



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – INGENIERÍA SÍSMICA

OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO PARA EL MANTENIMIENTO DE  
ESTRUCTURAS CONSIDERANDO LA INFLUENCIA DEL DAÑO ACUMULADO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
DANTE TOLENTINO LÓPEZ

TUTOR PRINCIPAL  
DRA. SONIA ELDA RUIZ GÓMEZ, INSTITUTO DE INGENIERÍA

COMITÉ TUTOR  
DR. LUIS ESTEVA MARABOTO, INSTITUTO DE INGENIERÍA  
DR. ROBERTO MELI PIRALLA, INSTITUTO DE INGENIERÍA  
DR. JAIME GARCÍA PÉREZ, INSTITUTO DE INGENIERÍA  
DR. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ, INSTITUTO DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. LUIS ESTEVA MARABOTO

Secretario: DR. ROBERTO MELI PIRALLA

Vocal: DRA. SONIA ELDA RUIZ GÓMEZ

1 er. Suplente: DR. JAIME GARCÍA PÉREZ

2 d o. Suplente: DR. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ

Lugar donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA

**TUTOR DE TESIS:**

NOMBRE

---

**FIRMA**

# DEDICATORIAS

A mis padres **Adelfo Tolentino** y **Leonides López** de quienes he aprendido lo que se necesita para ser una persona de bien, quienes me han apoyado en todo momento para lograr cada una de las metas que me he fijado y de quienes estoy muy orgulloso de ser su hijo. Por eso y más...GRACIAS MAMÁ Y PAPÁ.

A los mejores hermanos que la vida me pudo haber dado **Jacob, Ivone** y **Yeyetzi**, en especial al **Ing. Adelfo** que es un claro ejemplo de superación y ganas de salir adelante “te admiro mucho carnalito”.

A **Monse** por su cariño, comprensión, paciencia y apoyo en todo este tiempo.

A mi amigo **Othón** que en todo momento me ha tendido la mano en las buenas y en las malas.

A mis tías **Maga, Tella, Malena, Judith, Nina** y **Rosita** por el apoyo incondicional que me han brindado en todos estos años ¡Muchas gracias tías!

A mis abuelitos †**Eligio** y †**Eulalia** a quienes siempre los tengo presentes y los recuerdo como las grandes personas que fueron.

A mi abuelita **Hortencia** por el apoyo brindado en todo este tiempo.

# AGRADECIMIENTOS

A la **Dra. Sonia Elda Ruiz Gómez** por la invaluable formación que me dio para seguir en el camino de la investigación. Sus consejos, visión, y paciencia fueron parte esencial para lograr este trabajo.

A mis sinodales **Dr. Luis Esteva Maraboto, Dr. Roberto Meli Piralla, Dr. Jaime García Pérez y Dr. José Alberto Escobar Sánchez** por sus valiosos comentarios que enriquecieron de manera significativa el trabajo de tesis.

Al **CONACYT** por el apoyo económico que me brindo para realizar este trabajo.

Al **Instituto de Ingeniería de la UNAM** por permitirme hacer uso de sus instalaciones durante la realización de este trabajo.

A mis amigos de la Universidad de Aalborg **Dr. José Guadalupe Rangel y M.I. Sergio Márquez** con quienes discutí y a la vez me compartieron su conocimiento sobre Reliability-based inspection and maintenance of offshore structures.

A mis compañeros del Instituto de Ingeniería **M.I. Víctor Manuel Rivera, M.I. Jesús Alberto León, M.I. Juan Bojórquez, M.I. Tomás Castillo, M.I. Saúl Esteban López, M.I. Alberto Vásquez, M.I. Inocente González, Ing. Omar Ávila, M.I. Arturo López, Dr. Jaime Retama, Dr. Roberto Pérez, Ing. Cesar Vázquez, M.I. Víctor Simón Vargas, M.I. Baruo Daniel Aldama, M.I. Eric Gutiérrez, Dr. Gelacio Juárez, Dr. Luciano Roberto Fernández, Ing. Carlos Alberto Carrillo y M.I. José Luis Díaz**, no sólo por las discusiones que tuvimos sobre la Ingeniería Civil sino también por brindarme su amistad.

A mis maestros del Instituto Politécnico Nacional de la E.S.I.A Zacatenco **Ing. Carlos García Romero, Ing. José Luis Flores Ruiz, Ing. José Luis de la Fuente Severino, M.I. Alfredo Páez Robles e Ing. José Eduardo Gutiérrez Martínez** por su amistad y enseñanzas durante mi estancia en el IPN.

A la **Universidad Nacional Autónoma de México** por permitirme formar parte de sus filas formándome como investigador.

*“Por mi raza hablará el espíritu”*

Al **Instituto Politécnico Nacional** mi *alma mater*, en donde encontré el amor a la carrera de Ingeniería Civil.

*“La técnica al servicio de la patria”*

---

# **OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO PARA EL MANTENIMIENTO DE ESTRUCTURAS CONSIDERANDO LA INFLUENCIA DEL DAÑO ACUMULADO**

## **ÍNDICE**

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>OBJETIVOS</b>	<b>2</b>
<b>CAPÍTULO 1. CRITERIO PARA EVALUAR LA CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL EN EL TIEMPO</b>	
1.1 Formulación para estimar el factor de confianza sin considerar el deterioro estructural	4
1.2 Formulación del factor de confianza en función del tiempo	7
1.2.1 Caso A: Considerando que la demanda estructural varía en el tiempo, mientras que la capacidad estructural es independiente del tiempo	8
1.2.2 Caso B: Considerando que la capacidad estructural varía en el tiempo, mientras que la demanda estructural es independiente del tiempo	9
1.2.3 Caso C: Considerando que varían simultáneamente en el tiempo la capacidad (lineal) y la demanda estructural	10
1.2.4 Caso D: Considerando de manera simultánea la variación tanto de la capacidad (no-lineal) como de la demanda estructural	12
<b>CAPÍTULO 2. EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL DE UNA PLATAFORMA MARINA</b>	
2.1 Plataforma marina	15
2.2 Solicitaciones	15
2.3 Juntas críticas	17
2.4 Daño por fatiga	18
2.5 Evaluación de la capacidad estructural en el tiempo	20

---

---

2.6 Evaluación de la demanda estructural en el tiempo, para cierto nivel de altura de ola máxima	22
2.7 Factor de corrección y número esperado de fallas en el tiempo	23
2.8 Factor de confianza y nivel de confianza en el tiempo	25

### **CAPÍTULO 3. CRITERIO DE OPTIMIZACIÓN CON BASE EN ANÁLISIS COSTO/BENEFICIO**

3.1 Función de costo total en el tiempo	29
3.2 Costo de inspección	30
3.3 Costo de reparación	31
3.4 Costo de falla	32
3.5 Intervalo de tiempo óptimo para inspección y mantenimiento con base en análisis costo/beneficio	33

### **CAPÍTULO 4. INTERVALO DE TIEMPO ÓPTIMO PARA EL MANTENIMIENTO DE LA PLATAFORMA MARINA EN ESTUDIO**

4.1 Costos de inspección	36
4.2 Costos de reparación	36
4.3 Costos de falla	37
4.3.1 Costos por contaminación	38
4.3.2 Costos por producción diferida	39
4.3.3 Costos por pérdidas indirectas	40
4.3.4 Costos por lesiones del personal	41
4.3.5 Costos por daño de equipo	42
4.4 Intervalo de tiempo óptimo	43

### **CAPÍTULO 5. FORMULACIÓN DE LA OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO**

5.1 Algoritmos genéticos	47
5.1.1 Conceptos de algoritmos genéticos multiobjetivo	48
5.1.2 Métodos clásicos	49
5.1.3 Métodos evolutivos	50
5.2 Método Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA II)	51
5.3 Optimización multiobjetivo para el mantenimiento de estructuras	55

### **CAPÍTULO 6. OBTENCIÓN DEL INTERVALO DE TIEMPO ÓPTIMO CON BASE EN OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO PARA UNA PLATAFORMA MARINA**

6.1 Optimización multiobjetivo para el primer intervalo de tiempo	60
---	----

---



---

6.2 Optimización multiobjetivo para el segundo intervalo de tiempo	66
<b>CONCLUSIONES</b>	74
<b>APORTACIONES</b>	76
<b>REFERENCIAS</b>	78
<b>APÉNDICE A: Factor y nivel confianza en un intervalo de tiempo</b>	87
<b>APÉNDICE B: Número esperado de fallas en un intervalo de tiempo</b>	90
<b>APÉNDICE C: Funciones especiales</b>	97
<b>APÉNDICE D: Simulación del oleaje</b>	102
<b>APÉNDICE E: Análisis de fatiga</b>	105
<b>APÉNDICE F: Artículo <i>en prensa</i> para su publicación en la revista <i>Earthquake Spectra</i></b>	
<b>APÉNDICE G: Artículo <i>en prensa</i> para su publicación en la revista <i>Ingeniería Investigación y Tecnología</i></b>	
<b>APÉNDICE H: Artículo <i>aceptado condicionalmente</i> para su publicación en la revista <i>Engineering Structures</i></b>	
<b>APÉNDICE I: Artículo <i>publicado</i> en la revista <i>Mathematical Problems in Engineering</i></b>	

---

---

## RESUMEN

Primeramente se propone un criterio para evaluar la confiabilidad estructural en términos del factor y su correspondiente nivel de confianza al término de un intervalo de tiempo, para ello se proponen expresiones matemáticas cerradas. Las expresiones propuestas se extienden a partir de la formulación original que no considera el deterioro en el tiempo propuesta por Cornell y colaboradores (2002). Se analizan cuatro casos en donde se considera la degradación de la capacidad estructural y/o el aumento de la demanda estructural al final de un intervalo de tiempo de interés. Como ejemplo de aplicación se considera una plataforma marina tipo “jacket” ubicada en la sonda de Campeche; se utilizan propiedades medias para la evaluación de la respuesta no-lineal y dinámica “paso a paso” de la estructura. Se considera como condición de daño el crecimiento de grietas en las juntas críticas causadas por oleaje de servicio y tormentas.

Posteriormente, las expresiones simplificadas propuestas se incluyen en un plan de inspección y mantenimiento con base de análisis costo/beneficio. El intervalo de tiempo óptimo para trabajos de inspección y mantenimiento será aquel que produzca los menores costos totales asociados a la inspección, reparación y falla considerando el riesgo y la confiabilidad estructural. El criterio de optimización costo/beneficio se ejemplifica a la misma plataforma marina tipo “jacket” que se menciona anteriormente. Se hace ver que para estimar el intervalo de tiempo óptimo para trabajos de mantenimiento se debe tomar en cuenta la degradación estructural tanto de la capacidad como de la demanda de la estructura para cierta intensidad.

Finalmente, se propone un plan de mantenimiento con base en optimización multiobjetivo. El plan de mantenimiento multiobjetivo considera los siguientes tres objetivos: 1) la confiabilidad estructural, representada por el factor de confianza, 2) el desempeño de la estructura, dado por un índice de daño global, y 3) el costo total esperado acumulado al término del intervalo de tiempo de interés. El criterio de optimización multiobjetivo se resuelve con la ayuda de algoritmos genéticos y se aplica a la plataforma marina estudiada previamente. Se obtiene un conjunto de soluciones “óptimas” para el primer intervalo de tiempo a fin de realizar los trabajos de mantenimiento para las juntas críticas. Posteriormente se calcula un segundo conjunto de soluciones “óptimas” para el subsecuente intervalo de tiempo. Para calcular el segundo intervalo de tiempo “óptimo” se toma en cuenta el daño acumulado en las juntas.

---

---

## ABSTRACT

An approach to evaluate the structural reliability in terms of the confidence factor and its confidence level at the end of a time interval is proposed. For this purpose closed-form mathematical expressions are proposed. The simplified closed-form expressions are based on the original formulation proposed by Cornell and collaborators (2002) in which the structural deterioration over time is not considered. Four scenarios are analyzed where degradation of structural capacity and/or the increase structural demand the end of a time interval of interest are considered. A marine offshore jacket platform located at Campeche Bay is considered as an application example. Mean values for its mechanical properties are considered for the evaluation of the nonlinear and dynamic “step by step” analysis. The damage condition considered is the fatigue crack sizes at the critical joints caused by service and storm waves.

Subsequently, the proposed simplified closed-form expressions are used in order to develop an inspection and maintenance plan based on cost/benefit analysis. The optimal time interval for inspection and maintenance corresponds to the lowest cost of inspection, repair and failure, considering risk and reliability of the structure. The optimization criterion is exemplified with the same marine platform mentioned above. It is shown that in order to estimate the optimal time interval maintenance actions of the structure, it is necessary to take into account the variation in time of both its structural capacity and its structural demand, for a given intensity

Finally, it is proposed a maintenance plan based on multiobjective optimization. The multi-objective plan considers three objectives: 1) the structural reliability represented by the confidence factor, 2) the performance of the structure given by a global damage index, and 3) the expected cumulative total cost at the end of a time interval. The multiobjective criterion is solved by means of genetic algorithms and it is applied to a marine offshore which is previously studied. A set of optimal solutions for the first time interval in order to perform maintenance actions for the critical joints is obtained. Subsequently, a second set of “optimal” solutions for the subsequent time interval is obtained. The cumulative damage in the joints is taken into account in order to calculate the second “optimal” time interval.

---

---

# INTRODUCCIÓN

Muchas plataforma marinas existentes en nuestro país se colocaron desde tiempo atrás, y un porcentaje de ellas no han sido sometidas a trabajos de mantenimiento regular por lo que con el paso del tiempo existe la posibilidad de que estos sistemas estructurales hayan sufrido degradación en las propiedades mecánicas de los elementos estructurales que los componen dando lugar a un decremento de su capacidad global. Si fuese el caso de presentarse un evento extraordinario aunado con la degradación estructural remanente, existe la posibilidad de que la estructura incurra en niveles de desempeño y/o confiabilidad no deseados, llevando consigo una derrama económica importante. Lo anterior da pie a desarrollar metodologías y/o criterios que permitan mantener a las plataformas marinas dentro de umbrales de confiabilidad aceptables.

Para lograr lo anterior, es necesario conocer como primer paso la confiabilidad estructural del sistema, de ser posible, al término de un intervalo de tiempo y tomando en cuenta el daño acumulado. Por lo que en la primera parte de este trabajo (capítulo 1) se propone un criterio para evaluar la confiabilidad estructural en términos del factor de confianza y su correspondiente nivel de confianza, considerando la degradación de la capacidad estructural y/o aumento de la demanda al término de un intervalo de tiempo. Aquí se estudian los siguientes casos: A) cuando la demanda estructural (dada una intensidad) varía en el tiempo, mientras que la capacidad es independiente del tiempo, B) cuando la capacidad estructural varía en el tiempo, mientras que la demanda es independiente del tiempo, C) cuando varían en el tiempo de manera simultánea, la capacidad (lineal) y la demanda estructural (ver apéndice G, Ruiz *et al.*, 2014) y D) cuando varía tanto la capacidad (no-lineal) como la demanda en el tiempo (ver apéndice F, Tolentino y Ruiz, 2013a)

Para ilustrar el criterio propuesto en el capítulo 2 se obtiene la confiabilidad estructural de una plataforma marina tipo “*jacket*” considerando los casos mencionados anteriormente. Se analiza un modelo estructural 2D simplificado. El deterioro estructural se considera a través del crecimiento de grietas causadas por fatiga en las juntas críticas de la estructura, originadas por las condiciones de oleaje de servicio y tormenta. Se discuten los resultados y se hacen recomendaciones sobre el tipo de análisis que resulte más adecuado (entre los casos A, B, C y D).

Una vez que se conoce la confiabilidad estructural de la plataforma marina, y siguiendo con la filosofía de mantener a dicho sistema estructural en buen estado, es posible formular planes de mantenimiento en donde se tome en cuenta la confiabilidad estructural en un intervalo de tiempo, con lo que se lograría mantener a la plataforma marina en buen estado garantizando su funcionalidad y evitar los costos humanos, económicos y sociales asociados a un mal comportamiento a lo largo de toda su vida útil.

---

---

Una alternativa del uso de planes de mantenimiento en donde se incluye la confiabilidad del sistema estructural al término de un intervalo de tiempo, es el que se desarrolla en el capítulo 3, y alternativamente en el apéndice H (Tolentino y Ruiz 2013b), en donde se presenta un plan de mantenimiento con base en análisis costo/beneficio para llevar a cabo acciones de inspección y mantenimiento en las juntas críticas. El intervalo de tiempo óptimo es aquel que produce los mínimos costos asociados a las inspección, reparación y falla considerando el riesgo y la confiabilidad estructural en el tiempo. En el capítulo 4 se ejecuta el plan de mantenimiento desarrollado con la finalidad de encontrar el intervalo de tiempo óptimo para realizar trabajos de mantenimiento a las juntas críticas de la misma plataforma marina que analiza en el capítulo 2. En el capítulo 4 se hace ver que el intervalo de tiempo óptimo para mantenimiento depende tanto de la capacidad estructural como de la demanda estructural en función del tiempo.

El criterio de optimización con base en análisis costos/beneficio se puede extender de manera que además de considerar el costo total esperado, se pueda incluir en el análisis de optimización componentes tales como la confiabilidad, el desempeño, la robustez estructural, el monitoreo estructural, etc. Los componentes antes mencionados continuamente interactúan entre si y algunas veces están en conflicto. Una manera de encontrar las mejores soluciones en donde se ven involucrados varios componentes en la optimización, es mediante criterios multiobjetivo. Siguiendo esta filosofía, en el capítulo 5 se desarrolla un criterio para encontrar el conjunto de intervalos de tiempo óptimo con base en optimización multiobjetivo (ver Tolentino y Ruiz, 2013c) para llevar a cabo trabajos de inspección y mantenimiento en las juntas de la plataforma marina. El criterio de optimización multiobjetivo que se desarrolla aquí considera tres objetivos: 1) factor de confianza, 2) índice de daño y 3) costo total esperado acumulado. En el capítulo 6 se encuentran conjuntos de intervalos de tiempo óptimos para trabajos de mantenimiento de dos diferentes conjuntos de juntas de la plataforma marina que se analiza en los capítulos anteriores. Para encontrar el segundo conjunto de intervalos de tiempo óptimos se toma en cuenta el daño acumulado al final del primer intervalo de tiempo para mantenimiento.

## OBJETIVOS

Proponer expresiones matemáticas cerradas para evaluar la confiabilidad estructural considerando la influencia del daño acumulado.

Incluir las expresiones simplificadas en un plan de mantenimiento con base en análisis costo/beneficio con la finalidad de encontrar un intervalo de tiempo óptimo para llevar a cabo acciones de mantenimiento, considerando las consecuencias económicas de inspección, reparación y falla. Hacer ver que tan importante es la contribución de la capacidad estructural y de la demanda estructural (en función de la intensidad) en el cálculo del intervalo de tiempo óptimo.

Proponer planes de mantenimiento multiobjetivo que consideren tres objetivos de manera simultánea: confiabilidad, desempeño estructural y costo total esperado acumulado, a fin de encontrar un conjunto intervalos de tiempo óptimo para realizar trabajos de mantenimiento.

---

# CAPÍTULO 1

## CRITERIO PARA EVALUAR LA CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL EN EL TIEMPO

Una estructura continuamente está expuesta a condiciones de carga de eventos naturales (ej. sismo, viento, oleaje, etc.), generalmente sufre un deterioro gradual en sus propiedades mecánicas con el tiempo. Esto da lugar a que se debilite su capacidad estructural y, por otro lado, a que se incremente su demanda estructural ante la acción de las sollicitaciones a las que está expuesta. Como consecuencia el valor de la confiabilidad cambia a medida que pasa el tiempo, por lo que es conveniente contar con herramientas matemáticas que permitan evaluar la confiabilidad para distintos intervalos de tiempo a fin conocer que tan seguro está el sistema estructural en el tiempo.

En la literatura se han propuesto varios enfoques para evaluar la confiabilidad de las estructuras que sufren deterioro estructural con el tiempo, por ejemplo a) mediante procesos de Markov (Montes-Iturrizaga *et. al.*, 2003; Straub, 2009), b) simulación de Monte Carlo (Díaz y Esteva, 1997), c) simulación direccional (Melchers, 1992; Mori y Ellinwood, 1993) y d) aproximaciones basadas en métodos FORM/SORM (Racwitz, 2001). Por otro lado, Frangopol *et al.*, (2004) hacen una revisión general sobre modelos probabilistas para evaluar el ciclo de vida de estructuras que presentan deterioro estructural. Sin embargo, ninguno de estos enfoques utiliza expresiones matemáticas cerradas para evaluar el factor y su correspondiente nivel de confianza de las estructuras en función del tiempo.

El factor de confianza,  $\lambda_{conf}$ , y su correspondiente nivel de confianza propuestos por Cornell *et al.*, (2002), dentro del formato *Demand and Capacity Factor Design* (DCFD) se introdujeron originalmente para evaluar estructuras (Cornell, 1996; FEMA 351 (2000); Yun *et al.*, 2002). Dichas formulaciones originales no consideran el deterioro que sufren las estructuras con el tiempo. Con el paso del tiempo se han desarrollado expresiones que se basan en la formulación original de Cornell y colaboradores (2002) para tomar en cuenta la evolución en el tiempo de la degradación de la capacidad estructural (Torres y Ruiz, 2007; Vamvatsikos y Dolšek, 2011; Tolentino *et al.*, 2012).

---

En este capítulo se propone un criterio para evaluar la confiabilidad en términos del factor de confianza,  $\lambda_{conf}$ , y su correspondiente nivel de confianza,  $K_x$  para el caso en el que las propiedades mecánicas de los elementos estructurales presentan degradación (ej. debido a corrosión, fatiga, etc.). El factor de confianza,  $\lambda_{conf}$ , denota que tan deseable es el nivel de desempeño que presenta un sistema estructural ante las solicitaciones externas. Dicho factor considera incertidumbres tanto en la capacidad como en la demanda. Cuando  $\lambda_{conf}$  excede la unidad indica que hay una mayor confianza de que la estructura tenga un comportamiento deseado. Si  $\lambda_{conf}$  es menor que la unidad indica que dicha confianza no es deseable. El grado de confianza para que se presente dicho factor de confianza se expresa mediante el nivel de confianza,  $K_x$ .

## 1.1 FORMULACIÓN PARA ESTIMAR EL FACTOR DE CONFIANZA SIN CONSIDERAR EL DETERIORO ESTRUCTURAL

Una manera de calcular la tasa media anual de falla es separando las incertidumbres que involucran a la demanda estructural de la capacidad estructural como sigue (Cornell, 1968; Esteva, 1968; Cornell *et al.*, 2002):

$$v_D(d) = \int -\frac{dv(y)}{dy} (P(D \geq d|y)) dy \quad (1)$$

$$E(v_F) = \int -\frac{dv_D(d)}{dd} (P(C \leq d)) dd \quad (2)$$

Donde  $v_D(d)$  representa la curva de peligro de demanda estructural;  $dv(y)/dy$  representa la derivada de la curva de peligro sísmico  $P(D \geq d|y)$  es la probabilidad condicional de que la demanda estructural,  $D$ , se exceda un cierto valor  $d$ , dada una intensidad sísmica  $y$ ;  $E(v_F)$  representa la tasa anual de falla estructural;  $dv_D(d)/dd$  es la derivada de la curva de peligro de demanda, y  $P(C \leq d)$  es la probabilidad de que la capacidad estructural  $C$  sea menor a igual a un valor dado,  $d$ .

Las ecuaciones 1 y 2 pueden ser resueltas por medio de integración numérica o por medio de métodos simplificados. Con la finalidad de resolver las expresiones antes mencionadas (Kennedy y Short, 1994; Cornell, 1996; Cornell *et al.*, 2002) proponen las siguientes consideraciones utilizando un enfoque simplificado.

- a. La curva de peligro,  $v(y)$ , se representa para la intensidad de interés mediante la función  $v(y) = ky^{-r}$ , donde  $k$  y  $r$  son parámetros que definen la forma de la curva de peligro ambiental.

- b. La mediana de la demanda estructural,  $\hat{D}$ , para la región de intensidad de interés, se puede representar como función de la intensidad,  $y$ , mediante la expresión  $\hat{D} = a \cdot y^b$ . Esta presenta una distribución de tipo lognormal con desviación estándar del logaritmo natural igual a  $\sigma_{\ln D|y}$  (Rosenblueth y Esteva, 1972).
- c. La capacidad estructural del estado límite de interés presenta una mediana de la capacidad,  $\hat{C}$ , de tipo lognormal, con desviación estándar del logaritmo natural igual a  $\sigma_{\ln C}$ .

A partir de las consideraciones  $a$ ,  $b$  y  $c$ , la ecuación 1 se transforma como sigue: (Kennedy y Short, 1994).

$$v_D(d) = v\left(\frac{d}{a}\right)^{\frac{1}{b}} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\sigma_{\ln D|y}^2)\right) \quad (3)$$

Considerando las simplificaciones  $a$  y  $c$ , la tasa media anual de falla,  $E(v_F)$ , (ecuación 2) se expresa como sigue (Jalayer y Cornell, 2003):

$$E(v_F) = k(y_{\hat{c}})^{-r} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2)\right) \quad (4)$$

Introduciendo las incertidumbres epistémicas, el valor esperado de la tasa media anual de falla obtenida por Cornell y colaboradores (2002) es como sigue:

$$E(v_F) = k(y_{\hat{c}})^{-r} \exp\left\{\frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2]\right\} \quad (5)$$

donde  $y_{\hat{c}} = \left[\frac{\hat{C}}{a}\right]^{\frac{1}{b}}$  es la intensidad de la sollicitación asociada con la mediana del estado límite de la capacidad,  $\hat{C}$ ;  $\sigma_{\ln D|y}^2$  y  $\sigma_{\ln C}^2$  son las varianzas de los logaritmos naturales de la demanda estructural,  $D$ , y de la capacidad estructural,  $C$ , correspondientes al estado límite de interés;  $\sigma_{DU}^2$  y  $\sigma_{CU}^2$  representan las varianzas de las incertidumbres epistémicas asociadas a la demanda y a la capacidad, respectivamente;  $a$  y  $b$  son parámetros que definen la forma de la mediana de la demanda estructural.

Con la finalidad de contar con una formulación que resulte familiar para los ingenieros, Cornell y colaboradores (2002) establecen que la tasa media anual de falla,  $V_F$ , sea igual a un valor permisible,  $V_0$ . De acuerdo a lo anterior y haciendo algunos arreglos algebraicos, se obtiene la siguiente expresión:

$$\phi \hat{C} \geq \gamma \hat{D}^{V_0} \quad (6)$$



---

donde:

$$\phi = \exp\left[-\frac{k}{2b}(\sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{CU}^2)\right] \quad (7)$$

$$\gamma = \exp\left[\frac{k}{2b}(\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{DU}^2)\right] \quad (8)$$

donde  $\hat{D}^{V_0}$  representa la mediana de la demanda para una intensidad dada  $y_{V_0}$ , que a su vez se define como el nivel de intensidad,  $y$ , con probabilidad anual,  $V_0$ , de ser excedida expresada como sigue:

$$\hat{D}^{V_0} = a(y_{V_0})^b \quad (9)$$

A partir de la formulación anterior, se deduce el factor de confianza:

$$\lambda_{conf} = \frac{\phi \hat{C}}{\gamma \hat{D}^{V_0}} \quad (10)$$

El nivel de confianza para que se presente el factor de confianza, se expresa como sigue:

$$K_x = \frac{\ln \lambda_{conf}}{\sigma_{UT}} + \frac{r \sigma_{UT}}{2b} \quad (11)$$

donde:

$$\sigma_{UT} = \sqrt{\sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2} \quad (12)$$

El parámetro  $K_x$  es una variable Gaussiana estandarizada con probabilidad  $x$  de no ser excedida, por lo que  $x$  representa el grado de confianza. La ecuación anterior implica que el número anual de fallas,  $V_F$ , asociadas a un nivel de confianza  $x$ , está dado por (Cornell *et al.*, 2002):

$$V_{F|x} = \hat{V}_F \exp(K_x \frac{r}{b} \sigma_{UT}) = k(y_{\hat{C}})^r \exp\left(\frac{r^2}{2b^2}(\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2)\right) \exp(K_x \frac{r}{b} \sigma_{UT}) \quad (13)$$

donde  $\hat{V}_F$  representa la mediana de la tasa media anual de falla,  $V_F$ . Las ecuaciones 10, 11 y 13 se utilizan en los lineamientos del SAC/FEMA para la evaluación de estructuras.

---

## 1.2 FORMULACIÓN DEL FACTOR DE CONFIANZA EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

En lo que sigue se extiende la metodología presentada en la sección anterior para el caso en el que las propiedades mecánicas de los elementos estructurales cambian en el tiempo, y como consecuencia decrece el valor de la capacidad estructural y/o aumenta la demanda estructural ante una sollicitación que se presente en cierto intervalo de tiempo.

La tasa media anual de falla,  $E(v_F)$ , es igual al número esperado de fallas,  $\eta_F$ , cuando  $\Delta t \rightarrow 1$ . Se hace notar que el número esperado de fallas es una extensión de la tasa media anual de falla. En lo que sigue se utilizará el concepto del número esperado de fallas al término de un intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ . De acuerdo a lo anterior, el número esperado de fallas asociado a un nivel de confianza  $x$ , en el intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  (similar a la ecuación 13) se expresa como sigue:

$$\eta_{F|x}(0, \Delta t) = \hat{\eta}_F(0, \Delta t) \exp\left(K_{x|\Delta t} \frac{r}{b} \sigma_{UT|\Delta t}\right) \Omega(0, \Delta t) \quad (14)$$

donde:

$$\hat{\eta}_F(0, \Delta t) = k \left( y_{\hat{C}|\Delta t} \right)^r \exp \left[ \frac{r^2}{2b^2} \left( \sigma_{\ln D|y, \Delta t}^2 + \sigma_{\ln C|\Delta t}^2 \right) \right] \quad (15)$$

donde  $\hat{\eta}_F(0, \Delta t)$  es la mediana del número esperado de fallas para el intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ ;  $\Omega(0, \Delta t)$  es el factor de corrección del número esperado de fallas al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ ;  $\eta_{F|x}(0, \Delta t)$  representa el número de fallas correspondiente a un nivel de confianza  $x$ , dentro del intervalo  $[0, \Delta t)$ .

En el formato Demand and Capacity Factor Design (DCFD, Cornell *et al.*, 2002) se asume que la tasa anual de falla,  $v_F$ , debe ser igual que una tasa anual permisible,  $v_0$ . De manera similar, en este estudio se establece que el número esperado de fallas asociado a un grado de confianza  $x$ , al término de un intervalo del tiempo  $[0, \Delta t)$  debe ser igual a cierto valor de tasa media anual permisible  $v_0$  en el tiempo, por lo que la ecuación 14 queda como sigue:

$$\eta_{F|x}(0, \Delta t) = \hat{\eta}_F(0, \Delta t) \exp\left(K_{x|\Delta t} \frac{r}{b} \sigma_{UT|\Delta t}\right) \Omega(0, \Delta t) = v_0 \Delta t \quad (16)$$

Resolviendo y separando términos con respecto a la ecuación anterior, se llega a la siguiente expresión del factor de confianza,  $\lambda_{conf}$ , y su correspondiente nivel de confianza,  $K_x$ , al final del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  (Ver Apéndice A):

$$\lambda_{conf}(0, \Delta t) = \left[ \frac{\phi \hat{C}(\Delta t)}{\gamma \hat{D}^{v_0}(\Delta t)} \right] \left[ \frac{\Omega(0, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{\frac{b}{r}} \quad (17)$$

---


$$K_x(0, \Delta t) = \frac{\ln \lambda_{conf}(0, \Delta t)}{\sigma_{UT}} + \frac{r\sigma_{UT}}{2b} \quad (18)$$

### 1.2.1 Caso A: Considerando que la demanda estructural varía en el tiempo, mientras que la capacidad estructural es independiente del tiempo

La confiabilidad estructural expresada en términos del número esperado de fallas al final del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  puede expresarse como una extensión de la ecuación 5, como sigue:

$$\bar{\eta}_F(0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} k(y_{\hat{C}, \tau})^{-r} \exp \left\{ \frac{r^2}{2b(\tau)^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2(\tau) + \sigma_{\ln C}^2(\tau) + \sigma_{UD}^2(\tau) + \sigma_{UC}^2(\tau) \right] \right\} d\tau \quad (19)$$

Donde  $y_{\hat{C}, \tau} = \left[ \frac{\hat{C}(\tau)}{a(\tau)} \right]^{\frac{1}{b(\tau)}}$  es la intensidad de la sollicitación asociada con la mediana de la capacidad,  $\hat{C}(\tau)$ , en el tiempo  $\tau$ ;  $\sigma_{\ln D|y}^2(\tau)$  y  $\sigma_{\ln C}^2(\tau)$  son las varianzas del logaritmo natural de la demanda y de la capacidad, en el tiempo  $\tau$ , respectivamente;  $\sigma_{UD}^2(\tau)$  y  $\sigma_{UC}^2(\tau)$  representan las varianzas de las incertidumbres epistémicas relacionadas con la demanda estructural ( $D$ ) y con la capacidad ( $C$ ), en el tiempo  $\tau$ , respectivamente.

Con la finalidad de conocer solamente la variación de la demanda estructural en el intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  mientras que la capacidad estructural se mantiene constante, es necesario hacer las siguientes consideraciones:

- d. Las varianzas del logaritmo natural tanto de la capacidad,  $\sigma_{\ln C}^2(\tau)$ , como de la demanda,  $\sigma_{\ln D}^2(\tau)$ , se consideran constantes en el tiempo, o sea  $\sigma_{\ln C}^2(\tau) = \sigma_{\ln C}^2$  y  $\sigma_{\ln D|y}^2(\tau) = \sigma_{\ln D|y}^2$ , respectivamente.
- e. Los parámetros  $a(\tau)$  y  $b(\tau)$  son constantes en el intervalo de tiempo de interés, por lo que  $a(\tau) = a$  y  $b(\tau) = b$ , respectivamente.
- f. La mediana de la demanda estructural,  $\hat{D}$ , varía en el tiempo  $\tau$ , como sigue:

$$\hat{D}(\tau) = (a + f \cdot \tau) \cdot (y)^b \quad (20)$$

- g. La mediana de la capacidad,  $\hat{C}(\tau)$ , permanece constante en el durante el intervalo de tiempo de interés, por lo que  $\hat{C}(\tau) = \alpha$ .

Tomando en cuenta las consideraciones  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  y  $g$  e integrando la ecuación 19 se obtiene una expresión cerrada (el detalle se presenta en el Apéndice B), para estimar el número esperado de fallas al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ , como sigue:

$$\pi_{FD}(0, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2) \right) \Omega_D(0, \Delta t) \quad (21)$$

donde:

$$\Omega_D(0, \Delta t) = \frac{b\alpha}{f(b+r)} \left[ - \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-1} + \left( \frac{\alpha}{a+f(\Delta t)} \right)^{-\frac{b+r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \right] \quad (22)$$

donde  $\Omega_D(0, \Delta t)$  es un factor de corrección del número esperado de fallas que considera sólo la variación en el tiempo de la demanda estructural en el intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ .

De manera similar a la ecuación 16, aquí se establece que el número esperado de fallas que considera sólo la variación de la demanda estructural, asociado a un grado de confianza  $x$ , al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ , debe ser igual a un valor prefijado  $\nu_0$  multiplicado por el intervalo  $\Delta t$ , como sigue:

$$k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2) \right) \exp \left( K_{x|\Delta t} \frac{r}{b} \sigma_{UT} \right) \Omega_D(0, \Delta t) = \nu_0 \cdot \Delta t \quad (23)$$

De la ecuación anterior resulta:

$$\lambda_{confD}(0, \Delta t) = \frac{\phi \hat{C}}{\gamma \hat{D}^{\nu_0}(\Delta t)} \left[ \frac{\Omega_D(0, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{-\frac{b}{r}} \quad (24)$$

donde  $\lambda_{confD}(0, \Delta t)$  es el factor de confianza al final del intervalo de tiempo que considera sólo la variación de la demanda estructural y que supone que la capacidad estructural no varía con el tiempo.

### 1.2.2 Caso B: Considerando que la capacidad estructural varía en el tiempo, mientras que la demanda estructural es independiente del tiempo

Con la finalidad de considerar la variación en el tiempo de la capacidad estructural y suponiendo que la demanda estructural es constante, se hacen las siguientes suposiciones:

- h. La mediana de la capacidad varía en el tiempo de la siguiente manera:

---



---


$$\hat{C}(\tau) = \alpha + \beta\tau \quad (25)$$

donde  $\beta < 0$  y  $\alpha > 0$

Tomando en cuenta las suposiciones  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  y  $h$ , la ecuación 19 (ver Apéndice B) queda como sigue:

$$\eta_{FC}(0, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y} + \sigma^2_{\ln C} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right) \Omega_C(0, \Delta t) \quad (26)$$

donde:

$$\Omega_C(0, \Delta t) = \frac{b\alpha}{(b-r)\beta} \left[ -1 + \left( 1 + \frac{\beta\Delta t}{\alpha} \right)^{\frac{1-r}{b}} \right] \quad (27)$$

donde  $\Omega_C(0, \Delta t)$  es el factor de corrección del número esperado de fallas que considera el deterioro de la capacidad estructural mientras que la demanda permanece constante en el intervalo de tiempo de interés.

Suponiendo la misma consideración que se siguió para obtener la ecuación 16, y sustituyendo términos se tiene:

$$k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \exp \left[ \frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y} + \sigma^2_{\ln C} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right] \exp \left( K_{x|\Delta t} \frac{r}{b} \sigma_{UT} \right) \Omega_C(t, \Delta t) = \nu_0 \cdot \Delta t \quad (28)$$

Haciendo algunos arreglos algebraicos, la ecuación anterior resulta:

$$\lambda_{confC}(0, \Delta t) = \frac{\phi \hat{C}(\Delta t)}{\gamma \hat{D}^{\nu_0}} \left[ \frac{\Omega_C(0, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{-\frac{b}{r}} \quad (29)$$

Con la ecuación anterior se evalúa el factor de confianza al término del intervalo de interés cuando sólo se considera el deterioro estructural de la capacidad, suponiendo que la demanda estructural no varía en el tiempo.

### 1.2.3 Caso C: Considerando que varían simultáneamente en el tiempo la capacidad (lineal) y la demanda estructural

Tomando en cuenta las consideraciones  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  y  $h$ , la expresión del número esperado de fallas al término de cierto intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  que considera la variación tanto de la capacidad (lineal) como la demanda estructural, se expresa como sigue (ver Apéndice B):

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \exp \left[ \frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y} + \sigma^2_{\ln C} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right] \Omega_L(0, \Delta t) \quad (30)$$


---



---

$$\Omega_L(0, \Delta t) = \frac{b\alpha}{\beta(b-r)} \left( \frac{a\beta}{-\alpha f + \beta a} \right)^{\frac{r}{b}} \left[ -F(A, B; C; x) + \left( 1 + \frac{f\beta\Delta t}{\beta a} \right)^{\frac{r}{b}} \left( 1 + \frac{\beta\Delta t}{\alpha} \right) \cdot \left( \frac{\alpha + \beta\Delta t}{a + f\Delta t} \right)^{\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} F(A, B; C; x(\Delta t)) \right] \quad (31)$$

donde  $\Omega_L(0, \Delta t)$  es un factor de corrección del número esperado de fallas que considera la variación en el tiempo tanto de la capacidad estructural como la demanda al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ . La función hipergeométrica,  $F(A, B; C; x)$ , implícita en la ecuación 31 se resuelve mediante la siguiente serie hipergeométrica (Ford, 1955; Agnew, 1960; Rainville, 1961; Ritger y Rose, 1968; Rainville y Bedient, 1981)(ver Apéndice C):

$$F(A, B; C; x) = 1 + \frac{AB}{1!C}x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{2!C(C+1)}x^2 + \dots + \frac{A(A+1)\dots(A+n-1)B(B+1)\dots(B+n-1)}{C(C+1)\dots(C+n-1)n!}x^n \quad (32)$$

donde:

$$A = 1 - \frac{r}{b}; \quad B = -\frac{r}{b}; \quad C = 2 - \frac{r}{b}; \quad x(t) = \frac{f(\beta t + \alpha)}{f\alpha - a\beta}; \quad x(t + \Delta t) = \frac{f(\beta(t + \Delta t) + \alpha)}{f\alpha - a\beta}$$

donde  $A, C$  y  $x$  pueden tomar cualquier número real,  $B$  debe ser un número real entero.

Siguiendo las consideraciones para obtener la ecuación 16, se tienen lo que sigue:

$$k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \exp \left[ \frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y} + \sigma^2_{\ln C} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right] \exp \left( K_{x|\Delta t} \frac{r}{b} \sigma_{UT} \right) \Omega_L(0, \Delta t) = v_0 \cdot \Delta t \quad (33)$$

La ecuación 33 se puede reducir en la siguiente expresión:

$$\lambda_{confL}(0, \Delta t) = \frac{\phi \hat{C}(\Delta t)}{\gamma \hat{D}^{v_0}(\Delta t)} \left[ \frac{\Omega_L(0, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{\frac{b}{r}} \quad (34)$$

Con la expresión anterior es posible evaluar el factor de confianza al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  considerando que varía de manera simultánea la capacidad estructural (lineal) y la demanda estructural en el tiempo.

---

### 1.2.4 Caso D: Considerando de manera simultánea la variación tanto de la capacidad (no-lineal) como de la demanda estructural

Con la finalidad de considerar de manera simultánea la capacidad estructural (no lineal) y la demanda estructural, se hace la siguiente suposición:

- i. La mediana de la capacidad estructural varía en el tiempo como una función *polinomial de segundo grado*, dada por:

$$\hat{C}(\tau) = \alpha + \beta\tau + \gamma\tau^2 \quad (35)$$

Considerando las suposiciones  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  e  $i$ , el número esperado fallas que considera la variación de manera simultánea la capacidad (no-lineal) y de la demanda estructural al final del intervalo de interés, es como sigue (ver Apéndice B):

$$\eta_{FP}(0, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y} + \sigma^2_{\ln C} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right) \Omega_p(0, \Delta t) \quad (36)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Omega_p(0, \Delta t) = & \left( 1 - \frac{2a\gamma}{2a\gamma + f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})} \right)^{\frac{r}{b}} \left( 1 + \frac{2a\gamma}{-2a\gamma + f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})} \right)^{\frac{r}{b}} \cdot \\ & \frac{ba}{(b+r)f} \left[ -F_1(X; Y, Y'; Z; u; v) + \left( 1 + \frac{f\Delta t}{a} \right) \left[ \frac{\alpha + \beta\Delta t + \gamma\Delta t^2}{a + f\Delta t} \right]^{\frac{r}{b}} \left( 1 - \frac{2f\Delta t\gamma}{f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})} \right)^{\frac{r}{b}} \right. \\ & \left. \left( 1 + \frac{2f\Delta t\gamma}{f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})} \right)^{\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} F_1(X; Y, Y'; Z; u(\Delta t); v(\Delta t)) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

donde  $\Omega_p(0, \Delta t)$  representa el factor de corrección del número esperado de fallas que considera la variación en el intervalo  $[0, \Delta t)$  de la demanda estructural y la capacidad estructural que varía como una función polinomial. La función de Appell,  $F_1(X; Y, Y'; Z; u; v)$ , implícita en la ecuación 37 se resuelve como el producto de dos series como sigue (Slater, 1966) (ver Apéndice C):

$$F_1(X; Y, Y'; Z; u, v) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} x^p y^q \frac{\Gamma(p+q+X) \Gamma(p+Y) \Gamma(q+Y')}{\Gamma(X) \Gamma(Y) \Gamma(Y')} \frac{\Gamma(p+q+Z)}{\Gamma(Z) p! q!} \quad (38)$$

---

donde:

$$X = \frac{b+r}{b}; Y = \frac{r}{b}, Y' = \frac{r}{b}; Z = 2 + \frac{r}{b}; u = \frac{2a\gamma}{2a\gamma - f(\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha\gamma})}$$

$$v = \frac{2a\gamma}{2a\gamma + f(-\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha\gamma})}; u(\Delta t) = \frac{2\gamma(a + f\Delta t)}{2a\gamma - f(\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha\gamma})};$$

$$v(\Delta t) = \frac{2\gamma(a + f\Delta t)}{2a\gamma + f(-\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha\gamma})}$$

donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma;  $Y, Y', u$  y  $v$  son números reales,  $X$  y  $Z$  deben ser números enteros.

Siguiendo las mismas suposiciones para llegar a la ecuación 16 se tiene:

$$k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y} + \sigma^2_{\ln C} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right) \exp \left( K_{x|\Delta t} \frac{r}{b} \sigma_{UT} \right) \Omega_p(0, \Delta t) = v_0 \cdot \Delta t \quad (39)$$

De la ecuación 39 es posible obtener el factor de confianza que considera la variación de la capacidad no-lineal (polinomial) y la demanda estructural de manera simultánea, para el intervalo de tiempo de interés, como sigue:

$$\lambda_{confp}(0, \Delta t) = \frac{\phi \hat{C}(\Delta t)}{\gamma \hat{D}^{v_0}(\Delta t)} \left[ \frac{\Omega_p(0, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{-\frac{b}{r}} \quad (40)$$



---

# CAPÍTULO 2

## EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL DE UNA PLATAFORMA MARINA

En la ingeniería civil existen estructuras que debido a su importancia requieren mantenerse en niveles adecuados de seguridad para garantizar en todo momento que dicha estructura lleve a cabo su función adecuadamente. La seguridad del sistema estructural se provee especificando capacidades a los elementos estructurales que implícitamente cumplen con un nivel de confiabilidad aceptable. Sin embargo, cuando el sistema estructural tiene varios años de vida, sus propiedades estructurales se empiezan a deteriorar y, como consecuencia, los niveles de seguridad disminuyen llevando a la estructura a desarrollar niveles de seguridad no deseados. Debido a esto es necesario recurrir a metodologías que permitan conocer el nivel de seguridad de la estructura en el tiempo.

En el caso particular de las plataformas marinas, es indispensable mantenerlas en niveles de seguridad aceptables a lo largo de su vida útil debido a que los hidrocarburos son un importante rubro para la economía del país. En México se cuenta con aproximadamente 200 plataformas marinas fijas y 1900 km de tubería submarina en la Sonda de Campeche manejando una producción de crudo del orden de 2.1 millones de barriles por día y una producción de 1500 millones de pies cúbicos (IMP, 1998). Dada la importancia que presentan dichas estructuras es necesario conocer el nivel de seguridad de las plataformas marinas en cualquier instante de tiempo.

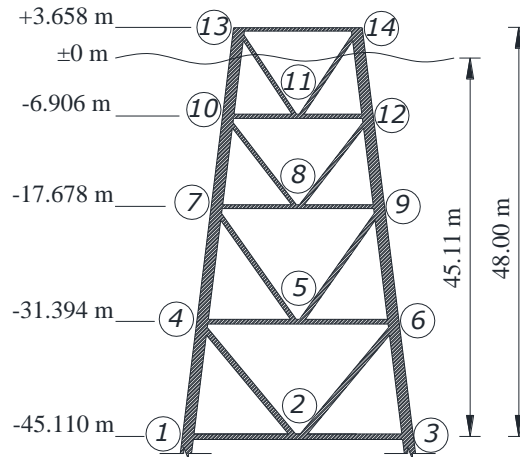
En el presente capítulo se evalúa la confiabilidad estructural de una plataforma marina para distintos intervalos de tiempo después de ser instalada, la confiabilidad se expresa en términos del factor de confianza y su correspondiente nivel de confianza. Se evalúan los casos *A*, *B*, *C* y *D* descritos en el capítulo anterior.

---

---

## 2.1 PLATAFORMA MARINA

Se analiza una plataforma marina de acero tipo “jacket” que se supone ubicada en la sonda de Campeche. Se modela la plataforma en dos dimensiones tomando solo uno de los marcos interiores y se considera únicamente la parte del “jacket”. En la figura 1 se muestra el marco en estudio. La estructura cuenta con una altura de 48 m, el sitio donde se ubica la estructura posee un tirante de agua de 45.11 m. Para realizar los análisis estáticos no-lineales y dinámicos “paso a paso” se utilizan propiedades mecánicas medias. Se considera un peso medio de la cubierta que le corresponde al marco interior igual a 500 ton. Se considera la aportación de los pilotes que se encuentran dentro de las piernas de la plataforma, suponiendo que los pilotes reciben y transmiten únicamente fuerza cortante.



**Figura 1.** Plataforma marina tipo “jacket”.

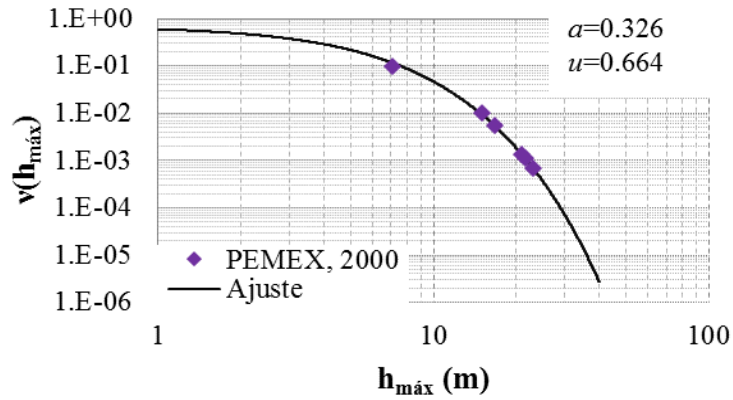
## 2.2 SOLICITACIONES

Con la finalidad de realizar un análisis de confiabilidad es necesario contar con información necesaria que permita conocer el tipo y la magnitud de las solicitaciones a las que estará sujeta la estructura. Para el caso de las plataformas marinas se debe contar con información meteorológica y oceanográfica del sitio donde se encuentra ubicada dicha estructura. En la norma “Diseño y Evaluación de Plataformas Marinas fijas en la sonda de Campeche” (PEMEX, 2000) se encuentra la información de condiciones extremas de oleaje, viento y corrientes marinas para diferentes sitios en la sonda de Campeche asociados a diferentes periodos de retorno.

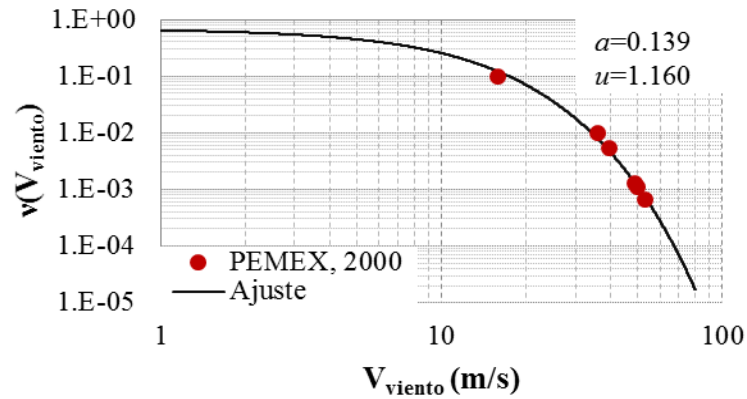
A partir de la información obtenida en la norma PEMEX (2000) se elaboraron las curvas de peligro de oleaje, velocidades de viento y velocidades de corrientes (0%, 50% y 95% de la profundidad total) para el sitio Akal. Las curvas de peligro se ajustan mediante una función de probabilidad anual acumulada de valores extremos de Gumbel de la forma:

$$P(Y \geq y) = 1 - \exp\{-\exp[-a(y-u)]\} \quad 0 \leq h \leq \infty \quad (41)$$

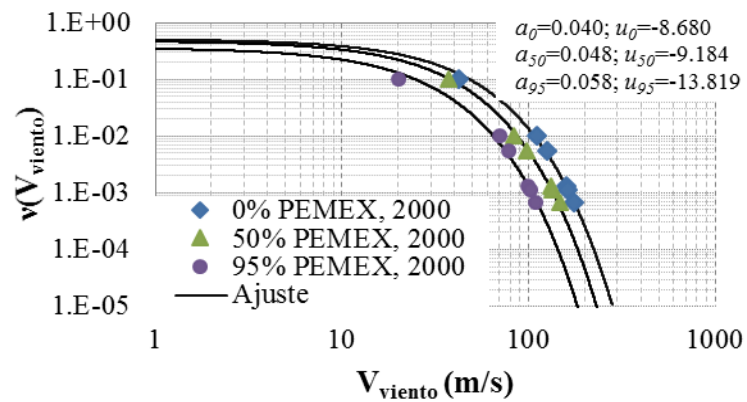
donde  $Y$  puede representar la altura máxima de ola, la velocidad de viento o la velocidad de corriente, según sea el caso. Los valores de  $a$  y  $u$  se muestran en la figuras 2a, b y c.



a)



b)



c)

**Figura 2.** Curvas de peligro. a) oleaje, b) velocidades de viento y c) velocidades de corriente para 0%, 50% y 95% de la profundidad total para el sitio Akal.

## 2.3 JUNTAS CRÍTICAS

En este estudio se seleccionaron las juntas que aportan mayor capacidad global a la estructura. El criterio que se siguió para determinar las juntas críticas fue reduciendo la capacidad original de una junta al 30%, dejando con su capacidad original a las demás juntas, posteriormente, se somete a la plataforma marina a varios análisis estáticos no-lineales considerando veinte perfiles de carga a partir de oleajes simulados (Ver Apéndice C), el perfil de carga obedece a un periodo de retorno de 1485 años ( $h_{máx} = 23$  m) que es la altura máxima de ola que contiene la norma PEMEX (2000) para la evaluación de una plataforma marina. El procedimiento se repite para cada una de las juntas de la estructura. Con la información obtenida de las curvas de capacidad y considerando que la capacidad,  $\hat{C}$ , es de tipo lognormal, en la tabla 1 se presentan los valores de la mediana de la capacidad,  $\hat{C}$ , en función del cortante basal y del desplazamiento global que aporta cada junta de la plataforma marina.

**Tabla 1.** Valores de las medianas de capacidad,  $\hat{C}$ , de cada junta.

<b>Junta al 30% de su capacidad</b>	<b><math>\hat{C}_{cortante\ basal}</math> (ton)</b>	<b><math>\hat{C}_{desplazamiento\ global}</math> (m)</b>
1*	367.065	0.0541
2*	819.096	0.1997
3*	361.788	0.0543
4*	905.156	0.2496
5**	906.282	0.2515
6*	904.604	0.2490
7**	906.398	0.2508
8**	906.639	0.2514
9**	906.629	0.2507
10	907.848	0.2520
11	907.862	0.2520
12	907.540	0.2520
Sin daño (estructura original)	907.862	0.2520

De acuerdo con la tabla 1 las juntas aportan una mayor contribución a la capacidad global de la plataforma marina son las juntas 1\*, 2\*, 3\*, 4\* y 6\* (ver figura 1), esto se debe a que si se deja alguna de estas juntas al 30% de su capacidad, y se realizan los correspondientes análisis estáticos no-lineales a la estructura, se tiene como resultado una disminución importante de la capacidad global de la estructura. Como ejemplo de un caso contrario se tiene la junta 10, en donde la capacidad global que aporta al estar al 30% su capacidad es relativamente pequeña asemejándose a los valores de cortante basal y desplazamiento global que se obtienen cuando se evalúa a la estructura con todas sus juntas sanas (sin daño), por lo que se llega a la conclusión que la junta 10 no aporta capacidad global significativa al sistema estructural. De acuerdo a lo anterior, se consideran como *juntas críticas*, las juntas 1\*, 2\*, 3\*, 4\* y 6\*. Se hace notar que las juntas N5\*\*, N7\*\*, N8\*\* y N9\*\* también aportan capacidad global a la estructura (menos que las juntas críticas) cuando están al 30% de su capacidad total, por lo que se hace hincapié que después de analizar las juntas críticas, se pueden analizar las siguientes juntas que también aportan (en menos cantidad) capacidad global a la estructura.

## 2.4 DAÑO POR FATIGA

En este estudio se considera como condición de daño el crecimiento de grietas por fatiga de las juntas críticas. Los esfuerzos mínimos y máximos en los puntos críticos de la juntas se obtuvieron sometiendo a la plataforma marina a análisis dinámicos “paso a paso” utilizando diez historias de oleaje simulado para distintos periodos de retorno. El contenido de frecuencias de los oleajes se obtiene a partir del espectro de Pierson–Moskowitz (1964) (Ver apéndice D). Se considera que la superficie de mar se representa como un proceso estacionario gaussiano y este se expresa superposición de olas regulares con una generación aleatoria de sus ángulos de fase con distribución uniforme entre 0 y  $2\pi$ . El crecimiento de grieta promedio de los puntos seleccionados bajo carga aleatoria se obtuvo utilizando la ecuación diferencial modificada (Paris y Erdogan, 1963; Sobczyk y Spencer, 1992) (Ver Apéndice E):

$$\frac{da'}{dt} = C(\Delta K_{mr})^m v' \quad (42)$$

$$\Delta K_{mr} = Y S_{mr} \sqrt{\pi a'} \quad (43)$$

donde  $C$  y  $m$  son parámetros que dependen de las características del material  $\Delta K_{mr}$  es el intervalo de intensidad de esfuerzo medio,  $v'$  es la tasa de cruces positivos por cero en un cierto tiempo,  $Y$  es el factor de corrección geométrica (Newman y Raju, 1981),  $S_{mr}$  es el intervalo de esfuerzo medio de la respuesta aleatoria de los elementos (Sobczyk y Spencer, 1992), y  $a'$  es el tamaño de la grieta. En esta ecuación se reemplaza la carga aleatoria por una carga cíclica equivalente cuya amplitud y frecuencia se expresan en función de las propiedades medias del proceso aleatorio. Sustituyendo la ecuación 43 en la ecuación 42 se obtiene:

$$\int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{(Y \sqrt{\pi a'})^m} = C S_{mr}^m v' t \quad (44)$$

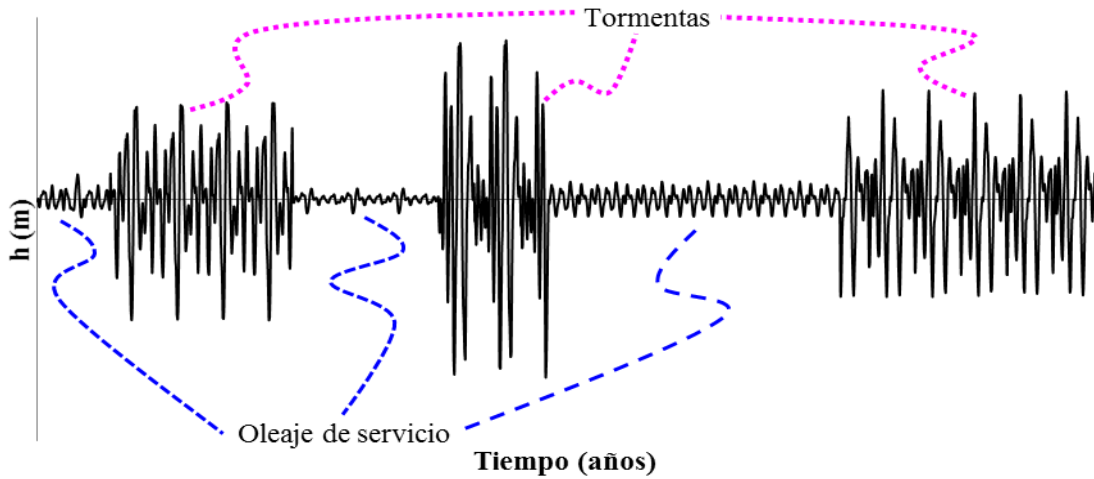
donde  $a_0$  es el tamaño inicial de la grieta y  $a_f$  es el tamaño final de la grieta después de  $N$  ciclos. La descripción probabilista del crecimiento de grietas por fatiga se estimó mediante la técnica de simulación de Monte Carlo. En la tabla 2 se muestran los valores de los parámetros estadísticos que se utilizaron para la simulación de grietas. Los parámetros fueron tomados del trabajo de Silva-González y Heredia-Zavoni (2004) para plataformas ubicadas en la bahía de Campeche.

**Tabla 2.** Parámetros estadísticos utilizados para la simulación de grietas.

Parámetro	Valor medio	Desviación estándar	Distribución
$v_0$	En función de la junta y el tiempo	En función de la junta y el tiempo	Lognormal
$S_{mr}$	En función de la junta y el tiempo	En función de la junta y el tiempo	Rayleigh
$a/c$	0.25	-----	-----
$M^*$	3	0.3	Normal
$\ln C^*$	-40.39	-0.69067	Normal
$a_0$	0.00011	-----	-----

\* Coeficiente de correlación  $\rho_{\ln C, m} = 0.9$

Para el análisis se tomaron en cuenta oleajes tanto de servicio como de tormenta (Ver Apéndice E). Los tiempos de espera entre tormentas se supusieron con distribución exponencial. Durante el tiempo de espera entre tormentas se consideró que actuaba el oleaje de servicio (ver figura 3). Se consideró que la altura máxima de ola asociada a una tormenta sigue una distribución de Gumbel (considerando la derivada normalizada de la curva de peligro de oleaje), y que el tamaño de grieta  $a'$ , en un cierto tiempo  $t$ , presenta una distribución lognormal.

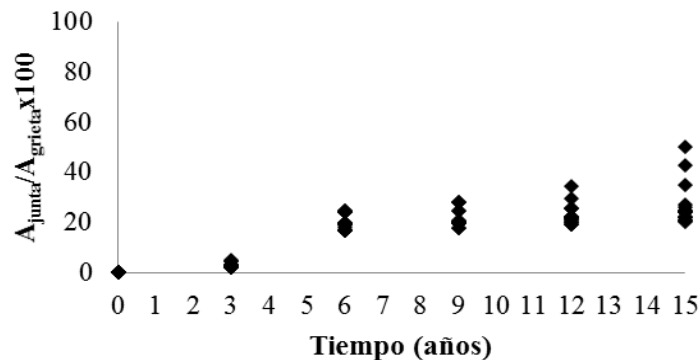


**Figura 3.** Ilustración de una historia de oleaje simulada para la vida de diseño de la plataforma.

Considerando que el deterioro estructural en la plataforma se presenta por la aparición de grietas en las juntas tubulares, Stacey *et al.*, (1996) proponen que la capacidad de la junta intacta,  $P_k$ , sea modificada por un factor de reducción lineal como sigue:

$$P_c = P_k \left( 1 - A_{grieta} / A_{junta} \right) \quad (45)$$

Donde  $P_c$  es la capacidad remanente de la junta agrietada,  $A_{junta}$  es el área de la sección transversal y  $A_{grieta}$  es el área de la grieta, producto de la suma de las áreas de las grietas de los puntos seleccionados en la sección de interés. En la figura 4 se muestra los porcentajes de áreas de grietas simuladas, correspondiente a la junta 2.



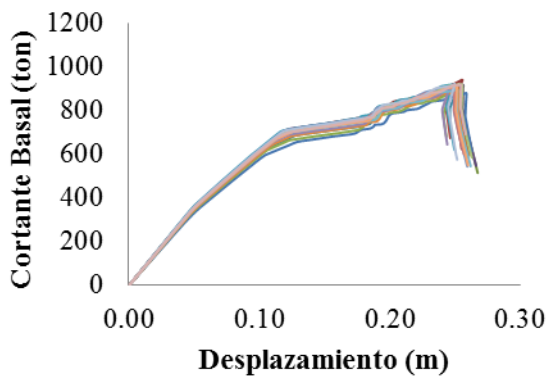
**Figura 4.** Porcentajes de áreas de grietas simuladas, correspondiente a la junta 2.

---

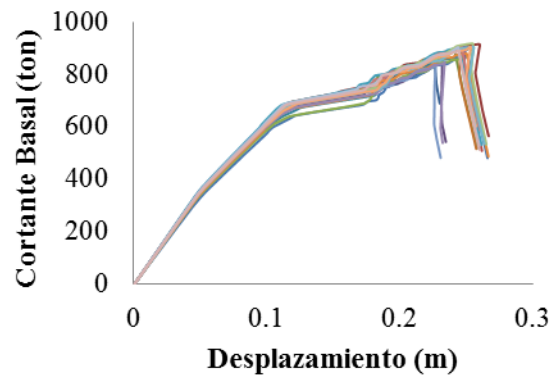
## 2.5 EVALUACIÓN DE LA CAPACIDAD ESTRUCTURAL EN EL TIEMPO

Para conocer la capacidad de la estructura en el tiempo se realizaron simulaciones de crecimientos de grietas para cada punto de cada junta crítica considerando que estas presentan una distribución de tipo lognormal. Una vez obtenidos los tamaños de grietas el intervalo de tiempo de interés se reduce la capacidad de cada junta crítica, utilizando la ecuación 45.

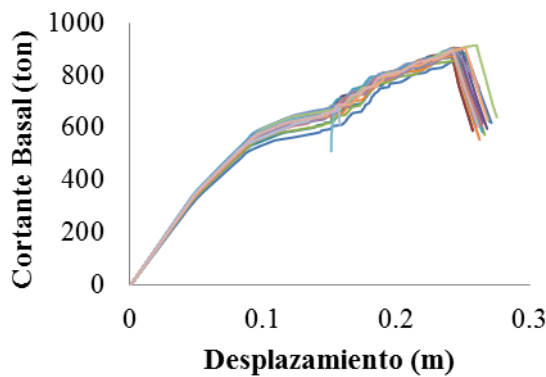
Posteriormente se somete a la estructura a una serie de análisis estáticos no-lineales utilizando veinte perfiles de carga diferentes obtenidos a partir de oleajes simulados. Los perfiles utilizados obedecen a las fuerzas actuantes cuando el oleaje simulado produce el máximo cortante basal. En la figura 5 se muestran los análisis estáticos no-lineales para diferentes intervalos de tiempo, considerando daño acumulado. Se hace notar que a medida que se incrementa el intervalo de tiempo, las curvas de capacidad (graficadas en términos del cortante basal contra el desplazamiento de la cubierta) presentan una disminución de rigidez y resistencia debida al daño acumulado.



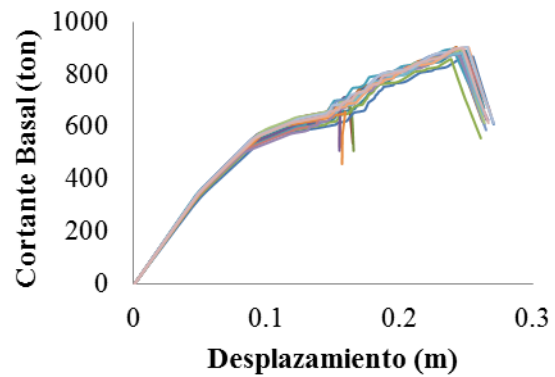
a)  $\Delta t=0$  años



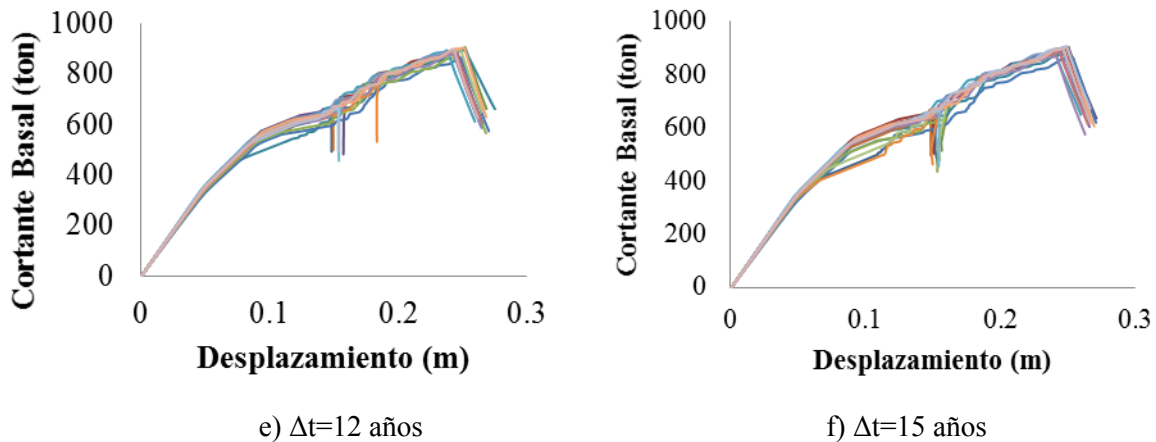
b)  $\Delta t=3$  años



c)  $\Delta t=6$  años

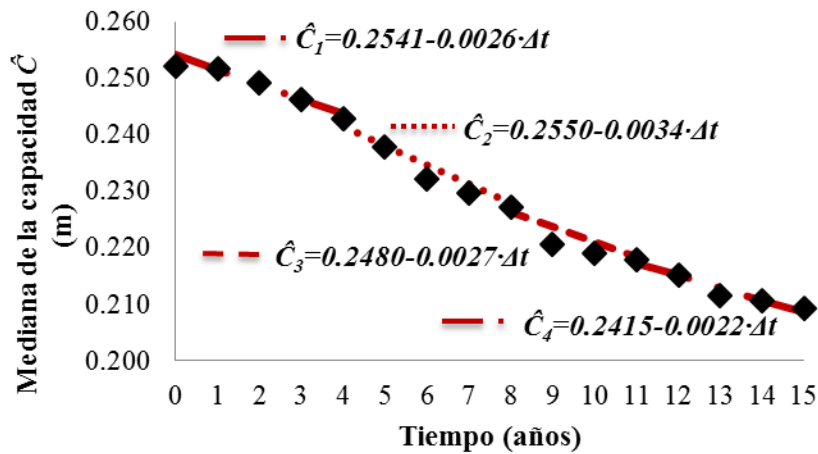


d)  $\Delta t=9$  años



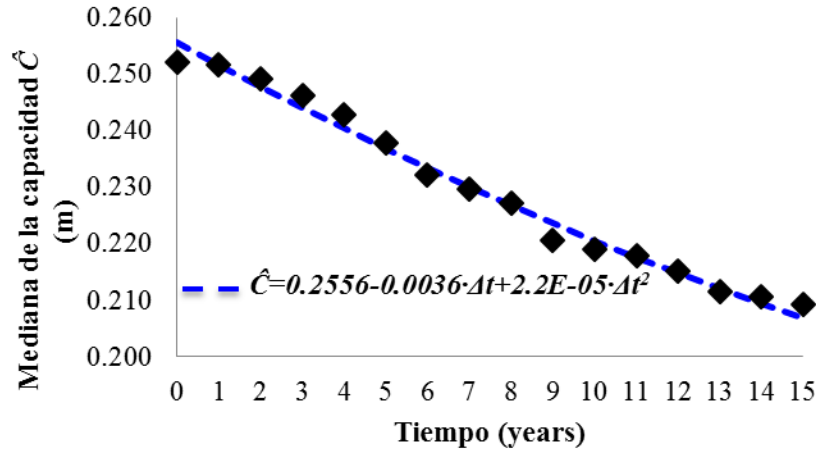
**Figura 5.** Curvas de capacidad para distintos intervalos de tiempo.

A partir de las curvas de capacidad para cada intervalo de tiempo se obtienen las medianas de la capacidad,  $\hat{C}$ , y sus respectivas desviaciones estándar del logaritmo natural,  $\sigma_{\ln C}$ . Se considera que la capacidad presenta distribución tipo lognormal. En las figuras 6 a y b se presentan las medianas de la capacidad,  $\hat{C}$ , representadas en términos del desplazamiento global de la plataforma para diferentes intervalos de tiempo. En la figura 7a se ajustan las medianas considerando que la capacidad estructural varía linealmente en sub-intervalos de tiempo (ecuación 25), mientras que en la figura 6b se ajustan las medianas considerando que la capacidad varía como una función no lineal expresada mediante un polinomio de segundo grado (ecuación 35). Se hace notar que las medianas de la capacidad (figuras 6 a y b) decrecen a medida que se incrementa el intervalo de tiempo, esto se debe a que a medida que pasa el tiempo la plataforma marina está sometida a cargas de oleaje por tormenta y servicio, causando que se incremente el tamaño de las grietas en los puntos críticos, y con ello se produzca una reducción de la capacidad de la junta, provocando una disminución en la capacidad global de la plataforma marina.



a)

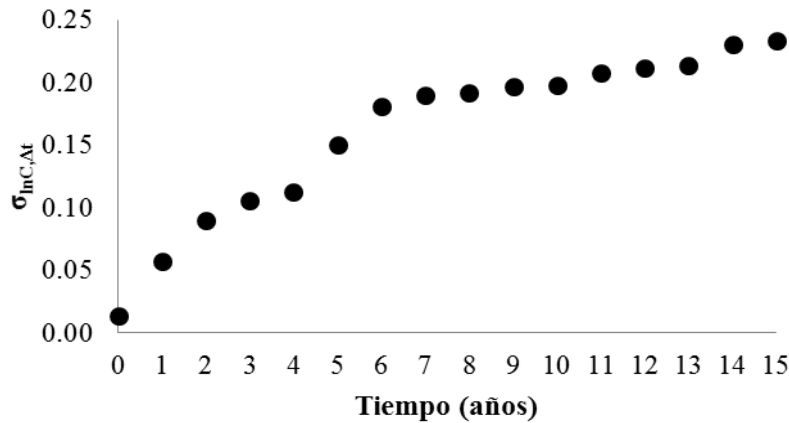




b)

**Figura 6.** Medianas de la capacidad considerando que la capacidad, a) varía linealmente en sub intervalos de tiempo, y b) varía de forma no lineal mediante un polinomio de segundo grado.

En la figura 7 se muestran las desviaciones estándar del logaritmo natural de la capacidad,  $\sigma_{\ln C}$ , se puede ver que los valores de las desviaciones estándar del logaritmo natural de la capacidad se incrementan a medida que transcurre el tiempo. Esto se debe a que mientras más grande sea el intervalo de tiempo, existe una probabilidad mayor de que la estructura esté sometida a diferentes cargas de oleaje por servicio y de tormenta acumulando de manera distinta el daño causado por fatiga en las juntas críticas, provocando una mayor variabilidad en la respuesta de la estructura.

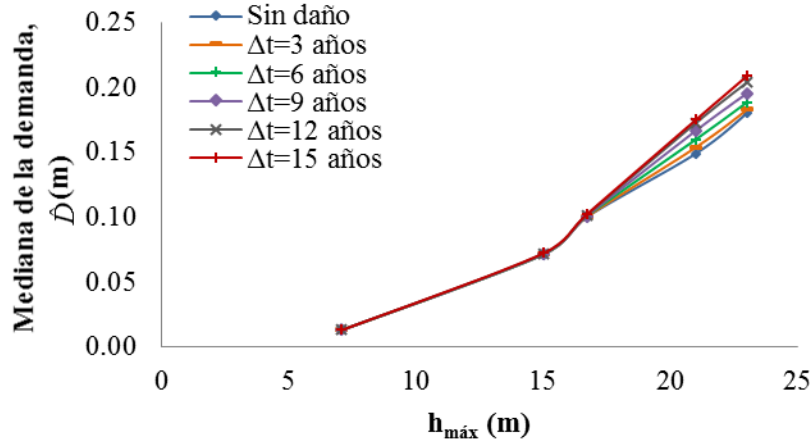


**Figura 7.** Desviación estándar de logaritmo natural de la capacidad para diferentes intervalos de tiempo.

## 2.6 EVALUACIÓN DE LA DEMANDA ESTRUCTURAL EN EL TIEMPO, PARA CIERTO NIVEL DE ALTURA DE OLA MÁXIMA

Con la finalidad de evaluar la demanda estructural en el tiempo se sometió a la plataforma marina a una serie de análisis dinámicos “paso a paso”, utilizando un conjunto de oleajes simulados, asociados a diferentes alturas de ola. Se utilizaron las mismas simulaciones de crecimiento de

grietas y las mismas reducciones de las capacidades de las juntas críticas que se emplearon para evaluar la capacidad,  $\hat{C}$ , en el tiempo. En la figura 8 se muestran las medianas de la demanda,  $\hat{D}$ , en el tiempo, en función del desplazamiento global de la plataforma, dada una altura de ola máxima. La figura 8 indica que las medianas de la demanda,  $\hat{D}$ , son diferentes entre sí a partir de cierta altura de ola máxima (16.7m). Esto se debe a que las alturas de ola menores que 16.7 m no producen daño significativo a la estructura. Por otra parte, para alturas de ola mayores que 16.7 m se presentan valores mayores de las medianas de la demanda a medida que se incrementa  $\Delta t$ , lo que se atribuye al comportamiento no-lineal de la estructura.



**Figura 8.** Medianas de la demanda estructural, dada una altura máxima de ola, para diferentes intervalos de tiempo.

El valor de la mediana de la demanda estructural, dada una altura de ola máxima, se ajusta de acuerdo con la ecuación 19. La expresión queda como sigue:

$$\hat{D}(\Delta t) = (3.75E - 04 + 5.0E - 08 \cdot \Delta t) \cdot h_{m\acute{a}x}^{2.0} \quad (46)$$

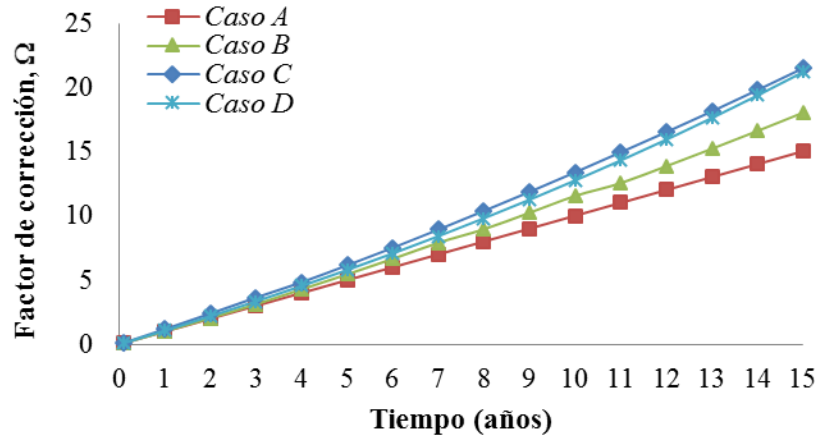
Con la misma forma de ecuación se ajusta las desviaciones estándar del logaritmo natural de la demanda, dada una altura de ola máxima como sigue:

$$\sigma_{\ln D|h_{m\acute{a}x}, \Delta t} = (1.65E - 03 + 1.5E - 05 \cdot \Delta t) \cdot h_{m\acute{a}x}^{1.5} \quad (47)$$

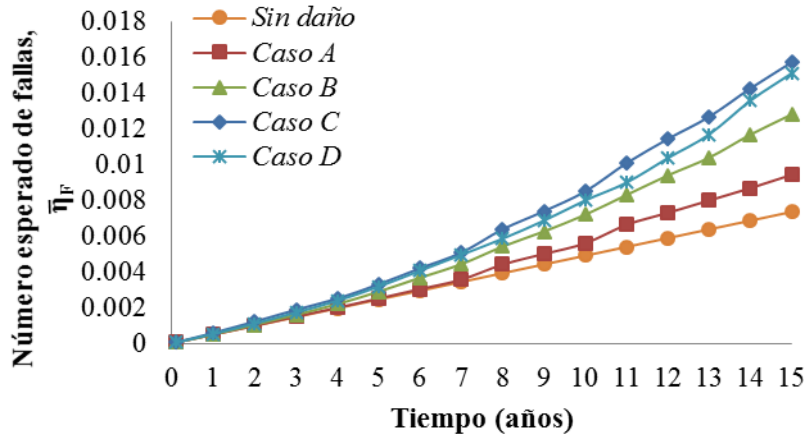
## 2.7 FACTOR DE CORRECCIÓN Y NÚMERO ESPERADO DE FALLAS EN EL TIEMPO

El factor de corrección y el número esperado de fallas al término de un intervalo de tiempo se evalúa para los casos A, B, C y D correspondientes a las ecuaciones 22, 27, 31, 37, y 5, 21, 26, 30, 36, respectivamente. Los valores de los parámetros  $k$  y  $r$  que se ajustan a la forma de la curva de peligro de oleaje mediante la expresión  $v(h_{m\acute{a}x}) = k \cdot (h_{m\acute{a}x})^{-r}$ , son iguales a  $k=5 \times 10^3$  y  $r=5$ . Estos corresponden a la región de la curva de peligro de oleaje donde se presenta la máxima altura de ola

$h_{m\acute{a}x}=23$  m asociada a un periodo de retorno de 1485 años, según la norma *NRF-003-PEMEX-2000* (PEMEX, 2000). Por otro lado, en este estudio se supone un valor de las incertidumbres epistémicas asociadas tanto a la capacidad como a la demanda igual que  $\sigma^2_{UD} = \sigma^2_{UC} = 0.15$ . En la figuras 9 y 10 se presentan los factores de corrección y el número esperado de fallas al término de un intervalo de tiempo, respectivamente.



**Figura 9.** Factor de corrección del número esperado de fallas para los casos A, B, C y D, considerando diferentes intervalos de tiempo.

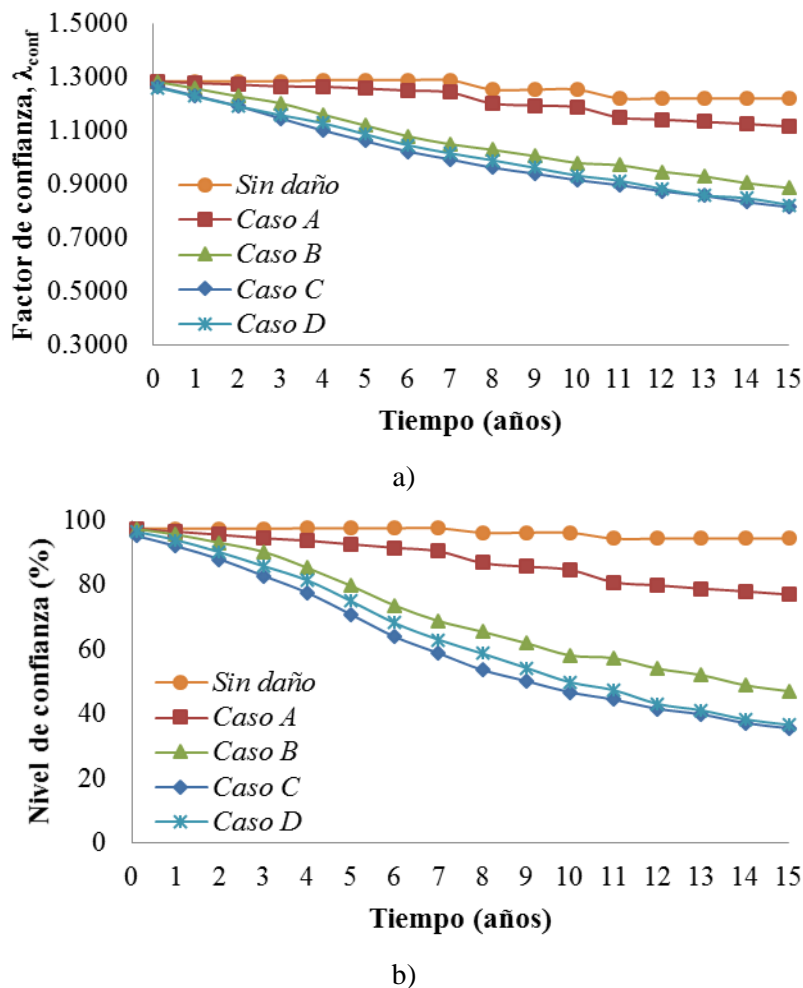


**Figura 10.** Número esperado de fallas obtenidos para casos A, B, C y D al término de distintos intervalos de tiempo.

Se hace notar que en la figura 9 el factor de corrección se incrementa a medida de que transcurre el intervalo de tiempo. Para los casos C y D se presenta un mayor incremento del factor de corrección debido a que se considera de manera simultánea la variación de la demanda estructural (dada una altura máxima de ola) y la capacidad estructural, considerando los casos en que la degradación de la capacidad se considera lineal en varios sub-intervalos de tiempo y no-lineal a lo largo de todo el intervalo de tiempo en estudio, respectivamente. Un comportamiento similar se presenta en el número esperado de fallas (ver figura 10), donde los casos C y D presentan un valor mayor del número esperado de fallas con respecto a los casos A, B.

## 2.8 FACTOR DE CONFIANZA Y NIVEL DE CONFIANZA EN EL TIEMPO

Los factores de confianza,  $\lambda_{conf}$ , al término de diferentes intervalos de tiempo para los casos A, B, C, D y sin considerar daño (ecuaciones 24, 29, 34, 40 y 10, respectivamente) se muestran en la figura 11a. Los porcentajes de decremento del factor de confianza con respecto al caso en el que no se considera deterioro estructural, al término del intervalo de tiempo de 15 años, son del orden de 9%, 27%, 34% y 34% para los casos A, B, C y D, respectivamente. Los niveles de confianza,  $K_x$ , asociados a los factores de confianza presentados anteriormente se presentan en la figura 11b. Se hace notar que el nivel de confianza para los casos de estudio disminuye a medida que el intervalo de tiempo se incrementa. Para el caso en el que no se considera daño, el valor del nivel de confianza,  $K_x$ , se mantiene prácticamente constante con un valor de 94%; sin embargo, para los casos A, B, C y D el nivel de confianza disminuye de 94% a 77%, 47%, 36% y 36% al término de 15 años, respectivamente.

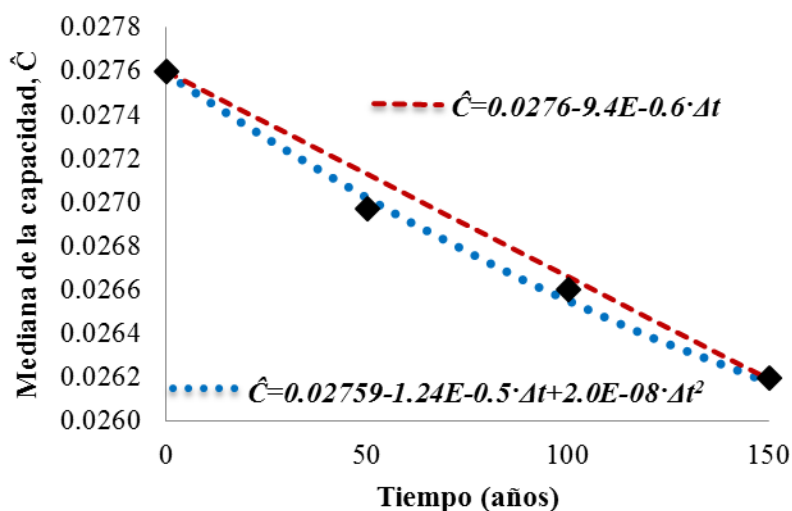


**Figura 11.** a) Factores de confianza, y b) Niveles de confianza, para los casos de estudio, al término de distintos intervalos de tiempo.

Con base en los resultados anteriores los factores de confianza menores corresponden al caso A en el que se considera sólo la variación de la demanda estructural mientras que la capacidad es independiente del tiempo. El caso B presenta valores menores con respecto al caso A, por lo que se puede decir que influye más el caso B con respecto al caso A en la obtención de la confiabilidad estructural expresada en términos del factor de confianza. Al hacer la comparación entre los casos *sin daño*, A, B y C, se llegan a factores de confianza menores para el caso C, por lo que es deseable que en un análisis de confiabilidad estructural se considere la degradación de la capacidad estructural y el aumento de la demanda, dada una altura de ola máxima debido a que es una formulación más completa y por lo tanto se obtienen niveles de confiabilidad más precisos. Cabe mencionar que en el **Apéndice G** se presentan tanto las expresiones desarrolladas en el capítulo 1 como la obtención de la confiabilidad estructural de la plataforma marina que se describe en el presente capítulo, considerando los casos (*sin daño*, A, B y C).

En lo que se refiere al modelo de degradación lineal y no-lineal, se obtienen resultados muy similares cuando se secciona la ventana de tiempo del modelo lineal en sub-intervalos de tiempo, resultando diferencias del orden de 2% en promedio. Por lo que bajo esa condición, el modelo de degradación lineal es viable.

Caso similar sucede en el **Apéndice F** en donde se desarrolla la expresión simplificada para el caso D y se compara con la del caso C. Se obtiene la confiabilidad estructural al término de distintos intervalos de tiempo de un edificio de concreto reforzado de 10 niveles y 3 crujiás que se supone ubicado en suelo blando con características similares al sitio de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes en la Ciudad de México. Con la finalidad de hacer ver que tanta influencia tiene el modelo no-lineal con respecto al lineal, estos modelos se ajustaron a las medianas de la capacidad estructural a lo largo de la ventana de tiempo en estudio (ver figura 12).

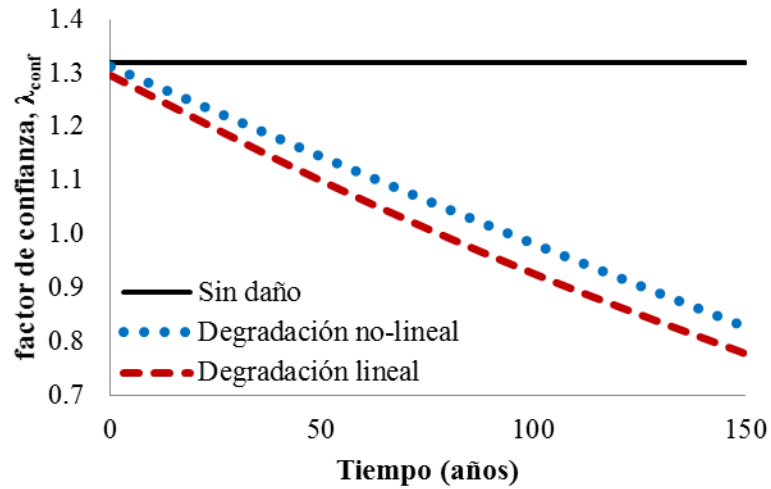


**Figura 12.** Medianas de la capacidad al término de distintos intervalos de tiempo correspondientes al edificio que se estudia en el apéndice F.

En la figura 13 se muestran las diferencias entre los factores de confianza para los casos C (lineal) y D (no-lineal), que corresponden a 4%, 5% y 4% al término de 50, 100 y 150 años después de

---

construido el edificio de concreto reforzado.



**Figura 13.** Factor de confianza al término de distintos intervalos de tiempo correspondiente al edificio que se estudia en el apéndice F.

Los resultados que se obtienen al comparar los casos *C* y *D* en el presente capítulo (del orden de 2%) y en los resultados obtenidos en el apéndice F (4%, 5%, 4% al término de 50, 100 y 150 años, respectivamente) corresponden a diferencias pequeñas, por lo que el uso de un modelo (lineal) u otro (no-lineal) se deja a criterio del ingeniero. En los capítulos que siguen sólo se utilizará el caso *C* que considera la variación tanto de la capacidad (lineal) como la demanda para la obtención de los intervalos de tiempo.

---

# CAPÍTULO 3

## CRITERIO DE OPTIMIZACIÓN CON BASE EN ANÁLISIS COSTO/BENEFICIO

El crecimiento económico de un país depende en gran medida al desempeño confiable y duradero de sus estructuras. La acción de fenómenos naturales puede lograr que las estructuras incidan en un desempeño no deseable durante su ciclo de vida. Incluso el diseño inicial conservador dado por el ingeniero estructurista no garantiza que la estructura esté protegida ante estas amenazas (huracanes, sismos, inundaciones, etc.). Por otro lado, el envejecimiento y/o el aumento del desempeño estructural demandado por la acción de un fenómeno natural puede afectar significativamente la vulnerabilidad de las estructuras existentes (Esteva *et al.*, 2010; Casciati y Faravelli, 2010). Una manera de garantizar el buen funcionamiento de una estructura lo largo de su vida útil es mediante el establecimiento de criterios de optimización con la finalidad de dar mantenimiento preventivo y/o necesario a las estructuras.

Con la finalidad de establecer modelos de optimización racionales y económicos, Forssell (1924) estableció el primer modelo buscando minimizar el costo total. Posteriormente, este problema fue estudiado utilizando métodos probabilísticos para establecer las bases del análisis estructural y el diseño basado en confiabilidad (Freudenthal, 1956). Tomando en cuenta lo anterior se introdujeron en los códigos de diseño conceptos basados en confiabilidad (Cornell, 1969; Lind, 1971; Rosenblueth y Esteva, 1972; Ditlevsen, 1973; Ang y Cornell, 1974; Hasofer y Lind; 1974). Con base en conceptos y métodos de confiabilidad se desarrollaron criterios de diseño óptimo (Rosenblueth y Mendoza, 1971; Mau, 1971; Moses, 1973; Rosenblueth, 1976; Frangopol, 1984; Rosenblueth, 1986; Rackwitz, 2000; Esteva *et al.*, 2002). Algunos autores han tomado como base el concepto de índice de confiabilidad dependiente del tiempo para mantener la seguridad y optimizar el ciclo de vida de estructuras deterioradas sin mantenimiento (Thoft-Christensen, 1998; Frangopol *et al.*, 2001; Kong and Frangopol, 2003), y con mantenimiento (Kong and Frangopol, 2003).

---

---

En México se han desarrollado trabajos para estimar el ciclo de vida de estructuras estableciendo criterios de diseño sísmico y políticas de mantenimiento utilizando disipadores de energía sísmica (Estevea *et al.*, 1999). También se han desarrollado trabajos de optimización en ciclo de vida para determinar valores óptimos de las propiedades mecánicas de un sistema estructural expuesto a riesgo sísmico (Estevea *et al.*, 2002). Por otro lado se han realizado trabajos con la finalidad de establecer un enfoque para poder determinar el mantenimiento óptimo de reparación de estructuras en zonas sísmicas (Montes-Iturrizaga *et al.*, 2003).

En el caso de plataforma marinas varios autores han desarrollado trabajos donde se planean inspecciones (en base al riesgo y la confiabilidad) para conexiones soldadas sujetas a fatiga en plataformas marinas (Skjong, 1985; Madsen *et al.*, 1989 y Sørensen *et al.*, 1991); mediante metodologías que toman en cuenta análisis de sensibilidad a la fatiga en juntas de acero de plataformas marinas para determinar un programa de inspección total (Thoft-Christensen y Sørensen, 1987); implementando métodos simplificados y haciendo uso de parámetros prácticos de diseño como son los factores de diseño por fatiga (Straub *et al.*, 2006) y el factor de reserva de resistencia (Faber, 2001); mediante el uso de técnicas bayesianas (Sørensen y Ersdal, 2008).

Para las plataformas marinas en México se han propuesto planes de inspección para con base en análisis costo/beneficio para realizar acciones mantenimiento (Ortega y De León, 2003) y para fines de diseño (De león y Ang, 2003; De león y Ang, 2008); Planes de inspección basados en riesgo que consideran los costos esperados de inspección, reparación y falla y además, evalúan la probabilidad global de falla de plataformas sujetas a daño por fatiga (Silva-González y Heredia-Zavoni, 2007; Heredia-Zavoni *et al.*, 2008); Planes de inspección que evalúan la confiabilidad global estructural en el tiempo de plataformas sujetas a fatiga mediante redes bayesianas probabilísticas (Montes-Iturrizaga *et al.*, 2009). Recientemente se han propuesto modelos de opciones reales de mantenimiento y desmantelamiento para estimar el costo-beneficio en ciclo de vida de plataformas marinas (Santa-Cruz y Heredia-Zavoni, 2011).

En la primera parte de este capítulo se formula la función de costo total esperado que incluye los costos de inspección, reparación y falla. En la formulación de costos se incluye la confiabilidad expresada en términos del número esperado de fallas al término de un intervalo de tiempo de interés por medio de expresiones simplificadas cerradas que toman en cuenta el deterioro estructural en el tiempo. En la segunda parte se formula un plan de mantenimiento con base en un análisis costo/beneficio. El intervalo de tiempo óptimo para realizar los trabajos de inspección y mantenimiento será aquel que produzca los menores costos totales considerando el riesgo y la confiabilidad de la estructura.

### 3.1 FUNCIÓN DE COSTO TOTAL EN EL TIEMPO

La función de costo total se define como la suma de los costos esperados de inspección ( $I$ ), reparación ( $R$ ) y falla ( $F$ ) al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  como sigue:

$$C_{Total}(0, \Delta t) = C_I(0, \Delta t) + C_R(0, \Delta t) + C_F(0, \Delta t) \quad (48)$$



donde  $\bar{C}_I(0, \Delta t)$ ,  $\bar{C}_R(0, \Delta t)$  y  $\bar{C}_F(0, \Delta t)$  son el valor presente del costo de inspección, reparación y falla, respectivamente. En lo que sigue se definen los costos de inspección, reparación y falla considerando el deterioro estructural en el tiempo.

### 3.2 COSTO DE INSPECCIÓN

El valor presente del costo de inspección en el intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  se obtiene como sigue:

$$\bar{C}_I(0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} C_I(\tau, q|S) \cdot p_I(\tau|S) \cdot p_S[d(\tau)] \cdot e^{-\gamma \tau} d\tau \quad (49)$$

donde  $C_I(\tau, q|S)$  es el costo por inspeccionar la estructura en el instante  $\tau$ , dada una calidad de inspección  $q$ , considerando que la estructura ha sobrevivido ( $S$ );  $p_I(\tau|S)$  es la probabilidad de inspeccionar la estructura dado que la estructura ha sobrevivido hasta el instante  $\tau$ ;  $p_S[d(\tau)]$  es la probabilidad de que la estructura haya sobrevivido hasta el instante de tiempo  $\tau$  con cierto nivel de daño acumulado,  $d(\tau)$ ;  $e^{-\gamma \tau}$  es un factor para convertir el costo a valor presente dado un tiempo,  $\tau$ , y una tasa de descuento  $\gamma$ .

Considerando que la inspección de la estructura se realizará al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ , siempre y cuando la estructura sobreviva, la ecuación 42 se simplifica como sigue:

$$\bar{C}_I(\Delta t) = C_{I,q|\Delta t} \cdot e^{-\gamma(\Delta t)} \cdot p_S[d(\Delta t)] \quad (50)$$

donde  $C_{I,q|\Delta t}$  es el costo de inspección dada una calidad de inspección  $q$ ;  $e^{-\gamma(t+\Delta t)}$  es el factor de valor presente;  $p_I(\tau|S) = 1$  la probabilidad de inspeccionar (se supone igual a 1) y  $p_S[d(\Delta t)]$  es la probabilidad de que la estructura haya sobrevivido en el instante de tiempo  $\Delta t$  con daño acumulado  $d$ .

Por otro lado, si  $v_F(\tau)$  es la tasa esperada de falla del sistema en el instante de tiempo,  $\tau$ , donde la ocurrencia de fallas corresponde a un proceso no homogéneo de Poisson, la probabilidad de que la estructura haya sobrevivido en el instante de tiempo  $\Delta t$  queda como sigue:

$$p_S[d(\Delta t)] = e^{-\int_0^{\Delta t} v_F(\tau) d\tau} = e^{-\eta_F(0, \Delta t)} \quad (51)$$

Finalmente el costo esperado de inspección, dada una calidad de inspección, al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ , se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\bar{C}_{I,q}(0, \Delta t) = C_{I,q|\Delta t} \cdot e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, \Delta t)} \quad (52)$$

---

### 3.3 COSTO DE REPARACIÓN

El valor presente del costo de reparación en el intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$\bar{C}_R(0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} \sum_{j=1}^n C_{rj}[d(\tau)|S] \cdot p_{Rj}[d(\tau)|S] \cdot p_S[d(\tau)] \cdot e^{-\gamma\tau} d\tau \quad (53)$$

Donde  $n$  es número de elementos considerados para la reparación;  $C_{rj}[d(\tau)|S]$  es el costo de reparar el elemento  $j$  para un nivel de daño,  $d$ , en el instante de tiempo,  $\tau$ ;  $p_{Rj}[d(\tau)|S]$  es la probabilidad de reparar el elemento  $j$  con daño acumulado  $d$ , dado que la estructura ha sobrevivido hasta el instante  $\tau$ .

Cuando el nivel daño del elemento en cuestión al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  sea igual o mayor a cierto umbral establecido, la probabilidad de reparar el elemento  $j$ , queda como sigue:

$$P_{Rj}[d(\tau)|S] = P(D_j(\tau) \geq d) \cdot P_{I_j}(\tau|S) \quad (54)$$

Donde  $P(D_j(\tau) \geq d)$  es la probabilidad condicional de que el elemento  $j$  con cierto nivel de daño acumulado  $D$  el instante de tiempo  $\tau$ , sea mayor o igual a un nivel de daño  $d$  establecido;  $P_{I_j}(\tau|S)$  es la probabilidad de inspeccionar el elemento  $j$  y tiene con un valor igual a 1. Al considerar que se estará acumulado el daño del elemento  $j$  en el intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  la ecuación 53 se simplifica como:

$$\bar{C}_R(0, \Delta t) = \sum_{j=1}^n C_{rj|\Delta t} \cdot P(D_j(\Delta t) \geq d) \cdot e^{-\gamma(\Delta t)} \cdot P_S[d(\Delta t)] \quad (55)$$

donde  $\bar{C}_{rj|\Delta t}$  es el costo de reparación del elemento  $j$  al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ .

Suponiendo que la probabilidad de que la estructura haya sobrevivido en el instante de tiempo  $\Delta t$  sigue un proceso de Poisson, el costo esperado de reparación al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\bar{C}_R(0, \Delta t) = \sum_{j=1}^n C_{rj|\Delta t} \cdot P(D_j(\Delta t) \geq d) \cdot e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_r(0, \Delta t)} \quad (56)$$

---

### 3.4 COSTO DE FALLA

El valor presente del costo esperado de la falla que puede ocurrir en el intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$ , se puede calcular como sigue:

$$\bar{C}_F(t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} C_f[d(\tau)] \cdot p_F(\tau) e^{-\gamma \tau} d\tau \quad (57)$$

donde  $C_f[d(\tau)]$  es el costo de falla de la estructura dado un nivel de daño  $d$  en el instante  $\tau$ ;  $p_F(\tau)$  es la función de densidad de probabilidad del tiempo de espera a la falla en el instante de tiempo  $\tau$ , y es igual a:

$$p_F(t) = v_F(t) e^{-\int_0^t v_F(\tau) d\tau} = v_F(t) e^{-\eta_F(0,t)} \quad (58)$$

Considerando que los costos de falla y el factor de valor presente se mantienen constantes durante el intervalo de tiempo, la expresión 57 queda como sigue:

$$C_F(0, \Delta t) = C_{f|\Delta t} e^{-\gamma(\Delta t)} \int_0^{\Delta t} v_F(\tau) e^{-\eta_F(0,\tau)} d\tau \quad (59)$$

Resolviendo la integral en intervalos de tiempo de un 1 año, el valor presente del costo de la posible falla en el intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  es como sigue:

$$\bar{C}_F(0, \Delta t) = C_{f|\Delta t} \sum_{k=1}^{\hat{N}} \eta_F(t_k - t_{k-1}) e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, t_k - t_{k-1})} \quad (60)$$

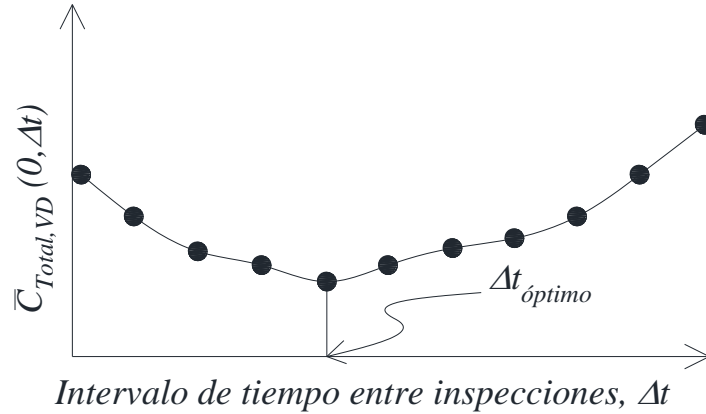
donde  $\hat{N}$  es el número de intervalos de tiempo de interés;  $\eta_F(t_k - t_{k-1})$  es el número esperado de fallas para el intervalo de tiempo de interés, y  $t_1, t_2, \dots, t_N = 1, 2, \dots, \hat{N}$  años.

Sustituyendo los valores esperados del costo de inspección, reparación y falla al término del intervalo de tiempo (ecuaciones 49, 53 y 57) en la ecuación 45, la función de costo total esperado es como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{Total}(0, \Delta t) = \bar{C}_{I,q}(0, \Delta t) = C_{I,q|\Delta t} \cdot e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, \Delta t)} + \\ \sum_{j=1}^n C_{r_j|\Delta t} \cdot P(D_j(\Delta t) \geq d) \cdot e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, \Delta t)} \\ C_{f|\Delta t} \sum_{k=1}^{\hat{N}} \eta_F(t_k - t_{k-1}) e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, t_k - t_{k-1})} \end{aligned} \quad (61)$$

### 3.5 INTERVALO DE TIEMPO ÓPTIMO PARA INSPECCIÓN Y MANTENIMIENTO CON BASE EN ANÁLISIS COSTO/ BENEFICIO

El intervalo de tiempo óptimo para realizar trabajos de inspección y mantenimiento con base en análisis costo/beneficio se puede identificar a través de la comparación de los costos totales esperados correspondientes a inspección, reparación y falla al término de diferentes intervalos de tiempo. El problema para obtener el intervalo de tiempo óptimo con base en el criterio costo/beneficio se resuelve cuando se encuentra aquel intervalo de tiempo que demanda el menor costo total en la vida de la estructura, manteniendo a la misma dentro ciertos límites de confiabilidad preestablecidos (ver figura 14).



**Figura 14.** Obtención del intervalo de tiempo óptimo con base en análisis costo/beneficio.

Con la finalidad de encontrar dicho intervalo de tiempo es necesario considerar lo siguiente:

La estructura sobrevive al final del intervalo de tiempo de interés.

Los intervalos entre inspecciones son equidistantes.

Los elementos recuperan su capacidad total después de cada reparación.

Al tomar en cuenta estas consideraciones, la función de costo total dada por la ecuación 45, se puede expresar de la siguiente forma (usando las ecuaciones 49, 53 y 57):

$$\bar{C}_{Total,VD}(0, \Delta t) = \bar{C}_{I,q,VD}(0, \Delta t) + \bar{C}_{R,VD}(0, \Delta t) + \bar{C}_{F,VD}(0, \Delta t) \quad (62)$$

donde:

$$\bar{C}_{I,q,VD}(0, \Delta t) = \sum_{m=1}^{NI} C_{(I,q)_m|\Delta t} \cdot e^{-\gamma_m(\Delta t) - \pi_{F,T_m}(0, \Delta t)} \quad (63)$$

$$\bar{C}_{R,VD}(0, \Delta t) = \sum_{m=1}^{NI} \sum_{j=1}^n C_{r_j,m|\Delta t} \cdot P(D_{j,m}(\Delta t) \geq d) \cdot e^{-\gamma_m(\Delta t) - \pi_{F,T_m}(0, \Delta t)} \quad (64)$$

---


$$\bar{C}_{F,VD}(0, \Delta t) = \sum_{m=1}^{NI} C_{f_m|\Delta t} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \eta_{F,T_m}(t_k - t_{k-1}) e^{-\gamma_m(\Delta t) - \eta_{F,T_m}(0,t_k - t_{k-1})} \quad (65)$$

donde  $NI$  es el número de inspecciones que se planean realizar a lo largo de la vida de diseño de la estructura,  $VD$ , en intervalos de tiempo constantes como sigue:

$$NI = \frac{VD}{\Delta t} \quad (66)$$

Una vez encontrado el intervalo de tiempo óptimo para realizar los trabajos de inspección y mantenimiento en las juntas seleccionadas, se pueden explorar algunas otras juntas que aportan capacidad global a la estructura, con la finalidad de determinar un segundo intervalo óptimo de tiempo para efectuar los correspondientes trabajos de un segundo mantenimiento.

---

# CAPÍTULO 4

## INTERVALO DE TIEMPO ÓPTIMO PARA EL MANTENIMIENTO DE LA PLATAFORMA MARINA EN ESTUDIO

El objetivo de llevar a cabo inspecciones programadas a las juntas de la plataforma marina a lo largo de su vida útil es el de detectar la presencia de daño (ej. por corrosión, abolladuras y pandeos en miembros, aparición de grietas causadas por fatiga, etc.) para evaluar su impacto en la confiabilidad estructural del sistema y con base en ello poder tomar decisiones de mantenimiento a fin de mantener a la estructura dentro de niveles de confiabilidad aceptables. Con base en lo anterior, es necesario proponer planes de inspección y mantenimiento en primera instancia a las juntas críticas. Como resultado, se logra mantener en funcionamiento a la estructura más allá del tiempo de vida útil para la que fue diseñada. En el presente capítulo se obtiene el intervalo de tiempo óptimo para realizar trabajos de inspección y mantenimiento a las juntas críticas de la plataforma marina que se analiza previamente (ver figura 1). El criterio que se sigue para obtener el intervalo de tiempo óptimo se basa en estudios previos (ej. Faber, 2001; Ortega, 2003; Torres, 2006) pero haciendo uso de las expresiones cerradas que aquí se propusieron. La estrategia de inspección y mantenimiento puede identificarse mediante la comparación de los costos de inspección, reparación y falla a fin de encontrar el mínimo costo total. Se considera que la vida de diseño de la plataforma marina es de 30 años y se emplea una tasa anual de descuento  $\gamma=6\%$  (Ortega y De León, 2003). La plataforma marina en estudio maneja una producción aproximada,  $P_{max}$ , de 184,000 barriles de petróleo por día (IMP, 1998) y que el equipo de perforación,  $C_{EP}$ , se estima en 130,000,000 USD (IMP, 1998). En la obtención de los costos de inspección, reparación y falla se considera la confiabilidad expresada en términos de número

esperado de fallas para el caso en el que tanto la capacidad (lineal en sub-intervalos de tiempo) como de la demanda estructural varían en el tiempo (Caso C, capítulo 1). Se considera como condición de daño el crecimiento de grietas por fatiga considerando oleaje de operación y tormenta.

#### 4.1 COSTOS DE INSPECCIÓN

Los costos esperados de inspección se obtienen considerando las juntas 1, 2, 3, 4 y 6 que corresponden a las juntas críticas que fueron seleccionadas en el capítulo 2. Se estima un costo de inspección por junta de 3518 USD (Raine, 2000). La inspección de juntas está asociada a cierta calidad,  $q$ , (Enevoldsen y Sørensen, 1994), por lo que en este trabajo se considera que la calidad de la inspección que tendrán las juntas es igual a la unidad, considerando que dicha calidad varía entre cero y uno. En la tabla 3 se muestran los costos esperados de inspección calculados a partir de la ecuación 59. Se hace notar que los costos de inspección (cuarta columna de la tabla 3) disminuyen a medida que el intervalo de tiempo entre inspecciones se incrementa, es decir, si se considera que la inspección se efectuara cada 1 año a lo largo de la vida de diseño de la plataforma (30 años), se deberán de hacer 30 inspecciones. Caso contrario sucede cuando se considera que dichas inspecciones a las juntas críticas se deberán realizar cada 15 años, en este caso solo se realizan dos inspecciones. En la segunda columna se hace ver que a medida que el intervalo de tiempo se incrementa, el factor para convertir el costo a valor presente se devenga.

**Tabla 3.** Costos esperados de inspección considerando diferentes intervalos de tiempo entre inspecciones.

$\Delta t$ (años)	$\eta_{FL}$	$e^{-\gamma(\Delta t)}$	$C_I$
1	0.0006	0.9418	\$496,678
2	0.0012	0.8869	\$233,730
3	0.0019	0.8353	\$146,648
4	0.0025	0.7866	\$96,616
5	0.0033	0.7408	\$77,929
6	0.0042	0.6977	\$61,104
7	0.0051	0.6570	\$45,996
8	0.0064	0.6188	\$32,446
9	0.0074	0.5827	\$30,525
10	0.0085	0.5488	\$28,716
11	0.0101	0.5169	\$18,001
12	0.0114	0.4868	\$16,929
13	0.0127	0.4584	\$15,924
14	0.0143	0.4317	\$14,973
15	0.0157	0.4066	\$14,080

#### 4.2 COSTOS DE REPARACIÓN

Después de inspeccionar las juntas se tienen dos alternativas: a) no hacer nada y permitir que la junta siga trabajando y acumulando más daño, y b) reparar la junta. En este trabajo se considera que la junta deberá de ser reparada cuando la profundidad de la grieta exceda la tercera parte del espesor

de la placa de cada punto crítico es decir, cuando se excedan 5 mm aproximadamente. Se establece que al término de la reparación, la junta regresa a sus condiciones iniciales, es decir, recupera su capacidad original. Se considera que el costo por reparar cada punto crítico de la junta es de 20,000 USD (MTD, 1994). En la tabla 4 se presentan los costos esperados de reparación considerando diferentes intervalos de inspección y mantenimiento para las juntas críticas. Se hace notar que los costos de reparación se incrementan para intervalos de tiempo pequeños debido a que se tienen que realizar más reparaciones a lo largo de la vida de la estructura, mientras que para intervalos de tiempo grandes el costo de reparación decrece, esta tendencia de costos es similar a los costos de inspección. En la tabla 4 también se puede apreciar el costo de reparación para cada junta crítica en donde se puede apreciar que los nodos con los mayores costos son el 4 y 6 mientras que las juntas con menores costos son el 1, 2 y 3. Lo anterior denota que las juntas 4 y 6 son más susceptibles al daño por fatiga debido a que desarrollaron más daño y por consecuencia más costo para intervalos de tiempo pequeños.

**Tabla 4.** Costos esperados de reparación considerando diferentes intervalos de inspección y mantenimiento

$\Delta t$ (años)	$N1$	$N2$	$N3$	$N4$	$N6$	$C_R$
1	\$8	\$8	\$6	\$37,580	\$20,858	\$2,279,875
2	\$691	\$691	\$135	\$35,434	\$35,370	\$1,566,182
3	\$1,534	\$1,534	\$614	\$33,348	\$33,348	\$1,059,435
4	\$2,370	\$2,370	\$1,245	\$31,387	\$31,387	\$736,994
5	\$3,253	\$3,253	\$1,911	\$29,535	\$29,535	\$622,556
6	\$4,119	\$4,119	\$2,357	\$27,790	\$27,790	\$507,936
7	\$4,572	\$4,572	\$2,854	\$26,149	\$26,149	\$395,040
8	\$5,008	\$5,008	\$3,337	\$24,594	\$24,594	\$287,203
9	\$5,297	\$5,297	\$3,700	\$23,138	\$23,138	\$277,188
10	\$5,499	\$5,499	\$3,878	\$21,767	\$21,767	\$266,487
11	\$5,562	\$5,562	\$3,995	\$20,467	\$20,467	\$170,159
12	\$5,660	\$5,660	\$4,105	\$19,249	\$19,249	\$162,891
13	\$5,667	\$5,667	\$4,135	\$18,105	\$18,105	\$155,544
14	\$5,629	\$5,629	\$4,083	\$17,024	\$17,024	\$148,125
15	\$5,607	\$5,607	\$4,084	\$16,009	\$16,009	\$141,115

### 4.3 COSTOS DE FALLA

En los costos esperados de falla se consideran los costos por contaminación,  $C_{CC}$ , por producción diferida,  $C_{PD}$ , por pérdidas indirectas,  $C_{PI}$ , por lesiones,  $C_L$ , por prevención de pérdida de vida,  $C_{PV}$ , y debidos al daño del equipo,  $C_{DE}$ . Considerando lo anterior, el costo esperado de falla se expresa como sigue:



---


$$C_f = C_{CC} + C_{PD} + C_{PI} + C_L + C_{PV} + C_{DE} \quad (67)$$

En este trabajo se considera que los costos de falla dependen del nivel de daño global que presente la estructura, de acuerdo a lo anterior, se establece un índice daño global,  $ID$ , que toma un intervalo de valores entre 0 y 1, en donde 0 representa que no existe daño, mientras que 1 representa que dicho daño es total. El índice de daño global,  $ID$ , se expresa mediante la siguiente relación lineal como sigue:

$$ID = \frac{\delta_0 - \delta_u(\Delta t)}{\delta_0 - \delta_d(\Delta t)} \quad (68)$$

Donde  $\delta_0$  es el desplazamiento global último considerando a la estructura sin daño,  $\delta_u(\Delta t)$  es el desplazamiento global último considerando la degradación de la capacidad estructural en el tiempo,  $\Delta t$ .  $\delta_d(\Delta t)$  es el desplazamiento global último demandado al término del intervalo de tiempo de interés.

### 4.3.1 Costos por contaminación

En los costos por contaminación al medio ambiente se consideran los gastos que se generan por limpiar el derrame de petróleo, por lo que dichos costos consideran el volumen de derrame de petróleo asociado a cierto nivel de daño, el área que dicho derrame produce y el costo que produce el recoger el derrame. De acuerdo a lo anterior, el costo por contaminación,  $C_{CC}$ , se calcula como sigue:

$$C_{CC} = C_{RD} \cdot \left( \frac{A_m}{1000^2} \right) R \quad (69)$$

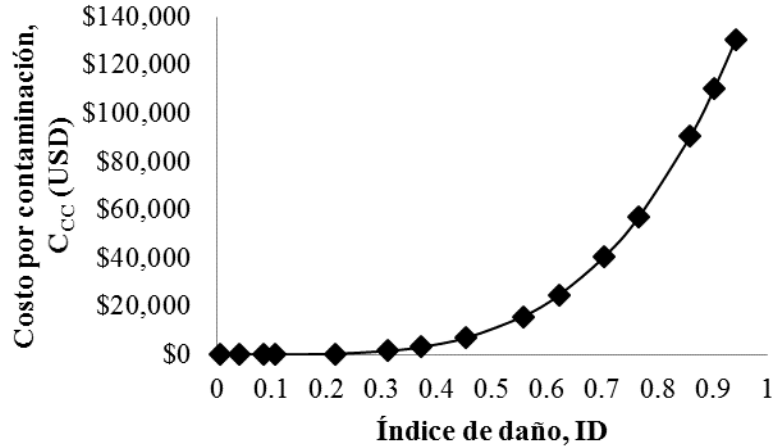
donde  $C_{RD}$  es el costo por recuperación del crudo con un valor de 541.57 USD/hr con un rendimiento  $C_{RD}$  igual a 0.81 hr/km<sup>2</sup> (Campos *et al.*, 1999);  $A_m$  es el área de la mancha, el cual se calculó como (Lehr, *et al.*, 2001):

$$A_m = 2.27(\Delta w \cdot V_d)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{2}} + 0.04(\Delta w \cdot V_d \cdot U^4) \quad (70)$$

Donde  $\Delta w$  es la diferencia de densidades relativas del crudo y del agua;  $t$  es el tiempo;  $U$  es la velocidad del viento a una altura de 10m. En este estudio se utilizaron los valores de  $\Delta w = 0.06341$ ,  $U = 30 \text{ m/s}$  y  $t = 2400 \text{ seg}$ .  $V_d$  es el volumen de derrame que está en función del nivel de daño como sigue:

$$V_d = P_{máx} \cdot D^4 \quad (71)$$

En se figura 15 se muestran los costos por contaminación debidos a un derrame de petróleo obtenidos con la ecuación 69.



**Figura 15.** Costo por contaminación para un derrame de petróleo con base en un índice de daño global.

#### 4.3.2 Costos por producción diferida

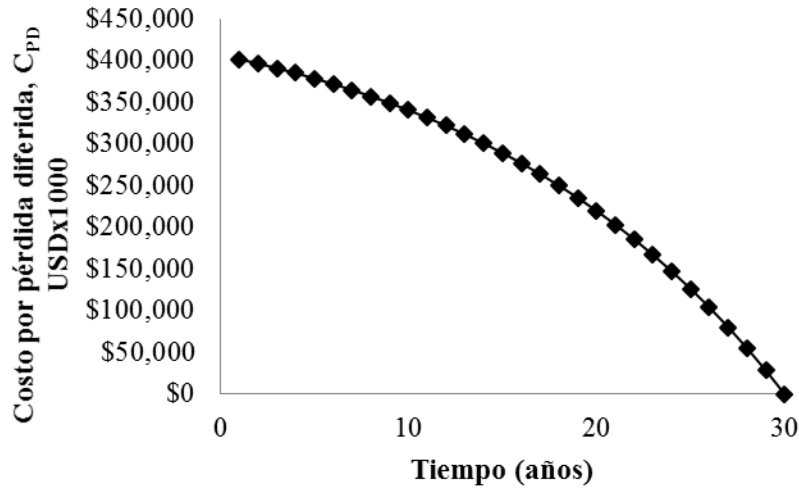
En la estimación de los costos por pérdida de producción generalmente se tienen dos opciones para el caso en el que se presente la falla: 1) no se reconstruye la estructura y 2) se reconstruye. Considerando el segundo caso es necesario conocer las utilidades remanentes esperadas hasta que la estructura esté en condiciones de operar una vez reconstruida. Si el valor del dinero fuese constante con el tiempo es decir, que se tuviera una economía sólida para estar en condiciones de considerar una tasa anual de descuento  $\gamma=0\%$ , el valor presente de utilidades no cambiaría en el tiempo; sin embargo, en nuestro país generalmente dicho valor cambia constantemente por lo que es de esperarse pérdidas de utilidades.

Los costos por pérdida de utilidad de producción debida a la interrupción de la producción de crudo,  $C_{PD}$ , están en función del tiempo de recuperación de la producción,  $T_R$ , el costo del crudo,  $C_C$  y la producción diaria de petróleo,  $P_{m\acute{a}x}$ . Los costos por producción diferida se obtienen utilizando la siguiente ecuación (Sthal, 1986)(ver figura 16):

$$C_{PD} = \int_t^L R(\tau)e^{-\gamma(\tau-t)}d\tau - \int_t^{L+T_R} R(\tau)e^{-\gamma(\tau-t)}d\tau \quad (72)$$

$$R(\tau) = C_C \cdot P_{m\acute{a}x} \cdot U_C \cdot 365 \quad (73)$$

Donde  $R(\tau)$  es la utilidad a percibir por la comercialización del producto extraído;  $L$  es la vida de diseño de la plataforma igual a 30 años;  $U_C$  es la utilidad por la comercialización del producto con valor del 12% ;  $T_R = 4$  años,  $C_C = 17$  USD/barril (Ortega y De León, 2003).



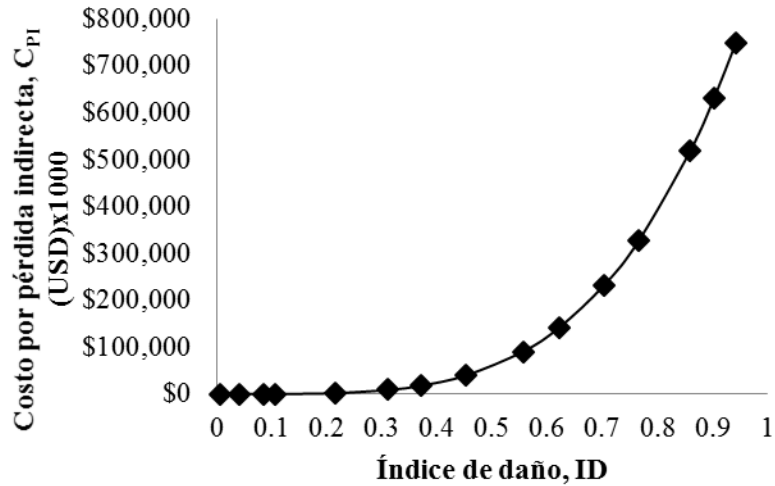
**Figura 16.** Costo por pérdida diferida a lo largo de la vida útil de la estructura.

### 4.3.3 Costos por pérdidas indirectas

Los costos por pérdidas indirectas se presentan a causa de la destrucción total o parcial de las instalaciones de un determinado sector después de un evento catastrófico, como consecuencia otros sectores económicos pueden verse afectados. La magnitud de estas pérdidas depende de la relación o vínculo entre los sectores y en el tiempo transcurrido antes de que se reinicien sus actividades económicas. En este trabajo, los costos por pérdidas económicas indirectas que produce una plataforma marina a la economía son los siguientes sectores: agricultura, carbón, gas, aceite, minerales, aceite refinado, petroquímica, química básica, neumáticos, electricidad y textiles. La ecuación que se utiliza es la que sigue:

$$C_{PI} = (C_{F1} + C_{F2}) \left( \frac{P_{máx}}{P_{total}} \right) D^4 \quad (74)$$

Donde  $C_{F1}$  y  $C_{F2}$  son los costos debidos a la pérdida debida al daño estructural provocado por tormenta y esta se puede dividir en primera fase y segunda fase, respectivamente, con un valor considerado de  $C_{F1} + C_{F2} = 1.086 \times 10^{10} USD$  (INEGI, 1986);  $P_{total}$  es la producción total de la Sonda de Campeche con valor de 2,100 000 barriles/día (IMP, 1998). Los costos por pérdidas indirectas se muestran en la figura 17, se hace notar que los costos no son tan significativos debido a que se considera que se ve afectada sólo la plataforma en estudio, para que estos costos sean significativos se tendría que considerar que todo un campo de explotación pierda su producción.



**Figura 17.** Costo por pérdidas indirectas.

#### 4.3.4 Costos por lesiones del personal

En caso de que se presente una tormenta existen planes de evacuación para el personal que labora en la plataforma marina; sin embargo, durante el proceso de evacuación pueden presentarse situaciones en las que se pudieran presentar algún tipo de accidente. El costo debido a lesiones de personal depende de la probabilidad que ocurra un accidente durante la ejecución el plan de evacuación de personal en caso de que se presente una tormenta. En este trabajo se considera una probabilidad,  $P_A$ , de 1/3,000,000 (CAW, 2001). Además, se consideran dos tipos de lesiones: los que producen incapacidad temporal y lo que producen incapacidad permanente. En el caso del primero, se considera un costo por lesión temporal,  $C_{LT}$ , de 2,000 USD por persona. Este valor se obtuvo de algunos informes de costos médicos e incluye tratamiento para heridas ligeras, estancia corta en el hospital, honorarios y medicinas. En el caso de aquellas lesiones que producen incapacidad permanente se considera un costo de  $C_{LP}$ , 330,000 USD. Esta cantidad se estima multiplicando el ingreso promedio anual que tiene una persona por un estimado del resto de vida que le queda. De acuerdo a lo anterior, en este trabajo se considera que este último valor también se puede utilizar para considerar el costo estimado de una pérdida de vida. De acuerdo a lo anterior, el costo por lesiones,  $C_L$ , y por pérdida de vida,  $C_{PV}$ , se calculan como sigue:

$$C_L = P_A (C_{LT} + C_{LP}) \frac{P_E}{4} \quad (75)$$

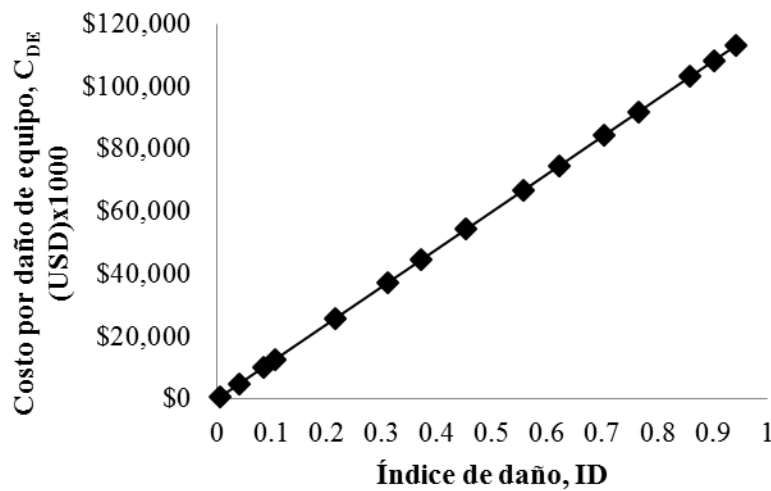
$$C_{PV} = P_A (C_{LT} + C_{LP}) \frac{P_E}{2} \quad (76)$$

Donde  $P_E$  es el número de personas evacuadas en la zona de interés, en este estudio se consideran 10, 000 personas debido a que existen 200 plataformas con un estimado de 50 personas en cada una de ellas.

#### 4.3.5 Costos por daño de equipo

Los costos por daño al equipo se obtienen a partir de una relación lineal que involucra el costo del equipo de perforación con el índice de daño de tal forma que para un índice de daño igual a la unidad, el costo resultante será igual al costo del equipo, expresándose como sigue (ver figura 18):

$$C_{DE} = D \cdot C_{EP} \quad (77)$$



**Figura 18.** Costo por daño de equipo.

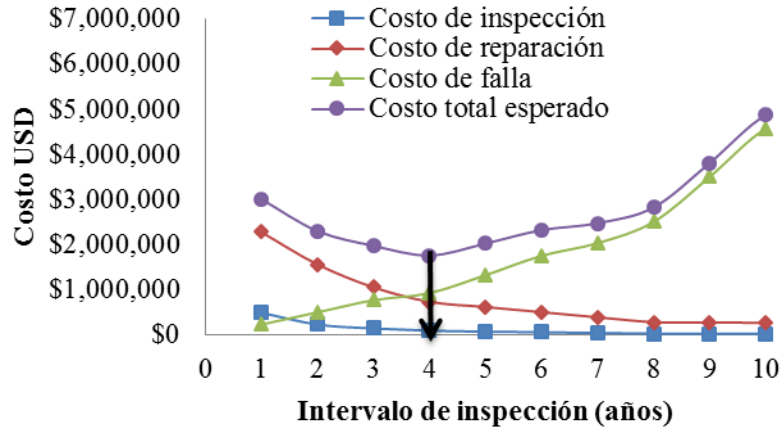
En la tabla 5 se presentan los costos de falla para diferentes intervalos de tiempo,  $\Delta t$ , considerando los costos por contaminación, por producción diferida, por pérdidas indirectas, por lesiones, por prevención de pérdida de vida y debidos al daño del equipo. Se hace notar que los menores costos que se produce son los asociados al costo por lesiones y por pérdida de vida, esto se debe a las eficaces políticas de evacuación que dan como resultado una pequeña probabilidad de que alguna persona pudiera tener un accidente durante la evacuación a causa de una tormenta.

**Tabla 5.** Costos esperados de falla considerando diferentes intervalos entre inspecciones.

<i>At</i> años	<i>Costo por</i> <i>contaminación</i>	<i>Costo por</i> <i>pérdida</i> <i>diferida</i>	<i>Costo por</i> <i>pérdida</i> <i>indirecta</i>	<i>Costo</i> <i>por</i> <i>lesiones</i>	<i>Costo</i> <i>por</i> <i>pérdida</i> <i>de vida</i>	<i>Costo por</i> <i>pérdida de</i> <i>equipo</i>	<i>C<sub>F</sub></i>
			USD				
1	\$0	\$401,704,993	\$2	\$277	\$550	\$757,783	\$234,359
2	\$0	\$396,416,887	\$2,422	\$277	\$550	\$4,793,070	\$503,916
3	\$9	\$390,801,783	\$49,626	\$277	\$550	\$10,197,696	\$772,123
4	\$21	\$384,839,460	\$122,910	\$277	\$550	\$12,792,960	\$930,340
5	\$353	\$378,508,448	\$2,022,987	\$277	\$550	\$25,767,509	\$1,327,654
6	\$1,558	\$371,785,947	\$8,933,115	\$277	\$550	\$37,352,949	\$1,756,582
7	\$3,147	\$364,647,751	\$18,043,880	\$277	\$550	\$44,530,405	\$2,037,789
8	\$6,988	\$357,068,153	\$40,073,186	\$277	\$550	\$54,361,024	\$2,509,483
9	\$15,789	\$349,019,860	\$90,552,846	\$277	\$550	\$66,649,928	\$3,505,467
10	\$24,735	\$340,473,887	\$141,862,526	\$277	\$550	\$74,566,040	\$4,574,623
11	\$40,510	\$331,399,461	\$232,352,517	\$277	\$550	\$84,355,034	\$4,972,613
12	\$57,005	\$321,763,904	\$326,969,708	\$277	\$550	\$91,875,780	\$6,372,862
13	\$90,440	\$311,532,517	\$518,761,650	\$277	\$550	\$103,113,641	\$8,919,596
14	\$110,025	\$300,668,457	\$631,107,160	\$277	\$550	\$108,292,888	\$10,794,989
15	\$130,360	\$289,132,600	\$747,757,979	\$277	\$550	\$112,983,343	\$12,645,466

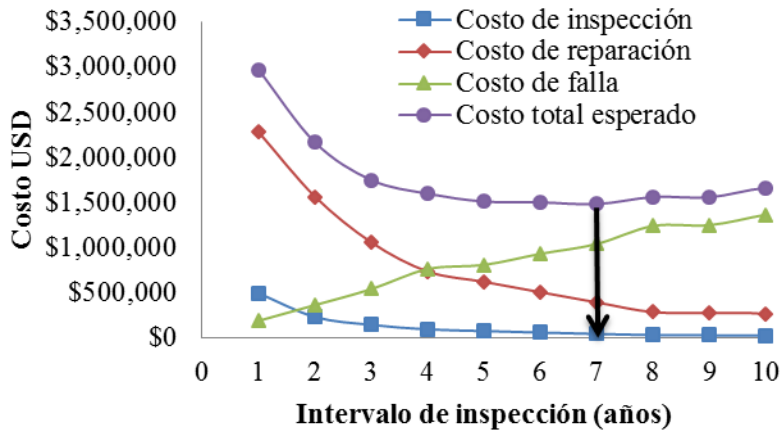
#### 4.4 INTERVALO DE TIEMPO ÓPTIMO

Una vez obtenidos los costos esperados de inspección, reparación y falla se obtienen los costos esperados totales considerando distintos intervalos de tiempo. En la figura 19 se presentan los costos totales para diferentes intervalos de tiempo entre inspecciones obtenidos con base en la ecuación 62. La figura 19 indica que los costos de inspección y reparación son altos para intervalos de tiempo pequeños. Esto se debe a las bajas probabilidades de falla y al mayor número de inspecciones y reparaciones que se deben realizar a lo largo de la vida de la estructura; sin embargo, a medida que el intervalo de tiempo se incrementa, la influencia del costo de falla se hace notar debido a que las probabilidades de falla se incrementan. De acuerdo con la figura 19 se concluye que el intervalo de tiempo óptimo que produce los menores costos para realizar trabajos de inspección y mantenimiento es de 4 años después de instalada la estructura.

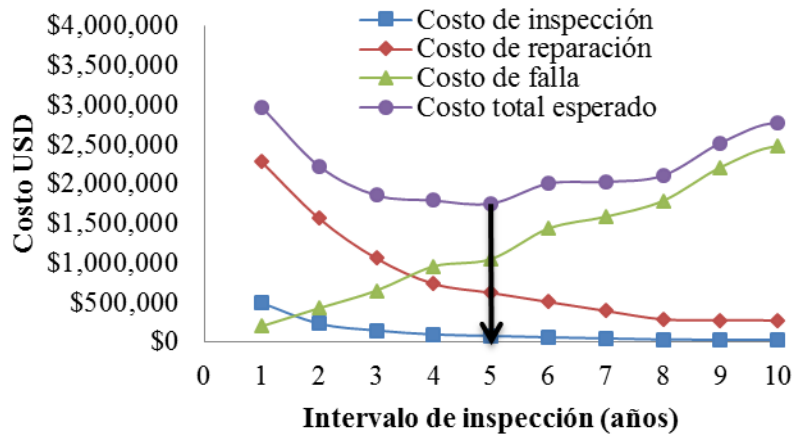


**Figura 19.** Costos totales esperados para diferentes intervalos de tiempo entre inspecciones.

En el **Apéndice H** se obtienen los intervalos de tiempo óptimo para realizar los trabajos de inspección y mantenimiento considerando los casos *A*, *B* y el caso que se desarrolla en este capítulo, caso *C* (todos ellos descritos en el capítulo 1). En la figura 20 se muestra el caso en el que se considera la variación el tiempo de la demanda, mientras que la capacidad es independiente del tiempo (caso *A*), y en la figura 21 se muestra el caso en el sólo varía la capacidad estructural mientras que la demanda es independiente del tiempo, (caso *B*).



**Figura 20.** Costos totales esperados para diferentes intervalos de tiempo entre inspecciones considerando el caso *A* (información obtenida del apéndice F).



**Figura 21.** Costos totales esperados para diferentes intervalos de tiempo entre inspecciones considerando el caso *B* (información obtenida del apéndice F).

La figura 20 muestra que el intervalo de tiempo óptimo para efectuar los trabajos de inspección y mantenimiento es de 7 años (Caso *A*), mientras que en la figura 21 el intervalo óptimo es de 5 años después de instalada la estructura (Caso *B*). Los intervalos de tiempo óptimos de 5 y 7 años que corresponden a las figuras 20 y 21, respectivamente resultan más largos con respecto al caso que se presenta en la figura 19 (4 años). Esto se debe a que en los casos *A* y *B* se presentan costos de falla pequeños en los primeros intervalos de tiempo (debidos a las bajas probabilidades de falla), y costos de inspección y reparación altos para los primeros intervalos de tiempo. Por lo anterior, se llega a la conclusión de que es recomendable considerar tanto la variación de la capacidad como la demanda estructural en el tiempo al evaluar la confiabilidad estructural, y se recomienda emplear este criterio (caso *C*) cuando se realizan planes de inspección y mantenimiento con base en análisis costo/beneficio, de otra manera se estaría subestimando la confiabilidad estructural de la plataforma marina en estudio.



---

# CAPÍTULO 5

## FORMULACIÓN DE LA OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

La optimización es una herramienta esencial que proporciona una base para tomar las mejores decisiones sobre acciones de inspección y/o mantenimiento a lo largo de la vida de la estructura. Una formulación aceptable que resuelve el problema de optimización en el ciclo de vida de la estructura es mediante la minimización del costo total esperado (Frangopol y Moses, 1994; Mori y Ellingwood, 1994; Chang y Shinozuka, 1995; Ang y De León, 1997; Estes y Frangopol, 1999; Wen y Kang, 2001; Esteva *et al.*, 2002; Yang *et al.*, 2006). En los últimos años, se han propuesto criterios de optimización en donde se consideran varios objetivos (además del costo), a esta nueva tendencia se le conoce como optimización multiobjetivo. En la literatura se han propuesto criterios de optimización multiobjetivo teniendo como objetivos el costo y el desempeño (Fu y Frangopol, 1990; Furuta *et al.*, 2006a; Liu y Frangopol, 2005a); considerando como función objetivo la seguridad y de ciclo de vida de la estructura (Neves *et al.*, 2006a; 2006b; Furuta *et al.*, 2006b), y además, la vida útil de la estructura (Furuta *et al.*, 2006c); teniendo como función objetivo el costo de ciclo de vida, un índice de seguridad y un índice de condición de daño de la estructura, con la finalidad de localizar el mejor equilibrio posible para realizar acciones de mantenimiento (Liu y Frangopol 2004; Liu y Frangopol, 2005b, Neves *et al.*, 2006a, 2006b; Frangopol y Liu, 2007a, 2007b). Por otra parte, se han desarrollado trabajos para el mantenimiento de estructuras teniendo como función objetivo el índice de seguridad y el índice de condición de daño de la estructura (Neves *et al.*, 2006c).

La optimización multiobjetivo se ha extendido con la finalidad de establecer planes de mantenimiento para una red de puentes teniendo como función objetivo la condición de vida del puente, los niveles de seguridad y los costos de ciclo de vida (Liu y Frangopol 2006a), así como el costo de mantenimiento, costo de falla y costo por uso de la red carretera (Liu y Frangopol 2006b).

---

---

También se ha realizado trabajos en donde se definen programas de mantenimiento para una red vial a partir del costo de la red carretera y el nivel de seguridad de la red carretera (Furuta *et al.* 2006d). Okasha y Frangopol (2009) desarrollaron dos estrategias de programas de mantenimiento para estructuras existentes; la primera de ellas tiene la capacidad de seleccionar de manera óptima los tipos mixtos de mantenimiento que se tienen para aplicarlos a diferentes partes de la estructura al mismo tiempo; la segunda de ellas se puede utilizar cuando está disponible un número limitado de posibilidades de opciones de mantenimiento prácticas. La ventaja que tienen estas estrategias es que permiten evitar la aplicación de intervenciones de mantenimiento a los componentes estructurales que no son críticos.

Como resultado de considerar múltiples objetivos en la optimización, se obtiene un conjunto de soluciones que dan como resultado al proceso de optimización un soporte más racional y flexible a la hora de tomar decisiones de inspección y/o mantenimiento sobre el sistema estructural. Una vez que se hayan ejecutado las decisiones, es recomendable asegurarse de que se mejoró la confiabilidad y el desempeño de la estructura. La optimización multiobjetivo se resuelve en la mayoría de los casos mediante el uso de algoritmos genéticos (AG). Los AG tienen la peculiar característica de que permiten tratar distintos objetivos de manera simultánea y su búsqueda de las mejores soluciones se basa en el principio evolución biológica, que a lo largo de las generaciones, las poblaciones evolucionan acorde con los principios de la selección natural y la supervivencia de los más fuertes, postulados por Darwin (1859).

En este capítulo se propone un plan de mantenimiento con base en optimización multiobjetivo para encontrar intervalos de tiempo óptimos con la finalidad de llevar a cabo trabajos de inspección y mantenimiento para plataformas marinas. El criterio multiobjetivo considera tres objetivos: a) la confiabilidad estructural expresada en términos del factor de confianza, b) el desempeño de la estructura definido por un índice de daño global y c) el costo total esperado acumulado.

## 5.1 ALGORITMOS GENÉTICOS

Los algoritmos genéticos, AG, originalmente llamados *planes reproductivos* fueron introducidos por Holland (1975) a principios de los años 60s, y son por mucho, la técnica evolutiva más popular en la actualidad. Los AG son métodos adaptativos usados para resolver problemas de búsqueda y optimización. En las últimas tres décadas los AG han venido aplicándose con éxito en problemas muy diversos y en muy diferentes ámbitos (economía, medicina, ingeniería, etc.). En el caso de la ingeniería estructural los algoritmos genéticos se han utilizado para diseño de edificios con disipadores de energía pasivos (Lavan y Dargush, 2009); diseño de edificios de acero considerando el costo de ciclo de vida (Liu *et al.*, 2003; Fragiardakis *et al.*, 2006); diseño sísmico de edificios con base en confiabilidad (Zacharenaki, *et al.*, 2013); desarrollo de planes de mantenimiento en puentes (Liu y Frangopol, 2004; Frangopol y Liu, 2007a) y en redes carreteras (Furuta *et al.*, 2006c; Bocchini y Frangopol, 2011), etc.

Los AG enfatizan la importancia de la cruce sexual (operador principal) sobre la mutación (operador secundario), y usan una selección probabilista. Los pasos a seguir de un algoritmo genético básico son (Goldberg, 1989):

1. Generar (aleatoriamente) una población inicial

- 
2. Calcular la aptitud de cada individuo
  3. Seleccionar (probabilistamente) con base en aptitud
  4. Aplicar operadores genéticos (cruza y mutación) para generar la siguiente población
  5. Ciclar hasta que cierta condición se satisfaga

Algunas ventajas de los algoritmos genéticos son las siguientes:

- Operan de forma simultánea con varias soluciones
- Usan operadores probabilistas
- Pueden trabajarse tanto en números reales como binarios
- No necesitan conocimientos específicos sobre el problema que intentan resolver
- Tienen amplia aplicabilidad (optimización estructural, bases de datos, predicción, etc.)
- Son capaces de resolver problemas para los cuales no se conocen una solución
- Son superiores a las técnicas tradicionales en muchos problemas del mundo real
- Tienen el potencial para incorporar conocimiento sobre el dominio y para hibridizarse con otras técnicas de búsqueda/optimización

En el caso el donde se desea optimizar un sólo objetivo con la finalidad de encontrar un mínimo o máximo valor, se puede emplear el algoritmo genético tradicional que se describe en los pasos 1 a 5. En el caso cuando se involucran más de un objetivo y estos se desean optimizar a la vez es necesario recurrir a métodos de optimización multiobjetivo que resuelven el problema.

### 5.1.1 Conceptos de algoritmos genéticos multiobjetivo

Se identifica un problema multiobjetivo cuando se involucra más de un objetivo en un problema de optimización. Este problema tiene la particular característica que no existe una solución única, sino un conjunto de soluciones válidas conocidas como conjunto óptimo de Pareto. En lo que sigue se definen algunos conceptos del problema de optimización multiobjetivo.

**Las variables de decisión** son un conjunto de  $n$  parámetros cuyos valores dan una solución (puede ser válida o no válida) al problema. Estos parámetros se denotan como sigue:

$$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (78)$$

En la mayoría de los problemas de optimización se tienen **restricciones** que delimitan o validan las soluciones, estas pueden ser de igualdad (ecuación 79) o desigualdad (ecuación 80) como:

$$g_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (79)$$

$$h_i(\bar{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (80)$$

**La función objetivo** es el criterio de evaluación para estimar qué tan buena es la solución, y se representan como sigue:

$$\vec{f}(\vec{x}) = [\vec{f}_1(\vec{x}), \vec{f}_2(\vec{x}), \dots, \vec{f}_k(\vec{x})] \quad (81)$$

**El problema de optimización multiobjetivo** tiene un número de funciones objetivo que tienen que ser minimizadas o maximizadas. El objetivo de la optimización multiobjetivo es encontrar el vector de variables de decisión que satisfaga las restricciones (pueden ser tanto de igualdad como de desigualdad) y optimice el vector de funciones objetivo como sigue:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar/Maximizar } \vec{f}(\vec{x}) = [\vec{f}_1(\vec{x}), \vec{f}_2(\vec{x}), \dots, \vec{f}_k(\vec{x})] \\ & \text{sujeto a:} \end{aligned} \quad (82)$$

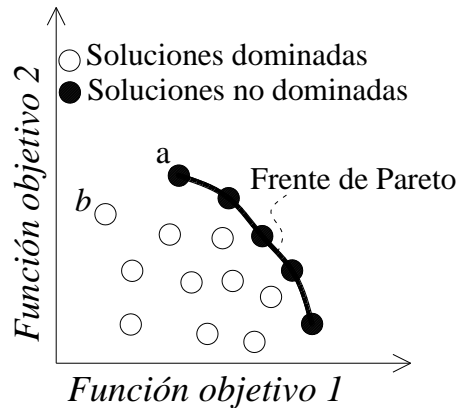
$$g_i(\vec{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$h_i(\vec{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

**El concepto de no dominancia** se describe como sigue (Deb, 2001):

Asumiendo que todas las funciones objetivo se maximizan (ver figura 22), se dice que la solución  $a$  domina a la solución  $b$  si las condiciones 1 y 2 siguientes son verdaderas:

- (1) La solución  $a$  tiene un valor mayor que  $b$  en todos los objetivos, y
- (2) La solución  $a$  tiene un valor mayor o igual que  $b$  en al menos un objetivo



**Figura 22.** Soluciones dominadas y las no dominadas que forman el Frente de Pareto.

En literatura se han desarrollado varios métodos para resolver el problema de optimización multiobjetivo dividiéndose en métodos clásicos y métodos evolutivos.

### 5.1.2 Métodos clásicos

Dentro de los métodos clásicos se encuentran los métodos sin preferencias, “a posteriori”, “a priori” y métodos interactivos. En lo que sigue se hace una breve descripción de dichos métodos.

**Métodos sin preferencias:** Estos métodos se utilizan generalmente cuando no se espera una solución especial y se satisface con cualquier solución óptima en el sentido de Pareto, debido a que estos métodos no toman en consideración las opiniones de preferencias de quien toma las decisiones

---

---

(p. ej. el método del criterio global (Yu, 1973); el método multiobjetivo de los paquetes próximos (Mäkelä, 1993)).

**Métodos “a posteriori”:** Estos métodos se caracterizan por el largo y costoso consumo computacional para generar un conjunto de óptimos de Pareto (p. ej. el método de suma de pesos (Zadeh, 1963; Gass y Saaty, 1955); el método de restricciones  $\epsilon$  (Landon *et al.*, 1971)).

**Métodos “a priori”:** La principal dificultad de estos métodos es que en la mayoría de las veces no se sabe de antemano las características deseables que deben tener las soluciones del problema (p. ej. el método lexicográfico (Fishburn, 1974; el método de la función valor (Keeney y Raiffa, 1976)).

**Métodos interactivos:** Estos métodos dan solución a la mayoría de los problemas mediante la interacción entre quien toma la decisión y el método iterativo. Esta peculiaridad de interacción hacen a estos métodos más desarrollados que los métodos anteriores (sin preferencias, “a posteriori” y “a priori”) (p. ej. el método de satisfacción de compromisos (Nakayama, 1991); el método de Geoffrion-Dyer-Feinberg (Dyer *et al.*, 1972); el método de GUESS (Buchanan, 1997)).

Los métodos clásicos tienen limitaciones y su solución computacional es muy costosa, en algunos métodos las soluciones no dominadas suelen corresponder a una única solución o a una porción limitada del frente Pareto esperado.

### 5.1.3 Métodos evolutivos

En contraste con los métodos clásicos, los algoritmos evolutivos tienen la capacidad inherente de encontrar el conjunto Pareto en un tiempo razonable y en una sola ejecución. Sus principales características son:

- Operan sobre un conjunto de soluciones potenciales al problema, lo cual les permite generar varios elementos del conjunto de óptimos de Pareto en una sola ejecución.
- Adoptan un mecanismo de selección cuyo objetivo es preservar las soluciones no dominadas de cada generación.
- Cuentan con un mecanismo tanto para preservar la diversidad en la población como para preservar las soluciones no dominadas de manera elitista.

Los algoritmos evolutivos se pueden clasificar de manera histórica como sigue:

**Primera generación:** en esta etapa se desarrollaron algoritmos que hacían uso de enfoques rudimentarios, como funciones agregativas lineales (la idea radica en combinar todas las funciones con operaciones aritméticas para reducirlas a una sola función objetivo), y métodos lexicográficos (método que considera sólo una función objetivo y encuentra su solución óptima, posteriormente considera la siguiente función objetivo, y manteniendo el resultado de la primera, encuentra una solución óptima). En esta etapa también se desarrollaron los primeros algoritmos genéticos evolutivos basados en la jerarquización de Pareto como el *Vector Evaluated Genetic Algorithm [VEGA]* (Schaffer, 1985), el *Multiobjective Genetic Algorithm [MOGA]* (Fonseca y Fleming,

---

---

1993), el *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm* [NSGA] (Srinivas y Deb, 1994) y el *Niched Pareto genetic algorithm* [NPGA] (Horn y Nafpliotis, 1993).

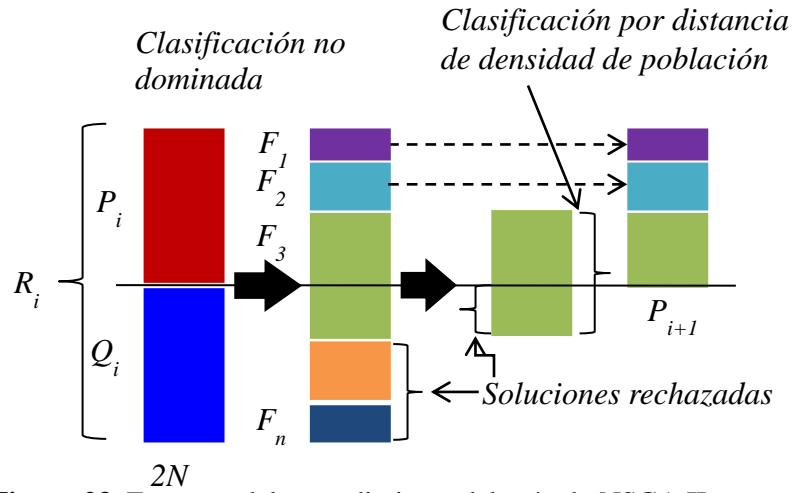
**Segunda generación:** en esta etapa se introduce el concepto de elitismo implementado usualmente a través de un archivo externo, también llamado población secundaria que almacena los individuos no dominados encontrados a lo largo de las generaciones. Sin embargo, el elitismo también se implementó en el paso de *selección*, mediante el cual en cada generación, los padres y los hijos se comparan con la finalidad de seleccionar el mejor de ellos para conformar la siguiente generación. Los algoritmos evolutivos más representativos de esta generación es el *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* [SPEA] (Zitzler y Thiele, 1999), el *Pareto Archived Evolution Strategy* [PAES] (Knowles y Corne, 2000), el *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* [NSGA-II] (Deb *et al.*, 2002), el *Niched-Pareto Genetic Algorithm 2* [NPGA2] (Erickson *et al.*, 2001) y el *Micro Genetic Algorithm* [micro-GA] (Coello y Toscano, 2001).

Los algoritmos genéticos evolutivos son flexibles, adaptables y de sólido desempeño. Estas características les permiten lidiar con diferentes formas de frente Pareto (desconectados, convexos o cóncavos). Estos algoritmos evolutivos tienen la capacidad de encontrar diferentes miembros del conjunto de óptimos de Pareto en una sola ejecución.

## 5.2 MÉTODO NONDOMINATED SORTING GENETIC ALGORITHM (NSGA II)

El método seleccionado para efectuar la optimización multiobjetivo fue el *Nondominated Sorting Genetic Algorithm* [NSGA II] propuesto por Deb y colaboradores (2002). Este método tiene las ventajas de ser rápido, eficaz y confiable para encontrar el conjunto de soluciones no dominadas que forman el Frente de Pareto. El método NSGA II se ilustra en la figura 23 y lo constituyen los siguientes pasos:

- A. Aleatoriamente se crea una población inicial  $P_i$  de  $N$  individuos o soluciones, donde  $i$  es el índice de generación.
- B. Se realiza selección, cruza y mutación para crear la población de hijos  $Q_i$  de  $N$  individuos.
- C. Se combina las dos poblaciones  $P_i$  y  $Q_i$  y se crea la población  $R_i$  de  $2N$  individuos.
- D. Se realiza una clasificación rápida no dominada de la población  $R_i$  en donde se encuentran los diferentes frentes  $F_1, F_2, \dots, F_n$  de soluciones no dominadas para crear la población  $P_{i+1}$  de  $N$  individuos, en el caso en el que el último frente que llenará la población  $P_{i+1}$  sea mayor que  $N$ , se usará la clasificación por distancia de densidad de la población.
- E. Se repite el paso B usando la población seleccionada anteriormente para crear la población de hijos  $Q_{i+1}$ .



**Figura 23.** Esquema del procedimiento del método NSGA II.

En este estudio la población de hijos,  $Q_i$ , se obtiene utilizando selección por torneo, cruce intermedia y mutación gaussiana. Estos conceptos se describen en lo que sigue:

**Selección por torneo:**  $n$  individuos (comúnmente 2) se seleccionan de manera aleatoria de la población. Estos individuos compiten entre ellos, aquel individuo que es mejor según la función objetivo gana, y este será incluido para cruce y mutación (Goldberg y Deb, 1991).

**Cruce intermedia:** es un proceso para crear a la población de hijos por pesos ponderados de los padres y este es controlado por la siguiente relación (Mühlenbein y Schlierkamp-Voosen, 1993; Mathworks, 2010):

$$Hijo = padre1 + relación(padre2 - padre1) \quad (83)$$

El valor de “relación” comúnmente toma un valor igual a 1

**Mutación gaussiana:** consiste en agregar un número de manera aleatoria desde una distribución Gaussiana con media 0 que entra a cada padre. La desviación estándar ( $\sigma$ ) se determina por los parámetros “escala” y “reducción”, como sigue:

$$\sigma = escala \left( 1 - reducción \left( \frac{k}{n} \right) \right) \quad (84)$$

donde el parámetro “escala” determina desviación estándar de la primera generación; el parámetro “reducción” controla como la desviación estándar se va reduciendo a medida que avanzan las generaciones;  $k$  es la generación actual y  $n$  representa el número total de generaciones en consideración. Los valores de “escala” y “reducción” comúnmente toman un valor igual a 1 (Mathworks, 2010).

---

**Clasificación rápida no dominada:** se aplica el procedimiento “*ingenuo y lento*” (Deb, 2001) para realizar una clasificación no dominada en diferentes niveles. En este procedimiento cada solución,  $i$ , se compara con la finalidad de encontrar si dicha solución es dominada por alguna otra solución,  $j$ , de la población inicial. Cuando las comparaciones de cada solución se completan, se han encontrado las soluciones que no son dominadas y por lo tanto pertenecen al primer frente. Todas las soluciones obtenidas en el primer frente no dominado se apartan temporalmente y cada solución de la población restante se comprara con la finalidad de encontrar el segundo frente. El tercer frente no dominado de soluciones se obtiene apartando todas las soluciones encontradas en el primer y segundo frente, y el procedimiento se repite. El procedimiento “*ingenuo y lento*” se describe en los siguientes pasos:

1. Para el conjunto de soluciones de la población  $R$  de tamaño  $2N$ , se inicia con la solución  $i = 1$  y se crea un espacio vacío,  $F'$ , donde ingresarán las soluciones no dominadas.
2. Por cada solución  $j \in R$  (pero  $j \neq i$ ), se determina si la solución  $j$  domina a la solución  $i$ . Si lo anterior es cierto, ir al paso 4.
3. Si faltan más soluciones por determinar su dominancia o no dominancia dentro de la población  $R$ . Se incrementa  $j$  en uno y se pasa al paso 2; de lo contrario, el conjunto  $F' = F' \cup \{i\}$ .
4. Se incrementa  $i$  en uno. Si el individuo  $i \leq 2N$ , pasar al paso 2; de lo contrario se termina el proceso y se declara que  $F' = F_1$ .
5. Se aparta el conjunto de soluciones no dominadas y se repiten los pasos 1-4. Cuando el número de soluciones clasificadas en los diferentes frentes  $F_1, F_2, \dots, F_n$  son iguales a  $2N$ , se termina el proceso.

En resumen, en este método de clasificación rápida no dominada se obtienen diferentes frentes  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ , donde  $F_1$  es mejor conjunto no dominado,  $F_2$  es el segundo mejor conjunto no dominado, hasta  $F_n$  que corresponde al conjunto que es dominado por todos los conjuntos anteriores. En el caso de que  $F_1 < N$ , todos los miembros de conjunto  $F_1$  se escogen para crear la nueva población  $P_{i+1}$ ; los demás miembros no dominados se escogen de acuerdo al orden de su “ranking” ( $F_2, F_3, \dots, F_n$ ). En la mayoría de los casos, el recuento de las soluciones de todos los conjuntos no dominados desde  $F_1$  hasta  $F_n$  para formar la nueva población  $P_{i+1}$  casi siempre son mayores que  $N$ . Para tal caso, las soluciones del último frente que llenaran la población  $P_{i+1}$  se seleccionan utilizando el *operador de comparación de población* ( $<_n$ ) (Deb, 2001), en orden descendente con la finalidad de escoger los últimos mejores miembros para llenar la ranura de la población  $N$ .

**Operador de comparación de población ( $<_n$ ):** este operador compara dos soluciones y regresa el ganador del torneo. Este operador supone que cada solución tiene dos atributos:

---



- 
1. Una clasificación de no dominancia,  $r_i$ , en la población.
  2. Una medida de la distancia de densidad de población,  $d_i$ .

La distancia de densidad de población,  $d_i$ , de una solución  $i$  es la medida de espacio de búsqueda alrededor de  $i$  que no es ocupado por ninguna otra solución en la población. Basado en estos dos atributos, se puede definir el operador de selección por torneo poblacional como:

*Una solución  $i$  ganara un torneo contra otra solución  $j$  si cualquiera de las siguientes condiciones son verdaderas:*

- *Si la solución  $i$  tienen mejor rango o clasificación, es decir,  $r_i < r_j$ .*
- *Si tienen el mismo rango o clasificación pero la solución  $i$  tiene mejor distancia de densidad de población que la solución  $j$ , es decir,  $r_i = r_j$  y  $d_i > d_j$*

La primera condición asegura que las soluciones seleccionadas caigan en un mejor frente no dominado. Utilizando la distancia de densidad de población se resuelve el empate entre ambas soluciones de la segunda condición.

Para obtener un estimado de la **distancia de densidad de población** entre las soluciones que rodean a una solución  $i$ , se toma la distancia promedio de dos soluciones en ambos lados de la solución  $i$  a lo largo de cada objetivo. Esta cantidad  $d_i$  es proporcional al perímetro del cuboide formado por las soluciones más cercanas a  $i$  como vértices. En los siguientes pasos se describe el cálculo de la distancia de densidad de población.

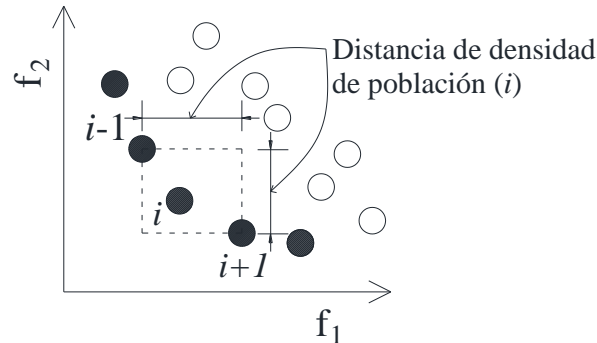
1. Llama el número de soluciones del conjunto no dominado  $F$  como  $l = |F|$ . Para cada  $i$  en el conjunto se le asigna  $F[i]_{distancia} = 0$ .
2. Para cada función objetivo  $m = 1, 2, \dots, M$ , se ordenan las soluciones en el peor orden de acuerdo con el valor de cada función objetivo,  $F = ordena(F, m)$ .
3. Para  $m = 1, 2, \dots, M$ , asignar una distancia larga a las soluciones de contorno, o  $F[1]_{distancia} = F[l]_{distancia} = \infty$ , y para las otras soluciones  $i = 2$  hasta  $(l - 1)$ , se asigna un valor de distancia normalizado, que es igual al valor absoluto de la diferencia de los valores de las funciones, correspondientes a los puntos adyacentes como sigue:

$$F[1]_{distancia} = F[l]_{distancia} + \frac{F[i+1]_m - F[i-1]_m}{f_m^{máx} - f_m^{mín}} \quad (85)$$

Donde  $F[i]_m$  representa el  $m$ -ésimo valor de la función objetivo de la solución  $i$  del conjunto  $F$ ;  $f_m^{máx}$  y  $f_m^{mín}$  son el máximo y mínimo valor de la  $m$ -ésima función, respectivamente. La figura 24 muestra gráficamente la distancia de densidad de población para una solución  $i$  con dos objetivos  $f_1$  y  $f_2$ , se ilustra el cuboide formado por las soluciones  $[i-1]$  e  $[i+1]$ , que sirven como vértices.

---

De esta manera cuando las soluciones se encuentren próximas entre sí, el valor de la densidad de población será pequeño. Al preferirse las soluciones cuyo valor asignado es mayor, se hace una selección de los vectores más dispersos, es decir, se extiende la búsqueda de soluciones no dominadas a fin de tener un frente de Pareto más amplio.



**Figura 24.** Cálculo de distancia de densidad de población.

### 5.3 OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO PARA EL MANTENIMIENTO DE ESTRUCTURAS

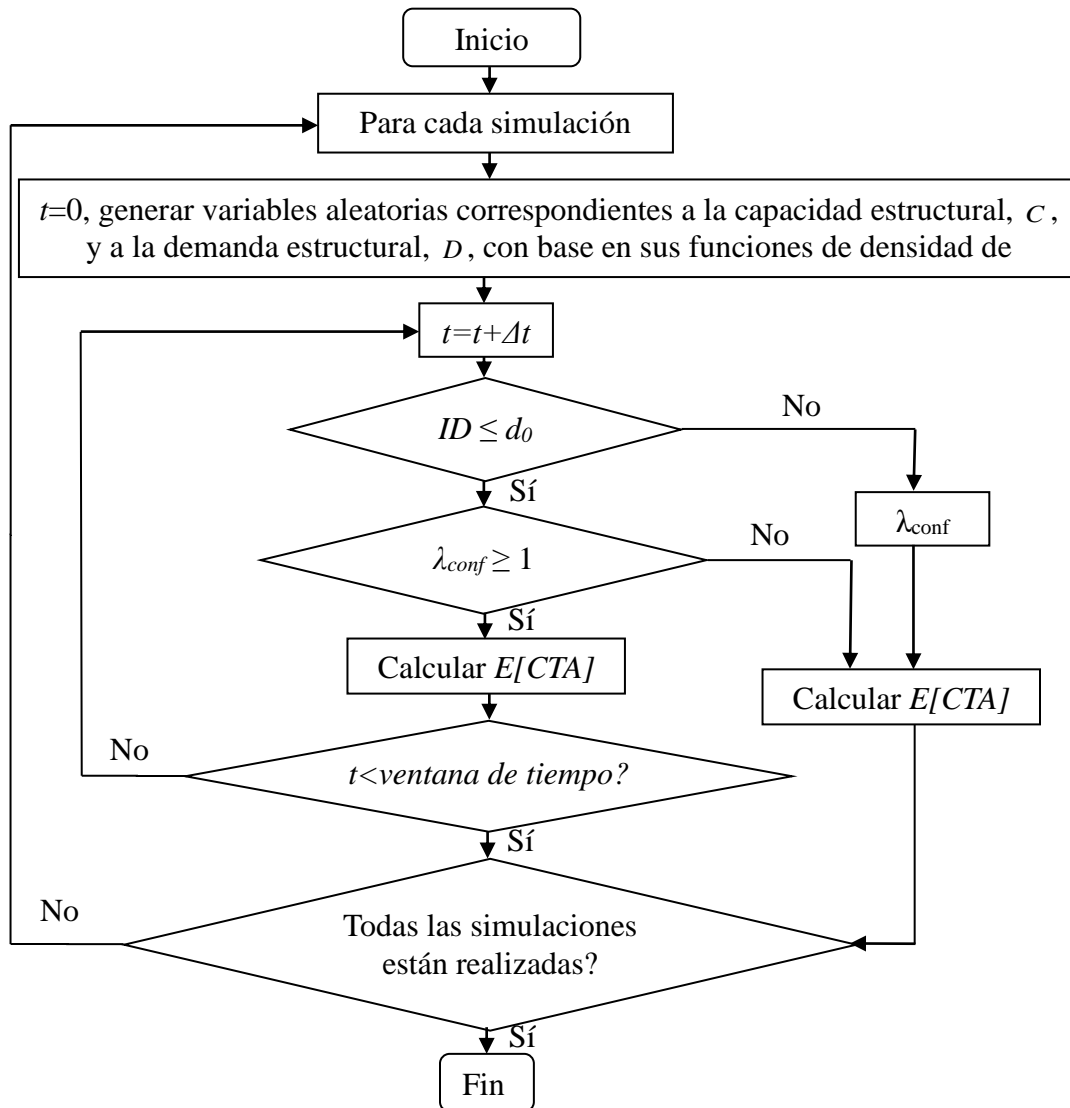
La idea de la optimización multiobjetivo es encontrar un balance entre los objetivos que se desean optimizar ya sea minimizándolos o maximizándolos. En el presente trabajo se desarrolla un plan de mantenimiento multiobjetivo con la finalidad de encontrar intervalos de tiempo óptimos para llevar a cabo trabajos de mantenimiento a plataformas marinas. En este estudio el criterio multiobjetivo considera como objetivos a optimizar: a) la confiabilidad estructural expresada en términos del factor de confianza,  $\lambda_{confL}$ , que considera la variación tanto de la capacidad estructural (lineal) como la demanda al término de un intervalo de tiempo (Caso C, Capítulo 1), b) el índice de daño,  $ID$ , expresado como una relación lineal entre la capacidad estructural y la demanda, dada una altura de ola (ecuación 68), y c) el costo total esperado acumulado, ( $E(CTA)$  ecuación 61).

Con la finalidad de evitar soluciones óptimas que tengan valores no aceptables, es necesario condicionar a aquellos objetivos que nos lleven a esos casos, tales como los dos primeros objetivos que están sujetos a las siguientes restricciones:

- Factor de confianza, sujeto a  $\lambda_{conf} \geq 1$
- Índice de daño, sujeto a  $DI \leq d_0$

La confiabilidad estructural expresada en términos de factor de confianza,  $\lambda_{conf}$ , deberá ser mayor o igual a la unidad ya que valores menores a la unidad se considera que la estructura se presenta un comportamiento indeseable (FEMA 351, 2000). El índice de daño,  $ID$ , deberá ser menor o igual a cierto umbral,  $d_0$ , relacionado a cierto nivel permisible de daño estructural. En este estudio se establece un valor permisible  $DI \leq 0.3$ .

El procedimiento para obtener el conjunto de las mejores soluciones (soluciones no dominadas) se divide en dos pasos generales: 1) la simulación de los valores de los tres objetivos ( $\lambda_{conf}$ ,  $ID E(CTA)$ ), como se muestra en la figura 25, y 2) a partir de las simulaciones de los tres objetivos se realiza la optimización multiobjetivo utilizando el método de algoritmos genéticos evolutivo NSGA II descrito en la sección anterior.

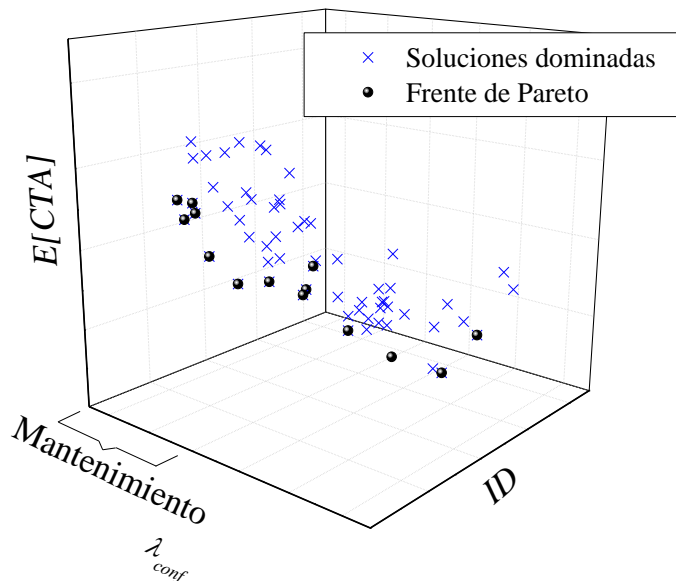


**Figura 25.** Diagrama de flujo del procedimiento de simulación de los tres objetivos.

Como resultado de la simulación se obtiene información de los tres objetivos y el intervalo de tiempo en el que se cumplen las condiciones dada en la figura 25. La variabilidad de los resultados en las simulaciones de los tres objetivos depende de los parámetros estadísticos (media,  $\mu$ , y desviación estándar,  $\sigma$ ,) que se obtienen al evaluar la capacidad estructural y la demanda, dada una altura de la máxima. Una vez que se tiene el conjunto de objetivos simulados, se efectúa la optimización multiobjetivo. El problema multiobjetivo se resuelve como sigue:

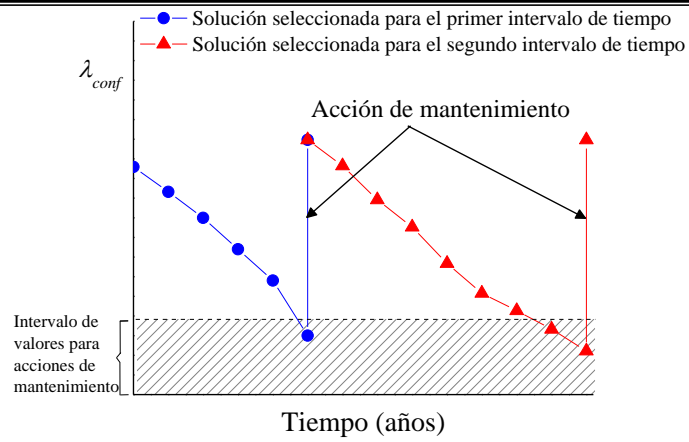
- Maximizar el mínimo factor de confianza
- Minimizar el máximo índice de daño
- Minimizar el costo total esperado acumulado

Como resultado se obtiene un conjunto de soluciones no dominadas que forman el Frente de Pareto. Dado este conjunto de soluciones no dominadas es posible tomar decisiones a fin de conocer los intervalos de tiempo para llevar a cabo acciones de mantenimiento. Se sabe que con cualquier solución no dominada es posible llevar a cabo los trabajos de mantenimiento, pero es necesario establecer algún rango de valores dentro del Frente de Pareto que nos permita reducir el número de soluciones no dominadas seleccionables. En este estudio el criterio para seleccionar los intervalos de tiempo para realizar acciones de mantenimiento está dado por un umbral de valor de factor de confianza. En la figura 26 se muestra de manera esquemática la selección de soluciones no dominadas en donde las soluciones que están dentro de ciertos intervalos de valores de factor de confianza serán aquellas en donde se deberán realizar los trabajos de mantenimiento.

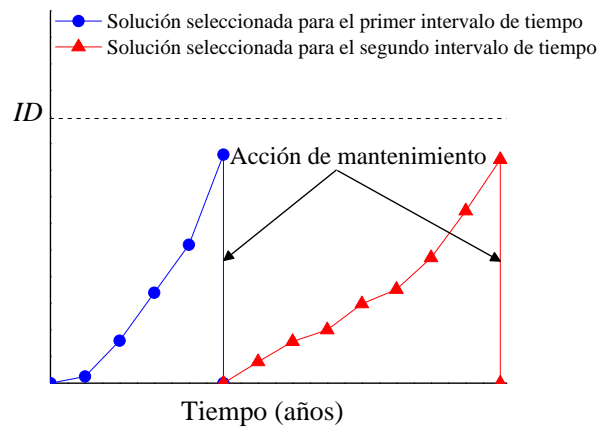


**Figura 26.** Criterio para seleccionar los intervalos de tiempo para reparación.

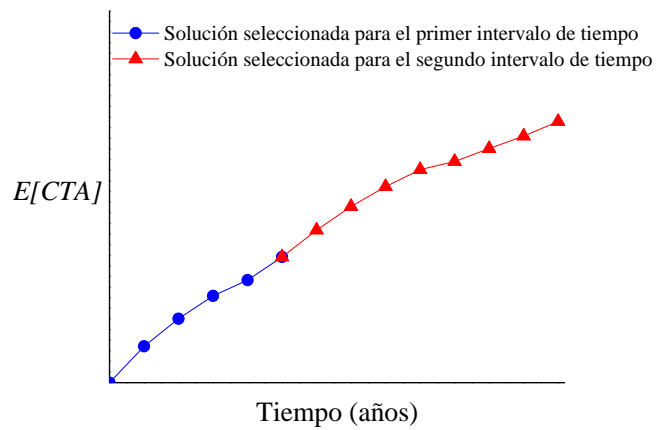
En este trabajo se supone que después de realizar las acciones mantenimiento a los elementos críticos, estos recuperan su capacidad original. El siguiente paso del plan de mantenimiento multiobjetivo es seleccionar otro conjunto de juntas que también aporten capacidad global a la estructura a fin de encontrar un segundo conjunto de soluciones no dominadas, repitiendo el procedimiento descrito en la figura 25, y posteriormente, efectuar la optimización multiobjetivo descrita previamente; sin embargo, se considera un daño inicial acumulado (*DIA*) para el segundo conjunto de juntas seleccionadas, dado al final del intervalo de tiempo en el que se realizó la primera reparación del primer conjunto de juntas críticas. En la figura 27 a, b y c se presenta de manera ilustrativa las proyecciones de la primera solución seleccionada para llevar a cabo los trabajos de mantenimiento del primer conjunto de juntas y las proyecciones de la segunda solución seleccionada para realizar el mantenimiento del segundo conjunto de juntas. Es importante recalcar que el primer conjunto de juntas corresponde a las juntas críticas y el segundo conjunto de juntas corresponde a aquellas que en menor medida aportan capacidad global a la estructura.



a)



b)



c)

**Figura 27.** Proyecciones de las soluciones seleccionadas correspondientes al primer y segundo intervalo para acciones de mantenimiento.

---

# CAPÍTULO 6

## OBTENCIÓN DEL INTERVALO DE TIEMPO ÓPTIMO CON BASE EN OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO PARA UNA PLATAFORMA MARINA

Con la finalidad de extender la vida útil de las plataformas marinas manteniendo sus niveles de confiabilidad y desempeño dentro de valores aceptables pre-establecidos, y al mismo tiempo que los trabajos de inspección y mantenimiento produzcan los menores costos. En este capítulo se obtiene el primer y segundo conjunto de los mejores intervalos de tiempo con base en optimización multiobjetivo para la plataforma marina que se analizó previamente. Para obtener los intervalos los mejores intervalos de tiempo se considera la variación tanto de la capacidad estructural como de la demanda, dada una altura de ola máxima (Caso C, capítulo 1).

El primer intervalo de tiempo para realizar los trabajos de mantenimiento se obtiene para las juntas críticas que se seleccionaron previamente en el capítulo 2 (figura 3). El segundo intervalo de tiempo para trabajos de mantenimiento se obtiene con base en otras juntas que se seleccionan con base en su contribución a la capacidad global de la plataforma marina. La optimización multiobjetivo se realiza con la ayuda del algoritmo genético Non Dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA II) propuesto por Deb y colaboradores (2002). Es importante mencionar que el criterio multiobjetivo que aquí se emplea se puede adecuar para realizar la optimización multiobjetivo de otros sistemas estructurales (ej. edificios, torres de transmisión, puentes, tanques de almacenamiento, ductos, etc.).

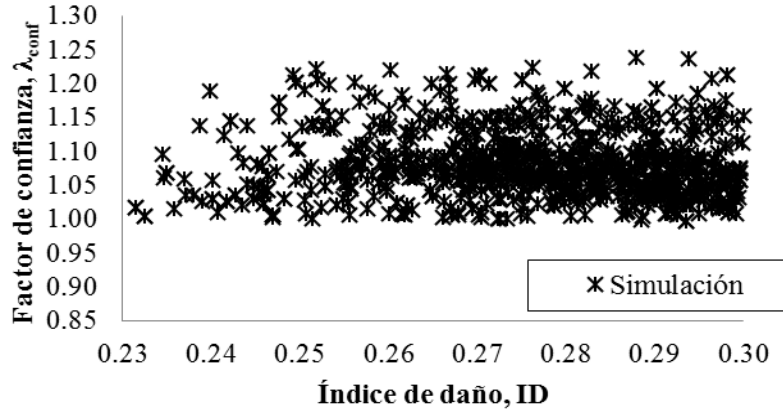
## 6.1 OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO PARA EL PRIMER INTERVALO DE TIEMPO

El primer paso para efectuar la optimización multiobjetivo tiene que ver con la información referente a la obtención de medianas como de sus respectivas desviaciones estándar de la capacidad y de la demanda estructural de la plataforma marina para distintos intervalos de tiempo, respectivamente. De acuerdo con lo anterior, en la tabla 6 se presenta la información de las medianas de la capacidad estructural y sus respectivas desviaciones estándar al término de distintos intervalos de tiempo, obtenidas en el capítulo 2. Las medianas de la demanda estructural, dada una altura de ola máxima se obtienen de acuerdo con la ecuación 46 y sus desviaciones estándar del logaritmo natural de la demanda con la ecuación 47, para diferentes intervalos de tiempo.

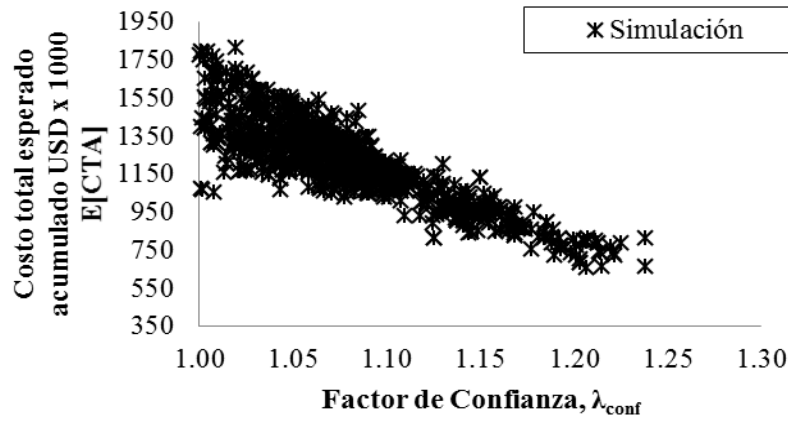
**Tabla 6.** Mediana de la capacidad estructural,  $\hat{C}$ , y su correspondiente desviación estándar del logaritmo natural de la capacidad estructural para distintos intervalos de tiempo.

$\Delta t$ (años)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C, \Delta t}$	$\Delta t$ (años)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C, \Delta t}$	$\Delta t$ (años)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C, \Delta t}$
0	0.2520	0.0140	6	0.2322	0.1813	12	0.2151	0.2122
1	0.2516	0.0574	7	0.2297	0.1902	13	0.2116	0.2137
2	0.2492	0.0901	8	0.2272	0.1918	14	0.2106	0.2305
3	0.2462	0.1054	9	0.2206	0.1971	15	0.2092	0.2334
4	0.2429	0.1130	10	0.2190	0.1978			
5	0.2378	0.1500	11	0.2179	0.2079			

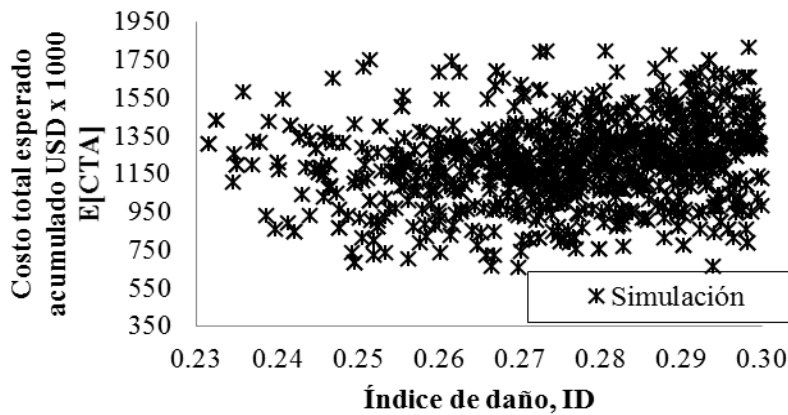
Considerando que los valores tanto de la capacidad como de la demanda estructural para distintas altura de ola máxima presentan una distribución de tipo lognormal (Rosenblueth y Esteva, 1972; Cornell *et al.* 2002) en un intervalo de tiempo (Tolentino *et al.* 2011; Tolentino *et al.* 2012; Tolentino y Ruiz 2013a; Tolentino y Ruiz 2013b). Se simulan valores tanto de la capacidad como de la demanda estructural con base en sus respectivas medianas y desviaciones estándar para obtener los tres objetivos que se consideran en el criterio multiobjetivo (índice de daño, factor de confianza, y costo total esperado acumulado). El índice de daño se obtiene utilizando la ecuación 68, el factor de confianza se obtiene con la ecuación 34, y aplicando la ecuación 61 se calcula el costo total esperado acumulado. Siguiendo el procedimiento que se describe en la figura 25 se obtiene un total de 1024 perfiles simulados de índice de daño, factor de confianza y costo total esperado acumulado. En la figura 28 a, b y c se muestran diferentes vistas de los objetivos simulados haciendo una comparación entre ellos. Y en la tabla 7 se muestra la información que se obtiene a partir de la simulación.



a)



b)



c)

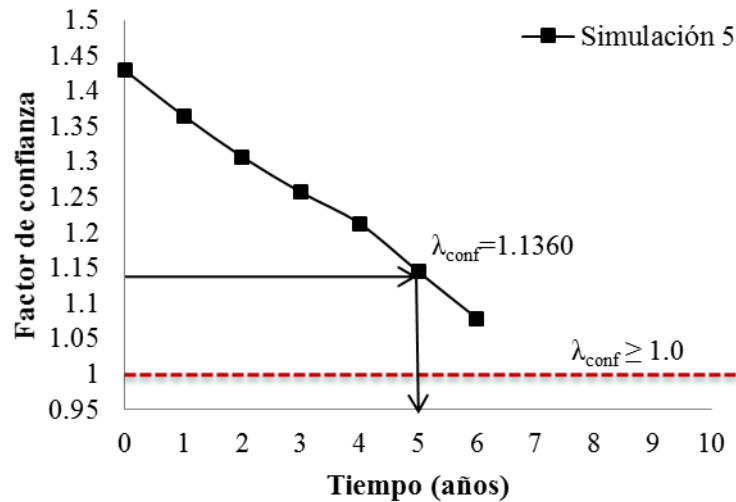
**Figura 28.** Comparación entre los tres objetivos simulados (índice de daño, factor de confianza y costo total esperado acumulado)



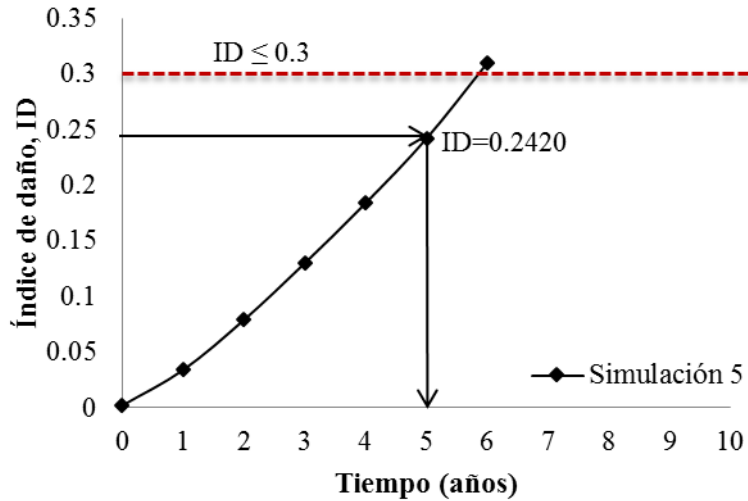
**Tabla 7.** Información obtenida a partir de la simulación de los tres objetivos.

Simulación	ID	$\lambda_{conf}$	$E[CTA]$	Intervalo de tiempo (años)
1	0.2502	1.0223	1218321	8
2	0.2642	1.0915	1158698	6
3	0.2612	1.0123	1397067	10
4	0.2729	1.0734	1295936	7
5	0.2420	1.1360	851000	5
6	0.2796	1.0656	1379728	9
.				
.				
1024	0.2705	1.1729	860471	4

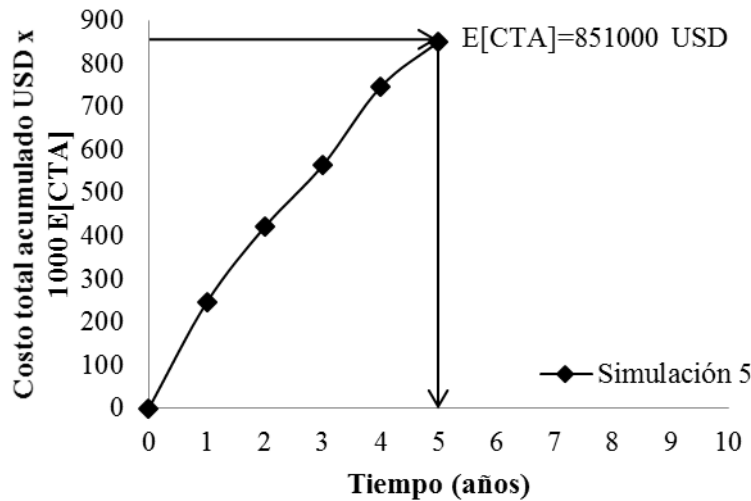
En la tabla 7 se muestra el número de simulación (columna 1), la información de los tres objetivos (columnas 2, 3 y 4) y en la quinta columna se muestra que el intervalo de tiempo en el que se cumplen las condiciones establecidas dadas en la figura 25, es de tipo entero (ej. 5, 9, 7, 4 años, etc.). Esto se debe a que inicialmente se evaluó la capacidad estructural y la demanda, dada una altura de ola, por intervalos de tiempo enteros. Por lo que al realizar la simulación se contará con información de los tres objetivos año tras año. Como ejemplo, en la figura 29 a, b y c se muestra la información obtenida de la simulación 5 (ver tabla 7) en donde el intervalo de tiempo que cumple con las condiciones dadas por la figura 25 corresponde a 5 años.



a)



b)

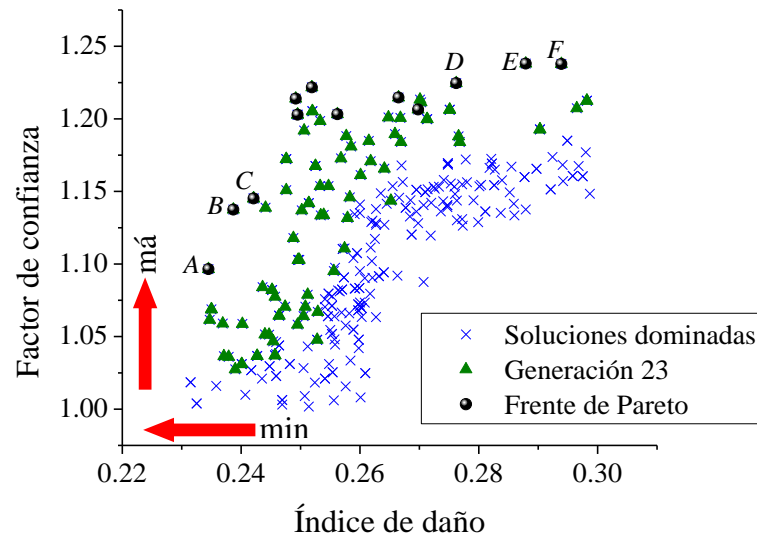


c)

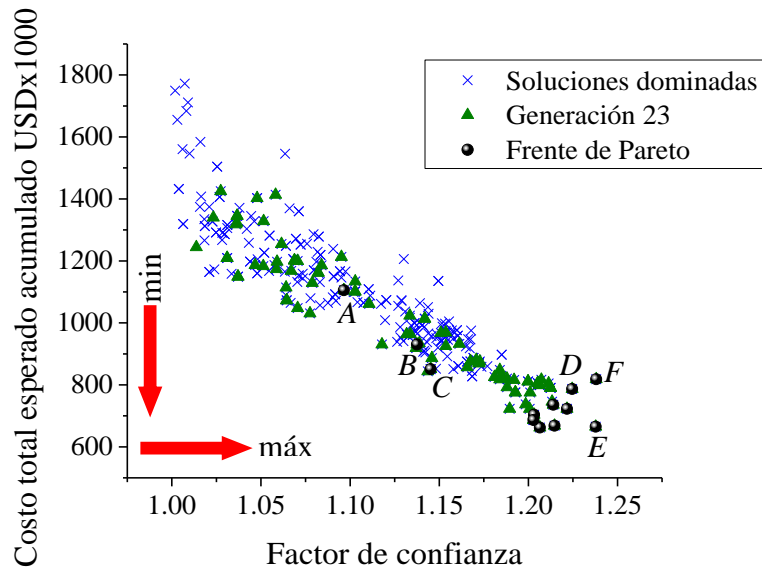
**Figura 29.** Obtención de los tres objetivos correspondiente a la simulación 5.

El método NSGA II se desarrolló en el programa MathLab (Mathworks, 2010). Este programa tiene la ventaja de que posee subrutinas pre-programadas que facilitan el desarrollo del algoritmo del método multiobjetivo. Se realiza la optimización multiobjetivo con el total de simulaciones, se considera una población inicial de 50 individuos, cruza intermedia con valor de “relación” igual a 1, mutación Gaussiana con valores de “escala” y “reducción” igual a 1. Como resultado, se encuentra un conjunto de 12 soluciones óptimas en 24 generaciones. En las figuras 30 a, b y c se muestran diferentes vistas del Frente de Pareto relacionado el índice de daño, factor de confianza y el costo total esperado acumulado al término de un intervalo de tiempo. Se puede observar que el índice de daño varía entre 0.23 y 0.30, el factor de confianza presenta valores entre 1.10 y 1.24 y el costo total acumulado toma valores entre 6.62E+05 y 1.10E+06 USD. La figura 26 d muestra la

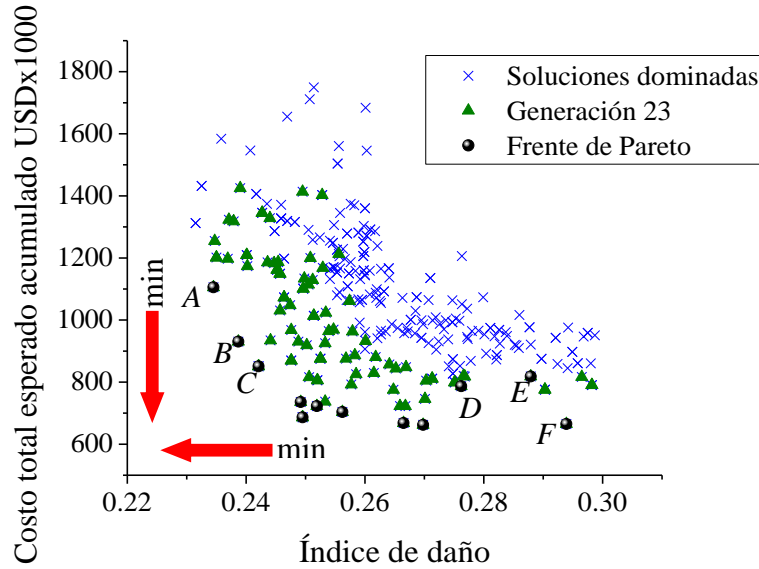
misma información pero en 3D relacionado los tres objetivos. Con la finalidad de comprar algunas soluciones no dominadas de Frente de Pareto se seleccionan de las figuras 26 a-d seis soluciones “óptimas” que se indican con las letras A, B, C, D, E y F.



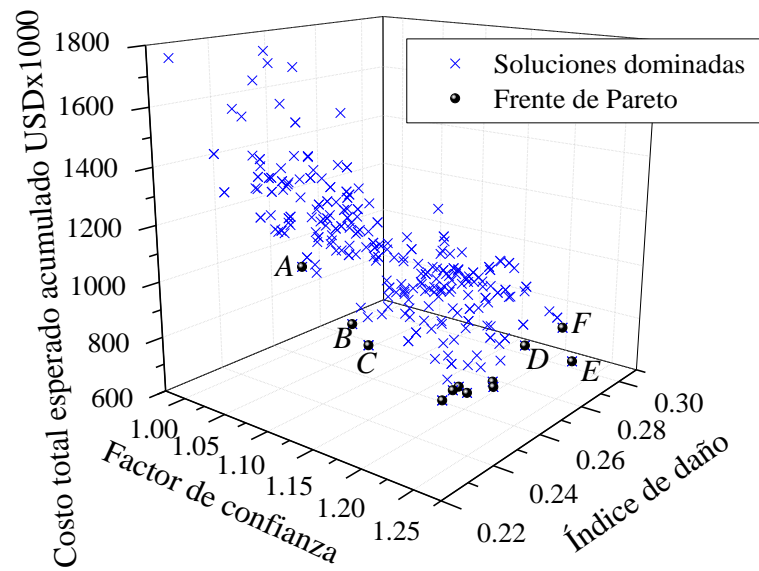
a)



b)



c)



d)

**Figura 30.** Frente de Pareto correspondientes a las tres funciones objetivo.

En las diferentes vistas que se presentan en las figuras 30 a, b, y c se hace notar que las soluciones no dominadas que forman el Frente de Pareto resultan como se planteó el problema multiobjetivo en un inicio. Las flechas rojas que se presentan en la figura 30a, indican que las soluciones no dominadas tienden a ser las máximas confiabilidades y de manera similar tienden a presentar los mínimos índices de daño. Caso similar sucede en la figura 30b en donde las flechas (rojas) indican hacia donde se debe de presentar el Frente de Pareto (máximo factor de confianza y mínimo costo total esperado acumulado). En el caso de la figura 30c, las flechas rojas indican hacia donde se deben presentar las soluciones no dominadas (mínimo índice de daño vs máximo factor de

confianza). Con lo anterior se demuestra que el Frente de Pareto cumple con las condiciones establecidas del problema multiobjetivo (maximizar el mínimo factor de confianza, minimizar el máximo índice de daño y minimizar el costo total esperado acumulado). Con base en las soluciones seleccionadas en las figuras 30 a-d, en la tabla 8 se comparan las soluciones no dominadas seleccionadas a fin de establecer los mejores intervalos de tiempo para realizar trabajos de mantenimiento a las juntas críticas.

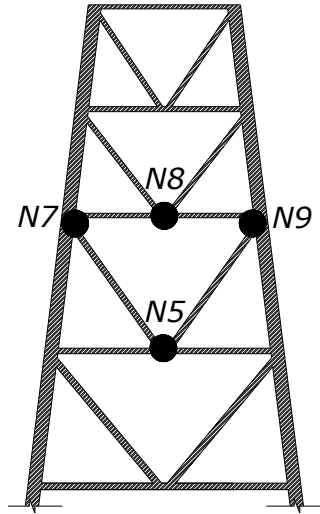
**Tabla 8.** Comparación entre las soluciones *A, B, C, D, E* y *F*

Solución	Intervalo de tiempo (años)	Índice de daño ( <i>ID</i> )	Factor de confianza ( $\lambda_{conf}$ )	Costo total esperado acumulado $E[CTA]$ (USD)
<i>A</i>	6	0.2345	1.0965	1105415
<i>B</i>	5	0.2387	1.1375	930566
<i>C</i>	5	0.2421	1.1452	850778
<i>D</i>	4	0.2762	1.2246	786761
<i>E</i>	4	0.2879	1.2381	818191
<i>F</i>	3	0.2939	1.2378	665032

Con la finalidad de establecer intervalos de tiempo para el mantenimiento de las juntas críticas de la plataforma marina en estudio, en este trabajo se considera que aquellas soluciones “óptimas” no dominadas con valores de factor de confianza,  $\lambda_{conf} \leq 1.15$ , serán seleccionadas para realizar trabajos de mantenimiento. De acuerdo con lo anterior, las soluciones *A, B* y *C* que se muestran en la tabla 8 (en color rojo) cumplen con esa condición, por lo que el conjunto de intervalos de tiempo “óptimos” para el mantenimiento de las juntas críticas oscila entre los 5-6 años.

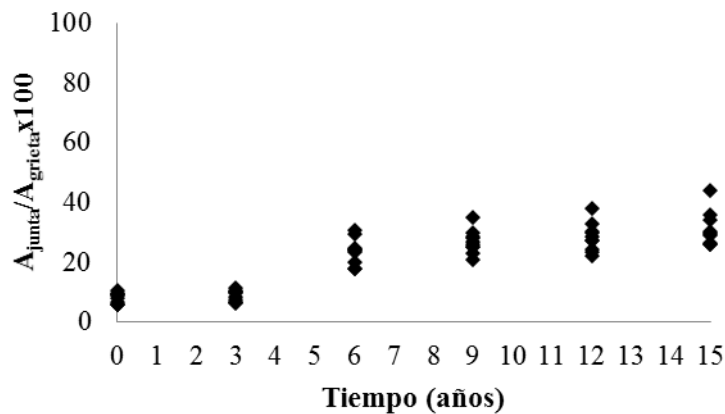
## 6.2 OPTIMIZACIÓN MULTI OBJETIVO PARA EL SEGUNDO INTERVALO DE TIEMPO

En esta sección se supone que se ya se ha realizado el mantenimiento de las juntas críticas 1, 2, 3, 4 y 6 considerando la solución *A* y alternativamente la solución *C* (ver tabla 8). De acuerdo con la solución *A*, el primer intervalo de tiempo para realizar los trabajos de mantenimiento corresponde a 6 años, después de ser instalada la plataforma marina, o alternativamente, después de 5 años como resulta la solución *C*. En este trabajo se considera que después de mantenimiento, las juntas recuperan su capacidad original. Tomando en cuenta esta consideración, en este trabajo se busca un segundo conjunto de juntas que también aportan capacidad global a la estructura (en menor cantidad que las juntas críticas). Con base en la tabla 1, las juntas que se seleccionan para encontrar su respectivo conjunto de intervalos de tiempo óptimo para llevar a cabo trabajos de mantenimiento, son las juntas 5, 7, 8 y 9 (ver figura 31).



**Figura 31.** Segundo conjunto de juntas seleccionadas para realizar la optimización multiobjetivo.

La evaluación de la capacidad estructural y de la demanda estructural (dada una altura máxima de ola) al término del intervalo de tiempo  $[0, \Delta t)$  se realiza de manera similar a como se describe en el capítulo 2; Sin embargo en esta parte se considera que las juntas 5, 7, 8 y 9 presentan daño inicial acumulado, *DIA*. Este considera la ventana de tiempo de deterioro estructural por fatiga que sufren las juntas después de ser instalada la estructura al final del intervalo de tiempo de la primera reparación. En la figura 32 se muestra un ejemplo de porcentajes del área de la grieta de la junta 5 al término de diferentes intervalos de tiempo, considerando un *DIA* correspondiente a 5 años (que se asocia con la solución C). En la figura 32 se hace notar que hay un daño acumulado inicial, *DIA*, (representado por  $A_{\text{junta}}/A_{\text{grieta}} \times 100$ ) en  $\Delta t = 0$ .



**Figura 32.** Porcentajes de área de grietas correspondiente a la junta 5.

En las tablas 9 y 10 se presentan las medianas,  $\hat{C}$ , y sus correspondientes desviaciones estándar del logaritmo natural de la capacidad estructural,  $\sigma_{\ln C, \Delta t}$ , representadas en términos del desplazamiento

global de la plataforma, correspondientes a las soluciones A y C, respectivamente, para diferentes intervalos de tiempo.

**Tabla 9.** Mediana de la capacidad estructural,  $\hat{C}$ , y su correspondiente desviación estándar del logaritmo natural de para diferentes intervalos de tiempo, considerando un *DIA* de 6 años (correspondiente a la solución A).

$\Delta t$ (años)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C, \Delta t}$	$\Delta t$ (años)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C, \Delta t}$	$\Delta t$ (años)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C, \Delta t}$
0	0.2530	0.0129	6	0.2373	0.1803	12	0.2249	0.2176
1	0.2515	0.0336	7	0.2365	0.1870	13	0.2246	0.2247
2	0.2499	0.0885	8	0.2325	0.1966	14	0.2227	0.2362
3	0.2474	0.1141	9	0.2304	0.2026	15	0.2213	0.2578
4	0.2448	0.1412	10	0.2296	0.2033			
5	0.2420	0.1592	11	0.2286	0.2193			

**Tabla 10.** Mediana de la capacidad estructural,  $\hat{C}$ , y su correspondiente desviación estándar del logaritmo natural de para diferentes intervalos de tiempo, considerando un *DIA* de 5 años (correspondiente a la solución C).

$\Delta t$ (años)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C, \Delta t}$	$\Delta t$ (años)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C, \Delta t}$	$\Delta t$ (años)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C, \Delta t}$
0	0.2534	0.0146	6	0.2448	0.1433	12	0.2315	0.1915
1	0.2518	0.0383	7	0.2417	0.1509	13	0.2300	0.1920
2	0.2503	0.0863	8	0.2392	0.1602	14	0.2285	0.2026
3	0.2495	0.1196	9	0.2375	0.1668	15	0.2273	0.2332
4	0.2476	0.1250	10	0.2364	0.1702			
5	0.2468	0.1398	11	0.2342	0.1841			

Las medianas de la demanda (dada una altura máxima de ola) y sus correspondientes desviaciones estándar se calculan con base en la ecuación 20, resultando las siguientes expresiones para un *DIA* de 6 años, correspondiente a la solución A.

$$\hat{D}(\Delta t) = (3.55E - 04 + 4.1E - 08 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^2 \quad (86)$$

$$\sigma_{\ln D|_{h_{\max}, \Delta t}} = (1.5E - 03 + 1.5E - 05 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^{1.55} \quad (87)$$

De manera similar, las expresiones que se ajustan con un *DIA* de 5 años (solución C) son las siguientes:

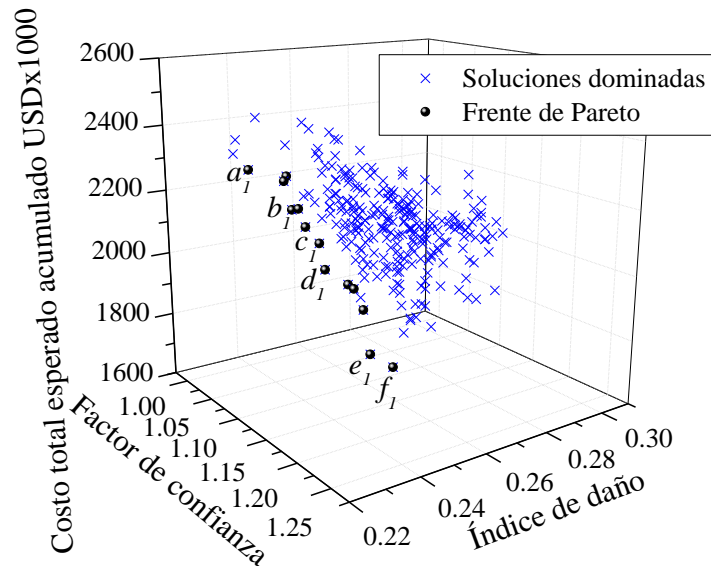
$$\hat{D}(\Delta t) = (3.4E - 04 + 4.0E - 08 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^2 \quad (88)$$

$$\sigma_{\ln D|_{h_{\max}, \Delta t}} = (1.4E - 03 + 1.4E - 05 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^{1.55} \quad (89)$$

Tomando como base las medianas y sus correspondientes desviaciones estándar tanto de la capacidad como de la demanda estructural, se hace un total de 1024 simulaciones que corresponden

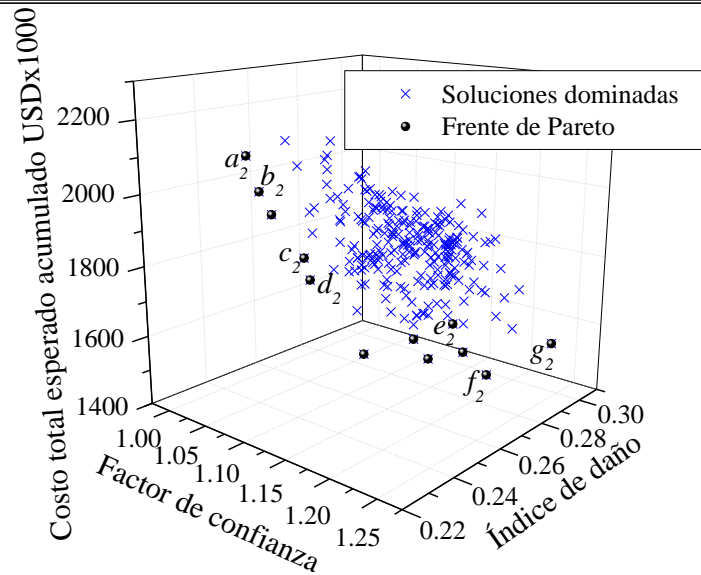
al caso en el que se considera un *DIA* de 6 años (solución *A*), y alternativamente otras 1024 simulaciones considerando un *DIA* de 5 años, que corresponde a la solución *C*. La simulación de los tres objetivos a optimizar (índice de daño, factor de confianza y costo total esperado acumulo) se realizó siguiendo el procedimiento que se presenta en la figura 25. Una vez obtenidas las simulaciones para cada caso, se lleva a cabo la optimización multiobjetivo utilizando el método NSGA II, utilizando los mismos valores de los parámetros que se utilizaron en la sección anterior (población inicial de 50 individuos, cruza con valor de “relación” igual a 1, mutación con valores de “escala” y “relación” igual a 1).

Para el caso en que se considera la solución *A*, que corresponde a un *DIA* de 6 años, se encuentra un conjunto de 13 soluciones “óptimas” en 23 generaciones y alternativamente para el caso en que se considera un *DIA* de 5 años (solución *C*) se encuentran 12 soluciones no dominadas en 25 generaciones. De acuerdo con lo anterior, las figuras 33 y 34 muestran las soluciones no dominadas que forman el Frente de Pareto para los casos en el que se considera la solución *A* y alternativamente la solución *C*, respectivamente. Se hace notar que tanto la figura 33 como la figura 34 muestran algunas soluciones no dominadas que son seleccionadas del Frente de Pareto con la finalidad de escoger aquellas soluciones no dominadas que cumplan con algún criterio de selección y que definirán el intervalo de tiempo para efectuar acciones de mantenimiento al segundo conjunto de juntas seleccionadas (5, 7, 8 y 9). En las tablas 11 y 12 se muestra la información de las soluciones no dominadas seleccionadas a partir de las figuras 33 y 34, respectivamente.



**Figura 33.** Frente de Pareto con 13 soluciones no dominadas, considerando la solución *A* para el primer intervalo de tiempo para mantenimiento y un conjunto de soluciones seleccionadas para el segundo intervalo de mantenimiento ( $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, y f_1$ ).





**Figura 34.** Frente de Pareto con 12 soluciones no dominadas, considerando la solución C para el primer intervalo de tiempo para mantenimiento y un conjunto de soluciones seleccionadas para el segundo intervalo de mantenimiento ( $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2$  y  $g_2$ ).

**Tabla 11.** Comparación entre las soluciones  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1$  and  $f_1$ . Correspondiente a 6 años de DIA

Solución	Intervalo de tiempo (años)	Índice de daño (DI)	Factor de confianza ( $\lambda_{conf}$ )	Costo total esperado acumulado $E[CTA]$ (USD)
$a_1$	8	0.2277	1.0859	2319250
$b_1$	7	0.2388	1.0935	2190760
$c_1$	6	0.2435	1.1119	2095360
$d_1$	5	0.2448	1.1136	2014650
$e_1$	3	0.2489	1.1630	1794310
$f_1$	3	0.2535	1.1751	1756520

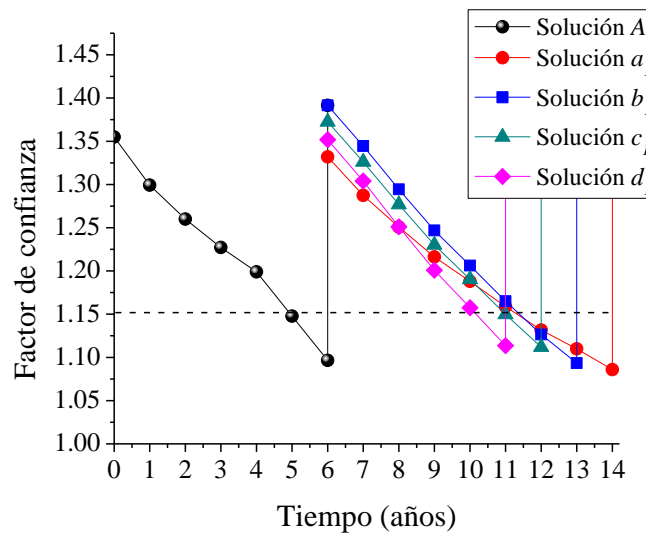
**Tabla 12.** Comparación entre las soluciones  $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2$  y  $g_2$ . Correspondiente a 5 años de DIA

Solución	Intervalo de tiempo (años)	Índice de daño (DI)	Factor de confianza ( $\lambda_{conf}$ )	Costo total esperado acumulado $E[CTA]$ (USD)
$a_2$	10	0.2284	1.0827	2133420
$b_2$	9	0.2309	1.0886	2040560
$c_2$	8	0.2371	1.1200	1870170
$d_2$	7	0.2375	1.1255	1813980
$e_2$	5	0.2680	1.2029	1665650
$f_2$	4	0.2734	1.2284	1523060
$g_2$	4	0.2980	1.2458	1554500

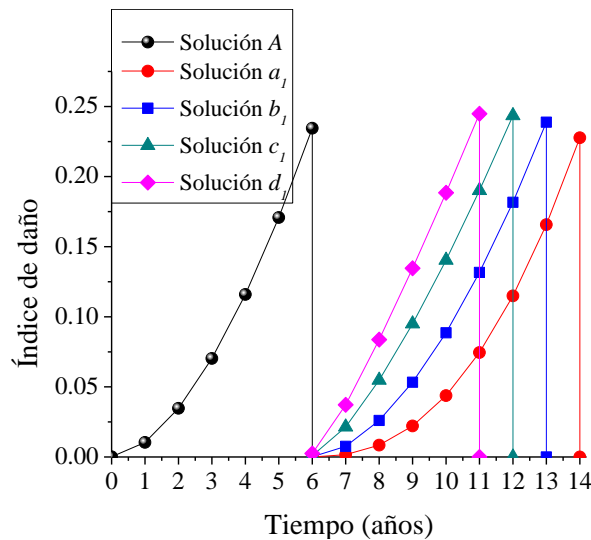
De manera similar al criterio que se siguió para establecer los intervalos de tiempo para llevar a cabo los trabajos de mantenimiento para el primer intervalo de tiempo (sección anterior), el segundo intervalo de tiempo para el mantenimiento de las juntas 5, 7, 8 y 9, se llevará a cabo cuando se presenten soluciones no dominadas con valores de factor de confianza menores o iguales a 1.15. De

acuerdo esta condición, en la tabla 11 existen cuatro soluciones con intervalos de tiempo entre 5 y 8 años (soluciones  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  y  $d_1$ ) cuando se considera un *DIA* de 6 años. Alternativamente, para el caso en el que se considera un *DIA* de 5 años, las soluciones que cumplen con el criterio de selección son:  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  y  $d_2$  (ver tabla 12) que corresponden a intervalos de tiempo entre 7 y 10 años.

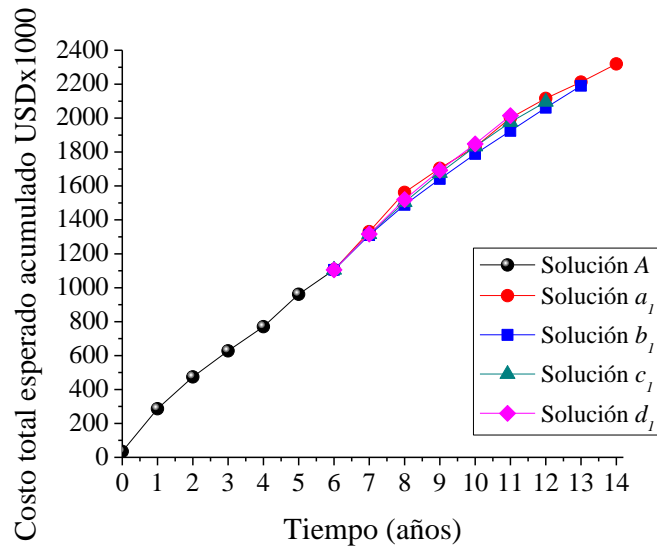
Con la finalidad de ilustrar el primer y segundo intervalo de tiempo para realizar acciones de mantenimiento, en las figuras 35 a, b y c se muestra la proyección de la solución A (ver tabla 8) junto con las proyecciones de las soluciones  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  y  $d_1$  (ver tabla 11) correspondientes a los tres objetivos (índice de daño, factor de confianza, costo total esperado acumulado). De manera similar, en las figuras 36 a, b y c se muestra la proyección de la solución C junto con las proyecciones de las soluciones  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  y  $d_2$  que corresponden a la tabla 12.



a)

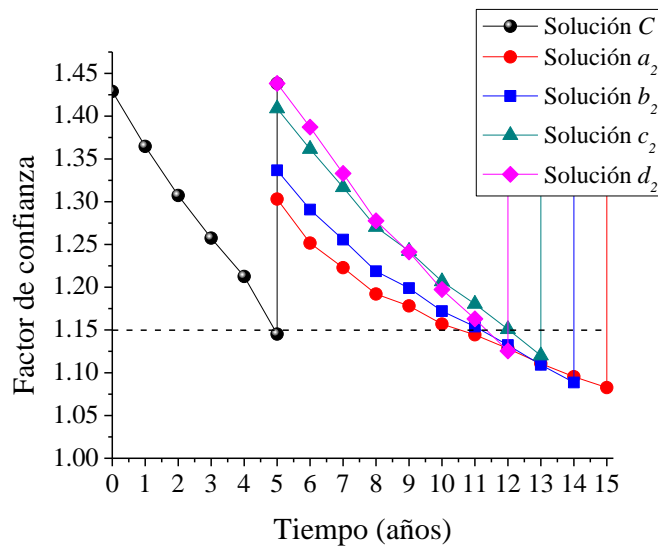


b)

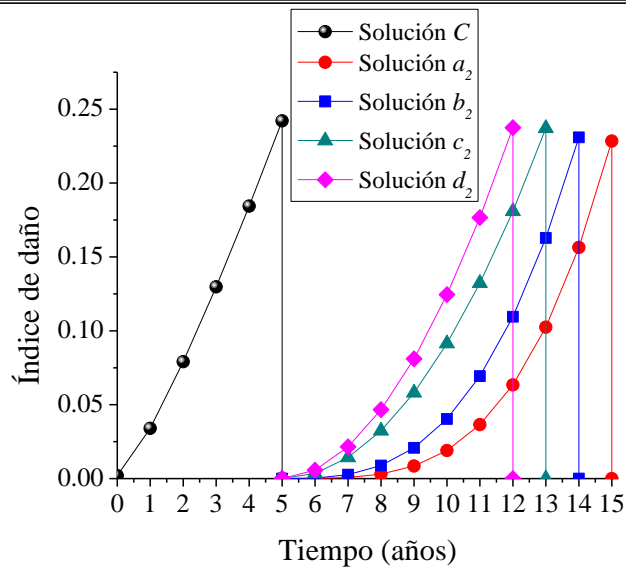


c)

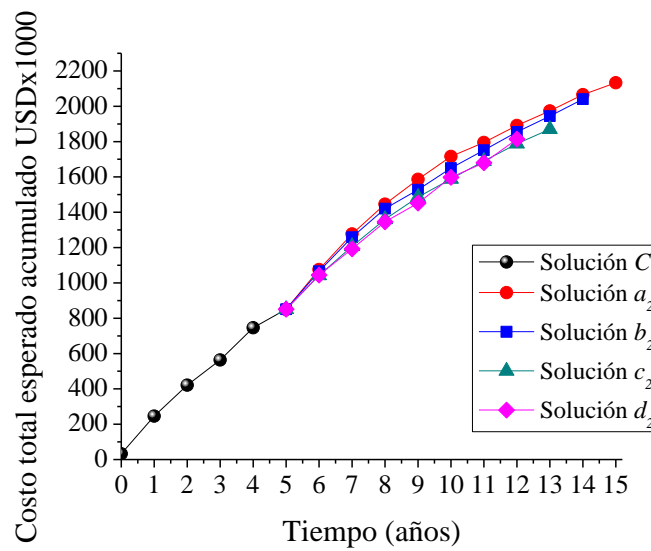
**Figura 35.** Proyecciones de la solución A y soluciones  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  y  $d_1$  en función de tiempo, considerando los tres objetivos (índice de daño, factor de confianza y costo total esperado acumulado).



a)



b)



c)

**Figura 36.** Proyecciones de la solución  $C$  y soluciones  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  y  $d_2$  en función de tiempo, considerando los tres objetivos (índice de daño, factor de confianza y costo total esperado acumulado).

En el **Apéndice I** se propone un criterio con base en optimización multiobjetivo para encontrar intervalos de tiempo óptimos para realizar trabajos de mantenimiento a plataformas marinas. Dicho criterio multiobjetivo es el que se describe en el capítulo 5 y se ejemplifica en el presente capítulo.

---

---

## CONCLUSIONES

- Se evaluó la confiabilidad estructural en términos del factor de confianza y su correspondiente nivel de confianza mediante desarrollo expresiones cerradas simplificadas al término de un intervalo de tiempo. Se consideraron distintos casos en donde se considera la degradación de la capacidad estructural y/o el incremento de la demanda estructural al término de un intervalo de tiempo. Las expresiones simplificadas pueden utilizarse para evaluar la confiabilidad de cualquier tipo de sistema estructural (ej. edificios, torres de transmisión, puentes, plataforma marinas, plantas nucleares, tanques de almacenamiento, etc.) al término de un intervalo de tiempo de interés, y además, pueden considerar distintos estados límite.
- El modelo de degradación lineal seccionado a lo largo de la ventana de tiempo en sub-intervalos de tiempo se apegó mejor al comportamiento de la plataforma mariana comparado con el modelo de degradación no-lineal de la capacidad estructural (expresado como una función de segundo orden). La desventaja que tiene el modelo de degradación no-lineal radica en su laboriosa evaluación debido a que se obtiene una expresión extensa que podría llevar al ingeniero a cometer errores a la hora de evaluarla. Por otro lado, el modelo de degradación lineal es menos laborioso de evaluar y es aceptable bajo ciertas consideraciones como el de seccionar a la ventana de tiempo de interés en diferentes sub-intervalos para la obtención de la confiabilidad estructural. Con esta consideración se obtienen diferencias pequeñas entre el modelo lineal (en sub-intervalos de tiempo) y el modelo no-lineal, que para el caso de la plataforma marina que se estudió en este trabajo resultó del orden del 2%. La elección del modelo de degradación de la capacidad depende principalmente del comportamiento de la estructura a analizar y del criterio del ingeniero.
- Como ejemplo de aplicación se obtuvo la confiabilidad estructural de una plataforma marina que se ubica en la Sonda de Campeche, México. Se consideró como condición de daño el crecimiento de grietas en las juntas críticas causada por fatiga. Se realizó una comparación de la confiabilidad estructural obtenida con las distintas expresiones cerradas simplificadas propuestas en este trabajo. Con base en los resultados, se recomienda considerar la variación tanto de la capacidad (lineal o no-lineal) como de la demanda en el tiempo debido a que conduce a una menor incertidumbre en la obtención de la confiabilidad estructural.

- 
- Con la finalidad de extender la vida de la estructura y mantener sus niveles de desempeño aceptables, se incluyeron las expresiones simplificadas cerradas en dos criterios de optimización. El primero de ellos con base en el análisis costo/beneficio en donde el intervalo de tiempo óptimo para realizar trabajos de inspección y mantenimiento es aquel que produce los menores costos totales que incluye los costos de inspección, reparación y falla. Se encontró que el intervalo de tiempo óptimo para realizar trabajos de inspección y mantenimiento a las juntas críticas de la plataforma marina es de 4 años después de ser instalada la plataforma.
  - El segundo criterio se desarrolló con base en optimización multiobjetivo con la finalidad de encontrar un conjunto de intervalos de tiempo óptimo para realizar acciones de mantenimiento a un primer conjunto de juntas (críticas) y posteriormente a un segundo conjunto de juntas diferentes a la críticas, considerando tres objetivos (índice de daño, factor de confianza y el costo total esperado acumulado). Se encontró que el primer intervalo de tiempo para realizar trabajos de inspección y mantenimiento para el primer conjunto de juntas (juntas críticas) de la plataforma marina se puede efectuar entre los 5 y 6 años después de ser instalada la estructura marina. Si fuese el caso de seleccionar la primera opción (5 años), el segundo intervalo de tiempo para trabajos de mantenimiento deberá ser aplicado para el segundo conjunto de juntas, entre 7 y 10 años. Por otro lado se fuera seleccionada la opción 2 (6 años), el segundo intervalo de tiempo podría ser ejecutado entre los 5 y 8 años.
  - Los dos criterios de optimización presentados junto con las expresiones simplificadas constituyen una herramienta eficiente para la realización de planes de mantenimiento; sin embargo estos criterios pueden extenderse para considerar distintas calidades de inspección y tipos de mantenimiento y además, se pueden extender para optimizar un conjunto de sistemas estructurales.

---

---

## APORTACIONES

Las principales aportaciones que se desarrollaron en el presente trabajo son las siguientes:

1. Se desarrollaron expresiones simplificadas cerradas para evaluar la confiabilidad estructural en términos del factor de confianza y su correspondiente nivel de confianza al término de un intervalo de tiempo. Las expresiones simplificadas consideran la degradación de la capacidad estructural y/o aumento de la demanda causados por el daño acumulado en un intervalo de tiempo. Lo anterior se encuentra publicado en las siguientes revistas, que también corresponden a los apéndices F y G.
  - Tolentino, D., y Ruiz, S. E., 2013a. Time-dependent confidence factor for structures with cumulative damage, *Earthquake Spectra*, <http://dx.doi.org/10.1193/010912EQS008M>.
  - Ruiz, S. E., Tolentino, D., y Torres, M. A., 2014. Factor de confianza dependiente del tiempo para estructuras con deterioro causado por fatiga, *Ingeniería Investigación y Tecnología*, vol. XV, no. 3. [http://www.ingenieria.unam.mx/~revistafi/ejemplares/V15N3/V15N3\\_art.pdf](http://www.ingenieria.unam.mx/~revistafi/ejemplares/V15N3/V15N3_art.pdf)
2. Las expresiones simplificadas obtenidas se incluyeron en un plan de mantenimiento con base en el análisis costo/beneficio para encontrar intervalos de tiempo óptimos para realizar acciones de inspección y mantenimiento. El plan de mantenimiento considera los costos totales esperados que incluyen los costos de inspección, reparación y falla al término de un intervalo de tiempo. La principal aportación de este inciso es que se debe de considerar tanto la degradación de la capacidad estructural como el aumento de la demanda estructural al evaluar planes de inspección y mantenimiento con base en análisis costo/beneficio. La inclusión de las expresiones simplificadas cerradas en un plan de mantenimiento con base en análisis costos beneficio corresponde al apéndice H, correspondiente a la siguiente publicación.
  - Tolentino, D., y Ruiz, S. E., 2013b. Optimal interval for inspection and maintenance of structures, considering structural deterioration, *Engineering Structures*, aceptado condicionalmente para su publicación.
3. Se propuso un plan de mantenimiento con base en optimización multiobjetivo con la finalidad de encontrar un conjunto de intervalos de tiempo óptimo para realizar trabajos de

---

mantenimiento. El plan de mantenimiento considera como objetivos: a) la confiabilidad expresada en términos del factor de confianza, b) el desempeño representado como una relación lineal entre la capacidad y la demanda, y c) el costo total esperado acumulado. El criterio multiobjetivo se resolvió mediante el uso algoritmos genéticos. Dicho plan de mantenimiento se encuentra también en el apéndice I y corresponde la siguiente publicación.

- Tolentino, D., y Ruiz, S. E., 2013c. Time intervals for maintenance of offshore structures based on multiobjective optimization, *Mathematical Problems in Engineering*, Artículo ID 125856, 15 paginas.



---

---

## REFERENCIAS

- American Petroleum Institute (API), 1993. *Recommended practice for planning, designing and construction fixed offshore platforms – load and resistance factor design*, API RP 2a – LRFD, Washington D. C, Julio.
- Agnew, R. P., 1960. *Differential equations*, McGraw –Hill Book Company Japan, pp. 268-270.
- Ang, A. H-S., y Cornell, C.A., 1974. Reliability bases of structural safety and design. *Journal of the Structural Division*, ASCE, vol. 100, no. 9, pp. 1755-1769.
- Ang, A. H-S., y De Leon, D., 1997. Determination of optimal target reliabilities for design and upgrading of structures, *Structural Safety*, vol. 19, pp. 91–104.
- Bocchini, P., Frangopol, D. M., 2011. A probabilistic computational framework for bridge network optimal maintenance scheduling, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 96, no. 2, pp. 332-349.
- Buchanan, J. T., 1997. A naive approach for solving mcdm problems: The guess method, *Methods, Computers & Operation Research*, vol. 48, no.2, pp.202–206.
- Campos, D., Rodriguez, M., Martinez, M., y Ramos R., 1999. Assessment of consequences of failure in jacket structures, en *18th International conference on offshore mechanics and arctic engineering*, OMAE99/S&R-6015, St. Johns, Newfoundland, Canada.
- Casciati, S. y Faravelli, L., 2010. Vulnerability assessment for medieval civic towers, *Structure and Infrastructure Engineering*, vol.6, no. 1–2, pp. 193–203.
- Celarec, D., Vamvatsikos, D., y Dolšek, D. M., 2011. Simplified estimation of seismic risk for reinforced concrete buildings with consideration of corrosion over time, *Bulletin of Earthquake Engineering*, vol. 9, pp. 1137-1155.
- Central America Weekly (CAW), 2001. *Que el terrorismo no nos corte las alas*, <http://www.centralamericaweekly.net/170/espanol/p-vista.html>
- Chang, S. E. y Shinozuka, M., 1996. Life-cycle cost analysis with natural hazard risk, *Journal of Infrastructure Systems*, vol. 2, no. 3, pp.118–126.
- Coello, C. A., y Toscano, G., 2001. A Micro-Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization. en *First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, C. A. Coello Coello, y D. Corne (editores), Springer-Verlag, pp. 126–140.
- Cornell, C. A., 1968. Engineering seismic hazard analysis, *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 58, no.5, pp. 1583-1606.
- Cornell, C.A., 1969. A probability-based structural code, *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 66, no.12, pp. 974-985.
- Cornell, C. A., 1996. Calculating building seismic performance reliability: A basis for multi-level design norms, en *11th World Conference on Earthquake Engineering*, Paper 2122.

- 
- 
- Cornell, C. A., Jalayer, F., Hamburger, R.O., y Foutch D.A., 2002. The probabilistic basis for the 2000 SAC/FEMA steel moment frame guidelines, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 128, no. 4, pp. 526–533.
- Darwin, C., 1859. *On the Origin of Species by Means of Natural Selection*, Murray, London
- Díaz, O. J., Esteva, L., 1997. Confiabilidad de estructuras y daño acumulado, en *Séptimas Jornadas Chilenas de Sismología e Ingeniería Antisísmica*, La Serena, Chile, pp. 589-598.
- Ditlevsen, O., 1973. *Structural reliability analysis and the invariance problem*. Report No. 22, University of Waterloo. Solid Mechanics Division. Waterloo, Canada.
- Deb, K., 2001. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*, John Wiley & Sons Ltd, England.
- Deb, K., Pratap, A., y Agarwal, S., 2002. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm NSGA-II, *Evolutionary Computation*, vol. 6, no.2, pp.182-197.
- De León, E., y Ang, A. H-S., 2003. Cost-benefit model for risk-based design of a typical marine platform, en *22<sup>th</sup> International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE*, Cancun, Mexico.
- De León, E., y Ang, A. H-S., 2008. Confidence bounds on structural reliability estimations for offshore platforms, *Journal of Marine Science and Technology*, vol. 13, no. 3, pp. 308-315.
- Dyer, J. S., Geoffrion, A. M., y Feinberg, A., 1972. An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an academic department, *Management Science*, vol. 19, no.4, pp.357–368.
- Enevoldsen, I., y Sørensen, J. D., 1994. Reliability-based optimization in structural engineering, *Structural Safety*, vol. 15, pp. 169-1996.
- Erickson, M., Mayer, A., y Horn, J., 2001. The Niche Pareto Genetic Algorithm 2 applied to the design of groundwater remediation systems, en *First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, C. A. Coello, y D. Corne (editores), Springer-Verlag, pp. 681–695.
- Estes, A. C., y Frangopol, D. M., 1999. Repair optimization of highway bridges using system reliability approach, *Journal of Structural Engineering*, vol. 125, no. 7, pp.766–775.
- Esteva, L., 1968. Bases para la formulación de decisiones de diseño sísmico. *Tesis de Doctorado*, Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- Esteva, L., Díaz O. J., y García, J., 1999. Life-cycle optimization of structures with seismic energy-dissipating devices, *Case Studies in Optimal Design and Maintenance of Civil Infrastructure Systems*, Special Volume ASCE, D. M. Frangopol (editor).
- Esteva, L., Díaz O. J., García, J., Sierra, G., e Ismael, E., 2002. Life-cycle optimization in the establishment of performance-acceptance parameters for seismic design, *Structural Safety*, vol. 24, no. 2-4, pp.187-204.
- Esteva, L., Diaz, O. e Ismael, E., 2010. Seismic vulnerability functions of multi-storey buildings: estimation and applications, *Structure and Infrastructure Engineering*, vol. 6, no. 1–2, pp. 3–16.
- Faber, M. H., 2001. Reliability based inspection planning of fatigue damaged offshore platforms, en *1<sup>st</sup> International symposium on analysis of structural risk and reliability for offshore facilities*, December, IMP, Mexico.
- 
-

- 
- 
- Federal Emergency Management Agency (FEMA), 2000. *Recommended Seismic Evaluation and Upgrade Criteria for Existing Welded Steel Moment-Frame Buildings*, Report No. FEMA 351, SAC Joint Venture, Washington, D. C.
- Fishburn, P. C., 1974. Lexicographic orders, utilities and decision rules: A survey, *Management Science*, vol. 20, no. 11, pp.1442–1471.
- Fonseca, C. M., y Fleming, P. J., 1993. Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization, en *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, San Mateo, California, pp. 416–423.
- Ford, L. R., 1955. *Differential Equations*, McGraw –Hill Book Company, New York, USA.
- Forsell, C., 1924. Ekonomi och Byggnadsvasen (Economy and Construction), *Sunt Fornoft*, April, pp.74-77.
- Fragiadakis, M., Lagaros, N. D., y Papadrakakis, M. 2006. Performance-based multiobjective optimum design of steel structures considering life-cycle cost, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 32, pp. 1-11.
- Frangopol, D. M., 1984. A reliability-based optimization technique for automatic plastic design, *Computers methods in applied mechanics and engineering*, vol. 44, no. 1, pp. 105-117.
- Frangopol, D. M., y Moses, F., 1994. Reliability-based structural optimization, en *Advances in design optimization*, H. Adeli (editor), Chapman and Hall, London, UK, pp. 492–570.
- Frangopol, D. M., Kong J. S., y Gharaibeh, E. S., 2001. Reliability-based life-cycle management of highway bridges, *Journal of computing in civil engineering*, vol. 15, no. 1, pp. 27-34.
- Frangopol, D. M., Kallen, M. J., y Van Noortwijk, J. M., 2004. Probabilistic models for life-cycle performance of deteriorating structures: review and future directions, *Progress in Structural Engineering and Materials*, vol. 6, pp. 197-212.
- Frangopol, D. M., y Liu, M., 2007a. Maintenance and management of civil infrastructure based on condition, safety, optimization and life-cycle cost, *Structure and Infrastructure Engineering*, vol. 3, pp. 29-41.
- Frangopol, D. M., y Liu, M., 2007b. Bridge network maintenance optimisation using stochastic dynamic programming, *Journal of Structural Engineering*, vol. 133, no. 12, pp. 1772–1782.
- Freudenthal, A.M., 1956. Safety and the probability of structural failure, *Transactions*, ASCE, vol. 121, pp. 1337-1375.
- Fu, G., y Frangopol, D. M., 1990. Balancing weight, system reliability and redundancy in a multi-objective optimisation framework, *Structural Safety*, vol.7, no. 2–4, pp. 165–175.
- Furuta, H., Kameda, T., Nakahara, K., Takahashi, Y. y Frangopol, D. M., 2006a. Optimal bridge maintenance planning using improved multi-objective genetic algorithm, *Structure and Infrastructure Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 33–41.
- Furuta, H., Takenaka, Y., y Erami, M., 2006b. A practical bridge management system using new multi-objective genetic algorithm, en *Proceedings of the 3rd International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management - Bridge Maintenance, Safety, Management, Life-Cycle and Cost*, P. J. S. Cruz, D.M. Frangopol y L. C. Neves (editores), Taylor & Francis Group, London, pp. 131-132.
- Furuta, H., Takenaka, Y., Kameda, T., y Tsukiyama, I., 2006c. Development of bridge maintenance planning support system using multiple-objective genetic algorithm, en *Proceedings of the 3rd International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management - Bridge*
- 
-

- 
- 
- Maintenance, Safety, Management, Life-Cycle and Cost*, P. J. S. Cruz, D.M. Frangopol y L. C. Neves (editores), Taylor & Francis Group, London, pp. 145-146.
- Furuta, H., Nakatsu, K., y Frangopol, D. M., 2006d. Optimal cost allocation for improving the seismic performance of road networks, en *Proceedings of the 3rd International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management - Bridge Maintenance, Safety, Management, Life-Cycle and Cost*, P. J. S. Cruz, D.M. Frangopol y L. C. Neves (editores), Taylor & Francis Group, London, pp. 143-144.
- Gass, S., y Saaty, T., 1955. The computational algorithm for the parametric objective function, *Naval Research Logistics Quarterly*, vol.2, pp.39-45.
- Goldberg, D. E., 1989. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*, Addison Wesley Longman Inc, USA, November.
- Goldberg, D. E., y Deb, K., 1991. A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms, en *Foundations of Genetic Algorithms*, G. J. E. Rawlins (editor), Los Altos, Morgan Kaufmann, pp.69-93.
- Hasofer, A. M., y Lind, N. C., 1974. Exact and invariant second moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, vol. 100 no. 1, pp. 111-121.
- Heredia-Zavoni, E., Silva-González, F. L., y Montes-Iturrizaga, R., 2008. Reliability analysis of marine platforms subject to fatigue damage for risk based inspection planning, *Journal of Offshore Mechanics and Artic Engineering*, vol. 130, no. 4, pp. 1-21.
- Holland, J H., 1975. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.
- Horn, J., y Nafpliotis, N., 1993. Multiobjective Optimization using the niched pareto genetic algorithm, *Technical Report IlliGAL Report 93005*, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, USA.
- Instituto Nacional de Estadística Geografía e informática (INEGI), 1986. *Sistema de cuentas nacionales México*, México, D. F.
- Instituto Mexicano del Petróleo (IMP), 1998. *Resumen ejecutivo de costos promedio de estructuras típicas ubicadas en la sonda de Campeche*, Departamento de costos del IMP, México, D.F.
- Jalayer, F., y Cornell, C.A., 2003. *A technical framework for probability-based demand and capacity factor design (DCFD) seismic formats*. Pacific Earthquake Engineering Research Center, PEER Report 2003/08, University of California, Berkeley.
- Keeney, R. N., y Raiffa, H., 1976. *Decision with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, John Wiley & Sons.
- Kennedy, R. C., y Short, S. A., 1994. *Basis for seismic provisions of DOE-STD-1020*, Report UCRL-CR-111478, BNL-52418, Lawrence Livermore Nat. Lab., University of California, Livermore, CA. and Brookhaven Nat. Lab., Upton, NY.
- Knowles, J. D., y Corne, D. W., 2000. Approximating the nondominated front using the Pareto archived evolution strategy, *Evolutionary Computation*, vol. 8, no.2, pp.149-172.
- Kong, J. S., y Frangopol, D. M., 2003. Life-cycle Reliability-based maintenance cost optimization of deteriorating structures with emphasis on bridges, *Journal of structural engineering*, vol. 129, no. 6, pp. 818-828.
- Landon, L. S., Haimes, Y. Y., y Wismer, D. A., 1971. On a bicriterion formulation of the problems of itegrated system identification and system optimization, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol.1, pp.296-297.
- 
-

- 
- 
- Lavan, O. y Dargush, G. F., 2009. Multi-objective evolutionary seismic design with passive energy dissipation systems, *Journal of Earthquake Engineering*, vol. 13, pp. 758–790.
- Lehr, W. J., 2001. Oil spill modeling and processes, en *Review of modeling procedures for oil spill weathering behaviour*, C. A. Brebbia (editor), WIT press.
- Lind, N. C., 1971. Consistent partial safety factors, *Journal of the Structural Division*. ASCE, Vol. 97, no. 6, pp. 1651-1670.
- Liu M., Burns, S. A., y Wen Y. K., 2003. Optimal seismic design of steel frame buildings based on life cycle cost considerations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 32, no. 9, pp. 1313–1332.
- Liu, M., y Frangopol, D. M., 2004. Optimal bridge maintenance planning based on probabilistic performance prediction, *Engineering Structures*, vol. 26, pp. 991-1002.
- Liu, M., y Frangopol, D. M., 2005a. Bridge annual maintenance prioritisation under uncertainty by multiobjective combinatorial optimisation, *Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering*, vol. 20, no. 5, pp. 343–353.
- Liu, M., y Frangopol, D. M., 2005b. Multiobjective maintenance planning optimisation for deteriorating bridges considering condition, safety, and life-cycle cost, *Journal of Structural Engineering*, vol. 131, no. 5, pp. 833–842.
- Liu, M., y Frangopol, D. M., 2006a. Managing bridge networks using reliability and multiple cost criteria, en *Proceedings 12th IFIP Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems Advances in Reliability and Optimization of Structural Systems*, Taylor & Francis Group, London, pp. 41-49.
- Liu, M., y Frangopol, D. M., 2006b. Optimizing bridge network maintenance management under uncertainty with conflicting criteria: Life-cycle maintenance, failure, and user costs, *Journal of Structural Engineering*, vol. 132, no. 11, pp. 1835-1845.
- Madsen, H. O., Sørensen, J. D., y Olsen R., 1989. Optimal inspection planning for fatigue damage of offshore structures, en *ICOSSAR*, San Francisco, USA, pp. 2099-2106.
- Mäkelä, M. M., 1933. *Issues of implementing a fortran subroutine packae nsolib for nonsmooth optimization*, Technical report, University of Jyväskylä.
- Mau, S. T., 1971. *Optimal design of structures with a minimum expected cost criterion*, Report No. 340, Department of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, N.Y.
- Melchers, R. E., 1992. Load-space formulation for time-dependent structural reliability, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 118, no. 5, pp. 853-870.
- Montes-Iturizaga, R., Heredia-Zavoni, E., y Esteva, L., 2003. Optimal maintenance strategies for structures in seismic zones, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 32, pp. 245-264.
- Montes-Iturizaga, R., Faber, M., Straub, D., de Dios de la O, J., Heredia-Zavoni, E., y Vargas-Rodríguez., 2009. Risk based structural integrity management of marine platforms using Bayesian probabilistic nets, *Journal of Offshore Mechanics and Artic Engineering*, vol. 131, no. 1. pp. 1-10.
- Mori, Y., Ellingwood B. R., 1993. Time-dependent system reliability analysis by adaptive importance sampling, *Structural Safety*, vol. 12, no. 1, pp. 59-73.
- Mori, Y., y Ellingwood, B. R., 1994. Maintaining reliability of concrete structures II: Optimum inspection / repair strategy, *Journal of Structural Engineering*, vol. 120, pp. 846–862.
- 
-

- 
- 
- Moses, F., 1973. Design for reliability—concepts and applications, en *Optimum structural design*, R. H. Gallagher y O. C. Zienkiewicz (Editores), John Wiley, New York, N.Y., pp. 241-261.
- Mühlenbein, H., y Schlierkamp-Voosen, D., 1993. Predictive Models for the Breeder Genetic Algorithm, *Evolutionary Computation*, vol. 1, no. 1, pp. 25-49.
- Nakayama, N., 1991. Satisficing and trade-off method for problems with multiple linear fractional objectives and its applications, *Multiobjective Problems of mathematical Programming*, Springer-Verlag, pp.42–50.
- Neves, L. C., Frangopol D. M. y Petcherdchoo, A., 2006a. Probabilistic lifetime-oriented multiobjective optimization of bridge maintenance: combination of maintenance types, *Journal of Structural Engineering*, ASCE , vol. 132, no.11, pp. 1821–1834.
- Neves, L. C., Frangopol, D. M. y Cruz P. J. S., 2006b. Multi-objective probabilistic optimization of bridge lifetime maintenance: Novel approach, en *Proceedings of the 3rd International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management - Bridge Maintenance, Safety, Management, Life-Cycle and Cost*, P. J. S. Cruz, D.M. Frangopol y L. C. Neves (editores), Taylor & Francis Group, London, pp. 539-541.
- Neves, L. C., Frangopol, D. M. y Cruz, P. J. S., 2006c. Probabilistic lifetime-oriented multiobjective optimization of bridge maintenance: single maintenance type, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 132, no.6, pp. 991–1005.
- Newman, J. R., Raju I. S., 1981. An empirical stress intensity factor equation for the surface crack, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 15, no. 1-2, pp. 185-192.
- Okasha, N. M., y Frangopol D. M., 2009. Lifetime-oriented multi-objective optimization of structural maintenance considering system reliability, redundancy and life-cycle cost using GA, *Structural Safety*, vol. 31, no.6, pp. 483-489.
- Ortega, C., 2003. *Análisis de Riesgo y Confiabilidad de Estructuras. Una Aplicación en la Inspección de Plataformas Marinas*. Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma del Estado de México.
- Ortega, C., y De León, E., 2003. Development of a cost-benefit model for inspection of offshore jacket structures in Mexico, en *22<sup>th</sup> International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE*, Cancun, Mexico.
- Paris, P., Erdogan, F. A., 1963. Critical analysis of crack propagation laws, *Journal of Basic Engineering*, ASME, vol.85, pp.258-534.
- Petróleos Mexicanos (PEMEX), 2000. *Diseño y evaluación de plataformas marinas fijas en la sonda de Campeche*, NRF-003-PEMEX-2000, México.
- Pierson, W. J., Moskowitz, L. A., 1964. Proposed spectral form for full-developed wind sea based on the similarity law of S.A. Kitaigorodskii, *Journal of Geophysical Research*, vol. 69, no. 24, pp. 5181–5190.
- Rackwitz, R., 2000. Optimization – The basis of code-making and reliability verification. *Structural Safety*, vol. 22, no. 1, pp. 27-60.
- Rackwitz, R., 2001. Reliability analysis: a review and some perspectives, *Structural Safety*, vol. 23, pp. 365-395.
- Raine, A., 2000. The development of Alternating Current Field Measurement (ACFM) technology as a technique for the detection of surface breaking defects in conducting material and its use in commercial and industrial applications, en *15th World Conference on Non-Destructive Testing*, Rome.
- 
-

- 
- 
- Rainville, E. D., 1961. *Intermediate Course in Differential Equations*, John Wiley & Sons, INC., USA, September, pp. 144-148.
- Rainville, E. D. y Bedient, P. E., 1981. *Elementary differential equations*, London: Collier Macmillan Publishers, pp. 392-395.
- Ritger, P. D. y Rose, N. J., 1968. *Differential equations with applications*, USA: McGraw –Hill Book Company, pp. 216-217.
- Rosenblueth, E., y Mendoza, E., 1971. Reliability optimization in isostatic structures, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, vol. 97 no. 6, pp. 1625-1642.
- Rosenblueth, E., y Esteva, L., 1972. Reliability basis for some Mexican codes, *Probabilistic Design of Reinforced Concrete Buildings*, ACI Publication, SP-31, pp. 1-41.
- Rosenblueth, E., 1976. Optimum design for infrequent disturbances, *Journal of the Structural Division*, ASCE, vol. 102, no. ST9, pp. 1807-1825.
- Rosenblueth, E., 1986. Optimum reliabilities and optimum design, *Structural Safety*, vol. 3, no. 2 pp. 69-83.
- Ruiz, S. E., Tolentino, D., y Torres, M. A., 2014. Factor de confianza dependiente del tiempo para estructuras con deterioro causado por fatiga, *Ingeniería Investigación y Tecnología*, vol. XV, no. 3. [http://www.ingenieria.unam.mx/~revistafi/ejemplares/V15N3/V15N3\\_art.pdf](http://www.ingenieria.unam.mx/~revistafi/ejemplares/V15N3/V15N3_art.pdf)
- Santa-Cruz, S., y Heredia-Zavoni, E., 2011. Maintenance and decommissioning real options models for life-cycle cost-benefit analysis of offshore platforms, *Structure and Infrastructure Engineering*, vol. 7, no. 10, pp. 733-745.
- Schaffer, J. D., 1985. Multiple objective optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms, en *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, Lawrence Erlbaum, pp. 93-100.
- Silva-González, F. L., y Heredia-Zavoni, E., 2004. Effect of uncertainties on the reliability of fatigue damaged systems, en *International conference on offshore mechanics and arctic engineering*, vol. 2, pp. 427-434, Vancouver, Canada.
- Silva-González, F. L., y Heredia-Zavoni, E., 2007. Confiabilidad sísmica de plataformas marinas con daño por fatiga para la elaboración de planes de inspección basados en riesgo, *Revista de Ingeniería Sísmica*, no. 77, pp. 1-21.
- Skjong, R., 1985. Reliability based optimization of inspection strategies, en *ICOSSAR*, vol. 3, Kobe, Japan, pp. 614-618.
- Slater, L. J., 1966. *Generalized hypergeometric functions*, London: Cambridge university press, pp. 210-215.
- Sobczyk, K., Spencer F. B., 1992. *Random fatigue: from data theory*, Academic Press Inc.
- Srinivas, N., y Deb, K., 1994. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms, *Evolutionary Computation*, vol. 2, no.3, pp.221–248.
- Stacey, A., Sharp, J. V., y Nichols, N. W., 1996. Static strength assessment of cracked tubular joints, en *International conference on offshore mechanics and arctic engineering*, vol. 3, Vancouver, Canada, pp. 211-224.
- Stahl, B., 1986. Reliability engineering and risk analysis en *Planning and design of fixed offshore platforms*, B. McClelland y M. D. Reifel (editores), New York, Van Nostrand Reinhold Co.
- Straub, D., Sørensen, J. D., Goyet, J., y Faber, M. H., 2006. Benefits of risk based inspection planning for offshore structures, en *25<sup>th</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, OMAE, Hamburg, Germany.
- 
-

- 
- 
- Straub, D., 2009. Stochastic modeling of deterioration processes through dynamic Bayesian networks, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 135, no.10, pp. 1089-1099.
- Sørensen, J. D., Faber, M. H., Rackwitz R., y Thoft-Christensen, P., 1991. Modeling in optimal inspection and repair, en *10<sup>th</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering OMAE*, Stavenger, Noruega, pp. 281-288.
- Sørensen, J. D., y Ersdal, G., 2008. Risk based inspection planning of ageing structures, en *27<sup>th</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, OMAE, vol.2, Estoril, Portugal, pp. 399-408.
- The Marine Technology Directorate Limited (MTD), 1994. *Review of repairs to offshore structures and pipelines*, publication 94/102.
- The MathWorks, 2010. *Global optimization toolbox 3 user's guide*, Version 3.1.
- Thoft-Christensen, P., 1998. Assessment of the reliability profiles for concrete bridges, *Engineering structures*, vol. 20, no. 11, pp. 1004-1009.
- Thoft-Christensen, P., y Sørensen, J. D., 1987. Optimal strategies for inspection and repair of structural systems, *Civil Engineering Systems*, vol. 4, pp. 94-100.
- Tolentino, D., Ruiz, S. E., Torres, M. A., y Montiel, M. A., 2011. Confiabilidad de estructuras considerando el daño acumulado en el tiempo, *Revista de Ingeniería Sísmica*, no. 84, pp. 25-46.
- Tolentino, D., Ruiz, S. E., y Torres, M. A., 2012. Simplified closed-form expressions for the mean failure rate of structures considering structural deterioration, *Structure and Infrastructure Engineering*, vol. 8, no. 5, pp. 483-496.
- Tolentino, D., y Ruiz, S. E., 2013a. Time-dependent confidence factor for structures with cumulative damage, *Earthquake Spectra*, <http://dx.doi.org/10.1193/010912EQS008M>.
- Tolentino, D., y Ruiz, S. E., 2013b. Optimal interval for inspection and maintenance of structures, considering structural deterioration, *Engineering Structures*, aceptado condicionalmente para su publicación.
- Tolentino, D., y Ruiz, S. E., 2013c. Time intervals for maintenance of offshore structures based on multiobjective optimization, *Mathematical Problems in Engineering*, Artículo ID 125856, 15 paginas.
- Torres, M. A., 2006. *Criterios costo/beneficio para la inspección y mantenimiento de plataformas marinas*, Tesis de Doctorado, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, UNAM.
- Torres, M. A., y Ruiz, S. E., 2007. Structural reliability evaluation considering capacity degradation over time, *Engineering Structures*, vol. 29, pp. 2183-2192.
- Vamvatsikos, D., y Dolšek, M., 2011. Equivalent constant rates for performance-based seismic assessment of ageing structures, *Structural Safety*, vol. 33, no. 1, pp. 8-18.
- Wen, Y. K., y Kang, Y. J., 2001. Minimum building life-cycle cost design criteria. I. Methodology and II. Applications, *Journal of Structural Engineering*, vol. 127, no. 3, pp. 330-346.
- Yang, S-I., Frangopol, D. M., Kawakami, Y., y Neves, L. C., 2006. The use of lifetime functions in the optimisation of interventions on existing bridges considering maintenance and failure costs, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 91, no. 6, pp. 698-705.
- Yu, P. L., 1973. A class of solutions for group decision problems, *Management Science*, vol.19, no. 8, pp. 936-946.
- 
-



- 
- 
- Yun, S-Y., Hamburger, R. O., Cornell, A. C., y Foutch, D. A., 2002. Seismic performance evaluation for steel moment frames, *Journal Structural Engineering*, vol. 128, no. 4, pp. 534-545.
- Zacharenaki, A. E., Fragiadakis, M., y Papadrakakis, M., 2013. Reliability-based optimum seismic design of structures using simplified performance estimation methods, *Engineering Structures*, vol. 52, pp. 707-717.
- Zadeh, L., 1963. Optimality and non-scalar-valued performance criteria, *IEEE transactions on Automatic Control*, vol.8. pp.59–60.
- Zitzler, E., y Thiele, L., 1999. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol.3, No.4, pp. 257–271.

---

# APÉNDICE A

## FACTOR Y NIVEL DE CONFIANZA EN UN INTERVALO DE TIEMPO

Partiendo de la ecuación 16:

$$\eta_{F|x}(0, \Delta t) = \nu_0 \Delta t \quad (\text{A1})$$

Sustituyendo términos:

$$k(y_{\hat{C}|\Delta t})^{-r} \exp\left[\frac{r^2}{2b^2}(\sigma^2_{\ln D|y, \Delta t} + \sigma^2_{\ln C|\Delta t})\right] \exp(K_{x|\Delta t} \frac{r}{b} \sigma_{UT|\Delta t}) \Omega(0, \Delta t) = \nu_0 \Delta t \quad (\text{A2})$$

$$\text{Si } y_{\hat{C}|\Delta t} = \left[\frac{\hat{C}(\Delta t)}{a(\Delta t)}\right]^{\frac{r}{b}}$$

$$k\left[\frac{\hat{C}(\Delta t)}{a(\Delta t)}\right]^{-\frac{r}{b}} \exp\left[\frac{r^2}{2b^2}(\sigma^2_{\ln D|y, \Delta t} + \sigma^2_{\ln C|\Delta t})\right] \exp(K_{x|\Delta t} \frac{r}{b} \sigma_{UT|\Delta t}) \Omega(0, \Delta t) = \nu_0 \Delta t \quad (\text{A3})$$

$$[a(\Delta t)]^{-\frac{b}{r}} \left[\frac{\hat{C}(\Delta t)}{a(\Delta t)}\right]^{-\frac{r}{b}} \exp\left[\frac{r^2}{2b^2}(\sigma^2_{\ln D|y, \Delta t} + \sigma^2_{\ln C|\Delta t})\right] \exp(K_{x|\Delta t} \frac{r}{b} \sigma_{UT|\Delta t}) = \frac{\nu_0 \Delta t}{\Omega(0, \Delta t) k} \quad (\text{A4})$$

$$\hat{C}(\Delta t) \exp\left[-\frac{r^2}{2b^2}(\sigma^2_{\ln D|y, \Delta t} + \sigma^2_{\ln C|\Delta t})\right] \exp(-K_{x|\Delta t} \sigma_{UT|\Delta t}) = a(\Delta t) \left(\frac{\nu_0 \Delta t}{\Omega(0, \Delta t) k}\right)^{\frac{b}{r}} \quad (\text{A5})$$

$$\text{Si } \hat{D}^{\nu_0}(\Delta t) = a(\Delta t) \left(\frac{\nu_0}{k}\right)^{\frac{b}{r}}$$

---


$$\hat{C}(\Delta t) \exp \left[ -\frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y,\Delta t} + \sigma^2_{\ln C|\Delta t}) \right] = \hat{D}^{v_0}(\Delta t) \left( \frac{\Delta t}{\Omega(0,\Delta t)} \right)^{-\frac{b}{r}} \exp(K_{x|\Delta t} \sigma_{UT|\Delta t}) \quad (\text{A6})$$

Multiplicando ambos lados por  $X(\Delta t) = \exp \left[ -\frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{UD|\Delta t} + \sigma^2_{UC|\Delta t}) \right] = \exp \left( -\frac{r}{2b} \sigma^2_{UT|\Delta t} \right)$

$$\hat{C}(\Delta t) \exp \left[ -\frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y,\Delta t} + \sigma^2_{\ln C|\Delta t}) \right] X(\Delta t) = \hat{D}^{v_0}(\Delta t) \left( \frac{\Delta t}{\Omega(0,\Delta t)} \right)^{-\frac{b}{r}} \exp(K_{x|\Delta t} \sigma_{UT|\Delta t}) X(\Delta t) \quad (\text{A7})$$

Sustituyendo  $X(\Delta t)$  en ambos lados:

$$\hat{C}(\Delta t) \exp \left[ -\frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y,\Delta t} + \sigma^2_{\ln C|\Delta t}) \right] \exp \left[ -\frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{UD|\Delta t} + \sigma^2_{UC|\Delta t}) \right] = \hat{D}^{v_0}(\Delta t) \dots$$

$$\left( \frac{\Delta t}{\Omega(0,\Delta t)} \right)^{-\frac{b}{r}} \exp(K_{x|\Delta t} \sigma_{UT|\Delta t}) \exp \left( -\frac{r}{2b} \sigma^2_{UT|\Delta t} \right) \quad (\text{A8})$$

$$\hat{C}(\Delta t) \exp \left[ -\frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y,\Delta t} + \sigma^2_{\ln C|\Delta t} + \sigma^2_{UD|\Delta t} + \sigma^2_{UC|\Delta t}) \right] = \hat{D}^{v_0}(\Delta t) \left( \frac{\Delta t}{\Omega(0,\Delta t)} \right)^{-\frac{b}{r}} \dots$$

$$\exp \left( K_{x|\Delta t} \sigma_{UT|\Delta t} - \frac{r}{2b} \sigma^2_{UT|\Delta t} \right) \quad (\text{A9})$$

Agrupando términos relacionados con la capacidad de un lado y los términos relacionados con la demanda del otro lado, se tiene:

$$\hat{C}(\Delta t) \exp \left[ -\frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln C|\Delta t} + \sigma^2_{UC|\Delta t}) \right] = \hat{D}^{v_0}(\Delta t) \exp \left[ \frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y,\Delta t} + \sigma^2_{UD|\Delta t}) \right] \left( \frac{\Delta t}{\Omega(0,\Delta t)} \right)^{-\frac{b}{r}} \dots$$

$$\exp \left[ \sigma_{UT|\Delta t} \left( K_{x|\Delta t} - \frac{r}{2b} \sigma_{UT|\Delta t} \right) \right] \quad (\text{A10})$$

Si se considera que:

$$\phi = \exp \left[ -\frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln C|\Delta t} + \sigma^2_{UC|\Delta t}) \right]; \gamma = \exp \left[ \frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y,\Delta t} + \sigma^2_{UD|\Delta t}) \right] \quad (\text{A11})(\text{A12})$$


---

---


$$\Psi = \left( \frac{\Delta t}{\Omega(0, \Delta t)} \right)^{-\frac{b}{r}} \lambda_{conf}(0, \Delta t) = \exp \left[ \sigma_{UT|\Delta t} \left( K_{x|\Delta t} - \frac{r}{2b} \sigma_{UT|\Delta t} \right) \right] \quad (\text{A13})(\text{A14})$$

Finalmente la ecuación A10 queda como sigue:

$$\hat{C}(\Delta t) \cdot \phi = \hat{D}^{v_0}(\Delta t) \cdot \gamma \cdot \Psi \cdot \lambda_{conf}(0, \Delta t) \quad (\text{A15})$$

$$\lambda_{conf}(0, \Delta t) = \left[ \frac{\phi \hat{C}(\Delta t)}{\gamma \hat{D}^{v_0}(\Delta t)} \right] \Psi \quad (\text{A16})$$

---

---

# APÉNDICE B

## NÚMERO ESPERADO DE FALLAS EN UN INTERVALO DE TIEMPO

Partiendo de la ecuación 19 se tiene:

$$\eta_F(0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} k(y_{\hat{c}, \tau})^{-r} \exp \left\{ \frac{r^2}{2b(\tau)^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2(\tau) + \sigma_{\ln C}^2(\tau) + \sigma_{UD}^2(\tau) + \sigma_{UC}^2(\tau) \right] \right\} d\tau \quad (\text{B1})$$

Para resolver la integral de la ecuación B1 se considera lo que sigue:

- Las varianzas de las desviaciones estándar de la capacidad y de la demanda son constantes en el tiempo, por lo que  $\sigma_{\ln C}^2(\tau) = \sigma_{\ln C}^2$  y  $\sigma_{\ln D|y}^2(\tau) = \sigma_{\ln D|y}^2$
- Las incertidumbres epistémicas asociadas con la capacidad y con la demanda permanecen constantes en el intervalo de tiempo, o sea  $\sigma_{UD}^2(\tau) = \sigma_{UD}^2$  y  $\sigma_{UC}^2(\tau) = \sigma_{UC}^2$
- El parámetro  $b(\tau)$  se considera constante en el tiempo, por lo que  $b(\tau) = b$

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, la ecuación B1 queda como sigue:

$$\eta_F(0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} k(y_{\hat{c}, \tau})^{-r} \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} d\tau \quad (\text{B2})$$

Si  $y_{\hat{c}, \tau} = \left[ \frac{\hat{C}(\tau)}{a(\tau)} \right]^{\frac{1}{b}} = \left[ \frac{\alpha}{a} \right]^{\frac{1}{b}}$  la ecuación B2 queda como sigue:

$$\eta_F(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} \int_0^{\Delta t} \left[ \frac{\hat{C}(\tau)}{a(\tau)} \right]^{-\frac{r}{b}} d\tau \quad (\text{B3})$$

---



---

**CASO A: DEMANDA QUE VARÍA EN EL TIEMPO, MIENTRAS QUE LA CAPACIDAD ES INDEPENDIENTE DEL TIEMPO**

Resolviendo el caso A del Capítulo 1, la integral de la ecuación B3 se resuelve como sigue:

$$\bar{\eta}_{FD}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \int_0^{\Delta t} \left[ \frac{\alpha}{a + f\tau} \right]^{-\frac{r}{b}} d\tau \quad (B4)$$

$$\bar{\eta}_{FD}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \frac{b\alpha}{f(b+r)} \left[ -\left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{b+r}{b}} + \left( \frac{\alpha}{a+f\Delta t} \right)^{-\frac{b+r}{b}} \right] \quad (B5)$$

$$\bar{\eta}_{FD}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \cdot \frac{b\alpha}{f(b+r)} \left[ -\left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-1} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} + \left( \frac{\alpha}{a+f\Delta t} \right)^{-\frac{b+r}{b}} \right] \quad (B6)$$

$$\bar{\eta}_{FD}(0, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \cdot \frac{b\alpha}{f(b+r)} \left[ -\left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-1} + \left( \frac{\alpha}{a+f\Delta t} \right)^{-\frac{b+r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \right] \quad (B7)$$

Si se define:

$$\Omega_D(0, \Delta t) = \frac{b\alpha}{f(b+r)} \left[ -\left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-1} + \left( \frac{\alpha}{a+f\Delta t} \right)^{-\frac{b+r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \right] \quad (B8)$$

El número esperado de fallas que considera que la demanda varía en el tiempo, mientras que la capacidad estructural es independiente del tiempo, es como sigue:

$$\bar{\eta}_{FD}(0, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2) \right) \Omega_D(0, \Delta t) \quad (B9)$$

**CASO B: CAPACIDAD QUE VARÍA EN EL TIEMPO, MIENTRAS QUE LA DEMANDA ES INDEPENDIENTE DEL TIEMPO**

Resolviendo el caso B que se describe en el capítulo 1, la ecuación B3 queda como sigue:

$$\eta_{FC}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \int_0^{\Delta t} \left[ \frac{\alpha + \beta \tau}{a} \right]^{-\frac{r}{b}} d\tau \quad (\text{B10})$$

$$\eta_{FC}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \frac{ba}{(b-r)\beta} \left[ -\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{1-\frac{r}{b}} + \left(\frac{\alpha + \beta \Delta t}{a}\right)^{1-\frac{r}{b}} \right] \quad (\text{B11})$$

$$\eta_{FC}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \cdot \frac{ba}{(b-r)\beta} \left[ -\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{1-\frac{r}{b}} + \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{r}{b}} \left(\frac{\alpha}{a}\right) \left(1 + \frac{\beta \Delta t}{\alpha}\right)^{1-\frac{r}{b}} \right] \quad (\text{B12})$$

$$\eta_{FC}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \cdot \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{r}{b}} \frac{ba}{(b-r)\beta} \left[ -\left(\frac{\alpha}{a}\right) + \left(\frac{\alpha}{a}\right) \left(1 + \frac{\beta \Delta t}{\alpha}\right)^{1-\frac{r}{b}} \right] \quad (\text{B13})$$

$$\eta_{FC}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \cdot \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{r}{b}} \frac{ba}{(b-r)\beta} \left(\frac{\alpha}{a}\right) \left[ -1 + \left(1 + \frac{\beta \Delta t}{\alpha}\right)^{1-\frac{r}{b}} \right] \quad (\text{B14})$$

$$\eta_{FC}(0, \Delta t) = k \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \frac{b\alpha}{(b-r)\beta} \left[ -1 + \left(1 + \frac{\beta \Delta t}{\alpha}\right)^{1-\frac{r}{b}} \right] \quad (\text{B15})$$

Si se define:

$$\Omega_C(0, \Delta t) = \frac{b\alpha}{(b-r)\beta} \left[ -1 + \left(1 + \frac{\beta \Delta t}{\alpha}\right)^{1-\frac{r}{b}} \right] \quad (\text{B16})$$

La ecuación B3 resuelta para el caso en el que se considera sólo la variación de la capacidad estructural, mientras que la demanda es independiente del tiempo, es como sigue:

$$\eta_{FC}(0, \Delta t) = k \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2] \right\} \Omega_C(0, \Delta t) \quad (\text{B17})$$

---



---

### CASO C: CAPACIDAD (LINEAL) Y DEMANDA QUE VARIÁN EN EL TIEMPO

En el caso en el que se considera la variación tanto de la capacidad estructural (lineal) y la demanda dada una intensidad, la ecuación B3 se resuelve como sigue:

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} \int_0^{\Delta t} \left[ \frac{\alpha + \beta \tau}{a + f\tau} \right]^{-\frac{r}{b}} d\tau \quad (B18)$$

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} \cdot$$

$$\frac{b}{\beta(b-r)} \left[ -F(A, B; C; x) \left( \frac{a\beta}{-\alpha f + \beta a} \right)^{-\frac{r}{b}} \alpha \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} + \left( \frac{a\beta + f\beta \Delta t}{-f\alpha + a\beta} \right)^{-\frac{r}{b}} (\alpha + \beta \Delta t) \cdot \right. \\ \left. \left( \frac{\alpha + \beta \Delta t}{a + f\Delta t} \right)^{-\frac{r}{b}} F(A, B; C; x(\Delta t)) \right] \quad (B19)$$

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} \cdot$$

$$\frac{b\alpha}{\beta(b-r)} \left[ -F(A, B; C; x) \left( \frac{a\beta}{-\alpha f + \beta a} \right)^{-\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} + \left( \frac{a\beta + f\beta \Delta t}{-f\alpha + a\beta} \right)^{-\frac{r}{b}} \left( 1 + \frac{\beta \Delta t}{\alpha} \right) \cdot \right. \\ \left. \left( \frac{\alpha + \beta \Delta t}{a + f\Delta t} \right)^{-\frac{r}{b}} F(A, B; C; x(\Delta t)) \right] \quad (B20)$$

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} \cdot$$

$$\left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} \frac{b\alpha}{\beta(b-r)} \left[ -F(A, B; C; x) \left( \frac{a\beta}{-\alpha f + \beta a} \right)^{-\frac{r}{b}} + \left( \frac{a\beta + f\beta \Delta t}{-f\alpha + a\beta} \right)^{-\frac{r}{b}} \left( 1 + \frac{\beta \Delta t}{\alpha} \right) \cdot \right. \\ \left. \left( \frac{\alpha + \beta \Delta t}{a + f\Delta t} \right)^{-\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} F(A, B; C; x(\Delta t)) \right] \quad (B21)$$

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} \cdot$$


---



---



$$\left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \frac{b\alpha}{\beta(b-r)} \left( \frac{a\beta}{-\alpha f + \beta a} \right)^{\frac{r}{b}} \left[ -F(A, B; C; x) + \left( 1 + \frac{f\beta\Delta t}{\beta a} \right)^{\frac{r}{b}} \left( 1 + \frac{\beta\Delta t}{\alpha} \right) \cdot \left( \frac{\alpha + \beta\Delta t}{a + f\Delta t} \right)^{\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} F(A, B; C; x(\Delta t)) \right] \quad (B22)$$

Si se define:

$$\Omega_L(0, \Delta t) = \frac{b\alpha}{\beta(b-r)} \left( \frac{a\beta}{-\alpha f + \beta a} \right)^{\frac{r}{b}} \left[ -F(A, B; C; x) + \left( 1 + \frac{f\beta\Delta t}{\beta a} \right)^{\frac{r}{b}} \left( 1 + \frac{\beta\Delta t}{\alpha} \right) \cdot \left( \frac{\alpha + \beta\Delta t}{a + f\Delta t} \right)^{\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} F(A, B; C; x(\Delta t)) \right] \quad (B23)$$

El número esperado de fallas que considera la variación tanto de la capacidad (lineal) como de la demanda en un intervalo de tiempo, es como sigue:

$$\eta_{FC}(0, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} \Omega_L(0, \Delta t) \quad (B24)$$

#### CASO D: CAPACIDAD (NO-LINEAL) Y DEMANDA QUE VARÍAN EN EL TIEMPO

Resolviendo la ecuación B3 para el caso en el que tanto la capacidad estructural (no-lineal) como la demanda varían en el tiempo, se tiene lo siguiente:

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} \int_0^{\Delta t} \left[ \frac{\alpha + \beta\tau + \gamma\tau^2}{a + f\tau} \right]^{\frac{r}{b}} d\tau \quad (B25)$$

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} \cdot$$

$$\frac{ba}{(b+r)f} \left[ - \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \left( 1 - \frac{2a\gamma}{2a\gamma + f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})} \right) \right]^{\frac{r}{b}} \left( 1 + \frac{2a\gamma}{-2a\gamma + f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})} \right)^{\frac{r}{b}}.$$

---


$$F_1(X;Y,Y';Z;u;v) + \left(1 + \frac{f\Delta t}{a}\right) \left[\frac{\alpha + \beta\Delta t + \gamma\Delta t^2}{a + f\Delta t}\right]^{-\frac{r}{b}} \left(1 - \frac{2af\Delta t\gamma}{2a\gamma + f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \cdot \left(1 + \frac{2af\Delta t\gamma}{-2a\gamma + f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} F_1(X;Y,Y';Z;u(\Delta t);v(\Delta t)) \quad (B26)$$

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \exp\left\{\frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2]\right\}.$$

$$\frac{ba}{(b+r)f} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{r}{b}} \left[-\left(1 - \frac{2a\gamma}{2a\gamma + f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \left(1 + \frac{2a\gamma}{-2a\gamma + f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}}\right] \cdot F_1(X;Y,Y';Z;u;v) + \left(1 + \frac{f\Delta t}{a}\right) \left[\frac{\alpha + \beta\Delta t + \gamma\Delta t^2}{a + f\Delta t}\right]^{-\frac{r}{b}} \left(1 - \frac{2af\Delta t\gamma}{2a\gamma + f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \cdot \left(1 + \frac{2af\Delta t\gamma}{-2a\gamma + f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{r}{b}} F_1(X;Y,Y';Z;u(\Delta t);v(\Delta t)) \quad (B27)$$

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \exp\left\{\frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2]\right\}.$$

$$\frac{ba}{(b+r)f} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{r}{b}} \left(1 - \frac{2a\gamma}{2a\gamma + f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \left[-\left(1 + \frac{2a\gamma}{-2a\gamma + f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}}\right] \cdot F_1(X;Y,Y';Z;u;v) + \left(1 + \frac{f\Delta t}{a}\right) \left[\frac{\alpha + \beta\Delta t + \gamma\Delta t^2}{a + f\Delta t}\right]^{-\frac{r}{b}} \left(1 - \frac{2f\Delta t\gamma}{f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \cdot \left(1 + \frac{2af\Delta t\gamma}{-2a\gamma + f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{r}{b}} F_1(X;Y,Y';Z;u(\Delta t);v(\Delta t)) \quad (B28)$$

$$\eta_{FL}(0, \Delta t) = k \exp\left\{\frac{r^2}{2b^2} [\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2]\right\}.$$


---

$$\begin{aligned}
& \frac{ba}{(b+r)f} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{r}{b}} \left(1 - \frac{2a\gamma}{2a\gamma + f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \left(1 + \frac{2a\gamma}{-2a\gamma + f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \cdot \\
& \left[ -F_1(X; Y, Y'; Z; u; v) + \left(1 + \frac{f\Delta t}{a}\right) \left[\frac{\alpha + \beta\Delta t + \gamma\Delta t^2}{a + f\Delta t}\right]^{-\frac{r}{b}} \left(1 - \frac{2f\Delta t\gamma}{f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \cdot \right. \\
& \left. \left(1 + \frac{2f\Delta t\gamma}{f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{r}{b}} F_1(X; Y, Y'; Z; u(\Delta t); v(\Delta t)) \right] \quad (B29)
\end{aligned}$$

Si se define:

$$\begin{aligned}
\Omega_P(0, \Delta t) &= \left(1 - \frac{2a\gamma}{2a\gamma + f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \left(1 + \frac{2a\gamma}{-2a\gamma + f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \cdot \\
\frac{ba}{(b+r)f} & \left[ -F_1(X; Y, Y'; Z; u; v) + \left(1 + \frac{f\Delta t}{a}\right) \left[\frac{\alpha + \beta\Delta t + \gamma\Delta t^2}{a + f\Delta t}\right]^{-\frac{r}{b}} \left(1 - \frac{2f\Delta t\gamma}{f(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \cdot \right. \\
& \left. \left(1 + \frac{2f\Delta t\gamma}{f(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}\right)^{\frac{r}{b}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{r}{b}} F_1(X; Y, Y'; Z; u(\Delta t); v(\Delta t)) \right] \quad (B30)
\end{aligned}$$

El número esperado de fallas que considera de manera simultánea la variación de la capacidad estructural (no-lineal) y de la demanda al término de un intervalo de tiempo, es como sigue:

$$\pi_{FP}(0, \Delta t) = k \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left\{ \frac{r^2}{2b^2} \left[ \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2 \right] \right\} \Omega_P(0, \Delta t) \quad (B31)$$

---

# APÉNDICE C

## FUNCIONES ESPECIALES

Las funciones especiales han apoyado de gran forma al desarrollo de las matemáticas aplicadas debido a que se pueden resolver una gran diversidad de problemas en el campo de la estadística, investigación de operaciones, vibración de placas, conducción de calor, radiación, elasticidad, y la teoría cuántica, etc. Algunas funciones especiales son: la función hipergeométrica de Gauss, la función de Appell, la función G, la función H, la función hipergeométrica de Wright, las funciones de Humbert, etc. (Rainville, 1961; Ritger y Rose, 1968).

### FUNCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

La función hipergeométrica fue estudiada por primera vez por Gauss en 1812 deduciendo la siguiente ecuación diferencial:

$$x(1-x)y'' + [C - (A+B+1)x]y' - AB y = 0 \quad (C1)$$

Donde A, B y C son constantes. La ecuación C1 tiene singularidades regulares en  $x=0$  y  $x=1$  El método de Frobenius (Ritger y Rose, 1968) puede aplicarse para obtener soluciones cercanas a estos puntos. Cerca de  $x=0$  se tiene lo siguiente:

$$y(x) = (x-0)^\alpha [a_0 + a_1(x-0) + a_2(x-0)^2 + \dots + a_n(x-0)^n] \quad (C2)$$

$$y(x) = x^\alpha (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \quad (C3)$$

$$y(x) = a_0x^\alpha + a_1x^{\alpha+1} + a_2x^{\alpha+2} + \dots + a_nx^{\alpha+n} \quad (C4)$$

Simplificando la ecuación C4 se tiene:

---


$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n} \quad (C5)$$

La primera derivada de la ecuación C4 es como sigue:

$$y'(x) = a_0 \alpha x^{\alpha-1} + a_1 (\alpha+1) x^{\alpha} + a_2 (\alpha+2) x^{\alpha+1} + \dots + a_n (\alpha+n) x^{\alpha+n-1} \quad (C6)$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha+n) x^{\alpha+n-1} \quad (C7)$$

Se encuentra la segunda derivada de la ecuación C4 de acuerdo a lo siguiente:

$$y''(x) = a_0 (\alpha-1) \alpha x^{\alpha-2} + a_1 \alpha (\alpha+1) x^{\alpha-1} + a_2 (\alpha+2) (\alpha+1) x^{\alpha} + \dots + a_n (\alpha+n) (\alpha+n-1) x^{\alpha+n-2} \quad (C8)$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha+n-1) (\alpha+n) x^{\alpha+n-2} \quad (C9)$$

Sustituyendo las ecuaciones C5, C6 y C7 en la ecuación C1 se tiene:

$$x(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha+n-1) (\alpha+n) x^{\alpha+n-2} + [C - (A+B+1)x] \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha+n) x^{\alpha+n-1} - AB \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n} = 0 \quad (C10)$$

Haciendo algunos arreglos algebraicos en la ecuación C10 se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha+n-1) (\alpha+n) x^{\alpha+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha+n-1) (\alpha+n) x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha+n) C x^{\alpha+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha+n) (A+B+1) x^{\alpha+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n AB x^{\alpha+n} = 0 \quad (C11)$$

Agrupando términos se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(\alpha+n-1)(\alpha+n) + (\alpha+n)C] a_n x^{\alpha+n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha+n-1)(\alpha+n-2) + (A+B+1)(\alpha+n-1) + AB] a_{n-1} x^{\alpha+n-1} = 0 \quad (C12)$$


---

---


$$\sum_{n=1}^{\infty} \{[(\alpha+n-1)(\alpha+n)+(\alpha+n)C]a_n - [(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)+(A+B+1)(\alpha+n-1)+AB]a_{n-1}\}x^{\alpha+n-1} = 0 \quad (C13)$$

La ecuación C13 da la ecuación inicial

$$\alpha(\alpha-1)+C\alpha=0 \quad (C14)$$

Y la fórmula de recurrencia:

$$[(\alpha+n)(\alpha+n+C-1)a_n] - [(\alpha+n-1)(\alpha+n+A+B-1)+AB]a_{n-1} = 0 \quad (C15)$$

Resolviendo la ecuación inicial se tiene:

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{o} \quad \alpha_2 = 1 - C \quad (C16)$$

Analizando con  $\alpha_1 = 0$  y sustituyendo en la fórmula de recurrencia:

$$n(n+C-1)a_n - [(n-1)(n+A+B-1)+AB]a_{n-1} = 0 \quad (C17)$$

Despejando  $a_n$  de la ecuación C17 y haciendo algunos arreglos algebraicos:

$$a_n = \frac{[(A+n-1)(B+n-1)]a_{n-1}}{n(n+C-1)} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (C18)$$

Si  $a_0 = 1$ , entonces la solución que se obtiene es llamada serie hipergeométrica, usualmente designada por  $F(A, B; C; x)$  como sigue:

$$F(A, B; C; x) = 1 + \frac{AB}{1!C}x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{2!C(C+1)}x^2 + \dots + \frac{A(A+1)\cdots(A+n-1)B(B+1)\cdots(B+n-1)}{C(C+1)\cdots(C+n-1)n!}x^n \quad (C19)$$

Con la finalidad de lograr una buena aproximación en los resultados, en el presente trabajo se desarrolla la serie hipergeométrica con  $n = 5$ , quedando lo siguiente:

$$F(A, B; C; x) = 1 + \frac{AB}{C}x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{2C(C+1)}x^2 + \frac{A(A+1)(A+2)B(B+1)(B+2)}{6C(C+1)(C+2)}x^3 + \frac{A(A+1)(A+2)(A+3)B(B+1)(B+2)(B+3)}{24C(C+1)(C+2)(C+3)}x^4 +$$

---


$$\frac{A(A+1)(A+2)(A+3)(A+4)B(B+1)(B+2)(B+3)(B+4)}{120C(C+1)(C+2)(C+3)(C+4)}x^5 \quad (C20)$$

### FUNCIÓN DE APPELL

La función de Appell es un conjunto de series hipergeométricas de dos variables, dicha función generaliza la serie hipergeométrica de Gauss de una variable y fue introducida por Paul Appell en 1880 como sigue:

$${}_2F_1(X;Y;Z;u) {}_2F_1(X';Y';Z';v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u^p v^q \frac{(X)_p (X')_q (Y)_p (Y')_q}{(Z)_p (Z')_q p! q!} \quad (C21)$$

Los pares de productos de la ecuación C21  $(X)_p (X')_q$ ,  $(Y)_p (Y')_q$ , y  $(Z)_p (Z')_q$  se pueden reemplazar por un producto de tipo general como sigue:

$$(X)_{p+q}, (Y)_{p+q} \text{ y } (Z)_{p+q} \quad (C22)$$

Reemplazando los pares de productos se tiene lo siguiente:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u^p v^q \frac{(X)_{p+q} (Y)_{p+q}}{(Z)_{p+q} p! q!} \quad (C23)$$

Reduciendo la ecuación C23 se tiene:

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{q=0}^N u^p v^{N-q} \frac{(X)_N (Y)_N}{(Z)_N (N-p)! p!} \quad (C24)$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(X)_N (Y)_N (u+v)^N}{(Z)_N N!} \quad (C25)$$

$${}_2F_1(X;Y;Z;u+v) \quad (C26)$$

La ecuación C26 se le conoce como una serie ordinaria de Gauss (Slater 1966). Usando el teorema del binomio la ecuación C21 queda como sigue:

$$F_1(X;Y,Y';Z;u,v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u^p v^q \frac{(X)_{p+q} (Y)_p (Y')_q}{(Z)_{p+q} p! q!} \quad (C27)$$

---

Donde  $(X)_{p+q}$ ,  $(Y')_q$ ,  $(Y)_p$  y  $(Z)_{p+q}$  son símbolos Pochhammer que representan el aumento factorial y se pueden representar utilizando la función Gamma como sigue:

$$(X)_{p+q} = \frac{\Gamma(p+q+X)}{\Gamma(X)} \quad (C28)$$

$$(Y)_p = \frac{\Gamma(p+Y)}{\Gamma(Y)} \quad (C29)$$

$$(Y')_q = \frac{\Gamma(q+Y')}{\Gamma(Y')} \quad (C30)$$

$$(Z)_{p+q} = \frac{\Gamma(p+q+Z)}{\Gamma(Z)} \quad (C31)$$

Sustituyendo las ecuaciones C28, C29, C30 y C31, la ecuación C27 queda como sigue:

$$F_1(X; Y, Y'; Z; u, v) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} x^p y^q \frac{\Gamma(p+q+X) \Gamma(p+Y) \Gamma(q+Y')}{\Gamma(X) \Gamma(Y) \Gamma(Y')} \frac{\Gamma(p+q+Z)}{\Gamma(Z)} \frac{1}{p!q!} \quad (C32)$$

La ecuación C32 se le conoce como serie de Appell, donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función Gamma,  $Y$ ,  $Y'$ ,  $u$  y  $v$  son números reales,  $X$  y  $Z$  deben ser numero enteros. Los valores de  $p$  y  $q$  dependen del caso a analizar, para el caso en estudio los valores de  $p$  y  $q$  pueden tomar valores mayores o iguales que 2000 para obtener buenas aproximaciones.



---

# APÉNDICE D

## SIMULACIÓN DEL OLEAJE

Las plataformas marinas continuamente se enfrentan a condiciones ambientales hostiles que van degradando sus propiedades mecánicas y que podrían producir su colapso, debido a esto es conveniente estudiar los fenómenos que continuamente dañan a la estructura. El oleaje es uno de los principales fenómenos que atacan y deterioran a una plataforma marina. El viento se atribuye como uno de los principales fenómenos que producen olas (este trasmite energía al agua generando olas con diferentes alturas, periodos y direcciones).

Una manera de describir la energía contenida en el mar, transferida por las fuerzas del viento es mediante el espectro de Pierson-Moskowitz (1964). Estos autores estudiaron los espectros de oleaje del Atlántico Norte y desarrollaron una fórmula para representar estados de mar. El espectro depende de la frecuencia,  $\omega$ , y de la velocidad del viento. La expresión de la densidad espectral,  $S(\omega)$ , está dada por la siguiente expresión:

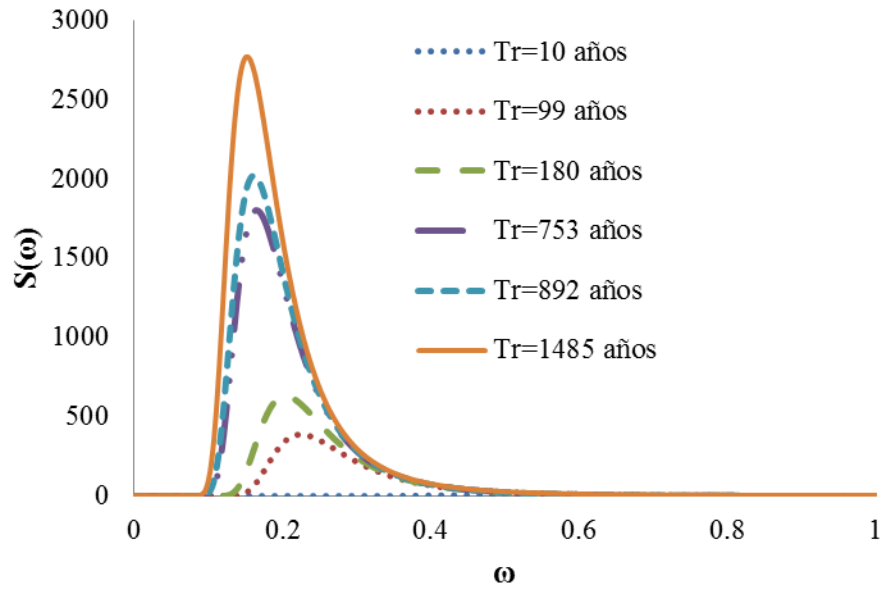
$$S(\omega) = \frac{Ag^2}{\omega^5} \exp \left[ -B \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^4 \right] \quad (D1)$$

donde:

$$\omega_0 = \frac{g}{U} \quad (D2)$$

$$U = V_{10} \left( \frac{19.5}{10} \right)^{0.099} \quad (D3)$$

Donde  $A=0.0081$ ;  $B=0.74$ ;  $\omega$  es la frecuencia de excitación;  $U$  es la velocidad del viento a una altura de 19.5m sobre el N.M.M. (debido a que el modelo se encuentra referido a dicha altura);  $V_{10}$  es la velocidad el viento a una altura de 10m sobre N.M.M;  $g$  es la aceleración de la gravedad. A partir de los valores obtenidos en la norma de PEMEX de las velocidades máximas de viento a una altura de 10 m sobre el nivel medio del mar para el área de Akal en la sonda de Campeche, se construye el espectro de Pierson-Moskowitz para diferentes periodos de retorno,  $T_R$  (ver figura D1).



**Figura D1.** Espectros de Pierson-Moskowitz para diferentes periodos de retorno.

Se supone que la elevación unidireccional de la superficie del mar,  $h$ , es un proceso estacionario de banda angosta, gaussiano y homogéneo, que puede expresarse como una superposición lineal de ondas regulares mediante la ecuación A4.

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i \text{sen}(\omega_i t + \phi_i) \quad (\text{D4})$$

$$A_i = \sqrt{2S_i(\omega)\Delta\omega_i} \quad (\text{D5})$$

donde  $\phi_i$  es el ángulo de fase con distribución uniforme entre 0 y  $2\pi$ ;  $S_i(\omega)$  es el valor de la densidad espectral en la frecuencia  $\omega_i$ ;  $\Delta\omega_i$  es el ancho de la banda para una frecuencia aproximada.

---

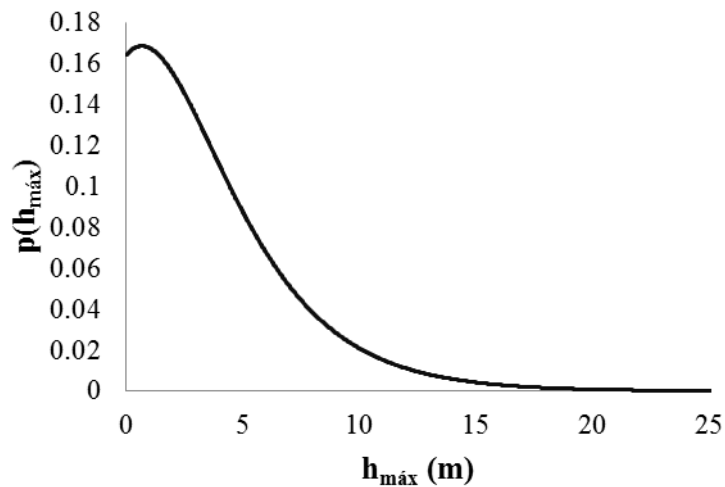
---

## PROBABILIDAD DE ALTURA DE OLA

Con la finalidad de simular alturas de ola máxima,  $h_{m\acute{a}x}$ , es necesario obtener su funci3n de probabilidades, por lo que se deriva la curva de peligro de oleaje y se normaliza de tal manera que el 1rea bajo la curva sea igual a la unidad. La expresi3n obtenida es de la forma:

$$Y(y) = \frac{-a \exp[-a(y-u)] \exp[-\exp[-a(y-u)]]}{1 - \exp[-\exp(a \cdot u)]} \quad (D6)$$

Donde  $Y$  representa la altura m1xima de ola,  $h_{m\acute{a}x}$ , los valores de  $a$  y  $u$  son los mismos que se obtuvieron para ajustar la curva de peligro de oleaje (Capítulo 2). En la figura D2 se muestra la curva de distribuci3n de probabilidades de la altura m1xima de ola.



**Figura D2.** Funci3n de densidad de probabilidades de la altura m1xima de ola,  $h_{m\acute{a}x}$ .

---

---

# APÉNDICE E

## ANÁLISIS DE FATIGA

### ECUACIÓN MODIFICADA PARA EL CÁLCULO DEL CRECIMIENTO DE GRIETA PARA CARGA ALEATORIA

Con la finalidad de utilizar las ecuaciones que describen el crecimiento de la grieta para el caso en el que se considera que un elemento estructural se encuentra sujeto a carga aleatoria que varía con el tiempo, Sobczyk y Spencer (1992) consideran que los esfuerzos aleatorios aplicados a la estructura pertenecen a un proceso estocástico,  $S(t)$ , con media,  $m_s(t)$ , y función de corrección

$K_S(t_1, t_2)$  conocidas y que la raíz cuadrática media,  $S_{rms}(t)$ , se calcula como  $S_{rms}(t) = [K_S(t, t)]^{\frac{1}{2}}$ .

Si el proceso  $S(t)$  es estacionario, la media y la raíz cuadrática media son constantes  $m_s(t) = m_s$  y  $S_{rms}(t) = S_{rms}$ .

El parámetro que controla el crecimiento de la grieta por fatiga sometida a carga cíclica es el intervalo del factor de intensidad,  $\Delta K$ . Varios autores sugieren que dicho factor debe ser igual a  $2 \cdot S_{rms}$ . Sin embargo, una estimación más adecuada, es el rango medio,  $S_{mr}$ , del proceso aleatorio  $S(t)$  (Sobczyk y Spencer, 1992), como sigue:

$$S_{mr} = S_{máx} - S_{mín} \quad (E1)$$

donde

$$S_{máx} = m_s + Z \quad \text{y} \quad S_{mín} = m_s - Z \quad (E2)$$

donde  $Z$  es la altura aleatoria de los picos con cierta distribución de probabilidad  $f(z)$ . Siguiendo la suposición de que el proceso  $S(t)$  es estacionario, gaussiano con media cero y varianza  $\sigma_s^2 = \lambda_0$ . De acuerdo a lo anterior,  $f(z)$  queda como sigue:

$$f_{m\acute{a}x}(z) = \frac{z\varphi}{\lambda_0} + \frac{z\sqrt{1-\epsilon^2}}{\lambda_0} \exp\left(-\frac{z^2}{2\lambda_0}\right) \Phi\left(\frac{z\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon\sqrt{\lambda_0}}\right) \quad (E3)$$

$$\epsilon = \sqrt{1-\alpha^2} \quad ; \quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_0\lambda_4}} \quad ; \quad \lambda_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k g(x) d\omega \quad (E4) \quad (E5) \quad (E6)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro de ancho espectral;  $\alpha$  es un factor de irregularidad que representa la relación entre la frecuencia de los cruces por cero positivos y la frecuencia de los picos;  $\lambda_k$  son los momentos espectrales;  $\varphi$  es la función de densidad de probabilidad normal estándar;  $\Phi$  es la función de distribución de probabilidad normal estándar.

Como resultado de la integración, el rango medio de esfuerzos,  $S_{mr}$ , que como sigue:

$$S_{mr} = 2S_{rms} \sqrt{\frac{\pi}{2}(1-\epsilon^2)} \quad (E7)$$

Para un proceso de banda angosta  $\epsilon \rightarrow 0$ , por lo que

$$S_{mr} = 2S_{rms} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi} S_{rms} \quad (E8)$$

Otra modificación que sugieren Sobczyk y Spencer (1992) tiene que ver con el concepto de ciclo que tiene un papel fundamental en el análisis convencional de fatiga. La ecuación empírica del crecimiento de grietas generalmente se expresa como  $\frac{dA}{dN}$  donde  $N$  es el número de ciclos.

Considerando que el proceso es de banda angosta, existe una frecuencia predominante. Esta frecuencia,  $\omega_e$ , se puede definir a partir del número de cruces por cero con pendiente positiva.

Tomando en cuenta lo anterior, el crecimiento de grieta promedio en un elemento estructural sujeto a carga aleatoria puede representarse mediante la ecuación diferencial modificada (Paris-Erdogan, 1963; Sobczyk y Spencer, 1992) como sigue:

$$\frac{da'}{dt} = C(\Delta K_{mr})^m \nu' \quad (E9)$$

$$\Delta K_{mr} = Y S_{mr} \sqrt{\pi a'} \quad (E10)$$

donde  $\Delta K_{mr}$  es el intervalo de intensidad de esfuerzo medio,  $C$  y  $m$  son parámetros que dependen de las características del material  $\nu'$  es la tasa de cruces positivos por cero en un cierto tiempo,  $Y$  es el factor de corrección geométrica (Newman y Raju, 1981), y  $a'$  es el tamaño de la grieta. Como se puede apreciar, la carga aleatoria es reemplazada por una carga cíclica equivalente cuya amplitud y frecuencia se encuentran expresadas en función de las propiedades medias del proceso aleatorio

original. Las modificaciones que realiza este método son bastante aceptables desde el punto de vista práctico.

## ESFUERZOS EFECTIVOS

Los esfuerzos efectivos en los puntos críticos,  $\sigma_{ef}$ , se calculan considerando las propiedades de la sección tubular, los elementos mecánicos, factores de concentración de esfuerzos y las coordenadas del punto crítico con respecto al centro de gravedad de la sección en sus ejes locales ( $z$ ,  $y$ ), como sigue:

$$\sigma_{ef}(h, T_R) = FCE_{ax} \frac{P}{A} + FCE_{fep} \frac{M_{fep}}{I} z + FCE_{ffp} \frac{M_{ffp}}{I} y \quad (E11)$$

donde  $h$  es la altura máxima de ola;  $T_R$  es el periodo de retorno de interés;  $P$  es la carga axial actuante en la sección;  $A$  es el área transversal de la sección;  $FCE$  es el factor de concentración de esfuerzos ante carga axial ( $ax$ ), flexión en el plano ( $fep$ ) y fuera del plano de flexión ( $ffp$ ) y estos tiene un valor igual a 6 (API, 1993);  $M$  son los momentos que actúan en el plano ( $fep$ ) y fuera del plano de flexión ( $ffp$ ) e  $I$  es el momento de inercia en la sección.

## ESFUERZOS DEBIDOS A OLAJE DE SERVICIO

Los esfuerzos efectivos por oleaje de servicio se obtienen considerando las alturas de ola significativa de los estados de mar proporcionados en la norma PEMEX (2000) para el sitio de Akal (ver tabla E1). Para cada altura de ola significativa se seleccionó el estado de mar con mayor probabilidad de ocurrencia (valores en rojo). Una vez seleccionada dicha probabilidad, se obtiene su correspondiente periodo (columna 1 de la tabla E1). De acuerdo a lo anterior, en este estudio se obtienen los esfuerzos efectivos por oleaje de servicio para trece estados de mar. Se consideró la teoría lineal de oleaje de Airy para determinar la aceleración y la velocidad de las partículas de agua.

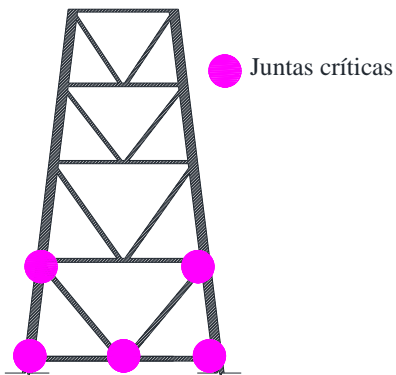
**Tabla E1.** Información oceanográfica en condiciones de servicio mostrada en la norma PEMEX (2000) para e sitio Akal.

Periodo pico (s)	ALTURA DE OLA SIGNIFICANTE (m)													Total:		
	0	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	5.75		6.25	
0.0-0.9999																
1.0-1.9999	0.0003	0.0315														0.0318
2.0-2.9999		0.1695	0.0173													0.1867
3.0-3.9999		0.0019	0.0401													0.0591
4.0-4.9999		0.0145	0.2797	0.0212												0.3154
5.0-5.9999		0.0119	0.0531	0.0866	0.0042	0.0001										0.1559
6.0-6.9999		0.0003	0.0025	0.0242	0.0136	0.0009										0.0667
7.0-7.9999		0.0046	0.0189	0.0282	0.0285	0.0072	0.0005									0.0088
8.0-8.9999		0.0008	0.0068	0.0091	0.0159	0.0177	0.0107	0.0004								0.0615
9.0-9.9999		0.0001	0.0008	0.0016	0.0023	0.0027	0.0074	0.0009	0.0021	0.0002						0.0262
10.0-10.9999						0.0003	0.0003	0.0014	0.0016	0.0021	0.0008					0.0065
11.0-11.9999										0.0003	0.0009	0.0005	0.0001			0.0019
12.0-12.9999													0.0001	0.0002	0.0003	0.0003
Total:	0.0003	0.2549	0.4417	0.1708	0.0646	0.029	0.019	0.0108	0.0038	0.0026	0.016	0.0005	0.0002	0.0002	1.0000	

## SIMULACIÓN DE GRIETAS POR FATIGA

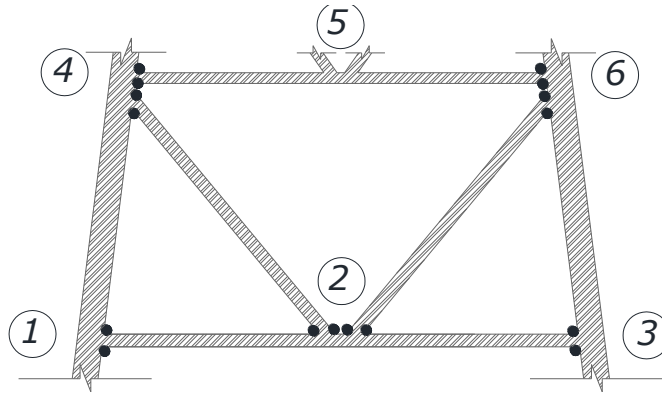
Debido a la naturaleza dinámica de las olas de mar, la plataforma marina está sometida a una secuencia interminable de ciclos de carga y descarga, provocando una concentración de esfuerzos en las juntas dando lugar a que se presente un crecimiento de grietas en ciertos puntos debidos a la fatiga. A este fenómeno se le atribuye principalmente que las plataformas marinas incurran en un comportamiento de desempeño no deseado, además de la fatiga existen otros fenómenos (ej. corrosión, pandeo, abolladuras, etc.) que con el paso del tiempo a corto o largo plazo pueden llevar a la estructura a desarrollar niveles de desempeño no deseados. Este estudio se limita solo a estimar el deterioro estructural en el tiempo considerado como medida de daño el crecimiento de grietas causadas por fatiga, por lo que en este apéndice se presenta el procedimiento dividido en dos partes, la primera corresponde a una serie de pasos para conocer las variables que se requiere la ecuación modificada de (Paris y Erdogan, 1963; Sobczyk y Spencer, 1992), y la segunda parte corresponde al procedimiento de simulación de grieta. De acuerdo a lo anterior, se presenta la primera parte del criterio como sigue:

1. Se identifican aquellas juntas que aportan mayor capacidad global a la estructura (ver figura E1), el procedimiento para la obtención de dichas juntas se describe en el capítulo 2.



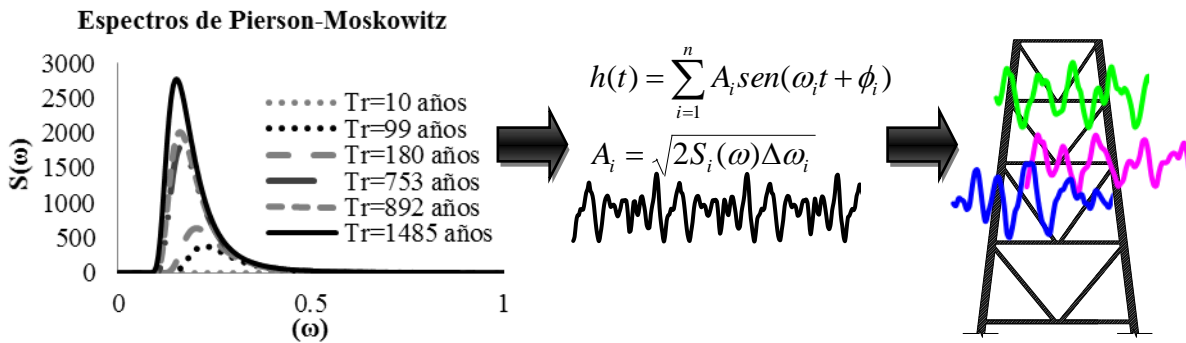
**Figura E1.** Juntas críticas de la plataforma marina en estudio.

2. Una vez identificadas las juntas que proporcionan mayor capacidad global (juntas críticas) se determinan los puntos críticos en donde se estimara el crecimiento de grieta (ver figura E2).



**Figura E2.** Puntos críticos de las juntas críticas.

3. Se somete a la plataforma marina a una serie de análisis dinámicos paso a paso utilizando un conjunto de oleajes simulados (ver apéndice D). En el análisis también se consideran las velocidades de corrientes marinas. En la figura E3 se muestra un esquema de lo antes mencionado.



**Figura E3.** Esquema para llevar a cabo los análisis dinámicos paso a paso.

4. Se obtienen las historias de los elementos mecánicos (fuerza axial y momento flexionante) de las juntas críticas.
5. Se calculan los esfuerzos efectivos,  $\sigma_{ef}$ , utilizando la ecuación E11.
6. Considerando que las historias de esfuerzos pertenecen a un proceso estocástico,  $S(t)$ , con media,  $m_s(t)$ , y función de corrección  $K_S(t_1, t_2)$  conocidas. El intervalo medio de esfuerzos efectivos se calcula con la ecuación E8, donde la raíz cuadrática media,  $S_{rms}$ , se obtiene como  $S_{rms} = \text{var}[\sigma_{ef}]$ .
7. Se obtiene la tasas de cruces por cero con pendiente positiva,  $v'$ , a partir de la historia de esfuerzos efectivos,  $\sigma_{ef}$ , por lo que el número de ciclos,  $N$ , en el tiempo  $t$  es como sigue:

$$N = v't \tag{E12}$$



8. Se repiten los pasos 3-7 para diferentes alturas de ola máxima asociadas a distintos periodos de retorno.
9. Se obtienen los valores medios y sus respectivas desviaciones estándar del intervalo medio de esfuerzos,  $S_{mr}$ , y la tasa de cruces por cero positivas,  $v'$ . El intervalo medio de esfuerzos se considera que sigue una distribución de Raleigh, por lo que se utilizan las siguientes expresiones:

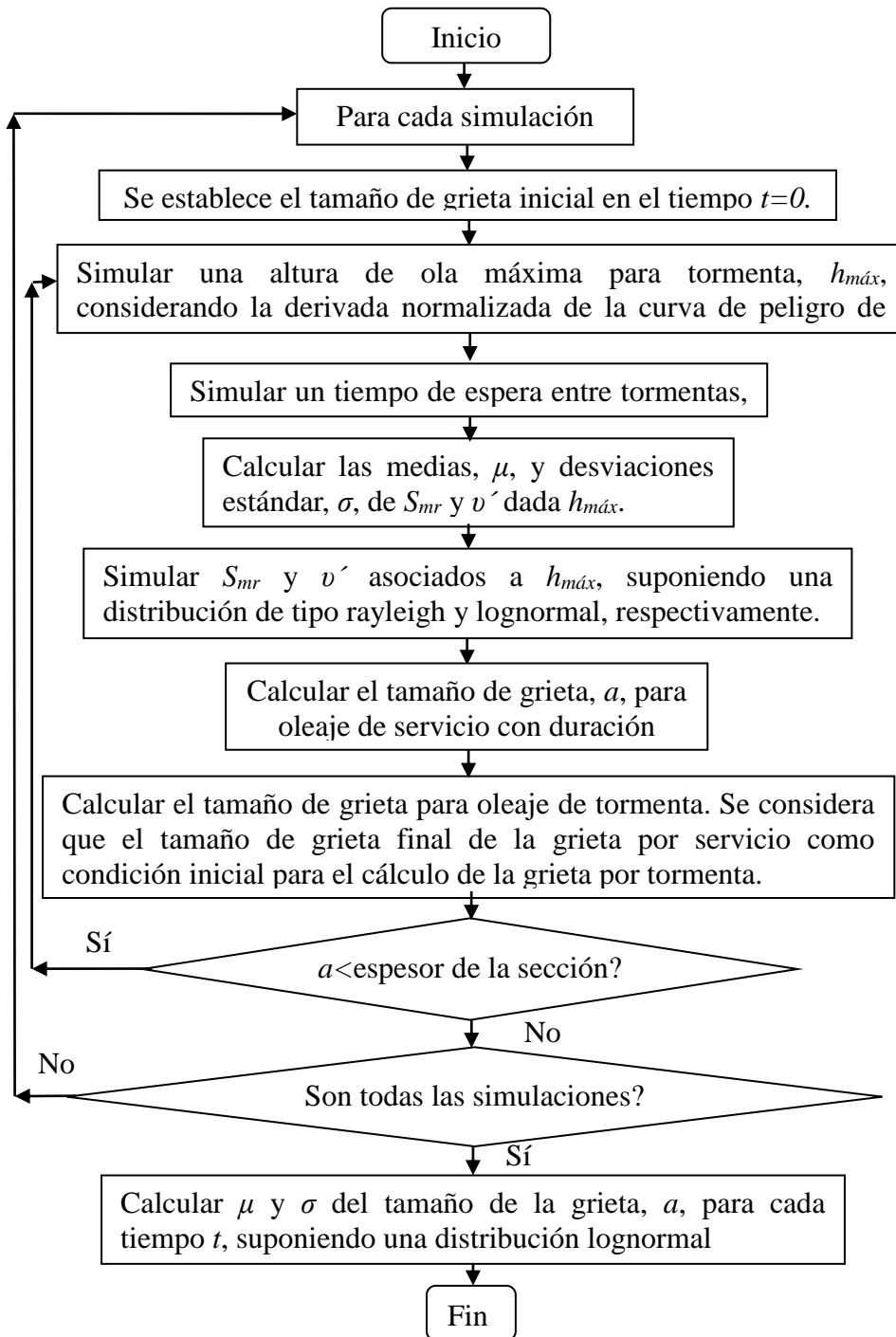
$$\hat{s}_{mr} = b\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad \sigma_{s_{mr}} = \frac{4-\pi}{2}b^2 \quad (E13)$$

donde  $b = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=0}^n S_{mr_i}^2}$ . Para la tasa de cruces por cero positiva se considera que esta sigue una distribución de tipo lognormal, por lo que se usan las siguientes expresiones:

$$\hat{v}' = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln v_i'}{n}\right) \quad ; \quad \sigma_{v'} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (\ln v_i' - \ln \hat{v}')^2}{n-1}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (E14)$$

10. Los valores medios del intervalo de esfuerzos medios,  $S_{mr}$ , y de la tasa de cruces por cero positivas,  $v'$ , se ajustan a la forma  $a(h_{m\acute{a}x})^b$ .

Para las simulaciones de crecimiento de grietas se supone que las tormentas siguen un proceso de Poisson y que el tiempo de espera entre tormentas sigue una distribución exponencial. También se considera que el tiempo de duración del oleaje de servicio,  $t_{ser}$ , es igual al tiempo de espera entre tormentas,  $t_{tor}$ . Los valores de  $a_0$ ,  $C$  y  $m$  se toman del trabajo de Silva-González y Heredia-Zavoni (2004). En la figura E4 se muestra un diagrama de bloques del procedimiento para el cálculo del crecimiento de grieta considerando oleaje de servicio y de tormenta.



**Figura E4.** Procedimiento de simulación de crecimiento de grietas considerando oleaje de servicio y tormenta.

# APÉNDICE F

## ARTÍCULO EN PRENSA PARA SU PUBLICACIÓN EN LA REVISTA *EARTHQUAKE SPECTRA*

Tolentino, D., y Ruiz, S. E., 2013a. Time-dependent confidence factor for structures with cumulative damage, *Earthquake Spectra*, <http://dx.doi.org/10.1193/010912EQS008M>

# Time-dependent confidence factor for structures with cumulative damage

Dante Tolentino <sup>a)</sup> and Sonia E. Ruiz <sup>b)</sup> M.EERI

An approach to evaluate the confidence factor implicit in structures over an interval of time considering that the structural capacity and the structural demand vary simultaneously over time is proposed. A new closed-form mathematical expression of the confidence factor over a time interval is used, assuming that the structural capacity degradation is represented by a *second degree polynomial* function in the total interval. The formulation is made in accordance with the *Demand and Capacity Factor Design Format*. Confidence factors at the end of different time intervals are evaluated for an old 10-story building. The confidence factors and their confidence levels calculated under the assumption that the structural capacity degradation follows a *linear* function, and alternatively, a *polynomial* function, are compared. The maximum difference on the confidence factors assuming both types of functions is 5% after 100 years of structure construction, which represents a small difference for the engineering practice.

## INTRODUCTION

The evaluation of the reliability of a structure over a given interval of time is very important for engineers in charge of preparing inspection and maintenance plans, or for engineers designing structures with prescribed reliability requirements at the end of a time interval.

- 
- a) Graduate student, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Coyoacán, 04510, México, D.F., [DTolentinoL@iingen.unam.mx](mailto:DTolentinoL@iingen.unam.mx)
  - b) Professor, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Coyoacán, 04510, México, D.F., [SRuizG@iingen.unam.mx](mailto:SRuizG@iingen.unam.mx)

Several approaches to evaluate the reliability of structures with cumulative damage have been proposed in the literature, for example: a) Markov processes (Montes-Iturrizaga et al. 2003, Straub 2009), b) Monte Carlo simulation (Díaz and Esteva 1997), c) Directional simulation (Melchers 1992, Mori and Ellingwood 1993), d) FORM/SORM approaches (Rackwitz 2001), e) Closed-form mathematical expressions (Torres and Ruiz 2007, Celarec et al. 2011, Vamvatsikos and Dolšek 2011, Tolentino et al. 2012). Frangopol et al. (2004) make a general review of probabilistic models to evaluate life cycle of structures with structural deterioration.

None of the approaches previously mentioned uses closed-form mathematical expressions to evaluate the structural reliability assuming that the structural capacity degradation is represented by a non-linear function in the total interval of interest. The advantage of using closed-form expressions is the possibility of evaluating the structural reliability without having to perform numerical integrations (although some approximations need to be introduced due to the hypotheses used in the formulation).

In the present study the structural reliability is represented by both the confidence factor,  $\lambda_{conf}$ , and its confidence level,  $K_x(t)$ , which are expressed by means of closed-form mathematical expressions. An advantage of the expressions proposed here is that they are presented in a conventional checking format that is familiar to engineers. The format is similar to that proposed by Cornell et al. 2002. However, the expressions used in this paper are extended in order to consider the degradation in time of the structural properties due to the effect of external actions.

With the aim of estimating both the confidence factor,  $\lambda_{conf}$ , and its confidence level,  $K_x(t)$ , as functions of time, a new mathematical expression for evaluating the expected mean value of the number of failures over a time interval is proposed. This expression considers that both the structural capacity and the structural demand vary simultaneously in time. It is assumed that the structural capacity degradation is represented by a *second-degree polynomial* function in the total interval of interest.

The approach proposed by Cornell et al. 2002, together with the closed-form expressions proposed herein, are applied to an old 10-story, 3-bay building subjected to seismic ground

motions. The structural capacity degradation is assumed to be governed by two alternative models: a) linear and b) non-linear (*polynomial*). The influence of both (linear and non-linear degradation capacity functions) on the confidence factors and on their confidence levels, at the end of different time intervals (50, 100 and 150 years) is evaluated. Results show that, for the case analyzed, the assumption of linear capacity degradation leads to confidence factor values close to those calculated assuming a non-linear model.

## **ORIGINAL FORMULATION OF THE CONFIDENCE FACTOR $\lambda_{conf}$** **(STRUCTURE WITHOUT DETERIORATION)**

The confidence factor and its corresponding confidence level proposed by Cornell et al. (2002) were originally introduced for the evaluation of structures (Cornell 1996, *FEMA 351* 2000, Yun et al. 2002). The original expressions proposed by Cornell et al. (2002) did not take into account the effect of the structural deterioration. Later, approaches that considered deterioration were proposed (Torres and Ruiz 2007, Vamvatsikos and Dolšek 2011, Celarec et al. 2011, Tolentino et al. 2012).

The expected value of the annual failure rate,  $\bar{v}_F$ , obtained by the simplified method proposed by Cornell et al. (2002) is given by:

$$\bar{v}_F = k(y_{\hat{C}})^{-r} \exp\left(\left(r^2 / 2b^2\right) \left(\sigma_{\ln D|y_c}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2\right)\right) \quad (1)$$

where  $y_{\hat{C}} = [\hat{C}/a]^{1/b}$  is the seismic intensity associated to the median of the capacity,  $\hat{C}$ ;  $\sigma_{\ln D|y_c}^2$  and  $\sigma_{\ln C}^2$  are the variances of the natural logarithm of the demand,  $D$ , given an intensity,  $y$ , and of the structural capacity,  $C$ , respectively;  $\sigma_{UD}^2$  and  $\sigma_{UC}^2$  represent the epistemic uncertainties associated to the demand and the capacity, respectively;  $a$  and  $b$  are shape parameters used to define the median of the demand given an intensity,  $y$ .

Equation 1 is based on the Total Probability Theorem (Benjamin and Cornell 1970). This equation takes into account all the possible intensities that can occur at the site, as well as the conditional probability of structural failure for a given intensity level, under the following assumptions (Jalayer and Cornell 2003):

i) The seismic hazard curve,  $\nu(y)$ , can be represented, for the intensity of interest, by means of the expression  $\nu(y) = ky^{-r}$ , where  $k$  and  $r$  are shape parameters.

ii) The median of the structural demand,  $\hat{D}$ , is represented as a function of the intensity,  $y$ , by the expression  $\hat{D} = a \cdot y^b$ .

iii) The structural demand associated to a given intensity,  $y$ , has a lognormal distribution function (Rosenblueth and Esteva 1972) with the standard deviation of its natural logarithm given by  $\sigma_{\ln D|y_c}$  (it is noticed that this value is independent of the intensity  $y$ ).

iv) The structural capacity has a lognormal distribution function with standard deviation of its natural logarithm given by  $\sigma_{\ln C}$ .

With the aim of having a formulation familiar to engineers, Cornell et al. (2002) assumed that the annual probability of the performance level not being exceeded,  $\nu_F$ , is equal to a target acceptable value of  $\nu_F$ , called  $\nu_0$ . On this basis, and making some algebraic arrangements, they obtained an expression similar to that used by the *Load and Resistance Factor Design* (LRFD) format (Ellingwood 1978):

$$\phi \hat{C} \geq \gamma \hat{D}^{\nu_0} \quad (2)$$

where

$$\phi = \exp\left[-(k/2b)\sigma_{CT}^2\right] \quad \gamma = \exp\left[(k/2b)\sigma_{DT|y}^2\right] \quad (3)$$

where  $\sigma_{CT}^2 = \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UC}^2$  and  $\sigma_{DT|y}^2 = \sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{UD}^2$  are the total uncertainties related to capacity ( $C$ ) and demand ( $D$ ), respectively;  $\hat{D}^{\nu_0}$  represents the median of demand for a given intensity  $y_{\nu_0}$  which is defined as the intensity level with annual probability  $\nu_0$  of being exceeded.  $\hat{D}^{\nu_0}$  is expressed as:

$$\hat{D}^{\nu_0} = a(y_{\nu_0})^b \quad (4)$$

From the previous formulation, the confidence factor  $\lambda_{conf}$  is obtained:

$$\lambda_{conf} = \hat{\phi} \hat{C} / \gamma \hat{D}^{\nu_0} \quad (5)$$

If  $\lambda_{conf}$  exceeds unity, it indicates that the structure has a high confidence to develop a desired performance. If  $\lambda_{conf}$  is less than unity, it indicates that the confidence level is low.

The formulation proposed by Cornell et al. (2002) associates the confidence factor  $\lambda_{conf}$  with the level of confidence that the true (but uncertain) annual failure rate is less than the acceptable limit. The confidence level related to the structural behavior accomplishing the target performance objective  $\nu_0$  can be evaluated by means of (Cornell et al. 2002; Hamburger et al. 2003):

$$K_x = (\ln \lambda_{conf} / \sigma_{UT}) + (k \sigma_{UT} / 2b) \quad (6)$$

where  $K_x$  is a standardized Gaussian variable with probability of non-exceedance  $x$ , so  $x$  represents the confidence level;  $\sigma_{UT} = \sqrt{\sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2}$ . Equation 6 implies that the number of annual failures  $\nu_F$  associated to a confidence level  $x$  is given by (Cornell et al. 2002):

$$\nu_{F|x} = \hat{\nu}_F \exp(K_x \sigma_{UT}) = k (y_C)^{-r} \exp\left(\left(r^2 / 2b^2\right) (\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2)\right) \exp(K_x \sigma_{UT}) \quad (7)$$

where  $\hat{\nu}_F$  represents the median (50% confidence) of  $\nu_F$ . Equations 5, 6, and 7 are used in *SAC/FEMA* guidelines for the evaluation of structures (Yun et al. 2002).

## CONFIDENCE FACTOR AND CONFIDENCE LEVEL AS FUNCTIONS OF TIME

Henceforth, the methodology presented above is extended to the case in which the mechanical properties of the structural elements present degradation (i.e. due to corrosion, fatigue, low cycle fatigue effect, etc.), and as a consequence, both the structural capacity and the structural demand change over time.



Similarly to equation 7, the number of failures  $\eta_F(t, \Delta t)$  associated to the confidence level  $x$ , at the end of the time interval  $[t, t + \Delta t)$  is expressed as:

$$\eta_{F|x}(t, \Delta t) = \hat{\eta}_F(t, \Delta t) \exp(K_{x|t} \sigma_{UT|t}) \Omega(t, \Delta t) \quad (8)$$

where

$$\hat{\eta}_F = k(y_{\hat{C}|t})^{-r} \exp\left(\left(r^2 / 2b_t^2\right) \left(\sigma^2_{\ln D|y,t} + \sigma^2_{\ln C|t}\right)\right) \quad (9)$$

where  $\Omega(t, \Delta t)$  represents a correction function that in the present paper is expressed by means of a closed-form mathematical expression. Function  $\eta_F(t, \Delta t)$  is assumed to be lognormal distributed in the interval  $[t, t + \Delta t)$ , with median equal to  $\hat{\eta}_F(t, \Delta t)$ . The meaning of the other variables that appear in equations 8 and 9 is similar to that explained in the previous section; however, for this case these variables are time-dependent.

In the Demand and Capacity Factor Design (DCFD, Cornell et al. 2002) format it is assumed that  $\nu_F$  (annual probability of the performance level not being exceeded) is equal to  $\nu_0$  (a performance objective), which implies that there is a pre-established target acceptable value of the annual mean rate of the structural failure. In a similar way to the hypothesis mentioned before, it is established in this paper that the number of failures associated to the confidence level  $x$ , at the end of the time interval  $[t, t + \Delta t)$ , must be equal to a prefixed value  $\nu_0$  multiplied by the time interval  $\Delta t$ , as shown in the following equation:

$$\eta_{F|x}(t, \Delta t) = k \left( \left[ \hat{C}(t) / a(t) \right]^{\frac{1}{b(t)}} \right)^{-r} \exp\left(\left(r^2 / 2b(t)^2\right) \left(\sigma^2_{\ln D|y,t} + \sigma^2_{\ln C|t}\right)\right) \exp(K_{x|t} \sigma_{UT|t}) \Omega(t, \Delta t) = \nu_0 \Delta t \quad (10)$$

From equation 10, it is possible to obtain the confidence factor over the time interval  $[t, t + \Delta t)$ :

$$\lambda_{conf}(t, \Delta t) = \left[ \frac{\phi}{\gamma} \frac{\hat{C}(t)}{\hat{D}^{\nu_0}(t)} \right] \left[ \frac{\Omega(t, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{-b(t)/r} \quad (11)$$

where  $\Omega(t, \Delta t)$  has the same meaning as in equation 8. Functions  $\Omega(t, \Delta t)$  and  $\lambda_{conf}(t, \Delta t)$  are defined in the following sub-sections for two cases: A) assuming *non-linear*

(*polynomial*) variation of the median structural capacity, and B) assuming *linear* variation of the median structural capacity.

The confidence level  $K_x$  can be expressed as a time function,  $K_x(t, \Delta t)$ , if  $\lambda_{conf}$  is substituted by  $\lambda_{conf}(t, \Delta t)$  in equation 6.

### A) ASSUMING NON-LINEAR (POLYNOMIAL) VARIATION OF THE MEDIAN STRUCTURAL CAPACITY

The expected value of the number of failures over a time interval,  $\eta_F(t, \Delta t)$ , is expressed as an extension of equation 1, as follows:

$$\eta_F(t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} k(y_{\hat{C}, \tau})^{-r} \exp\left(\left(r^2 / 2b^2(\tau)\right)\left(\sigma^2_{\ln D|y}(\tau) + \sigma^2_{\ln C}(\tau) + \sigma^2_{UD}(\tau) + \sigma^2_{UC}(\tau)\right)\right) d\tau \quad (12)$$

where  $y_{\hat{C}, \tau} = [\hat{C}(\tau) / a(\tau)]^{\frac{1}{b(\tau)}}$  is the intensity of the seismic load associated to the median of the capacity,  $\hat{C}(\tau)$ , in time  $\tau$ ;  $\sigma^2_{\ln D|y}(\tau)$  and  $\sigma^2_{\ln C}(\tau)$  are the variances of the natural logarithm of the demand (given an intensity  $y$ ) and of the capacity, respectively, in time  $\tau$ ;  $\sigma^2_{UD}(\tau)$  and  $\sigma^2_{UC}(\tau)$  represent epistemic uncertainties related to the structural demand ( $D$ ) and the capacity ( $C$ ) of the limit state of interest, in time  $\tau$ , respectively.

With the purpose of considering simultaneous variation in time of both structural capacity and structural demand, the following assumptions are made:

v) The median of the structural capacity varies in time following a *second-degree polynomial* function given by:

$$\hat{C}(\tau) = \alpha + \beta \cdot \tau + \gamma \cdot \tau^2 \quad (13)$$

where  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ , and  $\gamma$  can take positive or negative values.

vi) The standard deviation of the natural logarithm of the structural capacity,  $\sigma^2_{\ln C}(t)$ , is constant for the time interval of interest.

vii) Parameters  $a(t)$  and  $b(t)$  remain constant for the total time of interest, that is  $a(t) = a$  and  $b(t) = b$ .

viii) The median of structural demand (as a function of time,  $t$ ), given an intensity,  $y$ , is given by:

$$\hat{D}(t) = (a + f \cdot t) \cdot y^b + g \cdot t \quad (14)$$

It is important to highlight that equation 14 is an extension of expression  $\hat{D} = ay^b$  proposed by Cornell et al. (2002). Parameter  $f$  depends on the increment that the structural demand presents as the intensity grows, and parameter  $g$  depends on the damage that the structure presents over the time interval of interest.

ix) The standard deviation of the natural logarithm of the demand  $\sigma^2_{\ln D|y}$  is a constant value within the interval of interest.

Assumptions  $i$  to  $ix$ , except for assumption  $ii$ , are taken into account, and integrating equation 12, the following is obtained:

$$\bar{\eta}_{F,P}(t, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha + \beta' t + \gamma t^2}{a + f t} \right)^{\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y} + \sigma^2_{\ln C,T} + \sigma_{UT}) \right) \Omega_P(t, \Delta t) \quad (15)$$

where:

$$\begin{aligned} \Omega_P(t, \Delta t) = & \left( 1 - \frac{2(a + f t)\gamma}{2a\gamma + f(-\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha\gamma})} \right)^{\frac{r}{b}} \left( 1 + \frac{2(a + f t)\gamma}{-2a\gamma + f(\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha\gamma})} \right)^{\frac{r}{b}} \dots \\ & \frac{b(a + f t)}{f(b - r)} \left[ -F_1(a; b, b'; c; x(t), y(t)) + F_1(a; b, b'; c; x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) \right] \left( 1 + \frac{f \Delta t}{a + f t} \right) \dots \\ & \left( \frac{\alpha + \beta' t + \gamma t^2}{a + f t} \right)^{\frac{r}{b}} \left( 1 - \frac{2f \Delta t \gamma}{f(-\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha\gamma}) - 2f t \gamma} \right)^{\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha + \beta'(t + \Delta t) + \gamma(t + \Delta t)^2}{a + f(t + \Delta t)} \right)^{-\frac{r}{b}} \dots \end{aligned}$$

$$\left( 1 + \frac{2f \Delta t \gamma}{f(\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha \gamma}) + 2f t \gamma} \right)^{\frac{r}{b}} \quad (16)$$

$\Omega_p(t, \Delta t)$  represents the correction function of the expected number of failures which considers the variation in the interval  $[t, t + \Delta t)$  of the structural demand (for a given intensity) and the structural capacity, simultaneously, sub-index  $P$  refers to the Polynomial function assumed for the degrading structural capacity, and  $\beta' = \beta - g$ . Appell's function in equation 16 can be solved as a product of two series, as follows (Slater 1966):

$$F_1(a; b, b'; c; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^m y^n \frac{\Gamma(n+m+a) \Gamma(m+b) \Gamma(m+b')}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(b')} \frac{\Gamma(n+m+c)}{\Gamma(c)} \frac{1}{m!n!} \quad (17)$$

where:

$$a = \frac{b+r}{b}; b = \frac{r}{b}, b' = \frac{r}{b}; c = 2 + \frac{r}{b}; x(t) = \frac{2\gamma(e + f t)}{2e \gamma - f(\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha \gamma})}$$

$$y(t) = \frac{2\gamma(e + f t)}{2e \gamma + f(-\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha \gamma})}; x(t + \Delta t) = \frac{2\gamma(e + f(t + \Delta t))}{2e \gamma - f(\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha \gamma})};$$

$$y(t + \Delta t) = \frac{2\gamma(e + f(t + \Delta t))}{2e \gamma + f(-\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha \gamma})}$$

Where  $\Gamma(\cdot)$  is the gamma function,  $b, b', x$  and  $y$  are real numbers,  $a$  and  $c$  must be integer numbers.

Making the same assumptions that were used to obtain equation 2:

$$k \left( \frac{\alpha + \beta' t + \gamma t^2}{a + f t} \right)^{\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma^2_{\ln D|y} + \sigma^2_{\ln C, T} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right) \Omega_p(t, \Delta t) = \nu_0 \cdot \Delta t \quad (18)$$

Equation 18 can be reduced into the following expression:

$$\lambda_{conf, P}(t, \Delta t) = \frac{\phi \cdot \hat{C}}{\gamma \cdot \hat{D}^{\nu_0}} \left[ \frac{\Omega_p(t, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{\frac{b}{r}} \quad (19)$$

where  $\lambda_{conf,p}(t, \Delta t)$  allows the evaluation of the confidence factor over the interval of interest, when the variation in time of the structural capacity is represented by a non-linear (*polynomial*) function.

It is noticed that equation 19 presents a shape similar to equation 5 contained in *FEMA-351* document, except for the fact that equation 19 has a correction function  $\left[ \frac{\Omega_p(t, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{-b/r}$  that takes into account the variation of both the structural capacity and the structural demand in the interval  $[t, t + \Delta t)$ . Function  $\Omega_p(t, \Delta t)$ , which is represented by equation 16, can be evaluated numerically in an easy way if Appell's function  $F_1(a; b, b'; c; x, y)$  is evaluated by means of the double summation shown in equation 17. The values of  $m$  and  $n$  will depend on the problem; for example, for the case analyzed in this study,  $m$  and  $n$  should take values equal or larger than 2000, in order to obtain a good approximation. An advantage of equation 19 is that it is expressed in a format that is familiar to structural engineers.

## **B) ASSUMING LINEAR VARIATION FOR THE MEDIAN STRUCTURAL CAPACITY**

The linear model of structural capacity degradation has been used by several authors (i.e., Celarek et al, 2011; Tolentino et al, 2012) for the evaluation of seismic reliability of buildings. In this study it is shown, by means of an example, that this assumption gives place to reasonable results.

Tolentino et al. (2012) obtained the following correction function of the expected number of failures over a time interval considering assumptions  $i$  to  $ix$ , except for assumptions  $ii$  and  $v$ , and taking into account that the median of the structural capacity presents *linear* degradation over time ( $\hat{C}(\tau) = \alpha + \beta \cdot t$ ,  $\beta < 0$ ):

$$\Omega_L(t, \Delta t) = \frac{b(\alpha + \beta t)}{(b-r)\beta'} \left( \frac{(a + ft)\beta'}{-f\alpha + a\beta'} \right)^{\frac{r}{b}} \left[ -F(A, B; C; x(t)) + F(A, B; C; x(t + \Delta t)) \right] \dots$$

$$\left[ 1 + \left( \frac{\beta' f \Delta t}{(a + f t) \beta'} \right)^{-\frac{r}{b}} \right] \left( 1 + \frac{\beta' \Delta t}{\alpha + \beta' t} \right) \left( \frac{\alpha + \beta'(t + \Delta t)}{a + f(t + \Delta t)} \right)^{-\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha + \beta' t}{a + f t} \right)^{\frac{r}{b}} \quad (20)$$

Hypergeometric function  $F(A, B; C; x)$  implicit in equation 20 is solved using the following hypergeometric series (Ford 1955, Rainville 1961):

$$F(A, B; C; x) = 1 + \frac{AB}{!C} x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{2!C(C+1)} x^2 + \dots + \frac{A(A+1) \dots (A+n-1) B(B+1) \dots (B+n-1)}{C(C+1) \dots (C+n-1) n!} X^n \quad (21)$$

where

$$A = 1 - \frac{r}{b}; \quad B = -\frac{r}{b}; \quad C = 2 - \frac{r}{b}; \quad x(t) = \frac{f(\beta' t + \alpha)}{f \alpha - a \beta'}; \quad x(t + \Delta t) = \frac{f(\beta'(t + \Delta t) + \alpha)}{f \alpha - a \beta'}$$

When  $\Omega_p(t, \Delta t)$  is substituted by  $\Omega_L(t, \Delta t)$  in equation 19, the following confidence factor function is obtained:

$$\lambda_{conf,L}(t, \Delta t) = \frac{\phi \cdot \hat{C}}{\gamma \cdot \hat{D}^{\nu_0}} \left[ \frac{\Omega_L(t, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{-\frac{b}{r}} \quad (22)$$

In the following section the influence on the confidence factors and on its confidence levels over different time intervals, assuming non-linear (*polynomial*) degradation and, alternatively, considering linear degradation of the structural capacity, is evaluated for a 10-story building subjected to seismic ground motions.

## INFLUENCE OF THE LINEAR AND THE NON-LINEAR ASSUMPTIONS OF THE STRUCTURAL CAPACITY DEGRADATION

The confidence factor,  $\lambda_{conf}(t, \Delta t)$ , using the non-linear (equation 19) and, alternatively, the linear (equation 22) assumption of the structural capacity degradation is evaluated for a building located on soft soil zone (zone IIIb) of Mexico City with similar properties to the site where the Ministry of Communications and Transportation (called SCT site) is. It is a

regular structure constituted of reinforced concrete frames with 10 stories and 3 bays, as shown in figure 1. The building was designed in accordance with the Mexico City Building Code (*RCDF-1976*) for ductile structures ( $Q=4$ ). It is observed that *RCDF-1976* is an obsolete code that contains design requirements that are less severe than the actual seismic regulations (*RCDF-2004*). For example, the seismic design coefficient (without any reduction factor) required by *RCDF-1976* for the building under analysis is equal to  $C_s=0.24$ ; however, if the building is designed in accordance with *RCDF-2004* a value equal to  $C_s = 0.45$  should be used. Nominal sections and reinforcement are shown in figure 2. A compressive concrete strength  $f'_c = 20$  MPa and a steel yielding stress  $f_y = 412$  MPa were used for the design. In order to perform the nonlinear analysis, the structure was modeled as an interior frame which has a fundamental period of vibration  $T_1 = 1.03$ s.

## **WAITING TIMES BETWEEN SEISMIC EVENTS AND SIMULATION OF GROUND MOTIONS**

In order to take into account the accumulation of damage on the structure (due to the effect of successive seismic ground motions along time) it was necessary to simulate both the possible intensities that could occur at the site, as well as the waiting times between seismic events.

The occurrence of seismic events was assumed to be a stochastic Poisson process, hence, with exponentially distributed waiting times. The simulations of the waiting times were performed assuming an expected recurrence time equal to 5 years (Hong and Rosenblueth 1988). On the other hand, the seismic intensity (represented by the pseudo-acceleration spectral ordinate,  $S_a$ ) of each seismic event was estimated by means of the seismic hazard curve corresponding to the interest site and to the fundamental vibration period of the structure ( $T_1$ ). In this study it is supposed that the seismic hazard curves are known.

Based on the simulation of both waiting times and the seismic intensities, twenty *collections* of seismic events were constructed. Figure 3 shows one of the *collections* corresponding to a time interval of 150 years. At the end of time intervals of 50, 100 and

150 years, only 8, 11 and 15 *collections* presented intensities higher than  $1.0 \text{ m/s}^2$ , respectively (a value of  $1.0 \text{ m/s}^2$  was selected because it was observed that intensities lower than this value produced negligible levels of structural damage to the building).

Then, different sets of successive synthetic ground motions that can occur within intervals of  $[0,50)$ ,  $[0,100)$  and  $[0,150)$  years were constructed. Each one of the successive ground motions within a time interval was scaled so that its intensity ( $S_a(T_1)$ ) match the corresponding intensity in the considered collection of seismic events. For example, for the collection shown in figure 3, the first ground motion should present a spectral ordinate at  $T_1$  equal to  $1.5 \text{ cm/s}^2$ . The synthetic ground motions were generated based on the accelerogram recorded in 19 September 1985 at the SCT site, which is located on soft soil with dominant period of 2s. It was considered that the stochastic process was a non-stationary ergodic Gaussian process. The motions were simulated using the procedure described by Grigoriu et al. 1988.

### **STRUCTURAL DEMAND AS FUNCTION OF TIME, FOR A GIVEN INTENSITY**

The evaluation of the structural demand over time was performed by means of non-linear dynamic "step by step" analysis. The structure was subjected to sets of successive synthetic seismic ground motions (mentioned in the preceding paragraph). These motions produced structural damage, which was accumulated along the time. Then, the structure was subjected to a synthetic ground motion, which was added at the end of the set of successive time histories just mentioned. Such ground motion was scaled up until the structure reached failure, in a similar way to an Incremental Dynamic Analysis, IDA (Vamvatsikos and Cornell 2002). Figure 4 shows a set of successive time histories as well as the (scaled) ground motion added at its end.

The medians of the demand,  $\hat{D}$ , at the end of the time intervals analyzed, as a function of the maximum drift ratio at third story (which was the critical one), for a given intensity ( $S_a/g$ ,  $g = \text{gravity}$ ), are shown in Figure 5, in which can be seen that the median of the demand presents higher values as the interval becomes larger, due to the damage accumulation in the structural system produced by previous seismic ground motions.



Dynamic instability in the structure (FEMA P440A 2009, Jalayer and Cornell 2009) was the failure criterion adopted in this study. It was observed that most of the structures subjected to the collections of simulated seismic events, for the last ground motion analyzed, reached their failure condition at a spectral acceleration close to 0.6g.

The values of the median of structural demand, for a given intensity, are fitted according to equation 14, as shown in figures 6a, b, c, and d. The standard deviation of the natural logarithm of the demand, given an intensity, resulted equal to:  $\sigma_{\ln D|y} = (0.3 + 1.5E - 04 \cdot \Delta t) \cdot y^{0.52} + 2.9E - 04 \cdot \Delta t$ , which means that  $\sigma_{\ln D|50} = 0.25$ ,  $\sigma_{\ln D|100} = 0.27$  and  $\sigma_{\ln D|150} = 0.29$ . It is noticed that the standard deviation values found here are similar to those reported by other authors (Shome and Cornell 1999, Montiel and Ruiz 2007, Dolšek 2009).

## EVALUATION OF THE STRUCTURAL CAPACITY OVER A TIME INTERVAL

One of the most important and difficult tasks in performance-based design and in structural reliability evaluation is the determination of the ultimate building capacity against collapse under stochastic seismic loading (Wen and Foutch 1997).

In the present study, the capacity of the structure was calculated by non-linear dynamic “step by step” analysis. The structure was first subjected to different sets of successive time histories of seismic ground motions, whose intensities corresponded to the twenty *collections* of simulated seismic events mentioned above. The successive ground motions gave place to damage accumulation in the structure. Then the structure was subjected to an increasing monotonic acceleration, simulating the effect of a non-linear “push over” analysis. Figure 7 shows an example of the set of ground motions and increasing monotonic acceleration applied to the structure. It is noticed that when all the simulated intensities of one *collection* were smaller than 1.0 m/s<sup>2</sup>, only the increasing monotonic acceleration was applied to the structure. Drain-2D program modified by Campos and Esteva (1997), which considers a model of degradation of stiffness and strength, was used for the non-linear dynamic analysis.

It was considered that the structure failed at the instant when a structural failure mechanism occurred, i.e., at the instant when plastic hinges appeared in all beams and columns in a story. For the frame analyzed here, the ductile failure mechanism occurred at the third story. Figure 8 shows an example of the failure mechanism of the structure (associated with the capacity curve CC6) after 150 years of construction of the structure.

The structural capacity curves (CC) at the end of 50, 100 and 150 years are shown in Figures 9a, b and c, respectively. It is noticed that figures 9a, b and c contain 8, 11 and 15 curves, respectively, which correspond to the *collections* of seismic events with intensities higher than  $1 \text{ m/s}^2$ , mentioned previously. The curves were obtained by applying both the sets of ground motions and the increasing monotonic accelerations mentioned above, at the base of the structure. The horizontal axis of Figures 9a-c represents the maximum drift ratio, and the vertical axis the shear force at third story (which is the critical one). Figures 9a, b and c show the structural damage accumulated over time, which is represented by the reduction in both structural stiffness and structural resistance at the end of the time intervals.

The median of the structural capacity, ( $\hat{C}$ , represented by the maximum drift ratio at the third story) was calculated from the maximum story drift ratios of the capacity curves shown in Figures 9a, b and c. The median value of the capacity  $\hat{C}$  for different time intervals is shown in Figure 10. Two assumptions for the median value of the decreasing structural capacity were formulated: a)  $\hat{C}$  is represented by a *linear* function (discontinuous line in Figure 10), and b)  $\hat{C}$  is represented by a non-linear (*polynomial*) function (indicated with points in Figure 10). The corresponding equations of both functions, linear and non-linear, are indicated in Figure 10.

The standard deviation of the natural logarithm of the structural capacity,  $\sigma_{\ln C}$ , was calculated from figures 9a, b and c. The values of  $\sigma_{\ln C}$  obtained were relatively small (between 18% and 30% of  $\sigma_{\ln D|y}$ ) compared to those corresponding to the structural demand  $\sigma_{\ln D|y}$ , which were calculated in the previous section by means of IDA. A possible reason for the small values of  $\sigma_{\ln C}$  is the use of a set of ground motions that were simulated

on the basis of a single accelerogram obtained at SCT site as excitation, instead of using a set of real accelerograms recorded at the site, which is a limitation of the present study. Taking into account this consideration, the values of  $\sigma_{\ln C}$  adopted here were equal to 80% of  $\sigma_{\ln D|y}$ . This percentage ( $\sigma_{\ln C} = 0.8 \sigma_{\ln D|y}$ ) is supported by the results of incremental dynamic analyses (IDA) performed by Montiel and Ruiz (2007) who analyze a 10-story building subjected to 14 intense narrow-band ground motions recorded between 1985 and 1994 at SCT site, caused by subduction seismic events with magnitudes larger than 5.6. Similarly to the present study, Montiel and Ruiz (2007) found that the third story of the buildings analyzed, was the critical one. Taking into account these considerations, the values of  $\sigma_{\ln C}$  adopted here were equal to 0.20, 0.216 and 0.232, for time intervals of 50, 100 and 150 years after construction of the building, respectively.

### **PARAMETERS USED TO EVALUATE THE CORRECTION FACTORS**

In order to calculate the correction factors and the expected number of failures over time, the values of all parameters involved in the formulation are needed. The values of the parameters  $a$ ,  $f$  and  $b$  associated to the structural demand, for a given intensity (see equation 14), are shown in figure 6. Parameters  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  which represent the variation of the median structural capacity are presented in Figure 10. Parameters  $k$  and  $r$  which are adjusted to the seismic hazard curve using the expression  $\nu(y) = k \cdot y^{-r}$ , are equal to  $k = 1.7E - 04$  and  $r = 3.75$ , respectively. Considering the uncertainty implicit in material properties, load values, computational modeling, ground motions simulation, etc., the following variances of epistemic uncertainties  $\sigma_{UD}^2 = \sigma_{UC}^2 = 0.20$  were assumed based on the authors' judgment and the values reported by Ruiz et al. (2010).

## **CORRECTION FACTOR AND EXPECTED NUMBER OF FAILURES OVER TIME**

Figure 11 shows the behavior of the correction factors  $\Omega_p$  (equation 16) and  $\Omega_L$  (equation 20) corresponding to the non-linear (*polynomial*) and to the *linear* capacity degradation assumptions, respectively. In order to evaluate the correction function  $\Omega_p$  (equation 16), equation 17 (product of two series) was used. The parameters  $m$  and  $n$  implicit in this equation were taken equal to 2000.

Figure 11 shows that the non-linear case gives place to correction factors ( $\Omega_p$ ) smaller than those corresponding to the linear case ( $\Omega_L$ ). The correction factors  $\Omega_p$  at the end of 50, 100 and 150 years are 17.1, 16.7 and 16.8% smaller than  $\Omega_L$ , respectively. It can also be observed that the difference between the values of the confidence factors increases as the time interval grows. Then, the expected number of failures over a time interval ( $\bar{\eta}_F(t, \Delta t)$ , see equation 15) is also smaller for the case corresponding to *non-linear* capacity degradation hypothesis, as shown in Figure 12, which indicates: a) with continuous line, the expected number of failures  $[\bar{\eta}_F(t, \Delta t)]$  when no structural degradation is considered, b) with points, when the structural capacity degradation follows a non-linear (*polynomial*) function, and c) with discontinuous line, when the structural capacity degradation follows a linear function.

Figure 12 indicates that structural degradation should be taken into account in seismic reliability evaluation (in agreement with what has been established by other authors, i.e., Esteva and Díaz 1993, Frangopol et al. 2004, Torres and Ruiz, 2007, Vamvatsikos and Dolšek 2011).

Figure 12 also shows that when structural capacity degradation is considered as a linear function, the expected number of failures over a time interval is slightly higher than that obtained when a *non-linear* capacity degradation function is assumed. This is reflected in the behavior of confidence factors and its confidence levels over time, presented in the next section.

## VARIATION OF CONFIDENCE FACTORS AND ITS CONFIDENCE LEVELS OVER TIME

The influence on the confidence factor of the assumption that the structural capacity degradation is a *linear* or, alternatively, a *non-linear* function can be observed in figure 13. This figure shows the confidence factors at the end of different intervals of time calculated with equations 19 (non-linear assumption) and 22 (linear assumption), and for the case of the building without cumulative damage (equation 5). The percentages of decrease of the confidence factor with regard to the case of the building without structural damage at the end of a 50, 100 and 150-year interval, are about 13, 25 and 37% for the non-linear assumption, and 17, 30 and 41% for the *linear* assumption, respectively. It means that the differences between the confidence factors corresponding to the linear and to the non-linear assumptions are equal to 4%, 5% and 4% after 50, 100 and 150 years, of structure construction, respectively, which represents almost negligible differences in terms of engineering practice.

The quantitative degree of confidence,  $K_x$ , (see equation 6) associated to the confidence factors presented above, is shown in figure 14. It indicates that the confidence level of the results decreases as the time interval grows and the structural capacity degradation increases. This reinforces the statement that for reliability analysis evaluation it is recommended to take into account the deterioration of the structural capacity and its influence on the structural demand for a given intensity. For the building under analysis the degree of confidence diminishes from 93% to 84, 67 and 44% over 50, 100 and 150 years, respectively, when the structural capacity degradation is assumed as a non-linear (*polynomial*) function. However, it is reduced from 93% to 80, 59 and 35% if it is considered as a *linear* function. These results show that there is slightly higher degree of confidence (about 9% after 150 years of structure construction) when the structural capacity degradation is supposed to follow a non-linear model.

## CONCLUSIONS

A criterion to evaluate the structural confidence factor and its confidence level in a time interval after construction of the structure is proposed. It is assumed that the structural

capacity degradation follows a continuous *second degree polynomial* function. The formulation takes into account that the structural capacity and the structural demand (for a given intensity) vary simultaneously in time. The confidence factor is expressed by means of a closed-form mathematical equation, in a format that is familiar to structural engineers.

The criterion, together with the closed-form mathematical expressions, was applied to an old 10-story building subjected to seismic ground motions. It was supposed that its structural capacity followed: *a)* a linear degradation function; and alternatively, *b)* a *polynomial* degradation function. The results show that the confidence factor evaluated after 50, 100 and 150 years of structure construction is about 4%, 5% and 4%, respectively, smaller for the linear model than for the non-linear one. These low percentages indicate that the linear structural capacity degradation model, which is used extensively in the literature, gives place to good results for the structural reliability evaluation of buildings similar to the structure analyzed in this study.

The proposed approach has the following advantages: *a)* closed-form expressions are used to evaluate the confidence factor over a time interval for any structural system (i.e. buildings, transmission towers, offshore structures, etc); *b)* the expressions can be adapted to consider loads associated to different types of natural hazards (i.e. earthquake, wind, waves, etc.); *c)* they can be used to evaluate different limit states (i.e. service, operation, collapse, etc.). The criterion proposed to evaluate the reliability at the end of a time interval can be useful to make decisions about structural maintenance based on reliability, expected costs or multi-objective optimization, taking into account the life cycle of the structure. The approach can also be used in designing structures with prescribed reliability requirements at the end of a time interval.

### **ACKNOWLEDGEMENTS**

This project was supported by DGAPA-UNAM (PAPIIT IN107011-3). The first author thanks CONACYT for the economical support in his PhD studies.

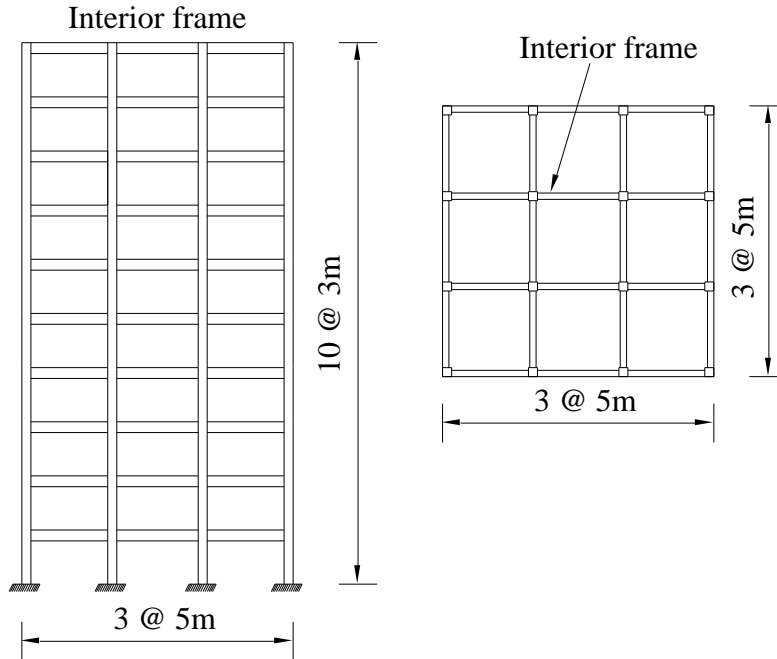
### **REFERENCES**

Benjamin, J. R., and Cornell, C. A., 1970. *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*, McGraw-Hill Book Company, 685 pp.

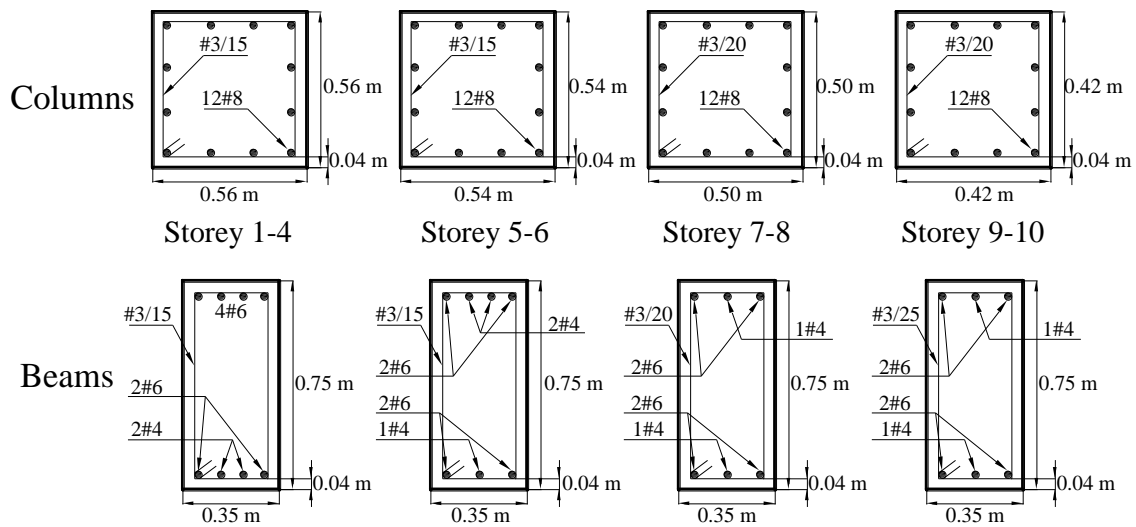
- Campos, D., and Esteva, L., 1997. Hysteretic behavior and damage model for reinforced concrete beams, 11th National Conference on Earthquake Engineering, Veracruz, Mexico (in Spanish).
- Celarec, D., Vamvatsikos, D., and Dolšek, D. M., 2011. Simplified estimation of seismic risk for reinforced concrete buildings with consideration of corrosion over time, *Bull. Earthquake Engineering* **9**, 1137-1155.
- Cornell, C. A., 1996. Calculating building seismic performance reliability: A basis for multi-level design norms, *11th World Conference on Earthquake Engineering*, Paper 2122.
- Cornell, C. A., Jalayer, F., Hamburger, R. O., and Foutch, D. A., 2002. The probabilistic basis for the 2000 SAC/FEMA steel moment frame guidelines, *Journal of Structural Engineering, ASCE* **128** (4), 526–533.
- Díaz, O. J., and Esteva, L., 1997. Confiabilidad de estructuras y daño acumulado, *Memorias Séptimas Jornadas Chilenas de Sismología e Ingeniería Antisísmica y Primer Congreso Iberoamericano de Ingeniería Sísmica*, La Serena, Chile, pp. 589-598. (in Spanish).
- Dolšek, M., 2009. Incremental dynamic analysis with consideration of modeling uncertainties, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **38**, 805-825.
- Esteva, L. and Díaz, O. J., 1993. Influence of cumulative damage on the seismic reliability of multistory frames. *Proc. of the IFIP WG7.5, 5th Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems*, 65-72.
- Ellinwood, B. R., 1978. Reliability basis of load and resistant factors for reinforced concrete design, *NBS Building Science Series* **110**, Washington: U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards.
- Federal Emergency Management Agency (FEMA), 2000. Recommended Seismic Evaluation and Upgrade Criteria for Existing Welded Steel Moment-Frame Buildings, *Report No. FEMA 351*, SAC Joint Venture, Washington, D. C.
- Federal Emergency Management Agency (FEMA), 2009. Effects of Strength and Stiffness Degradation on Seismic Response, *Report No. FEMA P440A*, Department of Homeland Security (DHS).
- Ford, L. R., 1955. *Differential Equations*, New York: McGraw –Hill Book Company, pp. 155-157.
- Frangopol, D. M., Kallen, M. J., and Van Noortwijk, J. M., 2004. Probabilistic models for life-cycle performance of deteriorating structures: review and future directions, *Progress in Structural Engineering and Materials* **6**, 197-212.
- Grigoriu, M., Ruiz, S. E., and Rosenblueth, E., 1988. Nonstationary models of seismic ground acceleration, *Earthquake Spectra*, **4**(3), 551-568.
- Hamburger, R. O., Foutch, D. A., and Cornell, C. A., 2003. Translating research to practice: FEMA/SAC performance-based design procedures, *Earthquake Spectra* **19** (2), 255-267.
- Hong, H. P., Rosenblueth, E., 1988. The Mexico earthquake of September 19, 1985- Model for generation of subduction earthquakes, *Earthquake Spectra* **4** (3), 481-497.
- Jalayer, F., and Cornell, C. A., 2003. A technical framework for probability-based demand and capacity factor design (DCFD) seismic formats, Pacific Earthquake Engineering Research Center, *PEER Report 2003/08*, University of California, Berkeley.
- Jalayer, F., and Cornell, C. A., 2009. Alternative Non-linear Demand Estimation Methods for Probability-Based Seismic Assessments, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **38**, 951-972.
- Melchers, R. E., 1992. Load-space formulation for time-dependent structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* **118** (5), 853-870.
- Mexico City Building Code (RCDF. Reglamento de Construcciones del D.F., in Spanish), 1976.

- Mexico City Building Code (*RCDF*. Reglamento de Construcciones del D.F., in Spanish), 2004.
- Montes-Iturizaga, R., Heredia-Zavoni, E., and Esteva, L., 2003. Optimal maintenance strategies for structures in seismic zones, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **32**, 245-264.
- Montiel M. A., and Ruiz, S. E., 2007. Influence of structural capacity uncertainty on seismic reliability of buildings under narrow-band motions, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **36**, 1915-1934.
- Mori, Y., and Ellingwood, B.R., 1993. Time-dependent system reliability analysis by adaptive importance sampling, *Structural Safety* **12** (1), 59-73.
- Rackwitz, R., 2001. Reliability analysis: a review and some perspectives, *Structural Safety* **23**, 365-395.
- Rainville, E. D., 1961. *Intermediate Course in Differential Equations*, John Wiley & Sons, INC., USA, September, pp. 144-148.
- Rosenblueth, E., and Esteva, L., 1972. Reliability basis for some Mexican codes, *ACI Publication SP-31*, 1-41.
- Ruiz, S. E., Montiel, M. A., and Arroyo, M., 2010. Probabilities of exceeding different limit states for buildings subjected to narrow-band ground motions, *Earthquake Spectra*, **26** (3), 825-840.
- Shome, N., and Cornell C. A., 1999, Probabilistic seismic demand analysis of nonlinear structures, *Report No. RMS-35*, Department of Civil and Environmental Engineering, Stanford University.
- Straub, D., 2009. Stochastic modeling of deterioration processes through dynamic Bayesian networks, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE **135** (10), 1089-1099.
- Slater, L. J., 1966. *Generalized hypergeometric functions*, London: Cambridge university press, pp. 210-215.
- Tolentino, D., Ruiz, S. E., and Torres, M. A., 2012. Simplified closed-form expressions for the mean failure rate of structures considering structural deterioration, *Structure and Infrastructure Engineering* **8** (5), 483-496.
- Torres, M. A., and Ruiz, S. E., 2007. Structural reliability evaluation considering capacity degradation over time, *Engineering Structures* **29**, 2183-2192.
- Vamvatsikos, D., and Cornell, C. A., 2002. Incremental dynamic analysis, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **31** (3), 491-514.
- Vamvatsikos, D., and Dolšek, M., 2011. Equivalent constant rates for performance-based seismic assessment of ageing structures, *Structural Safety* **33** (1), 8-18.
- Yun, S-Y., Hamburger, R. O., Cornell, A. C., and Foutch, D. A., 2002. Seismic performance evaluation for steel moment frames, *Journal Structural Engineering* **128** (4), 534-545.
- Wen, Y. K., and Foutch, D. A., 1997. Proposed statistical and reliability framework for comparing and evaluating predictive models for evaluation and design, and critical issues in developing such framework, *SAC Document SAC/BD-97/03*, SAC Joint Venture, Richmond, California.

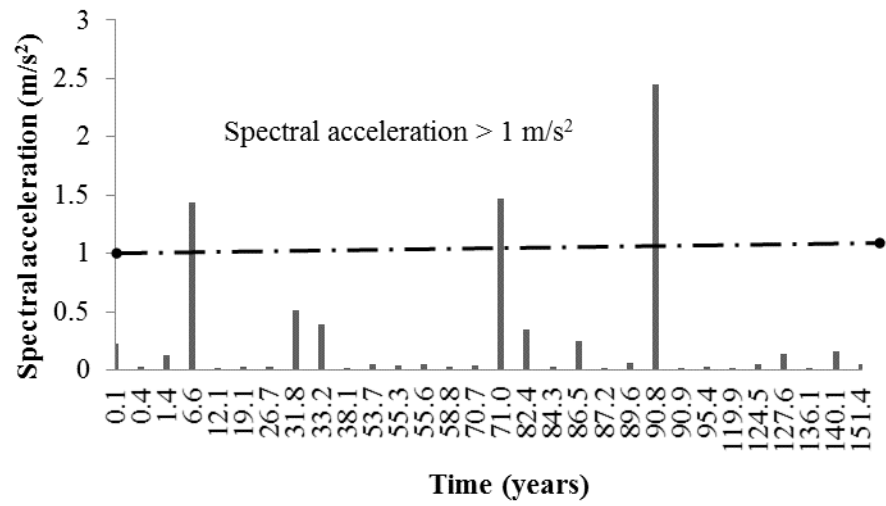




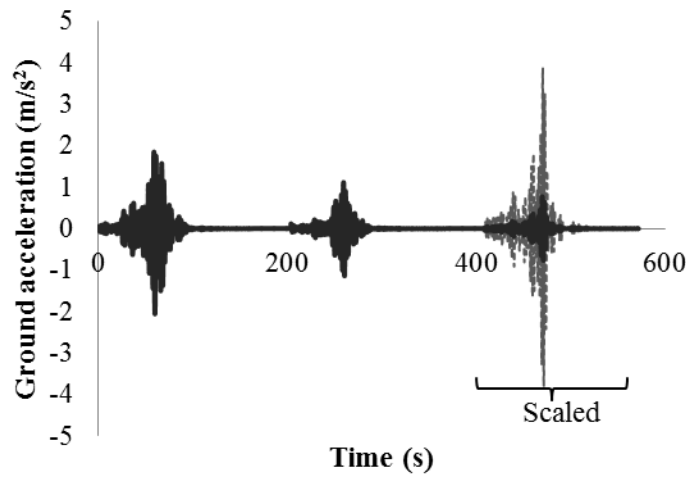
**Figure 1.** Geometry of the analysed structure.



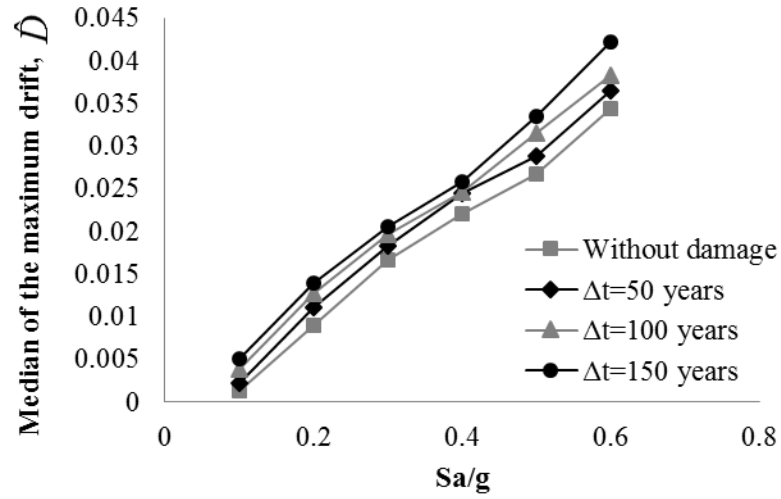
**Figure 2.** Geometry and reinforcement of the sections (beams and columns).



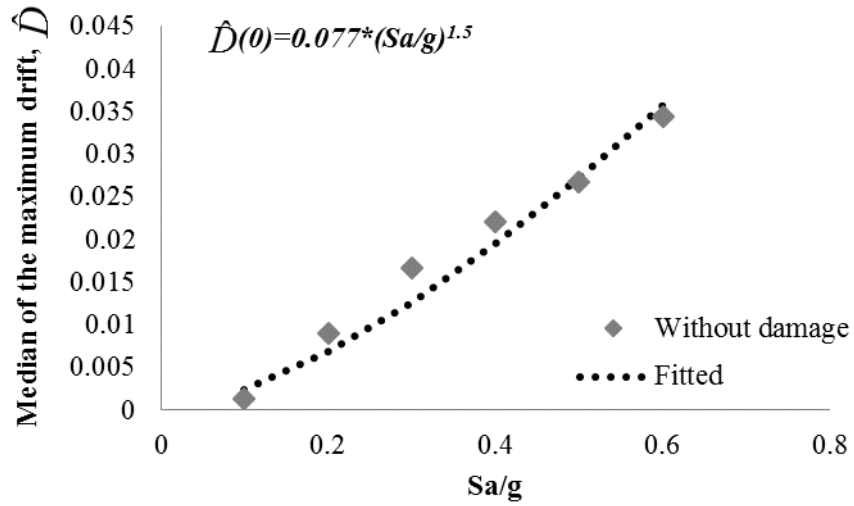
**Figure 3.** Example of a *collection* of simulated waiting times and seismic intensities.



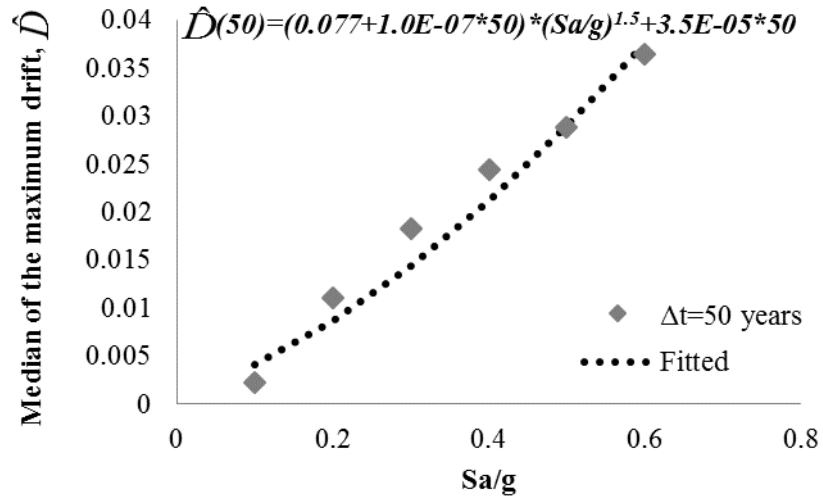
**Figure 4.** Example of successive seismic ground motions used to evaluate structural demand.



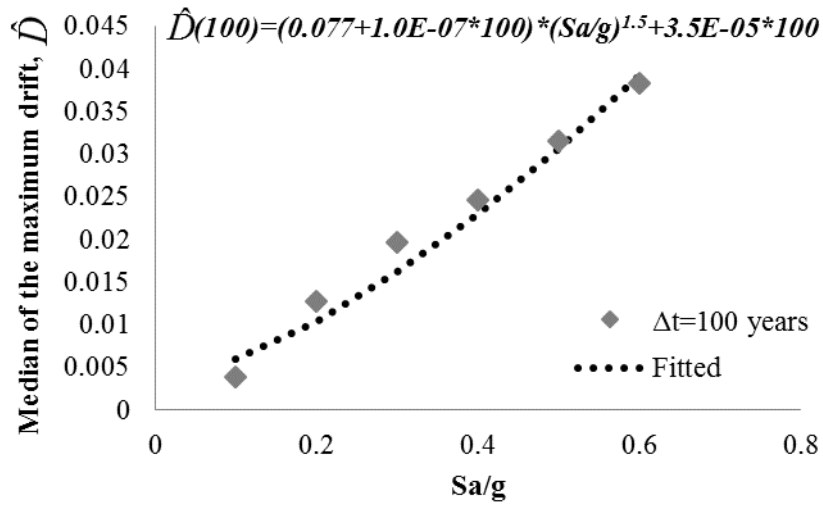
**Figure 5.** Median of the demand,  $\hat{D}$ , for different time intervals (50, 100 and 150 years) after construction of the building.



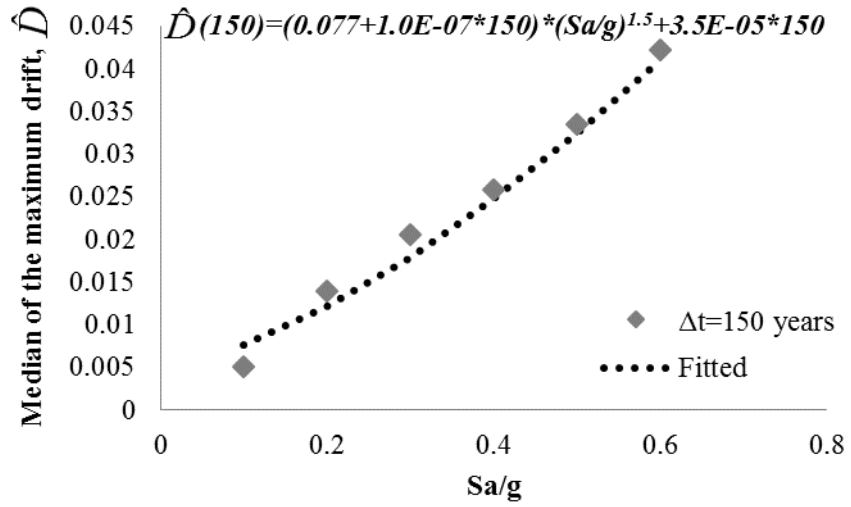
a) Without damage



b) 50 years

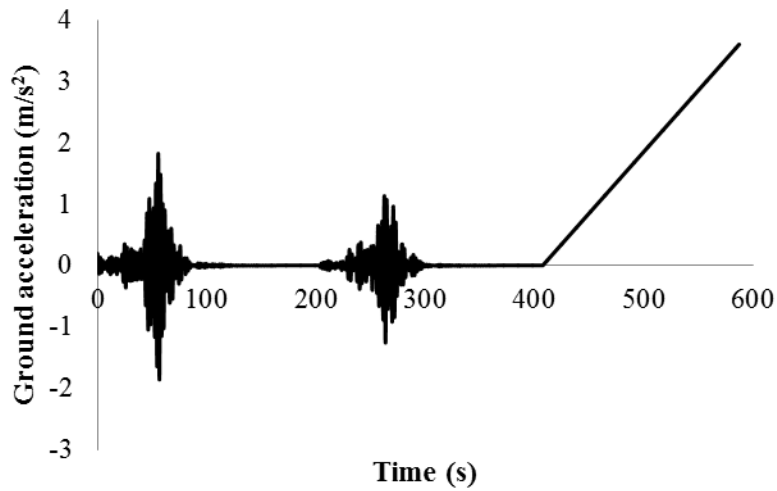


c) 100 years

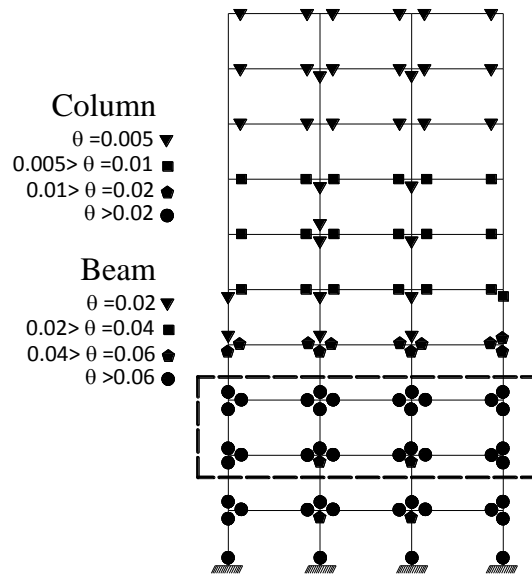


d) 150 years

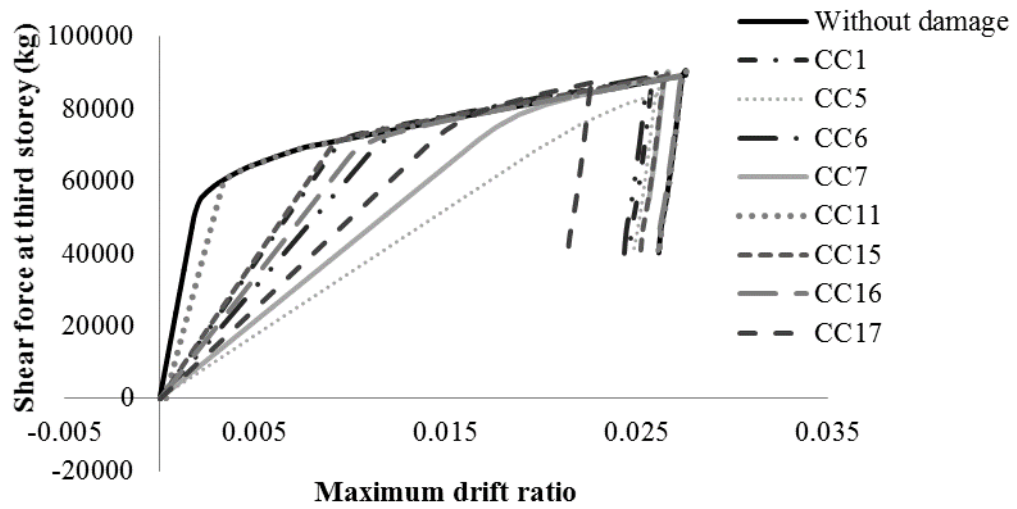
**Figure 6.** Fitted expressions of the median values of the structural demand.



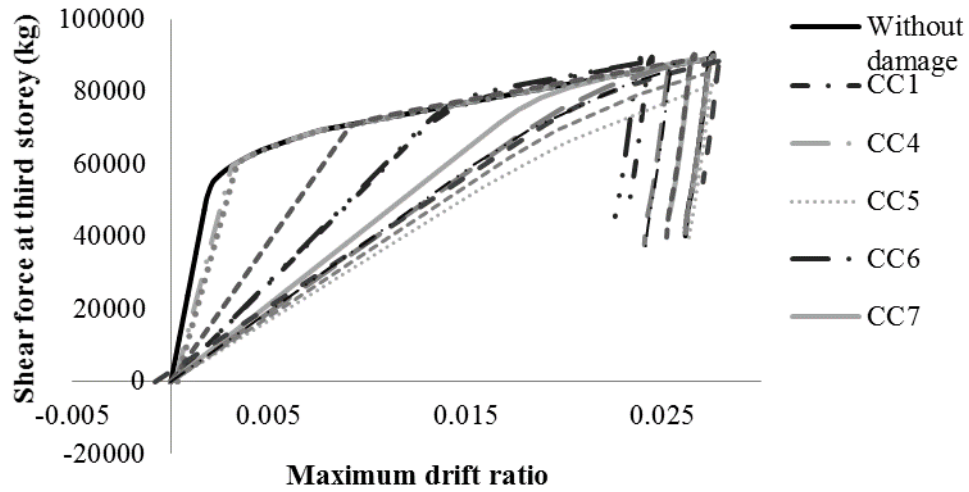
**Figure 7.** Example of a set of successive ground motions and, at the end, an increasing monotonic load



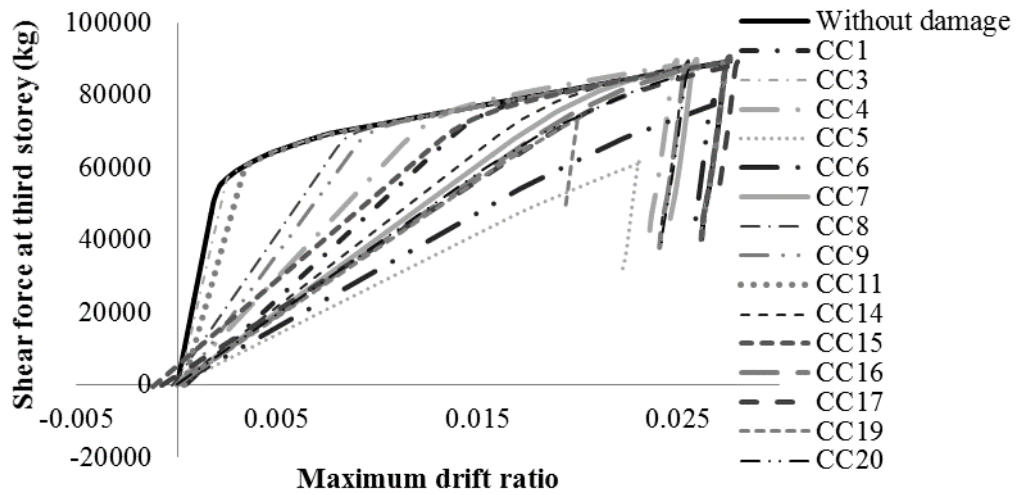
**Figure 8.** Mechanism of structural failure, after 150 years of building construction.  
Capacity curve CC6.



a) 50 years

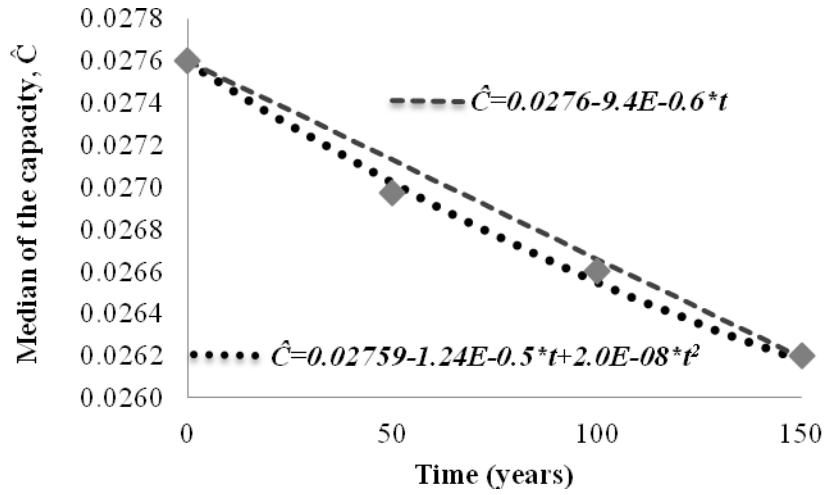


b) 100 years

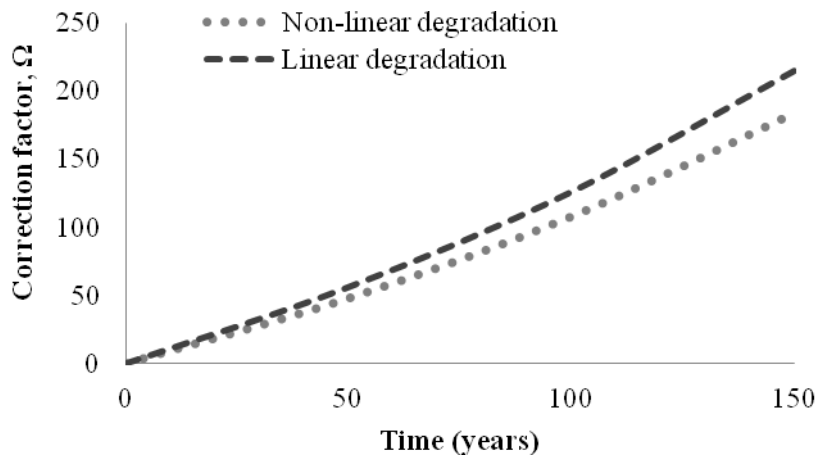


c) 150 years

**Figure 9.** Capacity curves at the end of a) 50 years, b) 100 years, and c) 150 years, corresponding to different sets of ground motions and increasing monotonic accelerations.

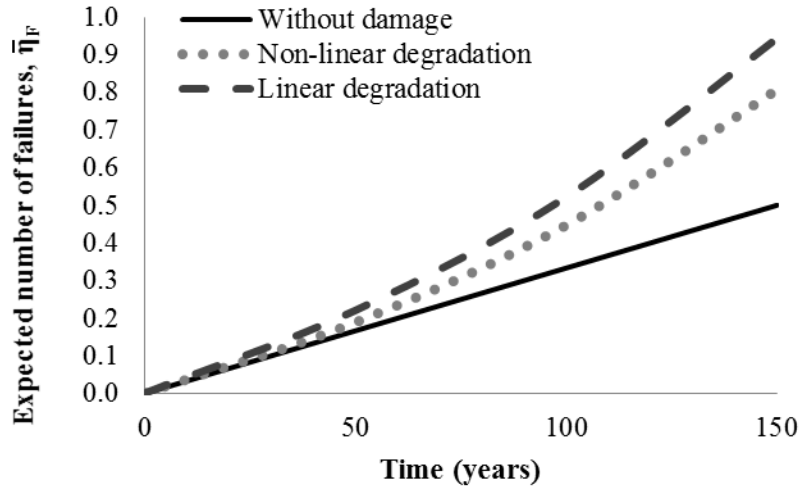


**Figure 10.** Median of the capacity as function of time.

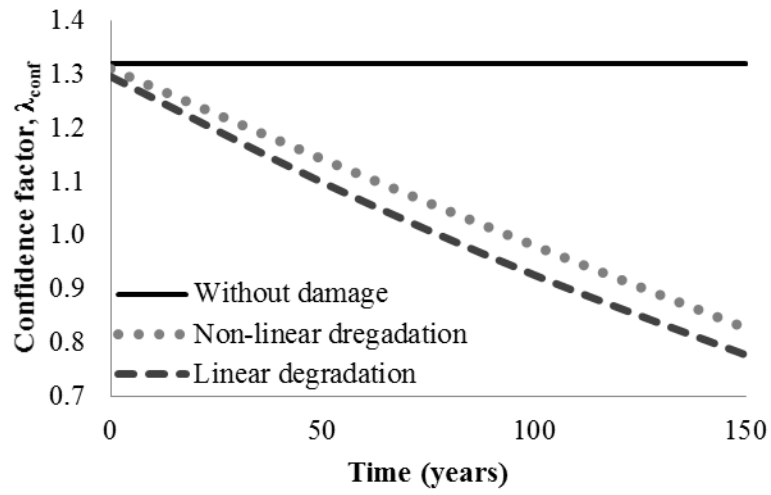


**Figure 11.** Correction functions for different cases.

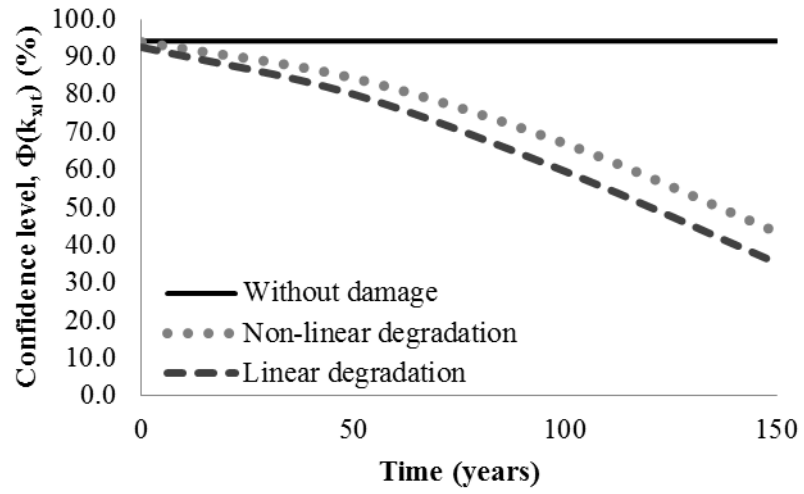




**Figure 12.** Expected number of failures at the end of different intervals.



**Figure 13.** Confidence factors at the end of different time intervals.



**Figure 14.** Confidence levels at the end of different time intervals.

# APÉNDICE G

## ARTÍCULO EN PRENSA PARA SU PUBLICACIÓN EN LA REVISTA *INGENIERÍA INVESTIGACIÓN Y TECNOLOGÍA*

Ruiz, S. E., Tolentino, D., y Torres, M. A., 2014. Factor de confianza dependiente del tiempo para estructuras con deterioro causado por fatiga, *Ingeniería Investigación y Tecnología*, vol. XV, no. 3.

[http://www.ingenieria.unam.mx/~revistafi/ejemplares/V15N3/V15N3\\_art.pdf](http://www.ingenieria.unam.mx/~revistafi/ejemplares/V15N3/V15N3_art.pdf)

# Factor de confianza dependiente del tiempo para estructuras con deterioro causado por fatiga

## *Time-dependent confidence factor for structures with degradation caused by fatigue*

Sonia E. Ruiz, Dante Tolentino y Marco A. Torres

*Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México*

Correos: [SRuizG@iingen.unam.mx](mailto:SRuizG@iingen.unam.mx); [DTolentinoL@iingen.unam.mx](mailto:DTolentinoL@iingen.unam.mx); [MTorresP@iingen.unam.mx](mailto:MTorresP@iingen.unam.mx)

### Resumen

Se propone un criterio para evaluar el factor de confianza que tendrá una estructura después de cierto intervalo de tiempo. El factor de confianza indica lo adecuado que es el nivel de desempeño que presenta una estructura ante solicitaciones externas. Dicho factor considera incertidumbres tanto en la capacidad como en la demanda estructural. La formulación se hace de acuerdo con el formato de Diseño basado en Factores de Demanda y de Capacidad. Se comparan cuatro casos: *A*) considerando que la capacidad estructural se deteriora con el tiempo, mientras que la demanda estructural permanece constante, *B*) suponiendo que solo la demanda estructural (dada una intensidad) varía en el tiempo, *C*) considerando que varían en el tiempo simultáneamente la capacidad y la demanda estructural, y *D*) ignorando el efecto del deterioro estructural. El criterio se aplica a una plataforma marina tipo “*jacket*”. El deterioro se considera mediante el crecimiento de grietas causadas por fatiga en los extremos de algunos elementos estructurales críticos. Se concluye que para evaluar el factor de confianza que tiene la estructura después de cierto tiempo es más significativo considerar la influencia del deterioro en la capacidad que en la demanda estructural; sin embargo, se recomienda considerar en el análisis tanto la degradación de la capacidad estructural como su influencia en la demanda estructural, para una intensidad dada.

**Descriptor:** factor de confianza, deterioro estructural, fatiga, confiabilidad, plataforma marina tipo “*jacket*”.

---

### *Abstract*

*An approach to evaluate the confidence factor for structures at the end of an interval of time is proposed. The confidence factor indicates the adequacy of the performance level of a structure subjected to external loads. The factor considers the uncertainties implicit in the structural capacity and in the structural demand. The formulation is made in accordance with the Demand and Capacity Factor Design Format. Four scenarios are compared: A) structural capacity deteriorates over a time interval, while structural demand remains constant, B) only structural demand (for a given intensity) varies in time, C) both structural capacity and structural demand vary simultaneously in time, and D) the effect of structural deterioration is neglected. The approach is applied to an offshore jacket platform. Deterioration is taken into account by analyzing the growth of fatigue cracks in both ends of several critical structural elements. It is concluded that for the evaluation of the confidence factor over an interval of interest, for the case analyzed, it is more significant to consider the variation in time of the structural capacity rather than that of the structural demand; however, it is recommended to consider both (structural capacity and structural demand) in the analysis.*

---

**Key words:** confidence factor, structural deterioration, fatigue, reliability, jacket offshore platform.

## Introducción

Una estructura sometida a condiciones de carga, esfuerzos y deformaciones durante su vida útil, originadas por sus características de operación y por su exposición a eventos naturales (*i.e.* sismo, viento, oleaje, etc.), generalmente sufre, a medida que pasa el tiempo, un deterioro gradual en sus propiedades mecánicas. Esto da lugar a que se debilite su capacidad estructural y, por otro lado, a que se incremente su demanda estructural ante la acción de las sollicitaciones a las que está expuesta. Como consecuencia, el valor de su confiabilidad estructural cambia (generalmente disminuye) a medida que pasa el tiempo, por lo que es conveniente contar con herramientas matemáticas que permitan evaluar la confiabilidad para diferentes intervalos de tiempo.

El factor de confianza y su correspondiente nivel de confianza fueron propuestos por Cornel (1996), dentro del formato *Demand and Capacity Factor Design (DCFD)*, para evaluar la confiabilidad de estructuras (Cornel *et al.* 2002). La formulación original no considera el deterioro que sufren las estructuras con el tiempo. Posteriormente, se han desarrollado expresiones que toman en cuenta la evolución en el tiempo de la degradación de la capacidad estructural (Torres y Ruiz, 2007; Vamvatsikos y Dolšek, 2011; Tolentino *et al.*, 2012). El *factor de confianza*,  $\lambda_{conf}$ , denota qué tan adecuado es el nivel de desempeño que presenta una estructura ante las sollicitaciones externas. Dicho factor considera incertidumbres tanto en la capacidad como en la demanda estructural, por lo que la seguridad con la que realmente se presenta dicho factor de confianza se expresa mediante cierto *nivel de confianza*,  $K_x$ .

En la literatura se han propuesto varios enfoques para evaluar la confiabilidad de las estructuras que sufren deterioro estructural con el tiempo (Mori y Ellingwood, 1993; Montes-Iturrizaga *et al.*, 2003; Straub, 2009; Pourgharibshahi y Taghikhany, 2012); sin embargo, ninguno de estos estudios evalúa la confiabilidad estructural en el formato *DCFD*, como se propone en este estudio. En el formato *DCFD*, de forma análoga a los métodos *LRFD (Load and Resistance Factor Design)* empleados en varios códigos de diseño, se multiplica la demanda y capacidad estructural por factores de seguridad obtenidos probabilísticamente.

En el presente estudio se desarrollan expresiones matemáticas cerradas, extendiendo la formulación hecha por Torres y Ruiz (2007), con el fin de calcular el factor de confianza  $\lambda_{conf}(t)$  y el nivel de confianza,  $K_x(t)$ , en función del tiempo. Una diferencia entre el presente trabajo y el de Torres y Ruiz (2007) es que estos últimos suponen que la mediana de la capacidad estructural se degrada de manera lineal durante todo el intervalo de tiempo en estudio, mientras que en el presente trabajo se supone que la capacidad decrece linealmente en sub-intervalos de tiempo, de manera que la reducción total de la capacidad puede representarse mediante una función no-lineal en el intervalo total de tiempo.

La ventaja de suponer un comportamiento no lineal de la degradación de la capacidad es la facilidad para generalizar diferentes tipos de problemas con comportamientos más apegados a la realidad, lo cual es complicado cuando se supone que dicha degradación es lineal. Otra aportación del presente trabajo es que aquí se presenta una solución para el caso en que la demanda estructural varía en el tiempo, mientras que la capacidad permanece constante. El presente trabajo compara, mediante un ejemplo, el factor de confianza para los siguientes casos:

- A) Cuando la capacidad estructural varía en el tiempo, mientras que la demanda es independiente del tiempo.
- B) Cuando la demanda estructural (dada una intensidad) varía en el tiempo, mientras que la capacidad es independiente del tiempo.
- C) Cuando varían en el tiempo de manera simultánea, la capacidad y la demanda estructural.
- D) Cuando no se considera degradación estructural.

El ejemplo de aplicación que se presenta corresponde a una plataforma marina tipo “*jacket*” instalada en la sonda de Campeche, México. El deterioro estructural se considera a través del crecimiento de grietas causadas por fatiga en algunos nodos críticos de la estructura, originadas por las condiciones de oleaje

**Formulación original del factor de confianza  $\lambda_{conf}$  (sin considerar deterioro estructural)**

El valor esperado de la tasa anual de falla,  $\nu_F$ , obtenido a través del método simplificado planteado por Cornell (1996) se estableció originalmente para evaluar la confiabilidad sísmica de edificios. Posteriormente Cornell *et al.* (2002) lo aplicaron para evaluar la confiabilidad de edificios de acero ante solicitaciones sísmicas. En el presente estudio dicha formulación se ha adecuado para evaluar la confiabilidad de estructuras sujetas a oleaje (*i.e.*, plataformas marinas). Esto es posible realizarlo debido a que los conceptos involucrados en ambos tipos de problemas (*i.e.*, descripción probabilista de la demanda estructural y de la capacidad estructural, curvas de peligro ambiental, representación del deterioro de la capacidad estructural mediante expresiones matemáticas simples, etc) son similares. Tomando en cuenta lo anterior, la tasa anual de falla estructural,  $\nu_F$ , de una estructura sujeta a oleaje puede calcularse mediante la siguiente expresión (Cornell *et al.*, 2002):

$$\nu_F = k(h_{m\acute{a}x\hat{C}})^{-r} \exp\left[\frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\sigma_{\ln D|_{h_{m\acute{a}x\hat{C}}}^2} + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{DU}^2 + \sigma_{CU}^2)\right] \quad (1)$$

donde  $h_{m\acute{a}x\hat{C}} = \left[\frac{\hat{C}}{a}\right]^{\frac{1}{b}}$  es la altura máxima de ola,  $h_{m\acute{a}x}$ , asociada con la mediana de la capacidad,  $\hat{C}$ ;  $\sigma_{\ln D|_{h_{m\acute{a}x\hat{C}}}^2}$  y  $\sigma_{\ln C}^2$  son las varianzas de los logaritmos naturales de la demanda,  $D$ , dada una altura máxima de ola,  $h_{m\acute{a}x}$ , y de la capacidad estructural,  $C$ , correspondientes al estado límite de interés;  $\sigma_{DU}^2$  y  $\sigma_{CU}^2$  representan las varianzas producidas por las incertidumbres epistémicas asociadas a la demanda y a la capacidad, respectivamente;  $a$  y  $b$  son parámetros que definen la forma de la mediana de la demanda, en función de la altura máxima de ola,  $h_{m\acute{a}x}$ .

La ecuación 1 fue obtenida por Cornell *et al.* (2002) con base en el Teorema de Probabilidad Total tomando en cuenta todas las posibles intensidades que pueden presentarse en el sitio de interés y la probabilidad condicional de falla de la estructura ante cierto nivel de sollicitación, bajo las siguientes suposiciones:

1. La curva de peligro de oleaje,  $\nu(h_{m\acute{a}x})$ , se puede representar mediante la expresión  $\nu(h_{m\acute{a}x}) = k(h_{m\acute{a}x})^{-r}$ , donde  $k$  y  $r$  son parámetros que se ajustan a la forma de la curva de peligro de oleaje,
2. La mediana de la demanda estructural,  $\hat{D}$ , se representa como función de la carga de oleaje,  $h_{m\acute{a}x}$ , mediante la expresión  $\hat{D} = a \cdot (h_{m\acute{a}x})^b$ ,
3. La demanda estructural para cierta altura máxima de ola,  $h_{m\acute{a}x}$ , tiene una distribución lognormal con desviación estándar del logaritmo natural igual a  $\sigma_{\ln D|_{h_{m\acute{a}x}}}$ ,
4. La capacidad estructural del estado límite presenta una mediana de capacidad,  $\hat{C}$ , de tipo lognormal, y la desviación estándar del logaritmo natural es igual a  $\sigma_{\ln C}$ .

Con la finalidad de contar con una formulación que sea familiar para los ingenieros, Cornell *et al.* (2002) establecen que la tasa media anual de falla,  $\bar{\nu}_F$ , sea igual a un valor permisible,  $\nu_0$ . A partir de ello y realizando algunos arreglos, se llega a la siguiente expresión (que es similar a la que utiliza el formato *Load and Resistance Design Factor*; Ellingwood, 1978):

$$\phi\hat{C} \geq \gamma\hat{D}^{\nu_0} \quad (2)$$

donde:

$$\phi = \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{k}{b} \sigma_{CT}^2\right] \quad \gamma = \exp\left[\frac{1}{2} \frac{k}{b} \sigma_{DT|h_{m\acute{a}x}}^2\right]$$

(3)

donde  $\sigma_{CT}^2 = \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{CU}^2$ , y  $\sigma_{DT|h_{m\acute{a}x}}^2 = \sigma_{\ln D|h_{m\acute{a}x}}^2 + \sigma_{DU}^2$  son las incertidumbres totales asociadas a la capacidad y a la demanda estructural, respectivamente;  $\hat{D}^{V_0}$  representa la mediana de la demanda estructural para una altura máxima de ola dada,  $h_{m\acute{a}xV_0}$ , que a su vez se define como el nivel máximo de ola,  $h_{m\acute{a}x}$ , con probabilidad anual,  $V_0$ , de ser excedida:

$$\hat{D}^{V_0} = a(h_{m\acute{a}xV_0})^b \quad (4)$$

A partir de la formulación anterior, se obtiene el factor de confianza:

$$\lambda_{conf} = \frac{\phi \hat{C}}{\gamma \hat{D}^{V_0}} \quad (5)$$

Cuando  $\lambda_{conf}$  excede la unidad indica que hay una mayor confianza de que la estructura cumpla con el comportamiento deseado. Si  $\lambda_{conf}$  es menor que la unidad indica que dicha confianza es menor. El nivel de confianza asociado a que la estructura cumpla con el “valor permisible”,  $V_0$ , se puede evaluar mediante la siguiente expresión (Cornell *et al.*, 2002):

$$K_x = \frac{\ln \lambda_{conf}}{\sigma_{UT}} + \frac{r \sigma_{UT}}{2b} \quad (6)$$

donde  $K_x$  es la variable Gaussiana estandarizada con probabilidad  $x$  de no ser excedida, por lo que  $x$  indica el grado de confianza,  $\sigma_{UT} = \sqrt{\sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2}$ , donde  $\sigma_{UD}$  y  $\sigma_{UC}$  representan las incertidumbres epistémicas ( $U$ ) asociadas a la demanda ( $D$ ) estructural y a la capacidad ( $C$ ) estructural, respectivamente.

La ecuación anterior implica que el número anual de fallas,  $\nu_F$ , asociadas a un nivel de confianza  $x$  está dado por (Cornell *et al.*, 2002):

$$\nu_{F|x} = \hat{\nu}_F \exp\left(K_x \frac{r}{b} \sigma_{UT}\right) = k(h_{m\acute{a}x\hat{C}})^{-r} \exp\left[\frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\sigma_{\ln D|h_{m\acute{a}x\hat{C}}}^2 + \sigma_{\ln C}^2)\right] \exp\left(K_x \frac{r}{b} \sigma_{UT}\right) \quad (7)$$

donde  $\hat{\nu}_F$  representa la mediana (50% confianza) de  $\nu_F$ . El formato expresado mediante las ecuaciones 5, 6 y 7 se utiliza en los lineamientos establecidos por la SAC (Sociedad compuesta por la Asociación de Ingenieros Estructurales de California, SEAOC, el Consejo de Tecnología Aplicada de EUA, ATC, y las Universidades de California dedicadas a el estudio de la Ingeniería Sísmica, CUREe) a petición del FEMA (Federal Emergency Management Agency), para la evaluación de estructuras.

## Formulación del factor y del nivel de confianza en función del tiempo

En lo que sigue se extiende la metodología descrita en la sección anterior para el caso en que las propiedades mecánicas de los elementos estructurales cambian en el tiempo (debido a corrosión, fatiga, deformaciones, etc.), y como consecuencia, se modifica el valor de la capacidad y/o la demanda estructural con el tiempo.

De manera similar a la ecuación 7, el número de fallas asociadas a un nivel de confianza  $x$ , al final del intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t)$ , se puede expresar como:

$$\eta_{F|x}(t, \Delta t) = \hat{\eta}_F(t, \Delta t) \exp(K_{x|t} \frac{r}{b} \sigma_{UT|t}) \Omega(t, \Delta t) \quad (8)$$

donde:

$$\hat{\eta}_F(t, \Delta t) = k \left( h_{máx\hat{c}|t} \right)^r \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{r^2}{b_t^2} \left( \sigma_{\ln D|h_{máx\hat{c},t}}^2 + \sigma_{\ln C|t}^2 \right) \right] \quad (9)$$

La variable  $\eta_{F|x}(t, \Delta t)$  representa el número de fallas correspondiente a un nivel de confianza  $x$ , dentro del intervalo  $[t, t + \Delta t)$ ;  $\hat{\eta}_F(t, \Delta t)$  es la mediana del número esperado de fallas para el intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t)$ . Las demás variables significan lo mismo que se describió en la sección anterior excepto que ahora todas se refieren al valor que toma cada variable en el tiempo  $t$ . La función  $\Omega(t, \Delta t)$  representa un factor de corrección del número esperado de fallas que se expresa mediante funciones matemáticas cerradas cuya forma depende del caso que se trate (casos A, B o C, listados en la Introducción). Generalmente dicho factor de corrección aumenta el valor del número esperado de fallas por efecto de la degradación de la capacidad estructural (caso A), el aumento de la demanda, dada una altura máxima de ola (caso B), o la combinación de ambos (caso C).

Con el fin de llegar a una expresión similar a la ecuación 5 pero en función del tiempo, aquí se establece la condición de que el número de fallas asociadas a un nivel de confianza  $x$ , al final del intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t)$ , debe ser igual a cierto valor prefijado  $\nu_0$  multiplicado por el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , es decir:

$$\eta_{F|x}(t, \Delta t) = k \left[ \left( \frac{\hat{C}(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{b(t)}} \right]^{-r} \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{r^2}{b(t)^2} \left( \sigma_{\ln D|h_{máx\hat{c},t}}^2 + \sigma_{\ln C|t}^2 \right) \right] \exp(K_{x|t} \frac{r}{b} \sigma_{UT|t}) \Omega(t, \Delta t) = \nu_0 \Delta t \quad (10)$$

A partir de esta condición se llega a la siguiente expresión que describe el factor de confianza al final del intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t)$ :

$$\lambda_{conf}(t, \Delta t) = \left[ \frac{\phi^o}{\gamma^o} \frac{\hat{C}(t)}{\hat{D}^{\nu_0}(t)} \right] \left[ \frac{\Omega(t, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{-b(t)/r} \quad (11)$$

Las variables  $\phi^o$  y  $\gamma^o$  pueden resultar función del tiempo dependiendo del caso que se trate (A, B o C). La función  $\Omega(t, \Delta t)$  tiene el mismo significado que en la ecuación 8, y su forma también depende del caso que se trate (A, B o C). En las secciones que siguen se deducen las formas de  $\Omega(t, \Delta t)$  y de  $\lambda_{conf}(t, \Delta t)$  correspondientes a los casos A, B y C.



## Factor de confianza correspondiente a los casos A, B y C.

Caso A. Considerando que la capacidad estructural varía en el tiempo, mientras que la demanda estructural es independiente del tiempo.

Se parte de que el valor esperado del número de fallas,  $\bar{\eta}_F(t, \Delta t)$ , durante un intervalo de tiempo puede expresarse como una extensión de la ecuación 1, como sigue:

$$\bar{\eta}_F(t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} k(h_{m\acute{a}x\hat{c},\tau})^{-r} \exp\left\{\frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2(\tau)} [\sigma^2_{\ln D|h_{m\acute{a}x\hat{c}}(\tau)} + \sigma^2_{\ln C(\tau)} + \sigma^2_{UD(\tau)} + \sigma^2_{UC(\tau)}]\right\} d\tau \quad (12)$$

donde  $h_{m\acute{a}x\hat{c},\tau} = \left[\frac{\hat{C}(\tau)}{a(\tau)}\right]^{\frac{1}{b(\tau)}}$  es la altura máxima de ola asociada con la mediana de la capacidad,  $\hat{C}(\tau)$ , en el tiempo  $\tau$ ;  $\sigma^2_{\ln D|h_{m\acute{a}x\hat{c}}(\tau)}$  y  $\sigma^2_{\ln C(\tau)}$  son las varianzas de los logaritmos naturales de la demanda estructural dada una altura máxima de ola,  $h_{m\acute{a}x}$ , y de la capacidad estructural, en el instante de tiempo  $\tau$ ;  $\sigma^2_{UD(\tau)}$  y  $\sigma^2_{UC(\tau)}$  son las varianzas producidas por las incertidumbres epistémicas relacionadas con la demanda estructural ( $D$ ) y la capacidad estructural ( $C$ ) del estado límite de interés, en el instante de tiempo  $\tau$ , respectivamente.

Con el fin de considerar que la capacidad estructural varía en el tiempo, mientras que la demanda es constante, se hacen las siguientes suposiciones:

5. La mediana de la capacidad varía linealmente en un sub-intervalo ( $T$ ) de tiempo, de la siguiente manera:

$$\hat{C}(\tau) = \alpha_T + \beta_T \tau \quad T = 1, 2, 3, \dots, n ; \beta_T < 0 \quad (13)$$

Donde  $T$  es el número de sub-intervalo de tiempo,  $n$  es el número de sub-intervalos de tiempo considerados para el análisis. El intervalo total de interés está compuesto por  $n$  sub-intervalos.

6. La varianza del logaritmo natural de la capacidad estructural,  $\sigma^2_{\ln C(\tau)}$ , es constante en cada uno de los sub-intervalos de interés; es decir  $\sigma^2_{\ln C(\tau)} = \sigma^2_{\ln C,T}$ .

7. Los parámetros  $a(\tau)$  y  $b(\tau)$  son constantes en todo el intervalo de tiempo de interés; es decir  $a(\tau) = a$  y  $b(\tau) = b$ .

Tomando en cuenta las suposiciones 1 a 7, la ecuación 12 resulta:

$$\bar{\eta}_{FC,T}(t, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha_T + \beta_T t}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \exp\left[ \frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\sigma^2_{\ln D|h_{m\acute{a}x\hat{c}}} + \sigma^2_{\ln C,T} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right] \Omega_{C,T}(t, \Delta t) \quad (14)$$

donde:

$$\Omega_{C,T}(t, \Delta t) = \frac{(\alpha_T + \beta_T t)b}{\beta_T(b-r)} \left[ -1 + \left( 1 + \frac{\beta_T \Delta t}{\alpha_T + \beta_T t} \right)^{1-\frac{r}{b}} \right] \quad (15)$$

donde  $\Omega_{C,T}(t, \Delta t)$  representa un factor de corrección del número esperado de fallas que considera solamente el deterioro de la capacidad estructural y no considera que la demanda estructural varía con el tiempo. Una ecuación similar a la ecuación 14 fue obtenida por Torres y Ruiz (2007), excepto que estos autores consideran que la

capacidad estructural disminuye linealmente durante todo el intervalo de tiempo en estudio; mientras que aquí la ecuación 13 se ha generalizado para que la mediana de la capacidad sea lineal en cada sub-intervalo de tiempo, pero que pueda resultar no-lineal en su conjunto (como se ilustra en el ejemplo que se presenta más adelante).

Para obtener la ecuación 2 Cornell et al. (2002) consideraron que  $V_F = V_0$ ; de manera similar, aquí se establece que el número esperado de fallas asociadas a un nivel de confianza  $x$ , al término del intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t)$ , debe ser igual a un valor prefijado  $V_0$  multiplicado por el intervalo  $\Delta t$ , como sigue:

$$\eta_{FC,T}(t, \Delta t) = V_0 \cdot \Delta t \quad (16)$$

Sustituyendo la ecuación 14 en la ecuación 16, se tiene:

$$k \left( \frac{\alpha_T + \beta_T t}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\sigma^2_{\ln D|_{h_{máx}}} + \sigma^2_{\ln C,T} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right] \Omega_{C,T}(t, \Delta t) = V_0 \cdot \Delta t \quad (17)$$

De la ecuación anterior resulta:

$$\lambda_{confC,T}(t, \Delta t) = \frac{\phi_T \cdot \hat{C}_T}{\gamma \cdot \hat{D}^{V_0}} \left[ \frac{\Omega_{C,T}(t, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{-\frac{b}{r}} \quad (18)$$

Esta ecuación permite conocer la variación del factor de confianza al final del sub-intervalo  $T$  de tiempo, considerando el deterioro de la capacidad estructural, y suponiendo que la demanda estructural (para cierta intensidad) no varía con el tiempo.

Caso B. Considerando que la demanda estructural (para cierta intensidad) varía en el tiempo, mientras que la capacidad estructural es independiente del tiempo.

En esta sección se considera exclusivamente la influencia que tiene la demanda estructural (para una intensidad dada) en  $\lambda_{conf}$ , manteniendo la capacidad estructural como independiente del tiempo. Para ello se hacen las siguientes suposiciones:

8. La mediana de la demanda estructural como función del tiempo,  $t$ , dada una altura máxima de ola,  $h_{máx}$ , está dada por:

$$\hat{D}(\tau) = (a + f \cdot t) \cdot (h_{máx})^b \quad (19)$$

Nótese que la ecuación 19 es una función ampliada de la expresión  $\hat{D}(\tau) = ay^b$  utilizada por Cornell et al. (2002).

9. La mediana de la capacidad  $\hat{C}(\tau)$  es constante durante el intervalo total de tiempo en estudio, por lo que:

$$\hat{C}(\tau) = \alpha \quad (20)$$

10. La varianza del logaritmo natural de la demanda, es constante en el intervalo de tiempo en estudio:

$$\sigma^2_{\ln D|_{h_{máx}}}(\tau) = \sigma^2_{\ln D|_{h_{máx}}}$$

Tomando en cuenta las consideraciones 1 a 9, excepto la 5, e integrando la ecuación 12, se obtiene:

$$\eta_{FD}(t, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha}{a + ft} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\sigma^2_{\ln D}|_{h_{\max \hat{c}}} + \sigma^2_{\ln C} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right] \Omega_D(t, \Delta t) \quad (21)$$

donde:

$$\Omega_D(t, \Delta t) = \frac{b\alpha}{f(b+r)} \left[ - \left( \frac{\alpha}{a + ft} \right)^{-1} + \left( \frac{\alpha}{a + f(t + \Delta t)} \right)^{-\frac{b+r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a + ft} \right)^{\frac{r}{b}} \right] \quad (22)$$

donde  $\Omega_D(t, \Delta t)$  es un factor de corrección del número esperado de fallas que considera sólo la variación de la demanda estructural (para una intensidad dada) en el intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t)$ .

Suponiendo la misma consideración que se siguió para obtener la ecuación 16, y sustituyendo términos, se tiene:

$$k \left( \frac{\alpha}{a + ft} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\sigma^2_{\ln D}|_{h_{\max \hat{c}}} + \sigma^2_{\ln C} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right] \Omega_D(t, \Delta t) = v_0 \cdot \Delta t \quad (23)$$

Realizando algunos arreglos algebraicos, se tiene:

$$\lambda_{confD,T}(t, \Delta t) = \frac{\phi \cdot \hat{C}}{\gamma \cdot \hat{D}^{v_0}} \left[ \frac{\Omega_D(t, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{-\frac{b}{r}} \quad (24)$$

La ecuación anterior sirve para evaluar el factor de confianza al final del intervalo  $[t, t + \Delta t)$  cuando únicamente se considera la variación de la demanda estructural (para una intensidad dada) con el tiempo.

Caso C. Considerando que varían simultáneamente en el tiempo la capacidad y la demanda (para cierta intensidad).

En esta sección se establece la expresión correspondiente al número esperado de fallas al final de cierto intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t)$  en donde se considera de manera simultánea la variación en el tiempo de la capacidad y de la demanda estructural. Para ello se consideran las suposiciones 1 a 10, excepto la 8. A partir de la ecuación 12 se obtiene:

$$\eta_{FCD,T}(t, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha_T - \beta_T t}{a + ft} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\sigma^2_{\ln D}|_{h_{\max \hat{c}, T}} + \sigma^2_{\ln C} + \sigma^2_{UD} + \sigma^2_{UC}) \right] \Omega_{CD,T}(t, \Delta t) \quad (25)$$

donde:

$$\Omega_{CD,T}(t, \Delta t) = \frac{b(\alpha_T + \beta_T t)}{(b-r)\beta_T} \left[ \frac{(a + ft)\beta_T}{-f\alpha_T + a_T\beta_T} \right]^{-\frac{r}{b}} \{ -F(A, B; C; x(t)) + F(A, B; C; x(t + \Delta t)) \}.$$

$$\left\{ 1 + \left( \frac{\beta_T f_T \Delta t}{(a + f t) \beta_T} \right)^{-\frac{r}{b}} \left[ 1 + \frac{\beta_T \Delta t}{\alpha_T + \beta_T t} \left[ \frac{\alpha_T + \beta_T (t + \Delta t)}{a + f (t + \Delta t)} \right]^{-\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha_T - \beta_T t}{a + f t} \right)^{\frac{r}{b}} \right] \right\} \quad (26)$$

$$\text{donde } A = 1 - \frac{r}{b}; B = -\frac{r}{b}; C = 2 - \frac{r}{b}; x(t) = \frac{f (\beta_T t + \alpha_T)}{f \alpha_T - a \beta_T}; x(t + \Delta t) = \frac{f [\beta_T (t + \Delta t) + \alpha_T]}{f \alpha_T - a \beta_T}$$

donde  $\Omega_{CD,T}(t, \Delta t)$  representa al factor de corrección del número esperado de fallas que considera de manera simultánea la variación de la demanda estructural (para una intensidad dada) y de la capacidad estructural en el intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t)$ . Una expresión similar fue obtenida por Tolentino *et al.* (2012) para el número esperado de fallas al final de un intervalo de tiempo después de construida la estructura; sin embargo, en el presente estudio se generaliza la expresión para sub-intervalos ( $T$ ) de tiempo, de esta manera es posible que la capacidad pueda presentar un deterioro que tenga forma no-lineal en el tiempo (como se ilustra en el ejemplo que se presenta más adelante). Además, aquí la función hipergeométrica  $F(A, B; C; x)$  que interviene en la ecuación 26 se resuelve de manera práctica y sencilla a través de la siguiente serie hipergeométrica (Rainville, 1961):

$$F(A, B; C; x) = 1 + \frac{AB}{1!C} x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{2!C(C+1)} x^2 + \dots + \frac{A(A+1) \dots (A+n-1)B(B+1) \dots (B+n-1)}{C(C+1) \dots (C+n-1)n!} x^n \quad (27)$$

donde  $A, C$  y  $x$  pueden tomar cualquier número real,  $B$  debe ser un número real entero.

Finalmente, haciendo las mismas consideraciones que se siguieron para obtener la ecuación 16, se tiene:

$$k \left( \frac{\alpha_T - \beta_T t}{a + f t} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\sigma_{\ln D}^2 |_{h_{máx}} + \sigma_{\ln C,T}^2 + \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2) \right] \Omega_{CD,T}(t, \Delta t) = v_0 \cdot \Delta t \quad (28)$$

Haciendo algunos arreglos algebraicos, se obtiene lo que sigue:

$$\lambda_{confCD,T}(t, \Delta t) = \frac{\phi_T \cdot \hat{C}_T}{\gamma \cdot \hat{D}^{v_0}} \left[ \frac{\Omega_{CD,T}(t, \Delta t)}{t} \right]^{-\frac{b}{r}} \quad (29)$$

donde  $\lambda_{confCD,T}(t, \Delta t)$  permite evaluar al final de un intervalo de tiempo, el factor de confianza cuando se considera simultáneamente la variación en el tiempo de la capacidad y de la demanda estructural, para cierto nivel de intensidad.

## Ejemplo ilustrativo

### Descripción de la plataforma marina y de las cargas ambientales

Con el propósito de presentar los pasos a seguir correspondientes al criterio propuesto en lo que sigue se calcula el factor de confianza (ecuaciones 5, 18, 24 y 29) de un modelo estructural 2D simplificado de una plataforma marina de acero tipo “*jacket*” ubicada en el sitio Akal, sonda de Campeche, México, donde se tiene un tirante de agua de 45.11m. La plataforma tiene una altura de 48 m (ver figura 1). Se modela uno de los marcos interiores de la plataforma con las propiedades geométricas indicadas en la tabla 1. Los elementos son de acero estructural A-36, y se consideran propiedades mecánicas medias.

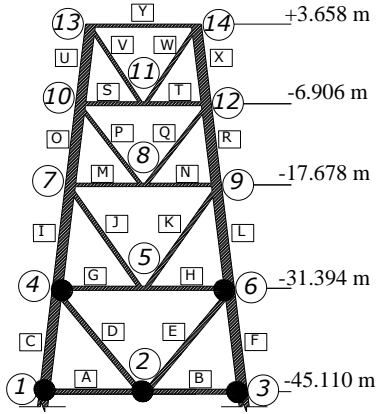


Tabla 1. Propiedades geométricas de los elementos

Elemento	Diámetro (m)	Espesor (m)
C, F, I, L, O, R	1.334	0.0159
A, B, D, E	0.660	0.0159
G, H, J, K	0.559	0.0127
M, N	0.457	0.0159
P, Q	0.457	0.0127
S, T	0.508	0.0095
U, X	1.334	0.0318
V, W	0.457	0.0238
Y	0.406	0.0127

Figura 1. Plataforma marina tipo "jacket".

En este estudio se consideraron las condiciones de oleaje, viento y corrientes marinas a partir de la norma *NRF-003-PEMEX-2000* para el sitio Akal. En las figuras 2a, b y c se presentan las curvas de peligro ambiental ajustadas mediante una función de probabilidad anual acumulada de valores extremos de Gumbel, que tiene la forma:

$$P(Y \geq y) = 1 - \exp\{-\exp[-a(y-u)]\} \quad 0 \leq h \leq \infty \quad (30)$$

donde  $Y$  representa la altura máxima de ola, velocidad de viento o velocidad de corriente, según sea el caso. Los valores de  $a$  y  $u$  se muestran en la figuras 2a, b y c.

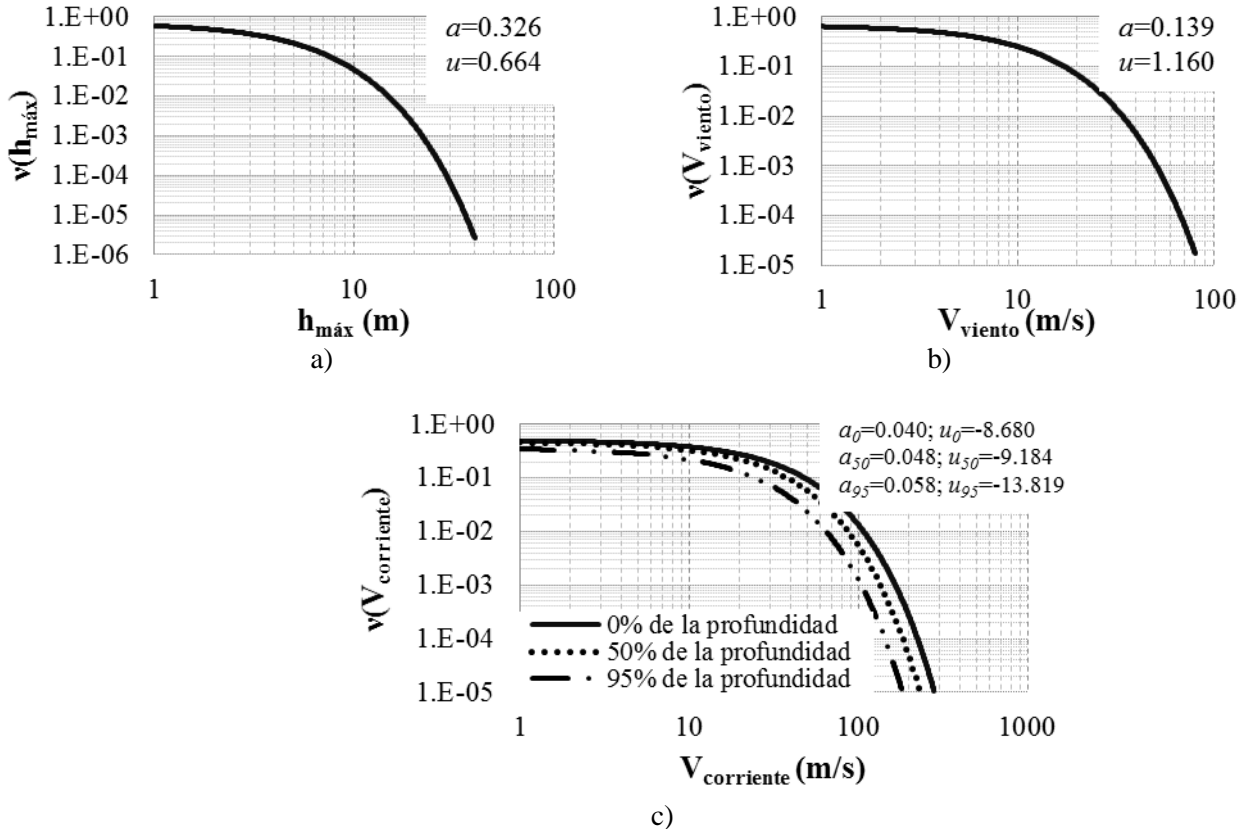


Figura 2. Curvas de peligro. a) oleaje, b) velocidades de viento y c) velocidades de corriente.

### Análisis por fatiga

Debido a que la plataforma marina continuamente está sujeta a cargas de oleaje de operación a lo largo de su vida útil, es necesario detectar la presencia de grietas causadas por fatiga en las juntas críticas de la plataforma, y, además, predecir su crecimiento en el tiempo. Los nodos críticos se indican con los números 1, 2, 3, 4 y 6 en la figura 2. Estos se detectaron mediante análisis estáticos no-lineales (“*push over*”).

El análisis por fatiga se realizó para dos puntos de cada elemento interno que se conecta a un nodo crítico. Estos puntos corresponden a zonas donde se presentan los esfuerzos máximos y mínimos en el sentido transversal del elemento. Se estudiaron dos puntos para los nodos 1 y 3, y cuatro puntos en los nodos 2, 4, y 6 (debido a que en estos nodos se conectan dos elementos).

Los esfuerzos mínimos y máximos de los puntos seleccionados se obtuvieron mediante análisis dinámicos “paso a paso” en el tiempo, utilizando un conjunto de oleajes simulados, asociados a diferentes alturas de ola. El contenido de frecuencias de los oleajes se obtuvo a partir de espectros de Pierson-Moskowitz (1964) para la zona. A partir del espectro de Pierson-Moskowitz se obtienen los espectros de amplitudes de ola asociados a diferentes periodos de retorno (Tr), como se muestran en la figura 3.

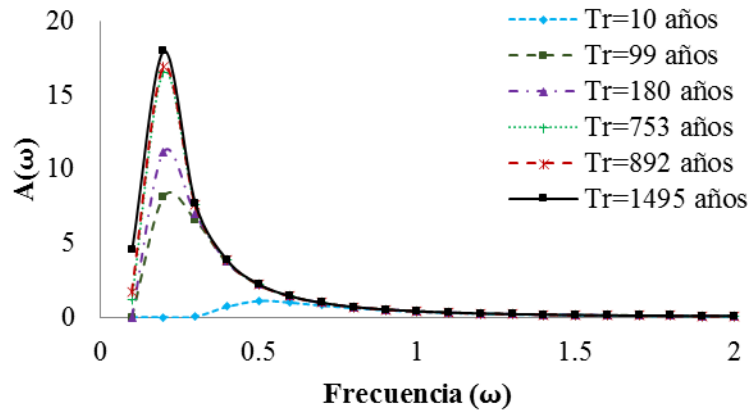


Figura 3. Espectros de amplitudes utilizados para la simulación del oleaje.

Para la simulación del oleaje la superficie del mar,  $h$ , se representa como un proceso estacionario, homogéneo, Gaussiano, que puede expresarse como una superposición lineal de olas regulares con generación aleatoria en sus ángulos de fase,  $\phi$ , con distribución uniforme entre  $0$  y  $2\pi$ .

El crecimiento de grieta promedio de los puntos seleccionados bajo carga aleatoria se obtuvo utilizando la ecuación diferencial modificada (Paris y Erdogan, 1963; Sobczyk y Spencer, 1992):

$$\frac{da'}{dt} = C(\Delta K_{mr})^m \nu' \quad (31)$$

$$\Delta K_{mr} = Y S_{mr} \sqrt{\pi a'} \quad (32)$$

donde  $C$  y  $m$  son parámetros que dependen de las características del material  $\Delta K_{mr}$  es el intervalo de intensidad de esfuerzo medio,  $\nu'$  es la tasa de cruces positivos por cero en un cierto tiempo,  $Y$  es el factor de corrección geométrica (Newman y Raju, 1981),  $S_{mr}$  es el intervalo de esfuerzo medio de la respuesta aleatoria de los elementos (Sobczyk y Spencer, 1992), y  $a'$  es el tamaño de la grieta. En esta ecuación, se reemplaza la carga aleatoria por una carga cíclica equivalente cuya amplitud y frecuencia se expresan en función de las propiedades medias del proceso aleatorio. Sustituyendo la ecuación 32 en la ecuación 31 se obtiene:

$$\int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{(Y\sqrt{\pi a'})^m} = CS_{mr}^m v' t \quad (33)$$

donde  $a_0$  es el tamaño inicial de la grieta y  $a_f$  es el tamaño final de la grieta después de  $N$  ciclos de esfuerzos. El proceso de simulación de grietas se realizó mediante la ecuación 33.

La descripción probabilista del crecimiento de grietas por fatiga se estimó mediante la técnica de simulación de Monte Carlo. En la tabla 2 se muestran los valores de los parámetros estadísticos que se utilizaron para la simulación de grietas. Los parámetros fueron tomados del trabajo de Silva y Heredia (2004) para plataformas ubicadas en la bahía de Campeche.

Tabla 2. Parámetros estadísticos utilizados para la simulación de grietas (Silva y Heredia, 2004).

Parámetro	Valor medio	Desviación estándar	Distribución
$v_0$	En función de la junta y el tiempo	En función de la junta y el tiempo	Lognormal
$S_{mr}$	En función de la junta y el tiempo	En función de la junta y el tiempo	Rayleigh
$a/c$	0.25	-----	-----
$M^*$	3	0.3	Normal
$\ln C^*$	-40.39	-0.69067	Normal
$a_0$	0.00011	-----	-----

\* Coeficiente de correlación  $\rho_{\ln C, m} = 0.9$

Para el análisis se tomaron en cuenta oleajes tanto de operación como de tormenta. Los tiempos de espera entre tormentas se supusieron con distribución exponencial. Durante el tiempo de espera entre tormentas se consideró que actuaba el oleaje de servicio. Se consideró que la altura máxima de ola asociada a una tormenta sigue una distribución de Gumbel (considerando la derivada normalizada de la curva de peligro de oleaje), y que el tamaño de grieta  $a'$ , en un cierto tiempo  $t$ , presenta una distribución lognormal. En la Tabla 3 se muestran las características del oleaje de operación en donde se relaciona la altura de ola, el periodo pico de ola significativo y la probabilidad de ocurrencia de cada estado de mar, obtenidos a partir de la norma *NRF-003-PEMEX-2000*.

Tabla 3. Información oceanográfica para el análisis de fatiga. Condiciones de operación.

Periodo pico (s)	ALTURA DE OLA SIGNIFICANTE (m)														Total:					
	0	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	5.75	6.25		6.75	7.25	7.75	8.25	
0.0-0.9999																				
1.0-1.9999	0.0003	0.0315																		0.0318
2.0-2.9999		0.1695	0.0173																	0.1867
3.0-3.9999		0.0019	0.0401																	0.0591
4.0-4.9999		0.0145	0.2797	0.0212																0.3154
5.0-5.9999		0.0119	0.0531	0.0866	0.0042	0.0001														0.1559
6.0-6.9999		0.0003	0.0025	0.0242	0.0136	0.0009														0.0667
7.0-7.9999		0.0046	0.0189	0.0282	0.0285	0.0072	0.0005													0.0088
8.0-8.9999		0.0008	0.0068	0.0091	0.0159	0.0177	0.0107	0.0004												0.0615
9.0-9.9999		0.0001	0.0008	0.0016	0.0023	0.0027	0.0074	0.0009	0.0021	0.0002										0.0262
10.0-10.9999						0.0003	0.0003	0.0014	0.0016	0.0021	0.0008									0.0065
11.0-11.9999										0.0003	0.0009	0.0005	0.0001							0.0019
12.0-12.9999													0.0001	0.0002						0.0003
Total:	0.0003	0.2549	0.4417	0.1708	0.0646	0.029	0.019	0.0108	0.0038	0.0026	0.016	0.0005	0.0002	0.0002						1.0000

Considerando que el deterioro estructural en la plataforma se presenta por la aparición de grietas en las juntas tubulares, Stacey *et al.* (1996), proponen que la capacidad de la junta intacta,  $P_k$ , sea modificada por un factor de reducción lineal, como se indica en la ecuación 34. El valor de  $P_k$  se puede obtener de acuerdo con el API (1993).

$$P_c = P_k \left( 1 - A_{grieta} / A_{junta} \right) \quad (34)$$

donde  $A_{junta}$  es el área de la sección transversal,  $A_{grieta}$  es el área de la grieta, producto de la suma de las áreas de las grietas de los puntos seleccionados en la sección de interés, y  $P_c$  es la capacidad remanente de la junta agrietada.

## Evaluación de la capacidad en el tiempo de la estructura

Para evaluar la capacidad estructural se sometió a la estructura a una serie de análisis estáticos no lineales (“*push-over*”) utilizando 20 perfiles de carga diferentes, obtenidos a partir de los oleajes simulados. Los perfiles que se utilizaron obedecen a las fuerzas actuantes cuando el oleaje simulado produce el máximo cortante basal. Se considera como condición de daño la aparición y crecimiento de grietas, con la consecuente reducción de la capacidad estructural.

A partir de las 20 curvas de capacidad para cada intervalo de tiempo se obtienen las medianas de la capacidad,  $\hat{C}_T$ , y las desviaciones estándar del logaritmo natural,  $\sigma_{\ln C, T}$ . A partir de la figura 4 se puede verificar que la capacidad presenta una distribución de probabilidades de tipo lognormal, tomando como ejemplo los intervalos de tiempo iguales a 0, 7 y 15 años.

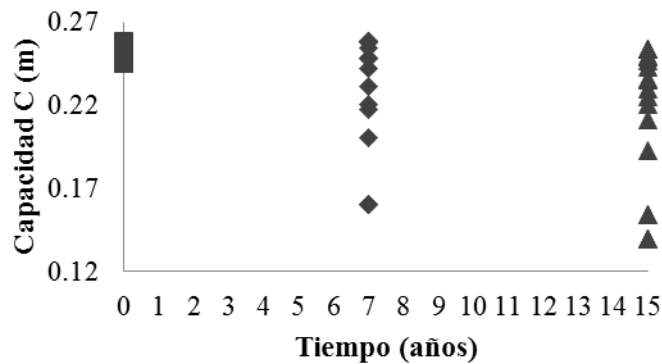


Figura 4. Valores de la capacidad estructural para distintos intervalos de tiempo.

En la figura 5a se presentan las medianas de la capacidad,  $\hat{C}_T$ , en términos del desplazamiento global de la plataforma (correspondiente al nodo 14 de la figura 2), para cuatro sub-intervalos ( $T$ ) de tiempo. Los ajustes de las medianas de la capacidad se realizan como se expresa en la ecuación 13. En la figura 5b se muestran las desviaciones estándar del logaritmo natural de la capacidad estructural,  $\sigma_{\ln C, T}$ . En la figura 5b se puede ver que los valores de las desviaciones estándar del logaritmo natural de la capacidad se incrementan a medida que transcurre el tiempo. Esto se debe a que mientras más grande sea el intervalo de tiempo, existe una probabilidad mayor de que la estructura esté sometida a más oleaje de operación y de tormenta, y con ello se acumula más daño estructural en las juntas críticas, por lo que se tiene una mayor variabilidad en la respuesta de la estructura.

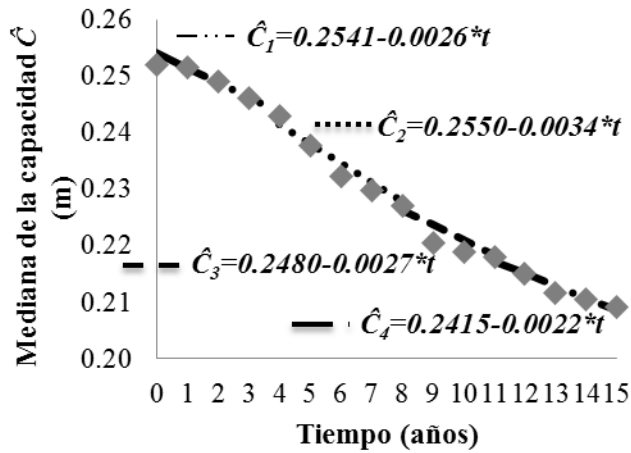
### Demanda estructural en el tiempo, para cierto nivel de altura máxima de ola

Con el fin de evaluar la demanda estructural en el tiempo, se sometió a la plataforma marina a una serie de análisis dinámicos “paso a paso” en el tiempo. Se utilizó un conjunto de oleajes simulados, asociados a diferentes alturas máximas de ola. Se utilizaron las mismas simulaciones de oleaje que se emplearon para estimar el crecimiento de grietas y, con ello, las mismas reducciones de las capacidades de las juntas críticas que se emplearon para evaluar la capacidad,  $\hat{C}$ , en el tiempo.

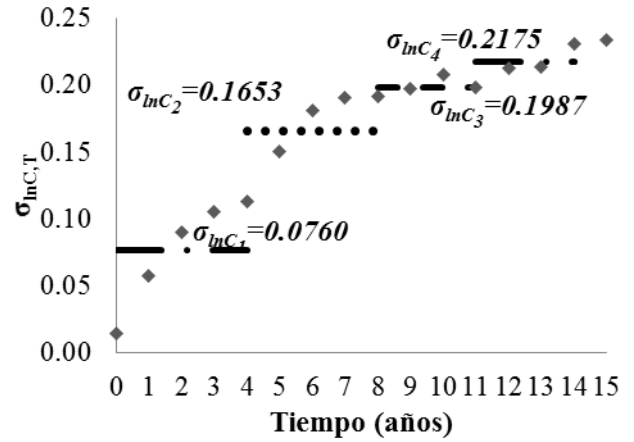
El valor de la mediana de la demanda estructural, dada una altura máxima de ola, se ajustó mediante la ecuación 19:  $\hat{D}(t) = (3.75E - 04 + 5.0E - 08 \cdot t) \cdot (h_{m\acute{a}x})^{2.0}$ ; con la misma forma de ecuación se ajustó la desviación estándar del logaritmo natural de la demanda, dada una altura máxima de ola. Su expresión es como sigue:

$$\sigma_{\ln D|h_{m\acute{a}x}} = (1.65E - 03 + 1.5E - 05 \cdot t) \cdot h_{m\acute{a}x}^{1.5}$$





a)



b)

Figura 5. a) Mediana de la capacidad,  $\hat{C}_T$ , y b) Desviación estándar del logaritmo natural de la capacidad,  $\sigma^2_{\ln C,T}$ , considerando daño acumulado, correspondiente a cuatro sub-intervalos de tiempo.

#### Factor de corrección y número esperado de fallas en el tiempo

En la figura 6 se muestra el número esperado de fallas en el tiempo (ecuaciones 14, 21, 25 y 12) correspondientes a los casos A, B, C y sin daño, respectivamente. Los valores de los parámetros  $k$  y  $r$  que se ajustan a la forma de la curva de peligro de oleaje mediante la expresión  $v(h_{m\acute{a}x}) = k \cdot (h_{m\acute{a}x})^{-r}$ , son iguales a  $k=5 \times 10^3$  y  $r=5$ . Estos corresponden a la región de la curva de peligro de oleaje donde se presenta la máxima altura de ola  $h_{m\acute{a}x}=23$  m asociada a un periodo de retorno de 1485 años, según la norma *NRF-003-PEMEX-2000*. Por otro lado, en este estudio se supone que  $\sigma^2_{UD} = \sigma^2_{UC} = 0.15$ . La figura 6 indica que los valores son mayores para el caso C que para los casos A y B, y que esta diferencia crece a medida que el intervalo de tiempo es mayor.

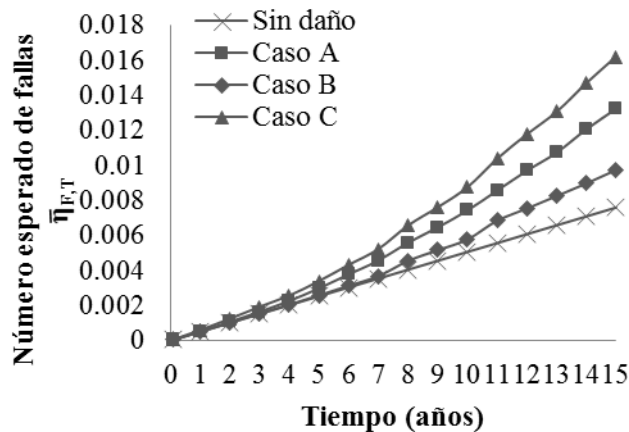


Figura 6. Número esperado de fallas,  $\bar{\eta}_{F,T}$ , al término de un intervalo de tiempo.

### Factor de confianza y su correspondiente nivel de confianza en el tiempo

Los factores de confianza al término de diferentes intervalos de tiempo para los casos A, B, C y sin considerar daño (ecuaciones 18, 24, 29 y 5, respectivamente) se muestran en la figura 7a. Los porcentajes de decremento del factor de confianza con respecto al caso en el que no se considera deterioro estructural, al final de un intervalo de 15 años, son del orden de 27%, 9% y 34% para los casos A, B y C, respectivamente. El nivel de confianza,  $K_x$ , asociado a los factores de confianza presentados anteriormente se presentan en la figura 7b. Se indica que el nivel de confianza para los casos de estudio disminuye a medida que el intervalo de tiempo aumenta. Para el caso en el que no se considera daño, el valor de  $K_x$  se mantiene prácticamente constante con valor de 94%; sin embargo, al término de 15 años el nivel de confianza disminuye de 94% a 77%, 47% y 36%, para los casos A, B y C, respectivamente.

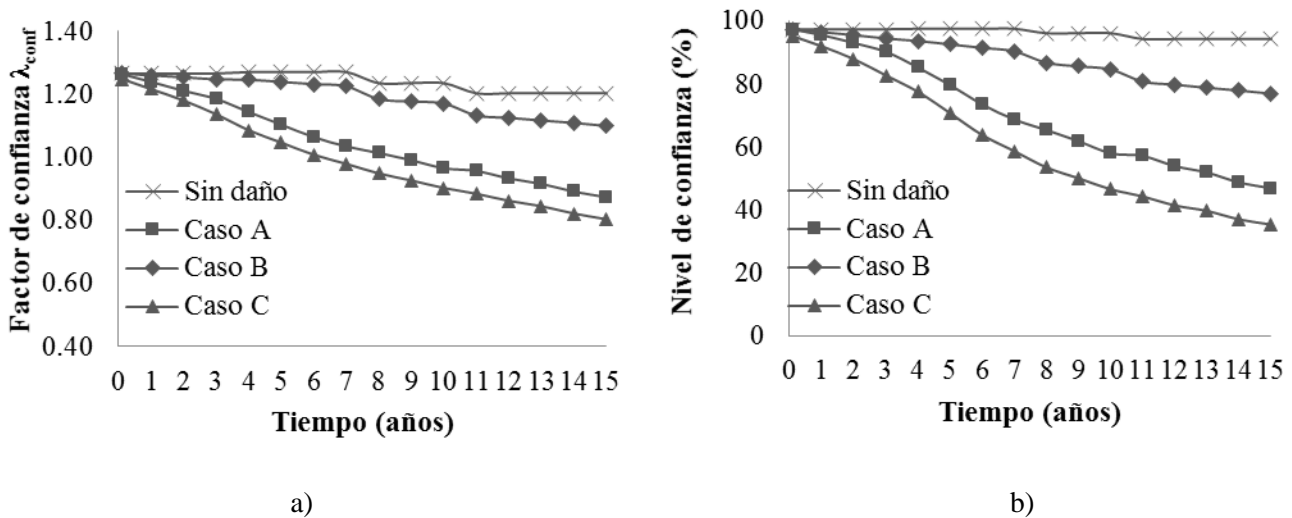


Figura 7. a) Factores de confianza, y b) Niveles de confianza, para los casos de estudio.

### Conclusiones

El criterio que se presenta tiene la ventaja de utilizar expresiones matemáticas cerradas que son útiles para evaluar la confiabilidad de diferentes tipos de estructuras (*i.e.*, edificios, puentes, torres de transmisión, estructuras fuera de la costa, etc.) después de cierto intervalo de tiempo. El criterio puede adaptarse para considerar solicitaciones asociadas a diferentes tipos de fenómenos naturales (*i.e.*, sismo, viento, oleaje, etc.), y/o a diferentes estados límite (*i.e.*, servicio, colapso, etc.).

Los resultados obtenidos en el ejemplo ilustrativo (plataforma marina con crecimiento de grietas causadas por fatiga) hacen ver que para evaluar el factor de confianza después de cierto intervalo de tiempo, se debe considerar tanto la degradación de la capacidad estructural como su influencia en la demanda estructural (para una intensidad dada).

Los resultados indican que es más significativo considerar la influencia del deterioro en la capacidad estructural que en la demanda estructural. Por ejemplo, el factor de confianza que se calcula después de 15 años de construida la plataforma cuando se considera la degradación de la capacidad estructural es 27% menor con respecto al caso en el que no se considera acumulación de daño estructural; sin embargo, dicho porcentaje es de solo 9% para el caso en el que solo se considera el deterioro estructural en el tiempo en la demanda estructural. El valor de los porcentajes antes mencionados son relativamente altos en este ejemplo debido a la simplificación que se hizo del modelo estructural (2D y poco redundante, ver figura 1) y, a la hipótesis que se hace relativa a que las grietas aparecen de manera simultánea en los nodos 1, 2, 3, 4 y 6. Es de esperar que los valores de los porcentajes antes mencionados

sean menores para el caso en que se analice un modelo estructural tridimensional (3D, con un alto nivel de redundancia), y si además, las grietas aparecen de manera aleatoria y no simultáneamente.

El criterio aquí propuesto para evaluar la confiabilidad al final de cierto intervalo de tiempo es útil para tomar decisiones sobre el mantenimiento estructural basado en confiabilidad o en optimación de los costos esperados en el ciclo de vida de una estructura, así como para el diseño de estructuras en las que se establezcan requisitos de confiabilidad al final de cierto intervalo de tiempo.

### Agradecimientos

Se agradece a D. De León y a F. L. Silva sus valiosos comentarios al inicio de este estudio. También se agradecen las atinadas observaciones de los revisores anónimos. Este estudio se realizó con apoyo de la DGAPA-UNAM (PAPIIT IN107011). El segundo autor agradece a CONACYT la beca para realizar sus estudios de doctorado.

### Referencias

- American Petroleum Institute. Recommended practice for planning, designing and construction fixed offshore platforms – load and resistance factor design, API RP 2a – LRFD, Washington D. C, Julio, 1993.
- Cornell C.A. Calculating building seismic performance reliability: A basis for multi-level design norms, in World Conference on Earthquake Engineering (Eleventh, 1996, Acapulco, Mexico). Acapulco, Mexico, 1996, Artículo 2122.
- Cornell C.A., Jalayer F., Hamburger R.O., Foutch D.A. The probabilistic basis for the 2000 SAC/FEMA steel moment frame guidelines, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 128(4): 526–533, 2002.
- Ellinwood B.R. Reliability basis of load and resistant factors for reinforced concrete design, Washington: U.S. Department of Commerce, NBS Building Science Series, National Bureau of Standards, 1978, 110.
- Newman J. R., Raju I.S. An empirical stress intensity factor equation for the surface crack, *Engineering Fracture Mechanics*, 15(1-2): 185-192, 1981.
- Montes-Iturizaga R., Heredia-Zavoni E., Esteva L. Optimal maintenance strategies for structures in seismic zones, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32: 245-264, 2003.
- Mori Y., Ellingwood B. R. Time-dependent system reliability analysis by adaptive importance sampling, *Structural Safety*, 12(1): 59-73, 1993.
- Paris P., Erdogan F.A. Critical analysis of crack propagation laws, *ASME, Journal of Basic Engineering*, 85: 258-534, 1963.
- Petróleos Mexicanos. Diseño y evaluación de plataformas marinas fijas en la sonda de Campeche, *NRF-003-PEMEX-2000*, México, 2000.
- Pierson W.J., Moskowitz L. A proposed spectral form for full-developed wind sea based on the similarity law of S.A. Kitaigorodskii, *Journal of Geophysical Research*, 69(24): 5181–5190, 1964.
- Pourgharibshahi A., Taghikhany T., Reliability-based assessment of deteriorating steel moment resisting frames, *Journal of Construction Steel Research*, 71: 219-230, 2012.
- Rainville E. D. *Intermediate course in differential equations*, USA, John Wiley & Sons, Inc., 1961, pp. 144-148.
- Silva González F.L., Heredia Zavoni E. Effect of uncertainties on the reliability of fatigue damaged systems, en International conference on offshore mechanics and arctic engineering (23<sup>th</sup>, 2004, Vancouver, Canada). Vancouver, Canada, 2004, 2 p. 427-434.
- Sobczyk K., Spencer F.B. *Random fatigue: from data theory*, Academic Press Inc. 1992.
- Stacey A., Sharp J.V., Nichols N.W. Static strength assessment of cracked tubular joints, en International conference on offshore mechanics and arctic engineering (15<sup>th</sup>, 1996, Vancouver, Canada), Vancouver, Canada, 1996, 3 p. 211-224.
- Straub D. Stochastic modeling of deterioration processes through dynamic Bayesian networks, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 135(10): 1089-1099, 2009.
- Tolentino D., Ruiz S.E., Torres M.A. Simplified closed-form expressions for the mean failure rate of structures considering structural deterioration, *Structure and Infrastructure Engineering*, 8(5): 483-496, mayo, 2012.
- Torres M.A., Ruiz S.E. Structural reliability evaluation considering capacity degradation over time, *Engineering Structures*, 29: 2183-2192, 2007.
- Vamvatsikos D., Dolšek M. Equivalent constant rates for performance-based seismic assessment of ageing structures, *Structural Safety*, 33(1): 8-18, 2011.

---

# APÉNDICE H

## ARTÍCULO EN ACEPTADO CONDICIONALMENTE PARA SU PUBLICACIÓN EN LA REVISTA *ENGINEERING STRUCTURES*

Tolentino, D., y Ruiz, S. E., 2013b. Optimal interval for inspection and maintenance of structures, considering structural deterioration, *Engineering Structures*, aceptado condicionalmente para su publicación.

---

# **Optimal interval for inspection and maintenance of structures, considering structural deterioration**

Dante Tolentino<sup>\*(1)</sup> and Sonia E. Ruiz <sup>(2)</sup>

*(1) Ph.D. Student, Instituto de Ingeniería, Mecánica Aplicada, Universidad Nacional Autónoma de México, Coyoacán 04510, México D.F, México*

*(2) Professor, Instituto de Ingeniería, Mecánica Aplicada, Universidad Nacional Autónoma de México, Coyoacán 04510, México D.F, México*

\* Corresponding author: Dante Tolentino

Tel. +52 (55) 56233600 x 8480

E-mail DTolentinoL@iingen.unam.mx

## **ABSTRACT**

A cost-benefit criterion based on structural reliability for making optimal decisions when evaluating ageing structures, taking into account structural deterioration, is proposed. The optimal time interval for inspection and maintenance corresponds to the lowest cost of inspection, repair and failure, considering risk and reliability of the structure. Reliability is expressed in terms of the expected number of failures over a time interval by means of closed-form mathematical expressions which consider structural deterioration. The optimization criterion is applied to an offshore jacket platform. The damage condition is given by the fatigue crack size at critical joints. It is shown that in order to estimate the optimal time interval for inspection and maintenance of the structure, it is necessary to take into account the variation in time of both its structural capacity and its structural demand; if one of them were ignored, the optimal time interval could be overestimated.

## 1. INTRODUCTION

Structures are subjected to loads that can lead to degradation of the structural mechanical properties as time goes by. One way to reduce the effect of structural deterioration and maintain the structures within an appropriate structural performance is through a balance between risk and costs of inspection, repair and failure, which can be studied by means of optimization analysis.

To establish an optimization model, Forsell [1] formulated the problem by minimizing the total cost. The problem has been studied by using probability-based methods [2]. Later, reliability formulations were introduced into probability-based design codes [3] [4] [5] [6] [7] [8] and optimal design criteria were developed on the basis of probability concepts [9] [10] [11] [12] [13]. During the last fifteen years several authors have applied the concept of time-dependent reliability index to optimize the life cycle of deteriorating structures without structural maintenance [14] [15] [16], as well as with structural maintenance [16]. Later, maintenance programs for existing structures using the concept of the probabilistic multi-objective optimization were developed [17] [18] [19] [20].

For the particular case of offshore structures, the degradation of structural properties is mainly due to fatigue phenomena caused by waves continuously acting on the structures. The mechanical deterioration caused by fatigue is reflected by cracking of the tubular joints, giving place to a decrease of the resistance capacity of the structural system, and as a consequence, an increase in its structural demand (for a given maximum wave height). The idea behind inspecting an offshore structural system is to detect the presence and growth of size cracks, in order to perform the necessary repairs and maintenance to the structure later on. Several authors have developed inspections and maintenance plans for offshore structures: a) based on risk and reliability of welded connections subject to fatigue [21] [22] [23]; b) using methodologies that take into account fatigue sensitivity analyses in steel joints [24]; c) implementing simplified approaches and using practical design parameters such as fatigue design factors [25] and/or reserve strength ratios [26]; d) considering the damage caused by fatigue, buckling and dents on structural elements [27]; and e) using Bayesian techniques [28].

In this paper, a reliability-based approach aiming to find the optimal time interval (based on a cost-benefit analysis) for inspection and maintenance of offshore structures subjected to cumulative damage is presented. The optimal interval for inspection and maintenance corresponds here to the lowest total cost associated with inspection, repair and failure, considering risk and reliability of the structure.

The difference between the present study and those mentioned above is that in this paper reliability is expressed in terms of the expected number of failures over a time interval by means of simplified closed-form mathematical expressions that take into account the structural deterioration over time. None of the methods above has solved the problem by means of this simplified approach. The mathematical expressions are then incorporated into the cost optimization formulation. Besides, it is demonstrated that for estimating the optimal interval of inspection and maintenance of a deteriorating structure, the variation in time of both structural capacity and structural demand (for a given maximum wave height) must be taken into account, otherwise the optimal time interval could be overestimated.

## 2. Expected total present value of the cost function over a time interval

The expected total cost function is defined as the summation of the total expected cost,  $\bar{C}$ , of inspection ( $I$ ), repair ( $R$ ), and failure ( $F$ ) at the end of a time interval  $[0, \Delta t]$  as follows:

$$\bar{C}_{Total}(0, \Delta t) = \bar{C}_I(0, \Delta t) + \bar{C}_R(0, \Delta t) + \bar{C}_F(0, \Delta t) \quad (1)$$

where  $\bar{C}_I(0, \Delta t)$ ,  $\bar{C}_R(0, \Delta t)$  and  $\bar{C}_F(0, \Delta t)$  are the present value of the expected cost of inspection, repair and failure, respectively. The optimal interval corresponds to the lowest cost over the design life of the structure. The present value of the expected costs  $\bar{C}_I(0, \Delta t)$ ,  $\bar{C}_R(0, \Delta t)$  and  $\bar{C}_F(0, \Delta t)$  considering the structural deterioration over a time interval, is defined in sections 2.1, 2.2 and 2.3, respectively.



## 2.1 Present value of the expected cost of inspection

The present value of the expected cost of inspection during the time interval  $[0, \Delta t)$  can be obtained as follows:

$$\bar{C}_I(0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} C_I(\tau, q|S) \cdot p_I(\tau|S) \cdot p_S[d(\tau)] \cdot e^{-\gamma\tau} d\tau \quad (2)$$

where  $C_I(\tau, q|S)$  is the cost of inspecting the structure in the instant  $\tau$ , for a given inspection quality  $q$ , considering that the structure has survived ( $S$ );  $p_I(\tau|S)d\tau$  is the probability of inspecting the structure given that the structure has survived up to instant  $\tau$ ; it is considered that the structure with cumulative damage  $d$  has survived up to the instant  $\tau$  with a probability of  $p_S[d(\tau)]$ ; and  $e^{-\gamma\tau}$  is a factor that converts the cost to its present value, given a discount rate  $\gamma$ .

Considering that the inspection of the structure will be done at the end of the interval  $[0, \Delta t)$ , for a given inspection quality  $q$ , and assuming that the structure survives up to the end of  $\Delta t$ , Eq. (2) is simplified as:

$$\bar{C}_I(\Delta t) = C_{I,q|\Delta t} \cdot e^{-\gamma(\Delta t)} \cdot p_S[d(\Delta t)] \quad (3)$$

where  $C_{I,q|\Delta t}$  is the average inspection cost at the end of  $[0, \Delta t)$  for a given inspection quality  $q$ ,  $e^{-\gamma(\Delta t)}$  is the present value cost factor, and  $p_I(\tau|S) = 1$  is the probability of inspection (which is assumed equal to one). Eq. (3) considers that the structure with cumulative damage  $d$  has survived up to the end of  $\Delta t$  with a probability of  $p_S[d(\Delta t)]$ .

On the other hand, if it is assumed that the occurrence of the structural failure corresponds to a non-homogeneous Poisson process, then:

$$p_S[d(\Delta t)] = e^{-\int_0^{\Delta t} \nu_F(\tau) d\tau} = e^{-\eta_F(0, \Delta t)} \quad (4)$$

where  $\nu_F(\tau)$  represents the expected annual structural failure rate at instant,  $\tau$ ;  $\eta_F(0, \Delta t)$  is the expected number of failures at the end of a time interval  $\Delta t$ ,  $\eta_F(0, \Delta t)$  is defined with more detail

in the next section. Finally, the present value of the expected inspection cost, for a given inspection quality, at the end of the interval  $[0, \Delta t)$  is:

$$\bar{C}_{I,q}(0, \Delta t) = C_{I,q|\Delta t} \cdot e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, \Delta t)} \quad (5)$$

## 2.2 Present value of the expected cost of repair

The present value of the expected cost of repair within the time interval  $[0, \Delta t)$  is given by the following equation:

$$\bar{C}_R(0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} \sum_{j=1}^n C_{rj}[d(\tau)|S] \cdot p_{Rj}[d(\tau)|S] \cdot p_S[d(\tau)] \cdot e^{-\gamma \cdot \tau} d\tau \quad (6)$$

where  $n$  is the number of elements to be repaired;  $C_{rj}[d(\tau)|S]$  is the repair cost of element  $j$  having a cumulative damage equal to or greater than  $d$ , at instant,  $\tau$ ; and  $p_{Rj}[d(\tau)|S]d\tau$  is the probability of repairing the  $j^{th}$  element with cumulative damage  $d$ , given that the structure has survived up to instant  $\tau$ . Eq. (6) considers that the structure with cumulative damage  $d$  has survived up to the instant  $\tau$  with a probability of  $p_S[d(\tau)]$ .

When the damage level of the  $j^{th}$  structural element is equal or exceeds a certain threshold, the probability of repairing the element, is as follows:

$$P_{Rj}[d(\Delta t)|S] = P(D_j(\Delta t) \geq d) \cdot P_{I_j}(\Delta t|S) \quad (7)$$

where  $P(D_j(\Delta t) \geq d)$  is the conditional probability that element  $j$  with certain level of cumulative damage  $D$  at time  $\Delta t$ , is higher or equal to an established damage level  $d$ ;  $P_{I_j}(\Delta t|S)$  is the probability of inspecting element  $j$ , which is assumed equal to 1.

Considering that the damage has been accumulated in element  $j$  during the time interval  $[0, \Delta t)$ , Eq. (6) is simplified as:

$$\bar{C}_R(0, \Delta t) = \sum_{j=1}^n C_{r_j|\Delta t} \cdot P(D_j(\Delta t) \geq d) \cdot e^{-\gamma(\Delta t)} \cdot P_S[d(\Delta t)] \quad (8)$$

where  $\bar{C}_{r_j|\Delta t}$  represents the expected cost of repair of element  $j$ , at the end of interval  $[0, \Delta t)$ , and it is considered that the structure with cumulative damage  $d$  has survived up to the end of  $\Delta t$  with a probability of  $P_S[d(\Delta t)]$ .

Assuming that the occurrence of repairing the elements corresponds to a non-homogeneous process, and that the structure has survived up to the end of  $\Delta t$  (similar to Eq. (4)), then the expected repair cost at the end of  $[0, \Delta t)$  can be obtained as follows:

$$\bar{C}_R(0, \Delta t) = \sum_{j=1}^n C_{r_j|\Delta t} \cdot P(D_j(\Delta t) \geq d) \cdot e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, \Delta t)} \quad (9)$$

### 2.3 Present value of the expected cost of failure

The present value of the expected cost of failure that can occur within the interval  $[0, \Delta t)$  can be calculated as:

$$\bar{C}_F(0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} C_f[d(\tau)] \cdot p_F(\tau) e^{-\gamma\tau} d\tau \quad (10)$$

Where  $C_f[d(\tau)]$  is the cost of the structural failure, given the level of cumulative damage  $d$  at instant  $\tau$ ;  $p_F(t)$  is the probability density function of waiting time to failure, and is equal to:

$$p_F(t) = v_F(t) e^{-\int_0^t v_F(\tau)} = v_F(t) e^{-\eta_F(0, t)} \quad (11)$$

Considering that the expected cost of failure and the present value factor are constant values during the time interval of interest, expression 10 becomes as follows:

$$\bar{C}_F(0, \Delta t) = C_{f|\Delta t} e^{-\gamma(\Delta t)} \int_0^{\Delta t} v_F(\tau) e^{-\eta_F(0, \tau)} d\tau \quad (12)$$

Solving Eq. (12) for small intervals of time (e.g.,  $\Delta t = 1$  year), the present cost value of the possible structural failure within the interval  $[0, \Delta t)$  is equal to:

$$\bar{C}_F(0, \Delta t) = C_{f|\Delta t} \sum_{k=1}^{\hat{N}} \eta_F(t_k - t_{k-1}) e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, t_k - t_{k-1})} \quad (13)$$

Where  $\hat{N}$  is the number of time intervals of interest;  $\eta_F(t_k - t_{k-1})$  is the expected number of failures for the time intervals of interest, and  $t_1, t_2, \dots, t_N = 1, 2, \dots, \hat{N}$  years.

### 3. Evaluation of structural reliability

In this paper, structural reliability is expressed by means of the *expected number of structural failures at the end of the time interval*,  $\eta_F(0, \Delta t)$ , which is an extension of the *expected annual structural failure rate* concept ( $\nu(t)$ , [29]). Based on the simplified approach proposed by Cornell and collaborators [30][31] to evaluate the reliability of structures subject to seismic loads, and later on, extended by Torres and Ruiz [32], it is possible to obtain  $\eta_F(0, \Delta t)$  as shown in Eq. (14). It is noticed that in the present study, the simplified approach by Cornell and collaborators [31] constitutes the basis to evaluate the reliability of marine offshore structures subject to wave loads, instead of the reliability of structures subjected to seismic loads. The use of the simplified approach is possible because the concepts involved in both types of structures (i.e., statistical description of the structural capacity and of the structural demand, simplified representation of environmental hazard curves, representation of the structural deterioration by means of a simple mathematical expression, etc), are similar.

$$\eta_F(0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} k \left[ \frac{\hat{C}(\tau)}{a(\tau)} \right]^{-\frac{r}{b(\tau)}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2(\tau)} (\sigma_{\ln D|h_{\max}}^2(\tau) + \sigma_{\ln C}^2(\tau) + \sigma_{UT}^2(\tau)) \right) d\tau \quad (14)$$

In Eq. (14)  $\sigma_{\ln D|h_{\max}}^2(\tau)$  and  $\sigma_{\ln C}^2(\tau)$  represent the variances of the natural logarithms of the structural demand given a maximum wave height  $h_{\max}$ , and of the structural capacity, at instant  $\tau$ ,

respectively. It is considered that these uncertainties present a lognormal type distribution [5]. The expression  $\sigma_{UT}^2 = \sigma_{UD}^2 + \sigma_{UC}^2$  represents the epistemic uncertainty related to the demand ( $UD$ ) and to the limit state capacity ( $UC$ ), respectively;  $k$  and  $r$  are parameters that define the characteristics of the wave hazard curve around the maximum wave height of interest;  $\nu(h_{\max})$  is defined by  $\nu(h_{\max}) = k \cdot h_{\max}^{-r}$  [30] [31].  $\hat{C}(\tau)$  represents the median of the limit state capacity at instant  $\tau$ , and presents a lognormal type distribution;  $a(\tau)$  and  $b(\tau)$  are parameters defining the relation of the median structural demand with the maximum wave height  $h_{\max}$ , at instant  $\tau$ .

In this study Eq. (14) is solved for three specific cases:

1. Structural demand (for a maximum wave height) varies in time, while structural capacity remains time invariant.
2. Structural capacity varies in time, while structural demand remains time invariant.
3. Both structural demand and structural capacity vary in time, simultaneously.

### ***3.1 Considering that structural demand for a given maximum wave height varies in time, while structural capacity is time independent (case 1)***

Considering only that the structural demand varies in time, it is necessary to assume that the median structural capacity,  $\hat{C}(\tau)$ , and its standard deviation,  $\sigma_{\ln C}^2(\tau)$ , have constant values during the time interval of interest, which means that  $\hat{C}(\tau) = \alpha$  and  $\sigma_{\ln C}^2(\tau) = \sigma_{\ln C}^2$ , respectively.

It is assumed that the median of the structural demand is given by  $\hat{D}(\tau) = (a + f \cdot \tau) \cdot y^b$ .

It is important to notice that Cornell et al. [31] assumed the median structural demand (for a given intensity) given by  $\hat{D} = a \cdot y^b$  when structural demand is invariant in time (without considering structural deterioration).

Taking into account the assumptions above, the expected number of failures at the end of a time interval results as follows:

$$\eta_{FD}(0, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C}^2 + \sigma_{UT}^2) \right) \Omega_D(0, \Delta t) \quad (15a)$$

where:

$$\Omega_D(0, \Delta t) = \frac{b\alpha}{f(b+r)} \left[ - \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-1} + \left( \frac{\alpha}{a+f(\Delta t)} \right)^{-\frac{b+r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \right] \quad (15b)$$

where  $\Omega_D(0, \Delta t)$  is a correction function for the expected number of failures over the time interval  $[0, \Delta t)$ .

### ***3.2 Considering that structural capacity varies in time, while structural demand is time independent (case 2)***

In this section, only the variation in time of the structural capacity is considered. For this case, the median demand  $\hat{D} = a \cdot y^b$  and the standard deviation of the natural logarithm of the demand  $\sigma_{\ln D|y}$  are constant values during the interval of interest. It is also assumed that the median capacity varies linearly in each time subinterval ( $T$ ):  $\hat{C}(\tau) = \alpha_T + \beta_T \tau$ ,  $T = 1, 2, \dots, N$ . The total time interval contains  $N$  subintervals. A linear assumption was also used by Torres and Ruiz [32] who considered that the structural capacity varies linearly over the entire range of the interval under study; however, in the present study this assumption is generalized to  $N$  subintervals.

According to the hypotheses above, Eq. (14) is solved as follows:

$$\eta_{FC,T}(0, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha_T}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma_{\ln D|h_{\max}}^2 + \sigma_{\ln C,T}^2 + \sigma_{UT}^2) \right) \Omega_{C,T}(0, \Delta t) \quad (16a)$$

where

$$\Omega_{C,T}(0, \Delta t) = \frac{\alpha_T b}{\beta_T (b-r)} \left[ \left( 1 + \frac{\beta_T \Delta t}{\alpha_T} \right)^{1-\frac{r}{b}} - 1 \right] \quad (16b)$$

where  $\Omega_{C,T}(0, \Delta t)$  is a correction function for the expected number of failures which considers the deterioration of the structural capacity in the subinterval  $T$ .

### 3.3 Considering that both structural capacity and structural demand (for a given maximum wave height) vary in time (case 3)

For this case, it is considered that both structural capacity and structural demand vary in time. It is assumed that the median structural capacity varies linearly in each subinterval:  $\hat{C}(\tau) = \alpha_T + \beta_T \tau$  and, simultaneously, the median structural demand, expressed in terms of the maximum wave height  $h_{\max}$ , varies in time as:  $\hat{D}(\tau) = (a + f \cdot \tau) \cdot y^b$ . Recently, Tolentino et al. [33] proposed a similar expression, but in this paper, it is generalized for different subintervals,  $T$ ; besides, the hypergeometric function is solved in a simpler way, resulting the following equations:

$$\eta_{FCD,T}(0, \Delta t) = k \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{-\frac{r}{b}} \exp \left( \frac{r^2}{2b^2} (\sigma_{\ln D|y}^2 + \sigma_{\ln C,T}^2 + \sigma_{UT}^2) \right) \Omega_{CD,T}(0, \Delta t) \quad (17a)$$

where:

$$\Omega_{CD,T}(0, \Delta t) = \frac{b\alpha}{\beta_T(b-r)} \left( \frac{a\beta_T}{-\alpha f + \beta_T a} \right)^{-\frac{r}{b}} \left[ -F(A, B; C; x) + F(A, B; C; x(\Delta t)) \right] \dots$$

$$\left[ 1 + \left( \frac{f\beta_T \Delta t}{\beta_T a} \right)^{-\frac{r}{b}} \left( 1 + \frac{\beta_T \Delta t}{\alpha} \right) \left( \frac{\alpha + \beta_T \Delta t}{a + f\Delta t} \right)^{-\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \right] \quad (17b)$$

where  $\Omega_{CD,T}(t, \Delta t)$  is a correction function for the expected number of failures which considers the variation in time of both the structural capacity and the structural demand (for a given maximum wave height), simultaneously. In this paper the hypergeometric function  $F(A, B; C; x)$ , which appears in Eq. (17b), is solved by means of the following hypergeometric series [34]:

$$F(A, B; C; x) = 1 + \frac{AB}{1!C}x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{2!C(C+1)}x^2 + \dots + \frac{A(A+1)\dots(A+n-1)B(B+1)\dots(B+n-1)}{C(C+1)\dots(C+n-1)n!}x^n \quad (18)$$

where  $A = 1 - \frac{r}{b}$ ;  $B = -\frac{r}{b}$ ;  $C = 2 - \frac{r}{b}$ ;  $x = \frac{f(\beta_T + \alpha_T)}{f\alpha_T - a\beta_T}$ .

#### 4. Illustrative example

In this section the optimal interval for inspection and maintenance a jacket offshore platform during its Design Life ( $DL$ ) is formulated, assuming the following hypotheses:

- a) the structure survives up to the end of the time interval of interest,
- b) intervals between inspections are equidistant,
- c) the damage is accumulated on the critical nodes
- d) the elements recover their fully capacity after repair

The expected total function cost given by Eq. (1), is expressed as follows (using Eqs. (5), (9) and (13)):

$$\bar{C}_{Total,DL}(0, \Delta t) = \bar{C}_{I,DL}(0, \Delta t) + \bar{C}_{R,DL}(0, \Delta t) + \bar{C}_{F,DL}(0, \Delta t) \quad (19)$$

where:

$$\bar{C}_{I,q,DL}(0, \Delta t) = \sum_{m=1}^{NI} C_{(I,q)_m|\Delta t} \cdot e^{-\gamma_m(\Delta t) - \eta_{F,T_m}(0, \Delta t)} \quad (19a)$$

$$\bar{C}_{R,DL}(0, \Delta t) = \sum_{m=1}^{NI} \sum_{j=1}^n C_{r_j,m|\Delta t} \cdot P(D_{j,m}(\Delta t) \geq d) \cdot e^{-\gamma_m(\Delta t) - \eta_{F,T_m}(0, \Delta t)} \quad (19b)$$

$$\bar{C}_{F,DL}(0, \Delta t) = \sum_{m=1}^{NI} C_{f_m|\Delta t} \sum_{k=1}^{\hat{N}} \eta_{F,T_m}(t_k - t_{k-1}) e^{-\gamma_m(\Delta t) - \eta_{F,T_m}(0, t_k - t_{k-1})} \quad (19c)$$

where  $NI$  is the number of inspections which will be done over the design life,  $DL$ , of the structure, at a number of constant time intervals  $NI = DL / \Delta t$ .



The fixed offshore steel jacket platform is located in Campeche Bay, Mexico. One of the platform internal frames was represented by a simplified 2D model. An illustration of the steel frame analyzed is shown in Fig. 1. The cross-section dimensions of the elements indicated in Fig. 1 are shown in Table 1. The expected weight of the deck was assumed equal to 500 ton. The water depth at the site is 45.11 m. The structure is 48 m high. The structural model takes into account the contribution of the piles inside the jacket legs to the lateral shear strength. In this study, extreme conditions of wave, wind and sea currents (0, 50, and 95 % of the total depth) were obtained from the Design and Evaluation Code of Marine Platforms located at Campeche Bay [35].

#### ***4.1 Fatigue analysis***

An offshore structure is continuously subjected to wave loads (due to operational and/or storm waves) along its entire life. The waves may deteriorate the structure giving place to fatigue cracking in the tubular joints. The critical nodes affected by fatigue were selected on the basis of non-linear static analyses (“pushover”), which were performed by decreasing the capacity of the selected joint being analyzed and assessing its contribution to the global capacity. The critical joints correspond to nodes 1, 2, 3, 4 and 6 (see Fig. 1). Two points were considered for each structural element connected to the critical joints. The points correspond to the zone of maximum and minimum stresses in the cross-section of the element. Two points were analyzed for nodes 1 and 3, whereas four points were considered for nodes 2, 4 and 6 because these nodes are connected to two elements, as shown in Fig. 2. The minimum and maximum stresses of the selected points were obtained by subjecting the structure to several dynamic time history “step by step” analyses, using a set of simulated wave histories associated with different return intervals,  $T_r$ . The wave frequency content is based on the Pierson-Moskowitz spectrum [36]. The sea surface is represented by means of a homogeneous Gaussian stationary process, which is expressed as a linear superposition of regular waves with random generation in their phase angles (with uniform distribution between 0 and  $2\pi$ ).

The average crack size simulation process of the selected points subjected to random load was performed using the Monte Carlo technique. There were considered 25,000 samples. It was verified that a larger number of samples did not change the statistical results. Operational and storm waves were considered. The arrival times between storms were assumed with exponential distribution. The storm wave heights followed a Gumbel distribution. The statistical values applied for crack simulation are shown in Table 2. The values are based on those used by Silva and Heredia [37] for marine platforms located in Campeche Bay.

The mean crack growth under stochastic loads was calculated using the following modified differential equation [38][39]:

$$\frac{da'}{dt} = C(\Delta K_{mr})^m \nu' \quad (20)$$

$$\Delta K_{mr} = Y S_{mr} \sqrt{\pi a'} \quad (21)$$

where  $C$  and  $m$  are parameters related to the material properties,  $\Delta K_{mr}$  is the mean stress intensity range,  $\nu'$  is the rate of crossings through zero with positive slope in a given time,  $S_{mr}$  is the mean stress range of the random response of the elements [39],  $Y$  is a finite geometrical correction factor [40], and  $a'$  is the crack size. In Eq. (20), the random load was replaced by an equivalent cyclic load with amplitude and frequency expressed as functions of the mean properties of the original stochastic process.

Substituting Eq. (21) in (20), the following expression is obtained:

$$\int_{a_0}^{a_f} da / Y^m (\sqrt{\pi a'})^m = C S_{mr}^m \nu' t \quad (22)$$

where  $a_0$  is the initial crack value, and  $a_f$  is the crack size after  $N = \nu' t$  cycles.

Considering that the joint's cracking affects the resistance and stiffness of the structural elements, some authors [41][42] recommend to modify the capacity of the intact joint,  $P_k$ , by a linear correction factor, as shown in Eq. (23), where  $P_c$  is the capacity of the cracked joint and  $P_k$  can be calculated by means of the API recommendations [43]:

$$P_c = P_k \left( 1 - \left( A_{crack} / A_{joint} \right) \right) \quad (23)$$

$A_{joint}$  and  $A_{crack}$  are the areas of the cross-section and of the crack, respectively, corresponding to all the elements connected to the joint.

As an example, percentages of simulated cracked areas at the end of different time intervals, corresponding to node 2, are shown in Fig. 3.

#### ***4.2 Evaluation of the structural capacity over a time interval***

The lateral structural capacity in terms of the maximum global displacement of the jacket (corresponding to node 14 in Fig.1) was obtained by means of nonlinear “push-over” static analyses using twenty different lateral load simulated profiles. These are related to the acting forces corresponding to the simulated waves that produce the maximum base shear response. The capacity reduction at the critical joints obtained from the fatigue analysis is considered as damage condition. USFOS program [44] was used for the non-linear analysis. Fig. 4 shows the median of the capacity,  $\hat{C}_T$ , represented in terms of global displacement of the platform considering cumulative damage, for different subintervals,  $T$ . Each median structural capacity is fitted to the following expression:  $\hat{C}(\Delta t) = \alpha + \beta_T \Delta t$ ,  $T = 1, 2, 3$  and 4. Fig. 4 shows that the median of the structural capacity does not follow a linear behavior in the time interval (0, 15 years) analyzed. Table 3 shows that the standard deviation of the natural logarithm of the structural capacity increases from the first subinterval (0.076) to the fourth subinterval (0.218). The median of capacity,  $\hat{C}_T$ , and the standard deviation of its natural logarithm,  $\sigma_{\ln C, T}$  correspond to the twenty capacity curves mentioned above. It is noticed that as the time interval gets longer, there is a higher probability that the structure be loaded with more operational and storm waves, so the accumulation of damage at critical joints increases and the response becomes highly nonlinear, giving place to more uncertainty in the structural response.

#### ***4.3 Evaluation of the structural demand (for a given maximum height wave) over an interval***

The structural demand (given a maximum wave height) over time, was evaluated by subjecting the structure to dynamic time history “step by step” analyses, using a set of twenty simulated time histories of waves associated with different maximum wave heights (corresponding to different return periods,  $T_R$ ). The crack growth simulations and the capacity reductions at selected joints considered to evaluate the capacity  $\hat{C}$  over time were also used in this section. Fig. 3 shows the median structural demand as a function of the platform global displacement, for different intervals.

Fig. 5 shows that the median values of demand  $\hat{D}$  present variations for maximum wave heights larger than 16.7 m (wave heights smaller than 16.7 m do not produce significant damage to the structure). Fig. 5 also shows that for waves greater than 16.7 m, higher values of the median demand occur as the time interval becomes larger. This obeys to the nonlinear behavior of the structure. The value of the median structural demand, given a maximum wave height, is given by  $\hat{D}(\Delta t) = (3.75E-04 + 5.0E-08 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^{2.0}$  (see section 3.3), and the standard deviation of the natural logarithm of the demand, for a maximum wave height, is given by

$$\sigma_{\ln D|h_{\max}} = (1.65E-03 + 1.5E-05 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^{1.5}.$$

#### ***4.4 Expected number of failures over time***

The expected numbers of failures at the end of different intervals calculated with Eqs. (15a), (16a), (17a) and for the case without structural damage are presented in Fig. 6. The epistemic uncertainties associated with the structural demand,  $\sigma_{UD}$ , and with the structural capacity,  $\sigma_{UC}$ , were assumed equal to 0.15. The parameters  $k$  and  $r$  fitted to the wave hazard curve are equal to  $k = 5.0E03$  and  $r = 5$ , which correspond to a maximum wave height equal to  $h_{\max} = 23$  m and to a return period of 1485 years.

#### 4.5 Expected cost of inspection, repair and failure

The expected costs of inspection, repair and failure for cases 1, 2 and 3 (see sections 3.1, 3.2 and 3.3) are shown in Figs. 7, 8 and 9, respectively. It is assumed that the design life of the structure is about 30 years, and the annual discount rate is  $\gamma = 6\%$ . The offshore platform handles an approximate production,  $P_{\max}$  about 184,000 barrels of oil per day [45]. The cost of the drilling equipment is estimated as 130,000,000 USD [45]. The inspection cost by joint is 3,518 USD [46]. It is considered that the repair will take place when the crack depth is greater or equal to a third of the thickness of the plate (5 mm approx.), and the repair cost is 20,000 USD for each critical point [47].

The cost of failure includes costs due to equipment damage, pollution, deferred production and indirect losses. The costs are obtained based on a global damage index, expressed in terms of global displacement of the offshore structure as follows:

$$D = (\delta_0 - \delta_u) / (\delta_0 - \delta_d) \quad (24)$$

where  $\delta_0$  is the maximum global displacement of the structure without damage,  $\delta_u$  represents the maximum global displacements that consider structural deterioration, and  $\delta_d$  is the ultimate global displacement demanded by the structure.

The cost due to equipment damage is obtained by a linear ratio between the global damage index and the drilling equipment. The cost is given by the following equation:

$$C_{ED} = D \cdot C_{DE} \quad (25)$$

The pollution cost is obtained considering the volume of oil spill (related with a certain global damage level) by means of the following expression:

$$P_C = C_{OR} \cdot (S_A / 1000^2) E \quad (26)$$

where  $C_{OR}$  is the oil recovery cost (541.57 USD/hr) with efficiency,  $E$ , of 0.81 hr/km<sup>2</sup> [48];  $S_A$  is the area of stain [49], which is obtained as follows:

$$S_A = 2.27(\Delta w \cdot V_s)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{2}} + 0.04(\Delta w \cdot V_s \cdot U^4) \quad (27)$$

where  $\Delta w$  is the density difference between crude oil and water;  $t$  is the oil spill time;  $U$  is the wind speed at height equal to 10m, with values  $\Delta w = 0.06341$ ,  $U = 30$  m/s and  $t = 2400$  s. The volume of oil spill  $V_s$  is obtained as a function of the global damage index as follows:

$$V_s = P_{max} \cdot D^4 \quad (28)$$

The deferred production cost  $C_{DP}$  is given by the following expressions [50]:

$$C_{DP} = \int_t^{DL} R(\tau) e^{-\gamma(\tau-t)} d\tau - \int_t^{DL+R_p} R(\tau) e^{-\gamma(\tau-t)} d\tau \quad (29)$$

$$R(\tau) = C_C \cdot P_{max} \cdot U_C \cdot 365 \quad (30)$$

where  $R_p$  is the recovery time of product, equal to 4 years;  $C_C$  is the crude oil cost, equal to 17 USD/barrel;  $U_C$  is the profit of marketing the product, equal to 12 % [27].

The indirect losses cost, which takes into account agriculture, coal, gas, oil, minerals, petrochemical, basic chemical, tires, electricity and textile, is obtained as follows:

$$C_{PI} = (C_{F1} + C_{F2}) (P_{max} / P_{total}) D^4 \quad (31)$$

where  $C_{F1}$  and  $C_{F2}$  are the first and second phase loss cost due to structural damage, equal to  $C_{F1} + C_{F2} = 1.086 \times 10^{10}$  USD;  $P_{total}$  is the oil total production in Campeche bay equal to 2,100 000 barrels of oil per day [45].

#### 4.6 Results

Figs. 7, 8 and 9 show results of costs of inspection, repair, failure and total costs for cases 1, 2 and 3, respectively. Figs. 7 and 8 show that the expected costs of inspection and repair have a significant influence when intervals of time smaller than 4 years are considered. This is due mainly to the low probabilities of failure and to the high number of inspections that must be made during the design life of the structure; however, as the interval between inspections increases, the influence of the cost of failure becomes more significant because the probabilities of failure become higher. Figs. 7 and 8 indicate that the optimal intervals for maintenance actions are equal to 7 and 5 years, respectively.

For the latter case (see Fig. 9), the optimal time interval results equal to 4 years.

Fig. 10 compares the expected total cost during the design life of the structure for cases 1, 2 and 3 (which correspond to sections 3.1, 3.2 and 3.3, respectively). Fig. 10 shows that the optimal time intervals of inspection and maintenance actions are equal to 7, 5 and 4 years for cases 1, 2 and 3, respectively. These intervals indicate that ignoring the contribution of the deterioration phenomenon on the structural capacity, or on the demand, or in both, overestimate the intervals for inspection and maintenance actions.

## **5. Conclusions**

A cost/benefit criterion aiming to find the optimal interval between inspection and maintenance actions, considering structural deterioration, was presented. The structural reliability is expressed by means of simple closed-form mathematical expressions. The criterion was applied to a fixed steel jacket platform located in Campeche Bay, Mexico. The results indicate that the variation in time of the structural capacity (case 2) has a greater influence than the time variation of the structural demand (case 1); e.g., it was obtained that the expected number of failures for an interval was higher when it was considered only deterioration in structural capacity (case 2) than when it was considered only variation in time of the structural demand (case 1). As a consequence, the optimal interval for inspection and maintenance actions for case 2 resulted about 5 years. Meanwhile, when only the deterioration in the structural demand (for a given maximum wave height) was considered, then the optimal time interval was about 7 years. It is concluded that for evaluating the structural reliability of deteriorating structures, and for making plans for inspection and maintenance actions, it is recommended to take into account the variation in time of both the structural capacity and the structural demand (for a given maximum wave height), otherwise the results could be erroneous.

The cost/benefit criterion presented, together with the closed-form mathematical expression used, constitutes an efficient tool for making inspection and maintenance plans for offshore

structures; moreover, it can be improved to take into account different types of inspection and maintenance actions in order to make decisions for the most appropriate alternative.

## Acknowledgements

Thanks are given to D. De León (formerly at IMP) for his valuable comments related to the reliability analysis of the marine platform. This research project had the support of DGAPA-UNAM (PAPIIT IN107011). The first author thanks CONACYT for the economical support to develop his PhD research.

## References

- [1] Forsell C. Ekonomi och Byggnadsväsen (Economy and Construction). *Sunt Fornoft* 1924; 4:74-77 (in Swedish).
- [2] Freudenthal AM. Safety and the probability of structural failure. *Transactions of ASCE* 1956;121:1337-1375.
- [3] Cornell CA. A probability-based structural code. *J AM Concrete I* 1969; 66(12):974-985.
- [4] Lind NC. Consistent partial safety factors. *J Struc Div-ASCE* 1971;97(6):1651-1670.
- [5] Rosenblueth E, Esteva L. 1972. Reliability basis for some Mexican codes. In *Probabilistic design of reinforced concrete buildings*. ACI Publication SP-31; 1972, p.1-41.
- [6] Ditlevsen O. Structural reliability analysis and the invariance problem. Report No. 22; 1973. University of Waterloo. Solid Mechanics Division. Waterloo, Canada.
- [7] Ang AH-S, Cornell CA. Reliability bases of structural safety and design. *J Struc Div-ASCE* 1974;100(9):1755-1769.
- [8] Hasofer AM, Lind NC. Exact and invariant second moment code format. *J Eng Mech Div-ASCE* 1974;100(1):111-121.
- [9] Rosenblueth E, Mendoza E. Reliability optimization in isostatic structures. *J Eng Mech Div-ASCE* 1971;97(6):1625-1642.
- [10] Mau ST. Optimum design of structures with a minimum expected cost criterion. Report No. 340; 1971. Cornell University. Department of Structural Engineering. Ithaca, N.Y.
- [11] Moses F. Design for reliability—concepts and applications. In: Gallagher RH, Zienkiewicz OC, editors. *Optimum structural design*. New York, N.Y: John Wiley; 1973, p. 241-261.
- [12] Frangopol DM. A reliability-based optimization technique for automatic plastic design. *Comp Method Appl M* 1984;44(1):105-117.
- [13] Esteva L, Díaz OJ, García J, Sierra G, Ismael E. Life-cycle optimization in the establishment of performance-acceptance parameters for seismic design. *Struct Saf* 2002;24(2-4):187-204.
- [14] Thoft-Christensen P. Assessment of the reliability profiles for concrete bridges. *Eng Struc* 1998;20(11):1004-1009.
- [15] Frangopol DM, Kong JS, Gharaibeh ES. Reliability-based life-cycle management of highway bridges. *J Comput Civil Eng* 2001;15(1):27-34.
- [16] Kong JS, Frangopol DM. Life-cycle Reliability-based maintenance cost optimization of deteriorating structures with emphasis on bridges. *J Struct Eng-ASCE* 2003;129(6):818-828.
- [17] Liu M, Frangopol DM. Optimal bridge maintenance planning based on probabilistic performance prediction. *Eng Struc* 2004;26:991-1002.
- [18] Furuta H, Takenaka Y, Erami M. 2006. A practical bridge management system using new multi-objective genetic algorithm. In: Cruz PJS, Frangopol DM, Neves LC, editors. *Bridge maintenance, safety, management, life-cycle performance and Cost*. London: Taylor & Francis Group; 2006, p. 131-132.



- [19]Neves LC, Frangopol DM, Cruz PJS. Probabilistic lifetime-oriented multiobjective optimization of bridge maintenance: single maintenance type. *J Struct Eng-ASCE* 2006;132(6):991–1005.
- [20]Okasha NM, Frangopol DM. 2009. Lifetime-oriented multi-objective optimization of structural maintenance considering system reliability, redundancy and life-cycle cost using GA. *Struct Saf* 2009;31(6): 483-489.
- [21]Skjong R. Reliability based optimization of inspection strategies. *ICOSSAR*; 1985:3, p. 614-618. Kobe, Japan.
- [22]Madsen HO, Sørensen JD, Olsen R. Optimal inspection planning for fatigue damage of offshore structures. *ICOSSAR*; 1989, p.2099-2106. San Francisco, USA.
- [23]Sørensen JD, Faber MH, Rackwitz R, Thoft-Christensen P. 1991. Modeling in optimal inspection and repair. 10th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE; 1991, p.281-288. Stavenger, Noruega.
- [24]Thoft-Christensen P, Sørensen JD. Optimal strategies for inspection and repair of structural systems. *Civil Eng Syst* 1987;4:94-100.
- [25]Straub D, Sørensen JD, Goyet J, Faber MH. Benefits of risk based inspection planning for offshore structures. 25th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE; 2006, p. 1-10. Hamburg, Germany.
- [26]Faber MH. Reliability based inspection planning of fatigue damaged offshore platforms. 1st International symposium on analysis of structural risk and reliability for offshore facilities; 2001. IMP, Mexico.
- [27]Ortega C, De León E. Development of a cost-benefit model for inspection of offshore jacket structures in Mexico. 22th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE; 2003, p.87-98. Cancun, Mexico.
- [28]Sørensen JD, Ersdal G. Risk based inspection planning of ageing structures. 27th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE; 2008:3, p.399-408. Estoril, Portugal.
- [29]Jalayer F, Cornell CA. A technical framework for probability-based demand and capacity factor design (DCFD) seismic formats. *PEER Report* 2003/08; 2003. Pacific earthquake engineering research center. University of California, Berkeley.
- [30]Cornell CA. Calculating building seismic performance reliability: A basis for multi-level design norms. 11th World Conference on Earthquake Engineering; 1996, Paper 2122.
- [31]Cornell CA, Jalayer F, Hamburger RO, Foutch DA. The probabilistic basis for the 2000 SAC/FEMA steel moment frame guidelines. *J Struct Eng-ASCE* 2002;128(4):526–533.
- [32]Torres MA, Ruiz SE. Structural reliability evaluation considering capacity degradation over time. *Eng Struc* 2007;29:2183-2192.
- [33]Tolentino D, Ruiz SE, Torres MA. Simplified closed-form expressions for the mean failure rate of structures considering structural deterioration. *Struct Infrastruc E* 2012;8(5):483-496.
- [34]Rainville ED. Intermediate course in differential equations. USA: John Wiley & Sons INC; 1961.
- [35]Petróleos Mexicanos . Diseño y Evaluación de Plataformas Marinas Fijas en la Sonda de Campeche. NRF-003-PEMEX-2000; 2000. Mexico. (in Spanish)
- [36]Pierson WJ, Moskowitz L. A proposed spectral form for fully-developed wind sea based on the similarity law of S.A. Kitaigorodskii. *J Geophys Res* 1964;69(24):5181–5190.
- [37]Silva FL, Heredia E. Effect of uncertainties on the reliability of fatigue damaged systems, 23th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE; 2004:2, p. 427-434. Vancouver, Canada.
- [38]Paris P, Erdogan FA. Critical analysis of crack propagation laws. *J Basic Eng-T ASME* 1963;85:258-534.
- [39]Sobczyk K, Spencer FB. Random fatigue: from data theory. Academic Press Inc; 1992.
- [40]Newman JR, Raju IS. An empirical stress intensity factor equation for the surface crack. *Eng Fract Mech* 1981;15(1-2):185-192.
- [41]Stacey A, Sharp JV, Nichols NW. Static strength assessment of cracked tubular joints, 15th international conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE; 1996: 3, p. 211–224.

- [42]Burdekin FM. The static strength of cracked joints in tubular members. Offshore technology report 2001/080. London: Health and Safety Executive; 2002.
- [43]American Petroleum Institute. Recommended practice for planning, designing and construction fixed offshore platforms – load and resistance factor design. API RP 2a – LRFD; 1993. Washington D. C.
- [44]Soreide TH. Amdahl J. Eberg E. Holmas T. Hellan O. (1993), “USFOS – A computer program for progressive collapse analyses of steel offshore structures. Report STF71 F88038. Trondheim, Norway; 1993.
- [45]Instituto Mexicano del Petróleo. Resumen ejecutivo de costos promedio de estructuras típicas ubicadas en la sonda de Campeche; 1998. Departamento de costos del IMP. México, D.F. (in Spanish)
- [46]Raine A. The development of Alternating Current Field Measurement (ACFM) technology as a technique for the detection of surface breaking defects in conducting material and its use in commercial and industrial applications. 15th World Conference on Non-Destructive Testing; 2000. Rome.
- [47]The Marine Technology Directorate Limited. Review of repairs to offshore structures and pipelines. Publication 94/102; 1994.
- [48]Campos D, Rodriguez M, Martinez M, Ramos R. Assessment of consequences of failure in jacket structures. 18th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE; 1999:OMAE99/S&R-6015. St. Johns, Newfoundland, Canada.
- [49]Lehr WJ. Oil spill modeling and processes. In Brebbia CA, editor. Review of modeling procedures for oil spill weathering behaviour. WIT press; 2001.
- [50] Stahl B. Reliability engineering and risk analysis. In McClelland B, Reifel MD editors. Planning and design of fixed offshore platforms. New York: Van Nostrand Reinhold Co; 1986.

**Table 1**

Cross sections of the elements

Element	Diameter (m)	Thick (m)
C, F, I, L, O, R	1.334	0.0159
A, B, D, E	0.660	0.0159
G, H, J, K	0.559	0.0127
M, N	0.457	0.0159
P, Q	0.457	0.0127
S, T	0.508	0.0095
U, X	1.334	0.0318
V, W	0.457	0.0238
Y	0.406	0.0127

**Table 2**

Statistical parameters used for crack simulation

Parameter	$v_0$	$S_{mr}$	$a'/c$	$m^*$	$\ln C^*$	$a_0$
s						
Mean value	As function of joint and time	As function of joint and time	0.25	3.0	-40.39	0.00011
Standard deviation	As function of joint and time	As function of joint and time	----- -	0.3	-0.69067	-----
Distribution	Lognormal	Rayleigh	----- -	Normal	Normal	-----

\* Correlation coefficient  $\rho_{\ln C, m}=0.9$ **Table 3**Standard deviations of the natural logarithm  $\sigma_{\ln C, T}$ .

Time sub-interval (years)	$\sigma_{\ln C, T}$
$0 \leq \Delta t \leq 4$	7.60E-02
$4 \leq \Delta t \leq 8$	1.65E-01
$8 \leq \Delta t \leq 11$	1.99E-01
$11 \leq \Delta t \leq 15$	2.18E01

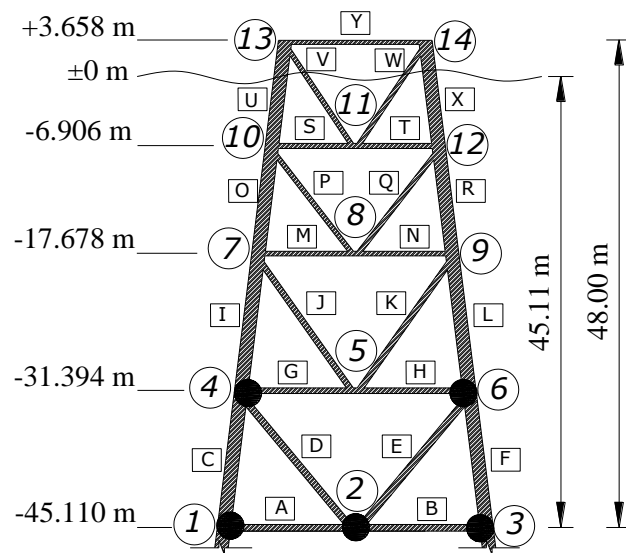


Fig. 1. Simplified 2D model of the jacket platform.

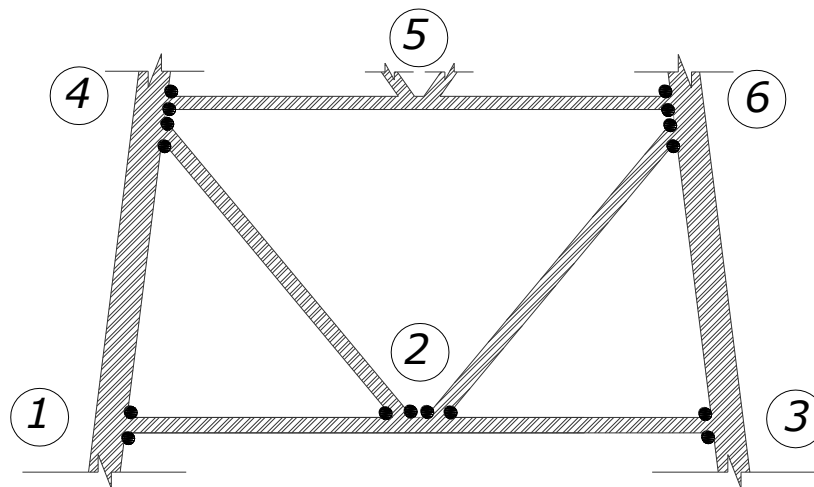


Fig. 2. Points considered for the fatigue analysis.

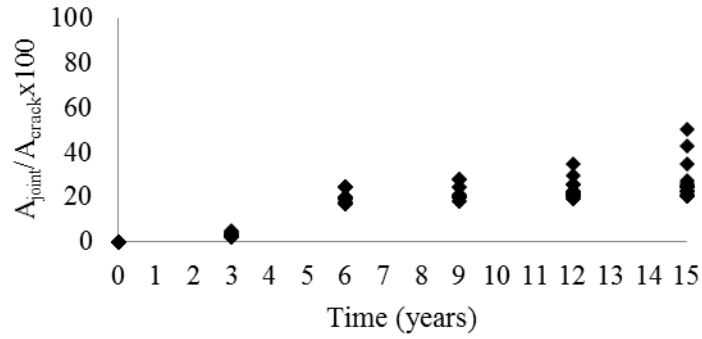


Fig. 3. Percentages of simulated cracked areas. Joint 2.

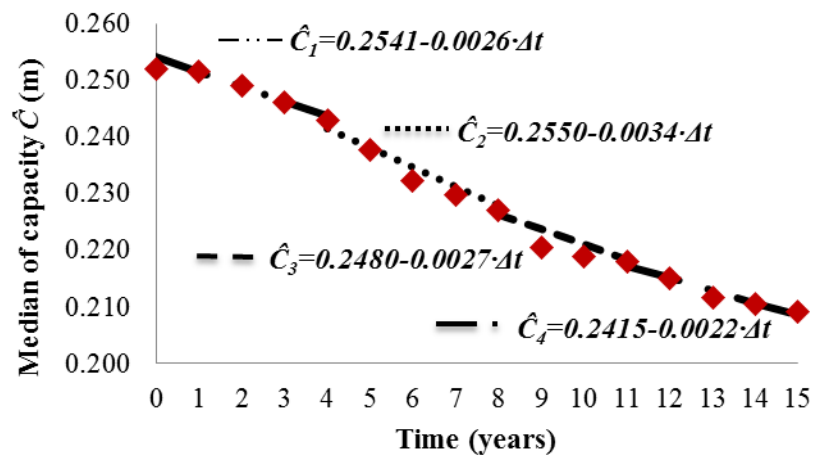


Fig. 4. Medians of capacity,  $\hat{C}_T$ , corresponding to four time subintervals.

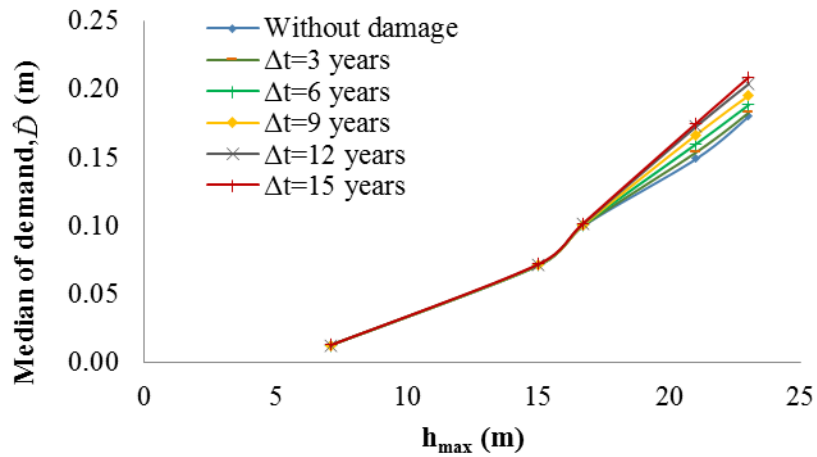


Fig. 5. Median of demand,  $\hat{D}$ , for different intervals.

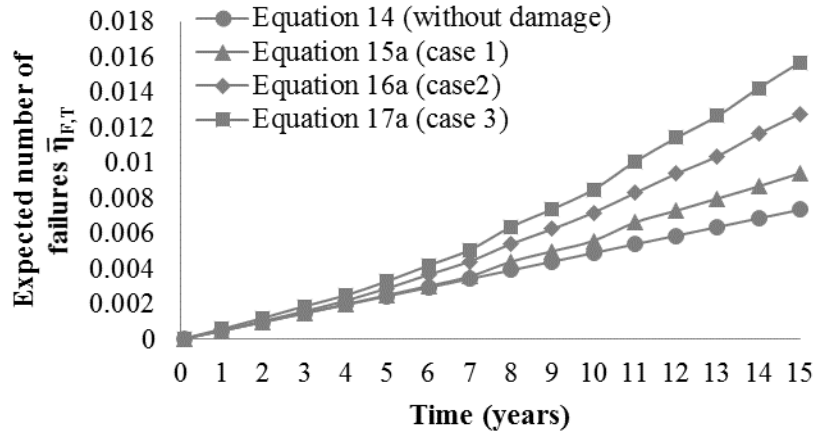


Fig. 6. Expected number of failures over a time interval.

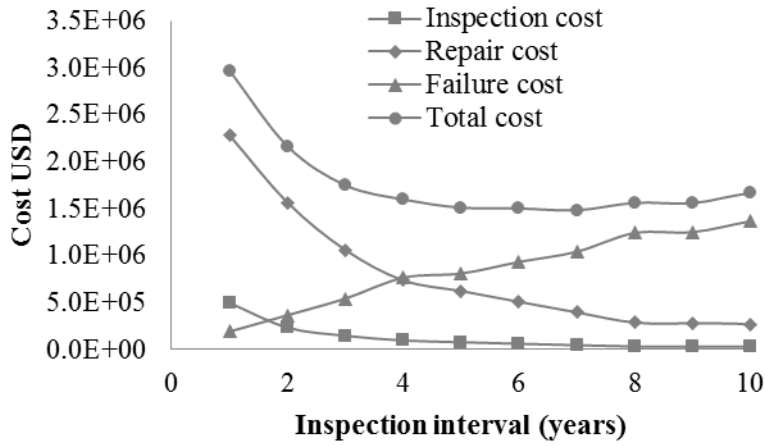


Fig. 7. Expected costs for case 1 (section 3.1).

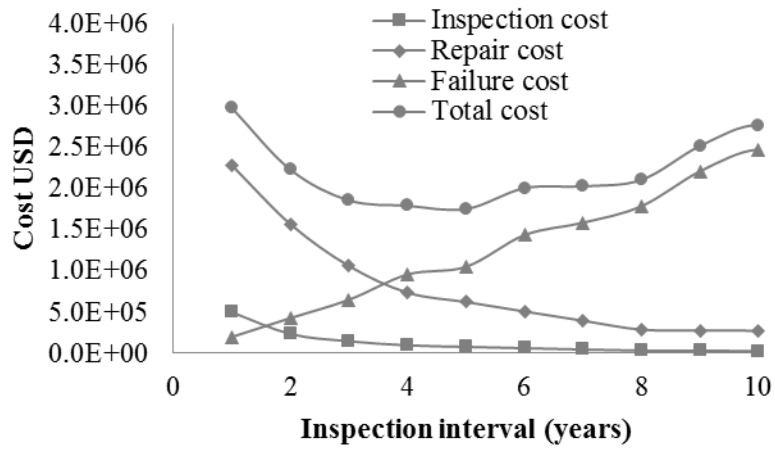


Fig. 8. Expected costs for case 2 (section 3.2).

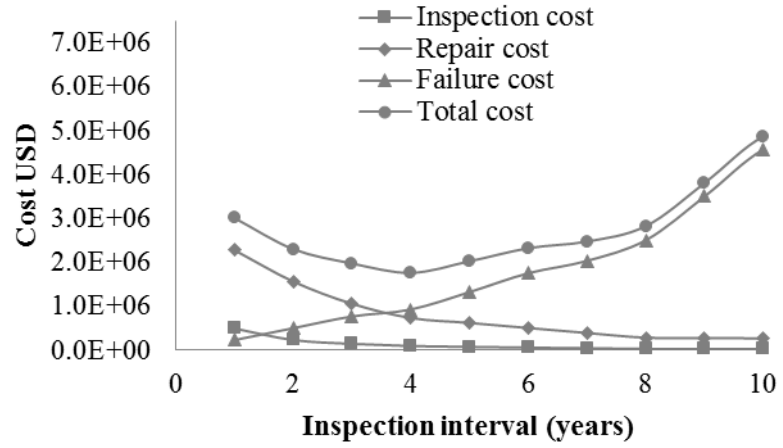


Fig. 9. Expected costs for case 3 (section 3.3).

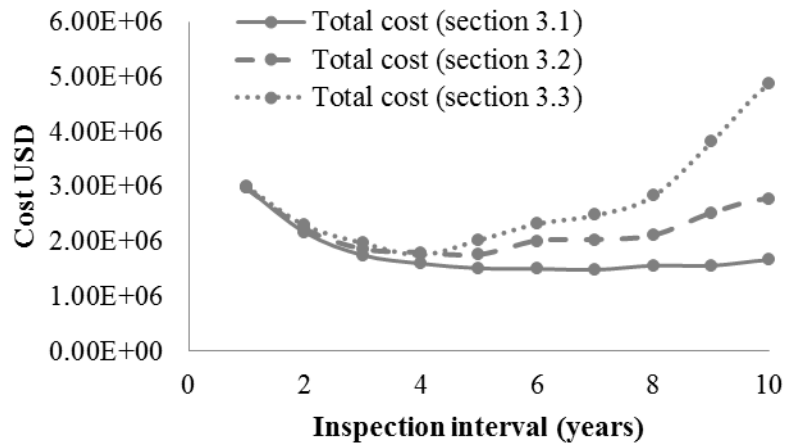


Fig. 10. Total costs for cases 1, 2 and 3 (sections 3.1, 3.2 and 3.3).

# APÉNDICE I

## ARTÍCULO EN PUBLICADO EN LA REVISTA *MATHEMATICAL PROBLEMS IN ENGINEERING*

Tolentino, D., y Ruiz, S. E., 2013c. Time intervals for maintenance of offshore structures based on multiobjective optimization, *Mathematical Problems in Engineering*, Artículo ID 125856, 15 paginas.



# Time intervals for maintenance of offshore structures based on multiobjective optimization

*Dante Tolentino<sup>1,\*</sup> and Sonia E. Ruiz<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510, Coyoacán, DF, México.

\* Corresponding author: +52 (55) 56233600 x 8480

E-mail addresses: [DTolentinoL@iingen.unam.mx](mailto:DTolentinoL@iingen.unam.mx), [SRuizG@iingen.unam.mx](mailto:SRuizG@iingen.unam.mx).

With the aim of establishing adequate time intervals for maintenance of offshore structures, an approach based on multiobjective optimization for making decisions is proposed. The formulation takes into account the degradation of the mechanical properties of the structures and its influence over time on both the structural capacity and the structural demand, given a maximum wave height. The set of time intervals for maintenance corresponds to a balance between three objectives: a) structural reliability, b) damage index and c) expected cumulative total cost. Structural reliability is expressed in terms of confidence factors as functions of time by means of closed-form mathematical expressions which consider structural deterioration. The multiobjective optimization is solved using an evolutionary genetic algorithm. The approach is applied to an offshore platform located at Campeche Bay in the Gulf of Mexico. The optimization criterion includes the reconstruction of the platform. Results indicate that if the first maintenance action is made in 5 years after installing the structure, the second repair action should be made in the following 7 to 10 years; however, if the first maintenance action is made in 6 years after installing the structure, then the second should be made in the following 5 to 8 years.

## 1. Introduction

Structures are continually exposed to different environmental loads that modify both their mechanical properties and their structural performance over time. Due to these modifications, it is useful to formulate maintenance plans for the structural systems. Several approaches of maintenance plans have been proposed in the literature considering different numbers of optimization objectives: i.e., a) minimizing the expected cumulative maintenance cost over a time interval (as a single objective) [1], b) minimizing maintenance cost and maximizing load-carrying capacity and durability (as two independent objectives) [2], and c) more powerful approaches that optimize several objectives simultaneously [3-6].

In this paper a multiobjective optimization approach is proposed. Such approach considers a balance among the following objectives: 1) reliability, expressed in terms of the confidence factor that takes into account the structural deterioration over time by means of closed-form mathematical expressions, 2) damage index, expressed in terms of the ratio between the structural capacity and the structural demand, and 3) expected cumulative total cost, which considers costs of inspection, repair and failure. The optimization problem is solved by means of the elitist Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA II) [7] which gives place to a set of nondominated solutions that are used to recommend time intervals for making decisions for maintenance of an offshore structure.

For the particular case of offshore structures, the structural deterioration phenomenon is mainly due to fatigue caused by waves acting continuously on the steel elements. The decrease of the resistance of the structural capacity over a time interval is caused by the cracking of the tubular joints. The inspection of an offshore structural system has two objectives: a) to detect both the presence and the size increase of cracks, and b) to perform the necessary maintenance actions to the

structure accordingly. Many authors have proposed inspection and maintenance plans for offshore structures using different approaches such as: a) the analysis of risk and reliability of welded connections subject to fatigue [8-10]; b) the use of methodologies that take into account a fatigue sensitivity analysis in steel joints [11]; c) the application of probabilistic detection methods in order to study the influence of repetitive inspection for fatigue in joints [12]; d) the implementation of simplified approaches and the use of practical design parameters such as fatigue design factors [13] and/or reserve strength ratios [14]; e) the consideration of damage caused by fatigue, buckling and dents on structural elements [15] and f) the use of Bayesian techniques [16].

However, neither a multiobjective criterion for making decisions of maintenance actions on “jacket” marine platforms, nor simplified closed-form mathematical expressions for taking into account the structural deterioration of both structural capacity and structural demand over a time interval are considered in the studies mentioned above, as it is done in the present study. The advantage of using closed-form mathematical expressions is the possibility of evaluating the structural reliability without having to perform numerical integrations.

## **2. Basic definitions of structural reliability, damage index and expected cumulative total cost**

### **2.1 Structural Reliability**

The structural reliability can be expressed by means of different indicators, such as: probability of failure in a time interval, expected number of failures per unit time, confidence factors and confidence levels, etc. In this paper, the confidence factor,  $\lambda_{conf}$ , is used as a measure of the reliability implicit in the structure. The confidence factor was originally introduced in order to evaluate the reliability of steel building structures [17-20]. Later, the original methodology was extended to the case in which the mechanical properties of the structural elements present degradation (i.e. due to corrosion, fatigue, etc.), and as a consequence, either the structural capacity or the structural demand, or even both, change over time [21-24]. In the present study the confidence factor is evaluated under the assumption that the structural capacity deteriorates linearly over time. For this case, the confidence factor,  $\lambda_{conf}$ , is calculated as mentioned in Appendix A.

### **2.2. Damage index**

The damage index (*DI*) is defined as the ratio of the structural capacity, *C*, and the structural demand, *D*. The damage index varies between 0 and 1, where 0 indicates that the structure does not have any damage, and 1 refers to total damage, which means that the structural system has reached its failure condition.

### **2.3. Expected cumulative total cost**

The expected cumulative total cost function is defined as the sum of the expected cost of inspection, repair, and failure, at the end of a time interval  $[0, \Delta t)$ , as derived in reference [25] and presented in Appendix B.

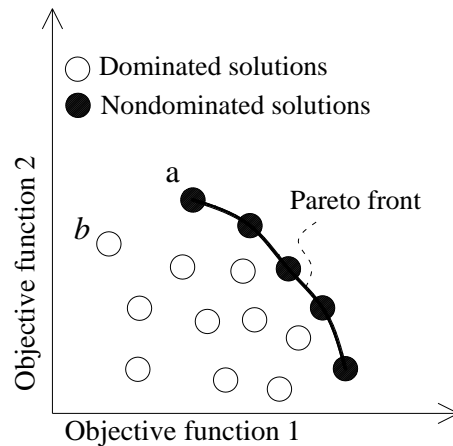
## **3. Basic definitions of genetic algorithms**

Genetic algorithms (GA's) are adaptive methods used to solve, search and optimize problems. Based on the principle of the survival of the fittest [26], GA's have been applied successfully in many problems and different areas (i.e. economics, medicine, engineering, etc.). GA's are commonly composed of three basic operators: 1) selection, 2) crossover, and 3) mutation. Recently, GA's have been used by civil engineers due to the ease of handling multiple goals directly and

simultaneously [27-28]. In this study, GA's are selected as a tool of optimization in order to solve a problem in which three objectives must be satisfied. Commonly, in multiobjective optimization a set of nondominated solutions is obtained, all of which form a Pareto front. The concept of dominance is as follows [29]:

Assuming that all objective functions are to be maximized (see figure 1), it is said that the solution  $b$  is dominated by solution  $a$  if conditions 1 and 2 are true:

1. Solution  $a$  is not worse than  $b$  considering all the objectives, and
2. Solution  $a$  is strictly better than  $b$  in at least one objective



**Figure 1.** Dominated and nondominated solutions.

In order to find a Pareto front that helps the decisions makers to formulate plans of maintenance of offshore structures which present structural degradation over a time interval, the elitist NSGA II method [7] was used in the present study. The approach consists of the following steps:

- F. Randomly create an initial population  $P_i$  of size  $N$ , where  $i =$  generation index ( $i=0, 1, 2 \dots n$ ).
- G. Selection, crossover and mutation are made to create the offspring population  $Q_i$  of size  $N$ .
- H. Combine parent,  $P_i$ , and offspring,  $Q_i$ , to create the population  $R_i$  of size  $2N$ .
- I. A fast nondominated sort of size  $R_i$  is made to create the population  $P_{i+1}$  of size  $N$ .
- J. Repeat the process from the second step using the population selected above to create the offspring population,  $Q_{i+1}$ .

The offspring population  $Q_i$  is obtained using *binary tournament selection*, *intermediate crossover* and *Gaussian mutation*. These concepts are explained below:

*Binary tournament selection:*  $n$  individuals (commonly 2) are selected randomly from the size population. The selected individuals compete against each other. The individual with the highest fitness win, and it will be included for crossover and mutation [30].

*Intermediate crossover*: is the process of creating offsprings by a weighted average of the parents, and it is controlled by the following ratio [31] [32]:

$$\text{Offspring} = \text{parent1} + \text{ratio}(\text{parent2} - \text{parent1}) \quad (3.1)$$

The value of “ratio” is commonly assumed equal to 1.2 [32].

*Gaussian mutation*: consists in adding a random number taken from a Gaussian distribution with mean 0 to each entry of the parent vector. The standard deviation ( $\sigma$ ) is determined by the parameters “scale” and “shrink”, as follows:

$$\sigma = \text{scale} \left( 1 - \text{shrink} \left( \frac{k}{n} \right) \right) \quad (3.2)$$

where the “scale” parameter determines the standard deviation at the first generation; the “shrink” parameter controls how the standard deviation shrinks as generations go by;  $k$  is the current generation, and  $n$  represents the number of total generations under consideration. The values of “scale” and “shrink” are commonly assumed equal to 1.0 [32].

*Fast nondominated sort*: a “naive and slow” procedure [29] is applied in order to sort a population into different nondomination levels. In this procedure each solution is compared with every other solution in order to find out if it is dominated by any other solution in the population. When the comparisons of each solution are completed, all individuals in the first nondominated front are found. All individuals obtained in the first nondominated front are set apart temporarily in order to find the second nondominated front, and the procedure is repeated. The third nondominated front is obtained by setting apart temporarily all the individuals in the first and second front, and the procedure mentioned above is repeated. In summary, different fronts  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  are obtained in this approach, where  $F_1$  is the best nondominated set,  $F_2$  is the next best nondominated set, and so on. In case of  $F_1 < N$ , all members of the set  $F_1$  are chosen to create the new population  $P_{i+1}$ ; the remaining members are chosen from the subsequent nondominated sets in the order of their ranking ( $F_2, F_3, \dots, F_n$ ). If  $F_1 > N$ , the members are chosen using a crowded-comparison operator [29], in descending order and the best solutions needed to fill the population slots are selected.

#### 4. General approach of the multiobjective optimization for structural maintenance

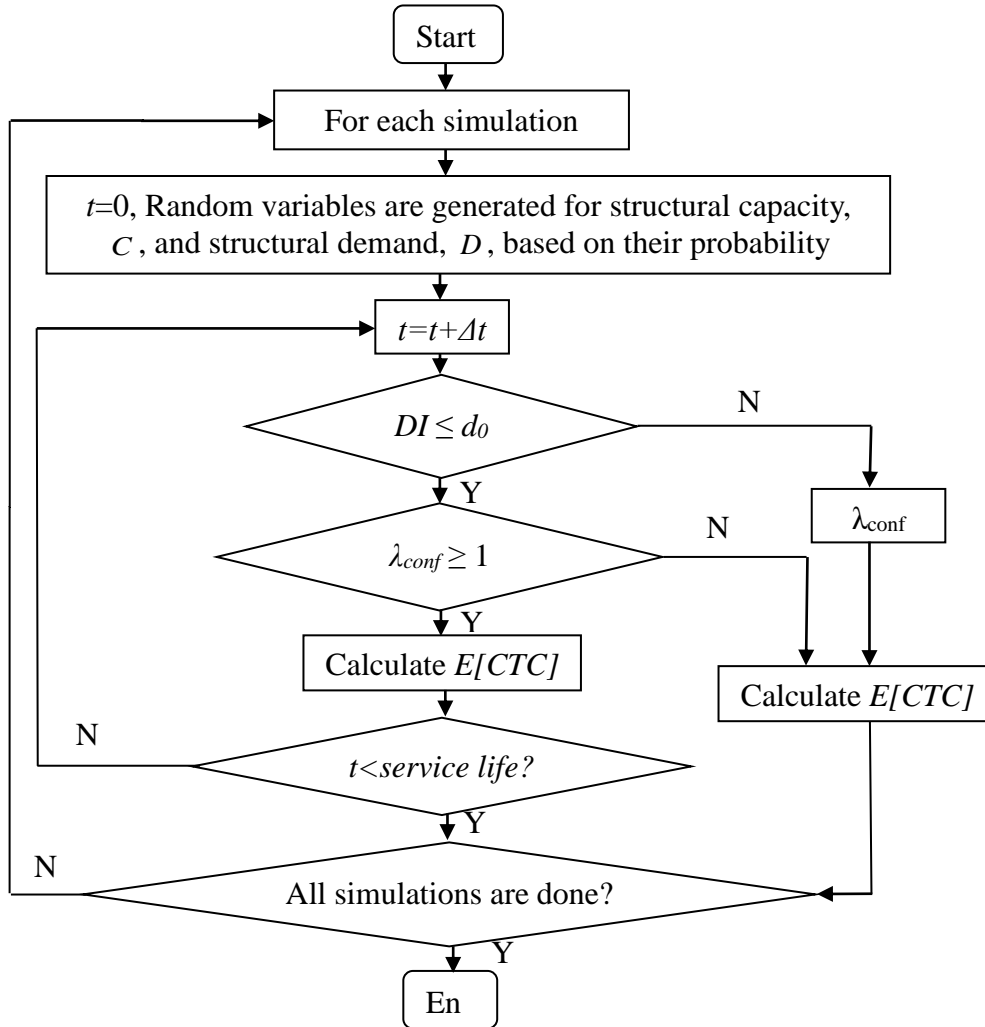
The multiobjective optimization criterion for maintenance of offshore structures formulated in the present study considers three objectives: confidence factor ( $\lambda_{conf}$ ), damage index ( $DI$ ), and expected cumulative total cost ( $E[CTC]$ ). The first two objectives are subjected to the following constraints:

- The confidence factor is subject to  $\lambda_{conf} \geq 1$
- The damage index is subject to  $DI \leq d_0$

That is, the structural reliability expressed in terms of the confidence factor,  $\lambda_{conf}$ , must be greater than unity [18] (values less than 1 consider that the structure is in the unsafe side). The

damage index ( $DI$ ) should be smaller or equal to a given threshold ( $d_0$ ) which is related to a permissible level of structural damage.

The procedure to obtain the set of nondominated solutions is divided here in two general steps: a) the simulation of values of the three objectives ( $\lambda_{conf}$ ,  $DI$  and  $E[CTC]$ ) over a time interval, as indicated in the flowchart of figure 2, and b) the codification of the simulations, to perform the multiobjective optimization by means of NSGA II.

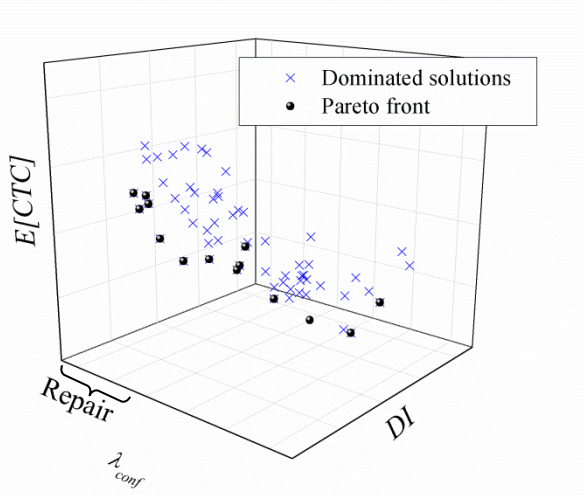


**Figure 2.** Flowchart corresponding to the three objectives simulation.

The simulation profiles are codified in order to perform the multiobjective optimization by using the GA mentioned in the previous section. Then, the optimization problem is solved as follows:

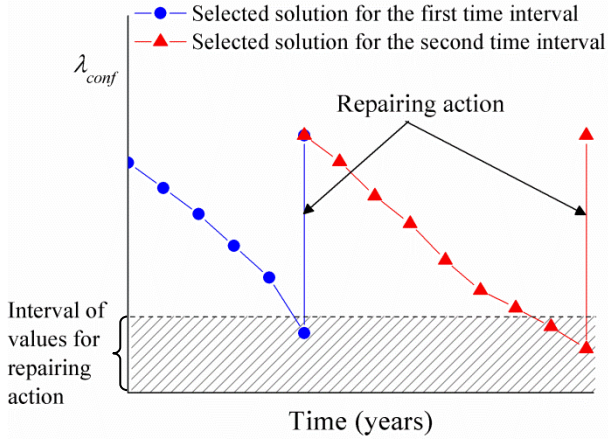
- Maximize the minimum confidence factor
- Minimize the maximum damage index
- Minimize the expected cumulative total cost

As a result, a set of nondominated solutions is found for making decisions and for establishing different time interval for maintenance. In this study, the criterion for selecting the maintenance time interval is based on a threshold value of the confidence factor. When the confidence factor takes values between a certain range of values of the nondominated solutions, maintenance actions should be performed. The range of values  $\lambda_{conf}$  to select the repairing time interval is as illustrated in figure 3, where the nondominated solutions in the bracket are those selected for repairing actions.

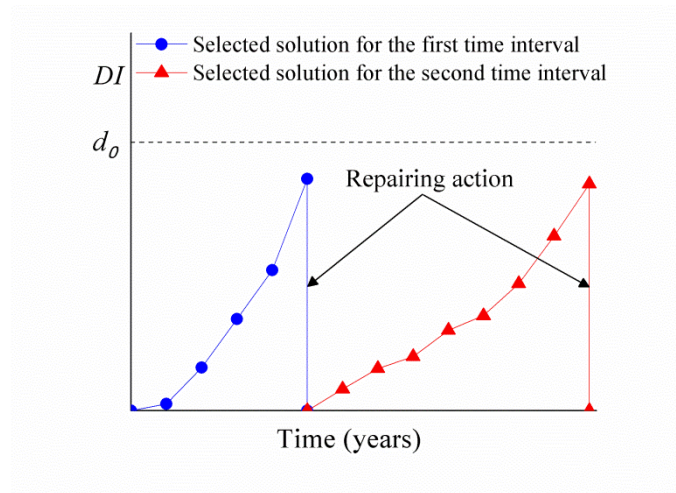


**Figure 3.** Criterion to select repairing time intervals.

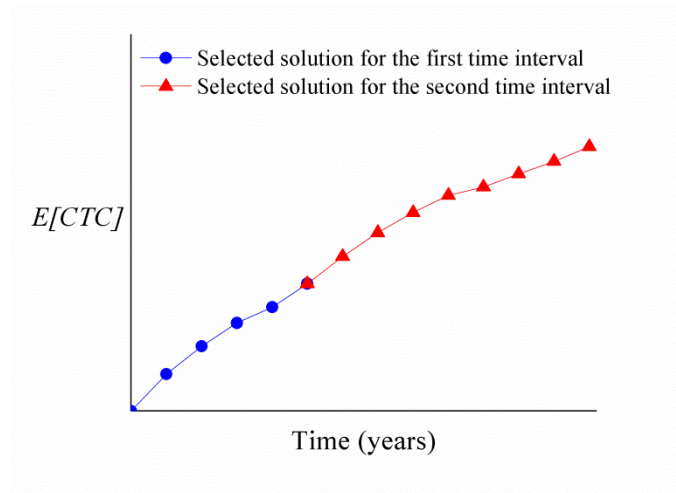
Here it is assumed that after several nondominated solutions are selected for maintenance actions, the critical structural elements are repaired to recover their initial capacities, and a new set of nondominated solutions can be obtained after reconstruction. Then, a second set of nondominated solutions is obtained following the flowchart shown in figure 2 (as done previously); however, an initial cumulative damage (ICD) is now taken into account for the second set of critical structural elements to be analyzed. It is noticed that in the example presented in section 5 the second set of critical structural elements is different from the first set analyzed in the first step. For illustrative purposes, figures 4a, b and c show projections of one selected solution (indicated with circles) corresponding to the first maintenance time interval, as well as one solution (indicated with triangles) corresponding to the second time interval for structural maintenance.



a)



b)

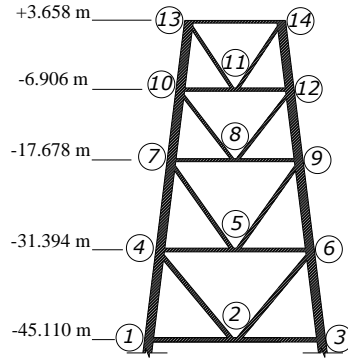


c)

**Figure 4.** Projections of selected solutions corresponding to the first and second time intervals for repairing actions.

## 5. Illustrative example

The multiobjective approach proposed above is applied to an offshore “jacket” platform with the aim of finding its first and its second time interval for maintenance. The platform is supposed to be located in Campeche Bay. The structure is 48 m high and the water depth at the site is 45.11 m (see figure 5). The expected weight of the deck was assumed equal to 500 ton. The “jacket” platform is represented by a simplified 2D model with mean mechanical properties. The joints were selected according to their global structural capacity contribution. Joints 1, 2, 3, 4 and 6 were selected for finding the first time interval for maintenance, whereas joints 5, 7, 8 and 9 were selected for finding the second time interval (once the joints 1, 2, 3, 4 and 6 were totally reconstructed).



**Figure 5.** 2D model of the “jacket” platform.

### 5.1 Evaluation of structural capacity over different time intervals

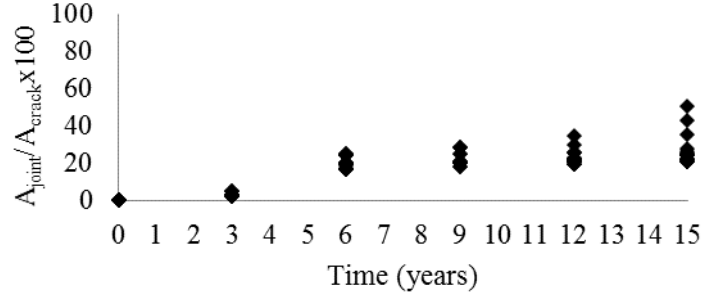
The lateral resistance of the structure was obtained by means of nonlinear static analyses using twenty different simulated profiles of lateral loads. These profiles are related to the acting forces corresponding to the simulated waves that produced the maximum base shear on the structure. The appearance and growth of cracks, which give place to a reduction of the structural capacity, are considered as damage condition. Two crack points were considered for each structural element connected to the joints.

The average crack size simulation process of the selected points subject to random load was performed using the Monte Carlo technique. Operational and storm waves were considered. The arrival times between storms were assumed with exponential distribution. The storm wave heights follow a Gumbel distribution. The statistical parameters used for simulation of the crack size were taken from Silva and Heredia [33]. The crack size was obtained using the modified differential equation by Paris-Ergodan [34] and Sobczyk and Spencer [35]. In the differential equation, the random load was replaced by an equivalent cyclic load whose amplitude and frequency were expressed in terms of the mean properties of the random process. After obtaining the time history of the crack size, the capacity of the joint was reduced by a linear correction factor as follows [36][37]:

$$P_c = P_k \left( 1 - \left( A_{crack} / A_{joint} \right) \right) \quad (5.1)$$

Where  $P_c$  is the capacity of the cracked joint;  $P_k$  is the capacity of the intact joint which can be calculated by means of the API recommendations [38];  $A_{joint}$  and  $A_{crack}$  are the areas of the transverse section and of the crack, respectively, corresponding to all the elements connected to the joint. As an example, percentages of simulated cracked areas at the end of different time intervals, corresponding to joint 2, are shown in Figure 6.





**Figure 6.** Percentages of simulated cracked areas. Joint 2.

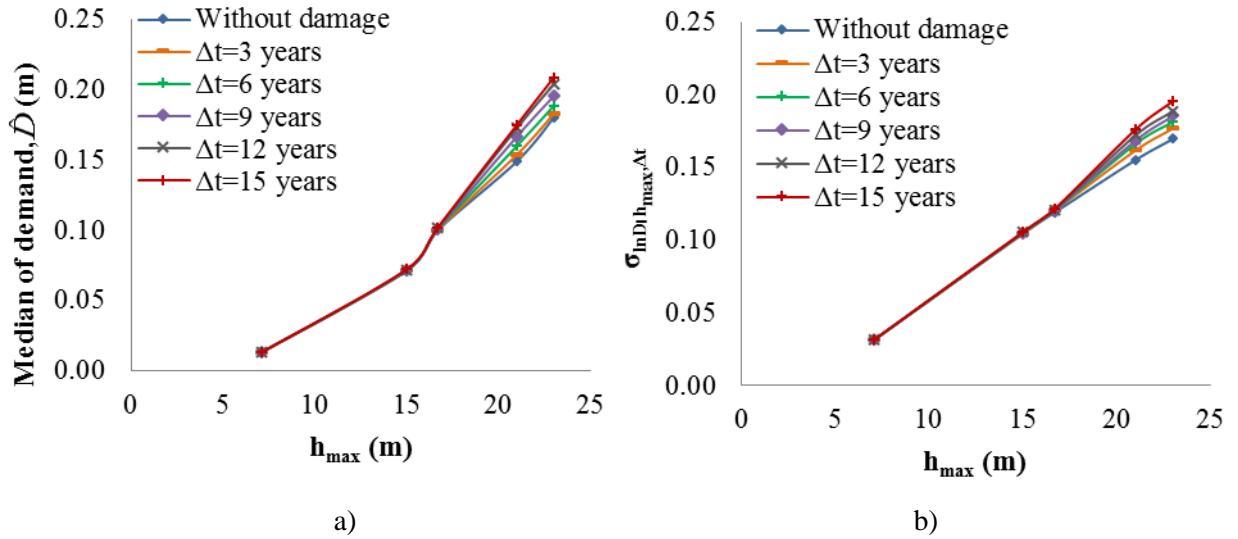
The median of structural capacity,  $\hat{C}$ , represented in terms of the global displacement (in meters, m) of the platform, and the standard deviation of its natural logarithm,  $\sigma_{\ln C|\Delta t}$  are shown in table 1 for different time intervals ( $\Delta t = 0, 1, 2, \dots, 15$  years). It is assumed that both the structural capacity and the structural demand follow a lognormal distribution in any time [17-21].

**Table 1.** Median of structural capacity,  $\hat{C}$ , and standard deviation of the natural logarithm of the structural capacity at different time intervals.

$\Delta t$ (years)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C \Delta t}$	$\Delta t$ (years)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C \Delta t}$	$\Delta t$ (years)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C \Delta t}$
0	0.2520	0.0140	6	0.2322	0.1813	12	0.2151	0.2122
1	0.2516	0.0574	7	0.2297	0.1902	13	0.2116	0.2137
2	0.2492	0.0901	8	0.2272	0.1918	14	0.2106	0.2305
3	0.2462	0.1054	9	0.2206	0.1971	15	0.2092	0.2334
4	0.2429	0.1130	10	0.2190	0.1978			
5	0.2378	0.1500	11	0.2179	0.2079			

## 5.2 Evaluation of the structural demand over different time intervals

The structural demand (given a maximum wave height) at the end of a time interval was obtained by means of dynamic "step by step" analysis, using simulated time histories of waves that correspond to different maximum wave heights. The crack growth simulations and the capacity reductions at selected joints considered to evaluate the capacity  $\hat{C}$  over time (section 5.1) were also used in this section as damage condition. Figures 7 a and b show the median structural demand as a function of the platform global displacement, and the corresponding standard deviation of the natural logarithm of the demand, for different intervals  $\Delta t$ , respectively. The expression that fit the median values of the structural demand,  $\hat{D}$ , given a maximum wave height,  $h_{\max}$ , at the end of different time intervals  $\Delta t$ , is given by  $\hat{D}(\Delta t) = (a + f \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^b$  (a similar expression was proposed by Tolentino et al. [24]). According to the above, the median structural demand, given a maximum wave height, is equal to  $\hat{D}(\Delta t) = (3.75E-04 + 5.0E-08 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^{2.0}$ . Similarly, the corresponding standard deviation of the natural logarithm of the demand is given by  $\sigma_{\ln D|h_{\max}, \Delta t} = (1.65E-03 + 1.5E-05 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^{1.5}$ .



**Figure 7.** a) Median of structural demand and b) standard deviation of the natural logarithm of the demand, for different time intervals.

### 5.3 Damage index

In this study the damage index is defined as:

$$DI = \frac{C_0 - C(\Delta t)}{C_0 - D(\Delta t)} \quad (5.2)$$

where  $C_0$  is the maximum global displacement of the structure without damage,  $C(\Delta t)$  represents the maximum global displacements that consider structural deterioration at instant  $\Delta t$ , and  $D(\Delta t)$  is the ultimate global displacement demanded by the structure at instant  $\Delta t$ .

### 5.4 Confidence factor and expected cumulative total cost

The confidence factor values,  $\lambda_{conf}(0, \Delta t)$ , were calculated using equation A.1. The parameters  $\alpha$  and  $\beta$  were fitted according to equation A.4, based on the median values of the structural capacity,  $\hat{C}$ , shown in table 1. The epistemic uncertainties associated with the structural demand,  $\sigma_{UD}$ , and with the structural capacity,  $\sigma_{UC}$ , were assumed equal to 0.15. The parameters  $k$  and  $r$  fitted to the wave hazard curve were equal to  $k = 5.0E03$  and  $r = 5$ , which correspond to a maximum wave height equal to  $h_{max} = 23$  m and to a return interval of 1485 years for the failure condition [39].

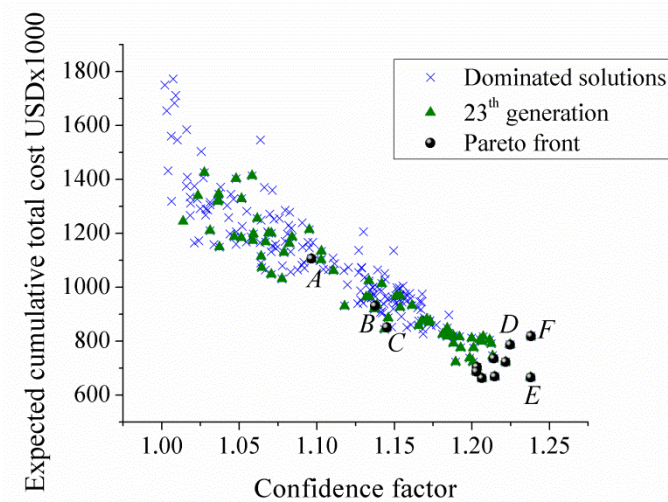
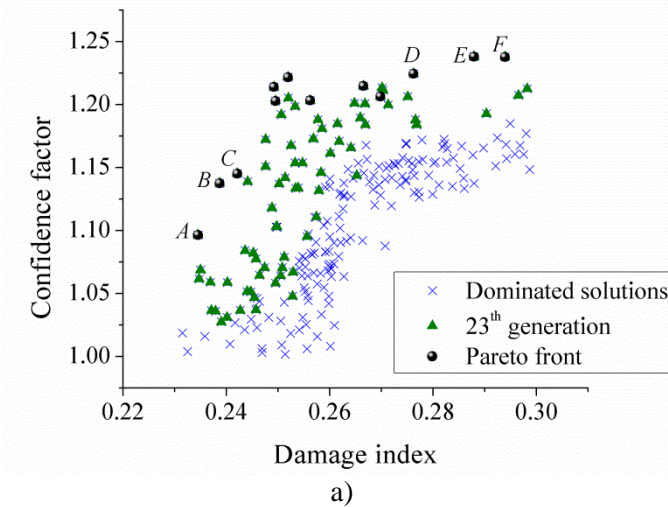
The expected cumulative total cost was evaluated using equation B.1 An annual discount rate  $\gamma = 6\%$  was assumed. The inspection cost by joint was 3,518 USD [40] and the repair cost was 20,000 USD for each critical point [41]. The cost of failure includes costs due to equipment damage, pollution, deferred production and indirect losses [25].

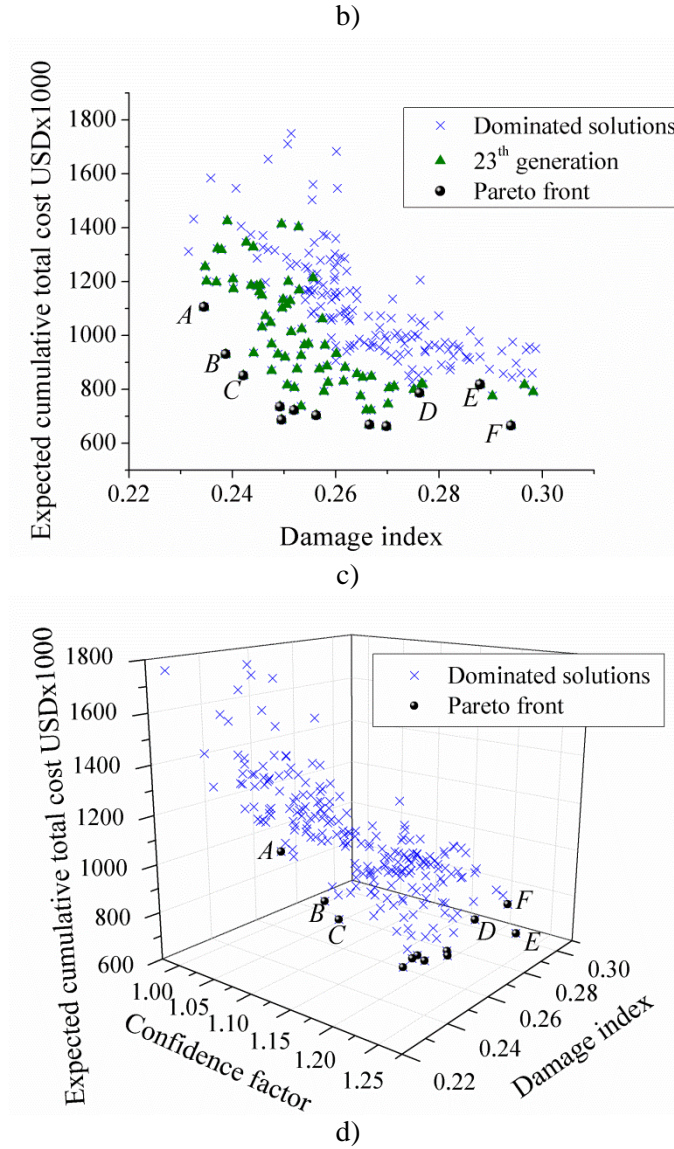
### 5.5 Simulation of the three objectives

1024 profiles of damage index, confidence factor and expected cumulative total cost, considering cumulative damage at the end of a time interval  $[0, \Delta t)$  were simulated, following the procedure presented in figure 2. The simulations were based on the median values and the standard deviations of structural capacity and structural demand. Lognormal distribution functions were assumed.

### 5.6 Multiobjective optimization before reconstruction (first time interval for maintenance)

The simulations were codified in order to perform the optimization by means of NSGA II. A population size of 50 was considered. A set of 12 optimal solutions in 24 generations were found. Different views of the Pareto front that include damage index, confidence factor and the expected total cost over a time interval, are shown in figures 8 a, b and c. Figure 8 d shows the same results in 3D view. It can be observed that the damage index varies between 0.23 and 0.29, the confidence factor presents values between 1.10 and 1.24, and the expected cumulative total cost takes values between 6.62E+05 and 1.10E+06 USD. In order to compare different time intervals to perform maintenance actions, six optimal solutions (A, B, C, D, E and F) were selected (see figures 8 a-d). A comparison among the solutions selected is shown in table 2.





**Figure 8.** Pareto front corresponding to the three objective functions, and optimal solutions *A*, *B*, *C*, *D*, *E* and *F*.

**Table 2.** Comparison between solutions *A*, *B*, *C*, *D*, *E* and *F*

Solution	Time interval (years)	Damage index ( <i>DI</i> )	Confidence factor ( $\lambda_{conf}$ )	Expected cumulative total cost $E[CTC]$ (USD)
<i>A</i>	<b>6</b>	0.2345	<b>1.0965</b>	1105415
<i>B</i>	<b>5</b>	0.2387	<b>1.1375</b>	930566
<i>C</i>	<b>5</b>	0.2421	<b>1.1452</b>	850778
<i>D</i>	4	0.2762	1.2246	786761
<i>E</i>	4	0.2879	1.2381	818191
<i>F</i>	3	0.2939	1.2378	665032

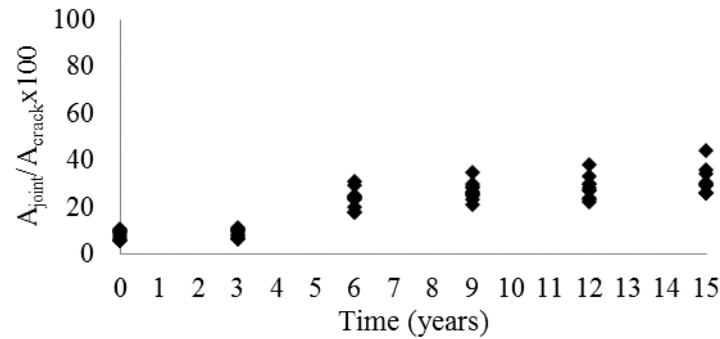
With the aim of establishing time intervals of structural maintenance, solutions associated with values of  $\lambda_{conf} \leq 1.15$  were selected for repairing actions. Then, in accordance to table 2,

maintenance actions on joints 1, 2, 3, 4 and 6 should be performed between 5 and 6 years (corresponding to solutions A, B and C).

### 5.7 Multiobjective optimization after reconstruction (second time interval for maintenance)

In this section it is assumed that the maintenance (repairing) actions on joints 1, 2, 3, 4 and 6 are performed in accordance with solution A, and alternatively, with solution C. It means that the first repair is done after 6 years of installing the platform (solution A), or alternatively, after 5 years if solution C is selected (see table 2). Also, it is considered that after maintenance, the joints recover their full capacity. Taking this into account, the joints that should be repaired in the next maintenance plan are joints 5, 7, 8 and 9 (which were selected in accordance with their contribution to global structural capacity).

The evaluation of the structural capacity and the structural demand (given a maximum wave height) at the end of a time interval  $[0, \Delta t)$  after the first maintenance action, was performed in a similar way as in sections 5.1 and 5.2; however, it was now considered that joints 5, 7, 8 and 9 presented an initial cumulative damage (ICD). The ICD takes into account the deterioration due to fatigue that the joints suffered during the time interval between the installation of the structure and its first repair. Figure 9 shows an example of the percentages of cracked areas of joint 5 at the end of different time intervals, considering an ICD corresponding to 5 years (which is associated with solution C). It is noticed that in figure 9 there is an initial cumulative damage (represented by  $A_{\text{joint}}/A_{\text{crack}} \times 100$ ) at  $\Delta t = 0$  years (on the contrary, figure 6 does not indicate any initial cumulative damage in joint 2).



**Figure 9.** Percentages of the simulated cracked area on joint 5, with an ICD corresponding to solution C.

Tables 3 and 4 show the median of the structural capacity,  $\hat{C}$ , represented in terms of global displacement of the platform, corresponding to solutions A and C, respectively, for different time intervals ( $\Delta t$ ) after the first maintenance actions. The standard deviations of the natural logarithm of the structural capacity are also shown in tables 3 and 4.

**Table 3.** Median of the structural capacity,  $\hat{C}$ , and standard deviation of the natural logarithm, at the end of different time intervals, corresponding to solution A.

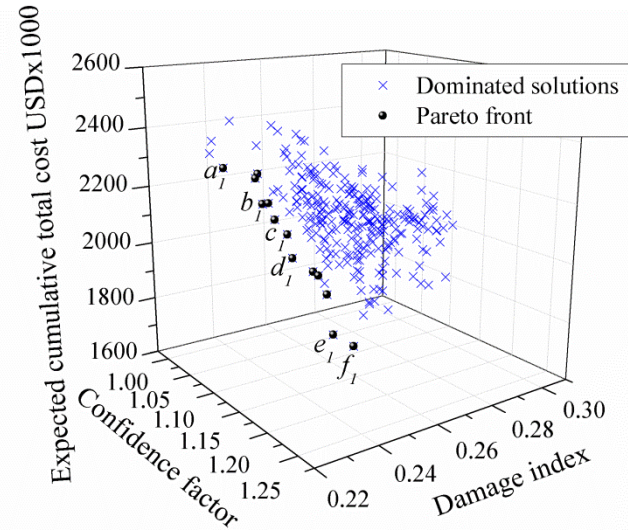
$\Delta t$ (years)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C \Delta t}$	$\Delta t$ (years)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C \Delta t}$	$\Delta t$ (years)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C \Delta t}$
0	0.2530	0.0129	6	0.2373	0.1803	12	0.2249	0.2176
1	0.2515	0.0336	7	0.2365	0.1870	13	0.2246	0.2247
2	0.2499	0.0885	8	0.2325	0.1966	14	0.2227	0.2362
3	0.2474	0.1141	9	0.2304	0.2026	15	0.2213	0.2578
4	0.2448	0.1412	10	0.2296	0.2033			
5	0.2420	0.1592	11	0.2286	0.2193			

**Table 4.** Median of the structural capacity,  $\hat{C}$ , and standard deviation of the natural logarithm, at the end of different time intervals, corresponding to solution C.

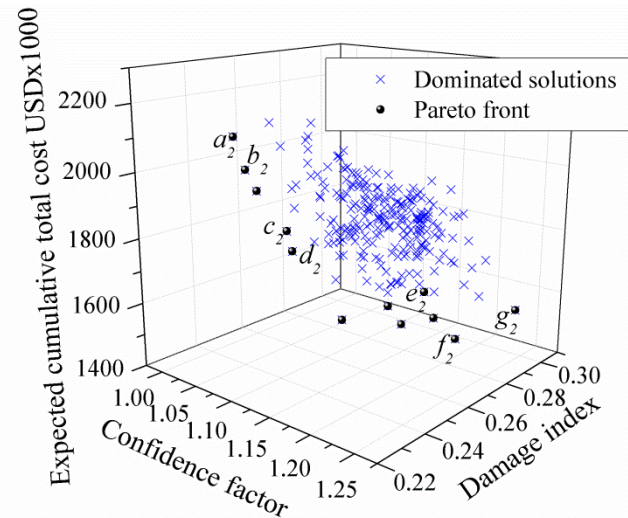
$\Delta t$ (years)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C \Delta t}$	$\Delta t$ (years)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C \Delta t}$	$\Delta t$ (years)	$\hat{C}$ (m)	$\sigma_{\ln C \Delta t}$
0	0.2534	0.0146	6	0.2448	0.1433	12	0.2315	0.1915
1	0.2518	0.0383	7	0.2417	0.1509	13	0.2300	0.1920
2	0.2503	0.0863	8	0.2392	0.1602	14	0.2285	0.2026
3	0.2495	0.1196	9	0.2375	0.1668	15	0.2273	0.2332
4	0.2476	0.1250	10	0.2364	0.1702			
5	0.2468	0.1398	11	0.2342	0.1841			

The median of the structural demand (given a maximum wave height,  $h_{\max}$ ) was calculated as in section 5.2. The expressions obtained are  $\hat{D}(\Delta t) = (3.55E-04 + 4.1E-08 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^2$  and  $\hat{D}(\Delta t) = (3.4E-04 + 4.0E-08 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^2$ , for solutions A and C, respectively. The standard deviations of the natural logarithm of the demand, for a maximum wave height, at the end of different time intervals ( $\Delta t$ ) were fitted as  $\sigma_{\ln D|h_{\max}, \Delta t} = (1.5E-03 + 1.5E-05 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^{1.55}$  and  $\sigma_{\ln D|h_{\max}, \Delta t} = (1.4E-03 + 1.4E-05 \cdot \Delta t) \cdot h_{\max}^{1.55}$  for solutions A and C, respectively.

A total of 1024 simulations corresponding to solution A, and alternatively, to solution C were performed following the procedure presented in figure 2. The simulations were codified for each case in order to realize the optimization procedure using NSGA II. A population size of 50 was considered. A set of 13 optimal solutions with 23 generations for solution A was found, and 12 optimal solutions with 25 generations for solution C were obtained. Figures 10 and 11 show the set of solutions (Pareto fronts) for cases A and C, respectively. Next, some optimal solutions are selected in order to handle different options for structural maintenance. A comparison of two sets of solutions selected is shown in tables 5 and 6 (see figures 10 and 11).



**Figure 10.** Pareto front with 13 optimal solutions considering solution A for the first time interval for maintenance, and a set of solutions selected ( $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$ ,  $e_1$ , and  $f_1$ ) for the second interval for maintenance.



**Figure 11.** Pareto front with 12 optimal solutions considering solution C for the first time interval for maintenance, and a set of solutions selected ( $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ ,  $d_2$ ,  $e_2$ ,  $f_2$  and  $g_2$ ) for the second interval for maintenance.

**Table 5.** Comparison between solutions  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$ ,  $e_1$  and  $f_1$ . ICD corresponding to 6 years

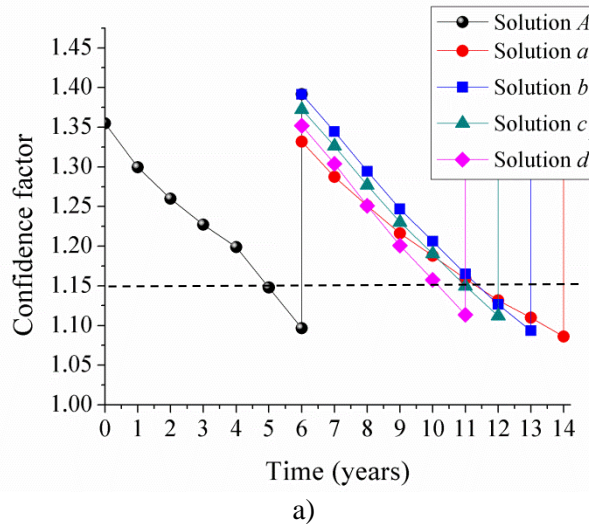
Solution	Time interval (years)	Damage index (DI)	Confidence factor ( $\lambda_{conf}$ )	Expected cumulative total cost $E[CTC]$ (USD)
$a_1$	<b>8</b>	0.2277	<b>1.0859</b>	2319250
$b_1$	<b>7</b>	0.2388	<b>1.0935</b>	2190760
$c_1$	<b>6</b>	0.2435	<b>1.1119</b>	2095360
$d_1$	<b>5</b>	0.2448	<b>1.1136</b>	2014650
$e_1$	3	0.2489	1.1630	1794310
$f_1$	3	0.2535	1.1751	1756520

**Table 6.** Comparison between solutions  $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2$  and  $g_2$ . ICD corresponding to 5 years

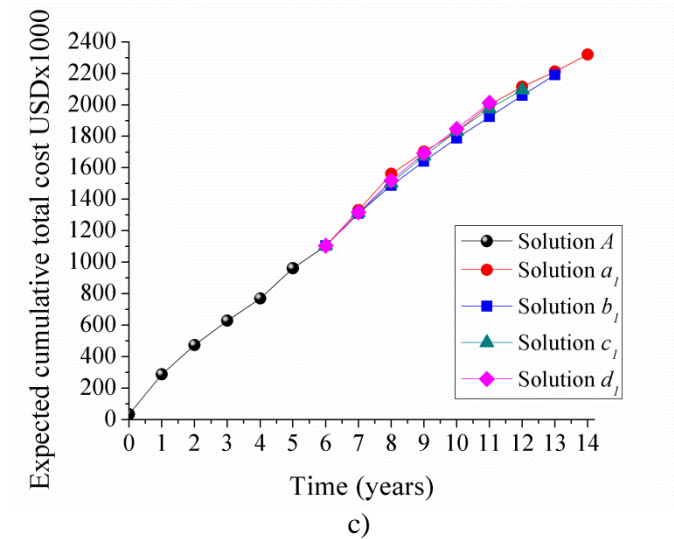
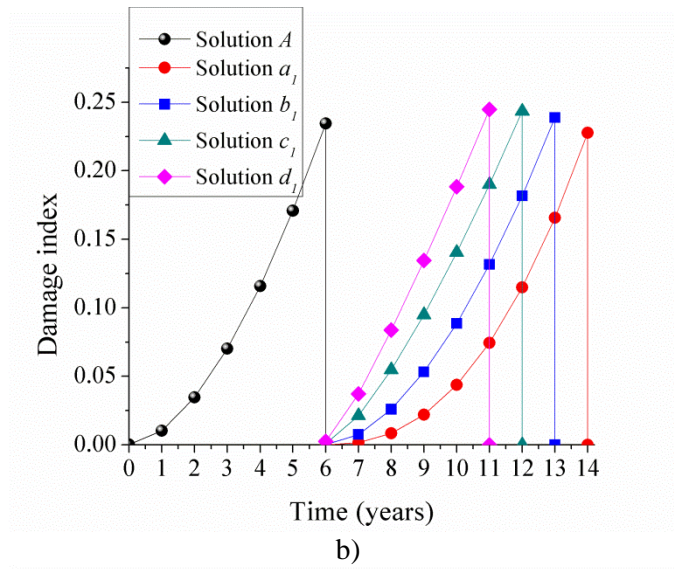
Solution	Time interval (years)	Damage index (DI)	Confidence factor ( $\lambda_{conf}$ )	Expected cumulative total cost $E[CTC]$ (USD)
$a_2$	10	0.2284	<b>1.0827</b>	2133420
$b_2$	9	0.2309	<b>1.0886</b>	2040560
$c_2$	8	0.2371	<b>1.1200</b>	1870170
$d_2$	7	0.2375	<b>1.1255</b>	1813980
$e_2$	5	0.2680	1.2029	1665650
$f_2$	4	0.2734	1.2284	1523060
$g_2$	4	0.2980	1.2458	1554500

In a similar way to the previous section, the time intervals for the second maintenance actions are performed when the structural confidence values are lower than 1.15. Tables 5 and 6 show that maintenance actions could be done at time intervals between 5 and 8 years (solutions  $a_1, b_1, c_1$  and  $d_1$ ) if the first maintenance actions were done after 6 years of installing the platform, or alternatively, at intervals between 7 to 10 years (solutions  $a_2, b_2, c_2$  and  $d_2$ ) if the first maintenance actions were performed after 5 years of installing the platform.

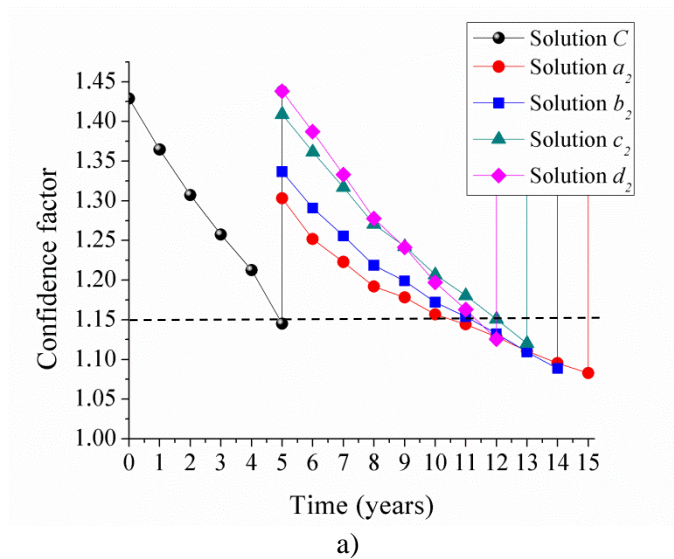
Figures 12 a, b and c show projections of solution A (see table 2) together with projections of solutions  $a_1, b_1, c_1$  and  $d_1$  corresponding to the three objectives (damage index, confidence factor and expected cumulative total cost). Similarly, figures 13 a, b and c show projections of solution C together with projections of solutions  $a_2, b_2, c_2$  and  $d_2$ .

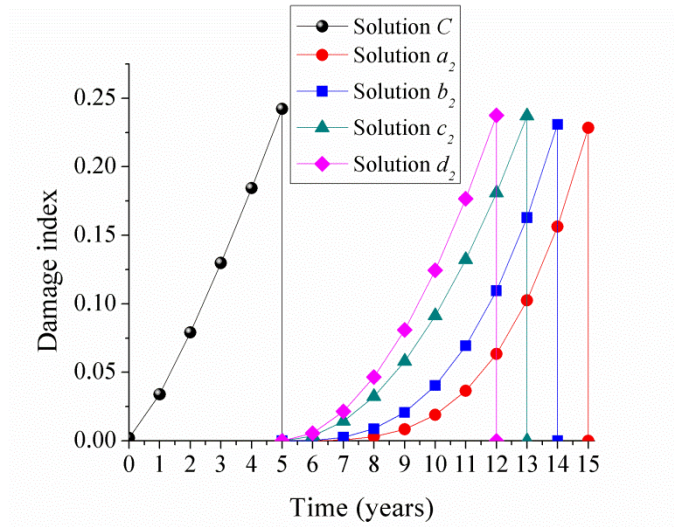




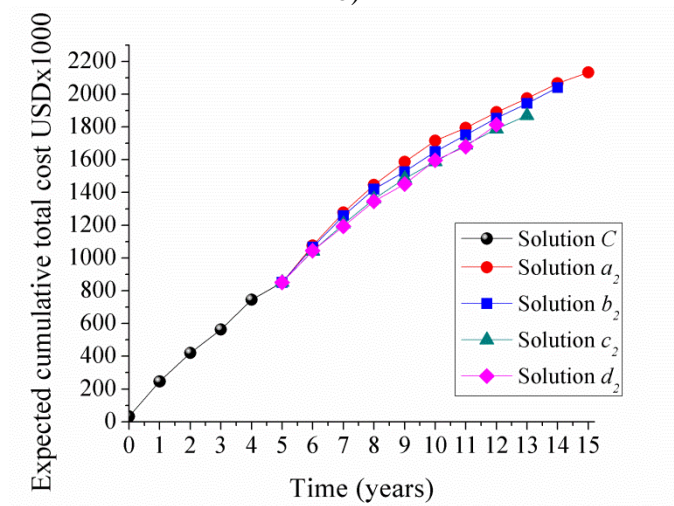


**Figure 12.** Different projections of solution A and of solutions  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  and  $d_1$ .





b)



c)

**Figure 13.** Different projections of solution  $C$  and of solutions  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  and  $d_2$ .

In summary, in accordance with the criterion selected for performing maintenance actions (values of  $\lambda_{conf} < 1.15$ ), figures 12 a and b show that the first optimal time interval for reconstructing joints 1, 2, 3, 4 and 6 can be after 6 years of installing the offshore “jacket” platform (see table 2, solution A). If this solution is selected, then the second optimal time interval for repairing actions on joints 5, 7, 8 and 9 should be after 5, 6, 7 or 8 years (solutions  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  or  $d_1$ ) of reconstructing the structure. On the other hand, if the maintenance actions for the first time are done after 5 years of installing the marine structure (solution  $C$  in table 2), then, the repairing actions on joints 5, 7, 8 and 9 should be performed after 7, 8, 9 or 10 years after reconstructing the structure (solutions  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  or  $d_2$ ), as shown in figures 13 a and b.

## Conclusions

An approach based on multiobjective optimization in order to find adequate time intervals for maintenance, by means of genetic algorithms, is applied. A set of nondominated solutions is found based on three objectives: 1) confidence factor, which is represented by closed-form mathematical expressions that take into account the structural deterioration over time, 2) damage index, expressed in terms of the ratio between the structural capacity and structural demand, and 3) expected cumulative total cost, which considers inspection, repair and failure costs.

The evolutionary Nondominated Sorting Genetic Algorithm NSGA II was selected as a tool to solve the optimization problem. Different sets of nondominated solutions were found in order to recommend different time intervals for maintenance actions of a fixed steel “jacket” platform subjected to structural deterioration over time. The implemented GA is very efficient since it only requires a few seconds to find a set of nondominated solutions based on different objectives; it also requires less than 30 generations in order to obtain the Pareto front.

The results show that, for the offshore “jacket” platform analyzed, it is recommended to make the maintenance actions on the first set of selected joints, between 5 and 6 years after installing the platform. In the case of performing the first maintenance action after 5 years, the second time interval for repairing the second set of joints is recommended to be done between 7 and 10 years. On the other hand, if the first maintenance actions are performed after 6 years of installing the platform, the second time interval for maintenance actions should be between 5 and 8 years.

The multiobjective optimization approach presented, together with the closed-form mathematical expression used, constitute an efficient tool for making maintenance plans for offshore structures; moreover, it can be adapted to consider different kinds of structures (buildings, transmission towers, bridges, etc.). The criterion can be extended to take into account different types of maintenance actions in order to keep the structural system within prescribed performance levels.

A limitation of the approach presented here is that it is adequate only for making decisions about structural maintenance actions for systems subjected to ordinary excitations; it does not apply to the identification of repair actions that should be taken after the occurrence of extraordinary environmental events; for example, after the action of hurricanes with a return period much longer than that considered here (see section 5.4).

## Acknowledgements

This research project had the support of DGAPA-UNAM (PAPIIT IN107011-3). The first author thanks CONACYT for the economic support to develop his PhD research.

## References

- [1] J. S. Kong, and D. M. Frangopol, “Life-cycle Reliability-based maintenance cost optimization of deteriorating structures with emphasis on bridges”, *Journal of Structural Engineering*, vol. 129, no. 6, pp. 818-828, 2003.
- [2] A. Miyamoto, K. Kawamura, and H. Nakamura, “Bridge management system and maintenance optimization for existing bridges”, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, vol. 15, pp. 45-55, 2000.

- [3] M. Liu, and D. M. Frangopol, "Optimal bridge maintenance planning based on probabilistic performance prediction", *Engineering Structures*, vol. 26, pp. 991-1002, 2004.
- [4] H. Furuta, Y. Takenaka, and M. Erami, "A practical bridge management system using new multi-objective genetic algorithm", In: P. J. S. Cruz, D. M. Frangopol, and L. C. Neves, editors, *Bridge maintenance, safety, management, life-cycle performance and cost*, London, Taylor & Francis Group, pp. 131-132, 2006.
- [5] L. C. Neves, D. M. Frangopol, and P. J. S. Cruz, "Probabilistic lifetime-oriented multiobjective optimization of bridge maintenance: single maintenance type", *Journal of Structural Engineering*, vol. 132, no.6, pp.991-1005, 2006.
- [6] N. M. Okasha, and D. M. Frangopol, "Lifetime-oriented multi-objective optimization of structural maintenance considering system reliability, redundancy and life-cycle cost using GA", *Structural Safety*, vol. 31, no.6, pp. 483-489, 2009.
- [7] K. Deb, A. Pratap, and S. Agarwal, "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm NSGA-II", *Evolutionary Computation*, vol. 6, no.2, pp.182-197, 2002.
- [8] R. Skjong, "Reliability based optimization of inspection strategies", in *ICOSSAR*, vol. 3, pp. 614-618, Kobe, Japan, 1985.
- [9] H. O. Madsen, J. D. Sørensen, and R. Olsen, "Optimal inspection planning for fatigue damage of offshore structures", in *ICOSSAR*, pp. 2099-2106, San Francisco, USA, 1989.
- [10] J. D. Sørensen, M. H. Faber, R. Rackwitz, and P. Thoft-Christensen, "Modeling in optimal inspection and repair", in *10th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE*, pp. 281-288, Stavenger, Noruega, 1991.
- [11] P. Thoft-Christensen, and J. D. Sørensen, "Optimal strategies for inspection and repair of structural systems", *Civil Engineering Systems*, vol.4, pp. 94-100, 1987.
- [12] T. Moan, O. T. Vardal, N. C. Helleving and K. Skjoldli , "In service observations of cracks in North Sea jackets: a study on initial crack depth and POD values", in *16th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE*, Yokohama, Japan, pp 209-218, 1997.
- [13] D. Straub, J. D. Sørensen, J. Goyet, and M. H. Faber, "Benefits of risk based inspection planning for offshore structures", in *25th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE*, pp. 1-10. Hamburg, Germany, 2006.
- [14] M. H. Faber, "Reliability based inspection planning of fatigue damaged offshore platforms", *1st International symposium on analysis of structural risk and reliability for offshore facilities*, IMP, Mexico, 2001.
- [15] C. Ortega and D. De León, "Development of a cost-benefit model for inspection of offshore jacket structures in Mexico", in *22th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE*, pp.87-98, Cancun, Mexico, 2003.
- [16] J. D. Sørensen and G. Ersdal, "Risk based inspection planning of ageing structures", in *27th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE*, vol. 3, pp.399-408, Estoril, Portugal, 2008.
- [17] C. A. Cornell, F. Jalayer, R. O. Hamburger, and D. A. Foutch, "The probabilistic basis for the 2000 SAC/FEMA steel moment frame guidelines", *Journal of Structural Engineering*, vol. 128, no. 4, pp.526-533, 2002.
- [18] C. A. Cornell, "Calculating building seismic performance reliability: A basis for multi-level design norms", in *11th World Conference on Earthquake Engineering*, Paper 2122, 1996.
- [19] Federal Emergency Management Agency (FEMA), "Recommended Seismic Evaluation and Upgrade Criteria for Existing Welded Steel Moment-Frame Buildings", Report No. FEMA 351, SAC Joint Venture, Washington, D. C., 2000.
- [20] S-Y. Yun, R. O. Hamburger, C. A. Cornell, and D. A. Foutch, "Seismic performance evaluation for steel moment frames", *Journal of Structural Engineering*, vol. 128, no.4, pp. 534-545, 2002.
- [21] M. A. Torres, and S. E. Ruiz, "Structural reliability evaluation considering capacity degradation over time", *Engineering Structures*, vol. 29, pp. 2183-2192, 2007.

- [22] D. Celarec, D. Vamvatsikos, and D. M. Dolšek, “Simplified estimation of seismic risk for reinforced concrete buildings with consideration of corrosion over time”, *Bulletin of Earthquake Engineering*, vol. 9, pp. 1137-1155, 2011.
- [23] D. Vamvatsikos, and D. M. Dolšek, “Equivalent constant rates for performance-based seismic assessment of ageing structures”, *Structural Safety*, vol. 33, no. 1, pp. 8-18, 2011.
- [24] D. Tolentino, S. E. Ruiz, and M. A. Torres, “Simplified closed-form expressions for the mean failure rate of structures considering structural deterioration”, *Structure and Infrastructure Engineering*, vol.8, no. 5, pp. 483-496, 2012.
- [25] D. Tolentino, and S. E. Ruiz, “Optimal interval for inspection and maintenance of structures”, *Engineering Structures*, conditionally accepted for publication, 2013.
- [26] D. E. Goldberg, *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*, Addison Wesley Longman Inc, USA, November, 1989.
- [27] M. Fragiadakis, N. D. Lagaros and M. Papadrakakis, “Performance-based multiobjective optimum design of steel structures considering life-cycle cost”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 32, pp. 1-11, 2006.
- [28] O. Lavan and G. F. Dargush, “Multi-objective evolutionary seismic design with passive energy dissipation systems”, *Journal of Earthquake Engineering*, vol. 13, pp. 758–790, 2009.
- [29] K. Deb, *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*, John Wiley & Sons Ltd, England, 2001.
- [30] D. E. Goldberg, and K. Deb, “A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms”, in: G. J. E. Rawlins, editor, *Foundations of Genetic Algorithms*, Los Altos, Morgan Kaufmann, pp.69–93, 1991.
- [31] H. Mühlenbein and D. Schlierkamp-Voosen, “Predictive Models for the Breeder Genetic Algorithm”, *Evolutionary Computation*, vol. 1, no. 1, pp. 25-49, 1993.
- [32] The MathWorks, “Global optimization toolbox 3 user’s guide”, Version 3.1, 2010.
- [33] F. L. Silva, and E. Heredia, “Effect of uncertainties on the reliability of fatigue damaged systems”, in *23th International conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE*, vol. 2, pp. 427-434. Vancouver, Canada, 2004.
- [34] P. Paris, and F. A. Erdogan, “Critical analysis of crack propagation laws”, *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, pp. 258-534, 1963.
- [35] K. Sobczyk, and F. B. Spencer, *Random fatigue: from data theory*, Academic Press Inc, 1992.
- [36] A. Stacey, J. V. Sharp, N. W. Nichols, “Static strength assessment of cracked tubular joints”, *15th international conference on offshore mechanics and arctic engineering OMAE*, vol. 3, pp. 211-224, 1996.
- [37] F. M. Burdekin, “The static strength of cracked joints in tubular members”, *Offshore technology report 2001/080*, London: Health and Safety Executive, 2002.
- [38] American Petroleum Institute (API), Recommended practice for planning, designing and construction of fixed offshore platforms – load and resistance factor design, *API RP 2a – LRFD*, Washington D. C., 1993.
- [39] PEMEX, “Design and evaluation of fixed marine platforms in Campeche Bay”, *NRF-2003-Pemex-2000*, Mexico, 2000.
- [40] A. Raine, “The development of Alternating Current Field Measurement (ACFM) technology as a technique for the detection of surface breaking defects in conducting material and its use in commercial and industrial applications”, in *15th World Conference on Non-Destructive Testing*, Rome, 2000.
- [41] The Marine Technology Directorate Limited, “Review of repairs to offshore structures and pipelines”, Publication 94/102, 1994.
- [42] L. R. Ford, *Differential Equations*, McGraw –Hill Book Company, New York, USA, 1955.
- [43] E. D. Rainville, *Intermediate course in differential equations*, John Wiley & Sons INC, USA, 1961.

## Appendix A

The confidence factor over the time interval  $[0, \Delta t)$  can be expressed as follows [21, 24]:

$$\lambda_{conf}(0, \Delta t) = \frac{\phi \cdot \hat{C}}{\gamma \cdot \hat{D}^{\nu_0}} \left[ \frac{\Omega(0, \Delta t)}{\Delta t} \right]^{\frac{b}{r}} \quad (\text{A.1})$$

where

$$\phi = \exp \left[ -\frac{r}{2b} (\sigma_{\ln C|\Delta t}^2 + \sigma_{UC|\Delta t}^2) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma = \exp \left[ \frac{r}{2b} (\sigma_{\ln D|h_{\max}, \Delta t}^2 + \sigma_{UD|\Delta t}^2) \right] \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{C} = \alpha - \beta \Delta t \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{D}^{\nu_0} = (a + f \Delta t) \left( \frac{\nu_0}{k} \right)^{\frac{b}{r}} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \Omega(0, \Delta t) = & \frac{b\alpha}{\beta(b-r)} \left( \frac{a\beta}{-\alpha f + \beta a} \right)^{\frac{r}{b}} [-F(X; Y; Z; x) + F(X; Y; Z; x(\Delta t))] \cdots \\ & \left[ 1 + \left( \frac{f\beta \Delta t}{\beta a} \right)^{\frac{r}{b}} \left( 1 + \frac{\beta \Delta t}{\alpha} \right) \left( \frac{\alpha + \beta \Delta t}{a + f\Delta t} \right)^{\frac{r}{b}} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^{\frac{r}{b}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

where  $\phi$  and  $\gamma$  are the capacity reduction factor and the demand amplification factor at instant  $\Delta t$ , respectively;  $\sigma_{\ln D|h_{\max}, \Delta t}^2$  and  $\sigma_{\ln C|\Delta t}^2$  are the variances of the natural logarithm of the demand,  $D$ , given a maximum wave height,  $h_{\max}$ , and of the structural capacity,  $C$ , respectively;  $\sigma_{UC|\Delta t}^2$  and  $\sigma_{\ln UD|\Delta t}^2$  represent the epistemic uncertainties associated with the structural demand and the structural capacity respectively;  $\hat{C}$  is the median of the structural capacity at the limit state of interest, which vary linearly in the interval  $[0, \Delta t)$ ;  $\hat{D}^{\nu_0}$  is the median of the structural demand caused by environmental loads related to the tolerable annual exceedance rate  $\nu_0$ , at time  $\Delta t$ ;  $\Omega(0, \Delta t)$  represents the correction function of the expected number of failures which considers the variation in the interval  $[0, \Delta t)$  of the structural demand (given a maximum wave height) and the structural capacity simultaneously.

Hypergeometric functions implicit in equation A.6 can be solved using a simpler method by means of the following hypergeometric series [42, 43]:

$$\begin{aligned}
F(X, Y; Z; x) = & 1 + \frac{XY}{1!Z} x + \frac{X(X+1)Y(Y+1)}{2!Z(Z+1)} x^2 + \dots \\
& + \frac{X(X+1) \dots (X+n-1)Y(Y+1) \dots (Y+n-1)}{Z(Z+1) \dots (Z+n-1)n!} X^n
\end{aligned} \tag{A.7}$$

where

$$X = 1 - \frac{r}{b}; \quad Y = -\frac{r}{b}; \quad Z = 2 - \frac{r}{b}; \quad x = \frac{f \alpha}{f \alpha - a \beta}; \quad x(\Delta t) = \frac{f(\beta \Delta t + \alpha)}{f \alpha - a \beta}$$

where  $X, Z$  and  $x$  represent real numbers, and  $Y$  must be an integer. The value  $n$  will depend on the problem; for example, for the case analyzed in this study, the hypergeometric series is developed up to  $n = 5$ , in order to obtain a good approximation.

### Appendix B

The expected cumulative total cost function is defined as the summation of the total expected cost of inspection, repair, and failure at the end of a time interval  $[0, \Delta t)$  as follows [25]:

$$\begin{aligned}
C_{Total}(0, \Delta t) = & C_{i|\Delta t} \cdot e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, \Delta t)} \\
& + \sum_{j=1}^n C_{r_j|\Delta t} \cdot P(D_j(\Delta t) \geq d) \cdot e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, \Delta t)} \\
& C_{f|\Delta t} \sum_{k=1}^{\hat{N}} \eta_F(t_k - t_{k-1}) e^{-\gamma(\Delta t) - \eta_F(0, t_k - t_{k-1})}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Where  $C_{i|\Delta t}$ ,  $C_{r_j|\Delta t}$  and  $C_{f|\Delta t}$  are the expected cost of inspection, repair and failure, respectively;  $\gamma$  is the discount rate;  $\eta_F$  is the expected number of failures at the end of a time interval considering the variation of the structural capacity and structural demand over time  $[0, \Delta t)$  [24];  $n$  is the number of elements to be repaired;  $P(D_j(\Delta t) \geq d)$  is the conditional probability that element  $j$  with certain level of cumulative damage  $D$ , at time  $\Delta t$ , is higher or equal to an established damage level  $d$ ;  $\hat{N}$  is the number of time intervals of interest;  $\eta_F(t_k - t_{k-1})$  is the expected number of failures for the time intervals of interest, and  $t_1, t_2, \dots, t_N = 1, 2, \dots, \hat{N}$  years. Equation B.1 implies that the structure survives up to the end of the time interval of interest.