



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS NUMÉRICO DEL CALOR CONJUGADO
EN UNA SUPERFICIE EXTENDIDA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECÁNICO

PRESENTAN:

FRANCISCO IVÁN MENDOZA SEVILLA

DIRECTOR DE TESIS: DR. WILLIAM VICENTE Y RODRÍGUEZ



MÉXICO, CIUDAD UNIVERSITARIA

2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice de contenido

Capítulo 1. Introducción

1.1 Justificación.....	1
1.2 Calor conjugado.....	2
1.3 Definición del problema.....	2
1.4 Método de predicción.....	3
1.5 Objetivo.....	4
1.5.1 Objetivos específicos.....	4

Capítulo 2. Ecuaciones y correlaciones de la aleta de sección transversal uniforme

2.1 Aletas de sección transversal uniforme.....	5
2.2 Conducción unidimensional en estado permanente.....	5
2.3 Convección unidimensional en estado permanente.....	7
2.4 Distribución de temperaturas en la aleta de sección transversal uniforme.....	9
2.4.1 Análisis del elemento diferencial.....	12
2.4.2 Balance de energía del elemento diferencial.....	13
2.4.3 Aleta con convección en el extremo.....	15
2.4.4 Extremo de la aleta aislado o adiabático.....	19
2.4.5 Temperatura establecida en el extremo de la aleta.....	20
2.4.6 Aleta infinita.....	21
2.5 Características del flujo.....	21
2.6 Coeficientes de transferencia de calor por convección.....	22
2.6.1 Placa plana.....	23
2.6.2 Capa límite de velocidad.....	24
2.6.3 Adimensionalización de las ecuaciones de la capa límite de velocidad.....	26
2.6.4 Solución de Blasius para las ecuaciones de capa límite de velocidad.....	27

2.6.5 Espesor de desplazamiento.....	30
2.6.6 Espesor de momentum.....	31
2.6.7 Capa límite térmica.....	31
2.6.8 Adimensionalización de las ecuaciones de la capa límite térmica.....	33
2.6.9 Perfiles de velocidad y temperatura de la capa límite.....	36
2.6.10 Flujo turbulento en una placa plana.....	37
2.6.11 Condiciones de capa límite mezclada.....	38
2.6.12 Aleta de sección transversal circular.....	40
2.6.13 Correlaciones del coeficiente de transferencia de calor por convección del cilindro.....	41

Capítulo 3. Ecuaciones de Transporte y Método de solución

3.1 Ecuación de Continuidad.....	44
3.2 Ecuación de Momentum.....	45
3.3 Ecuación de Conservación de la Energía.....	49
3.4 Turbulencia.....	50
3.5 Promediado de las ecuaciones de transporte.....	51
3.6 Método de Volumen Finito.....	52
3.7 Discretización del término Difusivo.....	54
3.8 Discretización del término Convectivo.....	54

Capítulo 4. Solución analítica y numérica de la transferencia de calor en la aleta de sección transversal uniforme

4.1 Aleta de sección transversal rectangular. Solución analítica.....	58
4.2 Aleta de sección transversal circular. Solución analítica.....	68
4.3 Aleta de sección transversal rectangular. Solución numérica.....	75
4.4 Aleta de sección transversal circular. Solución numérica.....	90
4.5 Comparación de los resultados numéricos y analíticos de la aleta de sección transversal rectangular.....	91
Conclusiones.....	95

Apéndice A	97
Apéndice B	100
Bibliografía	102

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Con este capítulo se presentará el intercambiador de calor, su clasificación y su relación con las superficies extendidas, así como los modos de transferencia de calor que existen dentro de un intercambiador de calor, y la importancia de que estos dispositivos utilicen aletas. El término de calor conjugado se utilizará para referirse a la transferencia de calor que involucra conducción y convección simultáneamente, en base a esto se definirá un problema que se utilizará como caso base en el análisis del calor conjugado. También se expondrá de forma breve en qué consiste el método de predicción, que será utilizado en la solución de éste problema y los objetivos que se pretenden alcanzar.

1.1 JUSTIFICACIÓN

En la industria los procesos mecánicos, químicos, nucleares entre otros, ocurre que el calor debe ser transferido de un lugar a otro, o de un fluido a otro. En la industria el equipo que se encarga de hacer este trabajo es el intercambiador de calor. Este dispositivo tiene como característica, el facilitar el intercambio de calor entre dos fluidos que no se mezclan entre sí. Existen muchos tipos de intercambiadores de calor y su uso es muy común en una gran variedad de aplicaciones, desde sistemas domésticos de calefacción, acondicionamiento del aire, procesos químicos, producción de energía, e incluso en algunas ramas de la industria se han desarrollado intercambiadores altamente especializados para ciertas aplicaciones. Una forma general de clasificarlos se muestra en la figura 1.1.

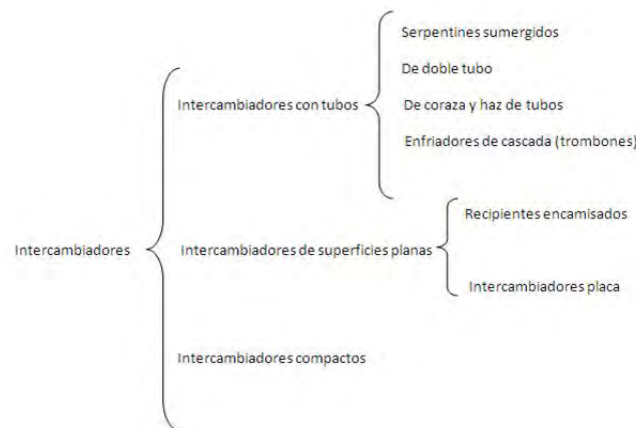


Figura1.1 Clasificación de los intercambiadores de calor [19].

Dentro de la clasificación de intercambiadores con tubos, se encuentran los intercambiadores con superficies extendidas, estos tubos aletados se usan porque las aletas aumentan la transferencia de calor alrededor de 10 a 15 veces por unidad de longitud. Las aletas se clasifican en dos: aletas longitudinales y aletas transversales. Los modos de transferencia de calor que existen dentro de un intercambiador de calor se pueden describir de la siguiente manera:

- Transferencia de calor por convección desde el fluido hacia la pared interna del tubo.
- Transferencia de calor por conducción a través de la pared del tubo.
- Transferencia de calor por convección desde la superficie externa del tubo hacia el fluido exterior.

La importancia de las aletas se justifica por diversas causas, entre ellas que reduce el tamaño y cantidad de unidades de intercambiadores, la distribución de flujo de calor es más uniforme debido a que poseen una mayor área de transferencia de calor, además de que se pueden utilizar en aplicaciones de enfriamiento y calentamiento de gases en flujo cruzado.

1.2 CALOR CONJUGADO

La transferencia de calor por conducción y convección son fenómenos que están ligados entre sí, para poder comprender los modos de transferencia de calor, se debe realizar un estudio de cada uno en forma independiente. El término de calor conjugado se usa para describir los procesos que involucran variaciones de temperatura dentro de sólidos y fluidos, debido a la interacción térmica entre éstos. Un ejemplo de esta situación que servirá de caso base para verificar la transferencia de calor conjugado, es el de una aleta de sección transversal uniforme, inmersa en un fluido en movimiento.

1.3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La figura 1.2 muestra el caso de una aleta de sección transversal uniforme, inmersa en un fluido en movimiento, en su interior ocurre un proceso de transferencia de calor por conducción entre la temperatura de la base y la temperatura de la aleta, mientras que en la superficie de la aleta ocurre un proceso de transferencia de calor por convección entre la superficie de la aleta y el flujo de aire. El coeficiente de convección es una propiedad desconocida, por lo que es necesario obtener este valor para determinar cómo se distribuye el calor en la aleta.

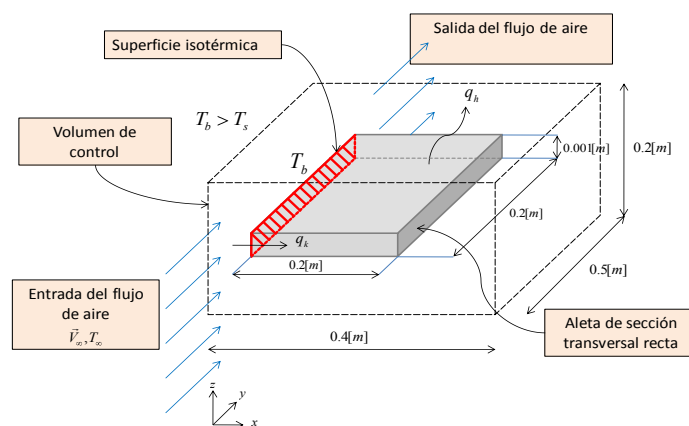


Figura 1.2 Aleta de área de sección transversal rectangular inmersa en un fluido en movimiento

Además de resolver este problema mediante expresiones analíticas, también se resolverá mediante un Código de Dinámica de Fluidos Computacional ó CFD, en donde se usará la misma representación tridimensional de la aleta para estudiar cómo se distribuye la

temperatura dentro del sólido. Los datos del caso base para la solución analítica y numérica son:

- Las dimensiones del dominio que servirá como volumen de control para analizar el proceso de la transferencia de calor a través de la aleta son: 0.4 [m] x 0.5 [m] x 0.2 [m].
- En este dominio se analizará por separado la aleta rectangular y la aleta circular. El caso base es la aleta rectangular, la aleta circular es un caso adicional.
- El dominio cuenta con una entrada de aire a 20 [°C], velocidad constante y unidireccional en la dirección y de 0.1 [m/s]. Las demás caras del dominio son salidas del flujo de aire.
- La cara posterior de la aleta rectangular se define como una superficie de temperatura constante o isotérmica $T_b = 100[°C]$, cuyas dimensiones son: 0.2 [m] x 0.001 [m], y 0.005 [m] de diámetro para el caso de la aleta circular.
- El material del que está hecha la aleta es aluminio, sus dimensiones son: longitud $L = 0.2$ [m], espesor $e = 0.001$ [m] y ancho $a = 0.2$ [m] para el caso de la aleta rectangular. En el caso de la aleta circular sus dimensiones son: longitud $L = 0.2$ [m] y diámetro $\Phi = 0.005$ [m].
- Tanto la superficie isotérmica como la aleta, son cuerpos opacos, por lo tanto no existe transferencia de calor por radiación.

1.4 MÉTODO DE PREDICCIÓN

La aleta de sección transversal uniforme, inmersa en un fluido en movimiento contempla la transferencia de calor conjugado. La solución de este problema por medio de un código de CFD, considera un dominio de cálculo que involucra a las regiones sólidas y gaseosas. En el interior de la aleta se lleva a cabo la transferencia de calor por conducción, y en el flujo de fluido se lleva a cabo la transferencia de calor por conducción y convección.

La simulación numérica muestra la distribución de temperaturas en todo el dominio y la interface sólido-fluido es tratada como una interface entre dos volúmenes de control. La base fundamental de todos los códigos de CFD son las ecuaciones de Navier-Stokes.

Todas las aproximaciones tienen un mismo procedimiento básico, que es el siguiente:

- Durante el pre-procesamiento.
 - Se define la geometría del problema.
 - El volumen ocupado por el fluido es dividido en celdas discretas (mallado). La malla puede ser uniforme o no uniforme.
 - Se definen los modelos matemáticos (la física del sistema).
 - Se definen las condiciones de contorno.
- La simulación es iniciada y las ecuaciones se resuelven iterativamente considerando estado permanente.
- Finalmente un post-procesamiento es usado para analizar y visualizar los resultados.

Algunos de los métodos de discretización son; método de volumen finito, método de elemento finito, método de diferencias finitas, etc. De los métodos mencionados, el

método de volumen finito FVM (Finite Volumen Method) por sus siglas en inglés, es una aproximación comúnmente usada en códigos de CFD y es el que se utilizará en este trabajo de tesis.

1.5 OBJETIVO

Simular numéricamente a través de un código de dinámica de fluidos computacional, la interacción de la transferencia de calor por conducción y convección, en una aleta de un material metálico de sección transversal uniforme, inmersa en un flujo de aire. Así como verificar los resultados con expresiones analíticas, tanto en el flujo como en el sólido.

1.5.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Detectar los mecanismos relevantes de la transferencia de calor en la aleta de sección transversal uniforme inmersa en un fluido en movimiento.
- Obtener las expresiones analíticas para la transferencia de calor por conducción dentro de una aleta de sección transversal constante.
- Verificar los resultados de las predicciones del código de CFD con las expresiones analíticas de la aleta.
- Desarrollar simulaciones con diferentes espesores y condiciones de velocidad de la aleta rectangular, para estudiar su efecto en el flujo de calor tanto en la superficie extendida, como en el flujo de fluido.

CAPÍTULO 2

ECUACIONES Y CORRELACIONES DE LA ALETA DE SECCIÓN TRANSVERSAL UNIFORME

En este capítulo se analizarán los procesos implicados en la transferencia de calor de la aleta de sección transversal uniforme, tales como la conducción y convección unidimensional en estado permanente. Las ecuaciones de la distribución de temperaturas en la aleta se obtendrán con el fin de identificar la mejor aproximación del problema en cuestión, posteriormente se analizarán las capas límite de velocidad y térmica para obtener el coeficiente de transferencia de calor por convección de la aleta de área de sección transversal rectangular. Finalmente se mostrarán algunas correlaciones para el cálculo del coeficiente de convección de la aleta de sección transversal circular, y se hablará acerca de la naturaleza del flujo y la importancia del número del Reynolds.

2.1 ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL UNIFORME

Para conocer los modelos matemáticos que rigen el proceso de transferencia de calor a través de la aleta, se requiere hacer un análisis termodinámico por medio del desarrollo de relaciones matemáticas. Las aletas de sección transversal uniforme se dividen en dos; aletas rectangulares y aletas circulares como se muestra en la figura 2.1.

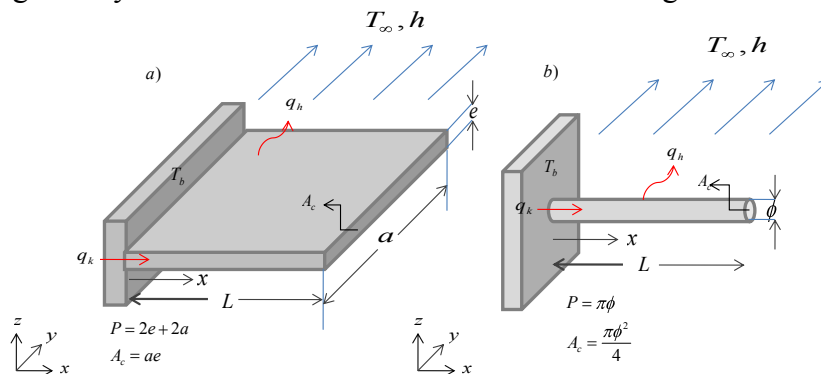


Figura 2.1 Tipos de aleta de área de sección transversal uniforme.

- a) Aleta de área de sección transversal rectangular.
- b) Aleta de área de sección transversal circular.

2.2 CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL EN ESTADO PERMANENTE

La conducción se debe a la existencia de una diferencia de temperaturas en un medio estacionario, ya sea un sólido o un líquido. En la figura 2.2, el medio estacionario es la aleta, la diferencia de temperaturas se da entre la superficie isotérmica y la aleta, es decir $T_1 > T_2$, esto ocasiona que el flujo de calor por conducción se transfiera a través de la superficie de mayor temperatura hacia la superficie de menor temperatura, esta

transferencia de calor a través del área normal A_c determina la dirección de flujo de calor por conducción. En otras palabras el calor es transferido en la dirección de la temperatura decreciente, es decir desde la superficie isotérmica que está a $100\text{ }^\circ\text{C}$ hacia el resto de la aleta cuya temperatura es menor.

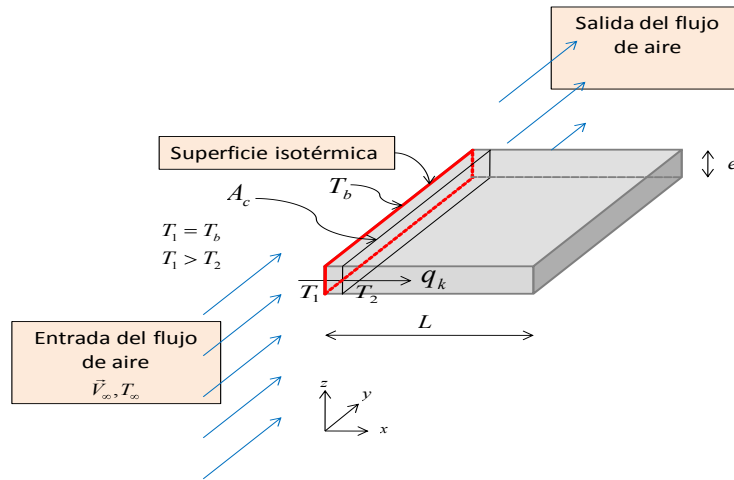


Figura 2.2 Conducción a través de una aleta.

El modelo matemático que describe el proceso de transferencia de calor por conducción unidimensional en estado permanente, se conoce como LEY DE FOURIER y se denota como:

$$q_k'' = -k \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

donde:

$q_k'' [W / m^2]$: Transferencia de calor por conducción por unidad de área o flujo de calor.

$k [W / m \cdot K]$: Coeficiente de conductividad térmica.

$\frac{dT}{dx} [K / m]$: Razón de cambio de temperatura por unidad de longitud en la dirección x .

Esta ecuación solo es válida para una pared unidimensional en cuyo caso el flujo de calor quedaría expresado de la siguiente forma.

$$q_k'' = -k \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) \quad (2.2)$$

donde:

$L [m]$: Longitud de la pared.

$T_2 [K]$: Temperatura en el extremo de la pared.

$T_1 [K]$: Temperatura en la base de la pared.

La transferencia de calor por conducción por unidad de tiempo q_k a través de una pared plana de área A_c es:

$$q_k = q_k'' A_c \quad (2.3)$$

donde:

$q_k[W]$: Transferencia de calor por conducción por unidad de tiempo.

$A_c[m^2]$: Área normal a la dirección del flujo de calor o área transversal.

$q_k''[W/m^2]$: Transferencia de calor por conducción por unidad de área o flujo de calor.

Haciendo un análisis de dimensiones.

$$q_k[W] = q_k''[W/m^2] \cdot A_c[m^2]$$

$$q_k[W] = q_k'' A_c[W]$$

$$q_k[W] = q_k[J/s] = q_k[(N \cdot m)/s]$$

2.3 CONVECCIÓN UNIDIMENSIONAL EN ESTADO PERMANENTE

La convección se debe a la diferencia de temperaturas entre un sólido y un fluido en movimiento. La consecuencia de la interacción del fluido en movimiento sobre el sólido es el desarrollo de una región llamada capa límite, en donde la velocidad varía desde cero en la superficie del sólido, hasta la velocidad del fluido fuera de la capa límite. La diferencia de temperaturas entre el sólido y el fluido tiene como consecuencia el desarrollo de una región del fluido en donde la temperatura variara desde T_s en $z=0$, a la temperatura del fluido T_∞ , esta región es conocida como capa límite térmica y el coeficiente de convección se relaciona con estas capas. El coeficiente de convección se clasifica de acuerdo a la naturaleza del flujo y se divide en convección forzada y libre. La convección forzada se debe al uso de medios externos, como por ejemplo un ventilador. En la convección libre o natural, surgen fuerzas de empuje a partir de diferencias de densidad ocasionadas por diferencias de temperatura en el fluido. En la tabla 2.1, se muestran algunos valores para el coeficiente de convección en flujo forzado y libre.

Proceso	$h[W/m^2K]$
Convección libre	
Gases	2 – 25
Líquidos	50 – 1000
Convección forzada	
Gases	25 – 250
Líquidos	50 – 20000
Convección con cambio de fase	
Ebullición o condensación	2500 – 100000

Tabla 2.1 Valores característicos del coeficiente de transferencia de calor por convección [14].

En la figura 2.3 el sólido es la aleta y el fluido en movimiento es el aire. La base de la aleta está definida como una superficie de temperatura constante, debido a esto se crea una diferencia de temperaturas entre la superficie de la aleta y el flujo de aire, esto significa que $T_s > T_\infty$ lo que ocasiona que el flujo de transferencia de calor por convección se dé desde la superficie del sólido hacia el fluido.

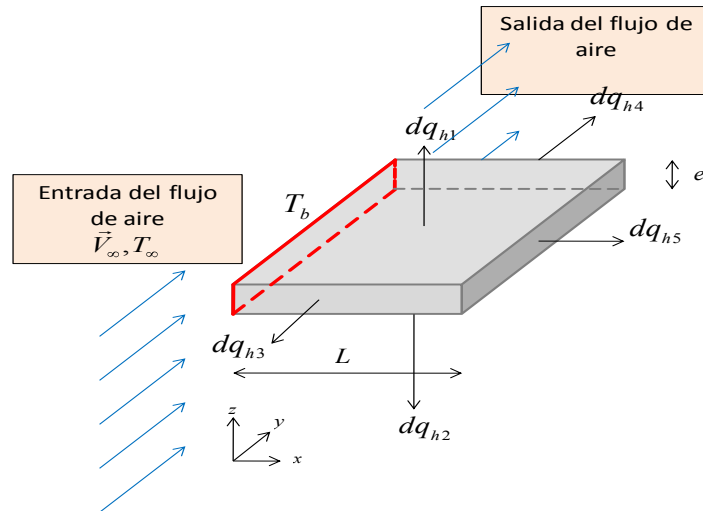


Figura 2.3 Transferencia de calor por convección desde la aleta hacia el flujo de aire.

El modelo matemático que describe el proceso de transferencia de calor por convección unidimensional en estado permanente, se conoce como LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON y se denota como:

$$q_h'' = h(T_s - T_\infty) \quad (2.4)$$

donde:

$q_h'' [W / m^2]$: Transferencia de calor por convección por unidad de área o flujo de calor.

$T_s [K]$: Temperatura de la superficie.

$T_\infty [K]$: Temperatura del fluido.

$h [W / m^2 \cdot K]$: Coeficiente de transferencia de calor por convección.

Esta ecuación solo es válida para una pared unidimensional, en cuyo caso el calor transferido por convección por unidad de tiempo, a través de una pared plana de área A_s , queda expresado de la siguiente forma:

$$q_h = q_h'' A_s \quad (2.5)$$

$$q_h = h A_s (T_s - T_\infty) \quad (2.6)$$

donde:

$q_h [W]$: Transferencia de calor por convección por unidad de tiempo.

$q_h'' [W / m^2]$: Transferencia de calor por convección por unidad de área o flujo de calor.

$h [W / m^2 \cdot K]$: Coeficiente de transferencia de calor por convección.

$A_s [m^2]$: Área de la superficie.

$T_s [K]$: Temperatura de la superficie.

$T_\infty [K]$: Temperatura del fluido.

2.4 DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN LA ALETA DE SECCIÓN TRANSVERSAL UNIFORME

El campo de temperaturas del medio se define como la forma en la que varía la temperatura de la aleta respecto a la posición, dadas las condiciones impuestas a su alrededor. Para determinar la distribución de temperaturas a lo largo de la aleta, lo primero que se debe considerar es cómo se difunde el calor dentro de la aleta, para determinar el modelo matemático que describe este proceso es necesario realizar lo siguiente:

- Definir un volumen de control infinitesimal $V=dx dy dz$.
- Considerar un medio homogéneo, en el cual no hay movimiento de volumen y cuya distribución de temperaturas $T(x,y,z)$, se expresa en coordenadas cartesianas.
- Identificar los procesos de transferencia de calor relevantes en el volumen de control.
- Verificar que se cumpla la ley de conservación de la energía (primera ley).

La figura 2.4a, muestra donde se encuentra definido el volumen de control infinitesimal dentro de la aleta que servirá para determinar el campo de temperaturas, en el volumen de control solo existe transferencia de calor por conducción. La figura 2.4b, muestra en forma esquemática la dirección de flujo de transferencia de calor por conducción, que pasa a través del volumen de control infinitesimal.

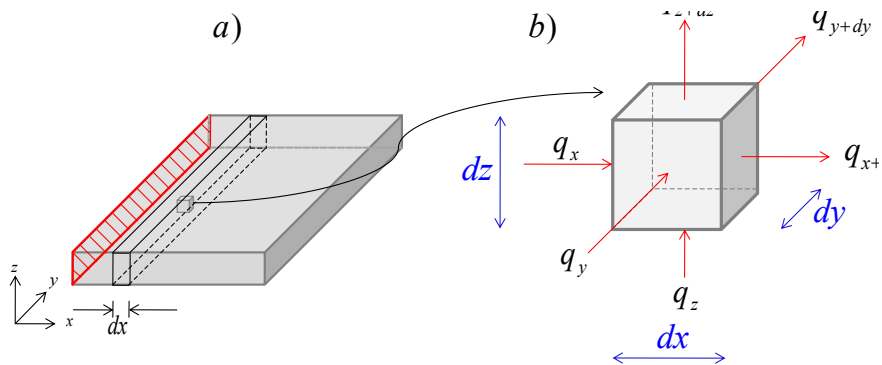


Figura 2.4 Transferencia de calor por conducción a través de un volumen de control infinitesimal.

- Definición de la posición del volumen de control.
- Diagrama de conservación de la energía para el volumen de control.

Aplicando un balance de energía al volumen de control se obtiene:

$$\dot{E}_{entra} + \dot{E}_{genera} = \dot{E}_{almacena} + \dot{E}_{sale} \quad (2.7 a)$$

$$\dot{E}_e + \dot{E}_g = \dot{E}_a + \dot{E}_s \quad (2.7 b)$$

donde:

$\dot{E}_e = q_{kx} + q_{ky} + q_{kz}$: Sumatoria de la transferencia de calor por conducción que entra a través del volumen de control en las direcciones x, y, z .

$\dot{E}_s = q_{kx+dx} + q_{ky+dy} + q_{kz+dz}$: Sumatoria de la transferencia de calor por conducción que sale a través del volumen de control en las direcciones x, y, z .

$\dot{E}_g = \dot{q}dxdydz$: Rapidez de generación de energía por unidad de volumen.

$\dot{E}_a = \rho dxdydz c_p \frac{\partial T}{\partial t}$: Rapidez de cambio temporal de la energía por unidad de volumen.

$\dot{E}_{genera}, \dot{E}_{almacena}$: Se asocian a la masa del sistema.

$\dot{E}_{entra}, \dot{E}_{sale}$: Se asocian a la superficie con el entorno.

Sustituyendo en el balance de energía.

$$q_{kx} + q_{ky} + q_{kz} + \dot{q}dxdydz = \rho dxdydz c_p \frac{\partial T}{\partial t} + q_{kx+dx} + q_{ky+dy} + q_{kz+dz} \quad (2.8)$$

Del desarrollo por series de Taylor a la entrada y a la salida del volumen de control, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_{kx} &= (q_{kx})_0 - \frac{\partial q_{kx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \\ q_{ky} &= (q_{ky})_0 - \frac{\partial q_{ky}}{\partial y} \frac{dy}{2} \\ q_{kz} &= (q_{kz})_0 - \frac{\partial q_{kz}}{\partial z} \frac{dz}{2} \\ q_{kx+dx} &= (q_{kx})_0 + \frac{\partial q_{kx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \\ q_{ky+dy} &= (q_{ky})_0 + \frac{\partial q_{ky}}{\partial y} \frac{dy}{2} \\ q_{kz+dz} &= (q_{kz})_0 + \frac{\partial q_{kz}}{\partial z} \frac{dz}{2} \end{aligned}$$

De la ley de Fourier:

$$\begin{aligned} q_{kx} &= -k \frac{\partial T}{\partial x} dydz \\ q_{ky} &= -k \frac{\partial T}{\partial y} dxdz \\ q_{kz} &= -k \frac{\partial T}{\partial z} dxdy \end{aligned}$$

Sustituyendo en el balance de energía y simplificando, se obtiene la *ecuación general de difusión de calor en coordenadas cartesianas, o ecuación de calor*.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.9)$$

En donde los siguientes términos están en función de las siguientes variables.

$$k = k(T, P)$$

$$c_p = c_p(T)$$

$$\rho = \rho(T)$$

Con las siguientes suposiciones y sustituyendo en la ecuación 2.9, se obtiene:

- Estado permanente.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0 \quad (2.10)$$

- Sin generación de calor.

$$\dot{q} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.11)$$

- Sin variación de temperatura en las direcciones y , z .

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Por lo tanto.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.12)$$

La ecuación 2.12 implica que el flujo de calor es constante en la dirección de la transferencia de calor por conducción por unidad de área.

$$\frac{d^2 q_k}{dx^2} = 0 \quad (2.13)$$

2.4.1 ANÁLISIS DEL ELEMENTO DIFERENCIAL

La figura 2.5 muestra un elemento diferencial ubicado cerca de la base de la aleta. El siguiente paso es hacer un análisis similar al que se hizo para la obtención de la ecuación de difusión de calor, pero enfocado al elemento diferencial.

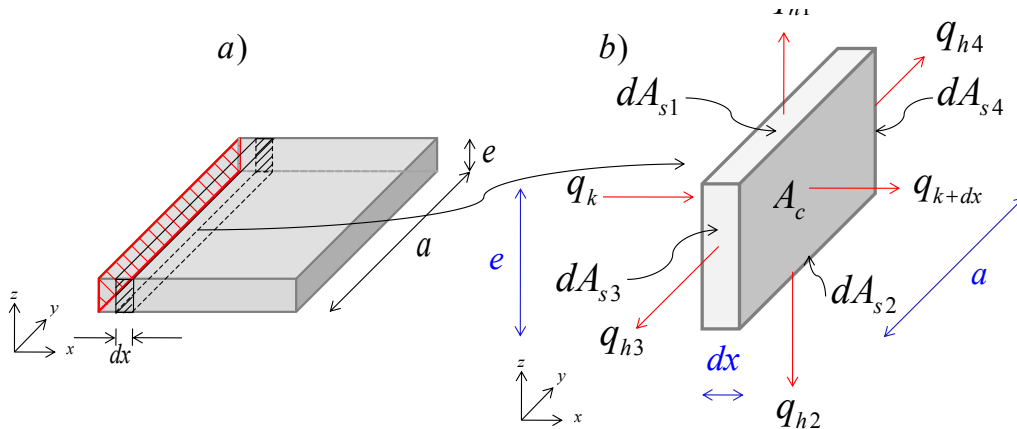


Figura 2.5 Diagrama del flujo de la transferencia de calor en el elemento diferencial.

En el elemento diferencial, figura 2.5b, se distinguen dos tipos de áreas:

- Área normal a la dirección de flujo A_c .
- Área superficial dA_s .

donde:

$$\begin{aligned} dA_{s1} &= dA_{s2} = adx \\ dA_{s3} &= dA_{s4} = edx \\ dA_s &= dA_{s1} + dA_{s2} + dA_{s3} + dA_{s4} \\ dA_s &= dA_{s1} + dA_{s1} + dA_{s3} + dA_{s3} = adx + adx + edx + edx \\ dA_s &= 2dA_{s1} + 2dA_{s3} = 2adx + 2edx \\ dA_s &= 2(dA_{s1} + dA_{s3}) = 2(a + e)dx \end{aligned} \quad (2.14)$$

En cualquier posición a lo largo del eje x , el área superficial del elemento diferencial es igual a su perímetro, ya que son valores muy pequeños que tienden a cero, por lo tanto, el perímetro del elemento diferencial es:

$$P = 2e + 2a = 2(e + a) \quad (2.15)$$

Sustituyendo la ecuación 2.15 en la 2.14

$$dA_s = Pdx \quad (2.16)$$

Cada área superficial tiende a cero, por lo tanto, el calor transferido depende de la posición.

De la figura 2.5 se obtiene:

$$A_c = cte$$

$$dA_s = Pdx$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene:

$$\int_0^{A_s} A_s dx = \int_0^x P dx$$

$$A_s = Px$$

En consecuencia.

$$\frac{dA_c}{dx} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{dA_s}{dx} = P \quad (2.18)$$

2.4.2 BALANCE DE ENERGÍA DEL ELEMENTO DIFERENCIAL

La figura 2.5b muestra en forma esquemática la dirección de flujo de la transferencia de calor por conducción y convección que pasa a través del elemento diferencial.

Aplicando un balance de energía y con las siguientes suposiciones, se obtiene:

1. Conducción unidimensional en la dirección x .
2. Estado permanente. $\dot{E}_a = 0$
3. Conductividad térmica constante.
4. Radiación en la superficie insignificante.
5. Sin generación de calor. $\dot{E}_g = 0$
6. El coeficiente de transferencia de calor por convección es uniforme en toda la superficie de la aleta.

$$\dot{E}_{entra} + \dot{E}_{genera} = \dot{E}_{almacena} + \dot{E}_{sale}$$

$$\dot{E}_e + \dot{E}_g = \dot{E}_a + \dot{E}_s$$

Con base en las suposiciones se pueden eliminar términos en el balance de energía, por lo que el balance quedaría:

$$\dot{E}_e = \dot{E}_s \quad (2.19)$$

donde:

$$\dot{E}_e = q_k = -kA_c \frac{dT}{dx} \quad (2.20)$$

$$\dot{E}_s = q_{k+dx} + dq_{h1} + dq_{h2} + dq_{h3} + dq_{h4} = q_{k+dx} + dq_h \quad (2.21)$$

$$dq_h = dq_{h1} + dq_{h2} + dq_{h3} + dq_{h4} = h dA_s (T_s - T_\infty) \quad (2.22)$$

Del desarrollo por series de Taylor se obtiene:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \quad (2.23)$$

Sustituyendo en el balance de energía.

$$q_k = q_{k+dx} + dq_h \quad (2.24)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.20 a 2.23 en la ecuación 2.24 del balance de energía, se obtiene la **forma general de la ecuación de la energía, para la conducción unidimensional en la dirección x en una superficie extendida, ecuación 2.25.**

$$-kA_c \frac{dT}{dx} = -kA_c \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left(-kA_c \frac{dT}{dx} \right) dx + h dA_s (T_s - T_\infty)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \frac{dT}{dx} - \frac{h}{kA_c} \frac{dA_s}{dx} (T_s - T_\infty) = 0 \quad (2.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.17 y 2.18 en la ecuación 2.25

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c} (T_s - T_\infty) = 0 \quad (2.26)$$

La ecuación 2.26 es una ecuación diferencial de segundo grado no lineal, y representa la **ecuación de la energía, para la conducción unidimensional en la dirección x de una superficie extendida, de área de sección transversal uniforme.** La solución de esta ecuación, se define mediante el siguiente cambio de variable.

- Exceso de temperatura $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ (2.27)

- Proposición una constante $m^2 = \frac{hP}{kA_c}$ (2.28)

Sustituyendo en la ecuación 2.26 se obtiene una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (2.29)$$

La solución general, es solución de la ecuación de la energía para la conducción unidimensional en la dirección x.

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (2.30)$$

Los valores de las constantes C_1 y C_2 se obtienen mediante el análisis de las siguientes condiciones de frontera:

1. Temperatura en la base de la aleta, $x = 0$.

$$\begin{aligned}\theta(x) &= C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \\ \theta(0) &= C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ \theta(0) &= C_1 + C_2 = \theta_b\end{aligned}\tag{2.31}$$

donde:

θ_b = temperatura en la base de la aleta.

2. Temperatura en el extremo de la aleta, $x = L$.

Este caso contempla cuatro diferentes condiciones físicas:

- a. Aleta con convección en el extremo.
- b. Extremo de la aleta aislado o adiabático.
- c. Temperatura establecida en el extremo de la aleta.
- d. Aleta infinita.

2.4.3 ALETA CON CONVECCIÓN EN EL EXTREMO

Haciendo un balance de energía para el elemento diferencial ubicado en el extremo de la aleta de la figura 2.6, se observan las direcciones de los vectores diferenciales de transferencia de calor por convección. Las diferenciales de transferencia de calor por convección de las diferentes superficies en comparación con la diferencial de transferencia de calor por convección en la dirección x son muy pequeñas, por lo que es posible considerarlas despreciables. En el análisis del caso unidimensional sobre la dirección x , solo toma en cuenta la transferencia de calor por conducción y convección en esa dirección.

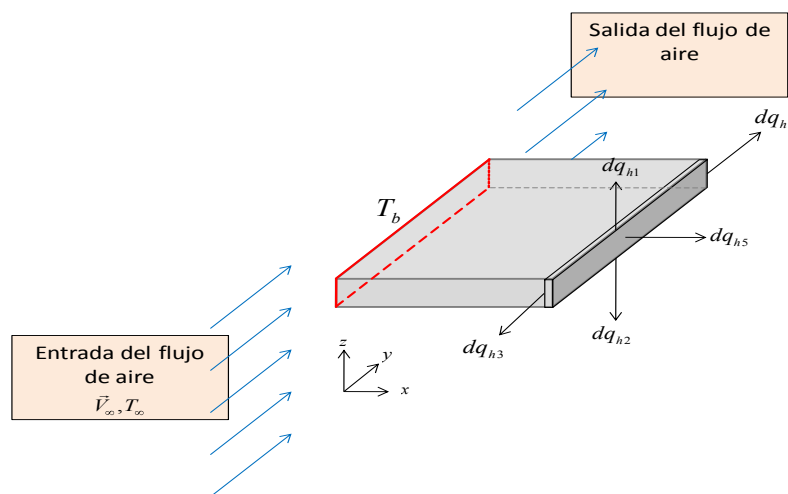


Figura 2.6 Balance de energía sobre el elemento diferencial en el extremo de la aleta.

Sustituyendo la ley de Fourier y la ley del enfriamiento de Newton en el balance de energía, haciendo el cambio de variable de la ecuación 2.27, evaluando en $x = L$ y con las siguientes suposiciones, se obtiene:

- Conducción unidimensional en la dirección x .
- Estado permanente. $\dot{E}_a = 0$
- Conductividad térmica constante.
- Radiación en la superficie insignificante.
- Sin generación de calor. $\dot{E}_g = 0$
- Los diferenciales de transferencia de calor por convección son despreciables.

$$\begin{aligned} \dot{E}_e &= \dot{E}_s \\ -kA_c \frac{dT}{dx} &= hA_c(T(x) - T_\infty) \\ -k \frac{d\theta(x)}{dx} &= h\theta(x) \\ h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) + km(C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Con las ecuaciones 2.30 a 2.32 se obtienen los valores de las constantes C_1 y C_2 .

Factorizando C_1 y C_2 de la ecuación 2.32, se obtiene:

$$C_1(h + km)e^{mL} + C_2(h - km)e^{-mL} = 0 \quad (2.33)$$

Despejando C_1 de 2.31 y sustituyendo en 2.32

$$(\theta_b - C_2)(h + km)e^{mL} + C_2(h - km)e^{-mL} = 0$$

Despejando C_2 .

$$C_2 = \frac{\theta_b(h + km)e^{mL}}{(h + km)e^{mL} - (h - km)e^{-mL}}$$

Desarrollando el denominador, y factorizando h y km .

$$C_2 = \frac{\theta_b(h + km)e^{mL}}{h(e^{mL} - e^{-mL}) + km(e^{mL} + e^{-mL})} \quad (2.34)$$

Sustituyendo 2.34 en la ecuación 2.31, se obtiene el valor de C_1 .

$$C_1 = \theta_b - \left(\frac{\theta_b(h + km)e^{mL}}{h(e^{mL} - e^{-mL}) + km(e^{mL} + e^{-mL})} \right) \quad (2.35)$$

Sustituyendo los valores de C_1 y C_2 en la ecuación 2.30

$$\theta(x) = \left[\frac{\theta_b (h(e^{mL} - e^{-mL}) + km(e^{mL} + e^{-mL}) - \theta_b (h + km)e^{mL})}{h(e^{mL} - e^{-mL}) + km(e^{mL} + e^{-mL})} \right] e^{mx} + \left[\frac{\theta_b (h + km)e^{mL}}{h(e^{mL} - e^{-mL}) + km(e^{mL} + e^{-mL})} \right] e^{-mx}$$

Factorizando θ_b y pasando al lado izquierdo de la igualdad.

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \left[\frac{h(e^{mL} - e^{-mL}) + km(e^{mL} + e^{-mL}) - (h + km)e^{mL}}{h(e^{mL} - e^{-mL}) + km(e^{mL} + e^{-mL})} \right] e^{mx} + \left[\frac{(h + km)e^{mL}}{h(e^{mL} - e^{-mL}) + km(e^{mL} + e^{-mL})} \right] e^{-mx}$$

Desarrollando los quebrados sin eliminar términos.

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{he^{mL}e^{mx} - he^{-mL}e^{mx} + kme^{mL}e^{mx} + kme^{-mL}e^{mx} - he^{mL}e^{-mx} + kme^{mL}e^{-mx} - kme^{-mL}e^{-mx} + he^{mL}e^{-mx}}{h(e^{mL} - e^{-mL}) + km(e^{mL} + e^{-mL})}$$

Factorizando h y km sin eliminar ningún termino, y posteriormente simplificando las exponenciales, se obtiene:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{h e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)} + km e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{h e^{mL} - e^{-mL} + km e^{mL} + e^{-mL}} \quad (2.36)$$

Con base en las identidades del seno y coseno hiperbólico:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2.37)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2.38)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.36, se obtiene:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{h \sinh m(L-x) + km \cosh m(L-x)}{h \sinh mL + km \cosh mL}$$

Multiplicando por (1/km) en el numerador y denominador, finalmente se obtiene la **ecuación de distribución de temperaturas de la aleta, de área de sección transversal uniforme**.

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{(h/km) \sinh m(L-x) + \cosh m(L-x)}{[(h/km) \sinh mL + \cosh mL]} \quad (2.39)$$

donde:

$\theta(x) = T(x) - T_\infty$: Exceso de temperatura.

$\theta_b = T_b - T_\infty$: Temperatura de la base. (2.40)

$T(x)$: Temperatura de la aleta en cualquier posición sobre el eje x .

T_b : Temperatura de la superficie isotérmica.

T_∞ : Temperatura del fluido.

h : Coeficiente de transferencia de calor por convección.

k : Coeficiente de transferencia de calor por conducción.

m : Constante de cambio de variable.

L : Longitud.

$\frac{\theta(x)}{\theta_b}$: Distribución de temperaturas dentro de la aleta.

Sustituyendo las ecuaciones 2.27 y 2.40 en la ecuación 2.39, se obtiene la temperatura de la aleta en cualquier posición sobre el eje x , medida desde la base hasta su extremo final, bajo las condiciones de contorno a las que se encuentra expuesta. Lo que da como resultado, la **ecuación de la temperatura de la aleta de área de sección transversal uniforme, sobre el eje x** .

$$T(x) = \left(\frac{(h/km) \sinh m(L-x) + \cosh m(L-x)}{[(h/km) \sinh mL + \cosh mL]} \right) T_b - T_\infty + T_\infty \quad (2.41)$$

Con base en la ecuación 2.39, se obtiene el calor total transferido por la aleta (q_f) aplicando la ley de Fourier a la base de la aleta.

$$q_f = q_b = -kA_c \frac{dT}{dx} = -kA_c \frac{d\theta}{dx} \quad (2.42)$$

El calor total transferido se obtiene despejando $\theta(x)$ de la distribución de temperatura, (ecuación 2.39) y sustituyendo en la ecuación 2.42. Al resolver las derivadas y sustituyendo la constante m de la ecuación 2.28, se obtiene finalmente:

$$q_f = \theta_b \sqrt{hPkA_c} \left[\frac{\sinh mL + (h/km) \cosh mL}{[(h/km) \sinh mL + \cosh mL]} \right] \quad (2.43)$$

De la ecuación de la temperatura de la aleta con convección en el extremo, es importante hacer notar, que el área de la sección transversal del extremo de la aleta es una región muy pequeña del área superficial total. Un método que existe para tomar en cuenta la pérdida de calor por convección en el extremo, es remplazar la longitud L de la aleta por una longitud corregida, como se muestra en la figura 2.7.

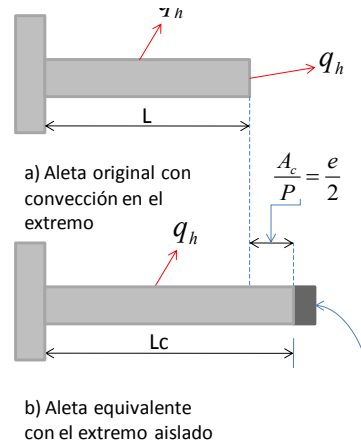


Figura 2.7 Longitud corregida.

La longitud corregida es de la siguiente forma:

$$\text{Longitud corregida de la aleta} \quad L_c = L + \frac{A_c}{P} \quad (2.44)$$

donde:

A_c : Área de la sección transversal.

P: Perímetro de la sección transversal de la aleta.

L: Longitud de la aleta.

L_c : Longitud corregida.

Simplificando la ecuación de la longitud corregida de la aleta, teniendo en cuenta que el valor del perímetro se puede expresar como, $P = 2a$ y $A_c = ea$, se obtiene:

$$L_{c,\text{aleta rectangular}} = L + \frac{e}{2} \quad (2.45)$$

Para el caso del cilindro, se obtiene:

$$L_{c,\text{aleta cilíndrica}} = L + \frac{\phi}{4} \quad (2.46)$$

donde:

ϕ : Diámetro del cilindro.

2.4.4 EXTREMO DE LA ALETA AISLADO O ADIABÁTICO

Suponiendo que la pérdida de calor por convección es insignificante en la punta de la aleta, el extremo se trata como adiabático.

$$\left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.47)$$

Sustituyendo la ecuación 2.30 en la ecuación 2.47, resolviendo la derivada y dividiendo entre “m”, se obtiene:

$$C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = 0 \quad (2.48)$$

Despejando C_1 de la ecuación 2.31 y sustituyendo en la ecuación 2.48, se obtienen los valores de C_1 y C_2 .

$$C_1 = \frac{\theta_b (e^{mL} + e^{-mL}) - \theta_b e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad (2.49)$$

$$C_2 = \frac{\theta_b e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad (2.50)$$

Sustituyendo los valores de C_1 y C_2 en la ecuación 2.30, finalmente se obtiene:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{\text{Cosh}(m(L-x))}{\text{Cosh}(mL)} \quad (2.51)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.27 y 2.40 en la ecuación 2.51, se obtiene:

$$T(x) = \left(\frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(mL)} \right) T_b - T_\infty + T_\infty \quad (2.52)$$

El calor total transferido se obtiene del mismo modo que en el caso A, pero sustituyendo la ecuación 2.51 en la ecuación 2.42, con lo que se obtiene:

$$q_f = \theta_b \sqrt{hPkA_c} \text{Tanh}(mL) \quad (2.53)$$

2.4.5 TEMPERATURA ESTABLECIDA EN EL EXTREMO DE LA ALETA

El caso C es similar al anterior y se resuelve de la misma manera, pero la condición de frontera establece lo siguiente:

$$\left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=L} = \theta_L \quad (2.54)$$

Con lo que se obtiene:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{(\theta_L / \theta_b) \text{Senh}(mx) + \text{Senh}(m(L-x))}{\text{Senh}(mL)} \quad (2.55)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.27 y 2.40 en la ecuación 2.55, se obtiene:

$$T(x) = \left[\frac{\left(\frac{T_L - T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \text{Senh}(mx) + \text{Senh}(m(L-x))}{\text{Senh}(mL)} \right] T_b - T_\infty + T_\infty \quad (2.56)$$

El calor total transferido es:

$$q_f = \theta_b \sqrt{hPkA_c} \left[\frac{\text{Cosh}(mL) - (\theta_L / \theta_b)}{\text{Senh}(mL)} \right] \quad (2.57)$$

2.4.6 ALETA INFINITA

Este caso es el de una aleta infinita o muy larga y es una extensión del caso C, en donde las condiciones de frontera establecen que cuando $L \rightarrow \infty$, $\theta_L \rightarrow 0$.

$$\theta(L) = T(L) - T_\infty = 0 \quad (2.58)$$

Es decir, en el extremo de la aleta (en el infinito) su temperatura será igual a la del medio, y por lo tanto θ tenderá a cero.

Utilizando la ecuación 2.55 en forma exponencial y sustituyendo las condiciones de frontera, se obtiene:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = e^{-mx} \quad (2.59)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.27 y 2.40 en la ecuación 2.59, se obtiene:

$$T(x) = e^{-mx} T_b - T_\infty + T_\infty \quad (2.60)$$

El calor total transferido es:

$$q_f = \theta_b \sqrt{hPkA_c} \quad (2.61)$$

De las cuatro diferentes condiciones físicas establecidas en el extremo de la aleta, la mejor aproximación para el problema que se pretende resolver, es el de la aleta con convección en el extremo. En la solución de este problema, es necesario conocer el coeficiente de transferencia de calor por convección, pero para determinar éste coeficiente es necesario comprender la relación que existe entre el flujo y la aleta.

2.5 CARACTERÍSTICAS DEL FLUJO

En la obtención del coeficiente de transferencia de calor por convección, primero se debe determinar si la capa límite es laminar o turbulenta, ya que los coeficientes de fricción y convección dependen del tipo de flujo. La figura 2.8, muestra tres zonas dentro de la capa límite, que dependen de las condiciones del flujo. Al inicio de la aleta

se observa que el flujo es de tipo laminar, por lo que el movimiento del fluido es ordenado y es posible identificar líneas de flujo paralelas al eje y .

En la parte posterior, se observa que el flujo es de tipo turbulento, se caracteriza por fluctuaciones de velocidad, estas fluctuaciones aumentan la transferencia de momentum y energía, y en consecuencia, aumenta la fricción en la superficie de la placa así como la transferencia de calor por convección. La zona de transición está ligada a los dos tipos de flujo, es decir, partiendo desde la base de la placa en $y = 0$, la capa límite que se forma es inicialmente laminar, pero en cuanto la distancia crece hasta llegar a $y = y_c$, pequeñas perturbaciones comienzan a amplificarse dando origen a la zona de transición. Esta zona, no es más que la conversión de un flujo laminar a un flujo turbulento.

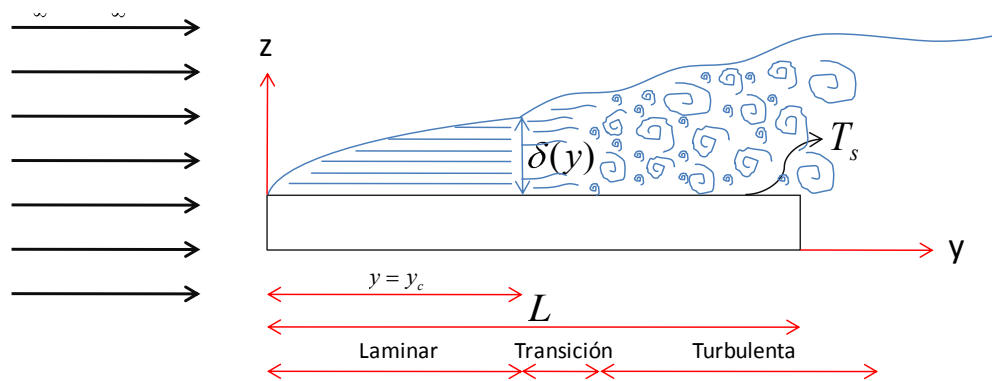


Figura 2.8 Capa límite mezclada.

La posición a la cuál comienza la zona de transición se determina mediante el número de Reynolds crítico, que es el valor de Re_y en el cuál comienza la transición. En el caso de flujo laminar sobre una placa plana Re_y varía de 10^5 a 3×10^6 , dependiendo de la aspereza de la superficie de la placa y del nivel de turbulencia del flujo libre. Un valor representativo del número de Reynolds crítico usado muy a menudo es:

$$Re_{y,c} = \frac{\rho V_{\infty} y_c}{\mu} = 5 \times 10^5$$

2.6 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN

El balance de energía del elemento diferencial en la sección 2.4.2, utiliza el concepto de convección como una condición de frontera que sirve para describir la conducción a través de la aleta de área de sección transversal uniforme. La transferencia de calor por convección implica el flujo de energía entre una superficie y un flujo de fluido, que a demás es afectado por la geometría de la superficie y las condiciones de contorno, esto tiene como consecuencia que el coeficiente de convección para la aleta rectangular sea distinto del coeficiente de convección del cilindro que resulta más difícil de calcular, por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos o experimentales para determinar su coeficiente de convección. La geometría de la aleta rectangular es la misma que la de la placa plana aunque ambas se diferencian por las dimensiones y muy específicamente en el espesor. El estudio de la transferencia de calor por convección es el mismo para la

aleta rectangular y para la placa plana, por lo que los modelos analíticos de flujo laminar sobre una placa plana se aplican a la aleta rectangular.

2.6.1 PLACA PLANA

La figura 2.9 muestra diferentes puntos sobre la superficie de la placa, en un punto cercano a la base en $y = L_m$, el coeficiente local de transferencia de calor por convección tendrán un valor h_m en ese punto, al aumentar la distancia en $y = L_n$ el coeficiente local de convección cambiara a un valor h_n , finalmente en la posición $y = L_t$ se tendrá un valor del coeficiente local de convección h_t . En otras palabras el coeficiente de transferencia de calor por convección varía con el aumento de la longitud de la placa plana que a su vez influye en la capa límite.

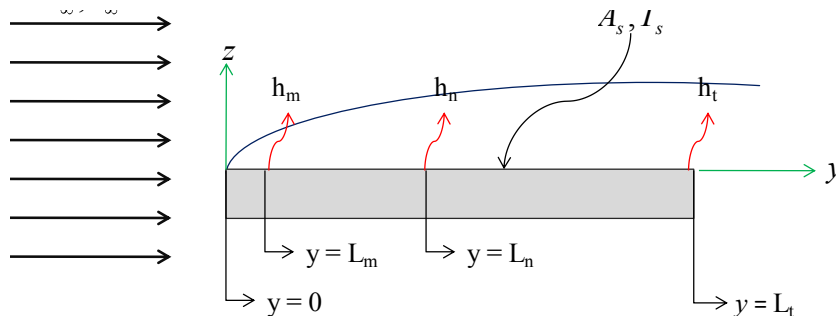


Figura 2.9 Transferencia de calor por convección entre la placa plana y el flujo de aire.

Debido a que el coeficiente de convección varía con la longitud, es necesario un valor representativo del coeficiente de convección h , es decir un coeficiente de convección promedio \bar{h} sobre la superficie total de la placa plana A_s .

$$q_h = \bar{h}A_s(T_s - T_\infty) \quad (2.62)$$

Tanto h como \bar{h} promedio no son conocidos y el problema se complica, ahora se tiene un coeficiente de convección promedio que también es necesario calcular. El flujo de calor q_h'' y el coeficiente de convección h varían localmente a lo largo de la superficie de la placa plana. La transferencia de calor total q_h se obtiene integrando el flujo local de calor (ecuación 2.5) sobre la superficie total de la placa plana A_s e igualando con la ecuación 2.62, posteriormente debido a que el coeficiente de convección varía al incrementarse la distancia y , el área superficial local se sustituye por la longitud transversal, reduciendo la ecuación y relacionando los coeficientes de convección promedio y local, por una ecuación de la forma:

$$\bar{h} = \frac{1}{L_t} \int_0^{L_t} h dy \quad (2.63)$$

L_t representa la longitud transversal total, que se mide desde el inicio de la aleta, hasta su extremo sobre el eje y .

Los coeficientes de convección promedio y local dependen de la geometría de la aleta, de las propiedades y características del flujo de aire, estas variables independientes

producen un fenómeno llamado capa límite que determina el coeficiente de transferencia de calor por convección.

2.6.2 CAPA LÍMITE DE VELOCIDAD

La figura 2.10 muestra una placa plana horizontal fija, inmersa en el flujo de aire. La velocidad del flujo de aire es constante y unidireccional.

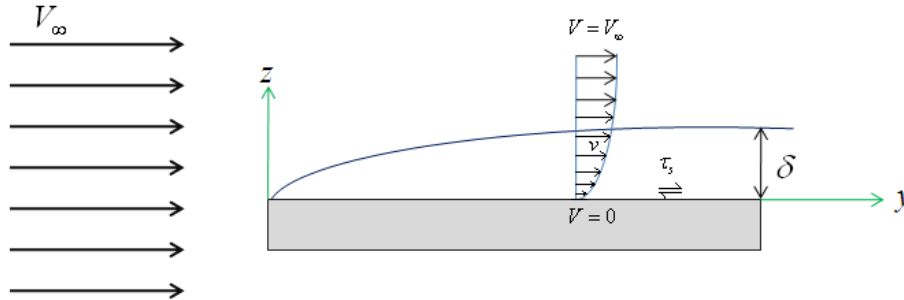


Figura 2.10 Capa límite hidrodinámica o de velocidad

La capa límite de velocidad o hidrodinámica depende de la longitud de la placa plana en la dirección de flujo del fluido, por lo tanto, la capa límite de velocidad es una función δ (y) y se caracteriza por la presencia de gradientes de velocidad y esfuerzos cortantes τ_s , a demás del coeficiente de fricción C_f .

donde:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} \quad (2.64)$$

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (2.65)$$

A partir del desarrollo de las ecuaciones de continuidad y de momentum en forma integral, ecuaciones 2.66 y 2.67 respectivamente, para un sistema de coordenadas cartesiano con $\mu = \text{constante}$ y suponiendo fluido incompresible se obtienen las ecuaciones de continuidad en forma diferencial, ecuación 2.68 y las ecuaciones de momentum en forma diferencial, ecuaciones 2.69 x, 2.69 y, 2.69 z, para la placa plana en un sistema de coordenadas cartesiano.

Más adelante se presentará la deducción de estas ecuaciones.

Ecuación de continuidad en forma integral.

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \int \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.66)$$

Ecuación de momentum en forma integral.

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{v} \rho dV + \int \bar{v} \rho \bar{v} \cdot d\vec{A} = \sum \vec{F} \quad (2.67)$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.68)$$

Ecuaciones de momentum en forma diferencial.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.69 x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.69 y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.69 z)$$

Haciendo las siguientes suposiciones con el fin de eliminar términos en las ecuaciones de balance, se obtiene la ecuación de continuidad, ecuación 2.70, y las ecuaciones de momentum de la capa límite de velocidad, ecuaciones 2.71 y 2.72.

1. Fluido incompresible ($\rho, \nu = \text{ctes}$).
2. Flujo estacionario (variables $\neq f(t)$).
3. Flujo totalmente desarrollado ($\frac{\partial}{\partial y} = 0$).
4. Flujo bidimensional ($u = 0, \frac{\partial}{\partial x} = 0$).
5. Fuerzas de cuerpo en z
6. Flujo laminar $\nu = 0$
7. En la capa límite la presión no varía en la dirección normal a la superficie ($\frac{\partial P}{\partial z} = 0$).

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.70)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (2.72)$$

2.6.3 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA CAPA LÍMITE DE VELOCIDAD

Existen parámetros de similitud que resultan de normalizar las ecuaciones, estos parámetros permiten aplicar los resultados obtenidos para una superficie a superficies geoméricamente similares, con condiciones de entorno diferentes. Al normalizar las ecuaciones 2.70 y 2.71, se obtienen las ecuaciones de continuidad y momento de la capa límite de velocidad en forma adimensional, ecuaciones 2.73 y 2.74 respectivamente.

$$\frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (2.73)$$

$$v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{\nu}{VL} \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \quad (2.74)$$

De la ecuación 2.74 se reconoce un grupo adimensional, cuyo recíproco es llamado número de Reynolds.

$$\text{Re}_L = \frac{VL}{\nu} = \frac{\rho VL}{\mu} \quad (2.75)$$

donde:

Re_L : Número de Reynolds.

V: Velocidad del fluido.

L: Longitud de la placa o longitud característica.

ν : Viscosidad cinemática.

μ : Viscosidad dinámica.

ρ : Densidad del fluido.

Por lo que la ecuación 2.74 se reduce a:

$$v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \quad (2.76)$$

El esfuerzo cortante normalizado, se reduce a:

$$\tau_s = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \left(\frac{\mu V}{L} \right) \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} \quad (2.77)$$

El coeficiente de fricción normalizado, se reduce a:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho \left(\frac{V_\infty^2}{2} \right)} = \frac{2}{\text{Re}_L} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} \quad (2.78)$$

2.6.4 SOLUCIÓN DE BLASIUS PARA LAS ECUACIONES DE CAPA LÍMITE DE VELOCIDAD

Las ecuaciones de la capa límite obtenidas, ecuaciones 2.70, 2.71 y 2.72 son un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales no lineales, las cuales no se pueden resolver. Una forma de aproximarse a la solución es simplificando las ecuaciones de manera que se puedan resolver por algún otro método, por ejemplo, expansión en series, integración numérica o algún método numérico como Runge-Kutta.

Suponiendo la existencia de una función de corriente $\Psi(y, z)$, en la que las componentes de velocidad se definen como:

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2.79)$$

$$w = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.80)$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} = 0 \quad (2.81)$$

La cual se satisface automáticamente y ya no es necesaria.

Sustituyendo v y w en función de Ψ , en la ecuación de conservación de momentum, se obtiene.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} \quad (2.82)$$

Para resolver esta ecuación, se definen nuevas variables f y η , variables dependiente e independiente respectivamente, tal que:

$$\eta = \frac{z}{y^{1/2}} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu}} \quad (2.83)$$

$$f(\eta) = \frac{\Psi}{\sqrt{\nu V_\infty y}} = \frac{\Psi}{V_\infty \sqrt{\frac{\nu y}{V_\infty}}} \quad (2.84)$$

La ecuación de Blasius tiene un factor dos en uno de sus términos, por lo que si se introduce este factor en las variables, es posible simplificar el factor dos de la ecuación original de Blasius, por lo que las variables quedarían:

$$\eta = \frac{z}{y^{1/2}} \sqrt{\frac{V_\infty}{2\nu}} \quad (2.85)$$

$$f(\eta) = \frac{\Psi}{\sqrt{2\nu V_\infty y}} = \frac{\Psi}{V_\infty \sqrt{\frac{2\nu y}{V_\infty}}} \quad (2.86)$$

El uso de estas variables reduce la ecuación diferencial parcial, a una ecuación diferencial ordinaria. La solución de Blasius es una solución de similitud, donde η es una variable adimensional que combina las variables y y z en una sola.

$$\eta = \frac{z}{y^m} \quad (2.87)$$

Como la capa límite crece con respecto a la distancia y , el perfil de velocidad v/V_∞ permanece geoméricamente similar. La forma funcional de este perfil es:

$$\frac{v}{V_\infty} = \Phi\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (2.88)$$

Suponiendo que el espesor de capa límite δ varía de la forma:

$$\left(\frac{\nu y}{V_\infty}\right)^{1/2} \quad (2.89)$$

Se obtiene:

$$\frac{v}{V_\infty} = \Phi(\eta) \quad (2.90)$$

De este modo, el perfil de velocidad queda determinado por la variable de similitud η , que depende de y y z .

Resolviendo las derivadas de Ψ con respecto a y y z , en términos de las derivadas de f y η , se obtiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \sqrt{2\nu V_\infty y} \frac{df(\eta)}{d\eta} \frac{1}{\sqrt{2\nu y}} = V_\infty \frac{df(\eta)}{d\eta} \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \sqrt{2\nu V_\infty y} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + f(\eta) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu V_\infty}{y}} = \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{2y}} \left[-\eta \frac{df(\eta)}{d\eta} + f(\eta) \right] \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{V_\infty}{2y} \eta \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} \quad (2.93)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} = V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{2\nu y}} \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{V_\infty^2}{2\nu y} \frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} \quad (2.95)$$

Sustituyendo y simplificando, se obtiene finalmente:

$$\frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} + f(\eta) \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} = 0 \quad (2.96)$$

La solución original de Blasius con el factor dos, es de la forma:

$$2 \frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} + f(\eta) \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} = 0 \quad (2.97)$$

De esta manera la solución de la capa límite hidrodinámica se reduce a resolver una ecuación diferencial ordinaria, de tercer orden, no lineal. Las condiciones de frontera son:

$$v(y, 0) = w(y, 0) = 0 \quad \text{y} \quad v(y, \infty) = V_\infty$$

o, en términos de las variables de similitud.

$$\left. \frac{df(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = f(0) = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{df(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\infty} = 1$$

La solución por integración numérica de la ecuación 2.97, se muestra en la tabla 2.2.

$\eta = z \sqrt{\frac{V_\infty}{2\nu y}}$	$f(\eta)$	$\frac{df(\eta)}{d\eta} = \frac{v}{V_\infty}$	$\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2}$
0	0	0	0.332
0.4	0.027	0.133	0.331
0.8	0.106	0.265	0.327
1.2	0.238	0.394	0.317
1.6	0.42	0.517	0.297
2	0.65	0.63	0.267
2.4	0.922	0.729	0.228
2.8	1.231	0.812	0.184
3.2	1.569	0.876	0.139
3.6	1.93	0.923	0.098
4	2.306	0.956	0.064
4.4	2.692	0.976	0.039
4.8	3.085	0.988	0.022
5.2	3.482	0.994	0.011
5.6	3.88	0.997	0.005
6	4.28	0.999	0.002
6.4	4.679	1	0.001
6.8	5.079	1	0

Tabla 2.2 Solución por integración numérica de las funciones de la capa límite laminar para la placa plana [14].

El espesor de capa límite δ se define como la distancia z , a la cual la velocidad horizontal v tiene un valor de $0.99V_\infty$. En la solución numérica de Blasius, esta relación

se cumple para $\eta = 5$, sustituyendo éste valor en la ecuación 2.83, se obtiene el espesor de la capa límite en la ubicación y .

$$\delta_y = \frac{5}{\sqrt{\frac{V_\infty}{\nu y}}} = \frac{5y}{\sqrt{\text{Re}_y}} \quad \text{Re}_y < 5 \times 10^5 \quad (2.98)$$

De la ecuación 2.98, se observa que al aumentar y y ν , el espesor de capa límite δ_y aumenta. Al aumentar V_∞ , el espesor de capa límite δ_y disminuye, esto quiere decir que si la velocidad de flujo es elevada, la capa límite será más delgada.

De las ecuaciones 2.91 a 2.95, el factor dos introducido en las variables adimensionales solo aparece en las ecuaciones 2.94 y 2.95, mientras que las demás ecuaciones permanecen intactas. La forma original de las ecuaciones 2.94 y 2.95, es sin el factor dos. De la ecuación 2.65 y 2.94, el esfuerzo cortante de la pared se puede expresar como:

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \mu \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \mu V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu y}} \left. \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0} \quad (2.99)$$

De la tabla 2.2, se observa que el valor de la segunda derivada de la función $f(\eta)$ evaluada en $\eta = 0$ es 0.332. Sustituyendo este valor en la ecuación 2.99, se obtiene:

$$\tau_s = \left(V_\infty \sqrt{\frac{\rho \mu V_\infty}{y}} \right) 0.332 \quad (2.100)$$

Sustituyendo la ecuación 2.100 en la ecuación 2.64, se obtiene el coeficiente de fricción local en la ubicación y .

$$C_{f,y} \equiv \frac{\tau_{s,y}}{\frac{\rho V_\infty^2}{2}} = \frac{0.332 V_\infty \sqrt{\frac{\rho \mu V_\infty}{y}}}{\frac{\rho V_\infty^2}{2}} = 0.664 \text{Re}_y^{-1/2} \quad \text{Re}_y < 5 \times 10^5 \quad (2.101)$$

2.6.5 ESPESOR DE DESPLAZAMIENTO

El espesor de desplazamiento δ^* , es el grosor de una capa que no tiene velocidad y que tiene el mismo flujo másico que la capa límite. Este espesor mide la distancia a la cual el flujo uniforme es desplazado.

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v}{v_\infty} \right) dz \quad (2.102)$$

En la figura 2.11 se observa que la distancia Z , es la suma de la capa límite y el espesor de desplazamiento.

$$Z = \delta + \delta^* \quad (2.103)$$

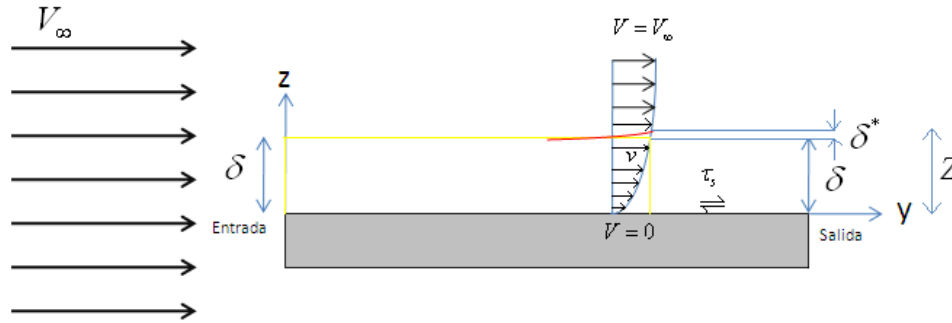


Figura 2.11 Espesor de desplazamiento.

2.6.6 ESPESOR DE MOMENTUM

Es el espesor de una corriente uniforme que tiene el mismo flujo de momentum que la capa límite.

$$\theta = \int_0^{\delta} \left[\frac{v}{v_{\infty}} \left(1 - \frac{v}{v_{\infty}} \right) \right] dz \quad (2.104)$$

Otra manera de definir el espesor de capa límite, es por medio de la razón entre el espesor de desplazamiento y el espesor de momentum.

$$\delta = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (2.105)$$

2.6.7 CAPA LÍMITE TÉRMICA

La figura 2.12 muestra una placa plana horizontal fija con una temperatura superficial T_s , inmersa en un flujo de aire de velocidad y temperatura V_{∞} , T_{∞} respectivamente. La capa límite térmica depende de la longitud de la placa plana en la dirección de flujo del fluido, por lo tanto, la capa límite térmica es una función $\delta t(z)$, y se caracteriza por la presencia de diferencias de temperatura y la transferencia de calor.

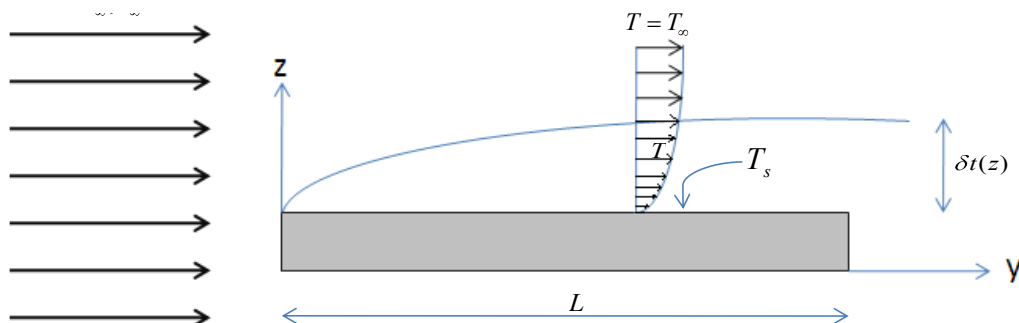


Figura 2.12 Capa límite térmica.

Un parámetro importante de esta capa límite es el coeficiente de transferencia de calor por convección h , ecuación 2.106. Esta ecuación resulta de suponer que en la superficie de la placa plana, la velocidad del flujo de aire es cero, por lo que el fluido no se mueve

y la transferencia de calor en la superficie ocurre por conducción. El flujo de calor local \dot{q}_s se obtiene mediante la ley de Fourier, a partir de la base de la aleta en $y = 0$, hasta el extremo de la aleta en $y = L$ y evaluado en $z = 0$, ecuación 2.107.

$$h = \frac{k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0}}{T_s - T_\infty} \quad (2.106)$$

$$\dot{q}_s = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (2.107)$$

A partir de la ecuación de conservación de energía en forma integral, ecuación 2.108, se obtiene la ecuación de energía en forma diferencial de la capa límite térmica para un sistema de coordenadas cartesiano, ecuación 2.109.

Ecuación de conservación de energía en forma integral.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int e \rho dV + \int e \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (2.108)$$

Ecuación de conservación de energía en forma diferencial.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.109)$$

Reescribiendo la ecuación 2.109 y haciendo un cambio de variable, se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.110)$$

Aplicando las mismas condiciones que en el caso de la ecuación de continuidad y momento para eliminar términos, se obtiene la ecuación 2.111.

$$v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.111)$$

El término $\alpha [m^2 / s]$, es una propiedad denominada difusividad térmica, y es la razón entre la conductividad térmica k que es una propiedad de transporte, y la capacidad térmica volumétrica ρC_p , que es el producto de la densidad y el calor específicos, que son propiedades termodinámicas y su producto mide la capacidad del material para almacenar energía.

2.6.8 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAPA LÍMITE TÉRMICA

El concepto de normalización de las ecuaciones de la capa límite de velocidad es el mismo para el de la capa límite térmica. Al normalizar la ecuación 2.111, se obtiene la ecuación energía de la capa límite térmica en forma adimensional, ecuación 2.112

$$v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{\alpha}{VL} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \quad (2.112)$$

En la ecuación 2.112, se reconoce un grupo adimensional que mediante algunas manipulaciones algebraicas, resulta en la obtención de un cociente cuyo recíproco es llamado número de Prandtl. Este número es un valor que describe el crecimiento relativo de las capas límite de velocidad y térmica.

$$\frac{\alpha}{VL} = \left(\frac{v}{VL} \right) \left(\frac{\alpha}{v} \right) = \text{Re}_L^{-1} \left(\frac{\alpha}{v} \right)$$

$$\text{Pr} = \frac{v}{\alpha} \quad (2.113)$$

donde:

Pr: Número de Prandtl.
 v: Viscosidad cinemática.
 α: Difusividad térmica.

Por lo que la ecuación 2.112 se reduce a:

$$v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \quad (2.114)$$

El coeficiente de convección normalizado, se reduce a:

$$h = - \frac{k_f}{L} \frac{T_\infty - T_s}{T_s - T_\infty} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Bigg|_{z^*=0} = \frac{k_f}{L} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Bigg|_{z^*=0} \quad (2.115)$$

Esta expresión implica la definición de un parámetro adimensional dependiente, denominado número de Nusselt.

$$\text{Nu} = \frac{hL}{k} = \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Bigg|_{z^*=0} \quad (2.116)$$

Al contar con la solución de la ecuación de momentum que es independiente de la ecuación de la energía, ecuación 2.111. La forma en la que se resuelve esta ecuación es introduciendo una temperatura adimensional de la forma.

$$T^* = \left[\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} \right]$$

De la misma forma que en la solución de Blasius, se supone una solución de similitud de la forma.

$$T^* = T^*(\eta)$$

Con lo que la ecuación 2.111 se reduce a:

$$\frac{d^2 T^*(\eta)}{d\eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} f(\eta) \frac{dT^*(\eta)}{d\eta} = 0 \quad (2.117)$$

De esta manera la solución de la capa límite térmica se reduce a resolver una ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden, no lineal. Las condiciones de frontera son:

$$T^*(0) = 0 \text{ y } T^*(\infty) = 1$$

La ecuación 2.117, se resuelve por integración numérica para diferentes valores del número de Prandtl. Esta solución tiene como consecuencia que para $\text{Pr} \geq 0.6$, los resultados del gradiente de temperaturas en la superficie se correlacionan de la siguiente manera:

$$\left. \frac{dT^*(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0.332 \text{Pr}^{1/3} \quad (2.118)$$

Expresando el coeficiente de convección local de la siguiente forma:

$$h_y = \frac{\dot{q}_y}{T_s - T_\infty} = - \frac{T_\infty - T_s}{T_s - T_\infty} k \left. \frac{\partial T^*}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (2.119)$$

$$h_y = k \left(\frac{V_\infty}{\nu y} \right)^{1/2} \left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (2.120)$$

Se obtiene que el número de Nusselt local en la ubicación y , es de la forma:

$$Nu_y = \frac{h_y y}{k} = 0.332 \text{Re}_y^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{Pr} > 0.7 \quad (2.121)$$

La razón de los espesores de la capa límite térmica es:

$$\frac{\delta}{\delta_t} \approx \text{Pr}^{1/3} \quad (2.122)$$

El caso general para la relación de espesores de las capas límite laminares es:

$$\frac{\delta}{\delta_t} \approx \text{Pr}^n \quad (2.123)$$

En la relación 2.123 n es un exponente positivo, en el que para el caso de un gas el número de Prandtl debe estar en el rango de 0.7 a 1, como se muestra en la tabla 2.3. De esta misma relación en capas límites laminares se ha obtenido que los espesores de las capas límite de velocidad y temperatura son aproximadamente iguales para el caso de un gas $\delta \approx \delta_t$.

Fluido	Pr
Metales líquidos	0.004 – 0.030
Gases	0.7 – 1
Agua	1.7 – 13.7
Fluidos orgánicos ligeros	5 – 50
Aceites	50 – 100,000
Glicerina	2,000 – 100,000

Tabla 2.3 Rangos del número de Prandtl para diferentes fluidos [13].

Mediante la solución integral para la capa límite térmica [15] cuando la placa se calienta en toda su longitud:

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1.026} \text{Pr}^{-1/3} \quad (2.124)$$

De la solución numérica para diferentes números de Prandtl, el espesor de la capa límite térmica considerando la superficie de la placa plana como isotérmica es:

$$\delta_t = \frac{\delta}{\text{Pr}^{1/3}} = \frac{5}{\text{Pr}^{1/3} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu y}}} = \frac{5y}{\text{Pr}^{1/3} \sqrt{\text{Re}_y}} \quad (2.125)$$

Las ecuaciones 2.124 y 2.15 sólo son válidas para flujo laminar sobre una placa plana isotérmica. Asimismo el efecto de las propiedades se evalúan en la temperatura de película definida como $T_f = (T_s + T_\infty) / 2$.

En la capa límite laminar para valores de $0 < y < y_c$, donde y_c es la distancia a la cual comienza la transición, las ecuaciones 2.101 y 2.121 implican que $\tau_{s,y}$ y h_y son en principio, infinitos en el inicio de la placa y disminuyen como $y^{-1/2}$ en la dirección de flujo. A partir de los resultados locales, se determinan los parámetros promedio de capa límite. El coeficiente promedio de fricción queda definido como:

$$\bar{C}_f \equiv \frac{\bar{\tau}_s}{\frac{\rho V_\infty^2}{2}} \quad (2.126)$$

$$\bar{\tau}_s \equiv \frac{1}{y} \int_0^y \tau_{s,y} dy \quad (2.127)$$

La forma de $\tau_{s,y}$ se sustituye de la ecuación 2.101 y se lleva a cabo la integración para obtener:

$$\bar{C}_f = 1.328 \text{Re}_L^{-1/2} \quad \text{Re}_L < 5 \times 10^5 \quad (2.128)$$

Despejando el coeficiente de transferencia de calor por convección local, de la ecuación 2.121

$$h_y = \frac{0.332k \text{Re}_y^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{y} \quad (2.129)$$

Sustituyendo la ecuación 2.129 en la ecuación 2.63 se obtiene:

$$\bar{h}_y = \frac{1}{y} \int_0^y h_y dy = \frac{0.332k \text{Pr}^{1/3}}{y} \left(\frac{v_\infty}{\nu} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{dy}{y^{1/2}} = \frac{2 \cdot 0.332k \text{Pr}^{1/3}}{y} \left(\frac{v_\infty^{1/2} y^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right) \quad (2.130)$$

Resolviendo la ecuación 2.130, se tiene que el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección para flujo laminar es:

$$\bar{h}_y = \frac{1}{y} \int_0^y h_y dy = \frac{0.664k \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_y^{1/2}}{y} \quad (2.131)$$

En la ecuación 2.130, se observa que:

$$\bar{h}_y = 2h_y \quad (2.132)$$

Sustituyendo la ecuación 2.129 en la ecuación 2.132, se obtiene el número de Nusselt promedio para flujo laminar sobre la placa plana.

$$\bar{Nu} \equiv \frac{\bar{h}L}{k} = 0.664 \text{Re}_L^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{Re}_L < 5 \times 10^5 \quad \text{Pr} \geq 0.7 \quad (2.133)$$

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} \quad (2.134)$$

2.6.9 PERFILES DE VELOCIDAD Y TEMPERATURA DE LA CAPA LÍMITE

La solución a la que llegó Blasius es una solución numérica sin expresión analítica en función de una variable adimensional. Un método alternativo para resolver las ecuaciones de capa límite, implica el planteamiento de las ecuaciones de capa límite en forma integral valuadas desde 0 a δ , para la ecuación de momento y continuidad, y de 0 a δt , para la ecuación de energía. Este método resulta más sencillo que el método de similitud, pero con el inconveniente de que se trabaja a prueba y error. Los resultados de este método [14] son bastante razonables y muy parecidos a los obtenidos por el método

de soluciones exactas. Otra ventaja es la obtención de las expresiones analíticas, de los perfiles de velocidad y temperatura.

Al resolver las ecuaciones de la capa límite de velocidad en su forma integral, se obtiene el perfil de velocidades:

$$\frac{v}{v_{\infty}} = \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\delta} \right)^3 \quad (2.135)$$

A partir del perfil de velocidades se obtiene el espesor de capa límite:

$$\delta = 4.64 \left(\frac{\nu y}{v_{\infty}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4.64y}{\text{Re}_y^{\frac{1}{2}}} \quad (2.136)$$

Al resolver la ecuación de la energía en su forma integral, se obtiene el perfil de temperaturas:

$$T^* = \frac{T - T_s}{T_{\infty} - T_s} = \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\delta_t} \right)^3 \quad (2.137)$$

Con el perfil de velocidades, el perfil de temperaturas y suponiendo $\text{Pr} \leq 1$, se obtiene el espesor de capa límite térmica:

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \frac{\text{Pr}^{\frac{1}{3}}}{1.026}$$

2.6.10 FLUJO TURBULENTO EN UNA PLACA PLANA

Resultados experimentales [7] para flujos turbulentos correlacionan el coeficiente de fricción local en la ubicación y , con una expresión de la forma:

$$C_{f,y} = 0.0592 \text{Re}_y^{-1/5} \quad 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_y \leq 10^7 \quad (2.138)$$

Mientras que el espesor de la capa límite de velocidad en la ubicación y , se expresa como:

$$\delta_y = 0.382y \text{Re}_y^{-1/5} \quad 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_y \leq 10^7 \quad (2.139)$$

Comparando las ecuaciones 2.138 y 2.139 con las ecuaciones 2.101 y 2.98 de la capa límite laminar, se llega a la conclusión de que el crecimiento de la capa límite turbulenta es mucho más rápido. En flujo turbulento δ varía como $y^{4/5}$ en contraste con $y^{1/2}$ para el flujo laminar, y que el coeficiente de fricción $C_{f,y}$ disminuye gradualmente como $y^{-1/5}$ para flujo turbulento contra $y^{-1/2}$ para flujo laminar. La producción de la capa límite en el flujo turbulento, se debe a las fluctuaciones aleatorias en el fluido, debido a esto, la capa límite en el flujo turbulento no se ve influenciada por la difusión molecular. Por tal

motivo, el crecimiento relativo de la capa límite no depende del número de Pr. Los espesores de la capa límite térmica, así como la velocidad, se obtienen por medio de la ecuación 2.139, en donde para flujo turbulento $\delta \approx \delta_t$.

Por medio de las analogías de Reynolds modificada, o de Chilton Colburn [10, 11], se obtiene:

$$\frac{C_f}{2} = St Pr^{2/3} \equiv j_H \quad 0.6 < Pr < 60 \quad (2.140)$$

En la ecuación 2.140 j_H es el factor j de Colburn para la transferencia de calor. En flujo laminar esta ecuación sólo es apropiada cuando $dP^* / dy^* \approx 0$, y en el caso del flujo turbulento esta ecuación sólo es válida aproximadamente.

Al usar la ecuación 2.138 con la ecuación 2.140, el número de Nusselt local en la ubicación y , para flujo turbulento es:

$$Nu_y = St Re_y Pr = 0.0296 Re_y^{4/5} Pr^{1/3} \quad 5 \times 10^5 \leq Re_y \leq 10^7 \quad 0.6 < Pr < 60 \quad (2.141)$$

El número de Nusselt promedio para flujo turbulento sobre toda la placa es.

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.037 Re_L^{4/5} Pr^{1/3} \quad 5 \times 10^5 \leq Re_y \leq 10^7 \quad 0.6 \leq Pr \leq 60 \quad (2.142)$$

La mezcla de las capas límite, ocasiona que la capa límite turbulenta crezca más rápido que la capa límite laminar y que tenga coeficientes de fricción y de convección más grandes.

2.6.11 CONDICIONES DE CAPA LÍMITE MEZCLADA

La capa límite mezclada es la combinación de la capa límite laminar con la capa límite turbulenta. En la figura 2.8 del tema 2.5, se aprecia que la capa límite laminar se forma desde la base de la aleta en $y = 0$, hasta un y_c en donde se tiene el Reynolds crítico, en este punto es donde comienza la zona de transición, en donde el flujo comienza a convertirse en turbulento y un poco más allá de esta zona el flujo es completamente turbulento. En una placa plana se tienen tres situaciones en el cálculo de los coeficientes de convección promedio:

CASO 1. FLUJO LAMINAR SOBRE TODA LA PLACA

En este caso los coeficientes promedio se calculan con las ecuaciones 2.143 y 2.144.

$$\bar{C}_f = 1.328 Re_L^{-1/2} \quad Re_L < 5 \times 10^5 \quad (2.143)$$

$$\bar{Nu} \equiv \frac{\bar{h}L}{k} = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad Pr \gtrsim 0.6 \quad (2.144)$$

CASO 2. TRANSICIÓN HACIA LA PARTE POSTERIOR DE LA PLACA

Si la transición ocurre en el rango $0.95 \lesssim (x_c / L) \lesssim 1$, las ecuaciones 2.143 y 2.144 calculan los coeficientes promedio con una aproximación muy razonable.

CASO 3. TRANSICIÓN LO SUFICIENTEMENTE ANTES DEL FIN DE LA PLACA

Cuando ocurre la transición lo suficientemente antes del fin de la placa, $(y_c / L) \lesssim 0.95$, los coeficientes promedio de la superficie se verán influenciados por las condiciones en las capas límite laminar y turbulenta. En la situación de la capa límite mezclada (figura 2.8 tema 2.5), se utiliza la ecuación 2.63 para obtener el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección para toda la placa.

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h dy \quad (2.63)$$

Al integrar sobre la región laminar ($0 \leq y \leq y_c$) y después sobre la región turbulenta ($y_c \leq y \leq L$), la ecuación 2.63 se puede expresar como:

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left(\int_0^{y_c} h_{laminar} dy + \int_{y_c}^L h_{turbulenta} dy \right) \quad (2.145)$$

Puesto que existe una distancia $y = y_c$ donde ocurre la transición, al sustituir las ecuaciones para $h_{laminar}$ y $h_{turbulenta}$, ecuaciones 2.121 y 2.141 respectivamente, se obtiene:

$$\bar{h}_L = \left(\frac{k}{L} \right) \left[0.332 \left(\frac{V_\infty}{\nu} \right)^{1/2} \int_0^{y_c} \frac{dy}{y^{1/2}} + 0.0296 \left(\frac{V_\infty}{\nu} \right)^{4/5} \int_{y_c}^L \frac{dy}{y^{1/5}} \right] \text{Pr}^{1/3} \quad (2.146)$$

Integrando.

$$\bar{N}_{uL} = \left[0.664 \text{Re}_{x,c}^{1/2} + 0.337 \text{Re}_L^{4/5} \text{Re}_{x,c}^{4/5} \right] \text{Pr}^{1/3} \quad (2.147)$$

$$\bar{N}_{uL} = 0.337 \text{Re}_L^{4/5} - A \text{Pr}^{1/3} \quad (2.148)$$

donde:

La constante A está determinada por el valor del número de Reynolds crítico, es decir;

$$A = 0.037 \text{Re}_{x,c}^{4/5} - 0.664 \text{Re}_{x,c}^{1/2} \quad (2.149)$$

Suponiendo un número de Reynolds de transición representativo $\text{Re}_{x,c} = 5 \times 10^5$, la ecuación 2.144 se reduce a:

$$\bar{N}_{uL} = 0.037 \text{Re}_L^{4/5} - 871 \text{Pr}^{1/3} \quad (2.150)$$

donde:

$$\begin{aligned} 0.6 < \text{Pr} < 60 \\ 5 \times 10^5 < \text{Re}_L \lesssim 10^7 \\ \text{Re}_{x,c} = 5 \times 10^5 \end{aligned}$$

2.6.12 ALETA DE SECCIÓN TRANSVERSAL CIRCULAR

En el caso de aleta de área de sección transversal circular o cilindro, aunque las condiciones de contorno y la ecuación de distribución de temperaturas sean las mismas, el coeficiente de transferencia de calor por convección no es el mismo. El coeficiente de convección depende de la geometría de la aleta, esta geometría influye en la forma en la que el flujo de fluido se comporta alrededor de la aleta circular. La figura 2.13 muestra una aleta de área de sección transversal circular o varilla, inmersa en un fluido en movimiento. La dirección del flujo es paralela al eje y , y es perpendicular al eje de la varilla. Cuando el fluido choca contra el cilindro, sobre el plano medio exactamente a la mitad de la circunferencia, el fluido se detiene haciendo que su velocidad se vuelva cero, es decir $V_\infty = 0$. Debido a que el flujo continuamente choca contra el cilindro en ése punto, su presión se eleva. Según las condiciones del flujo, la capa límite alrededor del cilindro puede variar, esta variación asocia la velocidad del flujo con los gradientes de presión, haciendo que el flujo se separe de la superficie del cilindro. Esta posición se denomina punto de separación y es donde el fluido en la superficie carece de momento para vencer el gradiente de presión, y es imposible que el fluido continúe su movimiento sobre la superficie del cilindro corriente abajo. La zona donde ocurre la separación de la capa límite se caracteriza por la formación de vórtices y baja presión. Si la velocidad del flujo es baja, el flujo envolverá por completo al cilindro y los vectores de flujo del fluido se reunirán al otro lado del cilindro de manera ordenada.

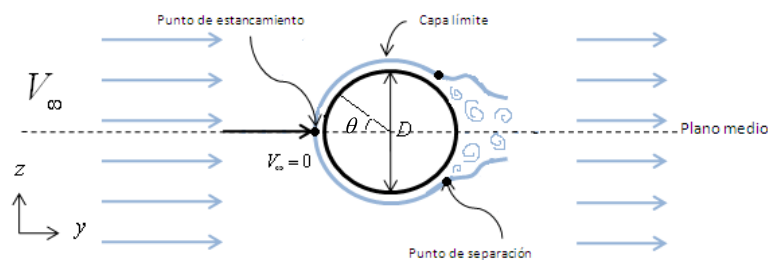


Figura 2.13 Flujo alrededor de una aleta de área de sección transversal circular.

De la misma forma que en el caso del flujo laminar en la placa plana, en el cilindro también se presenta la transición de la capa límite laminar a turbulenta. La transición en la capa límite laminar del cilindro, depende del número de Reynolds que influye en la posición del punto de separación de la capa límite.

El número de Reynolds para el cilindro se define como:

$$\text{Re}_D = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} \quad (2.151)$$

donde:

Re_D : Número de Reynolds.

D: Diámetro del cilindro.

μ : Viscosidad dinámica.

V: Velocidad del fluido.

ρ : Densidad del fluido.

ν : Viscosidad cinemática.

Para que el flujo de fluido se considere laminar $\text{Re}_D \leq 2 \times 10^5$ y se vuelve turbulento para $\text{Re}_D \geq 2 \times 10^5$.

Resultados experimentales de la variación del número de Nusselt con respecto a θ , muestran que estas variaciones influyen en la producción de la capa límite. En flujo laminar se observa que el número de Nusselt disminuye al aumentar θ . Cuando θ alcanza un valor de 80° , ocurre la separación de la capa límite y el número de Nusselt aumenta debido a la formación de vórtices.

Si el flujo es turbulento, la variación del número de Nusselt con respecto a θ presenta dos mínimos. La disminución del Número de Nusselt en el punto de estancamiento se debe también a la producción de la capa límite, pero en el rango de 80° y 100° la disminución del número de Nusselt se debe a la transición de la capa límite laminar a turbulenta. Después de este punto el número de Nusselt comienza a disminuir hasta que ocurre la separación de la capa límite en un valor aproximado de $\theta \approx 40^\circ$, y nuevamente el número de Nusselt aumenta debido a la formación de vórtices.

La reducción del espesor de la capa límite se debe al aumento del número de Reynolds con el aumento del número de Nusselt en función de θ .

La correlación para el número de Nusselt local y en el punto de estancamiento, es una expresión de la forma:

$$\text{Nu}_D(\theta = 0) = 1.15 \text{Re}_D^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{Pr} \geq 0.6 \quad (2.152)$$

2.6.13 CORRELACIONES DEL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN DEL CILINDRO

El flujo alrededor del cilindro comprende la separación del flujo de fluido, el cual resulta difícil de manejar en forma analítica, por lo que el flujo alrededor de cilindros y esferas se estudia de manera experimental o numérica. Numerosos investigadores han estudiado de manera experimental estos flujos y han desarrollado varias correlaciones empíricas para el coeficiente de transferencia de calor, para condiciones promedio globales.

Para el cálculo del número de Nusselt promedio, relativo al flujo cruzado sobre un cilindro, la propuesta de Churchill y Bernstein [14] se define como:

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}D}{k} = 0.3 + \frac{0.62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.4}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} \quad (2.153)$$

Las propiedades del fluido se deben evaluar a la temperatura de película, la cual es el promedio de las temperaturas de la corriente y de la superficie, considerando esta última como isotérmica.

$$T_f = \frac{1}{2} T_\infty + T_s \quad (2.154)$$

Esta ecuación se recomienda para todo $Re_D Pr > 0.2$

Otra correlación para el número de Nusselt promedio para el flujo alrededor de cilindros propuesta por Hilpert [14], que de forma más simplificada se expresa como:

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}D}{k} = C Re_D^m Pr^{1/3} \quad (2.155)$$

Esta ecuación también es útil para el flujo de gas sobre cilindros de área de sección transversal no circular. Todas las propiedades se evalúan a la temperatura de película, donde las constantes experimentales C y m se dan en la tabla 2.4.

Re_D	C	m
0.4 – 4	0.989	0.33
4 – 40	0.911	0.385
40 – 4,000	0.683	0.466
4,000 – 40,000	0.193	0.618
40,000 – 400,000	0.027	0.805

Tabla 2.4 Constantes de la ecuación propuesta por Hilpert para el cilindro circular en flujo cruzado [14]

Otra correlación que se sugiere, es la de Zhukauskas [14] y se define de la siguiente manera:

$$\bar{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{k} = C Re_D^m Pr^n \left(\frac{Pr}{Pr_s}\right)^{1/4} \quad (2.156)$$

donde:

$$\left[\begin{array}{l} 0.7 < Pr < 500 \\ 1 < Re_D < 10^6 \end{array} \right]$$

Todas las propiedades se evalúan en T_∞ , excepto Pr_s que es el número de Prandtl evaluado a la temperatura de la superficie T_s , que se considera una superficie isotérmica.

Los valores de las constantes C y m para el caso del cilindro con convección forzada se presentan en la tabla 2.5.

Re_D	C	m	Pr ≤ 10	Pr ≥ 10
1 – 40	0.75	0.4		
40 – 1000	0.51	0.5	n = 0.37	n = 0.36
$10^3 - 2 \times 10^5$	0.26	0.6		
$2 \times 10^5 - 10^6$	0.076	0.7		

Tabla 2.5 Constantes de la ecuación propuesta por Zhukauskas para el cilindro circular en flujo cruzado [14].

CAPÍTULO 3

ECUACIONES DE TRANSPORTE Y MÉTODO DE SOLUCIÓN

Este capítulo presentará la deducción de las ecuaciones de continuidad, momentum y conservación de la energía en un sistema de coordenadas cartesiano con $\mu = \text{constante}$ y suponiendo fluido incompresible. También se presentará la técnica de las ecuaciones promediadas de Navier-Stokes, que resuelven las ecuaciones de transporte para el flujo turbulento y de una de las alternativas para la simulación de flujos reactivos, como es el promediado de las ecuaciones instantáneas de conservación. Finalmente se hablara del Método de Volumen Finito que se utilizará para resolver las ecuaciones de conservación.

3.1 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

A través de la aplicación del teorema de transporte de Reynolds, se tiene la siguiente expresión general para la *conservación de masa* que se aplica a un volumen de control.

$$0 = \int_{v.c.} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{s.c.} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (3.1)$$

Cuando se tienen entradas y salidas definidas adecuadamente, la ecuación 3.1 puede reescribirse como:

$$\int_{v.c.} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \sum_{entrada} \dot{m} - \sum_{salida} \dot{m} \quad (3.2)$$

Es decir, la razón neta de cambio de masa dentro del volumen de control es igual a la razón a la que fluye la masa hacia el volumen de control menos la razón a la que fluye la masa afuera del volumen de control.

Para deducir la forma diferencial de la conservación de la masa de manera rápida y directa, aplicamos el teorema de la divergencia también llamado teorema de Gauss. Este teorema permite transformar una integral de volumen de la divergencia de un vector en una integral de área sobre la superficie que define el volumen. Para cualquier vector \vec{G} , la divergencia de \vec{G} se define como $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$ y el *teorema de divergencia* se puede escribir como:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV = \oint_A \vec{G} \cdot \vec{n} dA \quad (3.3)$$

La ecuación 3.3 se aplica a cualquier volumen de control, pero se elige el volumen de control de la ecuación 3.1. Haciendo $\vec{G} = \rho \vec{V}$, al sustituir la ecuación 3.3 en la ecuación 3.1, se convierte la integral de superficie en una integral de volumen:

$$0 = \int_{v.c.} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{v.c.} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) dV \quad (3.4)$$

Combinando las dos integrales de volumen:

$$\int_{v.c.} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0 \quad (3.5)$$

Se afirma que la ecuación 3.5 se mantiene para cualquier volumen de control sin importar su tamaño o forma. Esto es posible si el integrando es cero. De esta manera se obtiene una ecuación diferencial general para la conservación de la masa, también conocida como **ecuación de continuidad**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (3.6)$$

donde:

ρ : Es la densidad instantánea del fluido.

\vec{V} : Es su velocidad instantánea.

3.2 ECUACIÓN DE MOMENTUM

Con la aplicación del teorema de transporte de Reynolds, se tiene la expresión general para la **conservación de la cantidad de movimiento lineal** aplicada a un volumen de control:

$$\sum \vec{F} = \int_{v.c.} \rho \vec{g} dV + \int_{s.c.} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA = \int_{v.c.} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}) dV + \int_{v.c.} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (3.7)$$

donde:

σ_{ij} : Es el tensor de esfuerzo.

La ecuación 3.7 se aplica a volúmenes de control fijos y en movimiento, siempre que \vec{V} sea la velocidad absoluta (vista desde un observador fijo).

Para generar una ecuación diferencial para la conservación de cantidad de movimiento lineal, se toma el volumen de control y se encoge a tamaño infinitesimal. En el límite, todo el volumen de control se encoge a un punto en el flujo y se procede de la misma manera como se dedujo la forma diferencial de la ecuación de continuidad, aplicando el teorema de divergencia de la ecuación 3.6. Una forma más general del teorema de divergencia se aplica no sólo a vectores, sino también a otras cantidades, como los tensores:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot G_{ij} dV = \oint_A G_{ij} \cdot \vec{n} dA \quad (3.8)$$

Específicamente, si en el **teorema de divergencia extendido** de la ecuación 3.8, G_{ij} se sustituye con la cantidad $(\rho\vec{V})\vec{V}$, un tensor de segundo orden, el último término en la ecuación 3.7 se convierte en:

$$\int_{S.C.} (\rho\vec{V})\vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_{V.C.} \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) dV \quad (3.9)$$

donde:

$\vec{V}\vec{V}$ es un producto vectorial llamado producto exterior del vector de velocidad consigo mismo. De manera similar, si en la ecuación 3.8 se sustituye con el tensor de esfuerzo σ_{ij} , el segundo término en el lado izquierdo de la ecuación 3.7 se convierte en:

$$\int_{S.C.} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA = \int_{V.C.} \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} dV \quad (3.10)$$

Las dos integrales de superficie de la ecuación 3.7 se convierten en integrales de volumen, cuando se aplican las ecuaciones 3.9 y 3.10. Combinando ambas ecuaciones y reordenando términos, la ecuación 3.7 se reescribe como:

$$\int_{V.C.} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) - \rho\vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \right] dV = 0 \quad (3.11)$$

Finalmente se afirma que la ecuación 3.11 es válida para cualquier volumen de control sin importar su tamaño o forma. Esto es posible sólo si el integrando es idénticamente cero. En consecuencia, se tiene una ecuación diferencial general para la conservación de cantidad de movimiento lineal, conocida como **ecuación de Cauchy**:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \quad (3.12)$$

Cuando se aplica la regla de la derivada del producto al primer término del lado izquierdo de la ecuación 3.12 se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\vec{V}) = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.13)$$

El segundo término de la ecuación 3.12 se puede escribir como:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{V}\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) dV \quad (3.14)$$

Eliminando el tensor de segundo orden representado por $\vec{V}\vec{V}$ y después de cierto reordenamiento, la sustitución de las ecuaciones 3.13 y 3.14 en la ecuación 3.12 produce:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) \right] + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \quad (3.15)$$

La expresión en corchetes en esta ecuación es idénticamente cero por la ecuación de continuidad, ecuación 3.6. Cuando se combinan los dos términos restantes en el lado izquierdo, se obtiene una forma alternativa de la ecuación de Cauchy.

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma_{ij} \quad (3.16)$$

En coordenadas cartesianas, las tres componentes de la ecuación de Cauchy son:

$$\text{Componente } x : \rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \quad (3.16a)$$

$$\text{Componente } y : \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \quad (3.16b)$$

$$\text{Componente } z : \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (3.16c)$$

Para obtener las ecuaciones de Navier-Stokes, se debe expresar el tensor de esfuerzos σ_{ij} en términos de las incógnitas primarias, es decir, densidad, presión y velocidad. Esto se puede realizar mediante las ecuaciones constitutivas que nos permiten escribir las componentes del tensor de esfuerzo en términos del campo de velocidad y del campo de presión. La primera acción que se hace es separar los esfuerzos de presión y los esfuerzos viscosos. Cuando un fluido se mueve, la presión actúa hacia dentro normal, pero también pueden existir esfuerzos viscosos. La ecuación 3.17 se generaliza para fluidos en movimiento como:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

En el cual se introduce un nuevo tensor τ_{ij} , llamado tensor de esfuerzo viscoso.

Este análisis se concentra para fluidos newtonianos, que se definen como los fluidos para los que el esfuerzo de corte es linealmente proporcional a la razón de deformación por corte, donde por definición el tensor de esfuerzo es linealmente proporcional al tensor de razón de deformación. Suponiendo un flujo incompresible ($\rho = \text{constante}$) se tiene que las propiedades de fluido (viscosidad dinámica μ y la viscosidad cinemática ν) también son constantes. Con dichas suposiciones se puede demostrar que el tensor de esfuerzo viscoso, se reduce al tensor de esfuerzo viscoso para un fluido newtoniano incompresible con propiedades constantes:

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.18)$$

donde:

ε_{ij} : Es el tensor de razón de deformación.

La ecuación 3.19 muestra que el esfuerzo es linealmente proporcional a la deformación. En coordenadas cartesianas, se mencionan las nueve componentes del tensor de esfuerzo viscoso, seis de las cuales son independientes debido a simetría:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

En coordenadas cartesianas, el tensor de esfuerzo de la ecuación 3.19 se convierte en:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Sustituyendo la ecuación 3.20 en las tres componentes cartesianas de la ecuación de Cauchy. Considerando primero la componente x , la ecuación 3.16a se convierte en:

$$\rho \frac{Du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.21)$$

Mientras que las componentes de velocidad sean funciones suaves de x, y y z , el orden de diferenciación es irrelevante. Después de cierto reordenamiento de los términos viscosos en la ecuación 3.21 se obtiene.

$$\rho \frac{Du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

$$\rho \frac{Du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

El término entre paréntesis es cero debido a la ecuación de continuidad para un flujo incompresible. También se identifican los últimos tres términos como el Laplaciano de la componente de velocidad u en coordenadas cartesianas, por lo tanto, la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento se escribe como:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 u \quad (3.22a)$$

De manera similar se escriben las componentes y y z respectivamente de la ecuación de cantidad de movimiento como:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \nabla^2 v \quad (3.22b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 w \quad (3.22c)$$

Finalmente se combinan las tres componentes en una ecuación vectorial. El resultado es la ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible con viscosidad constante.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.23)$$

Aunque las componentes de la ecuación 3.23 se dedujeron en coordenadas cartesianas, la forma vectorial de la ecuación 3.23 es válida en cualquier sistema coordenado ortogonal.

3.3 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La ecuación general de conservación de la energía se presenta a continuación.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u_e + \frac{|\vec{V}|^2}{2} + e_p \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \vec{V} \left(u_e + \frac{|\vec{V}|^2}{2} + e_p \right) \right] = W_V + q_T \quad (3.24)$$

donde:

$e = u_e + |\vec{v}|^2 / 2 + e_p$: Es la energía total del fluido (energía interna + energía cinética + energía potencial).

W_V : Es el trabajo viscoso.

q_T : Es el calor total.

Introduciendo la definición de la entalpia ($h=u+P/\rho$), la ecuación de continuidad, el trabajo viscoso y el calor total en la ecuación 3.24, se llega a la ecuación de la entalpia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(h + \frac{|\vec{V}|^2}{2} + e_p \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \vec{V} \left(h + \frac{|\vec{V}|^2}{2} + e_p \right) \right] = \nabla \cdot \vec{\tau}' \cdot \vec{V} - \nabla \cdot \vec{J}_e + q_r \quad (3.25)$$

donde:

$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{V})$: Es el trabajo viscoso.

$\nabla \cdot \vec{J}_e$: Es el flujo difusivo de calor.

q_r : Es el flujo de calor por radiación.

En flujos de baja velocidad, si el número de Mach (Ma) es muy bajo ($Ma \ll 1$) la energía cinética comparada con la entalpía es despreciable y el trabajo viscoso es despreciable [1]. Por otra parte, si el flujo de gases es menor a 1500°C, el flujo de calor por radiación es despreciable [2]. Aplicando las consideraciones anteriores y despreciando el término potencial de la energía total del fluido a la ecuación 3.25 se obtiene un modelo válido para fluidos Newtonianos bajo condiciones generales de flujo incompresible, viscoso y conductor de calor. Así, la ecuación de la energía queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h + \nabla \cdot \rho \vec{V} h = -\nabla \cdot \vec{J}_h \quad (3.26)$$

El flujo de difusión de calor (\vec{J}_h) se modela mediante la Ley de Fourier:

$$\vec{J}_h = -k \nabla T \quad (2.27)$$

donde:

k: Es la conductividad térmica.

Por lo tanto la ecuación 3.26 queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h + \nabla \cdot \rho \vec{V} h = -\nabla \cdot k \nabla T \quad (3.28)$$

3.4 TURBULENCIA

En las secciones anteriores se detallaron las ecuaciones para describir el movimiento de un flujo de gases. Estas ecuaciones de transporte están concebidas para flujos laminares y turbulentos cuya aplicación práctica es muy limitada. Esto implica que las ecuaciones deben adecuarse para su utilización en el estudio de flujos turbulentos. Por ello, antes de describir la adecuación matemática de las ecuaciones de transporte se analiza a la turbulencia con la finalidad de entender la complejidad del fenómeno. La turbulencia no se puede definir exactamente, sin embargo para entenderla, se observa los efectos que este comportamiento provoca en el fluido.

La técnica de las ecuaciones promediadas de Navier-Stokes, resuelve las ecuaciones presentadas anteriormente para el flujo turbulento. La técnica RANS puede entenderse con la representación gráfica de la variación local de una propiedad Φ del fluido con el tiempo en el flujo turbulento.

La figura 3.1 muestra la disparidad de las escalas temporales y la naturaleza caótica de este fenómeno que hacen inviable su desarrollo analítico. Sin embargo, los fluidos turbulentos pueden manejarse estadísticamente en función de una variable Φ que presente cualquier propiedad. Esta propiedad queda definida mediante un término medio y un término fluctuante (ϕ'). Este manejo estadístico permite la existencia de

cambios abruptos en las variables espacial y temporal, lo cual admite un manejo matemático de las ecuaciones de transporte. El anterior manejo de las variables es la base de la alternativa de simulación numérica RANS que utiliza las ecuaciones en función de los valores medios y fluctuantes. Estas ecuaciones se promedian y se resuelven con un método numérico. Sin embargo, el promediado de las ecuaciones es una técnica que implica un manejo matemático complejo y la aparición de términos adicionales.



Figura 3.1 Representación gráfica de la turbulencia.

3.5 PROMEDIADO DE LAS ECUACIONES DE TRANSPORTE

Una característica del flujo turbulento es la variación aleatoria e irregular, tanto en el espacio, como en el tiempo de las propiedades del fluido. Una de las alternativas para la simulación de flujos reactivos, es el promediado de las ecuaciones instantáneas de conservación. Con este método, se promedian todas las fluctuaciones de las escalas temporales y se resuelven ecuaciones de transporte para los valores medios de las propiedades del fluido. Estas ecuaciones no son cerradas, por lo cual se requieren modelos que reemplacen términos no cerrados.

Si el flujo presenta variaciones en la densidad, se pueden usar dos tipos de promedio, uno es el promedio de Reynolds, en el cual toma la densidad como constante [3], y el otro es el promedio de Favre [4], en el cual la densidad es variable.

De manera ilustrativa, se representa con el símbolo Φ cualquier propiedad transportada, los valores instantáneos de esta propiedad son descritos en términos de un promedio y una fluctuación turbulenta.

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' \quad (3.29)$$

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi'' \quad (3.30)$$

Los dos promedios $\bar{\Phi}$ y $\tilde{\Phi}$ se definen como:

$$\bar{\Phi} = \lim_{n_e \rightarrow \infty} \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} \Phi^i \quad ; \text{ promediado de Reynolds} \quad (3.31)$$

$$\tilde{\Phi} = \lim_{n_e \rightarrow \infty} \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} \rho^i \Phi^i ; \text{promediado de Favre} \quad (3.32)$$

Φ^i es la muestra i del conjunto de realizaciones n_e de un experimento. Una de las razones de aplicar el promedio de Favre en las ecuaciones instantáneas de transporte, es que cuando se aplica dicho promedio, genera ecuaciones muy sencillas que no incluyen modificaciones a fluctuaciones de la densidad en las ecuaciones resultantes.

Aplicando el promedio de Favre a las ecuaciones de continuidad, la cantidad de movimiento y energía, se obtienen las siguientes ecuaciones [5]:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \tilde{\vec{V}} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{\vec{V}} + \nabla \cdot \bar{\rho} \tilde{\vec{V}} \tilde{\vec{V}} = -\nabla \bar{P} + \nabla \cdot \bar{\rho} \widetilde{\vec{V} \vec{V}''} + \bar{\rho} \bar{\vec{g}} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{\vec{V}} h + \nabla \cdot \bar{\rho} \tilde{\vec{V}} h = -\nabla \cdot \bar{\rho} \widetilde{\vec{V} h''} \quad (3.35)$$

Los términos turbulentos $\bar{\rho} \widetilde{\vec{V} \vec{V}''}$ y $-\nabla \cdot \bar{\rho} \widetilde{\vec{V} h''}$, son términos desconocidos que requieren modelarse.

El cierre del término $\bar{\rho} \widetilde{\vec{V} \vec{V}''}$ de la ecuación media de cantidad de movimiento se trata en el apéndice A. El cierre del término $-\nabla \cdot \bar{\rho} \widetilde{\vec{V} h''}$ se puede consultar en Jones et al [6] y [7].

3.6 MÉTODO DE VOLUMEN FINITO

El Método de Volumen Finito es una aproximación comúnmente usada en códigos de CFD, tiene como ventaja el uso de memoria y rapidez de solución. Las ecuaciones que se resuelven, son las ecuaciones en derivadas parciales de Navier-Stokes, masa y energía en su forma conservativa. El Método de Volumen Finito consiste en dividir el dominio espacial y temporal en pequeños volúmenes de control (malla) y en pequeños intervalos temporales. De esta manera, las ecuaciones diferenciales de transporte y los modelos de turbulencia son integrados en cada celda del enmallado y en cada paso temporal para obtener ecuaciones discretizadas que se resuelven mediante algún método numérico. El método de volúmenes finitos consiste en representar las ecuaciones de transporte y los modelos de turbulencia mediante la siguiente ecuación general de transporte:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{\varphi} + \nabla \cdot \bar{\rho} \tilde{\vec{u}}_i \tilde{\varphi} - \nabla \cdot \Gamma_\varphi \nabla_\varphi = \bar{S}_\varphi \quad (3.36)$$

donde:

$\tilde{\phi}$: Variable de flujo (variable dependiente).

Γ_{ϕ} : Coeficiente de difusión.

\bar{S}_{ϕ} : Término fuente.

Los términos del lado izquierdo de la ecuación son el término transitorio, convectivo y difusivo, respectivamente.

Los términos Γ_{ϕ} y \bar{S}_{ϕ} están especificados para cada variable $\tilde{\phi}$. En el caso de la ecuación de continuidad $\tilde{\phi} = 1$.

La ecuación general 3.36, se discretiza con el método de volúmenes finitos. Con este método, el dominio se divide en pequeños volúmenes de control asociando a cada uno de ellos un punto nodal. De manera similar, se discretiza el tiempo en intervalos temporales. La ecuación diferencial resultante, se integra en cada volumen de control y en cada intervalo temporal, y el resultado es una ecuación discretizada que relaciona los valores de $\tilde{\phi}$ para un determinado grupo de puntos nodales. Esta ecuación algebraica expresa el principio de conservación de $\tilde{\phi}$ en el volumen finito, de la misma manera que la ecuación diferencial lo expresa para un volumen infinitesimal. La ecuación algebraica para un nodo P puede expresarse en forma general como:

$$a_p \tilde{\phi}_p = \sum_{i,I=E,W,N,S,H,L} a_i \tilde{\phi}_i + a_T \tilde{\phi}_T + B \quad (3.37)$$

donde:

El subíndice I representa las celdas vecinas, i la cara entre las celdas P e I , T el valor correspondiente en el intervalo temporal anterior, y B el término fuente. La deducción detallada de la ecuación 3.37 puede consultarse en ([8] y [9]), así como en un gran número de textos de dinámica de fluidos computacional.

En el caso de una malla cartesiana, escalonada (“staggered”) y uniforme (celdas de iguales dimensiones espaciales), se puede emplear por sencillez un volumen de control bidimensional, como el que se muestra en la figura 3.2. En una malla escalonada, las variaciones se encuentran definidas en el centro de la celda, mientras que las componentes de velocidad en cada dirección, correspondientes a la celda, se encuentran desplazadas a las caras de la celda.

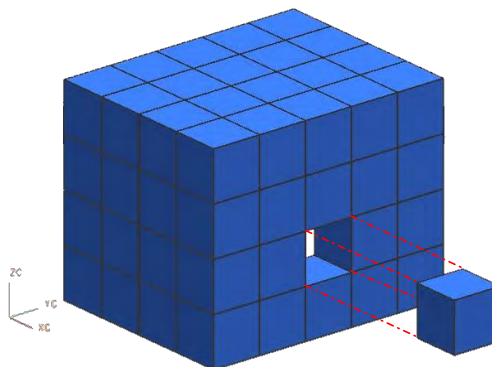


Figura 3.2 Representación del sistema discretizado en volúmenes finitos.

En la figura 3.3, se muestra la notación de la celda y de sus vecinas. Dada una celda P , sus vecinas se nombrarán según las iniciales de los puntos cardinales (en inglés) en las direcciones “ x ” e “ y ” y como “*Low*” y “*High*” en la dirección z . Las caras de la celda se nombran con la misma nomenclatura, pero con letras minúsculas. A su vez, el tiempo también se discretiza. Las celdas en la dirección temporal se llaman intervalos temporales. La celda P en el paso temporal se denota como T .

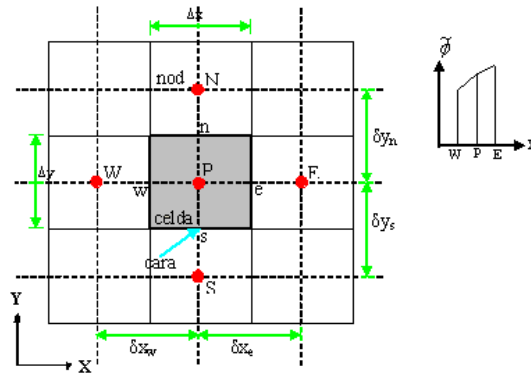


Figura 3.3 Diagrama esquemático de un volumen de control bidimensional.

3.7 DISCRETIZACIÓN DEL TÉRMINO DIFUSIVO

La discretización del término difusivo consiste en su integración en un volumen de control y en un intervalo de tiempo. La discretización espacial sólo contempla la componente $(\Gamma \nabla \tilde{\phi})$ y por esto el gradiente de $\tilde{\phi}$, se modela asumiendo un perfil lineal entre nodos. En la integración, el valor del coeficiente de difusividad Γ queda definido en cada una de las caras del volumen de control pero su valor se localiza en el centro de la celda. Un método para obtener el valor del coeficiente de difusividad en la cara de la celda, es asumir una variación lineal de Γ entre un punto de análisis y sus puntos vecinos, como se muestra en la figura 3.3. Lo anterior implica que el valor del coeficiente de difusividad quede en términos de un factor de interpolación, que ésta en función de las distancias entre nodos y caras de la celda.

3.8 DISCRETIZACIÓN DEL TÉRMINO CONVECTIVO

El término convectivo de la ecuación general de transporte se discretiza en dos partes: la primera consiste en la integración de un volumen de control y la segunda consiste en la integración de un intervalo de tiempo. La integración temporal consiste en integrar directamente el término convectivo en un intervalo de tiempo. En la integración espacial el valor de la variable de flujo $\tilde{\phi}$ está definida en cada una de las caras. Sin embargo, su valor requiere ser calculado y por esta razón se emplea el uso de métodos numéricos para obtener su valor. Los métodos utilizados para evaluar la variable de flujo $\tilde{\phi}$ no están basados en interpolaciones, ya que la complejidad de este cálculo requiere métodos más sofisticados y la simple interpolación puede arrojar resultados erróneos. Los métodos que se utilizan son los llamados esquemas de discretización, que plantean la utilización de dos parámetros para definir el valor de los coeficientes a de la ecuación

3.37. Estos términos son la fuerza de convección o flujo F , la conductancia de difusión D , y el número de Peclet, quedando definidos de la siguiente forma:

$$F = \bar{\rho} \tilde{v}_i \quad (3.38)$$

$$D = \frac{\Gamma}{\delta_i} \quad (3.39)$$

$$Pe = \frac{F}{D} \quad (3.40)$$

donde:

\tilde{v}_i : Es la velocidad en la cara i , δ_i es la distancia entre los nodos que incluyen la cara i y Pe es de número de Peclet, que es una relación entre la convección y la difusión.

Las expresiones para F y D representan el efecto de los términos convectivo y difusivo, respectivamente, de la ecuación de transporte 3.36.

Los coeficientes a_i de la ecuación 3.37 son:

$$a_i = D_i f |Pe|_i + \max(-F_i, 0) \quad (3.41)$$

Los valores F y D en la cara de la celda de la ecuación 3.41 son:

$$F_i = \bar{\rho} \tilde{v}_i \Delta_i \quad (3.42)$$

$$D_i = \frac{\Gamma_i \Delta_i}{\delta_i}, \quad i = n, s, e, w \quad (3.43)$$

donde:

Δ_i : Es la longitud de la cara i .

Para determinar F_i se necesita conocer $\bar{\rho}$ y \tilde{u}_i en la cara de la celda. El cálculo del término convectivo de la ecuación de transporte 3.36 requiere también el conocimiento de la variable escalar $\tilde{\phi}$, en la cara de la celda. La velocidad \tilde{v}_i está calculada en la cara de la malla escalonada; pero $\tilde{\rho}$ y $\tilde{\phi}$ están calculados en el nodo y necesitan ser interpolados a la cara para calcular los coeficientes a_i de la ecuación discretizada (3.37).

La obtención de estas variables en la cara de la celda es importante para la precisión y convergencia de la solución. El cálculo de $\tilde{\rho}$ y $\tilde{\phi}_i$ da lugar a los llamados esquemas de discretización. La función $f |Pe|$ de la ecuación 3.41 depende del esquema de

interpolación; por ejemplo, en el esquema de diferencias desplazadas, $f |Pe| = 1$. Para el sistema híbrido [1]:

$$f |Pe| = \max(0.1 - 0.5|Pe|, 0) \quad (3.44)$$

En el apéndice B se presentan estos esquemas de discretización lineales con más detalle, pues son los que se utilizarán en la discretización del término convectivo de las ecuaciones de cantidad de movimiento, energía y modelo de turbulencia. El coeficiente para el término transitorio es:

$$a_T = \frac{\bar{\rho}_T \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (3.45)$$

Para el cálculo del término D_i ecuación 3.8, se necesita obtener el coeficiente de difusión Γ , en la cara de la celda. El coeficiente Γ no es necesariamente una constante, probablemente puede ser función de valores variables que se conocen en los nodos (por ejemplo la temperatura) y por tanto es necesario interpolarlo en la cara. Esta interpolación puede ser aritmética o armónica. Como ejemplo, para la cara e, estas interpolaciones son:

$$a_T = \frac{\bar{\rho}_T \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (3.46)$$

$$\Gamma_e = \frac{2\delta x_e}{\Delta x \left(\frac{1}{\Gamma_P} + \frac{1}{\Gamma_E} \right)} \quad (3.47)$$

El término fuente de la ecuación general 3.1, \bar{S}_ϕ se linealiza como:

$$\bar{S}_\phi = \bar{S}_{\phi,c} + \bar{S}_{\phi,v} \tilde{\phi}_p \quad (3.48)$$

donde:

El término $\bar{S}_{\phi,v}$ se elige de acuerdo a la relación existente entre \bar{S}_ϕ y $\tilde{\phi}$, en caso de depender el primero del segundo. El objetivo de la linealización del término fuente es mejorar la convergencia de la solución.

Con esta suposición, los términos B y a_p de la ecuación 3.37 son:

$$B = \bar{S}_{\phi,c} \Delta x \Delta y + a_T \tilde{\phi}_T \quad (3.49)$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_T - \bar{S}_{\phi,v} \Delta x \Delta y \quad (3.50)$$

La ecuación 3.37 se aplica en cada celda del dominio, para cada $\tilde{\phi}$ y para cada paso temporal Δt , por lo que se tiene un sistema de ecuaciones lineales (los coeficientes a

pueden depender, directa o indirectamente de $\tilde{\phi}$, por lo que el sistema es realmente pseudo-lineal). Para resolver este sistema de ecuaciones se puede utilizar cualquier método de resolución de ecuaciones lineales.

En el cálculo de las velocidades a partir de las ecuaciones de cantidad de movimiento, se tiene el inconveniente de que la presión, cuyo gradiente aparece como término fuente en las ecuaciones de cantidad de movimiento, no tiene una ecuación propia para calcularla. Una solución ampliamente utilizada, es transformar la ecuación de continuidad en una ecuación para la presión.

Entre los algoritmos iterativos que se basan en este procedimiento, están los de la familia SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure- Linked Equations), ([2], [9] y [10]). El algoritmo utilizado en esta tesis para resolver el problema de acoplamiento velocidad-presión pertenece a esta familia.

El proceso de solución de este sistema de ecuaciones es iterativo y durante éste, las ecuaciones del sistema, en general, no se cumplen; el balance entre la parte izquierda y derecha de la ecuación se denomina residuo. La convergencia del proceso iterativo se da cuando los residuos disminuyen.

Para procurar acelerar esta convergencia, se utiliza un método de relajación de algunas de las variables dependientes y propiedades. Se emplean dos tipos de relajación: la inercial y la lineal. La relajación inercial se emplea para las velocidades y los parámetros de turbulencia, y aumenta la diagonal de la matriz de coeficientes el agregar a la ecuación de cualquier variable $\tilde{\phi}$, el término fuente:

$$\bar{S}_{\phi,r} = \frac{\bar{\rho}V_p}{\Delta t_f} \tilde{\phi}_P^{n-1} - \tilde{\phi}_P^n \quad (3.51)$$

donde:

V_p : Es el volumen de la celda P, Δt es el intervalo de tiempo falso y el superíndice n se refiere al número de iteración.

Para la presión y la densidad se emplea la relajación lineal dada por:

$$\tilde{\phi}_P^n = \alpha \tilde{\phi}_P^{sol} + 1 - \alpha \tilde{\phi}_P^{n-1} \quad (3.52)$$

donde:

α : Es el factor de relajación, el superíndice “sol” se refiere al valor de la propiedad proporcionado por el “solver” en la iteración actual. El factor de relajación α , normalmente toma valores entre 0 y 1.

El criterio de convergencia utilizado para detener el proceso iterativo para un paso temporal dado y pasar al siguiente es tal que, para cada variable, la suma de los valores absolutos de los residuos en todo el dominio sea menor que un determinado porcentaje de un valor de referencia.

CAPÍTULO 4

SOLUCIÓN ANALÍTICA Y NUMÉRICA DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN LA ALETA DE SECCIÓN TRANSVERSAL UNIFORME

En este capítulo se dará solución a la ecuación de la temperatura para la aleta de área de sección transversal uniforme, obteniendo los parámetros como el número de Reynolds, Nusselt, el espesor de la capa límite y el perfil de velocidad para las condiciones de contorno mencionadas en el capítulo uno. Como casos adicionales se presentará el efecto de variar el espesor de la aleta rectangular y las condiciones de velocidad de entrada del flujo de fluido, así como la obtención de la distribución de temperaturas en una aleta de área de sección transversal circular o varilla.

También, se resolverá el caso de la aleta de área de sección transversal rectangular, por medio de un Código de Dinámica de Fluidos Computacional (CFD), presentando los detalles básicos de la programación del problema en el código de CFD. Por último, se compararan ambas formas de solución para verificar los resultados obtenidos mediante el código de CFD.

4.1 ALETA DE SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR

Solución analítica. Caso base.

Primeramente, el análisis se hace para un caso base. Este caso base consta de una aleta de aluminio, cuyas dimensiones son 0.2 [m] de largo, 0.2 [m] de ancho y 0.001 [m] de espesor. Sobre la aleta existe un flujo de aire a 20 [°C], con una velocidad de 0.1 [m/s] y que se desarrolla paralelo a la aleta sobre el eje y . La base de la aleta se define como una superficie de temperatura constante que se encuentra a 100 [°C], tal y como se muestra en la figura 4.1.

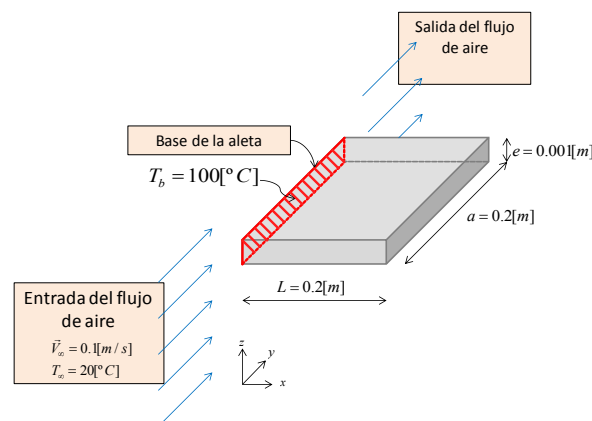


Figura 4.1 Caso base de la aleta de área de sección transversal uniforme.

SOLUCIÓN

El objetivo es conocer como se distribuye la transferencia de calor conjugado en la aleta rectangular. Con los datos que se tienen en el caso base se identifican dos modos de transferencia de calor, la conducción en el interior de la aleta y la convección en el flujo de aire. El modelo que describe la distribución de temperaturas en la aleta, es la ecuación de la temperatura de la aleta con convección en el extremo, en esta ecuación se conoce T_b , T_∞ , L , P y A_c pero no se conocen los coeficientes de conducción y convección. El coeficiente de transferencia de calor por conducción se obtiene por medio de una tabla de propiedades termofísicas de sólidos metálicos, pero el coeficiente de convección no se puede calcular directamente, su obtención es por medio de correlaciones que se relacionan con la capa límite en el flujo de aire sobre la aleta. En el flujo de aire sobre la aleta se desarrollan dos tipos de capa límite, la capa límite de velocidad y la capa límite térmica. Los parámetros que se necesitan de la capa límite de velocidad son el número de Reynolds, espesor de capa límite y el perfil de velocidad de la capa límite. Por último, en la capa límite térmica se obtiene el número de Nusselt y el coeficiente de transferencia de calor por convección.

SUPOSICIONES

1 La aleta es un cuerpo opaco, por lo tanto no hay transferencia de calor por radiación y las temperaturas son pequeñas. **2** Flujo estacionario e incompresible. **3** El flujo es totalmente desarrollado en y . **4** El aire es un gas ideal.

Evaluando las propiedades del fluido a la temperatura media en términos de la temperatura de la base:

$$T = \frac{1}{2} T_b + T_\infty = \frac{1}{2} 100 + 20 = 60[^\circ C] = 333.15[K]$$

Interpolando la temperatura media en una tabla de propiedades termofísicas del aire se obtiene:

Propiedades termofísicas del aire a presión atmosférica							
T [K]	ρ [kg/m ³]	C_p [kJ/kg*K]	$\mu \cdot 10^7$ [N*s/m ²]	$\nu \cdot 10^6$ [m ² /s]	$k \cdot 10^3$ [W/m*K]	$\alpha \cdot 10^6$ [m ² /s]	Pr
300	1.1614	1.007	184.6	15.89	26.3	22.5	0.707
333.15	1.0510768	1.008326	200.2468	19.22489	28.7531	27.4062	0.702359
350	0.995	1.009	208.2	20.92	30	29.9	0.7

Tabla 4.1 Interpolación de datos para el cálculo de propiedades termofísicas del aire.

Interpolando la temperatura media en una tabla de propiedades termofísicas de sólidos, se obtiene el coeficiente de conducción del aluminio, en donde:

Propiedades termofísicas de sólidos metálicos.		
Composición	T [K]	$k \cdot 10^3$ [W/m*K]
Aluminio puro	300	237
	333.15	237.9945
	400	240

Tabla 4.2 Interpolación de datos para el cálculo del coeficiente de conducción del aluminio.

La convención que se usa para interpretar los valores numéricos de las tablas, se hace de la siguiente forma, por ejemplo.

$$k = 237.9945 \times 10^{-3} [W / mK]$$

El flujo de aire es paralelo al eje y , y la longitud de la aleta paralela a este eje es de 0.2 [m]. El cálculo del número de Reynolds local determina como varían las condiciones de la capa límite a lo largo de la aleta, con lo que es posible determinar el tipo de flujo que existe sobre la misma, como se muestra en la figura 4.1.

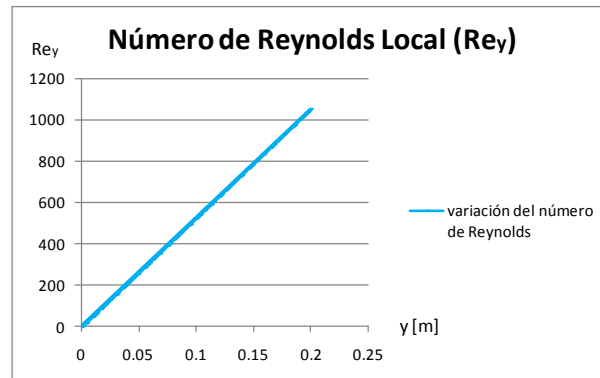


Figura 4.1 Número de Reynolds a lo largo de la aleta.

El número de Reynolds crece linealmente desde el inicio de la aleta cuyo valor en esta posición es de cero, hasta un valor de $Re_y = 1049.78$ al final de la aleta. Considerando que el número de Reynolds crítico es $Re_{y,c} = 5 \times 10^5$, se puede concluir que el flujo es laminar sobre toda la placa por lo tanto, el número de Reynolds sobre la longitud total de la aleta es:

$$Re_L = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{0.1 \quad 0.2 \quad 1.0510}{2.00247E-05} = 1049.78$$

El espesor de la capa límite de velocidad está fuertemente influenciada por el número de Reynolds, conociendo como varía este número se puede conocer cómo crece la capa límite localmente a lo largo de la aleta, como se muestra en la figura 4.2.

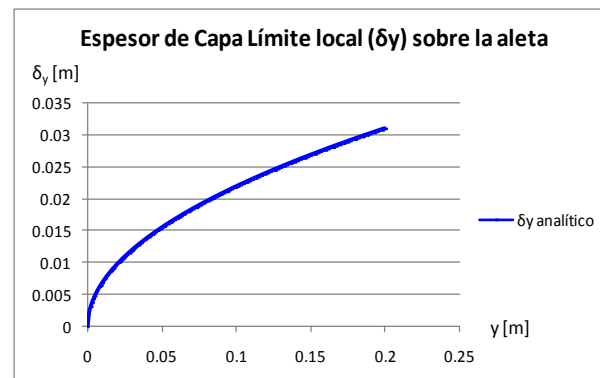


Figura 4.2 Crecimiento en el espesor de la capa límite de velocidad a lo largo de la aleta.

El espesor de la capa límite crece desde cero al inicio de la aleta, hasta un valor de $\delta_y = 0.031$ [m] al final de la aleta, por lo tanto el espesor de capa límite sobre la longitud total de la aleta es:

$$\delta = \frac{5L}{\sqrt{Re_L}} = \frac{5 \cdot 0.2}{\sqrt{1049.78}} = 0.031[m]$$

El espesor de capa límite térmica está relacionado con el espesor de la capa límite de velocidad y el número de Prandtl, también es necesario que la aleta sea isotérmica para poder evaluar las propiedades en la temperatura media en función de la temperatura de la superficie. En este caso el espesor de la capa límite térmica no se puede calcular, ya que la aleta no es isotérmica y la temperatura en su superficie varía dependiendo de su posición.

Más adelante se calculará el espesor de la capa límite térmica con la ayuda del código de CFD a una temperatura a mitad de pared.

El espesor de capa límite calculado corresponde a la solución exacta de Blasius, el inconveniente con este método es que el perfil de velocidades es de la forma:

$$\frac{df(\eta)}{d\eta} = \frac{v}{V_\infty}$$

La solución de Blasius requiere de métodos numéricos, la alternativa para calcular el perfil de velocidades es mediante la ecuación 2.135, en donde se obtiene un perfil de velocidades adimensional, como se muestra en la figura 4.3.

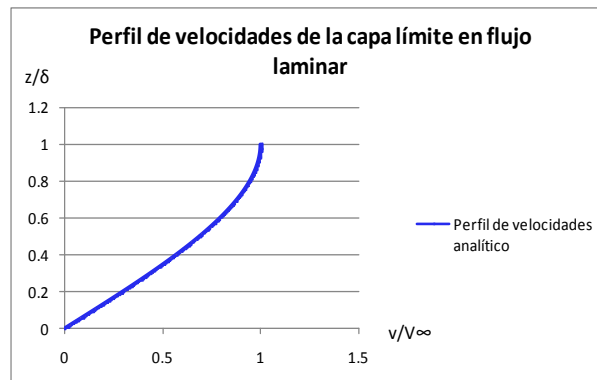


Figura 4.3 Perfil de velocidad de la capa límite.

Con los valores del número de Reynolds local y el número de Prandtl de la tabla 4.1, se obtiene la variación del número de Nusselt local a largo de la aleta, como se muestra en la figura 4.4.

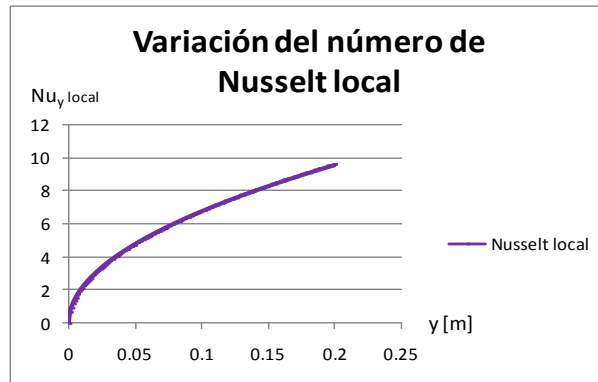


Figura 4.4 Crecimiento del número de Nusselt local.

El número de Nusselt local crece desde cero al inicio de la aleta hasta un valor de $Nu_y = 6.56$ al final de la aleta, también se observa un parecido con la curva del espesor de la capa límite local. El número de Nusselt proporciona una medida de la transferencia de calor por convección que ocurre en la superficie de la aleta. De aquí que el coeficiente de convección esté relacionado con las capas límite de velocidad y térmica.

A partir del número de Nusselt local y del número de Prandtl de la tabla 4.1, se calcula el valor del coeficiente de transferencia de calor por convección local en cada posición sobre la longitud de la aleta, como se muestra en la figura 4.5.

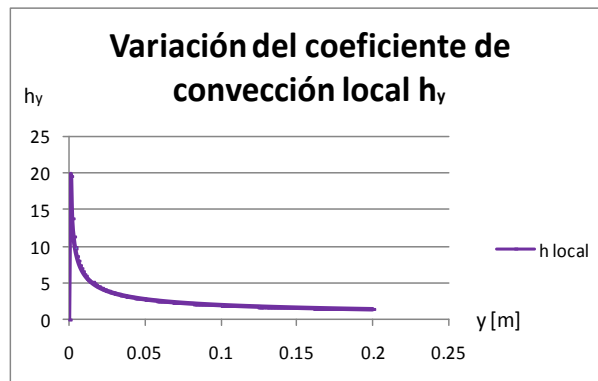


Figura 4.5 Disminución del coeficiente de convección.

El coeficiente de transferencia de calor por convección local disminuye conforme aumenta la distancia en dirección positiva sobre el eje y , desde un valor $h_y = 19.44$ al inicio de la aleta hasta un valor de $h_y = 1.37$ al final de la aleta.

Con el coeficiente de transferencia de calor por convección local se calcula el número de Nusselt promedio sobre la longitud total de la aleta:

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} = 0.664 \cdot 32.40 \cdot 0.888 = 19.12$$

Con el número de Nusselt promedio, se calcula el coeficiente de transferencia de calor por convección promedio sobre la longitud total de la aleta:

$$\bar{h} = \frac{\bar{N}uk}{L} = \frac{19.12 \cdot 0.0287}{0.2} = 2.74 \text{ W / mK}$$

Con el coeficiente de transferencia de calor por convección promedio sobre la longitud total de la aleta, el cálculo de la distribución de temperaturas se hace por medio de la ecuación de la temperatura de la aleta de área de sección transversal uniforme sobre el eje x , para las condiciones de contorno que se muestran en la figura 4.6.

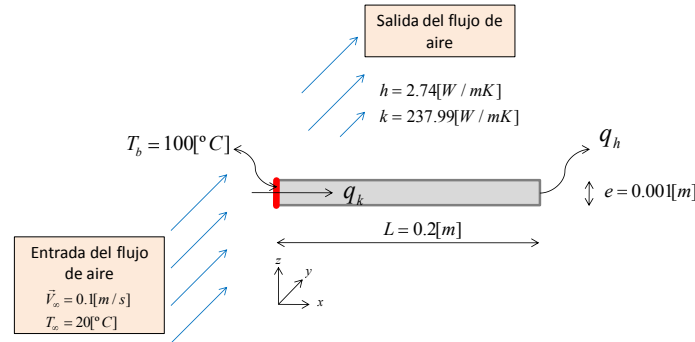


Figura 4.6 Transferencia de calor unidimensional en la aleta de área de sección transversal rectangular.

La ecuación de la temperatura de la aleta corresponde a la condición física en la cual se tiene transferencia de calor por convección en el extremo. De las cuatro condiciones físicas que se tienen en el cálculo de la temperatura en la aleta, la ecuación de la temperatura de la aleta con convección en el extremo es la mejor aproximación. La distribución de la temperatura para este caso se muestra en la figura 4.7.

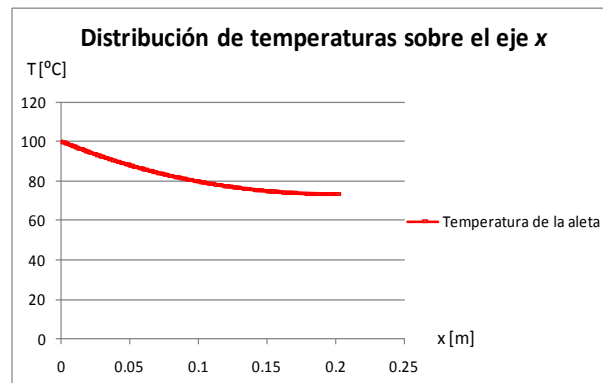


Figura 4.7 Disminución de la temperatura en la aleta con convección en el extremo, a lo largo de la aleta en la dirección x .

De acuerdo a la figura 4.7 las temperaturas al inicio, al centro y al final de la aleta se muestran en la tabla 4.4.

T [°C]	100	79.5451916	73.1861374
x [m]	0	0.1	0.2

Tabla 4.4 Temperatura de la aleta en diferentes posiciones sobre el eje x .

El valor de la temperatura a lo largo de la aleta en la dirección x , disminuye desde un valor $T = 100$ [°C] en la base de la aleta, hasta un valor de $T = 73.18$ [°C] al final de la aleta. La ecuación que describe esta disminución en la temperatura de la aleta considera

que la transferencia de calor es unidimensional sobre el eje x , y no varía respecto a y . Estas características y el hecho de que el coeficiente de convección sea de 2.74 [W/mK], que es un valor bajo de este coeficiente, hace que la transferencia de calor desde la base hacia el resto de la aleta, alcance el valor máximo de 73.18 [°C].

VARIACIÓN DE PARÁMETROS EN LA DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS DE LA ALETA DE ÁREA DE SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR

Variando la velocidad de entrada del flujo de aire en el caso base de acuerdo a los valores de la tabla 4.5, se observa un efecto de enfriamiento sobre la aleta, esta variación de velocidad también influye en la dirección de flujo de calor, lo que ocasiona que la temperatura varíe en dos direcciones. El incremento en la velocidad de entrada del flujo de aire afecta a la capa límite, lo que puede provocar un cambio en la naturaleza del flujo de aire, si esto sucede, se pueden tener diferentes condiciones de flujo y las ecuaciones utilizadas anteriormente dejan de ser las adecuadas. La naturaleza del flujo que se desarrolla sobre la aleta se determina calculando el número de Reynolds para las distintas velocidades que se muestran en la tabla 4.5, de este modo se selecciona la ecuación apropiada para el cálculo del coeficiente de convección.

V_{∞} [m/s]	0.1	0.3	0.5	0.8	1	5	10
--------------------	-----	-----	-----	-----	---	---	----

Tabla 4.5 Velocidades del flujo de aire.

Con las velocidades de la tabla 4.5, el número de Reynolds local sobre la longitud total de la aleta varía en la forma que se muestra en la figura 4.8.

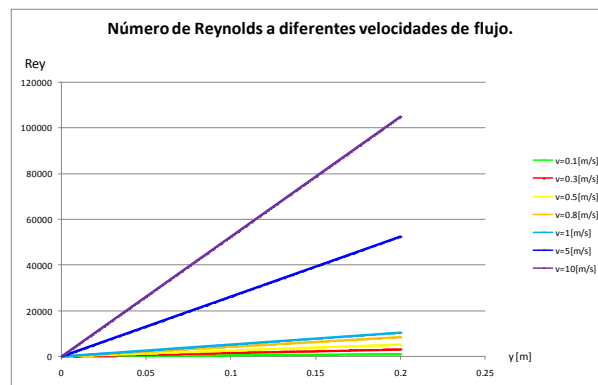


Figura 4.8 Variación del número de Reynolds sobre la aleta a diferentes velocidades de flujo.

La figura 4.8 muestra que el número de Reynolds local en las distintas velocidades, crece desde cero al inicio de la aleta, hasta un valor máximo Re_L al final de la aleta, como se muestra en la tabla 4.6.

Re_L	1049.78137	3149.34411	5248.90685	8398.25096	10497.8137	52489.0685	104978.137
V_{∞} [m/s]	0.1	0.3	0.5	0.8	1	5	10

Tabla 4.6 Número de Reynolds sobre la longitud total de la aleta a diferentes velocidades de flujo.

En la literatura el número de Reynolds crítico es de $Re_{y,c} = 5 \times 10^5$, donde se puede concluir que el flujo sigue siendo laminar sobre toda la placa, pero si se toma un Reynolds crítico de sólo 10^5 , en la situación donde la velocidad de entrada del flujo de aire es de 10 [m/s] la naturaleza del flujo se convierte en flujo turbulento, aun así se

debe determinar si el flujo es turbulento sobre toda la aleta, o si ocurre la transición en algún punto de la misma.

Con el número de Reynolds crítico de 5×10^5 , la transición sobre la aleta se alcanzará hasta un valor de la velocidad de entrada del flujo de aire de 48 [m/s]. En este caso el número de Reynolds crítico sobre la aleta es $Re_{c,y} = 501,375.58$ y la transición ocurre a los 19.9 [cm].

Considerando que la transición ocurre para un valor de $Re_{c,y} = 5 \times 10^5$, el flujo de aire sobre la aleta en las distintas velocidades, permanece como laminar sobre la longitud total de la aleta. Suponiendo que la velocidad de flujo no es lo suficientemente fuerte para cambiar la dirección de flujo de calor y hacer que la conducción se vuelva bidimensional, se puede suponer que la temperatura sólo varía en la dirección x , por tal motivo, el cálculo de la distribución de temperaturas en la aleta se hace con la ecuación de la temperatura de la aleta, de área de sección transversal uniforme, sobre el eje x .

La figura 4.9 muestra las capas límite locales de velocidades calculadas con diferentes velocidades del flujo de aire.

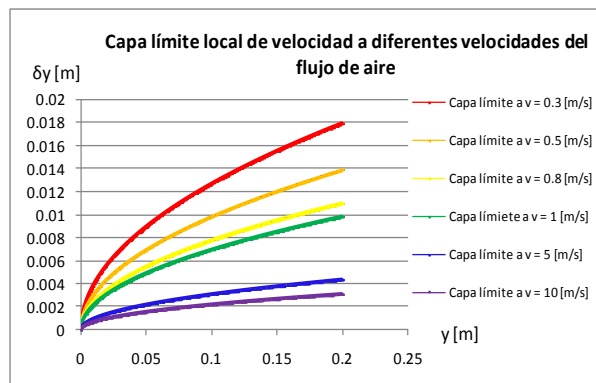


Figura 4.9 Capas límite de velocidad locales a diferentes velocidades del flujo de aire.

Conforme se aumenta la velocidad del flujo de aire el espesor de capa límite disminuye.

La distribución de temperatura sobre el eje x en la aleta, a diferentes velocidades de entrada del flujo de aire se muestra en la figura 4.10.

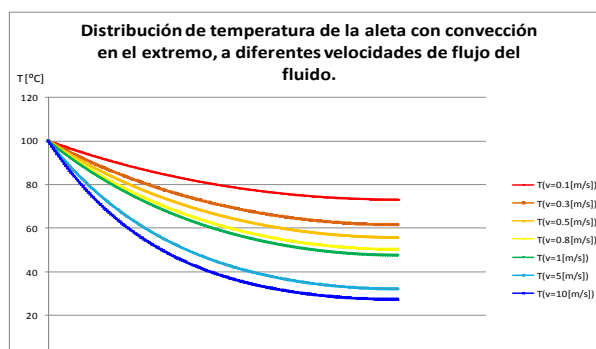


Figura 4.10 Distribución de temperatura sobre el eje x , en la aleta de 0.001 [m] de espesor a diferentes velocidades de flujo de aire.

Los efectos de incrementar la velocidad de flujo predicen una mayor transferencia de calor es decir, conforme se incrementa la velocidad del flujo de aire la temperatura en la aleta disminuye. En todos los casos el valor de la temperatura a lo largo de la aleta en la dirección x , disminuye desde un valor $T_0 = 100$ [°C] en la base de la aleta hasta un valor de T_L al final de la aleta, como se muestra en la tabla 4.7.

V_∞ [m/s]	0.1	0.3	0.5	0.8	1	5	10
T_L [°C]	73.1861374	61.5952762	55.7431573	50.3347913	47.8114758	32.1856202	27.5218303

Tabla 4.7 Temperatura en el extremo de la aleta a diferentes velocidades de flujo.

Variando el espesor de la aleta en el caso base de acuerdo a la tabla 4.8.

Espesor e [m]	0.001	0.02	0.05
-----------------	-------	------	------

Tabla 4.8 Espesores de la aleta.

La figura 4.12 muestra las capas límite de velocidad locales de las aletas mediana y gruesa.

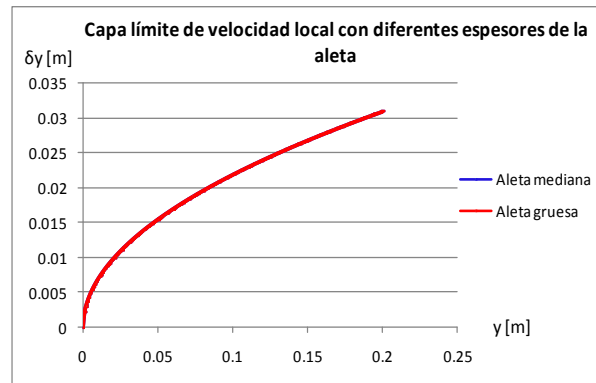
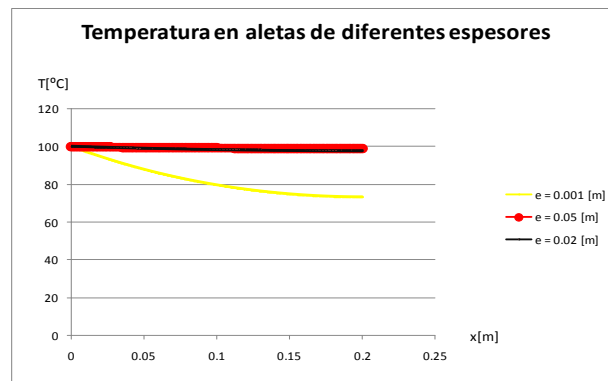


Figura 4.12 Capas límite de velocidad y térmica locales de las aletas mediana y gruesa.

El incremento en el espesor de la aleta no influye en el desarrollo de la capa límite, por lo que el flujo de aire no se ve afectado y las capas límite permanecen de la misma forma.

La figura 4.13 muestra la distribución de temperaturas sobre el eje x de las aletas delgada, mediana y gruesa.



Gráfica 4.13 Temperatura en aletas de diferente espesor y velocidad de flujo de 0.1 [m/s]

El efecto de aumentar el espesor en la aleta predice menos transferencia de calor. Con el aumento en el espesor se aumenta el volumen de la aleta, esto ocasiona que en la conducción del calor exista una mayor resistencia térmica. La aleta de menor espesor presenta una mayor transferencia de calor debido a su poca resistencia térmica en comparación con las de mayor espesor.

Las aletas de 0.02 [m] y 0.05 [m] de espesor tienen una temperatura similar, de hecho la diferencia es prácticamente de un grado. En todos los casos el valor de la temperatura a lo largo de la aleta en la dirección x , disminuye gradualmente desde $T_b = 100$ [°C] en la base de la aleta, hasta un valor de T_L al final de la aleta. La tabla 4.9 muestra la temperatura en el extremo de la aleta en sus distintos espesores.

Esesor e [m]	0.001	0.02	0.05
Temperatura T_L [°C]	73.18	97.83	98.9

Tabla 4.9 Temperatura en el extremo de la aleta con diferente espesor y velocidad de flujo de 0.1 [m/s].

DISCUSIÓN

Todos los modelos matemáticos se programaron en una hoja de cálculo, por tal motivo en la sustitución de datos en las ecuaciones, se truncaron los datos para no tomar todos los valores de las cifras significativas, que son más extensos en la hoja de cálculo.

En la ecuación de la temperatura de la aleta de área de sección transversal uniforme, la transferencia de calor se desarrolla sobre el eje x , debido a la existencia de un gradiente de temperaturas entre la base de la aleta que se definió como una superficie isotérmica y el resto de la aleta. La ecuación 2.41 describe el flujo de calor unidimensional en la dirección x , esto significa que la temperatura de la base será la misma en cualquier posición a largo de eje y , por lo tanto la variación de la temperatura en la dirección x será la misma en cualquier posición sobre el eje y , como se muestra en la figura 4.11.

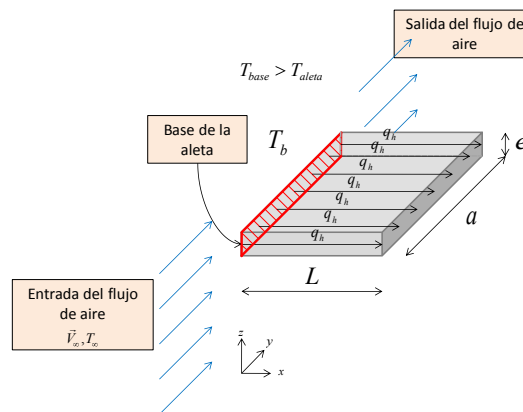


Figura 4.11 Conducción unidimensional en la dirección x .

El flujo de aire sobre la aleta es un factor que influye fuertemente en la dirección del flujo de la transferencia de calor en la aleta, esto trae como consecuencia que en el interior de aleta la transferencia de calor por conducción se desarrolle bidimensionalmente, como se muestra en la figura 4.12, en cuyo caso la ecuación de distribución de temperatura en la aleta de sección transversal uniforme sobre el eje x , no es suficiente para describir la distribución de temperatura, por lo tanto se necesita de otro método más eficaz para describir el fenómeno, por ejemplo un método de CFD.

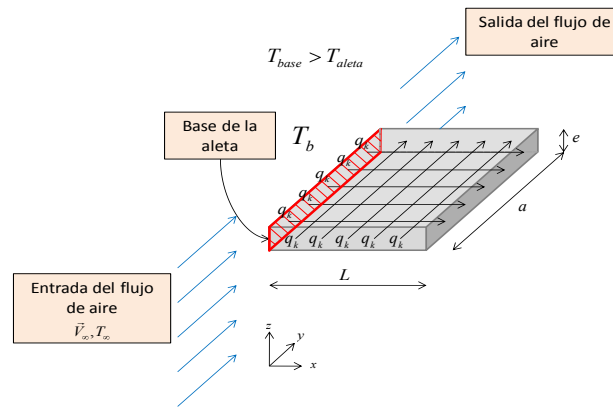


Figura 4.12 Conducción bidimensional en la aleta.

La condición de la naturaleza de la capa límite sobre la aleta es lo primero que se debe determinar, y el número de Reynolds es un indicativo de las condiciones que presenta la capa límite. En los casos anteriores se concluyó que el flujo de aire es laminar sobre toda la aleta en las diferentes velocidades, ya que el número de Reynolds obtenido resultó ser menor que el número de Reynolds crítico en todos los casos. La figura 4.13 muestra las zonas sobre la superficie de la aleta en donde se desarrollan los casos de las condiciones de la capa límite mezclada.

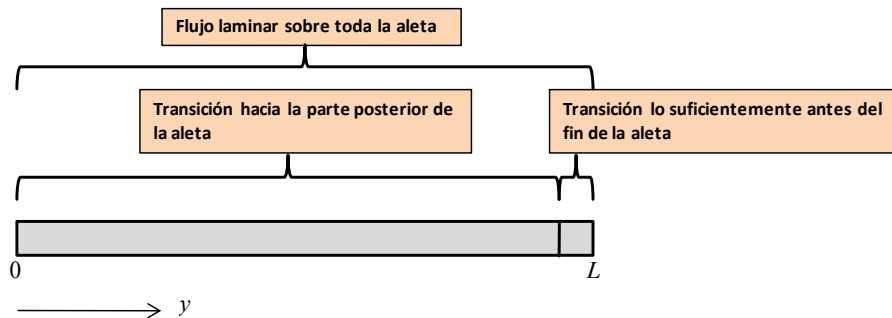


Figura 4.13 Condiciones de capa límite mezclada.

La situación en la que se alcanza el número de Reynolds crítico, es donde la velocidad de flujo de aire es de 48 [m/s], a esta velocidad se cumple que la transición ocurre en el rango de $0.95 \leq (y_c / L) \leq 1$, por lo que la transición ocurre hacia la parte posterior de la aleta, exactamente a los 19.9 [cm]. En este caso la capa límite es laminar en casi toda su longitud y se puede concluir que entre más alta sea la velocidad de flujo, la transición ocurrirá más cerca del inicio de la aleta, es decir hacia $y = 0$.

4.2 ALETA DE SECCIÓN TRANSVERSAL CIRCULAR

Solución analítica. Caso adicional.

Este caso adicional consta de una varilla de aluminio cuyas dimensiones son 0.2 [m] de largo, 0.005 [m] de diámetro. Sobre la varilla existe un flujo de aire a 20 [°C], con una velocidad de 0.1 [m/s] y que se desarrolla paralelo al eje y . La base de la varilla se define como una superficie de temperatura constante que se encuentra a 100 [°C], tal y como se muestra en la figura 4.14.

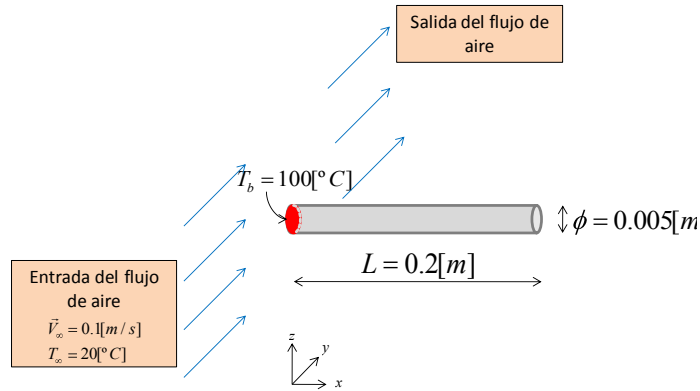


Figura 4.14 Aleta de sección transversal circular o varilla.

El objetivo de este análisis es conocer como se distribuye la temperatura en la varilla, para ello se utilizaran las correlaciones del coeficiente de transferencia de calor del cilindro, en donde se tendrán tres casos:

1. Churchill y Bernstein.
2. Hilpert.
3. Zhukauskas.

SUPOSICIONES

1 La varilla es un cuerpo opaco, por lo tanto no hay transferencia de calor por radiación. **2** El flujo es estacionario e incompresible. **3** El flujo es totalmente desarrollado en y . **4** El aire es un gas ideal.

CHURCHILL Y BERNSTEIN

Caso 1.

SOLUCIÓN

Utilizando la correlación de Churchill y Bernstein, las propiedades se evalúan a la temperatura media en términos de la temperatura de la base, donde se debe cumplir que:

$$Re_D Pr > 0.2$$

Al evaluar las propiedades del fluido a la temperatura media se obtienen las mismas propiedades que en la tabla 4.1 y 4.2.

Calculando el número de Reynolds de la varilla se tiene:

$$Re_D = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{0.1 \cdot 0.005 \cdot 1.0510768}{2.00247 \times 10^{-5}} = 26.24$$

Verificado que la restricción $Re_D Pr > 0.2$ se cumpla, se tiene:

$$Re_D Pr = 18.43$$

Calculando el número de Nusselt promedio de la varilla.

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}D}{k} = 0.3 + \frac{0.62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.4}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} = 0.3 + \frac{0.62 \cdot 26.24^{1/2} \cdot 0.70^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.4}{0.70}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{26.24}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} = 2.78$$

Despejando el coeficiente de convección promedio.

$$\bar{h} = \frac{k\bar{Nu}}{D} = 16.005 [W / mK]$$

Con el coeficiente de transferencia de calor por convección promedio de la varilla, se calcula la distribución de temperaturas, a partir de la ecuación de la temperatura de la aleta de área de sección transversal uniforme sobre el eje x, figura 4.15.

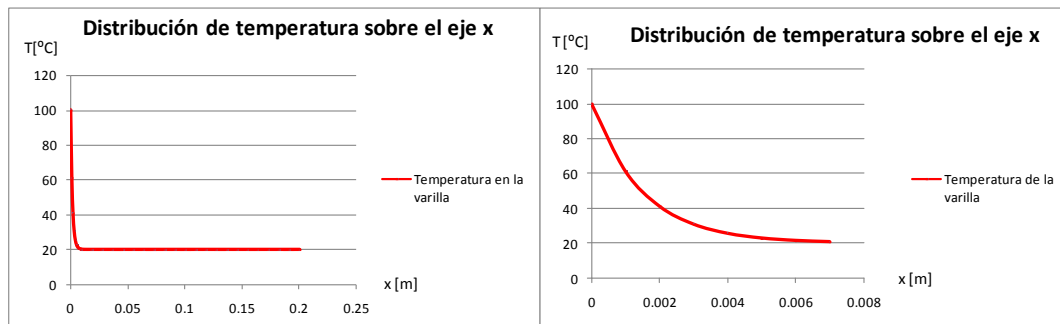


Figura 4.15 Distribución de temperatura en la varilla calculada mediante la correlación de Churchill y Bernstein.

Las distribución de temperatura en la varilla muestra una disminución drástica de temperatura que disminuye rápidamente desde los 100 [°C] en la base hasta la temperatura del fluido a los 6 [mm] de longitud aproximadamente, pasando este punto la temperatura prácticamente es la misma que la temperatura del fluido.

Graficando los valores en los cuales se nota la disminución de temperatura, es posible determinar cuatro puntos que indican los valores más representativos de la temperatura de la varilla, tal y como se muestra en la tabla 4.10.

Valores críticos	x [m]	T(x) [°C]
Máximo superior	0	100
	0.001	61.0461572
	0.002	41.0598377
	0.003	30.8053176
	0.004	25.5439596
	0.005	22.8444779
Mínimo superior	0.006	21.4594361
Estabilización	0.007	20.748803
Mínimo inferior	0.2	20

Tabla 4.10 Valores representativos de la temperatura en la varilla.

El valor máximo superior corresponde a la temperatura de la base que se definió como una superficie isotérmica o de temperatura constante. El valor mínimo superior corresponde a la temperatura mayor que la temperatura de estabilización, en otras palabras es el valor mínimo de temperatura que se tiene antes de comenzar a estabilizarse o el valor mínimo de las temperaturas mayores de 20[°C]. La estabilización es la zona más grande en este caso y comprende la zona donde la grafica se considera constante, aunque en realidad en este rango la temperatura sigue disminuyendo pero es tan pequeña que no se nota. El valor mínimo se encuentra en el extremo final de la varilla y es el valor al cual tiende la estabilización, que en este caso es la temperatura del fluido.

HILPERT

Caso 2.

SOLUCIÓN

Utilizando la correlación de Hilpert, las propiedades se evalúan a la temperatura media en términos de la temperatura de la base y se debe cumplir que $Pr \geq 0.7$.

Al evaluar las propiedades del fluido a la temperatura media, se obtienen las mismas propiedades que en la tabla 4.1 y 4.2.

El número de Reynolds es el mismo que en el caso anterior. La condición que se debe cumplir con este método es $Pr \geq 0.6$

$$Re_D = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{0.1 \cdot 0.005 \cdot 1.0510768}{2.00247 \times 10^{-5}} = 26.24$$

$$Pr = 0.70$$

El valor del número de Prandtl se obtuvo directamente de la interpolación de datos en la tabla 4.1

De acuerdo al número de Reynolds, éste se encuentra entre el rango de 4 a 40 de la tabla 2.3, por lo tanto los valores de las constantes son; $C = 0.911$ y $m = 0.385$.

Sustituyendo en el número de Nusselt promedio de la correlación de Hilpert, se obtiene:

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}D}{K} = C Re_D^m Pr^{1/3} = 0.911 \cdot 26.24^{0.385} \cdot 0.7^{1/3} = 2.84$$

Despejando el coeficiente de convección promedio.

$$\bar{h} = \frac{k\bar{Nu}}{D} = \frac{2.84 \cdot 0.0287}{0.005} = 16.38 [W / mK]$$

Sustituyendo en la ecuación de la temperatura de la aleta de área de sección transversal uniforme sobre el eje x , se obtiene la figura 4.16.

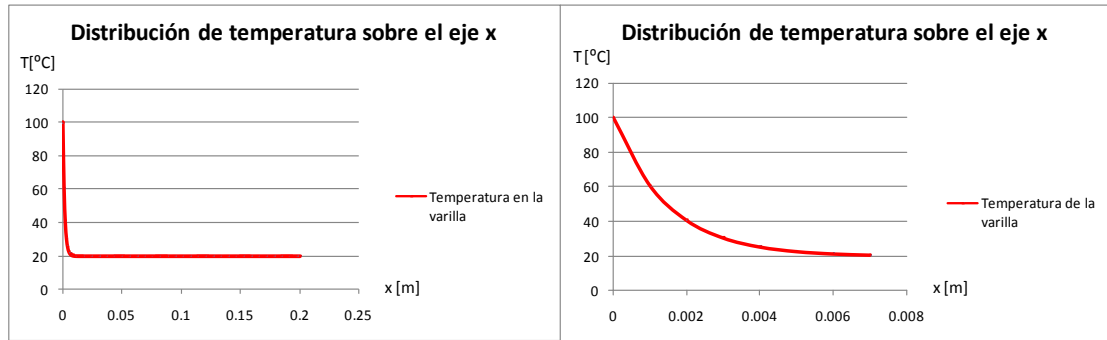


Figura 4.16 Distribución de temperatura en la varilla calculada mediante la correlación de Hilpert.

Los resultados son muy similares a los del caso anterior y la forma de distinguir las diferencias es mediante los valores de temperatura a lo largo de la varilla. Graficando los valores en los cuales se nota la disminución de temperatura, es posible determinar cuatro puntos que indican los valores más representativos de la temperatura de la varilla, tal y como se muestra en la tabla 4.11.

Valores críticos	x [m]	T(x) [°C]
Máximo superior	0	100
	0.001	60.7257448
	0.002	40.7323286
	0.003	30.554244
	0.004	25.3728681
	0.005	22.7351757
Mínimo superior	0.006	21.3924008
Estabilización	0.007	20.708832
Mínimo inferior	0.2	20

Tabla 4.11 Valores representativos de la temperatura en la varilla.

La diferencia entre el método de Hilpert y el de Churchill y Bernstein es de un grado en los primeros dos milímetros, después la diferencia es aún menor y en el extremo los resultados son idénticos.

ZHUKAUSKAS

Caso3.

SOLUCIÓN

Utilizando la correlación de Zhukauskas, las propiedades se evalúan a la temperatura del fluido, excepto Pr_s que es el número de Prandtl evaluado a la temperatura de la superficie que se considera isotérmica. El número de Prandtl debe encontrarse en el rango de $0.7 < Pr < 500$, y el número de Reynolds debe encontrarse en el rango de $1 < Re_D < 10^6$.

Interpolando la temperatura del fluido en una tabla de propiedades termofísicas del aire se obtiene la tabla 4.12.

Análisis numérico del calor conjugado en una superficie extendida

Propiedades termofísicas del aire a presión atmosférica							
T [K]	ρ [kg/m ³]	Cp [kJ/kg*K]	$\mu \cdot 10^7$ [N*s/m ²]	$\nu \cdot 10^6$ [m ² /s]	$k \cdot 10^3$ [W/m*K]	$\alpha \cdot 10^6$ [m ² /s]	Pr
250	1.3947	1.006	159.6	11.44	22.3	15.9	0.72
293.15	1.1933621	1.006863	181.175	15.28035	25.752	21.5958	0.708781
300	1.1614	1.007	184.6	15.89	26.3	22.5	0.707

Tabla 4.12 Interpolación de la temperatura del fluido para el cálculo de propiedades termofísicas del aire.

Interpolando la temperatura de la superficie en una tabla de propiedades termofísicas del aire se obtiene la tabla 4.13.

Propiedades termofísicas del aire a presión atmosférica							
T [K]	ρ [kg/m ³]	Cp [kJ/kg*K]	$\mu \cdot 10^7$ [N*s/m ²]	$\nu \cdot 10^6$ [m ² /s]	$k \cdot 10^3$ [W/m*K]	$\alpha \cdot 10^6$ [m ² /s]	Prs
350	0.995	1.009	208.2	20.92	30	29.9	0.7
373.15	0.9376343	1.011315	218.3397	23.46187	31.7594	33.7892	0.69537
400	0.8711	1.014	230.1	26.41	33.8	38.3	0.69

Tabla 4.13 Interpolación de la temperatura de la superficie para el cálculo de propiedades termofísicas del aire.

Calculando el número de Reynolds evaluado a la temperatura del fluido.

$$Re_D = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{0.1 \cdot 0.005 \cdot 1.1933621}{1.81175 \times 10^{-5}} = 32.93 \quad 1 < 32.93 < 10^6$$

Los valores de las constantes son; $C = 0.75$ y $m = 0.4$

Ya que el número de Prandtl evaluado a la temperatura del fluido e menor que 10, se tiene que $n = 0.37$.

Calculando el número de Nusselt promedio.

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}D}{k} = C Re_D^m Pr^n \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{1/4} = 0.75 \cdot 32.93^{0.4} \cdot 0.7^{0.37} \left(\frac{0.7}{0.69} \right)^{1/4} = 2.39$$

Despejando el coeficiente de convección promedio.

$$\bar{h} = \frac{k\bar{Nu}}{D} = \frac{0.0257 \cdot 2.39}{0.005} = 12.34 [W / mK]$$

Sustituyendo en la ecuación de la temperatura de la aleta de área de sección transversal uniforme sobre el eje x, se obtiene la figura 4.17.

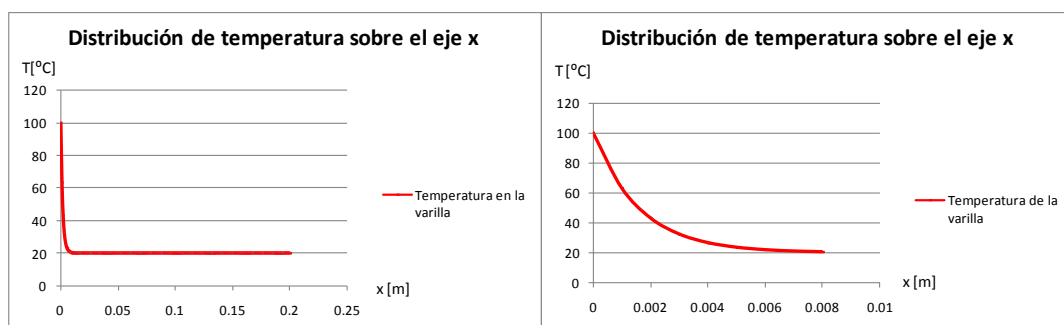


Figura 4.17 Distribución de temperatura en la varilla calculada mediante la correlación de Zhukaskas.

Graficando los valores en los cuales se nota la disminución de temperatura, es posible determinar cuatro puntos que indican los valores más representativos de la temperatura de la varilla, como se muestra en la tabla 4.14.

Valores críticos	x [m]	T(x) [°C]
Máximo superior	0	100
	0.001	63.0697081
	0.002	43.1874969
	0.003	32.4834841
	0.004	26.7207502
	0.005	23.6182594
	0.006	21.9479672
Mínimo superior	0.007	21.0487297
Estabilización	0.008	20.564606
Mínimo inferior	0.2	20

Tabla 4.14 Valores representativos de la temperatura en la varilla.

DISCUSIÓN

La disminución de temperatura de la varilla en los tres casos fue muy drástica y la zona en la cual se observó esta disminución es muy pequeña, de apenas 6 [mm]. La zona donde se encuentran las temperaturas más elevadas es aun más pequeña, de prácticamente 3[mm].

El método para calcular el número de Nusselt promedio en el caso tres difiere de los otros dos en el aspecto de que se evalúa a la temperatura del fluido y no a la temperatura de película. También se hacen más cálculos puesto que se interpola dos veces, sin embargo, en los tres casos la obtención del coeficiente de convección promedio resulta bastante sencilla ya que solo se tiene que despejar este coeficiente.

Pese a que la forma de calcular el número de Nusselt promedio en los tres casos es distinta, los resultados obtenidos son bastante parecidos entre sí, lo que ocasiona que en una grafica las funciones de la distribución de la temperatura se encimen una sobre la otra viéndose como una sola, tal y como se muestra en la figura 4.18.

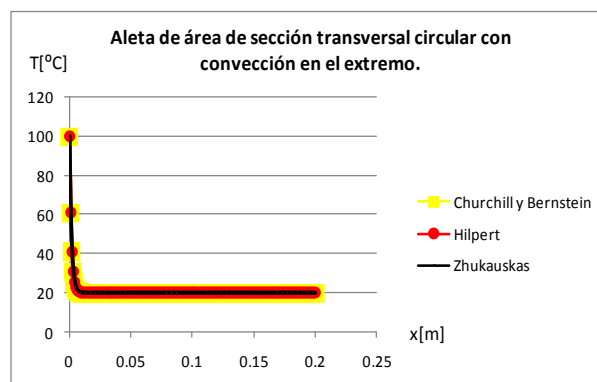


Figura 4.18 Distribución de temperatura en la varilla calculada mediante las tres correlaciones.

La distribución de temperatura obtenida mediante la correlación de Churchill y Bernstein está graficada con una serie de puntos cuadrados de mayor espesor que las demás, la que le sigue es la de Hilpert que está graficada mediante una serie de puntos

circulares y por último, la distribución de temperatura obtenida mediante la correlación de Zhukaukas está graficada mediante una línea de menor espesor que las anteriores.

4.3 ALETA DE SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR

Solución numérica. Caso base.

El sistema consta de un dominio con una entrada de aire a 20 [°C] en el plano XZ , velocidad constante y unidireccional en la dirección y de 0.1 [m/s], y cinco salidas en las demás caras del dominio. La aleta se caracteriza por tener una superficie de temperatura constante de 100 [°C], el material del que está hecha la aleta es aluminio y sus dimensiones son: 0.2 [m] de ancho, 0.2 [m] de largo y 0.001 [m] de espesor. La figura 4.19 muestra una representación esquemática del modelo a simular, y cuyas medidas del dominio son: 0.4 [m] de longitud en x , 0.5 [m] de longitud en y , y 0.2 [m] de longitud en z . Las salidas tienen la misma configuración en todos los casos.

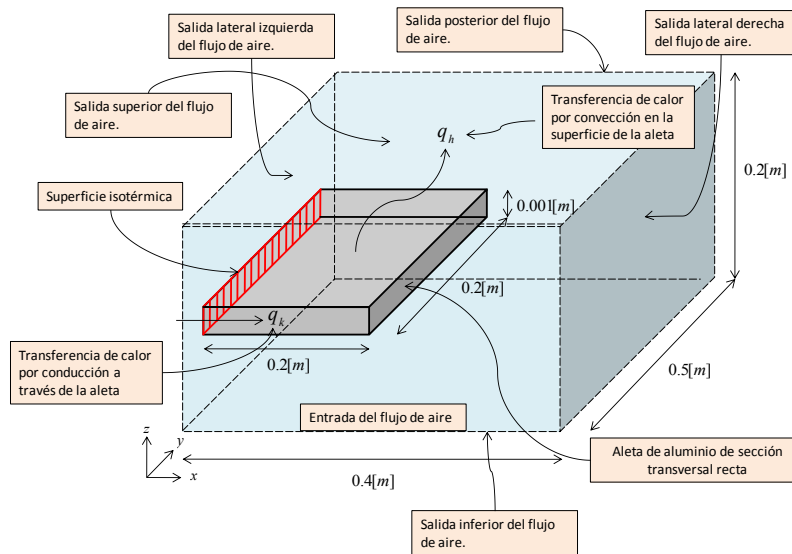


Figura 4.19 Aleta de área de sección transversal rectangular. Caso base a simular.

El caso conjugado considera que el dominio de cálculo involucra la transferencia de calor en las regiones sólidas y gaseosas. En la aleta el modo de transferencia de calor es por conducción, y en el flujo de aire la transferencia de calor es por conducción y convección. Este problema requiere de un manejo adecuado en la interface sólido-gas que se basa en el uso de un promedio armónico del coeficiente de difusión como lo describen Patankar y Spalding [21]. El procedimiento se divide en dos partes: la primera, analiza las ecuaciones de cantidad de movimiento y la segunda, analiza la ecuación de la energía. El cálculo de las velocidades se realiza con un cambio adecuado en el valor de Γ para las fases sólidas y gaseosas. Así, cuando las celdas de la malla caen en la región del fluido el coeficiente de difusión es igual a la viscosidad del gas, mientras que si las celdas caen en la región sólida se supone un valor de Γ muy grande. El cálculo del campo de temperaturas se realiza como un problema de conducción-convección en todo el dominio de cálculo. En la región sólida las velocidades son nulas y por consiguiente, sólo existe un efecto difusivo (conducción de calor).

DETALLES NUMÉRICOS

Las bases fundamentales del Código Dinámica de Fluidos Computacional (CFD), son las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas en el tiempo. La simulación de la transferencia de calor conjugado en una aleta de área de sección transversal uniforme inmersa en un fluido en movimientos, utiliza el modelo de turbulencia κ - ϵ estándar.

La discretización se hace mediante el establecimiento de un mallado en el dominio y en la aleta. El resultado es un volumen de control formado por pequeños volúmenes de control que discretizan el espacio del fluido y de la aleta, en donde el volumen total del volumen de control es igual a la suma de los pequeños volúmenes de control establecidos. En la discretización del dominio se obtiene un mallado de $100 \times 110 \times 103$, teniendo un total de 1,133,000 celdas. La figura 4.20 muestra un esquema de la discretización del modelo a simular, en este esquema se muestra la ubicación de la aleta, así como la entrada y la salida del flujo de aire en el dominio.

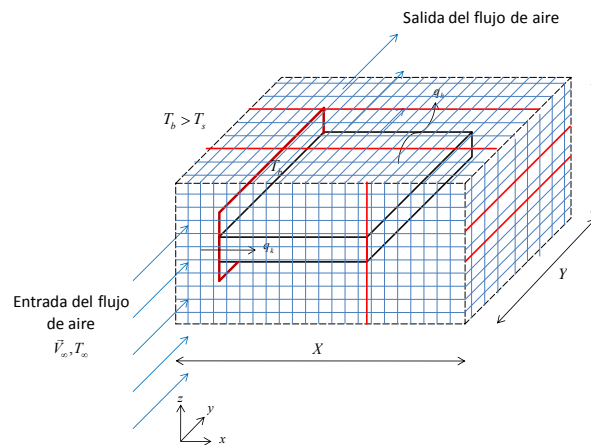


Figura 4.20 Discretización del volumen de control.

El mallado establecido para el caso base es determinado por la geometría de la aleta, en este caso en el plano XZ el mallado contempla dos regiones, una que contiene a la aleta y otra que contiene solamente al fluido. El mallado en el plano XZ se discretiza en 100 celdas, 60 para la región que contiene a la aleta y las 40 restantes en la región que contiene únicamente al fluido.

El mallado en el plano XY contempla tres regiones, una que contiene a la aleta y dos más que contienen solamente al fluido. El mallado en el plano XY se discretiza en 110 celdas, 10 en la región por donde entra el flujo de aire y que sólo contiene a éste, 50 en la región donde se encuentra la aleta y las 50 restantes en la región donde se encuentra la salida del flujo de aire.

El mallado en el plano YZ contempla tres regiones, una que contiene a la aleta y dos más que contienen solamente al fluido. El mallado en el plano YZ se discretiza en 103 celdas, 50 en la parte superior de la aleta, 3 en la región que contiene a la aleta y en la cual sólo se aprecia su espesor, y las 50 restantes en la parte inferior de la aleta.

CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera para un flujo periódico completamente desarrollado, supone que las longitudes en las tres direcciones son infinitas, es decir, no existe influencia de paredes o de posición en ninguna dirección. Esta técnica de simulación permite el ahorro de recursos computacionales en módulos repetitivos con geometría idéntica y en la región de flujo completamente desarrollado.

La dirección principal de flujo corresponde a la dirección Y, en donde se establece una condición de no deslizamiento en la superficie de la aleta. Además, la variación de la componente de velocidad en todo el dominio de cálculo (dirección del flujo, Y) se considera nula.

La condición de temperatura de pared uniforme considera que la temperatura del fluido se aproxima a la condición térmica de la pared si el flujo está completamente desarrollado. Ésta consideración es la más utilizada en simulaciones numéricas pero tiene el inconveniente de que su desarrollo matemático está enfocado a flujos laminares.

Las condiciones de frontera descritas se muestran en la figura 4.21, donde se observa que la entrada del flujo de aire se ubica en el plano XZ. En las demás caras del dominio las propiedades en la dirección perpendicular a la cara son igual a cero. La temperatura del flujo de aire en las diferentes salidas es la misma que la de la entrada. La base de la aleta se define como una superficie de temperatura constante a 100 [°C].

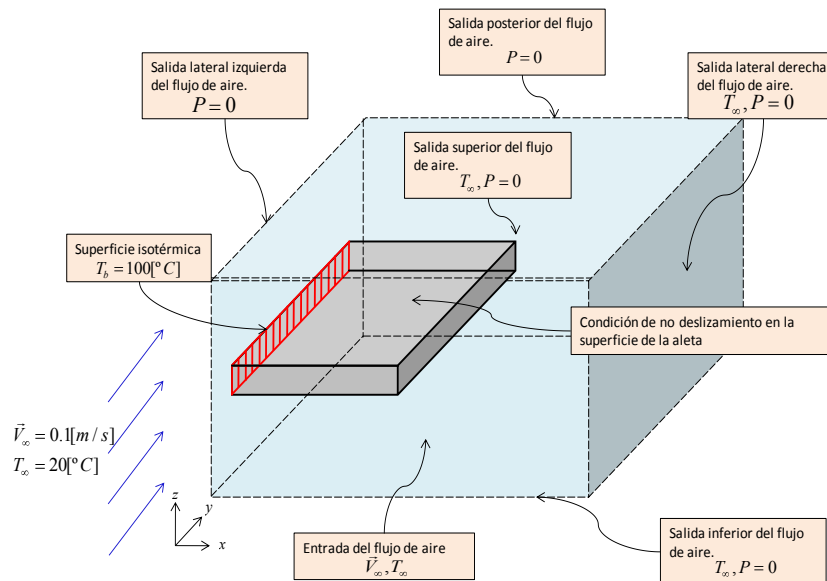


Figura 4.21 condiciones de frontera de la aleta de área de sección transversal uniforme.

RESULTADOS

En la solución del caso base mediante el código de CFD se analizó la transferencia de calor en la aleta y en el flujo de aire. Los resultados del comportamiento del flujo de aire sobre la aleta se presentan a través de las variables de temperatura dentro del sólido, y velocidad y temperatura en el flujo de aire sobre la superficie de la aleta.

La figura 4.22 muestra la magnitud del campo de temperaturas a través de la aleta, en un plano central XY en el centro del espesor. La aleta vista desde arriba, está inmersa en un flujo de aire paralelo al eje y .

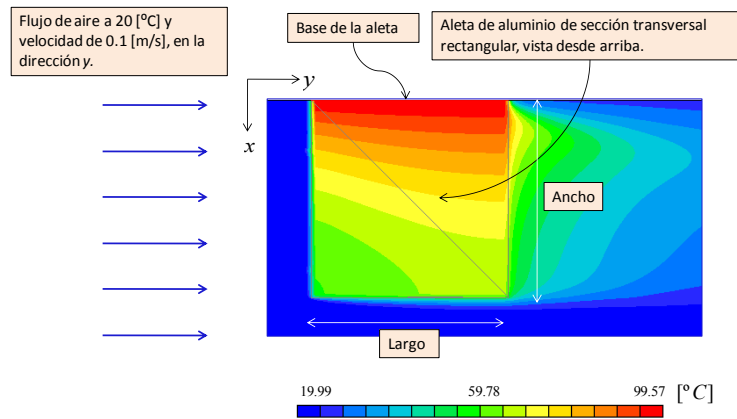


Figura 4.22 Campo de temperaturas de la aleta de sección transversal rectangular.

La transferencia de calor en el centro del espesor de la aleta muestra una disminución gradual de la temperatura en la dirección x , pero la disminución de temperatura no se comporta de la misma manera en diferentes posiciones a lo largo del eje y . La solución analítica considera que el flujo de calor varía en la dirección x , y que en la dirección y la temperatura se mantiene constante. De acuerdo a los resultados obtenidos en el código de CFD, se observa que la temperatura disminuye en dirección positiva sobre el eje x como se esperaba de acuerdo a la solución analítica, sin embargo la temperatura no se mantiene constante sobre el eje y , es decir la temperatura varía sobre este eje teniéndose una transferencia de calor por conducción bidimensional en el plano ubicado en el centro del espesor de la aleta. Esta variación de temperatura en ambos ejes se graficará en la intersección de planos X y Y sobre la aleta, como se muestra en la figura 4.23.

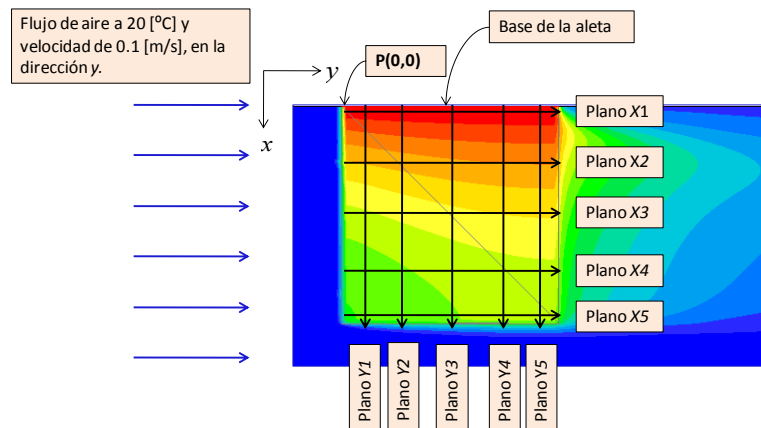


Figura 4.23 Distribución de planos X y Y , que se intersecan con el plano Z en el centro del espesor de la aleta.

La intersección de los planos X y Y con el plano Z en el centro del espesor de la aleta rectangular se representan mediante flechas que se ubican a una distancia determinada del punto P . Los planos que se intersecan para dar origen a las flechas paralelas al eje y , son los planos Z y X , donde el plano Z es mejor conocido como plano XY , y el plano X

es mejor conocido como plano YZ . Los planos que se intersecan para dar origen a las flechas paralelas al eje x , son los planos Z y Y , donde el plano Z es mejor conocido como plano XY , y el plano Y es mejor conocido como plano XZ . Las longitudes de los planos X y Y son del mismo tamaño de la aleta, y se ubican a diferentes distancias con el propósito de graficar la temperatura sobre esos planos. La distancia de los planos X y Y , al punto P se muestra en la tabla 4.15.

	Plano X1	Plano X2	Plano X3	Plano X4	Plano X5
Coordenadas del plano [m]	(0.001,0)	(0.05,0)	(0.1,0)	(0.15,0)	(0.199,0)
	Plano Y1	Plano Y2	Plano Y3	Plano Y4	Plano Y5
Coordenadas del plano [m]	(0,0.004)	(0,0.05)	(0,0.1)	(0,0.15)	(0,0.196)

Tabla 4.15 Posición de los planos X y Y en la intersección con el plano Z en el centro del espesor de la aleta, respecto al punto P .

Las temperaturas en los planos X que se intersecan con el plano Z en el centro del espesor de la aleta, se muestran en la figura 4.24.

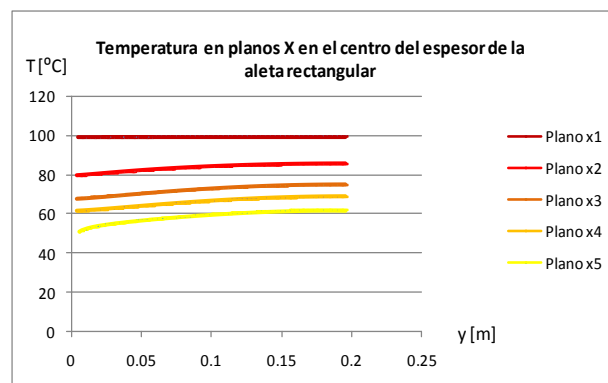


Figura 4.24 Distribución de temperatura en la intersección de los planos X con el plano Z en el centro del espesor de la aleta rectangular.

En el caso del plano $X1$ ubicado cerca de la base de la se aprecia que la temperatura se mantiene aproximadamente constante sobre el eje y , esto se debe a que el plano no está ubicado exactamente en la base donde la temperatura en cualquier posición sobre el eje y es la misma, al estar ligeramente desplazado de la base la constancia en la temperatura sobre el eje y se pierde, conforme se alejan los planos X de la base la variación de temperatura sobre el eje y es mayor. Aunque la temperatura en el plano $X1$ es aproximadamente constante, existe una variación de temperatura mínima la cual va desde los 99.0 [°C] hasta 99.40 [°C] sobre el eje y . La variación de temperatura en las demás graficas, es un poco más evidente mientras más crece la distancia sobre el eje x . A diferencia del plano $X1$, donde la temperatura varía muy poco sobre el eje y y la temperatura se mantiene aproximadamente constante, los demás planos X tienen una variación mayor que se incrementa gradualmente, donde se aprecia que las funciones no se comportan de manera constante y conforme se incrementa la distancia la variación es mayor.

La figura 4.25 muestra la distribución de temperatura en la intersección de los planos Y con el plano Z en centro del espesor de la aleta.

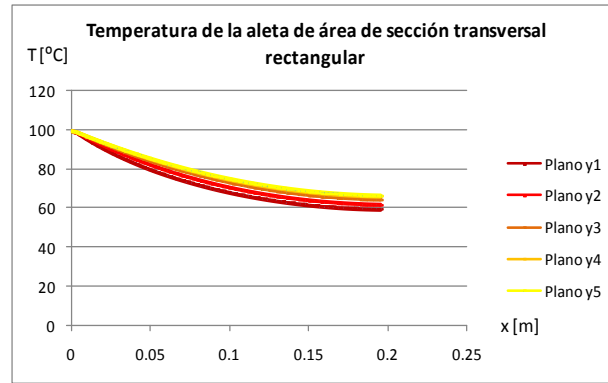


Figura 4.25 Temperatura en la intersección de los planos Y en el centro del espesor de la aleta.

Estas distribuciones de temperatura de los planos Y es similar a la distribución de temperatura de la aleta rectangular sobre el eje x . La diferencia entre ambos métodos radica en que el código de CFD brinda la posibilidad de mostrar distribuciones de temperatura de la aleta en distintas posiciones a lo largo del eje y , es decir determina la temperatura de la aleta de forma tridimensional mientras que la solución analítica sólo determina la transferencia de calor unidimensionalmente, por lo que únicamente se obtiene una sola distribución de temperaturas de forma analítica.

La figura 4.26 muestra la magnitud del campo de velocidades del flujo de aire, en planos XY en el dominio a diferentes distancias sobre el eje Z.

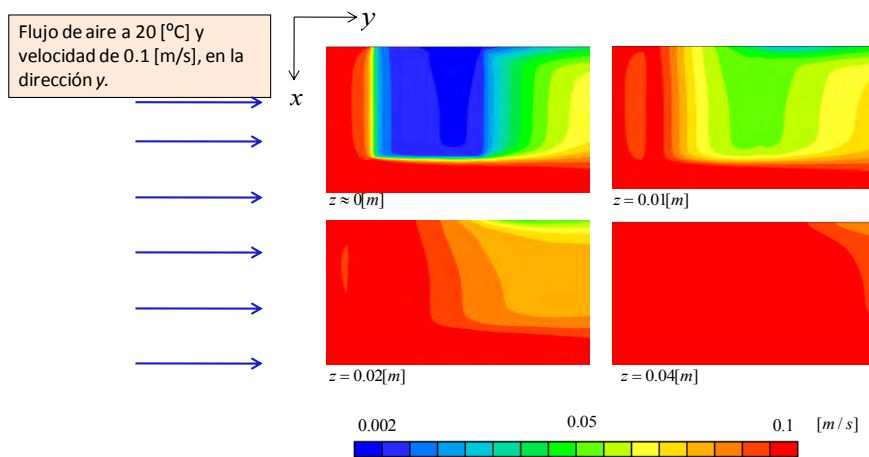


Figura 4.26 Campo de velocidades del flujo de aire en planos Z, a diferentes distancias sobre el eje z.

En el plano Z cercano a la superficie de la aleta la velocidad es muy baja, cercana a cero, conforme aumenta la distancia sobre el eje z la velocidad aumenta hasta alcanzar la velocidad máxima.

La figura 4.27 muestra la magnitud del campo de velocidades de un plano X en el dominio, ubicado a 0.1 [m] de distancia sobre el eje x perpendicular a la superficie de la aleta.

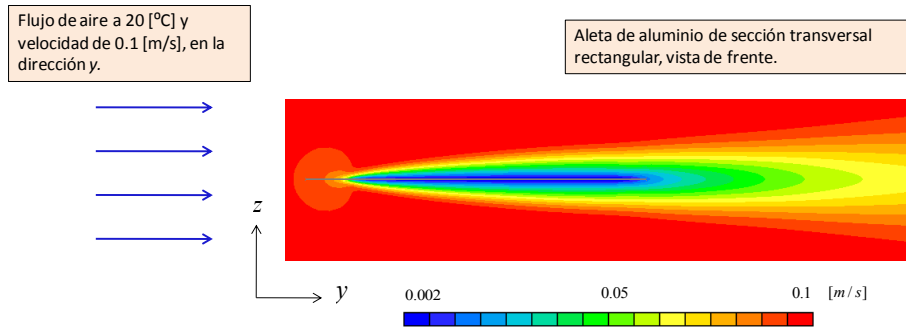


Figura 4.27 Campo de velocidades del flujo de aire sobre la aleta, en un plano YZ ubicado a 0.1 [m] de distancia sobre el eje x de la aleta.

La velocidad del flujo de aire en cualquier plano X es constante en la dirección y , sólo varía en la dirección z dentro de la capa límite, lo mismo pasa con la temperatura que solo varía dentro de la capa límite térmica. Los perfiles de velocidad y temperatura se determinan a partir de planos Z ubicados a una distancia de 0.1 [m] sobre el eje x , y en diferentes posiciones sobre el eje y , como se muestra en la tabla 4.16.

Posición de los planos Z sobre la superficie de la aleta							
	Plano Z1	Plano Z2	Plano Z3	Plano Z4	Plano Z5	Plano Z6	Plano Z7
Coordenadas de los planos z [m]	(0.1,0)	(0.1,0.018)	(0.1,0.025)	(0.1,0.05)	(0.1,0.1)	(0.1,0.15)	(0.1,0.199)

Tabla 4.16 Posición de los planos Z sobre la superficie de la aleta respecto al punto P en el plano XY, para la determinación de los perfiles de velocidad y temperatura de la capa límite.

El código de CFD grafica la velocidad y temperatura del flujo de aire en un plano Z en el cual se ajusta la longitud para determinar estas variables. Las variables que grafica el plano Z son velocidad, temperatura y distancia. Los perfiles de velocidad y temperatura se obtienen ajustando la longitud del plano Z a un tamaño un poco mayor al de la capa límite, en este caso se colocó la longitud igual a 0.004 [m], como se muestra en la figura 4.28.

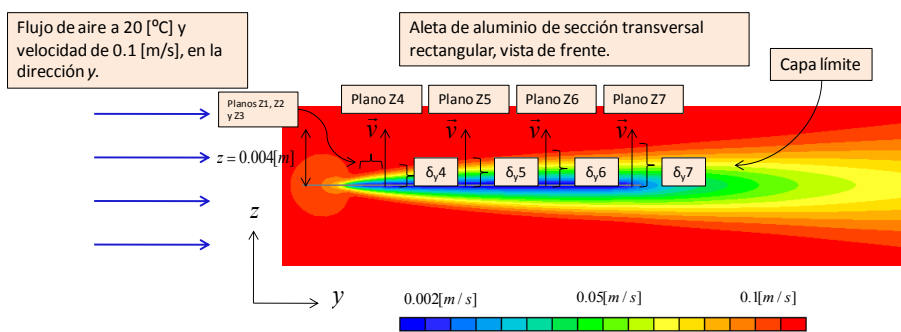
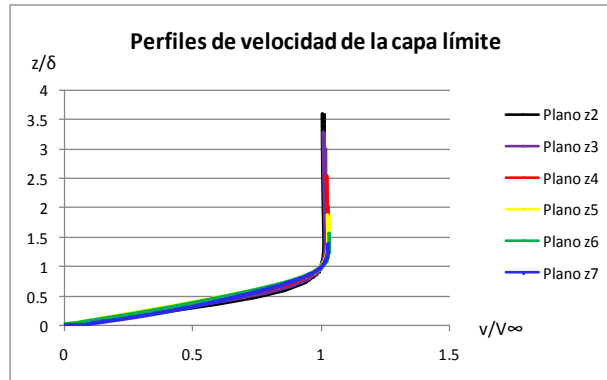


Figura 4.28 Ubicación de los planos Z sobre la superficie de la aleta.

En los planos Z la velocidad varía desde cero en la superficie de la aleta que coincide con el origen de los planos Z , hasta la velocidad del flujo de aire en la corriente libre, donde la distancia z es igual al espesor de la capa límite δ_y . Para obtener los perfiles de velocidad se divide la distancia z entre el espesor de la capa límite δ_y , y la velocidad del flujo de aire dentro de la capa límite entre la velocidad del flujo de aire de la corriente

libre V_∞ , con lo que se obtienen los perfiles de velocidad de los planos Z de la capa límite.

La figura 4.29 muestra los perfiles adimensionales de velocidad del flujo de aire de los planos Z en la capa límite, calculados en diferentes posiciones sobre la superficie de la aleta a lo largo del eje y.



Grafica 4.29 Perfiles adimensionales de velocidad de la capa límite en el plano X.

El aumento en el espesor de la capa límite local se calcula indirectamente graficando la distancia $z = \delta_y$ para $v = V_\infty$, en las posiciones de los planos Z sobre la superficie de la aleta a lo largo del eje y, estos puntos se muestran en la tabla 4.17.

	$z = \delta_y$ [m]	Posición del plano Z sobre la superficie de la aleta y [m]
Plano Z1	0	0
Plano Z2	0.01114463	0.018
Plano Z3	0.01215852	0.025
Plano Z4	0.01566887	0.05
Plano Z5	0.0213853	0.1
Plano Z6	0.02550415	0.15
Plano Z7	0.02860968	0.199

Tabla 4.17 Tamaño de la capa límite local en diferentes puntos sobre la superficie de la aleta

Ordenando las distancias de la aleta en las posiciones de la capa límite de velocidad $v = V_\infty$ en la tabla 4.30.

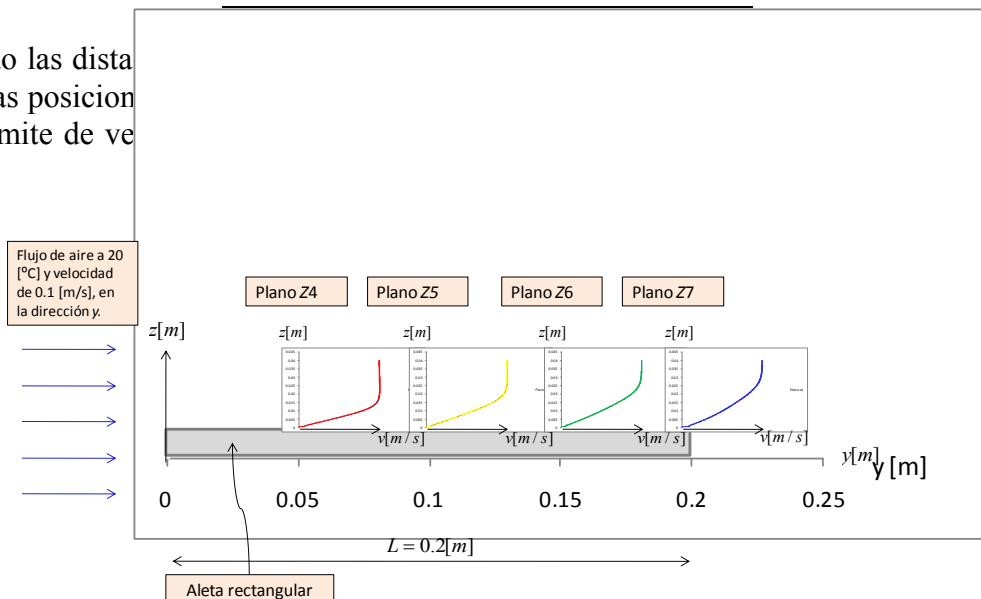


Figura 4.30 Tamaño del espesor de la capa límite local en diferentes puntos sobre el eje y.

Los primeros tres planos Z no se colocaron dentro de la figura 4.30 con el propósito de que no se encimaran las graficas, ya que estos tres se ubican dentro de los primeros cinco centímetros y los demás planos están separados entre sí por una distancia de cinco centímetros. También se observa que en las graficas de velocidad de cada plano Z , las curvas se levantan conforme aumenta la distancia y sobre la superficie de la aleta.

La capa límite se aproxima graficando los puntos que representan el tamaño del espesor de la capa límite local en diferentes posiciones a lo largo de la aleta sobre el eje y , estos puntos se muestran en la tabla 4.17 y con ellos se obtiene la figura 4.31.

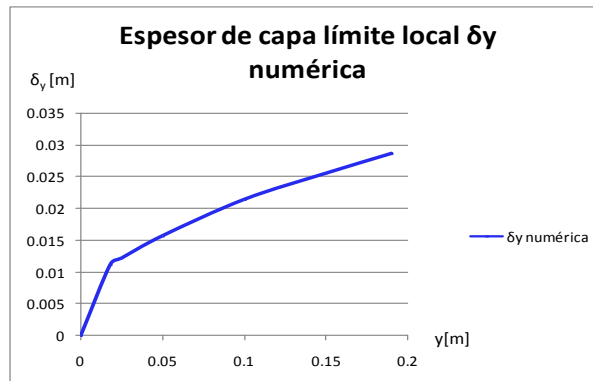


Figura 4.31 Aproximación del espesor de la capa límite local de velocidad en diferentes puntos sobre el eje y .

La figura 4.32 muestra la magnitud del campo de temperaturas del flujo de aire en planos XY en el dominio, colocados a diferentes distancias sobre el eje z .

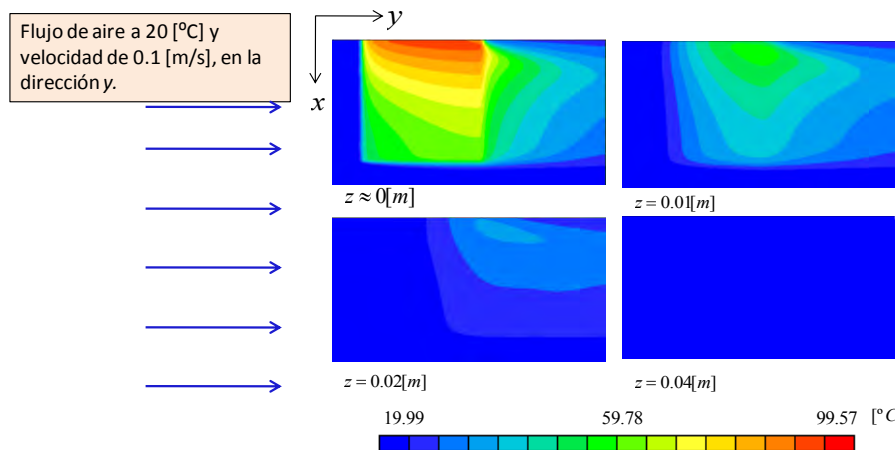


Figura 4.32 Campo de temperaturas del flujo de aire en planos Z , a diferentes distancias sobre el eje z .

La transferencia de calor ocurre desde la aleta hacia el flujo de aire en planos Z paralelos a la superficie de la aleta, se observa que en el plano Z cercano a la superficie de la aleta la velocidad del flujo de aire es muy baja y la transferencia de calor es mayor, en donde ésta se da prácticamente por conducción. En la superficie de la aleta la distribución de temperaturas en el flujo de aire es la misma que la de la aleta. Mientras más crece la distancia en la dirección positiva sobre el eje z , el campo de temperaturas del flujo de aire en los planos Z disminuye hasta alcanzar la misma temperatura del flujo de aire en la corriente libre. También se observa que la temperatura del flujo de aire que entra del lado izquierdo de la aleta mantiene una temperatura fría, debido al constante

flujo que se desplaza en dirección positiva sobre el eje y . En el lado derecho de la aleta el flujo de aire presenta una temperatura mayor que la del lado izquierdo, debido a la transferencia de calor de la superficie de la aleta hacia el flujo de aire que se desplaza en dirección positiva sobre el eje y dejando una estela de temperatura.

La figura 4.33 muestra la magnitud del campo de temperaturas en un plano X en el dominio, ubicado a 0.1 [m] de distancia en dirección positiva sobre el eje x . La aleta se presenta en su vista frontal, donde la longitud es paralela al eje y , y el espesor es paralelo al eje z .

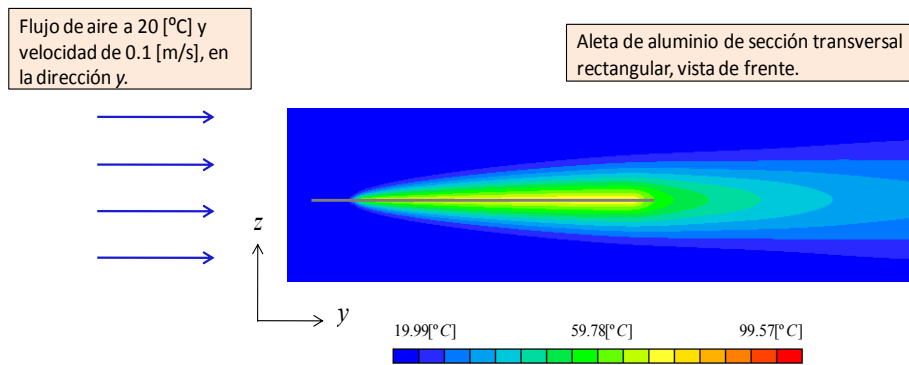


Figura 4.33 Campo de temperaturas del flujo de aire sobre la aleta, en el plano X ubicado a 0.1 [m] de distancia en dirección positiva sobre el eje x .

La temperatura del flujo de aire en el plano YZ es constante en la dirección y , sólo varía en la dirección z dentro de la capa límite. El perfil de temperatura se determina a partir de planos Z ubicados a una distancia de 0.1 [m] sobre el eje x , y en diferentes posiciones sobre el eje y , como se muestra en la figura 4.34. Las posiciones de los planos Z se muestran en la tabla 4.16.

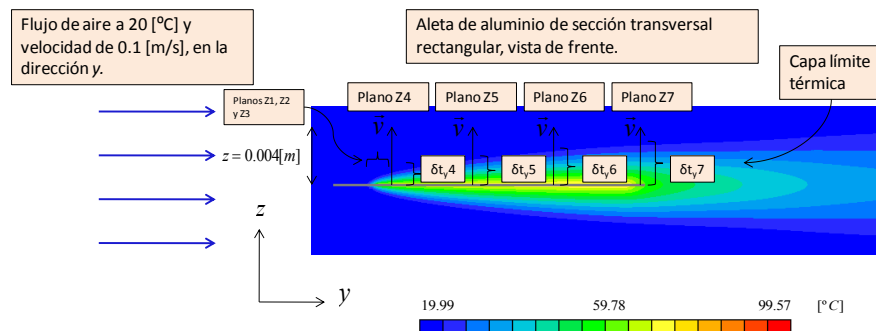


Figura 4.34 Ubicación de los planos Z sobre la superficie de la aleta en la capa límite térmica, en el plano X ubicado a 0.1 [m] de distancia en dirección positiva sobre el eje x .

En los planos Z la temperatura varía desde la temperatura de la superficie de la aleta que coincide con el origen de los planos Z , hasta la temperatura del flujo de aire en la corriente libre, donde la distancia z es igual al espesor de la capa límite térmica δ_t . Para obtener los perfiles de temperatura se divide la distancia z entre el espesor de la capa límite térmica δ_t , y la velocidad del flujo de aire dentro de la capa límite entre la velocidad del flujo de aire de la corriente libre V_∞ , con lo que se obtienen los perfiles de temperatura de los planos Z de la capa límite térmica, figura 4.35.

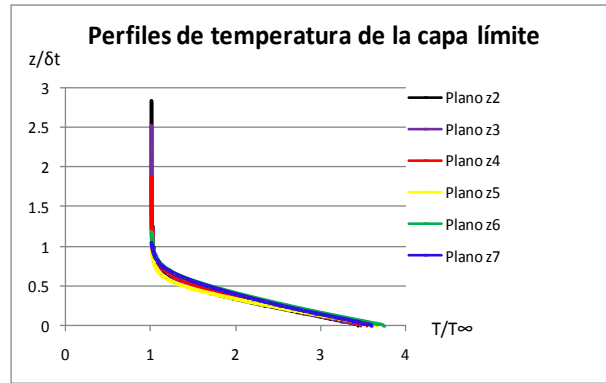


Figura 4.35 Perfiles adimensionales de temperatura de la capa límite en el plano X ubicado a 0.1 [m] de distancia en dirección positiva sobre el eje x.

Estos perfiles adimensionales de temperatura del flujo de aire de los planos Z en la capa límite se calcularon en diferentes posiciones sobre la superficie de la aleta a lo largo del eje y. El aumento en el espesor de la capa límite local se calcula indirectamente graficando la distancia $z = \delta_t$ para $T = T_\infty$, en las posiciones de los planos Z sobre la superficie de la aleta a lo largo del eje y, estos puntos se muestran en la tabla 4.18.

	Posición del plano Z sobre la superficie de la aleta y [m]	
	$z = \delta_t$ [m]	
Plano Z1	0	0
Plano Z2	0.01411519	0.018
Plano Z3	0.01586053	0.025
Plano Z4	0.02136402	0.5
Plano Z5	0.02756021	0.1
Plano Z6	0.03391828	0.15
Plano Z7	0.03848103	0.199

Tabla 4.18 Tamaño de la capa límite térmica local en diferentes puntos sobre la superficie de la aleta

Ordenando el tamaño de la superficie de la aleta en el crecimiento de la capa límite en la figura 4.36.

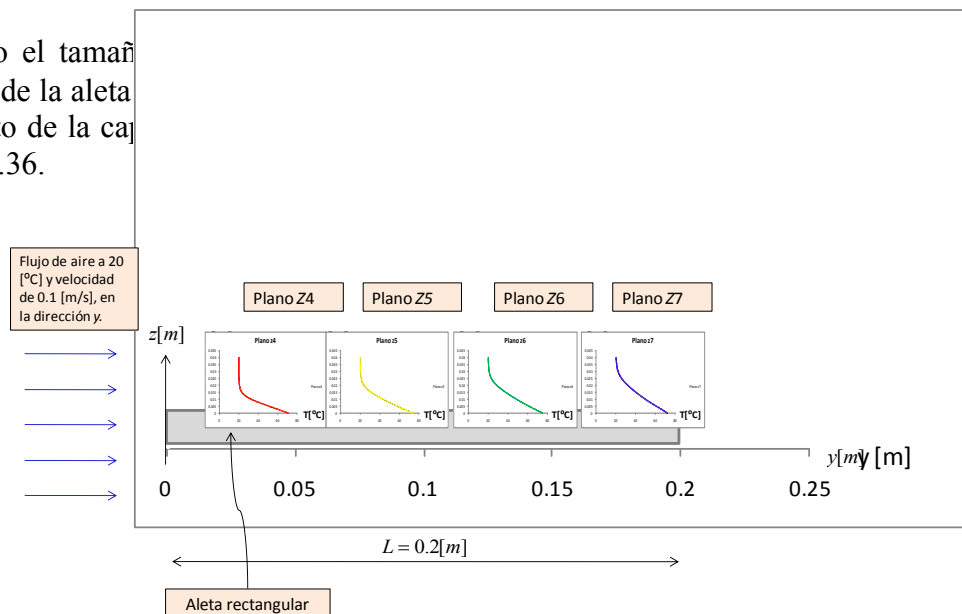


Figura 4.36 Tamaño del espesor de la capa límite térmica local en diferentes puntos sobre el eje y.

Los primeros tres planos Z no se colocaron dentro de la figura 4.36 con el propósito de que no se encimaran las graficas, ya que estos tres se ubican dentro de los primeros

cinco centímetros y los demás planos están separados entre sí por una distancia de cinco centímetros. También se observa que cada plano Z alcanza la distancia $z = \delta t_y$, cuando la temperatura del flujo de aire llega a la temperatura de la corriente libre.

La capa límite térmica se aproxima graficando los puntos que representan el tamaño del espesor de la capa límite térmica local en diferentes posiciones a lo largo de la aleta sobre el eje y , estos puntos se muestran en la tabla 4.18 y con ellos se obtiene la figura 4.37.

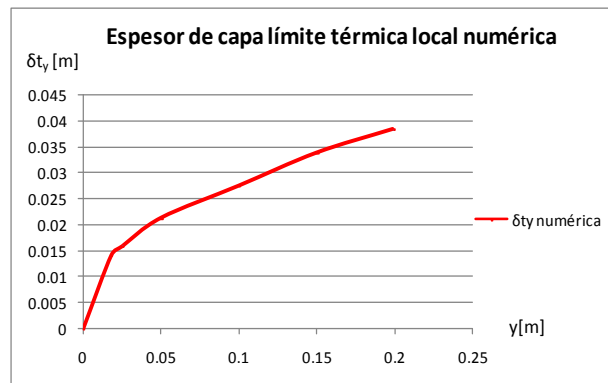


Figura 4.37 Aproximación del espesor de la capa límite térmica local en diferentes puntos sobre el eje y .

EFEECTO DE LA VARIACIÓN DEL ESPESOR DE LA ALETA DE ÁREA DE SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR.

Variando el espesor de la aleta en el caso base de acuerdo a los valores de la tabla 4.8, la distribución de temperaturas de la aleta rectangular sobre el eje x no sólo se limita a obtenerse en el centro del espesor de la aleta a lo largo del eje y , sino que también se obtiene la distribución de temperaturas sobre el eje x a lo largo del eje z , en el espesor de la aleta como se muestra en la figura 4.38.

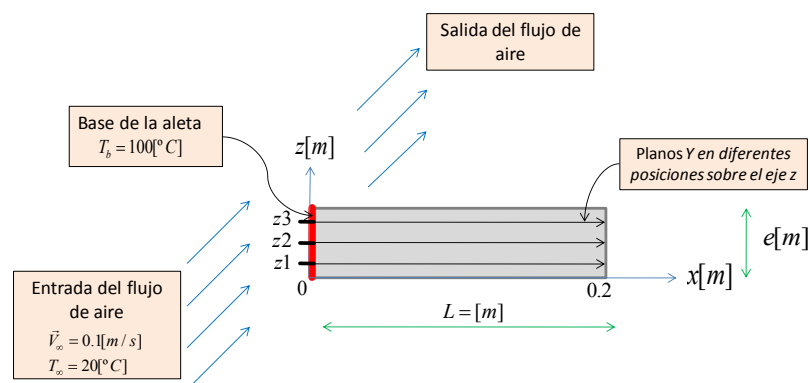


Figura 4.38 Ubicación de los planos Y en diferentes posiciones sobre el eje z dentro del espesor de la aleta.

La distribución de temperaturas de la aleta rectangular sobre el eje x , para los espesores de la tabla 4.8 en los planos Y de la tabla 4.15 se calculó en las ubicaciones sobre el eje z de la tabla 4.19.

	Aleta mediana e = 0.02 [m]	Aleta gruesa e = 0.05 [m]
z3 [m]	0.018	0.048
z2 [m]	0.1	0.25
z1 [m]	0.002	0.002

Tabla 4.19 Distancias z dentro del espesor de la aleta.

La distribución de la temperatura dentro del espesor de la aleta en las distancias z1, z2 y z3, se obtuvo en planos Y ubicados a 0.004, 0.05, 0.1, 0.15 y 0.196 [m] sobre el eje y en la dirección del flujo de aire, por lo tanto en cada distancia z determinada se tienen cinco planos Y distribuidos a lo largo de la aleta, como se muestra en la figura 4.39.

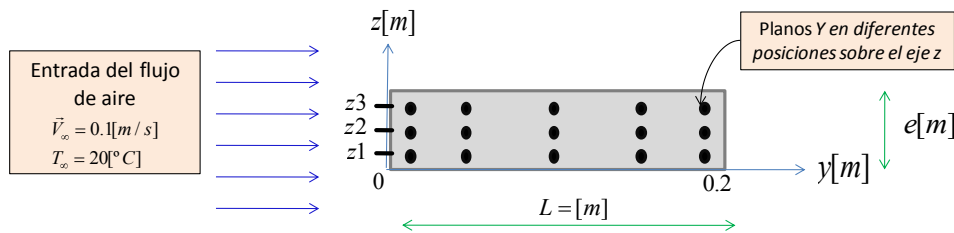


Figura 4.39 Localización de los planos Y dentro del espesor de la aleta vista de frente.

La figura 4.40 muestra el resultado del cálculo de la distribución de la temperatura dentro del espesor de la aleta mediana y gruesa de la tabla 4.21 en comparación con la temperatura calculada analíticamente.

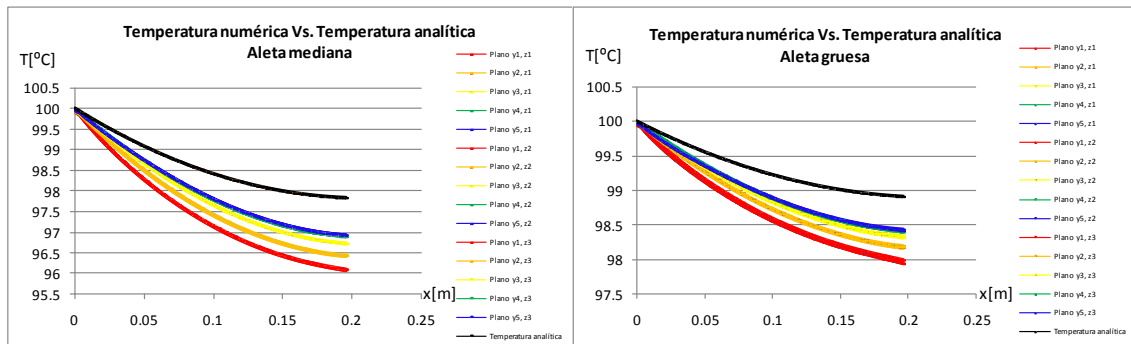


Figura 4.40 Temperatura numérica en los planos Y dentro del espesor de las aletas mediana y gruesa en las diferentes distancias z, y temperatura analítica de las mismas.

La distribución de temperatura de los planos Y en las distintas posiciones sobre el eje z colocadas en una misma grafica muestran que la temperatura en cada plano Y no varía demasiado dependiendo de la posición sobre el eje z. También se observa que la grafica de temperatura de cada plano Y se encima con las demás graficas de los planos Y que están sobre el eje z, esto provoca que las distribuciones de temperatura de los planos Y se vean como una sola distribución. La distribución de temperatura calculada analíticamente en ambos casos predice menos transferencia de calor.

La figura 4.41 muestra las distribuciones de temperaturas promedio de los planos Y, en las diferentes distancias z dentro del espesor de las aletas mediana y gruesa, y la temperatura promedio calculada analíticamente.

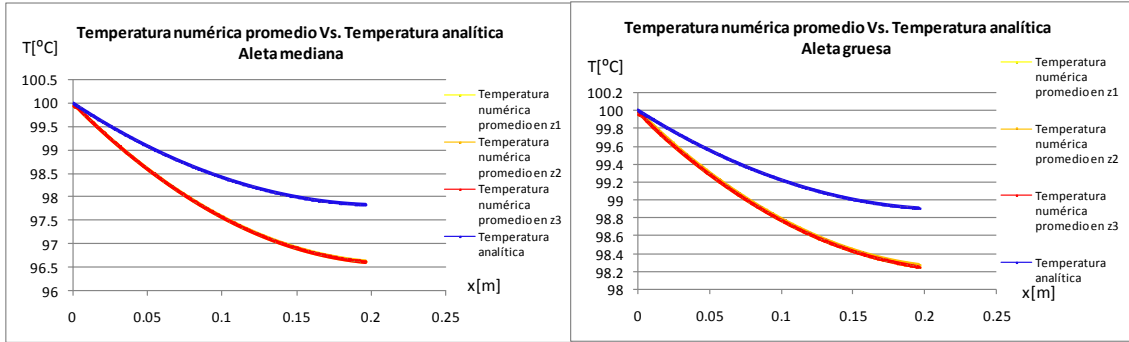


Figura 4.41 Temperatura numérica promedio en planos Z dentro del espesor de las aletas mediana y gruesa en las diferentes distancias z , y temperatura analítica de las mismas.

La figura 4.42 muestra una aproximación de la capa límite de velocidad de las aletas mediana y gruesa obtenidas analítica y numéricamente, en comparación con la capa límite de la aleta delgada obtenida numéricamente.

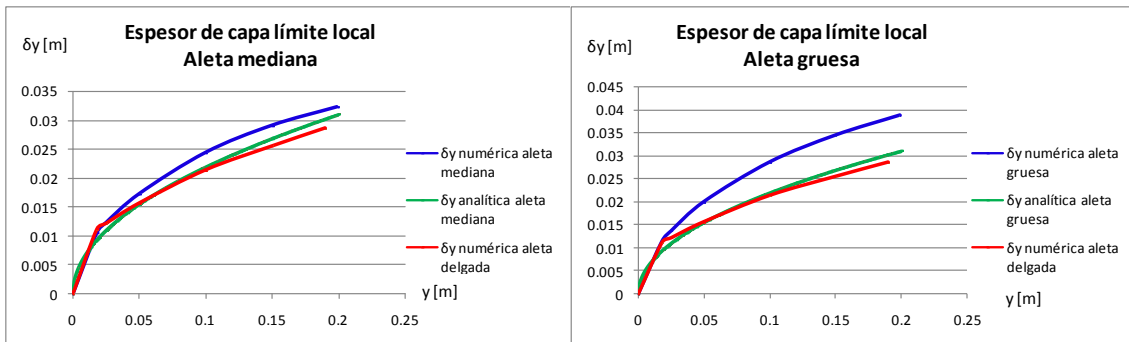


Figura 4.42 Perfiles de temperatura de las aletas mediana y gruesa en un plano X ubicado a 0.1 [m] sobre el eje x , en comparación con la capa límite de la aleta delgada.

La figura 4.43 muestra una aproximación de la capa límite térmica de las aletas mediana y gruesa obtenidas analítica y numéricamente, en comparación con la capa límite térmica de la aleta delgada obtenida numéricamente.

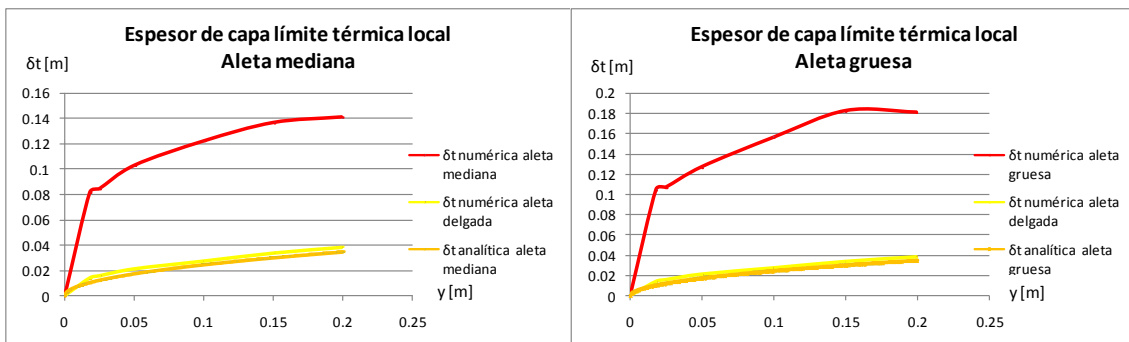


Figura 4.43 Aproximación del espesor de la capa límite térmica local de las aletas mediana y gruesa.

EFFECTO DE LA VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD DEL FLUJO DE AIRE SOBRE LA ALETA DE ÁREA DE SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR.

Variando la velocidad de entrada del flujo de aire en el caso base de acuerdo a los valores de la tabla 4.5, se determinan las distribuciones de temperatura promedio de los planos Y de la tabla 4.17, como se muestra en la figura 4.44.

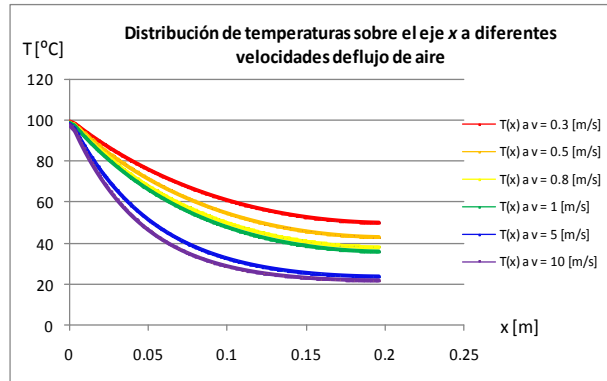


Figura 4.44 Distribución de temperaturas promedio sobre el eje x del caso base a diferentes velocidades del flujo de aire.

También se determinan perfiles de velocidad y temperatura en un plano X en el dominio ubicado a 0.1 [m] de distancia sobre el eje x perpendicular a la superficie de la aleta, en planos Z ubicados en las posiciones de la tabla 4.18, como se muestra en la figura 4.45.

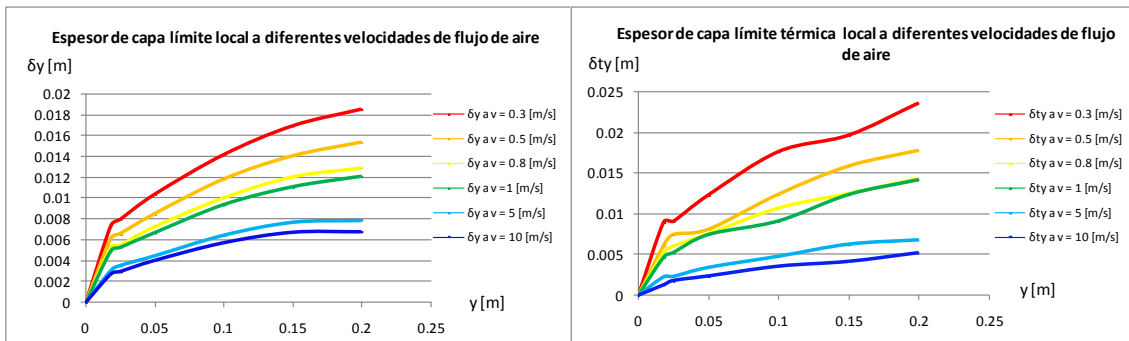


Figura 4.45 Espesores de las capas límite de velocidad y térmica numéricas a diferentes velocidades del flujo de aire.

Como ya se había mencionado el espesor de capa límite térmica analítico no se puede calcular, ya que el modelo sólo es válido para flujo laminar sobre una aleta isotérmica. Debido a que el modelo analítico requiere una superficie isotérmica, se calculó el espesor de capa límite a partir de la temperatura promedio del plano X3 de la figura 4.24. También se calculó el espesor de capa límite térmica tomando la temperatura local de la superficie de los puntos de la tabla 4.20. El resultado del cálculo del espesor de la capa límite térmica analítica con la ayuda del código de CFD se muestra en la figura 4.46.

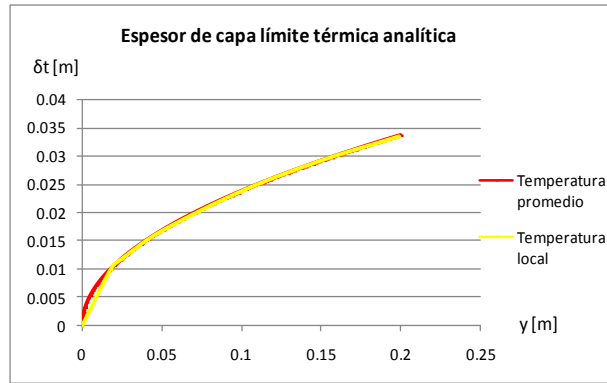


Figura 4.46 Espesor de capa límite calculado con la temperatura promedio y temperatura local, en diferentes puntos a lo largo de la aleta.

Dado que la temperatura de la superficie es variable se tomó una temperatura promedio del plano X3 ubicado a 0.1 [m] en dirección positiva sobre el eje x , el espesor de la capa límite térmica se evaluó a la temperatura media considerando T_s igual a la temperatura promedio. Del mismo modo se tomaron las temperaturas en diferentes posiciones sobre el eje y , y se evaluarán a la temperatura media considerando que T_s es igual a la temperatura de cada punto.

4.4 ALETA DE SECCIÓN TRANSVERSAL CIRCULAR

Solución numérica. Caso adicional.

El caso adicional de la varilla presenta las mismas condiciones que el caso de la aleta rectangular. Las únicas diferencias son la geometría de las aletas y el mallado del dominio. En la discretización del dominio se obtiene un mallado de $80 \times 123 \times 103$, teniendo un total de 1,013,520 celdas. La figura 4.47 muestra el campo de temperaturas en el centro del espesor de la varilla, donde se observa una vista del campo de temperaturas a través de la varilla en el plano XZ , también se observa una vista del campo de temperaturas a través de la varilla en el plano XY .

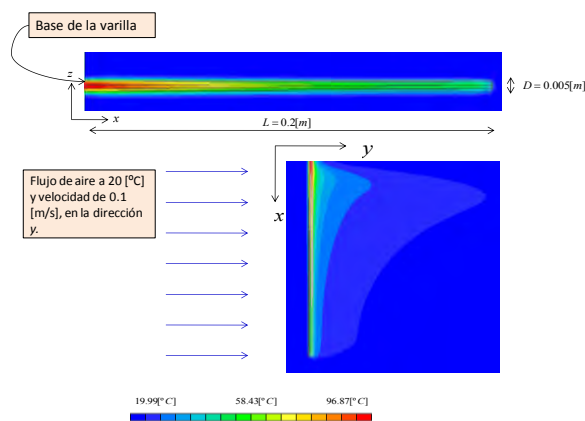


Figura 4.47 Campo de temperaturas de la varilla.

En la vista superior de la varilla se observa una mayor transferencia de calor cerca de la base en la parte derecha de la varilla. Debido a que el flujo de aire se desplaza en la dirección positiva sobre el eje y , al entrar en contacto con la varilla se calienta y al

avanzar deja atrás una estela de temperatura que se enfría gradualmente conforme aumenta la distancia y .

4.5 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS NUMÉRICOS Y ANALÍTICOS DE LA ALETA DE SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR

Caso base.

La validación del modelo numérico se hizo comparando las predicciones numéricas del código de CFD, contra los resultados analíticos de la transferencia de calor de la aleta de sección transversal rectangular, en el caso base. La comparación entre las predicciones y los resultados analíticos de la capa límite de velocidad se hizo en la intersección de los planos X ubicados sobre la aleta rectangular, con una separación de 0.025 [m] y el plano Y ubicado a una distancia 0.1 [m] del origen en la dirección x , como se muestra en la figura 4.48.

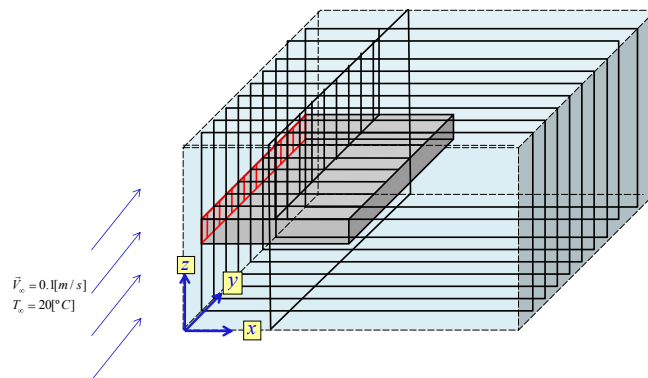
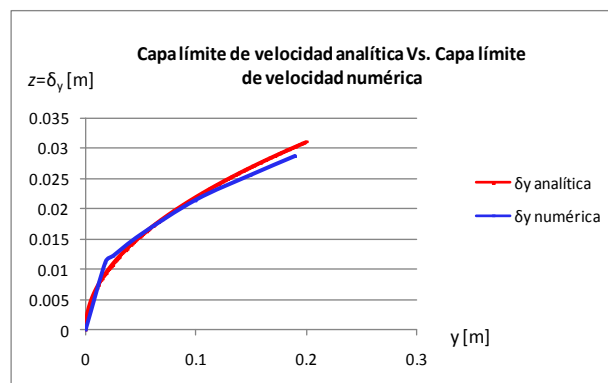


Figura 4.48 Planos de análisis sobre la aleta.

La figura 4.49 muestra el resultado de la comparación de las capas límite de velocidad de la aleta rectangular, donde se observa una aproximación bastante razonable de la curva de la capa límite analítica con la curva de la capa límite numérica.



Gráfica 4.49 Espesores de las capas límite de velocidad.

El espesor de capa límite térmica es un caso especial ya que su cálculo requirió la combinación del código de CFD con los modelos analíticos, la figura 4.50 muestra el resultado de la comparación de los espesores de las capas límite térmicas.

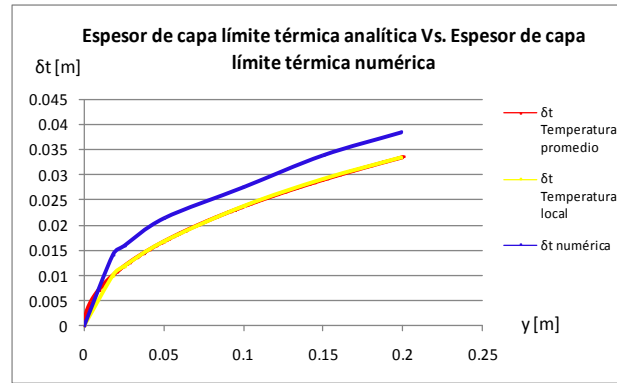
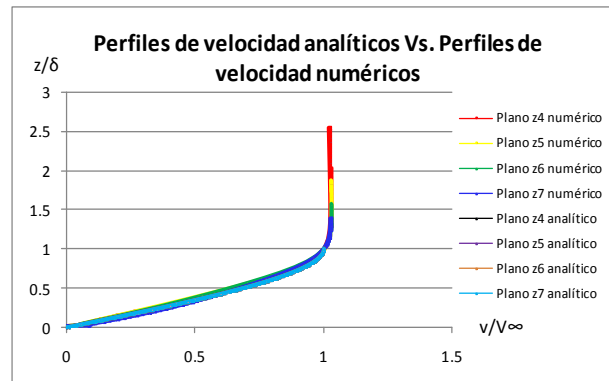


Figura 4.50 Espesores de las capas límite térmicas.

La figura 4.51 muestra el resultado de la comparación de los perfiles de velocidad del flujo de aire sobre la aleta en la dirección y , donde se observa una aproximación bastante precisa de la curva del perfil de velocidad analítico que concuerda con el perfil obtenido mediante el código de CFD.



Grafica 4.51 Comparación de los perfiles de velocidad calculados analíticamente vs. Perfiles de velocidad numéricos a diferentes distancias sobre la aleta en dirección y .

A pesar de esto una diferencia importante entre el código de CFD y los modelos analíticos, es que el código de CFD brinda la posibilidad de determinar los perfiles de temperatura de la capa límite. Los modelos analíticos tienen la desventaja de describir la transferencia de calor unidimensional, lo que limita la posibilidad de calcular los perfiles de temperatura de la capa límite, que dependen de la temperatura de la superficie de la aleta que varía tridimensionalmente.

La figura 4.52 muestra el resultado de la comparación entre la predicción del código de CFD para el cálculo de la distribución de la temperatura en el centro del espesor de la aleta en los planos Y de la tabla 4.16 ubicados a 0.004 [m], 0.05 [m], 0.1 [m] y 0.15 [m] y 0.196 [m] a partir del borde inicial de la aleta sobre el eje y en la dirección del flujo de aire, y el resultado analítico del cálculo de la distribución de la temperatura unidimensional de la aleta, de área de sección transversal rectangular sobre el eje x .

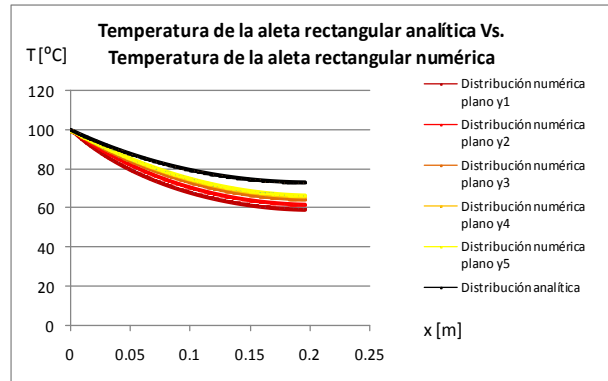


Figura 4.52 Temperatura en el centro del espesor de la aleta rectangular calculada numéricamente Vs. Temperatura unidimensional de la aleta rectangular sobre el eje x.

También se observa que conforme aumenta la distancia x desde el borde inicial de la aleta hacia el borde final en $y = L$, la curva de temperatura numérica se aproxima a la curva de temperatura analítica, es decir, ambas curvas son idénticas pero difieren en sus temperaturas por pocos grados. Debido al flujo de aire frío sobre la aleta se observó la existencia de zonas que eran afectadas por las diferencias de temperatura en los bordes de la aleta, y se concluyó que la distribución de temperaturas calculada numéricamente tiene una mejor aproximación con la distribución de temperaturas calculada analíticamente en el segmento central de la aleta, donde los efectos de las diferencias de temperatura sobre los bordes inicial y final de la aleta no influyen de manera considerable, como se muestra en la figura 4.53.

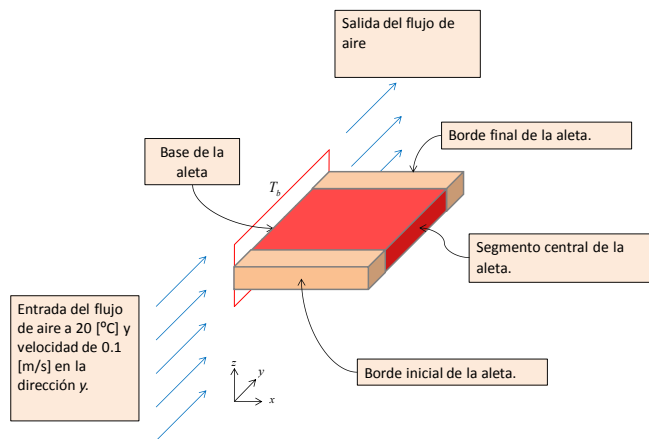
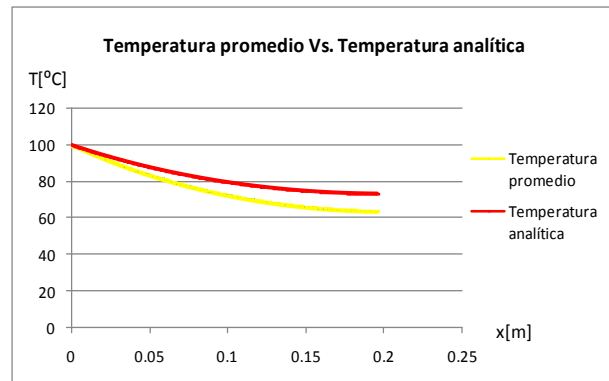


Figura 4.53 Área de semejanza en el comportamiento de la distribución de temperatura en la aleta, entre los resultados numéricos y analíticos.

El rango de distancia donde la distribución de temperatura de los planos Y se asemeja a la distribución de temperatura del modelo analítico es de 0.004 a 0.196 [m]. Las graficas de temperatura en el segmento central de la aleta presentan curvas de temperatura suaves, que describen una disminución gradual de temperatura de la misma forma que el modelo analítico, la diferencia entre ambas curvas, radica en que el modelo analítico predice menos transferencia de calor que con el modelo de CFD. La figura 4.54 muestra el resultado de la comparación de la distribución de temperatura de la aleta calculada analíticamente, contra el promedio de las temperaturas de las predicciones del código de CFD en la intersección de los planos Y en el centro del espesor de la aleta, en el segmento central.



Grafica 4.54 Temperatura promedio numérica de la aleta rectangular Vs. Temperatura analítica de la aleta rectangular

La figura 4.55 muestra el resultado de comparar el espesor de capa límite de velocidad contra el espesor de capa límite térmica, de ambos métodos de solución.

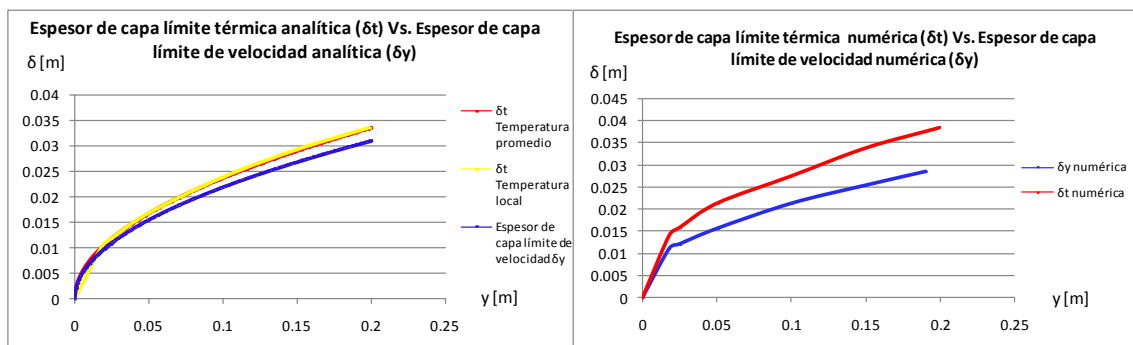


Figura 4.55 Comparaciones entre la capa límite térmica y la capa límite de velocidad.

Conclusiones

Este trabajo de tesis simuló la transferencia de calor conjugado en una aleta de área de sección transversal uniforme, inmersa en un flujo de aire. El sistema constó de una entrada de flujo de aire y una superficie de temperatura constante colocada en la base de la aleta. Las simulaciones fueron realizadas en el Código de Dinámica de Fluidos Computacional PHOENICS. Para simular la turbulencia del flujo se utilizó el modelo **K- ϵ** estándar.

Los resultados de la simulación numérica se verificaron con resultados analíticos, únicamente para las predicciones del caso base. Este caso base consta de una aleta de aluminio con un espesor de 0.001 [m] inmersa en un flujo de aire, al ser una aleta delgada se considera que el flujo de calor es en dos dimensiones para las temperaturas de la aleta, y para las aletas de mayor espesor el flujo de calor es en tres dimensiones.

La comparación de las distribuciones de temperatura a través de la aleta presentan dos zonas de interés; cerca de la base de la aleta en los primeros 0.025 [m] donde las predicciones analíticas son muy semejantes a las obtenidas por el método de CFD, y en el resto de la aleta después de los 0.025 [m] donde conforme aumenta la distancia en dirección positiva sobre el eje x se predice menos transferencia de calor. La diferencia de temperaturas en el extremo de la aleta se debe a que cerca de la base se transfiere la mayor parte del calor hacia el flujo de aire debido a que el coeficiente de convección local en esta zona es muy alto, por lo tanto el calor que se transfiere a través de la aleta después de los 0.025 [m] es menor y se reduce aun más al transferirse hacia el flujo de aire, lo que explica que el método de CFD prediga mayor transferencia de calor en el extremo de la aleta.

La predicción del espesor de la capa límite de velocidad calculada analíticamente es muy semejante a la del modelo de CFD, por lo que se puede concluir en base a los resultados analíticos que el flujo de aire es laminar sobre toda la aleta. La predicción del espesor de la capa límite térmica presenta el inconveniente de que la temperatura varía en la superficie de la aleta, por lo que se requirió del uso de ambos métodos de solución para determinar el espesor de la capa límite térmica. El resultado es que el modelo analítico predice un espesor de capa límite térmica de aproximadamente 0.004 [m] menor que con el modelo de CFD sobre toda la longitud de la aleta, esto se debe a que el modelo analítico está limitado a superficies isotérmicas con número de Prandtl mayor que 0.7.

Conforme se aumentó el espesor de la aleta se observó una menor transferencia de calor hacia el flujo de aire, tanto en los resultados analíticos como en los numéricos. Esto se debe a que con el aumento en el espesor se aumenta el volumen de la aleta, esto le agrega una mayor resistencia térmica a la aleta, por lo que el flujo de aire resulta insuficiente para enfriar una aleta de mayor volumen, en donde en el interior los efectos del flujo de aire son imperceptibles. Mientras que con las aletas de mayor volumen el flujo de aire es incapaz de influir hacia el interior, en la aleta delgada la resistencia térmica es menor y al tener un espesor bajo los efectos del flujo de aire sobre la aleta

presentan una mayor influencia hacia el interior de la aleta, lo que provoca que la transferencia de calor se incremente con la disminución del volumen.

El modelo analítico utilizado para calcular la distribución de temperaturas sobre el eje x predice la transferencia de calor en forma unidimensional, debido a que la aleta tiene un espesor pequeño se puede considerar que el calor se transfiere de forma bidimensional y por lo tanto el modelo analítico se puede utilizar para dar una aproximación de la distribución de temperatura de este caso. Pero en las aletas cuyo espesor es mayor los modelos analíticos dejan de ser válidos ya que la temperatura varía en tres dimensiones, en tal caso el método de CFD es útil tanto en geometrías sencillas como en geometrías más complejas.

APÉNDICE A. MODELOS DE TURBULENCIA

A continuación se introducen algunos de los modelos que se pueden utilizar para representar el efecto de la turbulencia en el flujo de aire. Los modelos se clasifican en dos categorías:

- Modelos de tipo “difusividad turbulenta”, esencialmente variantes del método conocido como $k - \varepsilon$.
- Cierre de segundo orden, en la forma de modelos de transporte de los esfuerzos de Reynolds.

En primer lugar se presentará la ecuación exacta para los esfuerzos de Reynolds, seguida por los cierres de segundo orden, que constituyen el transporte de esfuerzos de Reynolds, utilizados en este trabajo. Finalmente, se presenta el modelo de turbulencia $k - \varepsilon$ estándar utilizado en esta tesis.

CIERRES DE SEGUNDO ORDEN

La ecuación de transporte exacta para los esfuerzos de Reynolds (u_i'', u_j'') es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} u_i'' u_i'' + \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\rho} u_k u_i'' u_j'' = - \left(u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.1})$$

Si se hace uso de la definición \bar{u} del capítulo y, el término que expresa el efecto del gradiente de presión media (lado derecho de la ecuación anterior) puede escribirse como:

$$- \left(u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) = \frac{\rho' \bar{u}_j}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \rho' \frac{\bar{u}_i''}{\bar{p}} \quad (\text{A.2})$$

La correlación $\rho' \bar{u}_j$ se puede modelar de una ecuación de conservación truncada como:

$$\rho' \bar{u}_j'' = - \frac{1}{4.3} \frac{\tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} u_i'' u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad (\text{A.3})$$

Donde $k = 1/2 u_i'' u_j''$ es la energía cinética turbulenta y $\tilde{\varepsilon}$ es una tasa de disipación. La contribución de este término es muy pequeña y frecuentemente se desprecia.

Con fines de modelización, la correlación entre gradientes de presión fluctuantes y fluctuaciones de velocidad, frecuentemente se divide en una parte re-distributiva y una parte isótropa.

$$\left(u_i'' \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_j} \right) + u_j'' \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_i} = - \left(u_i'' \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_j} + u_j'' \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ijk} u_k'' \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ijk} u_k'' \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_k} \quad (\text{A.4})$$

Para los flujos de baja velocidad $Ma \ll 1$, el transporte turbulento de los esfuerzos de Reynolds es:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} C_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\rho} u_i'' u_j'' u_k'' + \frac{2}{3} \delta_{ijp''k''} \right) \quad (\text{A.5})$$

El término C_{ijk} se modela mediante un cierre de tipo gradiente:

$$C_{ijk} = -C_s \frac{\tilde{k}}{\varepsilon} u_k u_i \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \quad (\text{A.6})$$

La correlación de la disipación viscosa:

$$T_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} + T_{ik}'' \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} = \bar{\rho} \varepsilon_{ij} \quad (\text{A.7})$$

Si se supone isotropía local, el término ε_{ij} se puede escribir en función de la disipación de energía cinética turbulenta ε .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \tilde{\varepsilon} \delta_{ij} \quad (\text{A.8})$$

La tasa de disipación de la energía cinética turbulenta $\tilde{\varepsilon}$, se calcula de la siguiente ecuación de transporte, deducida por procedimientos similares a los utilizados en el caso de la densidad constante.

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{\varepsilon} u_j = -C_{\varepsilon 1 \bar{\rho}} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_k''}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2 \bar{\rho}} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}} + C_{\varepsilon 3 \bar{\rho}} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} \frac{\rho' u_j''}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad (\text{A.9})$$

La ecuación de los esfuerzos de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} u_i'' u_j'' + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{u}_k u_i'' u_j'' = \frac{\partial}{\partial x_k} C_{ijk} - \bar{\rho} \left(u_i'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_j''}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \tilde{u}_i''}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A.10})$$

MODELOS DE DOS ECUACIONES DE TRANSPORTE

Los modelos de dos ecuaciones transporte son de la familia de viscosidad turbulenta y describen el transporte de dos escalares como la energía cinética turbulenta (k) y su tasa de disipación (ε). Los modelos son sencillos en comparación con otros de mayor complejidad matemática como los de transporte de los esfuerzos de Reynolds y los de tensiones algebraicas. Sin embargo, han sido validados experimentalmente para muchos flujos industriales con buenos resultados. Aunque, este tipo de modelos no son recomendables para flujos no confinados, flujos con capas límites muy curvadas y flujos desarrollados en conductos no circulares. La formulación del modelo se basa, de manera

similar al flujo laminar, en que los esfuerzos viscosos son proporcionales al gradiente de la velocidad media. La relación entre los esfuerzos de Reynolds y las variables medias, de acuerdo a la notación índice, es la siguiente:

$$\bar{\rho}\vec{V}^n\vec{V}^n = -\bar{\rho}v_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \left(\bar{\rho}\tilde{k} + \bar{\rho}v_T \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (\text{A.11})$$

donde:

$u_{i,j}$, y $x_{i,j}$ son las notaciones índice para las velocidades y coordenadas espaciales, respectivamente. v_T y δ_{ij} son la viscosidad turbulenta y el delta de Kronecker, respectivamente. La viscosidad turbulenta es una propiedad del flujo y puede variar significativamente de un punto a otro dentro del mismo flujo.

La viscosidad turbulenta puede calcularse de diversas formas y una de las más populares son los de la familia k- ϵ [20]. En este modelo, v_T es definido como:

$$v_T = C_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\epsilon}} \quad (\text{A.12})$$

donde:

\tilde{k} y $\tilde{\epsilon}$ son la energía cinética turbulenta y relación de disipación, respectivamente. C_μ es una constante empírica cuyo valor se obtiene en tablas de constantes de modelos de turbulencia.

El valor de \tilde{k} se obtiene de la ecuación de transporte exacta para los esfuerzos de Reynolds, considerando una isotropía local y dividiendo entre dos. La expresión matemática que muestra la energía cinética turbulenta es la siguiente:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{k})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{k})}{\partial x_j} = -\bar{\rho}(P_k - \tilde{\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{\rho}v_T}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.13})$$

donde:

$$P_k = v_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \left(\tilde{k} + v_T \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (\text{A.14})$$

El valor de $\tilde{\epsilon}$ se obtiene mediante las consideraciones utilizadas para \tilde{k} y de la ecuación de transporte, como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{\epsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{\epsilon})}{\partial x_j} = -\frac{\bar{\rho}\tilde{\epsilon}}{\tilde{k}} (C_{\epsilon 1}P_k - C_{\epsilon 2}\tilde{\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{\rho}v_T}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.15})$$

donde:

ζ_K , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ y ζ_ϵ son constantes, cuyos valores se obtienen en tablas de constantes de modelos de turbulencia.

APÉNDICE B. ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN

A continuación, se presentan los esquemas lineales que se usan en la discretización del término convectivo de la ecuación general (2.163).

En la formulación de la ecuación discretizada (2.164), se requiere conocer la densidad ρ y la variable escalar ϕ , en la cara de la celda. Estas variables se calculan en el nodo de la celda, por lo que es necesario interpolar entre celdas para conocer su valor en la cara. De tal modo que el cálculo de ϕ y ρ en la cara de la celda da lugar a los llamados esquemas de discretización. La determinación de los valores de estas variables en la cara es importante para la precisión y convergencia de la solución numérica.

Enseguida se presentan los esquemas de discretización lineales y no lineales empleados en esta tesis. Estos esquemas se describirán en base al sistema de celdas que se ilustra en la figura B. Como ejemplo, se obtendrá el valor de ϕ en la cara e de la celda P. La velocidad en la cara e se considerará, sin pérdida de generalidad, positiva ($u_e > 0$).

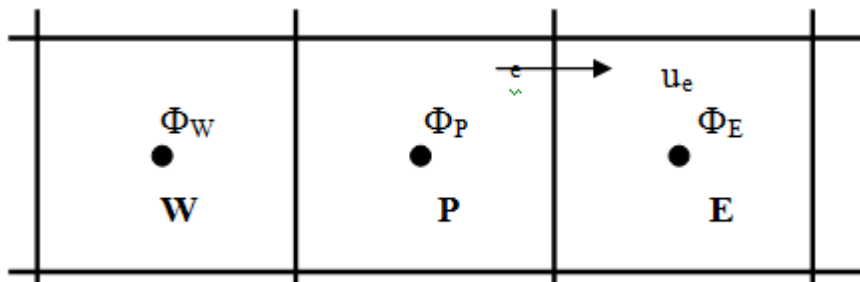


Figura B. Diagrama esquemático de las celdas.

DIFERENCIAS DESPLAZADAS DE PRIMER ORDEN

Con este esquema se supone que el valor de la variable ϕ en la cara e es igual al nodo adyacente aguas arriba, es decir, para $u_e > 0$ [9]:

$$\phi_e = \phi_P \quad (\text{B.1})$$

Esta alternativa es de implementación sencilla, acotada y altamente estable casi bajo cualquier situación pero tiene como inconvenientes, su precisión, ser de primer orden y presentar problemas de difusión numérica. Esta falsa difusión es mayor si en el flujo hay un desalineamiento en la dirección del flujo y las líneas de malla, como por ejemplo en flujos de recirculación.

Diferencias centradas

Este esquema supone la variación lineal de ϕ entre los nodos P y E; por tanto, el valor de la cara e es:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (\text{B.2})$$

Este esquema tiene una precisión de segundo orden, pero tiene el inconveniente de no estar acotado, por lo que puede presentar inestabilidades numéricas. El límite de estabilidad de este esquema viene dado en función del número de Peclet, ecuación (B.3), que es un parámetro comparativo entre los procesos convectivo y difusivo.

$$F = \bar{\rho} \tilde{\delta}_i \quad (\text{B.3})$$

$$D = \frac{\Gamma}{\delta_i} \quad (\text{B.4})$$

$$Pe = \frac{F}{D} \quad (\text{B.5})$$

Para situaciones en que los procesos convectivos dominan sobre los difusivos ($Pe > 2$), por ejemplo, flujos con número de Reynolds altos, el esquema presenta oscilaciones numéricas.

HÍBRIDO

Este esquema fue introducido por Spalding y consiste en combinar los esquemas de diferencias desplazadas y centradas para calcular el valor de la propiedad ϕ en la cara del volumen de control. La selección del esquema se hace en función del número de Peclet de la celda:

- Si $Pe \leq 2$, se usan diferencias centradas:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (\text{B.6})$$

- Si $Pe > 2$, se usan diferencias desplazadas:

$$\phi_e = \phi_P, \quad Pe > 2 \quad (\text{B.7})$$

Para flujos con bajo número de Reynolds/Peclet, el esquema utilizado es el de diferencias centradas, y por tanto resulta de orden 2; sin embargo, el esquema presenta problemas asociados al esquema de diferencias desplazadas cuando el flujo está dominado por los procesos de convección $Pe > 2$.

Los esquemas lineales de alto orden presentan una buena precisión, pero no están acotados, por lo que pueden presentar oscilaciones numéricas. Su uso no es recomendado en el cálculo de cantidades que no aceptan valores negativos, o en general de cantidades acotadas, tales como concentraciones, pues la oscilaciones introducidas por el modelo pueden sacar al escalar de su dominio de definición.

Bibliografía

- [1] F. A. Williams. *Combustion Theory*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Second edition, 1985.
- [2] V. Ganapathy. *Industrial Boilers and Heat Recovery Steam Generators: Design Applications and Calculations*, Marcel Dekker, New York, 2003.
- [3] K. K. Kuo. *Principles of Combustion*. John Wiley, 1986.
- [4] A. Favre. *Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics*. SIAM, 1969.
- [5] J. Warnatz, U. Mass, R. W. Dibble. *Combustion*. Springer. 1996.
- [6] S. A. Shetty, H. Mitchel, M. de Tezanos Pinto, F. Papa, R. L. Cerro. Heat Transfer Performance of Fintubes with Solid Versus Serrated Fins. *Avances en Ingeniería Química* 8-1 (1998) 16-23.
- [7] E. Martínez, W. Vicente, M. Salinas, G. Soto. Single-phase experimental analysis of heat transfer in helically finned heat exchangers. *Applied Thermal Engineering* 29 (2009) 2205-2210.
- [8] A. Nir. Heat Transfer and Friction Factor Correlations for Crossflow over Staggered Finned Tube Banks. *Heat Transfer Engineering* 12-1 (1991) 43-58.
- [9] Hailing Wu, Diana Ma, Massoud Kaviany. Peripheral fins for blockage robustness. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50 (2007) 2514–2520.
- [10] Zhengguo Zhang, Dabin Ma, Xiaoming Fang y Xuenong Gao. Experimental and numerical heat transfer in a helically baffled heat exchanger combined with one three-dimensional finned tube. *Chemical Engineering and Processing* 47 (2008) 1738–1743.
- [11] Spalding, D. B. A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivates. *Int. Journal. Num. Methods Engineering*, 4, pp. 551. 1972.
- [12] Frank M. White, *Fluid Mechanics*, 4ta edition, McGrawHill, 826 pp.
- [13] Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, *Mecánica de Fluidos: fundamentos y aplicaciones*, McGrawHill, 2006, 956pp.
- [14] Frank P. Incropera, David P. De Witt. *Fundamentos de transferencia de calor*. Prentice Hall. Cuarta edición.
- [15] J. P. Holman. *Transferencia de calor*. CECSA. Décima reimpresión.
- [16] Fox. *Introduction to Fluid Mechanics*. 5th Edition.

- [17] Victor L. Streeter, E. Benjamin Wylie. Mecánica de los fluidos. McGraw-Hill, Octava edición (tercera edición).
- [18] Alan J. Chapman. Transmisión del calor. Ediciones Interciencia Costanilla de los Ángeles, 15 MADRD.
- [19] Jorge A. Rodríguez. Introducción a la termodinámica con algunas aplicaciones de ingeniería. Universidad Tecnológica Nacional.
- [20] W. P. Jones and B. E. Launder. The Prediction of Laminarisation with a Two-Equation Model of Turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 15 (1972) 301-314.
- [21] S. V. Patankar and D. B. Spalding. Computer analysis of Three-Dimensional Flow and Heat Transfer in Steam Generators. *Forsch. Ingenieurwes*, vol 44 p. 47, 1978.