_0) = C$, o en forma integral,

$$X(t) = C + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X(s))dW(s) \text{ para todo } t_0 \leq t \leq T, \tag{2.23}$$

en donde $W(\cdot) \in \mathbb{R}^d$, $X(\cdot) \in \mathbb{R}^m$, $f(t,x) \in \mathbb{R}^m$, $G(t,x) \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $C \in \mathbb{R}^m$. Supondremos que la condición inicial es una variable aleatoria independiente de $W(t) - W(t_0)$ para $t \geq t_0$.

A la ecuación en (2.22) se le llama ecuación diferencial estocástica de Itô.

Sea $\mathcal{G}(\cdot) = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ la filtración no-anticipante con respecto a $W(\cdot)$ definida como $\mathcal{G}_t := \sigma\{C, W(s), s \leq t\}$.

Se dan a continuación las condiciones necesarias para que un proceso estocástico sea la solución de una ecuación diferencial estocástica. Si las funciones f y G satisfacen las condiciones que a continuación se enuncian, entonces la solución de la ecuación en (2.22) existe y es única con probabilidad 1.

Definición 2.19. *Decimos que un proceso estocástico $X(\cdot)$ es solución de la ecuación* (2.22)*, si:*

(a) *$X(\cdot)$ está adaptado a $\mathcal{G}(\cdot)$,*

(b) *f y G son funciones medibles y tales que satisfacen con probabilidad 1,*

$$\int_{t_0}^{T} |f(s, X(s))|ds < \infty \text{ y } \int_{t_0}^{T} |G(s, X(s))|^2 ds < \infty \text{ para todo } t \geq 0,$$

con $|G|^2 = Traza(GG')$.

(c) *$X(\cdot)$ satisface* (2.23) *para todo $t \in [t_0, T]$ casi seguramente.*

La unicidad de la solución de una EDE está garantizada por el siguiente resultado:

Teorema 2.20. *Suponga que $f(t, \cdot)$ y $G(t, \cdot)$ satisfacen las siguientes hipótesis, llamadas condiciones de Itô, para alguna constante $K \geq 0$*

(a) ***Condición de Lipschitz.*** *Para todo* $t \in [t_0, T]$, $X(\cdot)$ *e* $Y(\cdot)$ *en* $\mathbb{R}^m$*;*

$$|f(t, X(t)) - f(t, Y(t))| + |G(t, X(t)) - G(t, Y(t))| \leq K|X(t) - Y(t)|,$$

(b) ***Condición de crecimiento lineal.*** *Para todo* $t \in [t_0, T]$, $X(t)$ *en* $\mathbb{R}^m$*;*

$$|f(t, X(t))| + |G(t, X(t))| \leq K(1 + |X(t)|).$$

Entonces la ecuación diferencial estocástica (2.22) *tiene una única solución casi seguramente, es decir, si* $X(\cdot)$ *y* $Y(\cdot)$ *son dos procesos estocásticos que satisfacen* (2.22)*, entonces,*

$$\mathbb{P}(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)| > 0) = 0.$$

Demostración. Ver Teorema 25.2 de [6]. □

2.5. Precio del bono cupón cero obtenido por la tasa de interés estocástica

El modelo de tasa corta de Vasicek es muy útil debido a sus propiedades para valuar productos derivados de tasas de interés. El modelo presenta reversión de la media a un valor constante lo cual es una propiedad deseable en el análisis de la dinámica de la tasa de interés.

Para modelar la incertidumbre de la tasa de interés, supongamos que existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ al cual asociamos la filtración natural $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ y consideremos a $\mathbb{P}$ como una medida de probabilidad neutral al riesgo, la cual definimos como:

Definición 2.21. *Se dice que una medida de probabilidad* $\mathbb{P}$ *en* Ω *es una medida neutral al riesgo, también llamada medida de martingala equivalente a* μ *si:*

(a) $\mathbb{P}(\omega_k) > 0$ *para todo* $k = 1, ..., n$,

(b) $B(t_0, T, r(t_0)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-rT} B(t, T, r(t))]$.

Además suponemos que la dinámica de la tasa de interés $r(t)$ está dada por la siguiente ecuación diferencial estoástica:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t), \tag{2.24}$$

donde a, b y σ son constantes positivas y $W(t)$ es un proceso de Wiener con parámetro $\sigma^2 > 0$.

Por la técnica del factor de integración para ecuaciones diferenciales ordinarias determinísticas, verificaremos que la siguiente expresión es una solución a la ecuación en (2.24).

$$r(t) = e^{-at}\left[r(0) + \int_0^t abe^{au}du + \sigma\int_0^t e^{au}dW(u)\right]. \tag{2.25}$$

Para esto, notemos que,

$$dr(t) + ar(t)dt = abdt + \sigma dW(t), \tag{2.26}$$

Luego multiplicando ambos lados de (2.26) por el factor de integración e^{at} y agrupando tenemos que,

$$d[r(t)e^{at}] = e^{at}[abdt + \sigma dW(t)].$$

Integrando ambos lados de la expresión anterior de 0 a t, se sigue que,

$$r(t) = e^{-at}\left[r_0 + \int_0^t abe^{au}du + \sigma\int_0^t e^{au}dW(u)\right].$$

Verificando asi que la expresión en (2.25) es la solución de (2.24).

Calculemos ahora el valor esperado de la tasa de interés en el tiempo t, para esto, notemos que podemos reescribir a $r(t)$ como sigue,

$$\begin{aligned}
r(t) &= e^{-at}\left[r_0 + b\int_0^t ae^{au}du + \sigma\int_0^t e^{au}dW(u)\right],\\
&= e^{-at}\left[r_0 + b(e^{at}-1) + \int_0^t \sigma e^{au}dW(u)\right],\\
&= \mu_t + \sigma\int_0^t e^{a(u-t)}dW(u).
\end{aligned}$$

Donde $\mu_t := e^{-at}\left[r_0 + b(e^{at}-1)\right]$ es una función determinística. Por el teorema 2.13 tenemos que $r(t)$ es una variable aleatoria gaussiana, con media $\mathbb{E}[r(t)] = \mu_t$.

Otra manera de calcular la esperanza es obteniéndola de la solución de $r(t)$ dada arriba, $\mathbb{E}[r(t)]$ puede ser determinada sin resolver explícitamente la ecuación diferencial estocástica. Con este fin, integramos ambos lados de (2.24), para obtener,

$$r(t) = r_0 + \int_0^t (a(b - r(u))du + \sigma dW(u)).$$

De donde se sigue que,

$$\begin{aligned}
\mu_t &:= \mathbb{E}[r(t)], \\
&= \mathbb{E}\left[r_0 + \int_0^t (a(b - r(u))du + \sigma dW(u))\right], \\
&= r_0 + \mathbb{E}\left[\int_0^t a(b - r(u))du\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma dW(u)\right].
\end{aligned}$$

Puesto que $\int_0^t \sigma dW(u)$ es una v.a. gaussiana, y su esperanza es igual a cero, entonces,

$$\mu_t = r_0 + \int_0^t a(b - \mathbb{E}[r(u)])du. \tag{2.27}$$

De (2.27) tenemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mu_t &= \frac{d}{dt}\left[r_0 + \int_0^t a(b - \mathbb{E}[r(u)])du\right], \\
&= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t a(b - \mathbb{E}[r(u)])du\right], \\
&= a(b - \mu_t),
\end{aligned}$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria. Entonces, usando el factor de integración e^{at},

$$\mu_t = e^{-at}[r_0 + b(e^{at} - 1)] \tag{2.28}$$

En este modelo, b es una especie de nivel de reversión que se está tratando de alcanzar. A esto le llamamos *reversión a la media.*

Calculamos ahora la varianza de $r(t)$,

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^2 &:= \mathbb{V}(r(t)), \\
&= \mathbb{E}\left(r(t) - \mathbb{E}[r(t)]\right)^2, \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-at}\left(r_0 + \int_0^t abe^{au}du + \sigma\int_0^t e^{au}dW(u)\right) - e^{-at}\left(r_0 + \int_0^t abe^{au}du\right)\right]^2, \\
&= \mathbb{E}\left(\sigma e^{-at}\int_0^t e^{au}dW(u)\right)^2, \\
&= \sigma^2 e^{-2at}\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{2au}du\right) \text{ por la isometría de Itô (2.8)}, \\
&= \sigma^2\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right). \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $r(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana con media μ_t dada en (2.28) y varianza σ^2 como en (2.29).

Una de las debilidades del modelo de Vasicek, es que las variables aleatorias normales pueden llegar a ser negativas con probabilidad positiva. Utilizando el marco de valuación con una medida neutral al riesgo (ver definición 2.21), el precio de un bono cupón cero en el tiempo t con vencimiento en el tiempo T está dado por,

$$
B(t,T) = \mathbb{E}\left[exp\left(-\int_t^T r(u)du\right) \Bigg| \mathcal{F}_t\right],
$$

donde $\mathcal{F}_t$ es la filtración natural de $r(t)$, i.e. $\mathcal{F}_t := \sigma\{r(t), t \geq 0\}$.

Ahora sea

$$
X(u) = r(u) - b, \qquad (2.30)
$$

donde, $X(u)$ es la solución de la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck (2.31). Luego,

$$
dX(u) = d(r(u) - b) = dr(u).
$$

Sustituyendo (2.30) en (2.24), tenemos que,

$$
dX(t) = -aX(t)dt + \sigma dW(t), \qquad (2.31)
$$

con $X(0) = r(0) - b$.

Para obtener una expresión para $X(u)$ vemos que,

$$
\begin{aligned}
r(u) &= e^{-at}\left[r(0)+b(e^{at}-1)+\int_0^t \sigma e^{au}dW(u)\right],\\
&= e^{-at}\left[r(0)-b+be^{at}+\int_0^t \sigma e^{au}dW(u)\right],\\
&= e^{-at}\left[X(0)+\int_0^t \sigma e^{au}dW(u)\right]+b,\\
r(u)-b &= e^{-at}\left[X(0)+\int_0^t \sigma e^{au}dW(u)\right]
\end{aligned}
$$

Y así,

$$
X(u)=e^{-au}\left(X(0)+\int_0^u \sigma e^{as}dW_s\right). \tag{2.32}
$$

El proceso $X(u)$ es Gaussiano, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n X(u_n)$ es una v.a. Gaussiana con $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ y $\{u_k\}_{k=1}^n \subset \{T\}$, así $\sum_{k=1}^n a_k X(u_k)$ es una v.a. Gaussiana. Además es facil ver que $X(\cdot)$ es un proceso con trayectorias continuas.

De (2.32), tenemos que,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(u)] &= \mathbb{E}\left[e^{-au}X(0)+\int_0^u \sigma e^{a(s-u)}dW_s\right],\\
&= e^{-au}\mathbb{E}[X(0)],\\
&= X(0)e^{-au},
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t X(u)du\right] &= \int_0^t \mathbb{E}[X(u)]du,\\
&= \int_0^t X(0)e^{-au}du,\\
&= \frac{X(0)}{a}(1-e^{-at}). \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Calculamos ahora la de covariaza de $X(t)$,

$$
\begin{aligned}
Cov[X(t), X(u)] &= \mathbb{E}(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])((X(s) - \mathbb{E}[X(s)]) \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\left(e^{-at}X(0) + \int_0^t \sigma e^{-at} e^{as} dW_s - e^{-at}X(0) \right) \\
&\quad \left(e^{-as}X(0) + \int_0^u \sigma e^{-au} e^{as} dW_s - e^{-au}X(0) \right) \Bigg] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-a(t+u)} \int_0^t \sigma e^{as} dW_s \cdot \int_0^u \sigma e^{as} dW_s \right] \\
&= \sigma^2 e^{-a(u+t)} \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{as} dW_s \int_0^u e^{as} dW_s \right] \\
&= \sigma^2 e^{-a(u+t)} \int_0^{u\wedge t} e^{2as} ds \text{ (Ver Teorema 2.13)} \\
&= \sigma^2 e^{-a(u+t)} \left[\frac{e^{2as}}{2a} \Big|_0^{u\wedge t} \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(u+t)} (e^{2a(u\wedge t)} - 1).
\end{aligned}
$$

De manera que,

$$
\begin{aligned}
Var\left[\int_0^t X(u)du\right] &= Cov\left[\int_0^t X(u)du, \int_0^t X(s)ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X(u)du - \mathbb{E}\left[\int_0^t X(u)du\right]\right)\right. \\
& \qquad \left.\left(\int_0^t X(s)ds - \mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)ds\right]\right)\right] \\
&= \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}[(X(u) - \mathbb{E}[X(u)])(X(s) - \mathbb{E}[X(s)])]duds \\
&= \int_0^t \int_0^t Cov[X(u), X(s)]duds \\
&= \int_0^t \int_0^t \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(u+s)}(e^{2a(u\wedge s)} - 1)duds \\
&= \frac{\sigma^2}{2a}\int_0^s \left[\int_0^t e^{-a(u+s)}(e^{2au} - 1)du\right. \\
&+ \left.\int_s^t e^{-a(u+s)}(e^{2as} - 1)du\right] ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_0^t \left[\left(1 + e^{-2as} - e^{-as} - e^{-as}\right)\right. \\
&+ \left.\left(-e^{a(s-t)} + e^{-a(s+t)} + 1 - e^{-2as}\right)\right] ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(2s + \frac{2}{a}e^{-as} - \frac{1}{a}e^{a(s-t)} - \frac{1}{a}e^{-a(s+t)}\right)\Bigg|_0^t \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^3}(2at - 3 + 4e^{-at} - e^{-2at}). \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

De (2.30), tenemos que,

$$\mathbb{E}\left[-\int_0^t r(u)du\right] = \mathbb{E}\left[-\int_0^t (X(u) + b)du\right]. \qquad (2.35)$$

Por lo tanto, juntando la ecuación (2.35) con (2.33), tenemos,

$$\mathbb{E}\left[-\int_t^T r(u)du\right] = -\frac{r(t) - b}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) - b(T - t). \qquad (2.36)$$

Además por (2.34)

$$\begin{aligned} Var\left[-\int_t^T r(u)du\right] &= Var\left[\int_t^T X(u)du\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2a^3}\Big(2a(T-t) - 34e^{-a(T-t)} \\ &+ -e^{-2a(T-t)}\Big). \end{aligned} \tag{2.37}$$

También se tiene que el proceso definido para la tasa corta $r(t)$ en la integral de Itô, es de Markov. La demostración puede consultarse en [5] p. 355.

Por lo tanto, el precio del bono está dado por,

$$B(t,T) = \mathbb{E}\left[exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\,\middle|\,r(t)\right].$$

Escribimos,

$$B(t,T,r(t)) := \mathbb{E}\left[exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\,\middle|\,r(t)\right] = \mathbb{E}\left[exp\left(-\int_t^T r(u)\big(r(t)\big)du\right)\right],$$

donde $r(u)$ es una función de $r(t)$.

Combinando (2.36) y (2.37), el precio del bono está dado por,

$$B(t,T,r(t)) = exp\left(\mathbb{E}\left[-\int_t^T r(u)(r(t))du\right] + \frac{1}{2}Var\left[-\int_t^T r(u)(r(t))du\right]\right). \tag{2.38}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
B(t,T,r(t)) &= exp\Bigg(-\frac{r(t)-b}{a}(1-e^{-a(T-t)}) - b(T-t) \\
&+ \frac{\sigma^2}{4a^3}(2a(T-t)-3+4e^{-a(T-t)}-e^{-2a(T-t)})\Bigg), \qquad (2.39)\\
&= exp\Bigg[-\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) r(t) + b\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} - (T-t)\right) \\
&- \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(T-t) \\
&- \frac{\sigma^2}{4a}\left(\frac{1-2e^{-a(T-t)}+e^{-2a(T-t)}}{a^2}\right)\Bigg], \\
&= exp\Bigg[-A(t,T)r(t) + bA(t,T) - b(T-t) - \frac{\sigma^2}{2a^2}A(t,T) \\
&+ \frac{\sigma^2}{2a^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{4a}A(t,T)^2\Bigg], \\
&= exp\left(-A(t,T)r(t) + D(t,T)\right), \qquad (2.40)
\end{aligned}
$$

donde,

$$
A(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}, \qquad (2.41)
$$

y,

$$
D(t,T) = \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)[A(t,T)-(T-t)] - \frac{\sigma^2 A(t,T)^2}{4a}. \qquad (2.42)
$$

Como para toda t, el rendimiento $\frac{-\log B(t,T,r(t))}{T-t}$ obtenido de (2.40) está relacionado con $r(t)$ mediante la función exponencial, (2.40) es llamado modelo estructural afin temporal, o precio del bono exponencial afin.

Capítulo 3

Ejemplos.

3.1. Tasas de bonos siguiedo el Modelo de Vasicek.

Supongamos que la dinámica de cierta tasa de interés $r(t)$ está dada por la siguiente EDE,

$$dr(t) = 0{,}2(0{,}02 - r(t))dt + 0{,}4dW(t).$$

El precio del bono cupón cero se obtiene de un proceso de Itô, que, coincide con la siguiente fórmula,

$$dB = \alpha B dt - qB dW,$$

donde $B = B(t, T, r(t)), \alpha$ es una constante positiva y q es la volatilidad[1] del bono.

Buscamos determinar la volatilidad del bono para un periodo de 5 años, estando en $t = 0$ donde la tasa libre de riesgo es de 20 %.

Esto puede encontrarse usando el modelo de Vasicek con la ecuación (2.41)

$$q = A(t, T)\sigma = \frac{1 - e^{-0{,}2(5)}}{0{,}2}\sigma = 3{,}16\sigma$$

Dado que la volatilidad de la tasa de interés es 40 %, la volatilidad del bono es de 1.264. La volatilidad en el precio del bono debido a un cambio en su rendimiento será menor cuanto mayor sea el cupón. A esto se le denomina efecto cupón. Así que cuanto más grandes sean los cupones menor será la volatilidad del precio; el caso opuesto es el del bono cupó cero, cuyo precio es el que más varía ante los cambios habidos en los tipos de interés.

[1]Es la variación que sufre el precio del bono en el mercado, se mide por los cambios que han experimentado los precios de los bonos en el pasado

3.2. El Precio de un Bono con opción de compra europea

Las opciones son aquellos instrumentos financieros que otorgan al comprador el derecho y al vendedor la obligación de realizar la transacción a un precio fijado y en una fecha determinada. Una Opción de Compra Europea (llamada también Opción Call) es un contrato de opción que soló puede ser ejercida en la fecha de expiración (ver [2] p.19).

Calcularemos el precio de un bono considerando una opción de compra europea sobre un bono cupón cero, para esto ocuparemos las ecuaciones (2.40), (2.41) y (2.42) con tiempo de expiración T de dos años, la volatilidad σ es del 3 %, el nivel de reversión a la media b es del 9 %, y la tasa de reversión a la media a es de 5 %, el tiempo de vencimiento τ es a tres años y la tasa inicial $r(0)$ libre de riesgo del 8 %.

El valor nominal[2] del bono es de 100 y el precio de ejercicio de la opción[3] es de 92.

De la ecuación (2.41), con $T = 2, t = 0, \tau = 3$ y $a = 0{,}05$ tenemos que,

$$A(t,T) = A(0,2) = \frac{1 - e^{-0{,}05\cdot(2-0)}}{0{,}05} = 1{,}9032,$$

$$A(t,\tau) = A(0,3) = \frac{1 - e^{-0{,}05\cdot(3-0)}}{0{,}05} = 2{,}7858.$$

De la ecuación (2.42), con $\sigma = 0{,}03, a = 0{,}05, b = 0{,}09, t = 0, T = 2$ y $\tau = 3$, tenemos que:

$$D(t,T) = D(0,2) = \left(0{,}09 - \frac{0{,}03^2}{2(0{,}05)^2}\right)[A(0,2)-(2-0)] - \frac{0{,}03^2 A(0,2)^2}{4(0{,}05)} = -0{,}015645067,$$

$$D(t,\tau) = D(0,3) = \left(0{,}09 - \frac{0{,}03^2}{2(0{,}05)^2}\right)[A(0,3)-(3-0)] - \frac{0{,}03^2 A(0,3)^2}{4(0{,}05)} = -0{,}15428566.$$

[2]Es la cantidad de dinero que se recibe al vencimiento.

[3]El precio de ejercicio es el costo por acción al que el tenedor de una opción puede comprar o vender el activo subyacente.

Por último, la ecuación (2.40) con $r(0) = 0{,}08$ nos permite conocer el precio del Bono,

$$B(t,T,r(t)) = exp(-A(t,T)r(t) + D(t,T)),$$

$$B(t,T,r(t)) = B(0,2,0{,}08) = exp(-1{,}9032(0{,}08)+(-0{,}015645067)) = 0{,}735987,$$

$$B(t,\tau,r(t)) = B(0,3,0{,}08) = exp(-2{,}7858(0{,}08)+(-0{,}15428566)) = 0{,}684330.$$

Aquí observamos que el precio del Bono varía cuando lo valuamos en la fecha de expiración T en donde se efectúa la opción de compra y cuando lo valuamos en la fecha de vencimiento τ, en la cual se pagan los rendimientos.

Capítulo 4

Conclusiones.

En el presente trabajo se revisaron los aspectos más relevantes del modelo de Vasicek, para encontrar el precio un bono cupón cero cuando se supone que la dinámica de la tasa rige mediante una ecuación diferencial estocástica y que la tasa de interés tiene una distribución Normal con media μ y varianza σ^2.

Vemos que para comprender modelos de esta naturaleza, es necesario el acercamiento a la teoría de procesos estocásticos a tiempo continuo y al cálculo estocástico, por lo que de manera muy general se revisaron algunos aspectos básicos de dichos temas para dar paso al desarrollo del modelo de Vasicek, esto se vió plasmado en el capítulo dos. Posteriormente, aplicamos el modelo en la valuación de la volatilidad y el precio de un bono, esto fue descrito en el capítulo tres.

El Cálculo de Itô, en particular, de su integral estocástica en términos de la cual se expresa la solución del modelo de Vasicek, nos da la certeza de la precisión de dicho modelo, el estudio de este tipo de procesos estocásticos, en los cuales se basan los modelos más importantes y avanzados, se ha ido desarrollando en la actualidad para modelar numerosos problemas complejos dentro del ámbito de las Finanzas.

En un mundo globalizado la función de las finanzas en las empresas es fundamental para la creación de valor, para que una empresa crezca necesita de recursos que pueden provenir de los accionistas o del mercado de valores, el instrumento más utilizado por las empresas corresponde a los bonos porque representan un crédito de menor costo.

En México, este mecanismo financiero fue utilizado por el gobierno para apoyar con recursos presupuestales a los estados afectados por fenómenos climatológicos. En concreto, este esquema del Bono Cupón Cero está funcionando bien porque no representa ningún riesgo.

El desarrollo de esta tesina nos dió la oportunidad para extender los conocimientos adquiridos durante la licenciatura, particularmente en lo que respecta a las asignaturas relacionadas con el cálculo estocástico, mercados financieros y el modelado de activos mediante técnicas matemáticas y estadísticas, este tipo de conocimientos se expresan con abundantes ejemplos de aplicación y pueden ser de gran utilidad tanto para estudiantes como para empresas.

Bibliografía

[1] Francisco Venegas Martínez, *"Riesgos financieros y económicos, Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre,"* Primera Edición, México, Thomson, 2006.

[2] Pablo Fernández, *"Opciones, futuros e instrumentos derivados,"* Segunda Edición, España, Deusto, 1996.

[3] S. M. Rogemar, *"Three Ways to Solve for Bond Prices in the Vasicek Model,"* Journal of applied Mathematics and decision sciences, Vol. 8, Issue 1, pp. 1 - 14, Jun, 2004.

[4] O. A. Vasicek, *"An equilibrium Characterization of the Term Structure,"* Journal of Financial Economics, Vol. 5, Issue 1, pp. 177 - 188, Ago, 1977.

[5] I. Karatzas and S. Shreve, *"Brownian Motion and Stochastic Calculus,"* Segunda Edición, Springer-Verlag, 1991.

[6] Onésimo Hernández-Lerma, *"Probabilidad y Procesos Estocásticos (Notas de clase),"* Primera Edición, Cinvestav México, 2000.

[7] B. Oksendal, *"Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications,"* Sexta Edición, Springer-Verlag, 2003.

[8] Oliver Knill, *"Probability Theory and Stochastic Processes with Applications,"* Primera Edición, Department of Mathematics, Harvard University, 2009.

[9] Luis Rincón, *"Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas,"* Primera Edición, Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias UNAM, 2000.