



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERIA DE MATERIALES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES
FISICA DEL ESTADO SÓLIDO – MATERIA CONDENSADA

PREDICCIONES DEL FORMALISMO DE LA GENERALIZACIÓN DEL
CONDENSADO BOSE-EINSTEIN Y COMPARACIÓN CON DATOS
EXPERIMENTALES EN SUPERCONDUCTORES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERIA DE MATERIALES

PRESENTA:
ISRAEL CHÁVEZ VILLALPANDO

TUTOR
DR. MANUEL DE LLANO DE LA GARZA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES, UNAM

COMITE TUTOR
DRA. MARCELA DOLORES GREYER GONZALEZ
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
DR. MAURICIO FORTES BESPROSVANI
INSTITUTO DE FISICA, UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO DE CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

PREDICCIONES DEL FORMALISMO DE LA GENERALIZACIÓN
DEL CONDENSADO BOSE-EINSTEIN Y COMPARACIÓN CON
DATOS EXPERIMENTALES EN SUPERCONDUCTORES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA:

ISRAEL CHÁVEZ VILLALPANDO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MANUEL DE LLANO DE LA GARZA



Ciencia e Ingeniería de Materiales

MÉXICO D.F.

NOVIEMBRE, 2013

**Predicciones del formalismo de la generalización del condensado
Bose-Einstein y comparación con datos experimentales en
superconductores**

por

Israel Chávez Villalpando

Tesis presentada para obtener el grado de

Maestro en Ciencias e Ingeniería de Materiales

en el

POSGRADO DE CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

México D.F.. Noviembre, 2013

*Esta Tesis se la dedico a las personas
que con su presencia o con su ausencia,
con sus palabras o con su silencio
me alentaron a seguir en este proyecto.*

Agradecimientos

Agradezco al Posgrado de Ciencias e Ingeniería de Materiales, al Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM, al comité tutor: Dr. Manuel de Llano de la Garza, Dra. Marcela Grether González y al Dr. Mauricio Fortes Besprosvani por su dedicación a este proyecto.

Agradezco al jurado, Dr. Enrique López Moreno, Dr. Chumin Wang Chen, Dr. Rafael Baquero Parra, Dr. Francisco Javier Sevilla Pérez por las discusiones y sus comentarios que enriquecieron este trabajo.

Agradezco a mis compañeros y amigos del posgrado así como a sus profesores por las críticas a este trabajo y en general a mi formación.

Agradezco especialmente a la Dra. Marcela Grether, por su apoyo en la elaboración de las figuras.

Agradezco a CONACyT por la beca de posgrado, de igual forma a PAPIIT-DGAPA IN102011 por la beca de terminación de estudios.

Índice general

Resumen	VII
Hipótesis	VIII
Introducción	1
1. Modelos fenomenológicos de la superconductividad	4
1.1. Teoría de London	4
1.2. Teoría de Ginzburg-Landau	5
2. Modelos estadísticos de la Superconductividad	13
2.1. Teoría BCS de la superconductividad	14
2.1.1. El método variacional para deducir $\Delta(T)$	16
2.1.2. Determinación de T_c y el gap de energía $\Delta(T)$	18
2.1.3. Distinción entre pares de Cooper y pares BCS	20
2.2. Condensado de Bose-Einstein	22
2.3. Modelo Bosón-Fermión	24
2.3.1. Temperaturas críticas en BEC y BCS	26
3. Generalización del condensado de Bose-Einstein (GBEC)	28
3.1. El hamiltoniano de GBEC	29
3.2. Caso especial: ecuaciones del “crossover” BCS-Bose y BCS	35
3.3. Caso especial: Teoría de R. Friedberg & T.D. Lee y la BEC ordinaria	37
4. Parámetros experimentales del GBEC	40
4.1. Densidad de número para las fases puras $2e$ -CP y $2h$ -CP	40
4.2. El gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ de $2e$ -CP	43
4.3. El gap de energía de la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$	46
4.4. El Gap de energía $\Delta(T)$ de $2e$ -CP para $n/n_f \neq 1$	48

4.5. El gap de energía para el Hg	51
4.6. Comparación del GBEC con datos experimentales	53
5. Conclusiones	58
A. Diagonalización del hamiltoniano de GBEC	60
B. Longitud de dispersión para una esfera dura	65
B.1. Teoría del alcance efectivo	65
B.2. Esfera dura más pozo rectangular	67

Resumen

En este trabajo estudiamos materiales superconductores convencionales mediante un modelo de un gas ternario de fermiones y bosones, éste gas esta compuesto de electrones y huecos no apareados, de pares de Cooper de electrones $2e$ -CP y pares de Cooper de huecos $2h$ -CP. Este sistema ternario se estudia con la generalización del condensado de Bose-Einstein (GBEC) y considera un gas bosón-fermión interactuante del cual surgen tres ecuaciones trascendentales acopladas que deben resolverse auto-consistentemente, de las cuales dos ecuaciones son tipo-gap, una para los $2e$ -CP y otra para los $2h$ -CP y una tercera que garantiza la conservación de la carga eléctrica y que es la densidad de numero total. Las variables del sistema son el potencial químico, la densidad de número de pares de electrones y la densidad de número de pares de huecos, todas en función de la temperatura absoluta. El GBEC incluye como casos especiales otros modelos estadísticos como la teoría de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) así como la teoría del condensado de Bose-Einstein (BEC) ordinaria sin bosones tipo hueco.

En GBEC se tienen los parámetros adimensionales fenomenológicos que están relacionados con parámetros experimentales. En este formalismo se tiene el parámetro adimensional de la intensidad de interacción G que esta relacionado con el parámetro de acoplamiento adimensional de los $2e$ - $2h$ -CP y que en la teoría BCS es el parámetro λ , el otro parámetro en GBEC es $\delta\varepsilon$ que es el cascarón de energía alrededor de la energía E_f donde interaccionan los pares $2e$ - $2e$ -CP con los electrones no apareados y esta relacionado con la energía de la red iónica $\hbar\omega_D$, donde ω_D es la frecuencia de Debye. Con estos parámetros G y $\delta\varepsilon$ se construye el diagrama de fases con la densidad de número adimensional en función de la temperatura absoluta de la fase pura de $2e$ -CP y de $2h$ -CP encontrando para esta última temperaturas de transición del orden de temperatura ambiente. En este diagrama de fases se compara con la curva de la fase BEC y la teoría convencional BCS con una simetría ideal entre pares de electrones condensados y huecos condensados y entre pares de electrones excitados y pares de huecos excitados.

El presente trabajo tiene la motivación de estudiar la curva del gap de energía electrónico $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de la temperatura absoluta T/T_c en una densidad de número diferente de la unidad, esta curva exhibe un punto de inflexión cercano a T_c , en contraste con BCS la cual no muestra ningún cambio en la curvatura para toda T/T_c . Como resultado principal se presenta la curva del gap de energía electrónico en función de la temperatura absoluta para la fase pura $2e$ -CP de GBEC de los materiales superconductores Sn, In y Pb, las cuales están ligeramente por debajo de la curva de la fase mixta de GBEC que consiste de igual número de pares de electrones condensados que de huecos condensados y que coincide con BCS, mostrando que la ausencia de pares de huecos condensados son tan importantes como los pares de electrones condensados en la aparición del estado superconductor.

Hipótesis

El formalismo GBEC puede ajustarse a datos experimentales reportados del gap de energía electrónico $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de la temperatura absoluta T/T_c cerca de la temperatura crítica T_c para algunos materiales superconductores convencionales.

Objetivos

- a) El formalismo GBEC [1, 4] puede predecir temperaturas más altas que BCS cuando se consideran solamente pares de huecos tipo-pares de Cooper. Se construye el diagrama de fases n/n_f vs. T_c/T_F para las fases puras $2e$ - $2h$ -CP y se comparan con las curvas ordinarias BEC y BCS.
- b) El gap de energía electrónico del formalismo GBEC $\Delta(T)/\Delta(0)$ vs. T/T_c tanto de la fase pura $2e$ -CP como $2h$ -CP se pueden ajustar a los datos experimentales de varios materiales superconductores convencionales, considerando inicialmente una densidad de número $n/n_f = 1$, donde n es la densidad de número total del sistema mientras que n_f es la densidad de número de los electrones desapareados en $T = 0$, bajo esta consideración se tiene la misma cantidad de pares de electrones condensados que de pares de huecos condensados. Variando la densidad de número aproximadamente entre $0.998512 n_f < n < 0.999900 n_f$ se busca un punto de inflexión en la pendiente cercano a T_c , en contraste con BCS la cuál no muestra ningún cambio en la curvatura de $\Delta(T)$ para toda T/T_c . Este comportamiento se observa en la correspondiente curva del gap de energía obtenidas del calor específico experimental del estaño [5, 6].
- c) En el formalismo GBEC se puede encontrar la simetría ideal entre los $2e$ -CP y los $2h$ -CP, es decir la misma cantidad entre los electrones condensados y huecos condensados, a saber $n_0(T) = m_0(T)$, se construye la curva del gap de energía electrónico para esta fase mixta mostrando que coincide con la teoría BCS que incluye implícitamente a pares de huecos tipo-pares de Cooper.
- c) Contrastar las curvas del formalismo GBEC, BCS con la curvas experimentales reportadas para algunos materiales superconductores convencionales (Sn, In, Pb) [7].

Metodología

Se pretende que el trabajo de investigación sea publicado en una revista de circulación internacional. Para ello el programa a desarrollar es el siguiente:

1. Construir el diagrama de fases T/T_f vs n/n_f del formalismo GBEC para la fase pura de $2e$ -CP y la fase pura $2h$ -CP.
2. Mostrar que el GBEC puede predecir el comportamiento observado por [5] y reportado en [6]. Para esto se resuelven las ecuaciones tipo-gap para encontrar el gap de energía de electrónico $\Delta(T)/\Delta(0)$ de la fase pura $2e$ -CP y la fase mixta ideal de pares de electrones y de huecos condensados así como los pares de electrones excitados y pares de huecos excitados.
3. Construir las curvas del gap de energía electrónico para algunos materiales SC convencionales conocidos, tanto para la fase pura $2e$ -CP así como para la fase mixta ideal. Se usan los parámetros adimensionales $G \geq 0$ que se puede correlacionar con la constante de acoplamiento λ , considerando una capa de energía adimensional $\delta\varepsilon/E_f$ donde E_f es una escala de energía del sistema GBEC, $\delta\varepsilon$ se puede relacionar con la energía de Debye de la red iónica.
3. Las relaciones T/T_f vs. n/n_f y $\Delta(T)/\Delta(0)$ vs. T/T_c , se construirán mediante cálculo numérico resolviendo las 3 ecuaciones trascendentales del formalismo GBEC con los métodos convencionales conocidos.

Introducción

Desde su descubrimiento, la superconductividad ha causado un intrigante estudio en la física del estado sólido, en donde poco a poco han aparecido teorías para explicar no solo su funcionamiento sino también en predecir nuevos materiales. En este esfuerzo, se presenta un estudio de materiales superconductores en una generalización que subsume las cinco teorías estadísticas de la superconductividad.

La transición a la fase superconductor ocurre por debajo de una temperatura llamada temperatura de transición ó temperatura crítica T_c en la cuál la resistencia eléctrica del material es cero. Este descubrimiento fue hecho en el Hg por Kammerlingh Onnes en 1911 [8]. La resistencia cero solo puede medirse mediante técnicas de laboratorio, pero el efecto más notable y tan importante como el anterior es el efecto Meissner [9] en el cuál el campo magnético es expulsado totalmente del interior del superconductor por debajo de T_c , convirtiéndose en un diamagneto perfecto.

Existen una variedad de SC y con ellos todo un rango en las temperaturas de transición, desde algunas décimas por arriba del cero Kelvin como el Be con $T_c = 0.026$ K ó el Ti con $T_c = 0.40$ K [10] o tan alta como el superconductor YBaCuO de alta $T_c = 93$ K [11], mientras que los primeros SC tales como el Hg tienen una $T_c = 4.1$ K. A raíz del descubrimiento del efecto Meissner en 1933 la teoría de London y London [12] explica macroscópicamente la relación entre la corriente superconductor y el campo magnético, sin embargo no explica el origen microscópico.

En 1950 Ginzburg y Landau formulan la teoría de la superconductividad [13], la cuál esta combinada con la teoría de Landau de transiciones de fase de segundo orden [14] y explica macroscópicamente las propiedades de los superconductores, prediciendo las categorías de tipo I y tipo II, materiales que llegan al estado superconductor súbitamente y de forma gradual, respectivamente. En 1950 Maxwell y Reynolds [15, 16] encuentran que la temperatura crítica T_c de un superconductor está relacionada con la masa atómica del elemento, llamado efecto isotópico. Frölich en su trabajo de 1950-52 [17, 18] describe la conducción electrónica por la dispersión de los electrones y las vibraciones de la red iónica, absorbiendo o emitiendo energía de la red (fonón), descubrimiento que conduce a una interacción electron-fonón como el mecanismo microscópico responsable de la superconductividad.

En 1957 Bardeen, Cooper y Schrieffer [19] formulan lo que hoy se conoce como la teoría BCS

de la superconductividad, teoría que microscópicamente explica la corriente en un superconductor por medio de los pares de Cooper (CP, por sus siglas en inglés), los pares de Cooper [20] son electrones que están ligados cuando la diferencia de energía entre los estados electrónicos es menor que la energía de un fonón $\hbar\omega_D$, en este estado se puede formar la fase superconductor cuando la interacción atractiva domina la repulsión coulombiana. Por la teoría BCS les otorgaron el premio Nobel en 1972. En 1959 Lev Gor'kov mostró que la teoría BCS se reduce a la teoría de Ginzburg-Landau cerca de T_c [21].

Se pueden marcar dos etapas claves en la historia de la superconductividad, una que marca el inicio y estudio a bajas temperaturas con su culminación con la teoría BCS en 1957 y la segunda cuando en 1986 Bednorz y Müller [22] descubren un SC por arriba de los 30K, cota superior que había pronosticado BCS, y que un año después se encontrarían T_c 's de alrededor de 93 K [11], a esta etapa se le puede nombrar como superconductividad de alta temperatura. Sin embargo, estamos lejos de la T_c de temperatura ambiente. Los superconductores de alta T_c no son explicados por la teoría BCS, puesto que predice una cota superior de aproximadamente 40 K.

La generalización del condensado de Bose-Einstein (GBEC, por sus siglas en inglés) [1, 4] es una combinación entre la teoría BCS de la superconductividad y el condensado de Bose Einstein (BEC, por sus siglas en inglés), la principal característica en este marco teórico es que se consideran además de los pares de electrones $2e$ a los pares de huecos $2h$. Una de las principales virtudes en este formalismo es que si se considera a los $2h$ la temperatura de condensación es dramáticamente mayor que la T_c de la BEC y aún más que en la teoría BCS. En GBEC se propone que los superconductores sean descritos por una gas ternario bosón-fermión mediante el mecanismo de los pares de Cooper de electrones ($2e$ -CP) así como pares de Cooper de huecos ($2h$ -CPs) en equilibrio químico y térmico con fermiones no-apareados. Gracias a que se consideran los pares de huecos ($2h$), además de los pares de electrones ($2e$) tipo-pares de Cooper, las teorías BCS y BEC ordinaria son casos especiales del formalismo GBEC bajo ciertas consideraciones; la primera tiene una simetría entre $2e$ y $2h$ mientras que la segunda no considera a los $2h$.

En este formalismo se propone que BCS es un condensado Bose-Einstein en donde la T_c es evidentemente la misma para ambos, a este modelo se le conoce como el cruce ó el llamado "crossover" BCS-Bose. El formalismo GBEC contiene los parámetros fenomenológicos tales como la intensidad de interacción G y la energía $\delta\varepsilon$ donde ocurre la interacción entre los electrones y los $2e$ así como los $2h$, estas cantidades adimensionales se relacionan con los parámetros experimentales bien conocidos de un SC como son, la constante de acoplamiento adimensional λ electrón-fonón y $\hbar\omega_D$ la energía de Debye de la red iónica, respectivamente.

El presente estudio se centra en la brecha de energía superconductor ó "gap" $\Delta(T)$ como se conoce en la literatura y que depende de la temperatura absoluta y que es del orden de $k_B T_c$, por la relación $\Delta(0) = 1.76 k_B T_c$, donde k_B es la constante de Boltzmann. El gap de energía

electrónico es la diferencia de energía entre el estado base superconductor y el estado excitado de las cuasi-partículas del sistema [23] experimentalmente se observó de forma cualitativa en [24] con mediciones del calor específico de varios superconductores, al mismo tiempo usando técnicas de microondas [25] se observó un pequeño gap de energía en el aluminio por debajo de una $T_c \simeq 1.2$ K, mientras que otros estudios [26] fueron capaces de estudiar al plomo por debajo de $T_c = 7.2$ K, las mediciones obtenidas dan una mínima energía de $2\Delta(0)$ para crear las excitaciones de los estados ligados. El gap de energía esta relacionado directamente con el apareamiento de los electrones. Sin embargo, esto último no puede medirse directamente.

En el capítulo 2 de manera general, se hará una breve repaso de dos de las teorías fenomenológicas, la teoría de London y London de un superconductor con la consiguiente descripción del efecto Meissner y la teoría de Ginzburg-Landau que muestra que la transición a la fase superconductor es una transición de fase de segundo orden. En el capítulo 3, una breve revisión de las teorías BCS de la superconductividad y la condensación de Bose-Einstein, así como el modelo ideal de bosón-fermión. En el capítulo 4 abordamos el formalismo del GBEC, así como los casos especiales de la teoría, se definen la energía E_f , la temperatura T_f y la densidad de número n_f , que serán las unidades en el formalismo GBEC. En el capítulo 5 usamos los parámetros fenomenológicos de GBEC, la intensidad de interacción G y el cascarón de energía $\delta\varepsilon$ alrededor de E_f para construir la curva del gap de energía $\Delta(T)$ en función de la temperatura absoluta T/T_c de varios superconductores tales como el Hg, Sn, In y Pb comparados con datos experimentales. En este mismo capítulo hacemos un breve análisis sobre la densidad de número y que, al cambiar ligeramente, la curva del gap sufre una desviación mínima con respecto de las curvas conocidas, tanto de BCS como de los datos experimentales. Por último, se presentan las conclusiones de este estudio.

Capítulo 1

Modelos fenomenológicos de la superconductividad

En este capítulo se hará un breve repaso de dos de las teorías fenomenológicas de la superconductividad, la teoría de London y la teoría de Ginzburg-Landau. Los hermanos London en 1935 encuentran la ley de Ohm para un superconductor y de aquí deducen la relación entre la densidad de corriente y el campo magnético, dando como resultado el efecto Meissner que es la repulsión del campo magnético del interior del material por debajo de una T_c . Sin embargo, este fenómeno fue comprendido hasta la descripción de un superconductor con la Teoría de Ginzburg y Landau (GL) de la superconductividad concluyendo que hay una ruptura de la simetría de norma dentro del material, motivo por el cual no puede penetrar el campo magnético.

La teoría de GL muestra analíticamente que ocurre una transición de fase de 2o. orden al estado superconductor y que el parámetro de orden está asociado con una función de onda macroscópica del material. En esta descripción se muestra que existe un parámetro de orden relacionado con una función de onda macroscópica y que juega un papel importante en la superconductividad. Este parámetro de orden en comparación con BCS se puede interpretar como la densidad de los pares de Cooper en el estado base. Sin embargo la teoría GL no puede explicar el origen de la densidad de corriente superconductor y que posteriormente la teoría BCS encontraría el mecanismo por el cual ocurre la superconductividad.

1.1. Teoría de London

La teoría de London y London [10],[12] que data de 1935 logra desde el punto de vista macroscópico explicar la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico y establece la ley de Ohm análoga para los superconductores. Además, la nulidad del campo magnético dentro del superconductor, es decir, la existencia del efecto Meissner-Oschenfeld.

En el modelo de London se postula [27] que la densidad de corriente \mathbf{J}_s que fluye por

superconductor es proporcional al vector potencial \mathbf{A} , de la forma

$$\mathbf{J}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{A} \quad (1-1)$$

donde μ_0 es la constante de permeabilidad magnética y λ_L es una constante de proporcionalidad en unidades de longitud. Ésta es la primera ecuación de London. Se puede expresar tomando el rotacional en ambos lados

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (1-2)$$

podemos usar la expresión de la ley de Ampere y considerando el caso estático obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (1-3)$$

donde λ_L es la longitud de penetración de London, éste parámetro es la primer cantidad importante dentro de la teoría de la superconductividad pues caracteriza a los materiales superconductores y no es mas que

$$\lambda_L = \left(\frac{m_e \mu_0}{n_s e^2} \right)^{1/2}$$

donde $n_s = n - n_n$ es la densidad de electrones en el estado superconductor como la diferencia entre la densidad total de los electrones y el estado normal n_n , con m_e la masa del electrón. La longitud de London es la distancia que mide la penetración del campo magnético en el superconductor. La expresion (1-3) la podemos reescribir como

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{n_s e^2}{m_e \mu_0} \mathbf{B}. \quad (1-4)$$

la solución de esta ecuacion diferencial es una exponencial que decae como $\partial B / \partial t$ de la superficie hacia la interior y tiene la distancia caracterísitica λ_L . La solución para una dimensión es

$$B(x) = B_a \exp\left(\frac{-\mu_0 x}{\lambda_L}\right)$$

donde $B_a = \mu_0 H_a$ es el campo magnético externo aplicado, mientras que la longitud de penetración tiene valores típicos de $\lambda_L \sim (10 - 100)$ nm.

1.2. Teoría de Ginzburg-Landau

La teoría de Ginzburg-Landau (GL) de la superconductividad [13] es una teoría fenomenológica, basada en la teoría de las transiciones de fase de segundo orden de Landau [14] cerca de

la temperatura de transición T_c . GL postula la existencia de una función de onda macroscópica que caracteriza el estado superconductor también llamado parámetro de orden ψ de tal forma que

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{si } T > T_c \\ \psi(T) \neq 0 & \text{si } T < T_c \end{cases} \quad (1-5)$$

de esta forma GL supone una dependencia de la energía libre con el parámetro de orden. Como el parámetro de orden se supone complejo y la energía libre es una cantidad real debemos tomar $|\psi|$. La energía libre de Gibbs nos permite calcular la diferencia de energía entre el estado superconductor y el estado normal y puesto que los parámetros termodinámicos naturales de la energía libre de Gibbs son la temperatura T y el campo magnético H podemos calcular

$$G_s(T, H_c) - G_s(T, 0) = -\mu_0 V \int_0^{H_c} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H} = \mu_0 \frac{H_c^2}{2} V \quad (1-6)$$

donde $\mathbf{M} = -(1/\mu_0 V)(\partial G/\partial \mathbf{H})$ la magnetización del sistema y $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ el campo magnético aplicado. En el campo crítico las dos fases, superconductora y normal tienen la misma energía libre de Gibbs $G_s(T, H_c) = G_n(T, H_c)$, además en el estado normal $M \approx 0$, entonces uno podría tener

$$G_n(T, H_c) - G_n(T, 0) = -\mu_0 V \int_0^{H_c} M dH \approx 0,$$

entonces la diferencia en las energías libres de Gibbs en el campo cero es

$$G_s(T, 0) - G_n(T, 0) = -\mu_0 V \frac{H_c^2}{2}. \quad (1-7)$$

GL desarrolla la expresión de la energía libre $G(T, H)$ en serie de Taylor en el parámetro de orden, ignorando las potencias impares, a cuarto orden, esto con el propósito de darle simetría al problema ¹ y además sólo es válida cerca de la temperatura de transición T_c , entonces

$$G_s = G_n + a|\psi|^2 + b|\psi|^4 \quad (1-8)$$

donde $a = a(T)$, $b = b(T)$ son parámetros fenomenológicos y dependen de la temperatura. Debemos suponer que $b(T) > 0$ de otra forma la energía no tendría un mínimo. Si graficamos $G_s - G_n$ normalizada a (a_0^2/b_0) en función de ψ obtenemos la Fig. 1-1.

¹La razón por la cuál Landau toma solo las potencias pares en su desarrollo de Taylor es al parecer, arbitraria. Sin embargo, se puede justificar que las potencias pares dan estabilidad al sistema, éste análisis se puede consultar en la Ref.[28] p. 265.

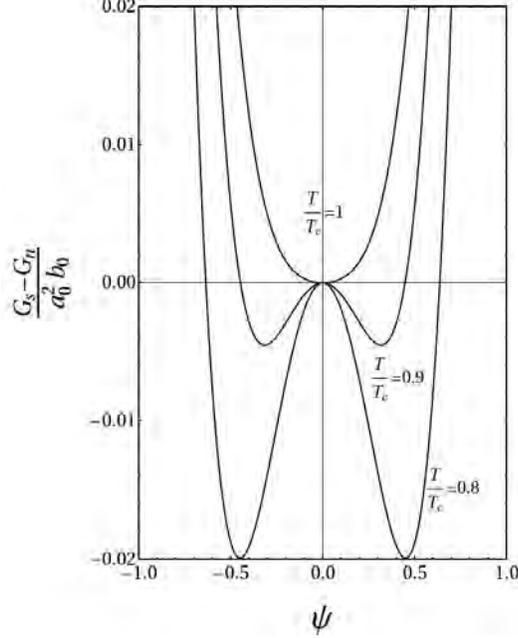


Fig. 1-1: Diferencia de la energía libre ($G_s - G_n / (a_0^2 / b^2)$) en función del parametro de orden $|\psi|$, se puede observar los casos *i*) $T/T_c = 1$ tenemos un mínimo en $\psi = 0$ y *ii*) cuando $T/T_c < 1$ tenemos dos mínimos. Figura reproducida por el autor basado en la Ref. [10].

Cuando $a(T) > 0$ hay un mínimo en $\psi = 0$, cuando $a(T) < 0$ tenemos un mínimo en $|\psi|^2 = -a(T)/b(T)$. Si suponemos que los coeficientes cambian lentamente con la temperatura podemos hacer una serie de Taylor alrededor de T_c , tenemos

$$\begin{aligned} a(T) &\simeq \frac{\partial a}{\partial T} (T - T_c) + \dots \\ b(T) &\simeq b + \dots \end{aligned}$$

en términos de los parámetros $\dot{a} = \partial a / \partial T$ y b podemos reescribir al parámetro de orden como

$$\psi = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ (\frac{\dot{a}}{b})^{1/2} (T_c - T)^{1/2} \leq 0 & T < T_c \end{cases} \quad (1-9)$$

Se puede encontrar el valor de $|\psi|^2$ para el cuál la energía libre de Gibbs es mínima en un superconductor homogéneo, si G_{s0} es un mínimo y

$$\frac{\partial G_{s0}}{\partial |\psi|^2} = 0$$

substituyendo en (1-8) obtenemos

$$|\psi_0|^2 = -\frac{a}{b} \quad (1-10)$$

Entonces el cambio en la energía libre es

$$\Delta G(T) = G_s - G_n = -\frac{\dot{a}(T - T_c)^2}{2b} = -\mu_0 \frac{H_c^2}{2}, \quad (1-11)$$

el valor mínimo de la energía libre nos conduce al campo termodinámico crítico

$$H_c = \frac{\dot{a}}{(\mu_0 b)^{1/2}}(T_c - T) \quad (1-12)$$

De esta expresión pueden calcularse propiedades como la entropía S

$$\Delta S(T) = S_s - S_n = -\frac{\dot{a}(T_c - T)}{b},$$

y el calor específico, el cuál tiene una discontinuidad en T_c de la forma

$$\Delta C_V = T_c \frac{\dot{a}^2}{b}.$$

esto nos remite a que un superconductor tiene una transición de fase de 2o. orden cuando $T < T_c$.

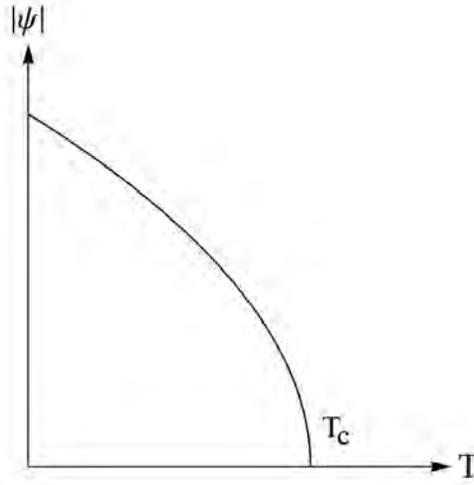


Fig. 1-2: La magnitud del parámetro de orden $|\psi|$ como función de la temperatura en el modelo de GL, de acuerdo a (1-9). Posteriormente Gor'kov mostrará que el parámetro de orden de BCS (gap de energía) se reduce a la función de onda macroscópica de GL cerca de T_c , explicando el origen microscópico de $|\psi|$.

Como el parámetro de orden es complejo, tenemos un conjunto infinito de mínimos que corresponden a la fase compleja de la forma

$$\psi = |\psi|e^{i\theta}, \quad (1-13)$$

el valor de la fase θ es arbitraria, sin embargo todos los valores nos llevan a la misma energía

libre. Así como en un ferromagneto, la dirección de la magnetización \mathbf{M} se escoge de manera espontánea en un valor particular; en un imán que se calienta por encima de una T_c y se vuelve a enfriar, \mathbf{M} adopta una dirección aleatoria, lo mismo debiera suceder con el ángulo θ de un superconductor. Para incluir los efectos del campo magnético en la energía libre, GL postula que $\psi(\mathbf{r})$ sea una función de onda para las partículas cargadas. El operador de momento \hat{p} es

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - q\mathbf{A} \quad (1-14)$$

donde q es la carga eléctrica, \mathbf{A} el vector potencial magnético. Para los superconductores $q = -2e$, entonces la energía libre

$$G_s = G_n + \frac{\hbar^2}{2m^*} |(-i\hbar\nabla + 2e\mathbf{A})\psi|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4, \quad (1-15)$$

donde m^* es la masa efectiva. La energía libre dentro de un campo magnético uniforme [29] es

$$G_s = G_n + \frac{\hbar^2}{2m^*} |(-i\hbar\nabla + 2e\mathbf{A})\psi|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0}{2\mu_0} \quad (1-16)$$

donde \mathbf{B}_0 es el campo magnético externo, el último término simplemente representa la densidad de energía magnética. La energía libre de Gibbs de un superconductor considerando el vector potencial magnético \mathbf{A} es

$$\begin{aligned} G_s &= G_n + \int \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} |(-i\hbar\nabla + 2e\mathbf{A})\psi|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \right) d^3r \\ &+ \int \left(\frac{|\nabla \times \mathbf{A}|^2}{2\mu_0} - \frac{(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}_0}{2\mu_0} \right) d^3r, \end{aligned} \quad (1-17)$$

la primera integral es la energía dentro del material mientras que la segunda es en todo el espacio. Se debe encontrar las funciones $\psi(\mathbf{r})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ tal que minimizen el valor de G_s , para hacer esto debemos resolver el problema variacional con respecto $\psi^*(\mathbf{r})$, entonces

$$\begin{aligned} \delta\psi^* G_s &= \int d^3r \left(a\delta\psi^*\psi + \frac{b}{2}\psi|\psi|^2\delta\psi^* \right) \\ &+ \int d^3r \frac{\hbar^2}{2m^*} (-i\hbar\nabla\delta\psi^* \\ &- 2e\mathbf{A}\delta\psi^*) \cdot (-i\hbar\nabla\psi - 2e\mathbf{A}\psi) = 0. \end{aligned} \quad (1-18)$$

Usando la identidad de la divergencia sobre la cantidad $\delta\psi^*\phi$ donde $\phi = -i\hbar\nabla\psi - \hbar^2/2m\mathbf{A}\psi$, tenemos

$$\int d^3r \nabla\delta\psi^*\phi = - \int \delta\psi^*\nabla\phi d^3r + \int \nabla(\delta\psi^*\phi) d^3r, \quad (1-19)$$

usando el teorema de Gauss y sustituyendo (1-19) en (1-18) obtenemos

$$\begin{aligned}\delta\psi^*G_s &= \int d^3r \left[a\psi + b\psi|\psi|^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*} (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2 \psi \right] \delta\psi^* \\ &+ \oint_S [i\hbar\nabla\psi - 2e\mathbf{A}\psi] \delta\psi^* dS = 0\end{aligned}\quad (1-20)$$

para cualquier función arbitraria $\delta\psi^*$ esta expresión puede ser cero si ambas expresiones dentro de los parentésis cuadrados son cero, De aquí obtenemos La primera ecuación de la teoría GL con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}a\psi + b\psi|\psi|^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*} (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2 \psi &= 0, \\ (i\hbar\nabla\psi - 2e\mathbf{A}\psi) \cdot \mathbf{n} &= 0\end{aligned}\quad (1-21)$$

donde \mathbf{n} es un vector normal a la superficie, de esta expresión podemos encontrar la ecuación para el parámetro de orden. Para encontrar una ecuación para \mathbf{A} debemos minimizar la expresión (1-30) entonces

$$\begin{aligned}\delta_A G_s &= \int \frac{\hbar^2}{2m^*} \delta A [(-i\hbar\nabla\psi^* - 2e\mathbf{A}\psi^*) \cdot (-i\hbar\nabla\psi - 2e\mathbf{A}\psi)] d^3r \\ &+ \int \left(\frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})(\nabla \times \delta\mathbf{A}) - \frac{\mathbf{B}_0}{2\mu_0} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A}) \right) d^3r \\ &= \int \frac{\hbar^2}{2m^*} (2e\psi^* \delta\mathbf{A}) \cdot (-i\hbar\nabla\psi - 2e\mathbf{A}\psi) d^3r \\ &+ \int \frac{\hbar^2}{2m^*} (-i\hbar\nabla\psi^* - 2e\mathbf{A}\psi^*) \cdot (-2e\psi \delta\mathbf{A}) d^3r \\ &+ \int \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{B}_0) \cdot \nabla \times \delta\mathbf{A} d^3r.\end{aligned}\quad (1-22)$$

Podemos extraer de los paréntesis a $\delta\mathbf{A}$ y usando la identidad $\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ y haciendo la integración en el último término

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu_0} \int (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{B}_0) \cdot \nabla \times \delta\mathbf{A} d^3r &= \\ \frac{1}{2\mu_0} \int \delta\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) d^3r & \\ - \frac{1}{2\mu_0} \oint [\delta\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{B}_0] \cdot d\mathbf{S} &\end{aligned}\quad (1-23)$$

si usamos el teorema de Gauss para convertir la integral de volumen en una integral de superficie, vemos que la integral de superficie es cero ya que el campo magnético en la superficie del

superconductor es cero y de aquí que $\delta \mathbf{A} = 0$. Sustituyendo (1-23) en (1-22), tenemos

$$\begin{aligned} \delta_A G_s &= \int \frac{ie\hbar^2}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \cdot \delta \mathbf{A} d^3 r \\ &+ \int \left(\frac{e^2 \hbar^2}{2m^*} \mathbf{A} |\psi|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \right) \cdot \delta \mathbf{A} d^3 r. \end{aligned} \quad (1-24)$$

Para cualquier $\delta \mathbf{A}$ puede ser cero si los paréntesis son cero. Esta condición determina la segunda ecuación de GL para el vector potencial \mathbf{A} ,

$$\mathbf{J}_s = \frac{ie\hbar^2}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^2 \hbar^2}{2m^*} \mathbf{A} |\psi|^2. \quad (1-25)$$

Podemos escribir las ecuaciones de G-L de una forma más conveniente dejándolas en términos del vector potencial y del parámetro de orden, escribiendo $\psi = |\psi|e^{i\theta}$, entonces

$$\xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0 \quad (1-26)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2} \left(\frac{\phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right) \quad (1-27)$$

donde $\xi^2 = \hbar^2/4m^*|a|$, $\phi_0 = \pi\hbar c/e$ es el cuanto de flujo magnético y θ es la fase en el parámetro de orden.

De la teoría completa de GL ² puede obtenerse el parámetro de orden en función de la posición $\psi(\mathbf{r})$, de aquí los efectos del campo magnético en la energía libre y el cuanto de flujo magnético. Otro parámetro fenomenológicamente importante es la longitud de coherencia $\xi(T)$ que depende de la temperatura, de la forma

$$\xi \equiv \left(\frac{\hbar^2}{2ma(T)} \right)^{1/2}. \quad (1-28)$$

Este parámetro representa la longitud de coherencia de la función de onda, es decir, es la longitud más corta sobre la cuál la función de onda se le permite variar sin generar una energía cinética de ruptura del par. Podemos reescribir (1-28) como

$$\xi(T) = \xi_0 \begin{cases} (T/T_c - 1)^{-1/2} & T > T_c \\ (1 - T/T_c)^{-1/2} & T < T_c \end{cases} \quad (1-29)$$

podemos notar que ξ diverge conforme nos acercamos a T_c , podemos notar de (1-26) que la

²La ecuación de la energía libre de GL considera los efectos del campo magnético, para encontrar la estabilidad de este sistema se encuentra la derivada funcional, la función de onda que minimiza la energía total tiene la forma de una ecuación de Schrödinger no-lineal, una derivación puede verse en la Ref.[30] p. 74.

función de onda es perturbada por el campo magnético. La longitud $\xi(T)$ actúa como una distancia de restauración sobre la cuál el parámetro $\psi(T)$ recobra su valor total.

Otro parámetro importante es la longitud de penetración λ puede expresarse a partir de la segunda ecuación de GL (1-27) que expresa la densidad de corriente en términos del parámetro de orden y el vector potencial \mathbf{A} de la forma

$$\begin{aligned} J &= \frac{ie\hbar^2}{2m^*} \psi^* (-2e\mathbf{A})\psi \\ &= -\frac{4e^2|\psi|}{m^*} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1-30)$$

podemos observar que de las expresiones (1-1) y (1-2), primera y segunda ecuaciones de London, respectivamente las podemos dejar en función de los potenciales escalar y vectorial (ϕ, \mathbf{A}) de la forma

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{ne^2}{m} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (1-31)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{n_s e^2}{m_e} \mathbf{A} \quad (1-32)$$

podemos identificar de (1-30) que

$$\lambda^2 = \frac{m^*}{(2e)^2 \mu_0 |\psi|} \quad (1-33)$$

esto ofrece un mayor significado sobre la longitud de penetración de London λ_L , donde $2e$ corresponde a la magnitud de la carga de un par de Cooper y $m^* = 2m_e$ la masa correspondiente a un par de Cooper, también podemos expresar una cantidad adimensional importante en superconductividad $\kappa = \lambda/\xi$. Otro resultado importante de las ecuaciones de GL es la invariancia de norma o invariancia “gauge”, la cuál al aplicar una transformación “gauge” al parámetro de orden, se puede mostrar que la teoría satisface la invariancia gauge local. Esta ruptura espontánea de la simetría gauge global implica que el campo magnético se anule dentro del material, esto nos conduce al efecto Meissner. La teoría de GL mostró un importante adelanto en la comprensión de los materiales SC, con un tratamiento puramente termodinámico, predice una función de onda macroscópica mientras que se debe satisfacer el principio de mínima energía, esto conduce a resultados importantes como el campo magnético crítico, el efecto Meissner, la longitud de penetración, etc. Sin embargo, no puede predecir la temperatura de transición T_c ni tampoco puede explicar por qué ocurre la superconductividad.

En diferentes trabajos [30],[31] abordan con detalle la invariancia de norma para describir el efecto Meissner y en particular la conexión con la superconductividad [32], aquí solo se menciona como punto clave en el entendimiento de la SC, de la misma forma en los libros de texto [10],[28],[33] se encuentra el análisis completo de las transiciones de fase de 2o. orden de la teoría de GL.

Capítulo 2

Modelos estadísticos de la Superconductividad

En este capítulo daremos una breve revisión de las ecuaciones de la teoría de la superconductividad de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) las cuáles han marcado una dirección importante en la investigación de los materiales superconductores. Estas ecuaciones que aparecieron en 1957 predicen correctamente algunos resultados experimentales, como el efecto isótopico $T_c \propto M^{-\alpha}$ [15, 16] en el cuál la temperatura de transición cambia con la masa de los iones de la red cristalina, BCS predice que el exponente α es $1/2$. La segunda predicción importante es el gap de energía ó 2Δ en el nivel de Fermi. En un metal normal a $T = 0$ los estados electrónicos se encuentran llenos hasta la energía de Fermi E_F donde hay una densidad finita de estados en el nivel de Fermi $g(E_F)$, pero en un superconductor BCS por debajo de T_c la densidad electrónica toma un estrecha banda de energía 2Δ separando los estados ocupados de los desocupados. El gap de energía de un superconductor a diferencia del gap de un semiconductor que previene la conducción eléctrica es la energía necesaria para que ocurra un par de electrones ligados. El parámetro del gap tiene otro papel importante, en 1960 Gor'kov mostró que de la teoría BCS se puede derivar las ecuaciones de Ginzburg-Landau, y de aquí la explicación microscópica del parámetro de orden ψ , donde ψ es directamente proporcional al parámetro Δ .

Por otra parte en 1924-25 aparece la estadística de Bose-Einstein. La predicción más notable es para las partículas indistinguibles que comparten un mismo estado cuántico por debajo de una temperatura crítica también llamada T_c , a este estado de la materia, se le conoce como condensado de Bose-Einstein (BEC, por sus siglas en inglés) y que sin embargo pasaron décadas hasta observarse en 1995 en átomos super-fríos como el ^{87}Rb . Mientras que en los 80's se mostró que la BEC es un fenómeno más general en donde la condensación solo puede ocurrir cuando la relación de dispersión de las partículas es mayor o igual que la dimensión de confinamiento, además que se puede considerar también un condensado con partículas de masa efectiva negativa

con respecto a la de los electrones.

De forma general se presenta el modelo ideal bosón-fermión en el cual se estudian a los SC como un gas binario de bosones y fermiones, donde se incluyen electrones no apareados, pares de electrones tipo-pares de Cooper, de acuerdo a este modelo los pares de Cooper sufren una BEC considerando que su vector de momento de centro de masa es $K = 0$, mientras que la T_c de la BEC es la misma que BCS.

2.1. Teoría BCS de la superconductividad

Hasta la década de los años 50's el mecanismo por el cuál ocurría la superconductividad era desconocido. En 1957 la teoría formulada y propuesta por John Bardeen, Leon Cooper y John Schrieffer [19] describía de forma microscópica a los superconductores hasta entonces conocidos con un formalismo de segunda cuantización y con un método variacional. El formalismo introducido por BCS esta basado en la interacción que se produce por la diferencia de energía entre las fases superconductor y normal y que aparece del intercambio virtual de fonones y el apantallamiento coulombiano de repulsión entre los electrones. El problema radica en calcular el estado base y los estados excitados del sistema de fermiones que interactúan vía el potencial de dos cuerpos.

La contribución más significativa son las expresiones donde se predice una temperatura de transición T_c al estado superconductor y del gap de energía en función de la temperatura de transición. Sin embargo, el efecto más peculiar y distintivo, el efecto Meissner no es descrito por el formalismo en sí mismo.

La primera idea en la teoría BCS es que hay una atracción efectiva para los electrones cerca de la superficie de Fermi. Esta idea fue primeramente formulada por Frölich en 1952 [17, 18], esto parece sorprendente pues los electrones “obviamente” se repelen. La segunda idea es que los electrones interactúan a través de un intercambio con los fonones de la red cristalina. En el lenguaje de los diagramas de Feynmann un electrón en el estado de Bloch $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ puede excitar un fonón del cristal con momento $\hbar\mathbf{q}$, dejando un electrón en un estado $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}')$ con momento $\hbar\mathbf{k}' = \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{q}$, después un electrón puede absorber el fonón y tomarlo con momento $\hbar\mathbf{q}$, esto se ilustra en la Fig. 2-1 la cual corresponde a una interacción efectiva entre electrones. En el modelo de Cooper [20] supone una superficie esférica de Fermi a $T = 0$, donde todos los estados $k < k_F$ están ocupados, se colocan entonces dos electrones extra, fuera de la superficie de Fermi, estos interactúan por la interacción electrón-fonón, de manera que podemos construir la función de onda de estos dos electrones de la forma

$$\psi_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}$$

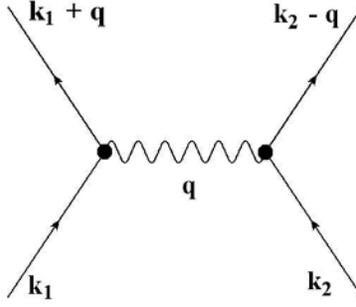


Fig. 2-1: Interacción electrón-electrón intercambiando un fonón de la red cristalina. El efecto neto del proceso es transferir momento $\hbar\mathbf{q}$ de un electrón a otro, esto implicará una interacción efectiva entre electrones.

insertando esta ecuación en la correspondiente ecuación de Schrödinger, se puede mostrar que los coeficientes $g_{\mathbf{k}}$ y los eigenvalores de la energía están determinados, resolviendo

$$(E - 2\epsilon_{\mathbf{k}}) g_{\mathbf{k}} = \sum_{k' > k_F} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'} \quad (2-1)$$

En esta expresión, $\epsilon_{\mathbf{k}}$ son los estados no-perturbados y $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ son los elementos de la matriz del potencial de interacción

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \mathcal{V}^{-1} \int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

donde \mathbf{r} es la distancia entre dos electrones y \mathcal{V} es la normalización del volumen. Este $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ caracteriza la intensidad del potencial para dispersar un par de electrones con momento $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ a $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$. Si un conjunto de $g_{\mathbf{k}}$ satisfacen (2-1) con $E < 2E_F$, entonces el par ligado puede existir.

Cooper introdujo una aproximación muy útil, que para todos $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -V$ para los estados \mathbf{k} fuera de la energía de corte $\hbar\omega_D$, lejos de E_F , y además $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = 0$ más allá de $\hbar\omega_D$. Entonces el lado derecho de (2-1) es una constante, independiente de \mathbf{k} y tenemos

$$g_{\mathbf{k}} = V \frac{\sum g_{\mathbf{k}'}}{2\epsilon_{\mathbf{k}} - E} \quad (2-2)$$

sumando ambos lados y cancelando $\sum g_{\mathbf{k}}$, obtenemos

$$\frac{1}{V} = \sum_{k < k_F} (2\epsilon_{\mathbf{k}} - E)^{-1} \quad (2-3)$$

Cuando reemplazamos la suma por una integral, con $N(0)$ la densidad de estados en el nivel de

Fermi para los electrones con orientación de un espín, se tiene

$$\frac{1}{V} = N(0) \int_{E_F}^{E_F + \hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{2\epsilon - E} = \frac{1}{2} N(0) \ln \left(\frac{2E_F - E + 2\hbar\omega_D}{2E_F - E} \right) \quad (2-4)$$

En la mayoría de los superconductores clásicos, se encuentra que $N(0)V < 0.3$, a esto se le conoce como aproximación de acoplamiento débil, válido para $N(0)V \ll 1$, entonces la solución de la ecuación de arriba es,

$$E \sim 2E_F - 2\hbar\omega_D e^{-2/N(0)V} \quad (2-5)$$

tenemos entonces un estado ligado de energía negativa con respecto a la superficie de Fermi, hecho de electrones con $k < k_F$, es decir, con energía que excede E_F , y su energía es exponencialmente pequeña cuando $N(0)V$ es pequeño.

En la solución de BCS la escala de energía para un superconductor es la energía de Debye $\hbar\omega_D$. Esto puede explicar porque las temperaturas de transición T_c son tan pequeñas, comparadas con escalas en sólidos. Las energías de Debye de la mayoría de los materiales corresponde a escalas del orden de 100 – 300 K, y tiene un factor exponencial muy pequeño el cual conduce a una $T_c \sim 1$ K para casi todos los superconductores metálicos.

En este trabajo no se revisará a detalle la función de onda BCS ni tampoco el Hamiltoniano de campo-medio, sin embargo, la función BCS es un buen ejemplo de la correlación de muchas partículas con el estado base y aunque no es una solución exacta del problema de muchos cuerpos, para muchos propósitos se vuelve cercanamente exacto. En la teoría BCS se toma el caso límite de acoplamiento débil, el cuál se supone que el parámetro de acoplamiento adimensional es mucho menor que 1. Si esto es cierto, entonces $|\Delta|$ es mucho menor que todas las otras escalas de energía en el problema, tales como E_F y $\hbar\omega_D$.

2.1.1. El método variacional para deducir $\Delta(T)$

El método variacional usado en el tratamiento original BCS, es una aproximación directa para calcular la energía de condensación del estado base relativo al estado normal. A partir del hamiltoniano de apareamiento [23]

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{l}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{l}\uparrow} \quad (2-6)$$

donde \hat{a}^\dagger, \hat{a} son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente de los electrones y siguen las reglas de anticonmutación de Fermi, $\{\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ y $\{\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger\} = \{\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}\} = 0$.

Podemos encontrar que la energía esta dada como

$$\langle K_E - \mu N \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} |v_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2-7)$$

donde $\langle K_E - \mu N \rangle$ es el promedio de la energía y $\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$ es la energía de una sola partícula relativa a la energía de Fermi, $|v_{\mathbf{k}}|^2$ es la probabilidad del par $(\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow)$ esta ocupado, mientras que si esta desocupado es $|u_{\mathbf{k}}|^2 = 1 - |v_{\mathbf{k}}|^2$. Similarmente el término de interacción es

$$\langle V \rangle = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{l}}^\dagger v_{\mathbf{l}} \quad (2-8)$$

Minimizando el sistema estamos sujetos a que $u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1$, si ahora definimos las cantidades

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} u_{\mathbf{l}} v_{\mathbf{l}} \quad (2-9)$$

y

$$E_{\mathbf{k}} = (\Delta_{\mathbf{k}}^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2)^{1/2} \quad (2-10)$$

donde $E_{\mathbf{k}}$ es la energía de excitación de una cuasi-partícula de momento $\hbar\mathbf{k}$, mientras que $\Delta_{\mathbf{k}}$ esencialmente es independiente de \mathbf{k} , y de aquí que es la energía mínima de excitación o el gap de energía. También es el parámetro de orden de la teoría fenomenológica, teniendo un factor de fase de $e^{i\varphi}$, donde φ es la fase relativa entre $u_{\mathbf{k}}$ y $v_{\mathbf{k}}$. Después de un poco de algebra, se puede encontrar que

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{l}} \frac{\Delta_{\mathbf{l}}}{E_{\mathbf{l}}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{l}} \frac{\Delta_{\mathbf{l}}}{(\Delta_{\mathbf{l}}^2 + \xi_{\mathbf{l}}^2)^{1/2}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \quad (2-11)$$

la solución trivial es justo cuando $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$, entonces $v_{\mathbf{k}} = 1$ para $\xi_{\mathbf{k}} < 0$ y $v_{\mathbf{k}} = 0$ para $\xi_{\mathbf{k}} > 0$.

Si tomamos la aproximación de Cooper

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} = \begin{cases} -V & \text{si } |\xi_{\mathbf{k}}| \text{ y } |\xi_{\mathbf{l}}| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

con V una constante positiva, la energía relevante que nos interesa es $|\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{l}}|$ el cambio en la energía del electrón en el proceso de dispersión, pero para tener una solución simple necesitamos tener la restricción de que $|\xi_{\mathbf{k}}|$ y $|\xi_{\mathbf{l}}|$ por separado y que son mas pequeñas que $\hbar\omega_D$, entonces encontramos que

$$\Delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} = \begin{cases} \delta & \text{para } |\xi_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{para } |\xi_{\mathbf{k}}| > \hbar\omega_D \end{cases}$$

y como en el modelo se considera $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta$ y es independiente de \mathbf{k} , podemos cancelar ambos lados de (2-11), con la condición de autoconsistencia tenemos

$$1 = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}}} \quad (2-12)$$

reemplazando la suma por una integral desde $-\hbar\omega_D$ hasta $\hbar\omega_D$ y usando la simetría de los

valores $\pm \xi$, tenemos

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{(\Delta^2 + \xi^2)^{1/2}} = \sinh^{-1} \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \right) \quad (2-13)$$

esto implica que

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh[1/N(0)V]} \approx 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V} \quad (2-14)$$

lo ultimo se justifica en el límite del acoplamiento débil $N(0)V \ll 1$. La cantidad $N(0)$ es la densidad de estados en $T = 0$ o bien en E_F , de modo que $N(E_F)V \equiv \lambda$ la constante de acoplamiento adimensional electrón-fonón de la teoría BCS.

2.1.2. Determinación de T_c y el gap de energía $\Delta(T)$

Ya que tenemos las energías de excitación de un cuasi-partícula fermiónica ¹ $E_{\mathbf{k}}$ y que debe ser una cantidad positiva $\geq \Delta$. La probabilidad de que sea excitada en equilibrio térmico es la función de Fermi

$$f(E_{\mathbf{k}}) = (e^{\beta E_{\mathbf{k}}} + 1)^{-1} \quad (2-15)$$

donde $\beta = 1/k_B T$, k_B la constante de Boltzmann. En general (2-11) se convierte en

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}} &= - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{kl}} u_{\mathbf{l}}^{\dagger} v_{\mathbf{l}} [1 - 2f(E_{\mathbf{k}})] \\ &= - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{kl}} \frac{\Delta_{\mathbf{l}}}{2E_{\mathbf{l}}} \tanh \left(\frac{\beta E_{\mathbf{l}}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2-16)$$

haciendo la aproximación BCS de que $V_{\mathbf{kl}} = -V$, tenemos que $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_{\mathbf{l}} = \Delta$ y con la condición de autoconsistencia tenemos

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tanh(\beta E_{\mathbf{k}}/2)}{E_{\mathbf{k}}} \quad (2-17)$$

donde $E_{\mathbf{k}} = (\xi_{\mathbf{k}} + \Delta^2)^{1/2}$, la expresión (2-17) determina el gap de energía dependiente de la temperatura.

La temperatura crítica T_c es la temperatura en la cuál $\Delta(T) \rightarrow 0$, en este caso $E_{\mathbf{k}} \rightarrow |\xi_{\mathbf{k}}|$ y el espectro de excitación se convierte en el mismo como en el estado normal. T_c se encuentra

¹La noción general de cuasi-partícula fue primeramente introducida por L.D. Landau [34]-[35] en 1957, la idea básica de Landau era que un sistema de partículas fuertemente interactuantes, pueda ser posible describir las propiedades del sistema en términos de partículas que interactúan débilmente, los cuáles representan algún tipo de excitaciones colectivas de las partículas originales. El tratamiento con estas partículas que interactúan débilmente, es mucho más simple. Así que describir el sistema en este lenguaje puede tener muchas más ventajas. En particular, algún tipo de tratamiento de teoría de perturbaciones puede ser formulado cuando uno trata con un sistema de partículas que interactúan débilmente, empezando por ejemplo con las partículas no-interactuantes como en el estado no perturbado. Para más detalles de este tratamiento ver Ref.[36], p. 65.

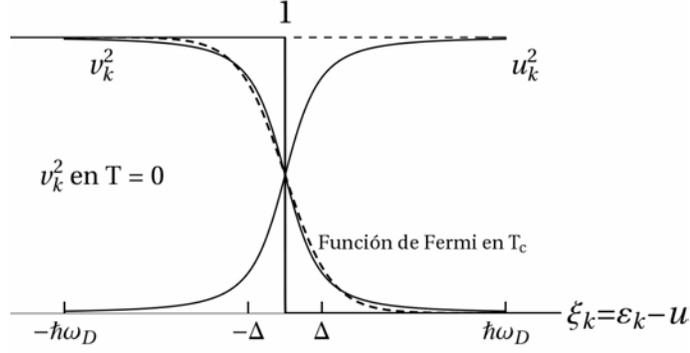


Fig. 2-2: Se muestra la función de distribución de Fermi en $T = 0$ (función escalón) para los estados ocupados, mientras que la curva punteada es la función de Fermi en T_c . También se muestra la probabilidad de los estados ocupados v_k^2 y de los estados desocupados $u_k^2 = 1 - v_k^2$.

reemplazando $E_{\mathbf{k}}$ con $|\xi_{\mathbf{k}}|$ en (2-17) y resolviendo, después de pasar de la suma a la integral y haciendo cambio de variable en la integral obtenemos

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\beta_c \hbar \omega_D / 2} dx \frac{\tanh x}{x}. \quad (2-18)$$

Esta integral puede ser evaluada y conduce a $\ln(A\beta_c \hbar \omega_D)$, donde $\beta_c = 1/k_B T_c$ y además $A = 2e^\gamma/\pi \approx 1.13$, donde γ es la constante de Euler $\gamma = 0.577 \dots$, usando $N(0)V = \lambda$ se tiene entonces

$$k_B T_c = 1.13 \hbar \omega_D e^{-1/\lambda} \quad (2-19)$$

comparando con (2-14) tenemos

$$\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} = 1.764 \quad (2-20)$$

Dada la ec. (2-17) o su equivalencia en forma integral

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\hbar \omega_D} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} \tanh \left[\frac{1}{2} \beta (\xi^2 + \Delta^2)^{1/2} \right] \quad (2-21)$$

$\Delta(T)$ puede calcularse numéricamente para superconductores en el régimen de acoplamiento débil, en la cuál $\hbar \omega_D / k_B T_c \gg 1$, $\Delta(T)/\Delta(0)$ es función de T/T_c la cuál decrece monótonamente desde 1 en $T = 0$ hasta cero en T_c , como se muestra en la figura 2-3. Cerca de $T = 0$, la variación de la temperatura decrece de forma exponencial ya que $e^{-\Delta/k_B T} \approx 0$, así que la tangente hiperbólica de la expresión (2-21) se acercan a la unidad. Físicamente hablando, el gap de energía es cercanamente a una constante hasta que un número significativo de cuasi-partículas se exciten térmicamente. Por otra parte cerca de T_c , $\Delta(T)$ cae hacia cero como una

tangente y es aproximadamente

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \simeq 1.74 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \quad (T \simeq T_c). \quad (2-22)$$

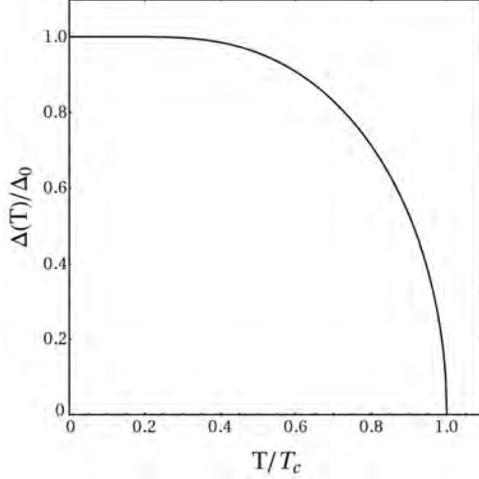


Fig. 2-3: El gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de la temperatura T/T_c de acuerdo al formalismo BCS. Se observa la bien conocida forma de media campana, donde se tiene la proporción $2\Delta(0)/k_B T_c = 3.53$.

2.1.3. Distinción entre pares de Cooper y pares BCS

La interacción de pares (fermiónicos) entre portadores de carga o entre átomos neutrales tiene un estado de energía $E_{\pm}(K)$ y esta caracterizado *solamente* por un vector de momento de centro de masa $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ pero *no* con un vector de momento relativo $\mathbf{k} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$, esto es porque, por ejemplo, la energía $E_+(K)$ es extraída de la ecuación de eigenvalores de Cooper

$$V \sum_{\mathbf{k}}' [\hbar^2 k^2/m + \hbar^2 K^2/4m - 2E_F - E_+(K)]^{-1} = 1 \quad (2-23)$$

El concepto de un “par de Cooper” contrasta con aquél llamado “par BCS”, definido en [19] como un dímero, con \mathbf{K} y \mathbf{k} fijos ó equivalentemente $(\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2)$ aunque solamente el caso $K = 0$ esta considerado en [19]. Los operadores de creación $\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ y aniquilación $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ de BCS no son completamente bosones ya que siguen las relaciones de [19] ecs. (2.11) a (2.13),

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = (1 - n_{-\mathbf{k}\downarrow} - n_{\mathbf{k}\uparrow})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2-24)$$

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = [\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}] = 0 \quad (2-25)$$

donde $n_{\pm\mathbf{k},s} \equiv \hat{a}_{\pm\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\pm\mathbf{k},s}$ son los operadores de número fermiónicos, con los operadores de creación $\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}^\dagger$ y aniquilación $\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}$ que se refieren a los fermiones y

$$\{\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}\} = 2\hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}'}(1 - \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}) \quad (2-26)$$

el cuál no es completamente fermiónico, a menos que $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ cuando (2-24) no sea bosón. La relaciones de conmutación de Bose son

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2-27)$$

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = [\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}] = 0 \quad (2-28)$$

con (2-27) que difiere de (2-24). Por otra parte, los operadores fermiónicos de creación $\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}^\dagger$ y aniquilación $\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}$ usualmente satisfacen la reglas de anti-conmutación de Fermi

$$\{\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'_1,s'}^\dagger\} = \{\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'_1,s'}\} = 0 \quad (2-29)$$

$$\{\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'_1,s'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'_1} \delta_{ss'} \quad (2-30)$$

Esta distinción entre los pares BCS y los CP se mantiene, aún en los ordinarios CPs [20]. También se aplica a los CPs generalizados [37] de Bethe-Salpeter definidos más consistentemente sin excluir los pares de huecos cuando el límite inferior en la interacción BCS es tomada como $(k_F^2 - k_D^2)^{1/2}$ donde k_D esta definida por la energía de Debye $\hbar\omega_D \equiv \hbar^2 k_D^2 / 2m$.

Los operadores de creación y aniquilación de los CPs para cualquier $K > 0$ son

$$\hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}_2,\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}_1,\uparrow} \quad \text{y} \quad \hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}_1,\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2,\downarrow}^\dagger \quad (2-31)$$

donde $\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}^\dagger$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}$ obedecen (2-29) y (2-30), y como antes $\mathbf{k} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ y $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ son los vectores de momento relativos y de centro de masa (CMM) respectivamente, asociados con dos fermiones con vectores de onda

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{K}/2 + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{K}/2 - \mathbf{k}. \quad (2-32)$$

usando lo mismo para derivar (2-24) a (2-26) válidos para $K = 0$, los operadores $\hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}$ y $\hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger$ son encontrados [38] para satisfacer *i)* las relaciones de conmutación de “pseudo-bosones”

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}^\dagger] = (1 - n_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} - n_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2-33)$$

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}^\dagger] = [\hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}] = 0 \quad (2-34)$$

donde $n_{\mathbf{K}/2\pm\mathbf{k},s} \equiv \hat{a}_{\mathbf{K}/2\pm\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{K}/2\pm\mathbf{k},s}$ son los operadores de número fermionicos, también *ii*) las relaciones de anti-conmutación de “pseudo-fermiones”

$$\{\hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}\} = 2\hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}\hat{b}_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}(1 - \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}). \quad (2-35)$$

Nuestra única restricción es que $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2$. Si $K = 0$ así como $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ (el único caso considerado por BCS) y llamando $\hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}=\mathbf{0}} \equiv \hat{b}_{\mathbf{k}}$, etc., (2-33) a (2-35) se vuelven (2-24) a (2-26) como debería ser. Así, ni los pares BCS con $K > 0$ son bosones como en la relación (2-33) que contiene términos adicionales que no [39] están presentes en las relaciones usuales de conmutación de bosones análogos a (2-27).

A nuestro conocimiento, nadie todavía ha tenido éxito en construir operadores de creación y aniquilación que sigan las relaciones de conmutación de Bose, empezando por los operadores de creación $\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}^\dagger$ y aniquilación $\hat{a}_{\mathbf{k}_1,s}$ como se *postula* en las Refs.[1, 2] en una teoría generalizada del condensado BE que contiene la teoría BCS como caso especial. Éste postulado esta bien fundamentado por los experimentos de cuantización de flujo magnético [40]-[42] que establecen la presencia de pares cargados aunque sin ser capaces [43] de especificar el *signo* de esas cargas. Sin embargo, aunque los eigenvalores de $\hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}$ son 0 ó 1 manteniendo el Principio de exclusión de Pauli, aquéllos de $\sum_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\mathbf{K}}$ son evidentemente 0, 1, 2, \dots de los muchos valores indefinidamente tomados sobre el índice de la suma \mathbf{k} . Esto implica que la estadística BE corrobora las conclusiones arriba expuestas. Una discusión más amplia se puede encontrar en las Refs.[44, 45].

2.2. Condensado de Bose-Einstein

La condensación de Bose-Einstein (BEC, por sus siglas en inglés) es un fenómeno cuántico que se presenta en un sistema de partículas en el cual, por debajo de una temperatura crítica T_c las partículas empiezan a ocupar el mismo estado cuántico. Su predicción teórica fue hecha por Einstein en 1925 [46] basada en el trabajo de Bose de 1924 sobre fotones [47], después del cuál quedó durante muchas décadas como un ejercicio académico en los libros de texto. El gas ideal de Bose (IBG, en inglés) sufre una BEC solo para cualquier dimensión entera o no $d > 2$ y $s = 2$ donde s es el exponente de la relación de dispersión energía-momento $E \sim k^s$; con una singularidad cúspide en la dependencia de la temperatura con el calor específico para $2 < d = 4$ y un salto finito discontinuo para $d > 4$ [48]-[50].

La BEC ha sido observada en el laboratorio en nubes de átomos bosónicos ultra-enfriados mediante láseres en trampas magnéticas. Esto ya se hizo con los átomos de $^{87}_{37}\text{Rb}$ [51], ^7_3Li [52], $^{23}_{11}\text{Na}$ [53], ^1_1H [54], $^{85}_{37}\text{Rb}$ [55], ^2_4He [56], $^{41}_{19}\text{K}$ [57], $^{133}_{55}\text{Cs}$ [58], $^{174}_{70}\text{Yb}$ [59], $^{52}_{24}\text{Cr}$ [60] donde los índices superior e inferior indican el número de masa nuclear (ó de nucleones en el núcleo) y el número de protones respectivamente. La BEC en gases de excitones [61] y de magnones [62]-[64] también ha sido reportada. Se ha observado la BEC en bajas dimensiones: Görlitz [65] reporta

una BEC de átomos de $^{23}_{11}\text{Na}$ en 1D o 2D, Schreck [66] observa con átomos de ^7_3Li en 1D; y Burger [67] estudia la transición de fase en una nube de átomos de $^{87}_{37}\text{Rb}$ en cuasi-2D.

Podemos encontrar la relación de la temperatura crítica para un gas ideal de bose (GIB) en cualquier dimensión. Para el GIB confinado en un volumen $V \equiv L^d$ y con una relación energía-momento cuadrática, el gran potencial termodinámico es

$$\Omega(\mu, T, L^d) = \Omega_0 + A_d \frac{g_{d/2+1}(z)}{\beta^{d/2+1}} \quad (2-36)$$

donde Ω_0 es el gran potencial termodinámico en el estado base y $g_{d/2}(z)$ es la integral de Bose

$$g_{d/2}(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dx \frac{x^{d/2-1}}{z^{-1}e^x - 1} \quad (2-37)$$

con $z = \exp[\mu(T)/k_B T]$ la fugacidad y μ el potencial químico del sistema. El número de partículas en el GIB se puede encontrar como $N = -(\partial\Omega/\partial\mu)_{T, L^d}$, derivando (2-36) encontramos

$$N = N_0 + N_e = N_0 + A_d \frac{g_{d/2}(z)}{\beta^{d/2}} \quad (2-38)$$

donde N_0 es el número de bosones en el estado base y N_e son los que están en los estados excitados, $A_d = (mL^2/2\pi\hbar^2)^{d/2}$. La temperatura crítica del sistema T_c se obtiene cuando $N_0 = 0$, es decir cuando $\mu = 0$, esto implica que $z \rightarrow 1$, de la ec. (2-38) encontramos

$$k_B T_c = \left(\frac{N}{A_d g_{d/2}(1)} \right)^{2/d}. \quad (2-39)$$

Ahora, si $d = 3$, nos lleva a $(N\beta^{3/2}/A_3) = g_{3/2}(1) = \zeta(3/2)$ puesto que $g_{3/2}(z) = \zeta(3/2)$ ver Refs.[68]-[73] donde $\zeta(3/2)$ es la función zeta de Riemann de orden 3/2 y $A_3 = (mL^2/2\pi\hbar^2)^{3/2}$ entonces podemos encontrar que la temperatura crítica es

$$k_B T_c = (2\pi\hbar^2/mL^2)^{3/2} (N/\zeta(3/2))^{2/3} \quad (2-40)$$

ésta es la conocida expresión de T_c para la BEC tridimensional ($d = 3$). Podemos observar que si $d \leq 2$ y $z \rightarrow 1$ la función de Bose $g_{d/2}(1) \rightarrow \infty \Rightarrow T_c = 0$ no hay temperatura crítica y por tanto no existe la BEC en $d \leq 2$ con una relación de dispersión cuadrática.

Para encontrar la fracción del condensado, usando (2-38) tenemos

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_e}{N} \quad (2-41)$$

usando N de la expresión de T_c (2-40) y dividiendo $N_e = A_3 g_{3/2}(z)/\beta^{3/2}$ entre N obtenida de

(2-39) tenemos

$$\frac{N_e}{N} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{\zeta(3/2)} \quad (2-42)$$

y como estamos en $T < T_c$, $z = 1$ entonces la ecuación anterior la introducimos en (2-41) obtenemos

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad (2-43)$$

es la fracción del condensado BE que puede observarse en la Fig. 3.3.

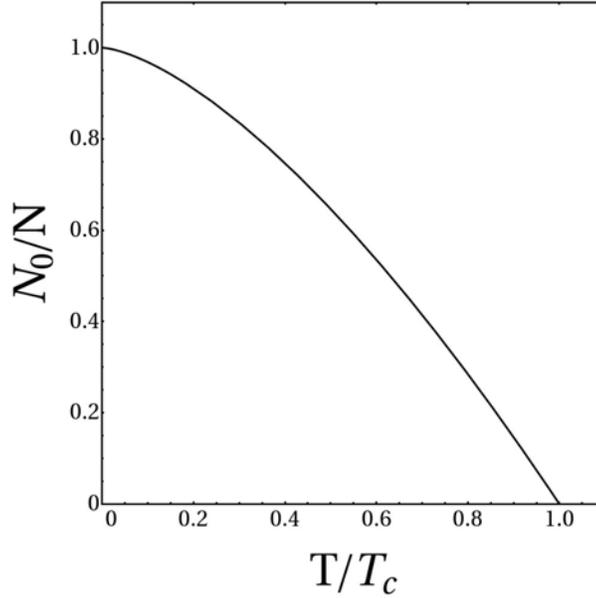


Fig. 2-4: Número de partículas de la fracción del condensado de Bose-Einstein, N_0/N como función de la temperatura absoluta T/T_c .

2.3. Modelo Bosón-Fermión

Los modelos de bosón-fermión (BF) de la superconductividad han sido estudiados desde mediados de los años 50's, incluso antes de la teoría BCS. Estos modelos proponen la existencia de bosones tipo-pares de Cooper. En los primeros modelos se nota la ausencia del gap electrónico $\Delta(T)$, quizá el primero en introducir el gap fue Eagles [74], posteriormente la relación $\Delta(T) \propto \sqrt{n_0(T)}$ donde $n_0(T)$ es la densidad de número del condensado de Bose-Einstein (BEC) apareció por primera vez con Ranninger *et. al* [75] y reapareció en un modelo BF-BEC de R. Friedberg y T.D. Lee [76, 77] aplicada a cupratos superconductores, esta teoría se ajusta muy bien a los datos experimentales [78].

Por otro lado, se conjetura en [79]-[81] que la superconductividad en general es una BEC de pares de Cooper. En este modelo los CPs coexisten en un superconductor con electrones no apareados (o agujeros) como en un gas binario. La BEC se ha propuesto como un mecanismo estadístico (más que dinámico) de superconductividad en [76], [82], [83]. Normalmente la BEC ocurre en dimensiones $d > 2$, sin embargo puede ocurrir BEC en $d > 1$ si la relación de dispersión es lineal. A continuación se hará una descripción general del modelo bosón-fermion en 2D de acuerdo a [79]-[81], este modelo es para un gas ideal, es decir sin interacción.

Este modelo estadístico es una mezcla ideal binaria de bosones (los pares de Cooper) y fermiones no apareados en equilibrio químico [84, 85] para el cuál la ruptura térmica del par hacia fermiones no apareables se describe explícitamente en [79]. Suponiendo que la interacción del modelo BCS el número total de fermiones en 2D a cualquier temperatura es $N = L^2 k_F^2 / 2\pi = N_1 + N_2$, donde N_1 es el número de fermiones no-apareables, es decir, no interactuantes, mientras que N_2 es el número de fermiones que si son apareables. Los fermiones no-apareables también obedecen la estadística de Fermi-Dirac con el potencial químico del gas ideal μ pero los N_2 apareables son simplemente aquéllos que están en la esfera de interacción con energía $2\hbar\omega_D$, entonces

$$N_2 = 2 \int_{\mu-\hbar\omega_D}^{\mu+\hbar\omega_D} d\epsilon \frac{g(\epsilon)}{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1} = 2g\hbar\omega_D \quad (2-44)$$

esta expresión es independiente de T . El acoplamiento interfermiónico λ esta fijo al igual que T , estos fermiones N_2 forman una mezcla ideal de fermiones apareables no-apareados, más los pares de Cooper creados cercanamente a la energía de un solo fermión $\mu(T)$, con una energía de enlace $\Delta_K(T) \leq 0$ y con energía total

$$E_K(T) = 2\mu(T) - \Delta_K(T) \quad (2-45)$$

esta expresión generaliza la ecuación de los CPs [20] a $T = 0$.

La energía libre de Hemlholtz $F = E - TS$, donde E es la energía interna y S es la entropía de este sistema binario compuesto de bosones-fermiones apareables no-apareados a temperaturas $T \leq T_c$, se construye de acuerdo a [79] en términos de: (a) el número promedio de fermiones apareables pero no-apareados con energía fija, (b) $N_{B,K}$ el número de pares de Cooper con centro de masa cero y con un valor K_0 de ruptura de los CPs definido en [81] por $\Delta_{K_0} \equiv 0$ y (c) $N_{B,0}(T)$ el número de pares de Cooper con centro de masa igual a cero a temperatura T . La energía libre F_2 o sólo los fermiones apareables debe ser minimizada sujeta a la condición de $\Omega_2 = F_2 - \mu_2 N_2$ con respecto a los incisos (a)-(c) minimizando con respecto a las probabilidades del número de ocupacion fermiónicos $n_2(\epsilon)$ esto conduce a uan distribucion de Fermi con el potencial químico fermiónico μ_2 , es decir

$$n_2(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu_2)} + 1} \quad (2-46)$$

El número de fermiones apareables pero no-apareados $N_{2,0}$ es entonces

$$\begin{aligned} N_{2,0}(T) &= 2g \int_{\mu-\hbar\omega_D}^{\mu+\hbar\omega_D} d\epsilon \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon - \mu) + 1]} \\ &= \frac{2g}{\beta} \ln \left[\frac{1 + \exp\{-\beta(\mu - \mu_2 - \hbar\omega_D)\}}{1 + \exp\{-\beta(\mu - \mu_2 + \hbar\omega_D)\}} \right] \end{aligned} \quad (2-47)$$

hay que notar que si $\mu_2 = \mu$ se convierte nuevamente en el lado derecho de (2-44). La ecuación de número para los fermiones apareables es

$$\begin{aligned} N_2 &= N_{2,0}(T) + 2[N_{B,0}(T) + \sum_{K>0}^{K_0} N_{B,K}(T)] \\ &\equiv N_{2,0}(T) + 2N_B(T) \end{aligned} \quad (2-48)$$

donde $\sum_{K>0}^{K_0} N_{B,K}(T) = \sum_{K>0}^{K_0} [\exp\{\beta(E_K(T) - 2\mu_2)\} - 1]^{-1}$ es el número total de los pares de Cooper excitados, es decir, los valores del centro de masa $0 < K < K_0$. Se puede re-escribir $E_K(T) - 2\mu_2$ como $\varepsilon_K(T) - \mu_B(T)$, con $\varepsilon_K(T) \equiv \Delta_0(T) - \Delta_K(T) \leq 0$, que es una energía de excitación no negativa como es sugerida en [81] cuando

$$\Delta_K \xrightarrow{K \rightarrow 0} \Delta_0 - \frac{2}{\pi} \hbar \nu_F K + \mathcal{O}(K^2) \quad (2-49)$$

donde $\nu_F \equiv \sqrt{2E_F/m}$ es la velocidad de Fermi. Los CPs agujero-agujero y partícula-partícula pueden mostrarse que tienen la misma energía de excitación $\varepsilon_K(T)$ si el potencial químico $\mu_B(T)$ es

$$\mu_B(T) = 2[\mu_2(T) - \mu(T)] + \Delta_0(T) = 0 \quad (2-50)$$

para $0 \leq T \leq T_c$ ya que $N_{B,0}(T)$ es despreciable para todo $T > T_c$. Esta es precisamente la condición BEC para un gas puro de bosones, aunque ahora es una mezcla binaria de bosones y fermiones.

2.3.1. Temperaturas críticas en BEC y BCS

Para los bosones N_B con masa m_B y energía $\varepsilon_K = C_s K^s$ con $s > 0$ y C_s una constante, se tiene una singularidad en la temperatura de BEC en $T_c \neq 0$ para cualquier dimensión [49],[86] $d > s$. En la ecuación de número $N_B = \sum_{\mathbf{K}} [\exp\{(\varepsilon_K - \mu_B)/k_B T\} - 1]^{-1}$ cuando el potencial químico de los bosones es $\mu_B \leq 0$ cuando $K = 0$, se tienen la expresión

$$T_c = \frac{C_s}{k_B} \left[\frac{s\Gamma(d/2)(2\pi)^d n_B}{2\pi^{d/2}\Gamma(d/s)g_{d/s}(1)} \right]^{s/d} \quad (2-51)$$

con $n_B \equiv N_B/L^d$ y $g_{d/s}(z)$ la integral de Bose para la cual $d/s > 1$ y ésta se vuelve $\zeta(d/s)$ la función zeta de Riemann de orden d/s , pero diverge cuando $d/s \leq 1$. Entonces en $T_c = 0$ para toda $d \leq s$, tomando $s = 2$ y $d = 3$ uno tiene $\zeta(3/2) \simeq 2.612$ y como $C_s \equiv \hbar^2/2m_B$ la expresión (2-51) se reduce a la formular conocida de $T_c \simeq 3.31\hbar^2 n_B^{2/3} m_B k_B$ de la BEC ordinaria.

Pero para los bosones con una energía de excitación positiva $\varepsilon_K \equiv \Delta_0 - \Delta_K$ se aproxima al término lineal de la ec.(2-49) para toda K , esto significa que si $s = 1$ y $C_1 \equiv a(d)\hbar\nu_F$ con $a(d) = 2/\pi$ y $1/2$ para $d = 2$ y 3 respectivamente, la temperatura crítica T_c es diferente de cero para toda $d > 1$, esto es precisamente el intervalo de la dimensionalidad para todos los superconductores conocidos como los cuasi-1D o sales organo-metalicas de Bechgard [87]-[89]. Si el trasfondo de fermiones no-apareados no son considerados, se tiene un gas puro de bosones de CPs pero con la densidad de número dependiente de la temperatura $n_B(T)$. Si convertimos la expresión de los eigenvalores de los CPs [20] para $s = 1$ y $d = 2$ en una fórmula explícita permitiendo a los n_B ser T -dependientes obtenemos

$$T_c = \frac{4\sqrt{3}}{\pi^{3/2}} \frac{\hbar\nu_F}{k_B} \sqrt{n_B(T_c)} \quad (2-52)$$

Por otra parte, se tiene la expresión de la teoria BCS de la temperatura crítica y está expresada por (2-19) donde $N(0)V$ es la constante de acoplamiento electrón-fonón λ . Para deducir una expresión implícita de T_c para un gas binario se tiene que, además de resolver para $\Delta_K(T)$, se requiere (2-44), (2-47) y (2-48) y en $T = T_c$, $N_{B,0}(T_c) \simeq 0$ y $\mu_B(T_c) \simeq 0$, así que de acuerdo a [81] se tiene

$$1 = \frac{T_c}{\nu} \ln \left[\frac{1 + \exp \left\{ -(\tilde{\Delta}_0(\tilde{T}_c)/2 - \nu)/\tilde{T}_c \right\}}{1 + \exp \left\{ -(\tilde{\Delta}_0(\tilde{T}_c)/2 + \nu)/\tilde{T}_c \right\}} \right] + \frac{8(1 + \nu)}{\nu} \int_0^{\kappa_0(\tilde{T}_c)} \frac{\kappa d\kappa}{\exp \left\{ (\tilde{\Delta}_0(\tilde{T}_c) - \tilde{\Delta}_\kappa(\tilde{T}_c))/\tilde{T}_c \right\} - 1} \quad (2-53)$$

donde las cantidades con tilde son unidades de $\mu(T_c) \simeq E_F$ ó T_F , mientras que $\kappa \equiv K/2\sqrt{k_F^2 + K_D^2}$ y $\nu \equiv \Theta_D/T_F$.

En esta sección se ha presentado un panorama general de las teorías estadísticas de la superconductividad. La teoría BCS mediante el mecanismo de los pares de Cooper, predice una temperatura de condensación T_c y un gap de energía $\Delta(T)$, mientras que se puede alcanzar una BEC ordinaria si la dimensionalidad del sistema es mayor que la relación de dispersión energía-momento $d > s$. Por último se ha conjeturado que la superconductividad es una BEC de pares de Cooper, a partir de un gas binario de bosones (CP) y de fermiones no-apareados, donde la T_c de la BEC es la misma que BCS.

Capítulo 3

Generalización del condensado de Bose-Einstein (GBEC)

Se ha estudiado a la teoría BCS y la BEC en términos de un modelo bosón-fermión en un formalismo generalizando la condensación de Bose-Einstein (GBEC) [1, 4]. Una distinción fundamental es que los pares de Cooper son de hecho bosones que sufren una BEC, en contraste con los pares de BCS que no son bosones [90]. Otro ingrediente fundamental (sobre todo en 2D donde la BEC normal no se produce) es la dispersión lineal “ordinaria” de los CPs, al menos en el término principal del momento del centro de masa (CMM) de la expansión en serie de potencias de la energía de los CPs. Esto se debe a que los CP no se propagan en el vacío, sino en el mar de Fermi.

El tratamiento de muchos cuerpos de la ecuación de Bethe-Salpeter [91] de los CP esta basado en el gas ideal de Fermi (IFG, por sus siglas en inglés) del cuál se obtiene la expresión familiar de energía-negativa, y además el estado enlazado de $2h$ -CPs (dos agujeros tipo-pares de Cooper) esto es ignorado como en el problema ordinario de CPs. Pero resultan en energías puramente-imaginarias, y por tanto sin sentido, de esta forma por completez se requiere incluir a los $2h$ -CPs. Sin embargo, cuando se usa el estado base BCS en lugar del IFG, además de la solución trivial conocida de Anderson-Bogoliubov-Higgs del modo de sonido, se legitima el movimiento de los “CPs generalizados” y surgen con energía-positiva, de vida-media finita, con soluciones no triviales de resonancia para el CMM diferente de cero. Esto equivale a reemplazar la energía puramente cinética del hamiltoniano no perturbado por BCS. Los CPs en movimiento nuevamente tienen una relación de dispersión lineal en su término principal. La BEC de tales pares puede ocurrir exactamente en 2D (ya que no puede tener una relación de dispersión cuadrática) y de hecho hasta $(1 + \rho)D$ donde ρ puede ser infinitesimalmente pequeño, lo que abarca todos los superconductores empíricamente conocidos.

En este capítulo se introduce el formalismo GBEC que describe un gas ternario compuesto

de electrones, pares de Cooper de electrones y pares de Cooper de huecos. En esta descripción tenemos una sola banda donde los electrones y los huecos se suponen tienen la misma masa efectiva [3], ésta aproximación no es tan realista si consideramos en describir a los materiales con una teoría *multibanda* (digamos con bandas de valencia para agujeros y de conducción para electrones) donde estas dos masas son diferentes como se podrá ver más adelante.

Se establece el sistema mediante el hamiltoniano, suponiendo que ya existen pares de Cooper tanto de electrones $2e$ como de huecos $2h$, se diagonaliza el operador $\hat{H} - \mu\hat{N}$ mediante la transformación de Bogoliubov-Valatin y se obtiene la función del gran potencial termodinámico. Para encontrar estabilidad en el sistema se buscan encuentran las derivadas parciales con respecto al número de electrones condensados N_0 , el número de huecos condensados M_0 y el potencial químico μ . Se obtienen tres ecuaciones trascendentales acopladas que se deben resolver autoconsistentemente. El formalismo GBEC subsume las principales teorías estadísticas de la superconductividad.

3.1. El hamiltoniano de GBEC

El formalismo GBEC [1, 4] describe un gas ternario compuesto de fermiones y bosones con un hamiltoniano $H = H_0 + H_{int}$. El hamiltoniano H_0 corresponde a una mezcla ideal (es decir, sin interacción) de un gas de fermiones desapareados con ambos tipos de CPs, dos electrones ($2e$) y dos huecos ($2h$), suponemos que ya están formados los CPs en este sistema de tal forma que tenemos

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}_1, s_1} \varepsilon_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1} + \sum_{\mathbf{K}} E_+(K) \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} - \sum_{\mathbf{K}} E_-(K) \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}} \quad (3-1)$$

donde $\mathbf{k} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ el vector de onda relativo, $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ es el vector de onda de los CPs del CMM, mientras que $\varepsilon_{k_1} \equiv \hbar^2 k_1^2 / 2m$ es la energía de un solo electrón y m su masa efectiva y $E_{\pm}(K) \equiv E_{\pm}(0) \pm \hbar^2 K^2 / 4m$ las energías de los pares $2e$ -/ $2h$ -CP fenomenológicos, suponiendo sus masas como $2m$. El primer término de (3-1) contabiliza a todos los fermiones del sistema en la descripción electrónica, con la masa efectiva usual del electrón [92] el segundo término corresponde a la ya formados CPs de electrones y el tercero a los ya formados CPs de huecos, a nuestro conocimiento nadie ha podido construir los operadores de creación y aniquilación de los CP que sigan las reglas de conmutación de Bose [90] a partir de los operadores de Fermi.

Aquí $\hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1}^\dagger$ ($\hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1}$) son los operadores de creación (aniquilación) para fermiones, respectivamente, con momento \mathbf{k}_1 y proyecciones de spin s_1 ; similarmente $\hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger$ ($\hat{b}_{\mathbf{K}}$) y $\hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger$ ($\hat{c}_{\mathbf{K}}$) son los operadores para los bosones compuestos de $2e$ -CPs y $2h$ -CPs, respectivamente. Un par de agujeros se consideran distintos e independientes cinemáticamente de $2e$ -CP ya que sus relaciones de conmutación de Bose involucran un cambio relativo de signo, en contraste con los electrones

(*e*) ó huecos (*h*) cuyas relaciones de anticonmutación de Fermi no lo hacen. Este estudio es no relativista debido a un tratamiento de temperaturas relativamente bajas. Los bosones están conformados por dos electrones ó huecos enlazados y están caracterizados por la función de onda

$$\psi_{\pm}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = L^{-3/2} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R})} \varphi_{\pm}(\mathbf{r}) \quad (3-2)$$

donde \mathbf{R} es el radio-vector del centro de masa del bosón compuesto y \mathbf{r} es el radio-vector entre los dos electrones o huecos enlazados, se supone solamente un solo estado enlazado. La función de onda $\varphi_{\pm}(\mathbf{r})$ describe la estructura interna del bosón.

El hamiltoniano de interacción H_{int} consta de cuatro vértices de interacción BF, ver Fig. 3-1, cada uno con dos-fermiones/un-bosón de creación o aniquilación de los operadores, que representa cómo los electrones no apareados (subíndice +) ó huecos (subíndice -) se combinan para formar los $2e$ -/ $2h$ -CPs que suponemos existen en un sistema $3D$ de tamaño L , el tamaño de la “caja” con volumen L^3 , es decir para tres dimensiones

$$\begin{aligned} H_{int} = & L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} f_{+}(k) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{K}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow} \hat{b}_{\mathbf{K}}^{\dagger} \right) \\ & + L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} f_{-}(k) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{K}}^{\dagger} + \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow} \hat{c}_{\mathbf{K}} \right) \end{aligned} \quad (3-3)$$

donde $f_{\pm}(k)$ son las transformadas de Fourier de las funciones de onda $\varphi_{\pm}(\mathbf{r})$ de los bosones compuestos de pares de electrones y pares de huecos respectivamente, multiplicados por un factor de interacción.

Las interacciones de H_{int} son conocidas como interacciones tipo canal-s [93], las cuáles conservan el momento del CM y tienen una interacción de la forma $2e \rightarrow \phi \rightarrow 2e$ donde ϕ se modela como un campo de bosones [76], mientras que la forma usual de las interacciones BCS corresponden a una interacción tipo canal-t donde la interacción es del tipo $2e \rightarrow 2e + phonon \rightarrow 2e$ [76], esencialmente las interacciones GBEC son diferentes a las interacciones BCS, puesto que en GBEC se asumen formados los CPs de $2e$, $2h$ con momento de centro de masa $K = 0$, siendo partículas que siguen la estadística de Bose-Einstein, mientras que las interacciones BCS para formar los pares, no lo son.

Justo como la interacción hamiltoniana de Fröhlich (ó de Dirac) (Ref.[94] p. 396 y subsiguientes) que es la más natural para utilizar en un sistema de muchos electrones-fonones (o fotones), se puede conjeturar que (3-3) es el mismo para el sistema BF bajo estudio. De hecho, esta sugerencia ha sido ya formalmente empleada en virtud de diversas formas por varios autores [77], [95]-[98], pero sin pares de agujeros. Más recientemente, un similar H_{int} de BF ha sido empleado [99]-[102] para estudiar los gases de Fermi degenerados que consisten en átomos neutros de ^{40}K y su llamada “Superfluidez de Resonancia” Feshbach. Sin embargo, estos autores

asumen una relación de dispersión cuadrática para los CPs, además excluyendo los $2h$ -CPs de tal forma que no se puede relacionar su formalismo con la teoría BCS.

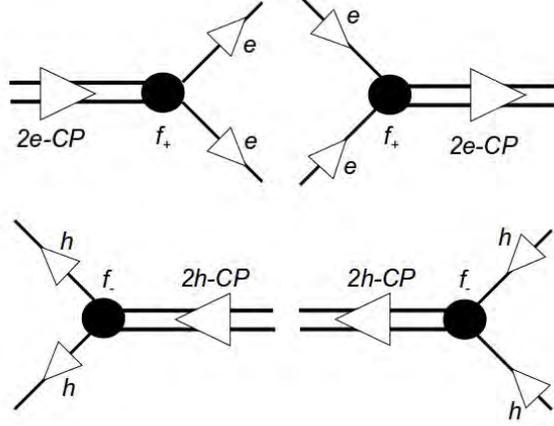


Fig. 3-1: El hamiltoniano de interacción consta de cuatro vértices de interacción bosón-fermión, cada uno con dos-fermiones/un-bosón (creación y/o aniquilación), que representan cómo los electrones no apareados (subíndice +) ó agujeros (subíndice -) se combinan para formar los CPs de $2e$ - $2h$, respectivamente. Figura tomada de la Ref.[103].

Para diagonalizar (ver apéndice A) el hamiltoniano podemos seguir a Bogoliubov [104] reemplazando cada operador de creación y aniquilación de los bosones $\hat{b}_0^\dagger, \hat{b}_0$ por el número $\sqrt{N_0}$ dónde N_0 es el número de bosones compuestos por $2e$ con $\mathbf{K} = 0$ e igualmente para $\hat{c}_0^\dagger, \hat{c}_0$ por $\sqrt{M_0}$ dónde M_0 es el número de bosones compuestos por $2h$ con $\mathbf{K} = 0$. Ignorando interacciones entre electrones no apareados y bosones excitados (con $\mathbf{K} \neq 0$) podemos escribir el operador dinámico $\hat{\Omega} = \hat{H} - \mu\hat{N}$ de la forma

$$\begin{aligned}
\hat{H} - \mu\hat{N} &\simeq \sum_{\mathbf{k}_1, s_1} [\varepsilon(k_1) - \mu] \hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1} \\
&+ [E_+(0) - 2\mu]N_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [E_+(K) - 2\mu] \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} \\
&+ [2\mu - E_-(0)]M_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [2\mu - E_-(K)] \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}} \\
&+ \sum_{\mathbf{k}} [\sqrt{n_0}f_+(k) + \sqrt{m_0}f_-(k)] \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}\uparrow} \right) \quad (3-4)
\end{aligned}$$

donde \hat{N} es el operador asociado al número total de fermiones en el sistema, incluyendo los desapareados. Es de interés señalar que la aproximación que se hace en este estudio en las Refs. [105] esta completo, puesto que se consideran a los bosones excitados con $K \neq 0$.

Las funciones $f_{\pm}(k)$ son caracterizadas por la interacción entre fermiones no-apareados y

CPs condensados tipo-BE con $\mathbf{K} = 0$. Como se habia mencionado anteriormente las funciones $f_{\pm}(k)$ son las transformadas de Fourier de la función de onda $\varphi_{\pm}(\mathbf{r})$ que describen la estructura interna de los bosones compuestos por $2e$ - $2h$ -CP. Esta transformada de Fourier esta relacionada con una amplitud de dispersión y que puede estar dada como

$$f_{\pm}(k) = \int \varphi_{\pm}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})/\hbar} d\mathbf{r}^3$$

lo que nos indica que esta amplitud de dispersión al ser evaluada las propiedades del sistema pueden ser expresadas en un solo parámetro que es conocido como a_s la *longitud de dispersión* [33, p. 574], la cuál es la dispersión provocada por un esfera y que coincide con el radio a de la misma. Lo que podemos suponer del tratamiento de partículas lentas [33, p. 581] es que la velocidad se supone tan pequeña que la longitud de onda de la partícula, en este caso el bosón compuesto por $2e$ - $2h$ -CP es grande comparada con el radio de acción de a_s del campo $f_{\pm}(k)$ y además su energía es pequeña respecto de la magnitud del campo dentro de este radio. En otras palabras, a bajas velocidades sería imposible conocer la estructura interna de los bosones $2e$ - $2h$ -CP, el análisis para determinar esta estructura se deja para otro trabajo. En el apéndice B se muestra un tratamiento de la longitud de dispersión a_s para una esfera rígida ver Ref.[106, pág. 197].

Si tomamos $f_{\pm}(\epsilon)$ en [1, 2] con $\epsilon(k) = \hbar^2 k^2 / 2m$ de la forma

$$f_+(\epsilon) = \begin{cases} f & \text{para } \frac{1}{2}[E_+(0) - \delta\epsilon] < \epsilon < \frac{1}{2}[E_+(0) + \delta\epsilon] \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases} \quad (3-5)$$

$$f_-(\epsilon) = \begin{cases} f & \text{para } \frac{1}{2}[E_-(0) - \delta\epsilon] < \epsilon < \frac{1}{2}[E_-(0) + \delta\epsilon] \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases} \quad (3-6)$$

donde E_f es la energía de interacción de los bosones $2e$ -CP y de los $2h$ -CP y $\delta\epsilon$ es el cascarón de energía alrededor de E_f , definidas como

$$E_f \equiv \frac{1}{4}[E_+(0) + E_-(0)] \quad y \quad \delta\epsilon \equiv \frac{1}{2}[E_+(0) - E_-(0)]. \quad (3-7)$$

donde $E_{\pm}(0)$ es la energía de los pares $2e$ - $2h$ -CP con $K = 0$, claramente se observa que $E_{\pm}(0) = 2E_f \pm \delta\epsilon$.

El operador $\hat{\Omega}$ puede diagonalizarse exactamente (ver apéndice A) con la transformación de Bogoliubov-Valatin [104],[107], para la mezcla BF. Podemos escribir el potencial termodinámico del gran canónico como

$$\Omega(T, L^3, \mu, N_0, M_0) = -k_B T \ln[\text{Tr } e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}] \quad (3-8)$$

donde T es la temperatura absoluta, $\beta \equiv 1/k_B T$, k_B la constante de Boltzmann, μ el potencial químico del sistema de muchos electrones. Usando (3-4) en (3-8) obtenemos

$$\begin{aligned} \Omega(T, L^3, \mu, N_0, M_0)/L^3 &= \int_0^\infty d\epsilon N(\epsilon) [\epsilon - \mu - E(\epsilon)] - 2k_B T \int_0^\infty d\epsilon N(\epsilon) \ln\{\exp[-\beta E(\epsilon)]\} \\ &+ [E_+(0) - 2\mu]n_0 + k_B T \int_0^\infty d\epsilon M(\epsilon) \ln\{1 - \exp[-\beta \mathcal{E}_+(\epsilon)]\} \\ &+ [2\mu - E_-(0)]m_0 + k_B T \int_0^\infty d\epsilon M(\epsilon) \ln\{1 - \exp[-\beta \mathcal{E}_-(\epsilon)]\} \quad (3-9) \end{aligned}$$

donde $n_0 = N_0/L^3$, $m_0 = M_0/L^3$ la densidad de número para los $2e$ - $2h$ -CP, respectivamente; además

$$N(\epsilon) \equiv \frac{m^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\sqrt{\epsilon}, \quad M(\epsilon) \equiv \frac{2m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\sqrt{\epsilon} \quad (3-10)$$

la densidad de estados para los fermiones y los bosones $2e$ - $2h$ -CP, respectivamente. Denotamos ϵ para las energías de los fermiones no-apareados, mientras que ϵ las energías de los bosones $2e$ - y $2h$ -CP. Las energías de estos bosones son

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+(\epsilon) &\equiv \epsilon + E_+(0) - 2\mu = E_+(K) - 2\mu \\ \mathcal{E}_-(\epsilon) &\equiv \epsilon - E_+(0) + 2\mu = E_+(K) + 2\mu \end{aligned} \quad (3-11)$$

La energía de los fermiones $E(\epsilon)$ de la forma

$$E(\epsilon) = \sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + \Delta^2(\epsilon)} \quad (3-12)$$

donde

$$\sqrt{n_0(T)}f_+(\epsilon) + \sqrt{m_0(T)}f_-(\epsilon) \equiv \Delta(\epsilon) \quad (3-13)$$

que relaciona la densidad de número de los $2e$ -CP condensados $n_0(T)$ multiplicada por la interacción $f_+(\epsilon)$ y análogamente para $2h$ -CP con $m_0(T)$ y $f_-(\epsilon)$. La expresión (3-13) es el gap de energía electrónico de GBEC análogo al de la teoría BCS como veremos más adelante.

Del potencial termodinámico (3-9) podemos encontrar las propiedades termodinámicas del sistema, tales como la presión $P(T, n) = -\Omega/L^3$, la entropía $S(T, n)/L^3 = -k_B \partial(\Omega/L^3)/\partial T$. La correspondiente energía de Helmholtz es $F(T, L^3, N, M) \equiv \Omega + \mu N$, minimizando F para un número fijo de electrones N , sobre N_0 y M_0 se requiere que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial N_0} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial M_0} = 0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -N \quad (3-14)$$

mientras que la tercera expresión asegura la conservación de carga, donde N incluye a los fermiones no-apareados así como los pares de fermiones.

Después de algo de algebra uno obtiene tres ecuaciones trascendentales acopladas que deter-

minan el formalismo GBEC, dos ecuaciones “*tipo-gap*” para los pares $2e$ -CP y $2h$ -CP

$$2\sqrt{n_0}[E_+(0) - 2\mu] = \int_0^\infty d\epsilon N(\epsilon) \frac{\Delta(\epsilon)f_+(\epsilon)}{E(\epsilon)} \tanh \left[\frac{1}{2}\beta E(\epsilon) \right]; \quad (3-15)$$

$$2\sqrt{m_0}[2\mu - E_-(0)] = \int_0^\infty d\epsilon N(\epsilon) \frac{\Delta(\epsilon)f_-(\epsilon)}{E(\epsilon)} \tanh \left[\frac{1}{2}\beta E(\epsilon) \right]; \quad (3-16)$$

y una sola “*ecuación de número*” que garantiza la conservación de carga

$$n = 2n_B(T) - 2m_B(T) + n_f(T) \quad (3-17)$$

donde $n_f(T)$ son los electrones no apareados del sistema de la forma

$$n_f(T) = \int_{0+}^\infty d\epsilon N(\epsilon) \left[1 - \frac{\epsilon - \mu}{E(\epsilon)} \tanh \frac{1}{2}\beta E(\epsilon) \right] \quad (3-18)$$

En (3-17), $n = N/L^3$ es la densidad de número total del sistema, mientras que $n_B(T)$ y $m_B(T)$ representan respectivamente la densidad de $2e$ -CP y $2h$ -CP en todos los estados bosónicos tanto en $K = 0$ como en $K > 0$. Podemos escribir explícitamente (3-17) como

$$n = 2n_0(T) - 2m_0(T) + 2n_{B+}(T) - 2m_{B+}(T) + n_f(T) \quad (3-19)$$

donde $n_B(T)$ es

$$\begin{aligned} n_B(T) &\equiv n_0(T) + n_{B+}(T) \quad \text{y} \\ n_{B+}(T) &\equiv \int_{0+}^\infty d\epsilon M(\epsilon) [\exp \beta \{E_+(0) + \epsilon - 2\mu\} - 1]^{-1} \end{aligned} \quad (3-20)$$

y similarmente para $m_B(T)$ el cuál es

$$\begin{aligned} m_B(T) &\equiv m_0(T) + m_{B+}(T) \quad \text{donde} \\ m_{B+}(T) &\equiv \int_{0+}^\infty d\epsilon M(\epsilon) [\exp \beta \{2\mu - E_-(0) + \epsilon\} - 1]^{-1} \end{aligned} \quad (3-21)$$

Para las dos fases puras $2e$ -CP y $2h$ -CP se puede en principio, cambiar de un modelo de una sola banda a un modelo de dos bandas, permitiendo que las masa de los electrones (m_e) sea diferente de la masa de los agujeros (m_h), esto puede hacerse introduciendo dos energías de Fermi diferentes E_F^e y E_F^h que difieren precisamente por su masa. Este análisis se deja para otro trabajo.

En el caso de $3D$, en la Fig. 2 de la Ref.[4] se muestra el diagrama de fases de T_c/T_F en función de n/n_f para el formalismo GBEC y además para BCS con una $\lambda = 1/5$. Además de la fase normal (n) que consiste del gas ideal Bose-Fermi descrito por H_0 , hay tres diferentes fases

estables BEC más una fase metaestable, es decir, con mayor energía libre de Helmholtz. Hay dos fases puras de condensados-BE ya sea $2e$ -CP ($s+$) ó $2h$ -CP ($s-$) y una fase mixta (ss) con proporciones arbitrarias de $2e$ - $2h$ -CPs. El mayor interés físico es por supuesto en las dos fases puras de más alta- T_c . Sin embargo, en este trabajo analizaremos a algunos superconductores convenciones de baja T_c además de las fase mixta con proporciones idénticas de $2e$ - $2h$ -CP.

Las variables del formalismo GBEC son la densidad de número de los $2e$ -CP condensados $n_0(T)$, la densidad de número de los $2h$ -CP condensados $m_0(T)$ y el potencial químico $\mu(T)$ todos en función de la temperatura absoluta T . Para cada fase pura hay una temperatura crítica ya sea $\Delta(T_{cs+}) = f\sqrt{n_0(T_{cs+})} \equiv 0$ ó $\Delta(T_{cs-}) = f\sqrt{m_0(T_{cs-})} \equiv 0$. Como se mostrará más adelante la intersección de estas dos fases corresponde a la simetría ideal entre igual número de $2e$ -CP como de $2h$ -CP, da el valor de T_c de BCS de $T_c/T_F = 7.64 \times 10^{-6}$ que también se desprende de la conocida expresión

$$T_c/T_F \simeq 1.134(\hbar\omega_D/E_F) \exp(-1/\lambda). \quad (3-22)$$

para $\lambda = 1/5$ y $\hbar\omega_D/E_F = 0.001$. Además las fases puras de $2e$ - y $2h$ -CP del GBEC tienen estabilidad, es decir, la segunda derivada de la energía libre de Helmholtz es positiva [108].

Podemos notar que (3-18) es una función que depende de la temperatura y es la cantidad de electrones no-apareados en el sistema. Cuando tomamos $T \rightarrow 0$ se tiene que

$$n_f(T = 0) = n_f = \frac{(2mE_f)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \quad (3-23)$$

es decir todos los electrones del sistema se han apareado. Esta función es monótonamente creciente para toda T . Si dejamos que $E_f = E_F$ recuperamos la relación del gas ideal de Fermi.

3.2. Caso especial: ecuaciones del “crossover” BCS-Bose y BCS

En la teoría BCS de la superconductividad no se hace diferencia entre los pares $2e$ de los pares $2h$ llevando el sistema a un simetría “ideal” ($2e = 2h$) entre ambos sistemas, de esta manera con $n_{B+}(T) = m_{B+}(T)$, $m_0(T) = n_0(T)$ y $E_f = \mu$ las expresiones (3-15) y (3-16) coinciden, llamando $\xi \equiv \varepsilon - \mu$, obtenemos

$$1 = \frac{f^2 N(\mu)}{2\delta\varepsilon} \int_0^{\delta\varepsilon} d\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}\right) \quad (3-24)$$

mientras que (3-17) tiene la forma

$$\begin{aligned}
n &= \int_0^{\mu-\delta\varepsilon} d\varepsilon N(\varepsilon) \left[1 - \tanh\left(\frac{1}{2}\beta[\varepsilon - \mu]\right) \right] \\
&+ \int_{\mu+\delta\varepsilon}^{\infty} d\varepsilon N(\varepsilon) \left[1 - \tanh\left(\frac{1}{2}\beta[\varepsilon - \mu]\right) \right] \\
&+ N(\mu) \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} d\xi \left[1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3-25}$$

Si $m_0 = n_0$, los primeros términos de (3-17) se cancelan y como $\mathcal{E}_+(\varepsilon) = \mathcal{E}_-(\varepsilon)$ también el segundo y tercer término, estas son las contribuciones de los electrones y agujeros ligados con los bosones $K \neq 0$. Así, se pueden dejar solo dos ecuaciones acopladas para determinar $\Delta(T)$ y $\mu(T)$ las cuales son esencialmente las ecuaciones del llamado “crossover” BCS-Bose [109]-[127], ver Fig. 3-2. Despreciando la pequeña corrección en (3-25) debido al gap electrónico, y restaurando la densidad de estados electrónica $N(\varepsilon)$ conlleva a la relación del gas ideal de Fermi

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \tag{3-26}$$

si uno deja $\mu \simeq E_F$ como es supuesto por BCS, (3-24) es realmente la ecuación fundamental de la teoría BCS, nombrando más claramente a

$$\frac{f^2}{2\delta\varepsilon} \equiv V, \quad \delta\varepsilon \equiv \hbar\omega_D \tag{3-27}$$

entonces (3-24) se convierte en la ecuación del gap BCS

$$1 = VN(\varepsilon_F) \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}\right). \tag{3-28}$$

Es de estas expresiones, que podemos correlacionar la interacción de GBEC ($f^2 N(E_F)/2\delta\varepsilon$) con el parámetro de acoplamiento adimensional de BCS $\lambda \equiv N(E_F)V$, de igual manera el cascarón de energía de interacción cerca de E_f de los bosones $2e-2h$ -CP de GBEC $\delta\varepsilon$, con la energía de la red iónica $\hbar\omega_D$, donde ω_D es la frecuencia de Debye.

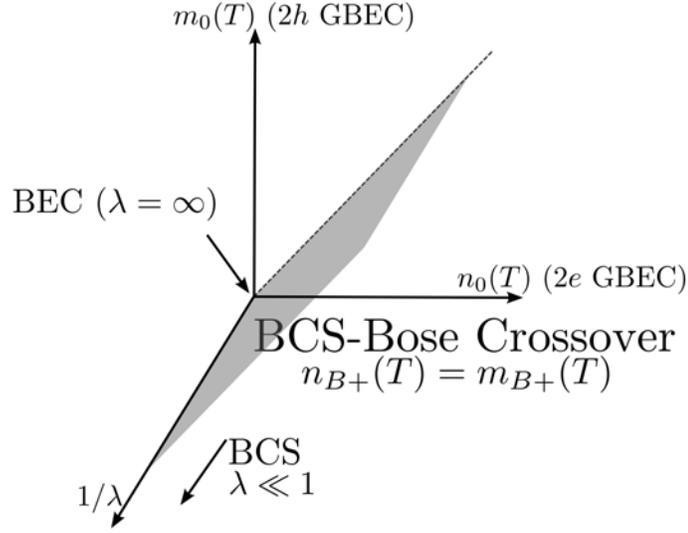


Fig. 3-2: El plano gris donde $m_0(T) = n_0(T)$ es el llamado cruce ó “crossover” BCS-Bose cuando la densidad de número es simétrica con respecto a la densidad de los pares de electrones $n_{B+}(T)$ y la densidad de pares de huecos $m_{B+}(T)$, esta figura esta inspirada en el cubo de Bronstein. Figura tomada de la Ref.[4].

3.3. Caso especial: Teoría de R. Friedberg & T.D. Lee y la BEC ordinaria

Considerando el caso completamente asimétrico ignorando los pares de huecos, dejando $f_-(\epsilon) \equiv 0$ y $m_0(T) = 0$, tenemos que (3-16) queda fuera, dejando solo (3-15) y (3-19)

$$4[E_+(0) - \mu] = f^2 \int_{E_f}^{E_f + \delta\epsilon} d\epsilon N(\epsilon) \frac{1}{E(\epsilon)} \tanh \left[\frac{1}{2} \beta E(\epsilon) \right] \quad (3-29)$$

$$\begin{aligned} n &= 2n_0 + \int_0^\infty d\epsilon N(\epsilon) \left[1 - \frac{\epsilon - \mu}{E(\epsilon)} \tanh \left(\frac{1}{2} \beta E(\epsilon) \right) \right] \\ &+ \int_0^\infty d\epsilon M(\epsilon) [\exp\{\beta \mathcal{E}_+(\epsilon)\} - 1]^{-1} \end{aligned} \quad (3-30)$$

donde

$$\begin{aligned} E(\epsilon) &= \begin{cases} \sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + f^2 n_0} & \text{para } E_f < \epsilon < E_f + \delta\epsilon \\ |\epsilon - \mu| & \text{para otro caso} \end{cases} \\ \mathcal{E}_+(\epsilon) &= \epsilon + 2(E_f - \mu) \end{aligned} \quad (3-31)$$

Las ecuaciones (3-29) y (3-31) son las ecuaciones (4.3) y (4.4) de Friedberg y Lee [76]. Para un sistema no interactuante [81],[128] de bosones-fermiones, es decir, para $f \equiv 0$ y $\mu = E_f$, donde $E(\epsilon) = |\epsilon - E_f|$, $\mathcal{E}(\epsilon) = \epsilon$, al tomar solo una ecuación, es decir (3-30), la cuál queda como

$$n = 2n_0 + \int_0^\infty d\epsilon N(\epsilon) [1 - \tanh(\frac{1}{2}\beta[\epsilon - E_f])] + \int_0^\infty d\epsilon M(\epsilon) [\exp\{\beta\epsilon\} - 1]^{-1} \quad (3-32)$$

esto determina la cantidad $n_0(T)$ que esta relacionada con la fracción del condensado para $0 \leq T \leq T_c$. Si tomamos T_c , justo la fracción del condensado es cero, entonces podemos dejar $n_0(n, T_c) = 0$, entonces para cualquier n obtenemos

$$n = \int_0^\infty d\epsilon N(\epsilon) [1 - \tanh(\frac{1}{2}\beta_c[\epsilon - E_f])] + \int_0^\infty d\epsilon M(\epsilon) [\exp\{\beta_c\epsilon\} - 1]^{-1} \quad (3-33)$$

la primera integral del lado derecho no es más que $n_f(T)$, entonces si adimensionalizamos con E_F y resolviendo la segunda integral obtenemos

$$n - n_f = \frac{\zeta(3/2)}{2\hbar^3} \left(\frac{2mk_B T_c}{\pi} \right)^{3/2} \quad (3-34)$$

Cuando $n \gg n_f$ con n_f la densidad de número de eletrones no apareados, se tiene que de (3-34) resulta

$$T_c \simeq 2.09 \frac{\hbar^2}{2mk_B} n^{2/3}$$

o alternativamente si $n \simeq n_f$

$$\begin{aligned} T_c &\simeq 2.09 \frac{\hbar^2}{2mk_B} (n - n_f)^{2/3} \\ &\simeq 3.31 \frac{\hbar^2}{Mk_B} \left(\frac{N_B}{L^3} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (3-35)$$

la primera aproximación en (3-35) es idéntica con (5.26) en [76] mientras que la segunda es la fórmula conocida BEC para un gas ideal de Bose con masa $M \equiv 2m$ y densidad de partículas $N_B/L^3 \equiv \frac{1}{2}(n - n_f)$.

Para encontrar el límite conocido de BEC de $T_c/T_F \simeq 0.218$ cuando $n_f \rightarrow 0$, podemos dividir a (3.3) entre T_F y usar $E_F = \hbar^2(3\pi^2 n)^{2/3}/2m$ entonces

$$\frac{T_c}{T_F} \simeq \frac{2.09}{2^{2/3}\pi^{4/3}} \left(1 - \frac{n_f}{n} \right)^{2/3} \quad (3-36)$$

entonces si $n_f \rightarrow 0$ tenemos

$$\frac{T_c}{T_F} \simeq \frac{2.09}{2^{2/3}\pi^{4/3}} = 0.2183 \quad (3-37)$$

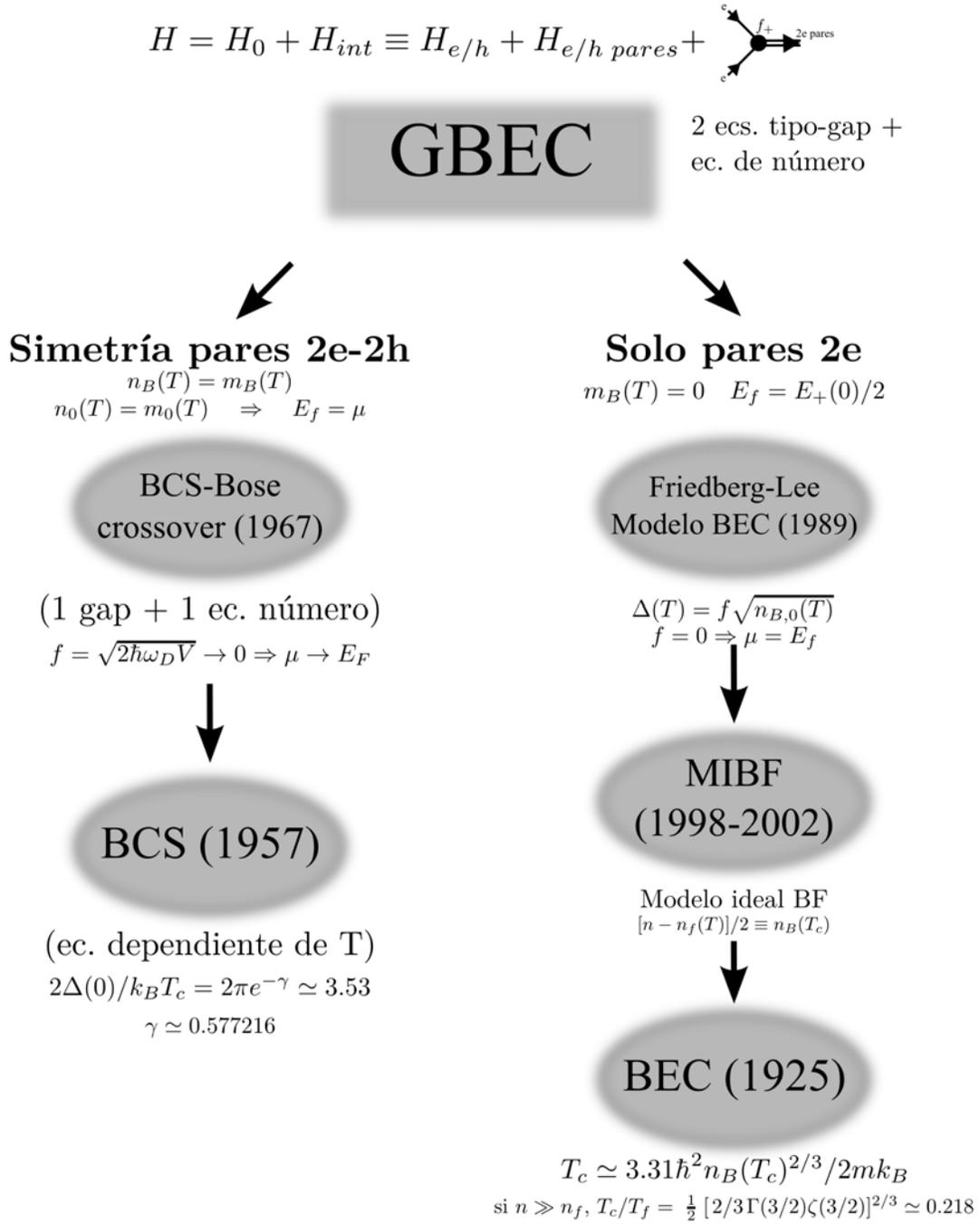


Fig. 3-3: La teoría unificada en el formalismo de la generalización del condensado de Bose-Einstein con el hamiltoniano $H = H_0 + H_{int}$ (3-1) más (3-3), el cuál al diagonalizarse via Bogoliubov-Valatin, se obtienen dos ecuaciones tipo-gap y una ecuación para la densidad de número total (3-19) y que se reduce en casos límite a todo el continuo principal de teorías estadísticas de la superconductividad. Rama izquierda: si se toma una simetría ideal 2e-CP = 2h-CP se tiene el caso llamado “crossover” BCS-Bose (1967) y considerando que la interacción entre los fermiones y bosones $f \rightarrow 0$ se tiene la expresión de BCS (1957). Rama derecha: si consideran solamente los pares 2e-CP se recupera la “BEC” del modelo Friedberg-Lee (1989), si considera un mezcla ideal, es decir, la interacción es cero $f = 0$, se tiene el modelo ideal Bosón-Fermión (1998-2000) y la bien conocida de 1924-25 del condensado de Bose-Einstein ordinario. Figura tomada de la Ref.[129] y reproducida aquí en español.

Capítulo 4

Parámetros experimentales del GBEC

En éste capítulo mostramos los parámetros adimensionales del formalismo GBEC tales como G y $\delta\varepsilon/E_f$. Primeramente supondremos un sistema superconductor con valores dados de G y de $\delta\varepsilon$, conociendo el valor de T_c encontramos el gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c para la fase pura de los $2e$ -CP de GBEC. También encontramos el gap de energía para la fase mixta, esto es cuando el número de $2e$ -CP y $2h$ -CP son el mismo, $n_0(T) = m_0(T)$ y $n_{B^+}(T) = m_{B^+}(T)$. El parámetro de orden que conecta BCS y GBEC no es más que la densidad de número de electrones y de huecos, expresadas como $\Delta \equiv f_- \sqrt{n_0} + f_+ \sqrt{m_0}$. Mediante el diagrama de fases tanto de $2e$ -CP y de $2h$ -CP la temperatura de transición se eleva dramáticamente con respecto de la T_c que predice la teoría BCS.

4.1. Densidad de número para las fases puras $2e$ -CP y $2h$ -CP

De las ecuaciones tipo-gap (3-15) y (3-16) y de la densidad de número (3-17) podemos encontrar el diagrama de fases para los pares de electrones $2e$ -CP así como los pares de huecos $2h$ -CP. Para encontrar la densidad de número n/n_f en función de T_c/T_f para los pares de electrones tomamos solamente (3-15) y (3-17) tomando $m_0(T) = 0$ y $f_+(\epsilon) = 0$. De la ecuación tipo-gap, tomando unidades de E_f en $T/T_c = 1$ tenemos para $2e$ -CP

$$1 + \frac{\delta\varepsilon}{2E_f} - \nu = G \int_1^{1+\delta\varepsilon/E_f} \frac{\sqrt{x} dx}{|x - \nu|} \tanh\left(\frac{x - \nu}{2T_c/T_f}\right) \quad (4-1)$$

de forma análoga para los pares de huecos $2h$ -CP

$$\nu - 1 + \frac{\delta\varepsilon}{2E_f} = G \int_{1-\delta\varepsilon/E_f}^1 \frac{\sqrt{x} dx}{|x - \nu|} \tanh\left(\frac{x - \nu}{2T_c/T_f}\right) \quad (4-2)$$

Ahora bien, la densidad de número en unidades de E_f es

$$\begin{aligned} \frac{n}{n_f} &= \frac{3}{4} \int_0^\infty \sqrt{x} dx \left[1 - \frac{x - \nu}{|x - \nu|} \tanh \left(\frac{|x - \nu|}{2 T_c/T_f} \right) \right] \\ &+ \frac{6}{2^{3/2}} \int_0^\infty \sqrt{y} dy \left[\exp \left(\frac{y + 2 + (\delta\varepsilon/E_f) - 2\nu}{T_c/T_f} \right) - 1 \right]^{-1} \\ &- \frac{6}{2^{3/2}} \int_0^\infty \sqrt{y} dy \left[\exp \left(\frac{y + 2\nu - 2 + (\delta\varepsilon/E_f)}{T_c/T_f} \right) - 1 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4-3)$$

donde $\nu = \mu/E_f$, $x = \epsilon/E_f$, $y = \varepsilon/E_f$ son cantidades adimensionales en unidades de E_f .

Definimos el parámetro adimensional de GBEC

$$G \equiv \frac{f^2 m^{3/2}}{2^{5/2} \pi^2 \hbar^3 E_f^{1/2}} \quad (4-4)$$

puesto que encontramos que f esta relacionado con el parámetro de acoplamiento adimensional λ , G es simplemente la intensidad de interacción entre electrones para formar los $2e$ - $2h$ -CP y resulta de adimensionalizar las ecuaciones tipo-gap y la densidad de número. Como unidad de energía usamos E_f como aparece en (3-7), la unidad de temperatura es $T_f = E_f/k_B$. La unidad que usaremos en la densidad de número es la cantidad $n_f = (2mE_f)^{3/2}/2\pi^2\hbar^3$ que es el número de electrones no-apareados en $T = 0$, esta cantidad se recupera de la expresión (3-18). Para la densidad de número de los pares condensados usamos unidades de $n_{f0} = m_{f0} \equiv E_f/f^2$. Para transformar a E_F y T_F , podemos usar la útil relación

$$\frac{n}{n_f} = \left(\frac{E_F}{E_f} \right)^{3/2}$$

Puesto que podemos conocer la constante de acoplamiento adimensional electrón-fonón λ podemos encontrar la intensidad de interacción G . Con estas cantidades podemos encontrar la densidad de número en función de la temperatura para las fases puras $2e$ -CP y $2h$ -CP, resolvemos simultáneamente (4-1) con (4-3) y (4-2) con (4-3), respectivamente. Usando los valores de $G = 0.0001 \Rightarrow \lambda = 1/5$ y $\delta e = 0.001$, donde $\delta\varepsilon/E_f \equiv \delta e$ obtenemos la figura 4-1.

En la Fig. (4-1) en este sistema tenemos electrones no-apareados y pares de $2e$ -CP, $2h$ -CP excitados. Si descendemos la temperatura nos encontramos primeramente con una fase pura de huecos condensados m_0 , es decir nuestro sistema esta compuesto de

$$n(T) = n_f(T) + n_{B^+}(T) - m_0(T) - m_{B^+}(T)$$

esta curva en la figura corresponde al $2h$ -GBEC, donde $n_0(T_c) = 0$, en esta fase hay pares de electrones excitados pero la temperatura no es suficiente para condensar estos pares. Si seguimos

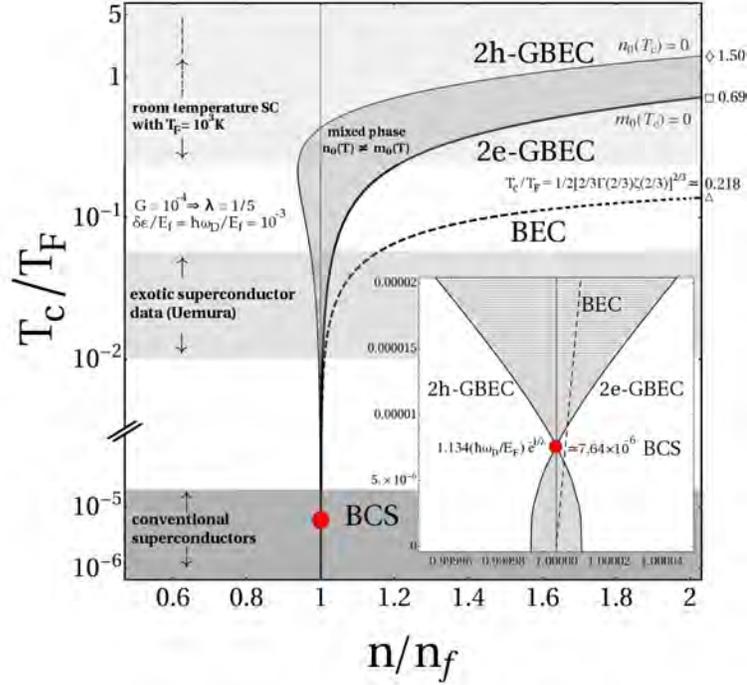


Fig. 4-1: Se muestra la densidad de número n/n_f en función de T_c/T_F para las fases puras $2e$ -CP, $2h$ -CP del GBEC y la BEC ordinaria en $3D$. Se observan tres franjas principales las cuales son de menor a mayor temperatura, la región de los superconductores convenciones (BCS), la región de los superconductores exóticos (Uemura [130]) y la región de temperatura ambiente del orden de temperaturas de T_F . En el recuadro se muestra el cruce entre ambas cuando $n/n_f = 1$ esto implica $T_c/T_F = 7.64 \times 10^{-6}$, el cuál es el mismo para la densidad de número para BCS, se usan los valores $G = 0.0001 \Rightarrow \lambda = 1/5$ y $\delta\varepsilon/E_f = \hbar\omega_D/E_f = 0.001$. Los símbolos de la derecha marcan el límite de T_c/T_F cuando $n/n_f \rightarrow \infty$ o bien cuando $n_f \rightarrow 0$ tanto para las fases puras de $2e$ -GBEC (\square) para $2h$ -GBEC (\diamond) y para la BEC ordinario (\triangle).

bajando la temperatura nos encontramos con una fase mixta en la cuál ya aparecen los $2e$ -CP condensados, en esta región tenemos cantidades arbitrarias tanto de $2h$ -CP como de $2e$ -CP, es decir, nuestro sistema es

$$n(T) = n_f(T) + n_0(T) + n_{B^+}(T) - m_0(T) - m_{B^+}(T)$$

esta fase corresponde a la zona sombreada entre las cruvas $2h$ -GBEC y $2e$ -GBEC con una cantidad arbitraria de $n_0(T) \neq m_0(T)$, además de tener $n_{B^+}(T) \neq m_{B^+}(T)$. Continuando nuestro descenso en la temperatura nos encontramos con la fase pura de pares de electrones condensados $n_0(T)$, es decir, nuestro sistema esta compuesto de

$$n(T) = n_f(T) + n_0(T) + n_{B^+}(T) - m_{B^+}(T)$$

esta curva en la figura corresponde al $2e$ -GBEC, donde $m_0(T_c) = 0$, por debajo de esta T_c aunque hay huecos excitados, ya no hay pares de huecos condensados. A una temperatura menor que las anteriores se encuentra la curva de la densidad de número de la BEC ordinaria (3-35) en esta curva las interacciones han cesado y se tiene un gas ideal de bosones. Se tiene que para la BEC el límite conocido de $T_c/T_F \rightarrow 0.218$ cuando $n/n_f \rightarrow \infty$, es decir, cuando todos los electrones se han apareado $n_f(T) \rightarrow 0$.

Mientras que el límite para el $2e$ -CP del GBEC es $T_c/T_F \rightarrow 0.698$ y para $2h$ -CP del GBEC es $T_c/T_F \rightarrow 1.507$. El apareamiento de los pares $2h$ ocurre justo por arriba de E_f , debido a que se tiene una menor energía para la estabilidad en la formación de los pares de huecos, mientras que la menor energía de apareamiento para los pares de electrones ocurre justo por debajo de E_f , es así que el valor límite donde todos los huecos están apareados $n_f \rightarrow 0$ este por arriba de T_F dada una T_c .

En el recuadro de la figura 4-1 se puede observar un punto de cruce en el cuál la densidad de número de $2e$ -CP y $2h$ -CP es la misma, es decir, se tiene la misma cantidad de $n_0(T) = m_0(T)$ y de $n_{B+}(T) = m_{B+}(T)$, ésta corresponde a la predicción por parte de la teoría BCS con el valor bien conocido de $T_c/T_F = 7.64 \times 10^{-6}$ para los valores de $\lambda = 0.2$ y $\hbar\omega_D/E_f = 0.001$. Por debajo de este punto se observa nuevamente una fase arbitraria entre $n_0(T)$ y $m_0(T)$ y análogamente para los pares excitados $m_{B+}(T) = n_{B+}(T)$, en la cuál también se tiene una fase de superconductividad, es en esta región donde se centrará el estudio del gap de energía que a continuación se presenta.

4.2. El gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ de $2e$ -CP

El resultado principal de esta trabajo es el gap de energía electrónico $\Delta(T)/\Delta(0)$ el cuál esta directamente relacionado con los pares de Cooper tanto de $2e$ como de $2h$. Esta brecha como se le conoce en la literatura se ha podido medir experimentalmente para la mayoría de los superconductores convencionales. En este trabajo nos centraremos en el gap de energía para la fase pura $2e$ -CP y de la fase mixta con simetría ideal $n_0 = m_0$ con $n_{B+} = m_{B+}$, se dejará para otro trabajo el gap de la fase pura $2h$ -CP.

Partimos de la ecuación tipo-gap para los pares de electrones $2e$ -CP que es (3-15), de tal forma que si $m_0(T) = 0$ entonces la ecuación de la densidad de número para el sistema $2e$ -CP es

$$\begin{aligned}
n &= 2n_0 + \int_0^\infty d\epsilon N(\epsilon) \left[1 - \frac{\epsilon - \mu}{E(\epsilon)} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta E(\epsilon)\right) \right] \\
&+ \int_0^\infty d\epsilon M(\epsilon) [\exp(\beta \mathcal{E}_+(\epsilon)) - 1]^{-1} \\
&- \int_0^\infty d\epsilon M(\epsilon) [\exp(\beta \mathcal{E}_-(\epsilon)) - 1]^{-1}
\end{aligned} \tag{4-5}$$

donde el potencial químico $\mu(T)$ es el mismo para todo el sistema. Nuevamente, usando unidades de E_f para el sistema obtenemos para la ecuación tipo-gap

$$1 + \frac{\delta\varepsilon}{2E_f} - \nu = G \int_{E_f}^{1+\delta\varepsilon/E_f} \sqrt{x} dx \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\nu)^2 + \frac{f^2 n_0}{E_f^2}}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(x-\nu)^2 + \frac{f^2 n_0}{E_f^2}}}{2T/T_f} \right) \right] \quad (4-6)$$

y para la densidad de número

$$\begin{aligned} \frac{n}{n_f} &= \frac{3}{8G} \frac{n_0}{n_{f0}} + \frac{3}{4} \int_0^1 \sqrt{x} dx \left[1 - \frac{x-\nu}{|x-\nu|} \right] \tanh \left(\frac{|x-\nu|}{2T/T_f} \right) \\ &+ \frac{3}{4} \int_1^{1+\delta\varepsilon/E_f} \sqrt{x} dx \left[1 - \frac{x-\nu}{\sqrt{(x-\nu)^2 + \frac{f^2 n_0}{E_f^2}}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(x-\nu)^2 + \frac{f^2 n_0}{E_f^2}}}{2T/T_f} \right) \right] \\ &+ \frac{3}{4} \int_{1+\delta\varepsilon/E_f}^{\infty} \sqrt{x} dx \left[1 - \frac{x-\nu}{|x-\nu|} \right] \tanh \left(\frac{|x-\nu|}{2T/T_f} \right) \\ &+ \frac{6}{2^{3/2}} \int_0^{\infty} \sqrt{y} dy \left[\exp \left(\frac{y+2-2\nu+(\delta\varepsilon/E_f)}{T/T_f} \right) - 1 \right]^{-1} \\ &- \frac{6}{2^{3/2}} \int_0^{\infty} \sqrt{y} dy \left[\exp \left(\frac{y-2+2\nu+(\delta\varepsilon/E_f)}{T/T_f} \right) - 1 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4-7)$$

donde $n_{f0} = E_f^2/f^2$, $\nu = \mu/E_f$, $x = \epsilon/E_f$, $y = \varepsilon/E_f$, y además $\tilde{\Delta}^2 = n_0/n_{f0}$. Usando unidades de T/T_c obtenemos la ecuación tipo-gap para los 2e-CP

$$1 + \frac{\delta e}{2} - \nu = G \int_1^{1+\delta e} \sqrt{x} dx \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\nu)^2 + \tilde{\Delta}^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(x-\nu)^2 + \tilde{\Delta}^2}}{2tT/T_c} \right) \right] \quad (4-8)$$

y la densidad de número total para la fase pura de pares de 2e-CP es

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n_f} &= \frac{3}{8G} \tilde{\Delta}^2 + \frac{3}{4} \int_0^1 \sqrt{x} dx \left[1 - \frac{x - \nu}{|x - \nu|} \right] \tanh \left(\frac{|x - \nu|}{2t T/T_c} \right) \\
&+ \frac{3}{4} \int_1^{1+\delta e} \sqrt{x} dx \left[1 - \frac{x - \nu}{\sqrt{(x - \nu)^2 + \tilde{\Delta}^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(x - \nu)^2 + \tilde{\Delta}^2}}{2t T/T_c} \right) \right] \\
&+ \frac{3}{4} \int_{1+\delta e}^{\infty} \sqrt{x} dx \left[1 - \frac{x - \nu}{|x - \nu|} \right] \tanh \left(\frac{|x - \nu|}{2t T/T_c} \right) \\
&+ \frac{6}{2^{3/2}} \int_0^{\infty} \sqrt{y} dy \left[\exp \left(\frac{y + 2 - 2\nu + \delta e}{t T/T_c} \right) - 1 \right]^{-1} \\
&- \frac{6}{2^{3/2}} \int_0^{\infty} \sqrt{y} dy \left[\exp \left(\frac{y - 2 + 2\nu + \delta e}{t T/T_c} \right) - 1 \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{4-9}$$

donde $\delta e = \delta\varepsilon/E_f$, $t = T_c/T_F = 7.64 \times 10^{-6}$ cuando $n/n_f = 1$. Encontrando la solución de (4-8) con (4-9) para $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c , obtenemos los valores numéricos en la tabla 4-1 con los valores de $G = 0.0001 \Rightarrow \lambda = 1/5$ y $\delta\varepsilon/E_f = \hbar\omega_D = 0.001$ para la fase pura 2e-CP del GBEC comparados con BCS experimental [131], cuando $n/n_f = 1$. Gráficamente podemos observarlo en la fig 4-2.

La relación entre el gap de energía $\Delta(0)$ y la T_c para este sistema superconductor suponiendo las cantidades $G = 10^{-4}$ y $\delta e = 10^{-3}$ para la fase pura 2e-CP del GBEC es $2\Delta(0)/k_B T_c = 2.42$, mientras que esta misma relación en la teoría BCS es $2\Delta(0)/k_B T_c = 3.53$.

T/T_c	$\Delta(T)/\Delta(0)$	BCS [131]
0.1	1.0000	1.0000
0.2	0.9994	0.9990
0.3	0.9919	0.9971
0.4	0.9694	0.9850
0.5	0.9268	0.9569
0.6	0.8605	0.9070
0.7	0.7660	0.8288
0.8	0.6353	0.7110
0.9	0.4462	0.5263
1	0	0

Tabla 4-1: Solución numérica de (4-8) y (4-9). Se muestran los valores numéricos de $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c para la fase pura de 2e-CP, usando los valores de $G = 0.0001 \Rightarrow \lambda = 1/5$ y $\delta\varepsilon/E_f = 0.001$ comparados con BCS experimental ver Ref.[131].

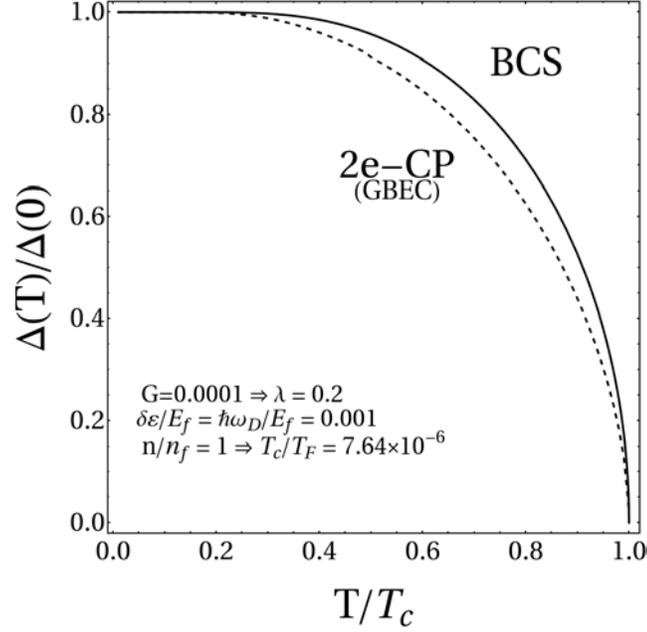


Fig. 4-2: El gap de energía para la fase pura 2e-CP de GBEC (curva punteada), $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c , resolviendo numéricamente (4-8) y (4-9), se puede observar el comportamiento bien conocido de media campana, para la densidad de número $n/n_F = 1$. Obteniendo $2\Delta(0)/k_B T_c = 2.42$. La curva continua es BCS.

4.3. El gap de energía de la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$

Podemos encontrar el gap de energía para la fase mixta, esto es cuando $n_0(T) = m_0(T)$ y $n_{B+}(T) = m_{B+}(T)$, es decir, tenemos la misma cantidad de pares de electrones 2e-CP que pares de huecos 2h-CP y la misma cantidad de pares de electrones excitados que de pares de huecos excitados. De las ecuaciones (3-15) y (3-16) observamos que son idénticas y pueden resolverse exactamente. Si introducimos la simetría “ideal” lo cuál hace BCS en la vecindad $\epsilon \simeq \mu$, y renombrando $\xi \equiv \epsilon - \mu$ entonces la ecuación tipo gap se vuelve

$$1 = \frac{f^2 N(\mu)}{2\delta\epsilon} \int_{-\delta\epsilon}^{\delta\epsilon} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2k_B T}\right) \quad (4-10)$$

mientras que la densidad de número (3-17) se vuelve

$$\begin{aligned} n &= \int_0^{\mu-\delta\epsilon} N(\epsilon) d\epsilon \left[1 - \tanh\left(\frac{|\epsilon - \mu|}{2k_B T}\right) \right] \\ &+ \int_{\mu+\delta\epsilon}^{\infty} N(\epsilon) d\epsilon \left[1 - \tanh\left(\frac{|\epsilon - \mu|}{2k_B T}\right) \right] \\ &+ N(\mu) \int_{-\delta\epsilon}^{\delta\epsilon} d\xi \left[1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2k_B T}\right) \right] \end{aligned} \quad (4-11)$$

usando unidades de E_f y T/T_c , tenemos que la ecuación tipo-gap para la fase mixta es

$$1 = \frac{G}{\delta e} \int_{-\delta e}^{\delta e} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2tT/T_c}\right) \quad (4-12)$$

donde $t = T_c/T_F = 7.64 \times 10^{-6}$ en $n/n_f = 1$. Resolviendo numéricamente (4-12) podemos comparar con la fase pura 2e-CP de GBEC, obteniendo la figura 4-3.

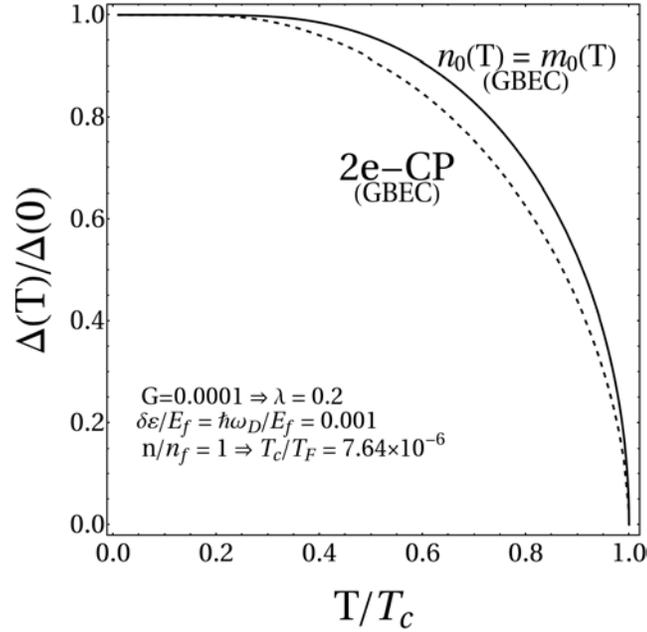


Fig. 4-3: Se muestra el gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c para la fase pura de 2e-CP del GBEC (línea a puntos) solución de (4-8) y (4-9), y la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$ solución de (4-12) del GBEC (línea continua). Ambas curvas con $n/n_f = 1$, y los valores $G = 0.0001$, $\delta\varepsilon/E_f = 0.001$.

Nuevamente podemos identificar las cantidades adimensionales del formalismo GBEC tales como la intensidad de interacción G con el parámetro de acomplamiento adimensional λ de la forma

$$\lambda = \frac{2G}{\delta e} \quad (4-13)$$

y la energía de Debye de la red iónica con el cascarón de energía de interacción de los bosones 2e-CP y 2h-CP de la forma $\hbar\omega_D = \delta\varepsilon$. En la figura (4-3) podemos notar que la curva de la fase mixta con simetría ideal $n_0(T) = m_0(T)$ y $n_{B^+}(T) = m_{B^+}(T)$ coincide con la curva de la teoría BCS, mientras que la fase pura de 2e-CP está ligeramente por debajo.

4.4. El Gap de energía $\Delta(T)$ de $2e$ -CP para $n/n_f \neq 1$

El gap de energía electrónico antes calculado en la Tabla 4-1 es para un sistema superconductor que suponemos tiene las cantidades adimensionales tales como la intensidad de interacción $G = 0.0001$ que nos conduce a una $\lambda = 1/5$, así como $\delta\varepsilon/E_f = \hbar\omega_D/E_f = 0.001$ y con una densidad de número adimensional en la unidad, $n/n_f = 1$, esta cantidad da cuenta del número total de partículas entre la cantidad de electrones no apareados. Esta cantidad puede cambiar arbitrariamente tanto para las fases puras $2e$ - $2h$ -CP así como para la fase mixta, en esta última la cantidades son diferentes una de otra con $n_0 \neq m_0$. El interés de cambiar arbitrariamente la densidad de número es encontrar una T_c/T_F mayor o menor si aumentamos o disminuimos, respectivamente n/n_f .

También podemos encontrar el cambio del gap de energía electrónico $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de la temperatura T/T_c de la fase pura $2e$ -CP si cambiamos la densidad de número por debajo de la unidad $n/n_f = 1$, hemos ignorado de inicio la contribución de los $2h$ -CP, es decir, $m_0(T_c) = 0$.

Usando la transformación $n/n_f = (E_F/E_f)^{2/3}$ podemos transformar las expresiones para el gap de energía de $2e$ -CP de GBEC obteniendo para los pares de electrones, la ecuación tipo gap

$$\left(\frac{n}{n_f}\right)^{1/3} + \frac{n}{n_f} \left(\frac{\delta e}{2} - \nu\right) = G \int_1^{1+\delta e(n/n_f)^{2/3}} \sqrt{x} dx \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\nu)^2 + \tilde{\Delta}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{(x-\nu)^2 + \tilde{\Delta}^2}}{2tT/T_c}\right) \right] \quad (4-14)$$

y para la densidad de número tenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{3}{8G} \tilde{\Delta}^2 \left(\frac{n}{n_f}\right)^{1/3} + \frac{3}{4} \int_0^1 \sqrt{x} dx \left[1 - \frac{x-\nu}{|x-\nu|} \tanh\left(\frac{|x-\nu|}{2tT/T_c}\right) \right] \\ &+ \frac{3}{4} \int_1^{1+\delta e(n/n_f)^{2/3}} \sqrt{x} dx \left[1 - \frac{x-\nu}{\sqrt{(x-\nu)^2 + \tilde{\Delta}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{(x-\nu)^2 + \tilde{\Delta}^2}}{2tT/T_c}\right) \right] \\ &+ \frac{3}{4} \int_{1+\delta e(n/n_f)^{2/3}}^{\infty} \sqrt{x} dx \left[1 - \frac{x-\nu}{|x-\nu|} \tanh\left(\frac{|x-\nu|}{2tT/T_c}\right) \right] \\ &+ \frac{6}{2^{3/2}} \int_0^{\infty} \sqrt{y} dy \left[\exp\left(\frac{2(n/n_f)^{-2/3} + y - 2\nu + \delta e}{tT/T_c}\right) - 1 \right]^{-1} \\ &- \frac{6}{2^{3/2}} \int_0^{\infty} \sqrt{y} dy \left[\exp\left(\frac{-2(n/n_f)^{-2/3} + y + 2\nu + \delta e}{tT/T_c}\right) - 1 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4-15)$$

donde $t = T_c/T_F$ es el nuevo valor que depende del cambio en n/n_f . Podemos observar que si dejamos a $n/n_f = 1$ recuperamos las expresiones (4-8) y (4-9). Usando estas expresiones podemos variar la densidad de número entre $0.9999991 < n/n_f < 1$, ver el recuadro de la Fig. 4-

1, entre la densidad de número de $2e$ -CP de GBEC y la BEC misma. Resolviendo numéricamente las últimas dos ecuaciones (4-14) y (4-15), encontramos los valores en la Tabla 4-2. Gráficamente lo observamos en la figura 4-4.

T/T_c	$\Delta(T)/\Delta(0)$			
	2e-CP GBEC		Tolmachev [1]	Mühschlege [131]
	$n/n_f = 0.9999999$	$n/n_f = 1$	$n/n_f = 0.9986$	BCS
0.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.2	0.9993	0.9994	0.9999	0.9999
0.3	0.9920	0.9919	0.9971	0.9971
0.4	0.9698	0.9694	0.9849	0.9850
0.5	0.9278	0.9268	0.9567	0.9569
0.6	0.8623	0.8605	0.9067	0.9070
0.7	0.7689	0.7660	0.8284	0.8288
0.8	0.6396	0.6353	0.7106	0.7110
0.9	0.4541	0.4462	0.5259	0.5263
1	0.0806	0	0	0

Tabla 4-2: Solución numérica de (4-14) y (4-15) para $2e$ -CP del GBEC para el gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c . Se muestran los valores numéricos de varias densidades de número entre $0.9999991 < n/n_f < 1$ que corresponde a la densidad de número entre los $2e$ -CP del GBEC y la BEC ordinaria. En la tercera columna se muestran los valores del gap de energía de acuerdo a la Ref.[1], en la cuarta columna para los valores encontrados en la Ref.[131] para BCS. Para $2e$ -CP del GBEC se usan los valores de $G = 0.0001$ y $\delta\varepsilon/E_f = 0.001$. En la primera columna se muestra la aproximación a la fase mixta de GBEC cambiando al densidad de número con un valor de $n/n_f = 0.9999999$.

Podemos observar de la tabla 4-2 que al variar la densidad de número n/n_f ligeramente por debajo de la unidad, los valores numéricos se acercan o alejan de la predicción BCS. Esto sugiere que se *puede ajustar* las curvas de $2e$ -CP del GBEC a los datos experimentales o bien a la curva teórica de BCS. Al variar la densidad de número por debajo de la unidad, estamos cambiando arbitrariamente el número de electrones no-apareados con respecto al número total de partículas y por tanto el número de pares de electrones condensados. Si tomamos $n/n_f \neq 1$ estamos cambiando T_c/T_F en el diagrama de fases, es decir, podemos encontrar que para una densidad de número dada hay una temperatura de transición T_c/T_F diferente. En particular hemos calculado que cuando $n/n_f = 1$ y tomando la simetría ideal entre pares de electrones y pares de huecos condensados $n_0(T) = m_0(T)$ y además $n_{B+}(T) = m_{B+}(T)$, obtenemos $T_c/T_F = 7.64 \times 10^{-6}$ que corresponde con la teoría BCS.

Por ejemplo, si cambiamos a una densidad de número por debajo de la unidad, $n/n_f = 0.9999999$ tendremos que de acuerdo al diagrama de fases de la Fig. 4-1 una $T_c/T_F = 7.60 \times 10^{-6}$ (ver el recuadro). Pero al variar la densidad de número para la fase pura $2e$ -CP también se ha cambiado la fase pura de $2h$ -CP obteniendo como consecuencia para la misma densidad de número una T_c/T_F más alta, incluso que BCS dando los valores de $T_c/T_F = 7.67 \times 10^{-6}$ con la relación $2\Delta(0)/k_B T_c = 2.37$ y una $T_c/T_F = 0.433$. De esta forma se puede hacer un mapa para

el cuál una densidad de número pueda predecir una T_c más alta.

El caso que nos ocupa $2e$ -CP, es cuando la densidad de número total corresponde al sistema

$$n = n_f(T) + 2n_0(T) + 2n_{B^+}(T) - 2m_{B^+}(T)$$

Las curvas que se presentan en la Fig. 4-4 se consideran además de los $2e$ -CP condensados $n_0(T)$, los pares excitados o como también se les conoce pares “pre-formados” $n_{B^+}(T)$, como también a los $2h$ -CP excitados $m_{B^+}(T)$, con este sistema se pretende construir el gap de energía electrónico para algunos superconductores convencionales, es decir, cuya temperatura de transición están cercanamente a BCS de acuerdo a la Fig. 4-1.

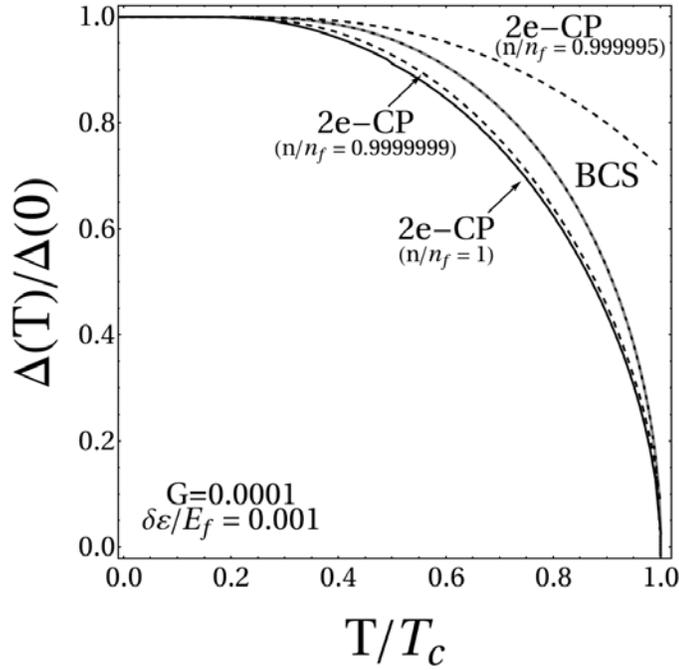


Fig. 4-4: El gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c , para la fase pura $2e$ -CP del GBEC, la fase mixta con simetría ideal de GBEC (curva gris) y BCS (curva a puntos). Resolviendo numéricamente (4-14) con (4-15), para densidades de número entre $0.999995 < n/n_f < 1$. Se observa el comportamiento bien conocido de media campana para las fases $2e$ -CP con densidad de número $n/n_f = 1$ y BCS. Se observa que cuando la densidad de número disminuye se puede ajustar a la curva $2e$ -CP de GBEC con BCS, que coincide con la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$ (curva gris), cuando la densidad de número es la unidad. Se usan los valores $G = 0.0001$ y $\delta\varepsilon/E_f = 0.001$.

4.5. El gap de energía para el Hg

A manera de ilustrar el procedimiento que usaremos al comparar el formalismo GBEC con datos experimentales, usaremos como ejemplo el primer elemento superconductor que se descubrió, el mercurio (Hg). Usaremos la fase pura de $2e$ -CP y la fase mixta cuando $2e$ -CP = $2h$ -CP de GBEC para construir el gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de la temperatura absoluta en unidades de T_c . El Hg tiene una transición a la fase superconductor hacia $T_c = 4.15$ K es un SC del tipo I. Para encontrar el gap de energía de Hg, necesitamos los parámetros adimensionales de la intensidad de interacción G y el cascarón de energía adimensional $\delta\varepsilon$ definidos en (4-4). Para determinar los parámetros adimensionales del GBEC con los experimentales de los materiales superconductores necesitamos conocer la energía de Fermi E_F ó la temperatura de Fermi T_F y la temperatura de Debye, Θ_D .

Una vez determinada la constante de acoplamiento adimensional haciendo uso de la ecuación del gap de energía de BCS (2-17) en $T = 0$, obtenemos para el mercurio una $\lambda_{Hg} = 0.314$. Para el Hg tenemos que $T_c = 4.15$ K, $\Theta_D = 88$ K [10], $E_F = 7.13$ eV, $T_F = 8.29 \times 10^4$ K [132], de esta forma encontramos que $\delta\varepsilon/E_F = 0.00106$ y conociendo $\lambda_{Hg} = 0.314 \Rightarrow G = 0.00016$.

Entonces, resolviendo (4-8) con (4-9) obtenemos los valores numéricos mostrados en la tabla 4-3 comparados con la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$ cuya solución numérica es idéntica a BCS.

T/T_c	$\Delta(T)/\Delta(0)$	
	$2e$ -CP	fase mixta
0.1	1.0000	1.0000
0.2	0.9988	1.0000
0.3	0.9891	0.9988
0.4	0.9623	0.9868
0.5	0.9155	0.9582
0.6	0.8452	0.9088
0.7	0.7480	0.8294
0.8	0.6168	0.7127
0.9	0.4321	0.5247
1	0.0449	0

Tabla 4-3: Se muestran los valores numéricos de $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c para la fase de $2e$ -CP del GBEC y la fase mixta la cuál es idéntica a la teoría BCS del Hg. De la solución numérica de (4-8) y (4-9) usando los valores de $G = 0.00016$ y $\delta\varepsilon/E_f = 0.00106$.

En la figura 4-5 podemos apreciar el comportamiento de acuerdo a la fase mixta y la fase de $2e$ -CP del GBEC para el Hg, obteniendo $2\Delta(0)/k_B T_c = 2.13$ para $2e$ -CP, contrastada con aquélla de BCS que es $2\Delta(0)/k_B T_c = 3.53$.

Los pares de huecos condensados $m_0(T)$ juegan un papel importante en el gap de energía de

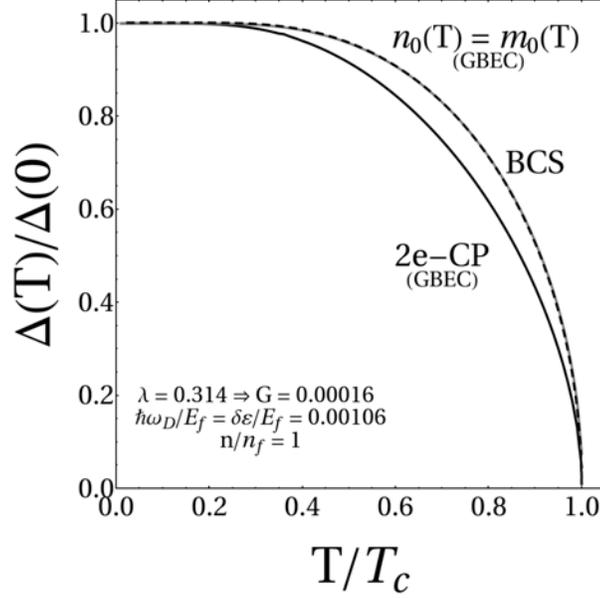


Fig. 4-5: Se muestra el gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c para el $2e$ -CP (curva continua), la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$ (curva gris) del GBEC y BCS (curva a rayas) para el Hg. Las curvas asociadas a GBEC están calculadas con $G = 0.00016$ y $\delta\varepsilon/E_f = 0.00106$ cuando $n/n_f = 1$, con la razón $2\Delta(0)/k_B T_c = 2.13$. La curva $2e$ -CP describe un gas ternario bosón-fermión de electrones, pares de electrones $2e$ -CP y pares de huecos $2h$ -CP.

un superconductor, aunque permanecen los $2h$ -CP excitados $2m_{B^+}(T)$ en GBEC, la ausencia de los pares de huecos condensados $m_0(T)$ influye en el $\Delta(T)/\Delta(0)$, disminuyendo con respecto a la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$ que considera una simetría ideal entre ambos portadores de carga y que es idéntica con BCS. La curva $2e$ -CP en la fig. 4-5 describe un gas ternario fermión-bosón, es decir, están los fermiones no apareados (electrones-huecos) los pares de electrones tipo-pares de Cooper, así como pares de huecos tipo-pares de Cooper excitados.

[7] y resolviendo numéricamente (4-8) y (4-9) y la expresión (4-12), obtenemos las curvas de la fase pura $2e$ -CP y la fase mixta de GBEC, respectivamente. Estas curvas se muestran en la Fig. 4-7.

Como segundo ejemplo, el sistema superconductor In, tenemos una $T_c = 3.4$ K, $\Theta_D = 108$ K [10], $E_F = 8.63$ eV y $T_F = 10 \times 10^4$ K [132], usando la expresión BCS del gap de energía cuando $T = 0$ (2-18) obtenemos $\lambda_{\text{In}} = 0.28 \Rightarrow G = 0.00015$ y $\delta\varepsilon/E_f = 0.001$. Usando los datos experimentales del gap de energía obtenidos por tunelaje electrónico [7] y resolviendo numéricamente (4-8) y (4-9) y la expresión (4-12), obtenemos las curvas $2e$ -CP y la fase mixta del formalismo GBEC, respectivamente. Estas curvas se muestran en la fig. 4-8.

Como último ejemplo el sistema superconductor Pb, tenemos que $T_c = 7.12$ K, $\Theta_D = 96$ K [10], $E_F = 9.47$ eV y $T_F = 11 \times 10^4$ K [132], usando la expresión BCS del gap de energía cuando $T = 0$ (2-18) obtenemos $\lambda_{\text{Pb}} = 0.36 \Rightarrow G = 0.00016$ y $\delta\varepsilon/E_f = 0.00087$. Usando los datos experimentales del gap de energía obtenidos por tunelaje electrónico [7] y resolviendo numéricamente (4-8) y (4-9) y la expresión (4-12), obtenemos las curvas $2e$ -CP y la fase mixta del formalismo GBEC, respectivamente. Estas curvas se muestran en la fig. 4-9.

Podemos observar en las figuras del gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ para los diferentes materiales superconductores que son Sn, In y Pb que la curva de la fase mixta, coincide con la predicción teórica BCS, es decir, BCS es un formalismo que incluye además de pares de electrones, pares de huecos. Se observa que los $2h$ -CP juegan un papel importante en el gap de energía de los superconductores pues la ausencia de los huecos condensados, es decir, $m_0(T) = 0$ provoca que el gap de energía disminuya con respecto de la curva de la fase mixta.

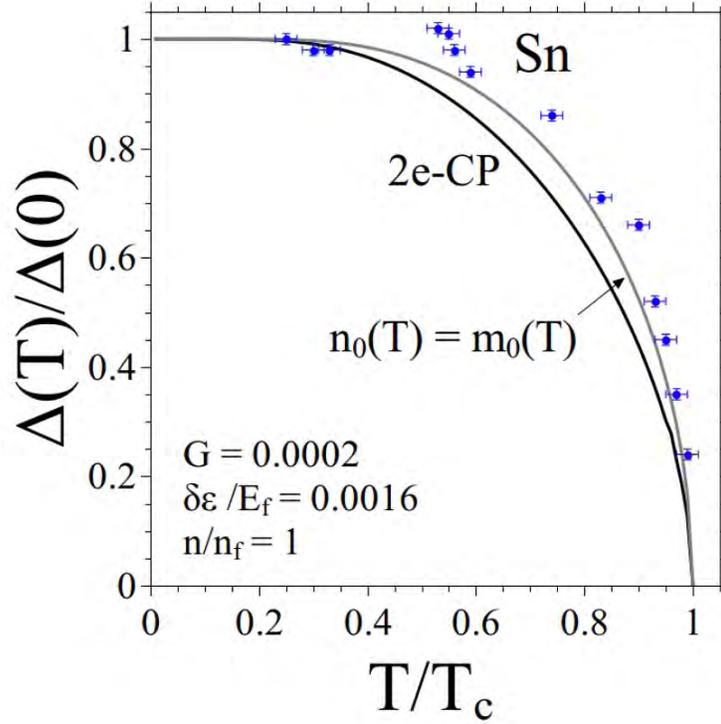


Fig. 4-7: Se muestra el gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c para el 2e-CP (curva negra), la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$ del GBEC (curva gris) y los puntos experimentales para el Sn. La solución numérica de las curvas 2e-CP y la fase mixta con densidad de número de $n/n_f = 1$, la intensidad de interacción del Sn de GBEC es $G = 0.0002$ con la energía adimensional $\delta\varepsilon/E_f = 0.0016$ asociada con la energía de Debye. La curva 2e-CP describe un sistema ternario de bosones-fermiones para el sistema superconductor Sn, en el cuál hay electrones, pares de electrones condensados $2n_0(T)$ y pares de huecos excitados $2m_{B^+}(T)$.

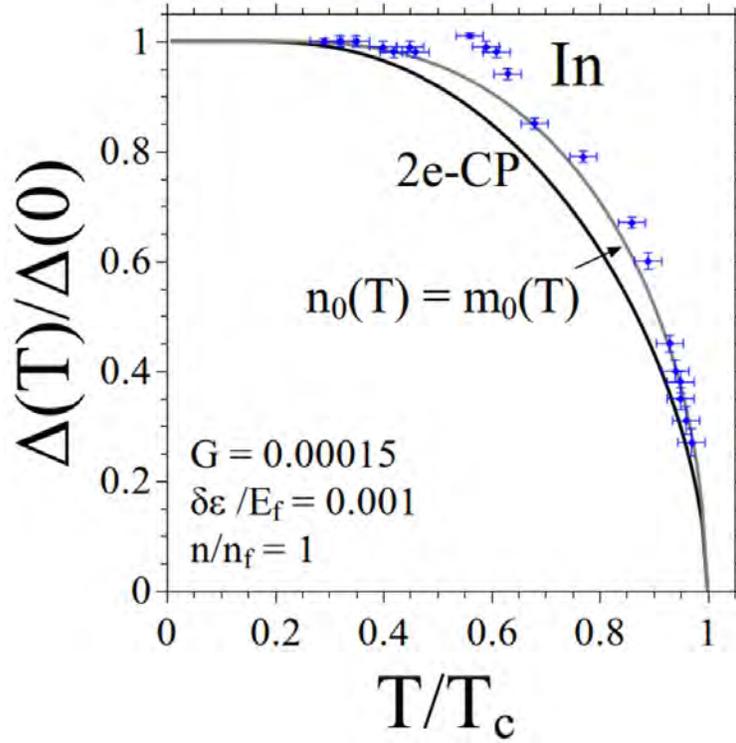


Fig. 4-8: Se muestra el gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c para el 2e-CP del GBEC (curva negra), la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$ del GBEC (curva gris) y los puntos experimentales para el In. La solución numérica de las curvas 2e-CP y de la fase mixta del GBEC con densidad de número de $n/n_f = 1$ la intensidad de interacción de GBEC es $G = 0.00015$ y la energía adimensional $\delta\varepsilon/E_f = 0.001$ asociada con la energía de Debye. La curva 2e-CP describe un sistema ternario de bosones-fermiones para el sistema superconductor In, en el cuál hay electrones-huecos, pares de electrones condensados $2n_0(T)$ y pares de huecos excitados $2m_{B^+}(T)$.

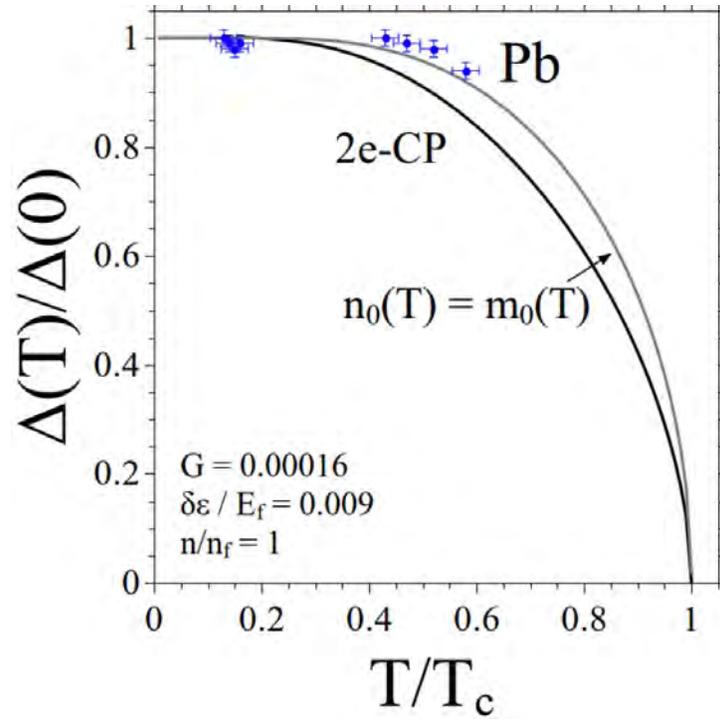


Fig. 4-9: Se muestra el gap de energía $\Delta(T)/\Delta(0)$ en función de T/T_c para el 2e-CP del GBEC (curva negra), la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$ del GBEC (curva gris) y los puntos experimentales para el Pb. La solución numérica de las curvas 2e-CP y de la fase mixta del GBEC con densidad de número de $n/n_F = 1$ la intensidad de interacción de GBEC es $G = 0.00016$ y la energía adimensional $\delta\varepsilon/E_f = 0.00087$ asociada con la energía de Debye. La curva 2e-CP describe un sistema ternario de bosones-fermiones para el sistema superconductor Pb, en el cuál hay electrones-huecos, pares de electrones condensados $2n_0(T)$ y pares de huecos excitados $2m_{B^+}(T)$.

Capítulo 5

Conclusiones

El sistema SC que se presenta en la figura 4-1 con la densidad de número n/n_f en función de la temperatura T_c/T_F de la fase pura de los $2e$ -CP y la otra fase de los $2h$ -CP se observa una mayor temperatura de condensación de los pares de huecos con respecto a los pares de electrones, incluso varios órdenes de magnitud con respecto de BCS, indicando que *puede* ocurrir superconductividad a temperaturas tan altas como temperaturas de medio ambiente. Los pares de Cooper de la teoría BCS sufren una BEC, esto se puede observar en la figura 4-3 donde la fase mixta $n_0(T) = m_0(T)$ del GBEC que *coincide* con la teoría BCS, es decir, la teoría BCS es un condensado de pares de Cooper de electrones y de pares de Cooper de huecos que por debajo de una T_c el material se convierte al estado superconductor.

El formalismo GBEC toma en cuenta explícitamente los $2e$ -CP y los $2h$ -CP, de esta forma se construye el gap de energía electrónico para una fase mixta donde $n_0(T) = m_0(T)$, es decir, la densidad de número de $2e$ -CP es igual a la densidad de número de $2h$ -CP, *coincidiendo* con la predicción teórica de BCS, de igual manera se puede construir el gap de energía para una fase mixta arbitraria con $n_0(T) \neq m_0(T)$, dejando este análisis para un posterior trabajo. Esto indica que en el sistema completo se cuenta con los $2e$ -CP así como $2h$ -CP y que ambos tipos de pares son importantes en la aparición del estado superconductor.

Las curvas del gap de energía electrónico $\Delta(T)\Delta(0)$ en función T/T_c de los diferentes materiales superconductores estudiados aquí, *son* una mezcla de un gas ternario de electrones no-apareados, pares de electrones condensados $n_0(T)$ y pares de huecos excitados o pares “pre-formados” $m_{B^+}(T)$ tipo-pares de Cooper. La relación del gap de energía con respecto a la T_c de la fase pura de $2e$ -CP de GBEC es de $2\Delta(0)/k_B T_c = 2.42$, esta difiere alrededor de un 1/3 del predicho por BCS que es $2\Delta(0)/k_B T_c = 3.53$ con $\lambda = 1/5$ y $\hbar\omega_D/E_F = 0.001$ esto se ve reflejado en la curva del gap de energía que esta por debajo de la fase mixta y que coincide con BCS.

El objetivo principal de construir la curva del gap de energía electrónico es mostrar que GBEC se *ajusta* a los datos experimentales aquí estudiados como son el Sn, Fig. 4-7, el In, Fig. 4-8

y el Pb Fig. 4-9, con la fase $2e$ -CP y variando la densidad de número hasta en $n/n_f = 0.9999991$ para un sistema con $G = 0.0001$ y $\delta e = 0.001$. Si al sistema se le excluyen los $2h$ -CP, es decir, $m_0(T) = 0$ pero dejando los pares de agujeros excitados $m_{B^+}(T)$ el gap de energía se reduce ligeramente con respecto a la fase mixta de GBEC que es idéntica a BCS. Podemos concluir que hay una *contribución importante* de los $2h$ -CP en la aparición del estado superconductor, se deja para un trabajo posterior la curva del gap de energía para la fase pura $2h$ -CP.

Como continuación de este estudio se puede mostrar que ajustando la densidad de número $n/n_f \neq 1$ en la fase pura de $2e$ -CP, la curva del gap de energía de GBEC puede ajustarse a la fase mixta o bien a los datos experimentales, este cambio en la densidad de número muestra que al cambiar n/n_f , la T_c/T_F cambia de igual manera de acuerdo al diagrama de fases presentado en el capítulo 4, el cambio de n/n_f sugiere un "ajuste" para describir un sistema SC con solamente una fase de $2e$ -CP ó de $2h$ -CP. El comportamiento anómalo que incluso se observa con los datos experimentales se podría explicar ajustando la densidad de número. De igual forma este comportamiento anómalo se puede correlacionar con sistemas como el URu₂Si₂ [135] con la reserva de construir el gap de energía para los $2h$ -CP del GBEC.

Apéndice A

Diagonalización del hamiltoniano de GBEC

El hamiltoniano del formalismo de la generalización del condensado de Bose-Einstein es

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{\mathbf{k}_1, s_1} \varepsilon_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1} + \sum_{\mathbf{K}} E_+(K) \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} - \sum_{\mathbf{K}} E_-(K) \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}} \\
 &+ L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} f_+(k) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow} \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \right) \\
 &+ L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} f_-(k) \{ \hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger + \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow} \hat{c}_{\mathbf{K}} \}.
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

Podemos seguir a Bogoliubov [104], reemplazando cada operador de creación y aniquilación de los bosones $\hat{b}_0^\dagger, \hat{b}_0$ por el número $\sqrt{N_0}$ dónde N_0 es el número de bosones compuestos por $2e$ con $\mathbf{K} = 0$ e igualmente para $\hat{c}_0^\dagger, \hat{c}_0$ por $\sqrt{M_0}$ dónde M_0 es el número de bosones compuestos por $2h$

con $\mathbf{K} = 0$. Entonces el operador dinámico $\hat{\Omega} = \hat{H} - \mu\hat{N}$ lo escribimos como

$$\begin{aligned}
\hat{H} - \mu\hat{N} &= \sum_{\mathbf{k},s} (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} + [E_+(0) - 2\mu] N_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} E_+(K) \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} \\
&+ [2\mu - E_-(0)] M_0 - \sum_{\mathbf{K} \neq 0} E_-(K) \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}} \\
&+ \sqrt{N_0} L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}} f_+(k) \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger + \hat{a}_{-\mathbf{k},\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} \right) \\
&+ \sqrt{M_0} L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}} f_-(k) \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger + \hat{a}_{-\mathbf{k},\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} \right) \\
&+ L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K} \neq 0} f_+(k) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\downarrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\uparrow} \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \right) \quad (\text{A-2}) \\
&+ L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K} \neq 0} f_-(k) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\downarrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger + \hat{a}_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K},\uparrow} \hat{c}_{\mathbf{K}} \right).
\end{aligned}$$

Ignorando interacciones entre electrones no apareados y bosones excitados (con $\mathbf{K} \neq 0$) podemos re-escribir el operador dinámico como

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} &\simeq \sum_{\mathbf{k}_1, s_1} [\varepsilon(k_1) - \mu] \hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1} \\
&+ [E_+(0) - 2\mu] N_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [E_+(K) - 2\mu] \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} \\
&+ [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [2\mu - E_-(K)] \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}} \\
&+ \sum_{\mathbf{k}} [\sqrt{n_0} f_+(k) + \sqrt{m_0} f_-(k)] \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow} \hat{a}_{-\mathbf{k},\uparrow} \right) \quad (\text{A-3})
\end{aligned}$$

Para diagonalizar el operador usamos las transformaciones de Bogoliubov-Valatin [104],[107]

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{\mathbf{k},s} &\equiv u_k \hat{\alpha}_{\mathbf{k},s} + 2s v_k \hat{\alpha}_{-\mathbf{k},-s'}^\dagger \\
\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger &\equiv u_k \hat{\alpha}_{\mathbf{k},s}^\dagger + 2s v_k \hat{\alpha}_{-\mathbf{k},-s'} \quad (\text{A-4})
\end{aligned}$$

dónde $s = \pm \frac{1}{2}$, el espín de la partículas ó bien

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} &\equiv u_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\uparrow} + v_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \\
\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger &\equiv u_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger + v_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{-\mathbf{k},\downarrow} \\
\hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow} &\equiv u_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\downarrow} - v_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{-\mathbf{k},\uparrow}^\dagger \\
\hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow}^\dagger &\equiv u_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\downarrow}^\dagger - v_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{-\mathbf{k},\uparrow} \quad (\text{A-5})
\end{aligned}$$

donde los nuevos operadores $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger$ siguen las reglas de anticonmutación $\{\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger\} = \delta_{k,k'}$ y además $\{\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}\} = \{\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger\} = 0$. Si renombramos $\xi_k \equiv \varepsilon_k - \mu$ y $\sqrt{n_0}f_+(k) + \sqrt{m_0}f_-(k) \equiv \Delta_k$, sustituyendo (A-4) en el primer y último término de (3-4) tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} \simeq & \sum_{\mathbf{k},s} \xi_k \left[u_k^2 \hat{\alpha}_{k,s}^\dagger \hat{\alpha}_{k,s} + 2s \left(2s v_k^2 \{1 - \hat{\alpha}_{-k,s}^\dagger \hat{\alpha}_{k,s}\} - 2s u_k v_k \{ \hat{\alpha}_{k,s}^\dagger \hat{\alpha}_{-k,s}^\dagger + \hat{\alpha}_{k,s} \hat{\alpha}_{k,s} \} \right) \right] \\
& + [E_+(0) - 2\mu] N_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [E_+(K) - 2\mu] \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} \\
& + [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [2\mu - E_-(K)] \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}} \\
& + \sum_{\mathbf{k}} \Delta_k \{ u_k^2 (\hat{\alpha}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\alpha}_{-k\downarrow}^\dagger + \hat{\alpha}_{-k\downarrow} \hat{\alpha}_{k\uparrow}) - v_k^2 (\hat{\alpha}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{\alpha}_{k\uparrow} + \hat{\alpha}_{k\uparrow} \hat{\alpha}_{-k\downarrow}^\dagger) \\
& + u_k v_k (\hat{\alpha}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{\alpha}_{-k\downarrow} + \hat{\alpha}_{-k\downarrow} \hat{\alpha}_{k\downarrow} - \hat{\alpha}_{k\uparrow}^\dagger \hat{\alpha}_{k\uparrow} - \hat{\alpha}_{k\uparrow} \hat{\alpha}_{k\uparrow}^\dagger) \} \tag{A-6}
\end{aligned}$$

simplificando terminos tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} \simeq & \sum_{\mathbf{k},s} [\xi_k (u_k^2 - v_k^2) - 2\Delta_k u_k v_k] \hat{\alpha}_{k,s}^\dagger \hat{\alpha}_{k,s} \\
& + \sum_{\mathbf{k},s} 2s \left[\xi_k u_k v_k + \frac{1}{2} \Delta_k (u_k^2 - v_k^2) \right] (\hat{\alpha}_{k,s}^\dagger \hat{\alpha}_{-k,-s}^\dagger + \hat{\alpha}_{k,s} \hat{\alpha}_{-k,-s}) \\
& + \sum_{\mathbf{k},s} 2 [\xi_k^2 + \Delta_k u_k v_k] \\
& + [E_+(0) - 2\mu] N_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [E_+(K) - 2\mu] \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} \\
& + [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [2\mu - E_-(K)] \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}} \tag{A-7}
\end{aligned}$$

Para diagonalizar $\hat{\Omega}$ debemos tener

$$\xi_k u_k v_k + \frac{1}{2} \Delta_k (u_k^2 - v_k^2) \equiv 0 \tag{A-8}$$

si definimos la energía E_k como

$$E_k \equiv \xi_k (u_k^2 - v_k^2) - 2\Delta_k u_k v_k \tag{A-9}$$

sustituyendo en (A-8) tenemos

$$u_k^2 - v_k^2 = \frac{E_k \xi_k}{\xi_k^2 + \Delta_k^2} \tag{A-10}$$

como tenemos la condición de que $u_k^2 + v_k^2 = 1$ tenemos

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{E_k \xi_k}{\xi_k^2 + \Delta_k^2} \right] \quad (\text{A-11})$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{E_k \xi_k}{\xi_k^2 + \Delta_k^2} \right] \quad (\text{A-12})$$

sustituyendo (A-11) y (A-12) en (A-8) obtenemos que la energía es

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2} \quad (\text{A-13})$$

entonces

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}} \right] \quad (\text{A-14})$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}} \right] \quad (\text{A-15})$$

sustituyendo (A-13), (A-14) y (A-15) en (A-7) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &\simeq \sum_{\mathbf{k},s} E_k \hat{a}_{k,s}^\dagger \hat{a}_{k,s} + \sum_k (\xi_k - E_k) \\ &+ [E_+(0) - 2\mu] N_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [E_+(K) - 2\mu] \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} \\ &+ [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [2\mu - E_-(K)] \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}} \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

usando nuevamente (A-5) y simplificando terminos tenemos

$$\begin{aligned} \hat{H} - \mu \hat{N} &\simeq \sum_{\mathbf{k},s} [\varepsilon_k - \mu] \hat{a}_{k,s}^\dagger \hat{a}_{k,s} \\ &+ [E_+(0) - 2\mu] N_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [E_+(K) - 2\mu] \hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{K}} \\ &+ [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [2\mu - E_-(K)] \hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{K}} \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} [\sqrt{n_0} f_+(k) + \sqrt{m_0} f_k] \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger + \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

Los eigenestados de este operador diagonalizado [129] son

$$|\cdots n_{\mathbf{k},s} \cdots N_{\mathbf{K}} \cdots M_{\mathbf{K}}\rangle = \prod_{\mathbf{k},s} \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k},s}^\dagger\right)^{n_{\mathbf{k},s}} \prod_{\mathbf{K} \neq 0} \frac{1}{\sqrt{N_{\mathbf{K}}}} \left(\hat{b}_{\mathbf{K}}^\dagger\right)^{N_{\mathbf{K}}} \prod_{\mathbf{K} \neq 0} \frac{1}{\sqrt{M_{\mathbf{K}}}} \left(\hat{c}_{\mathbf{K}}^\dagger\right)^{M_{\mathbf{K}}} |\mathbf{0}\rangle \quad (\text{A-18})$$

donde los exponentes $n_{\mathbf{k},s} = 0, 1$, $N_{\mathbf{K}}$ y $M_{\mathbf{K}} = 0, 1, 2, \dots$ son los números de ocupación, y $|\mathbf{0}\rangle$ es el estado del vacío para las cuasi-partículas fermionicas con la energía de E_k de (A-7) y re-escrita como $E(\epsilon) = \sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + \Delta^2(\epsilon)}$. Los estados del vacío para los bosones $2e$ -CP y $2h$ -CP con los operadores de creación y aniquilación esatn definidos como

$$\hat{\alpha}_{\mathbf{k},s} |\mathbf{0}\rangle \equiv \hat{b}_{\mathbf{K}} |\mathbf{0}\rangle \equiv \hat{c}_{\mathbf{K}} |\mathbf{0}\rangle \equiv 0 \quad (\text{A-19})$$

con el hamiltoniano diagonalizado, se puede construir el potencial termodinámico $\Omega = -PL^d$ del GBEC, con L^d el volúmen del sistema y P la presión, como esta definido en [94, p.228], quedando para tres dimensiones

$$\Omega(T, L^3, \mu, N_0, M_0) = -k_B T \ln \left[\text{Tr} \exp\{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\} \right] \quad (\text{A-20})$$

insertando (A-17) en (A-20) se obtiene el potencial termodinámico

$$\begin{aligned} \Omega(T, L^3, \mu, N_0, M_0)/L^3 &= \int_0^\infty d\epsilon N(\epsilon) [\epsilon - \mu - E(\epsilon)] - 2k_B T \int_0^\infty d\epsilon N(\epsilon) \ln\{\exp[-\beta E(\epsilon)]\} \\ &+ [E_+(0) - 2\mu]n_0 + k_B T \int_0^\infty d\epsilon M(\epsilon) \ln\{1 - \exp[-\beta \mathcal{E}_+(\epsilon)]\} \\ &+ [2\mu - E_-(0)]m_0 + k_B T \int_0^\infty d\epsilon M(\epsilon) \ln\{1 - \exp[-\beta \mathcal{E}_-(\epsilon)]\} \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

Apéndice B

Longitud de dispersión para una esfera dura

En este apéndice se aborda brevemente la longitud de dispersión a_s para una esfera dura y con pozo de potencial cuadrado. Todo el cálculo se puede ver en la Ref.[106, Cap. 7].

B.1. Teoría del alcance efectivo

Como veremos aquí, resulta casi imposible averiguar la forma precisa de un potencial dado si efectuamos un experimento de dispersión a muy bajas energías. Este experimento sólo permite determinar dos características *globales* —dos *longitudes*— del potencial, a saber el *alcance efectivo* r_0 , y la *longitud de dispersión* a . Existen, pues, un número infinito de *formas* de potencial compatibles con cada pareja (a, r_0) de estos números.

El resultado para el desfaseamiento en el caso de un potencial infinito de radio c (esfera dura), $\delta_0(k) = -kc$, válido a *toda* energía, sugiere que para un potencial (central) completamente general se defina la *longitud de dispersión*

$$a \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta_0(k)}{k}. \quad (\text{B-1})$$

De (7.39) de la Ref.[106], la amplitud de dispersión f_0 en onda S (que *no* depende de θ puesto que $P_0(\cos \theta) = 1$) será

$$f_0 = \frac{1}{k} e^{i\delta_0(k)} \sin \delta_0(k) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \frac{\delta_0(k)}{k}. \quad (\text{B-2})$$

Por lo tanto, (B-1) equivale a

$$a = - \lim_{k \rightarrow 0} f_0. \quad (\text{B-3})$$

En términos de la función de onda radial $u_0(r)$, la *longitud de dispersión* a tiene un significado

muy simple. Para un potencial central cualquiera que cumpla con $V(r) = 0$ para $r \geq R$, la solución (7.37) de la Ref.[106], se comporta como

$$\begin{aligned} u_0(r) &\xrightarrow[r \geq R]{} C e^{i\delta_0} \sin(kr + \delta_0), \\ u_0(r) &\xrightarrow[k \rightarrow 0]{} C k e^{i\delta_0} (r - a) = 1 - \frac{r}{a}, \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

donde usamos la definición original (B-1). Es decir, a es el lugar en r donde en el límite de bajas energías la función radial $u_0(r)$ se anula exactamente. En el último paso de (B-4) escogimos la constante arbitraria C del modo indicado; es decir, $C = -e^{i\delta_0} k a^1$. La figura B-1 ilustra la ubicación de a para un potencial (curvas gruesas) que es:

- i) puramente repulsivo ($a > 0$),
- ii) uno atractivo, pero tan débil que no llega a ligar ni un estado $S(a < 0)$,
- iii) un potencial que liga su primer estado S con energía de amarre cero ($a = \pm\infty$) y, finalmente,
- iv) un potencial que liga con energía negativa ($a > 0$).

La recta punteada representa (B-4) extrapolada a toda r , en tanto que la curva delgada es la función $u_0(r)$.

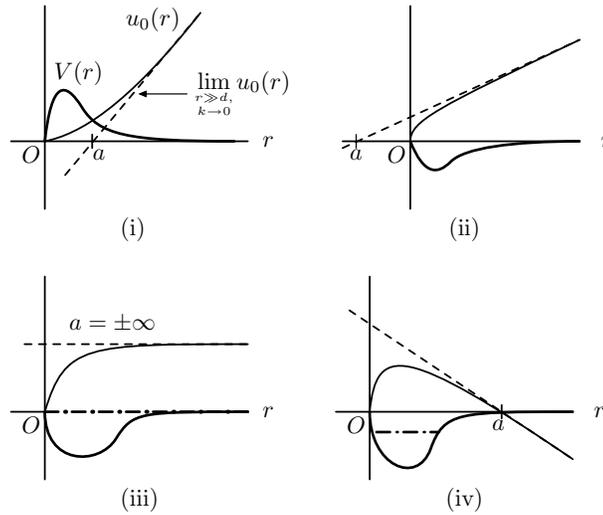


Fig. B-1

¹Nótese que cuando $r \geq R$, $\lim_{k \rightarrow 0} u_0(r) = 1 - r/a$ satisface (7.33) con $V = 0$, $l = 0$ y $k = 0$, a saber $u_0''(r) = 0$.

B.2. Esfera dura más pozo rectangular

Es relativamente directo deducir que para el potencial que se grafica en la figura B-2, es de la forma

$$V(r) = \begin{cases} +\infty, & r < c, \\ -V_0, & c < r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (\text{B-5})$$

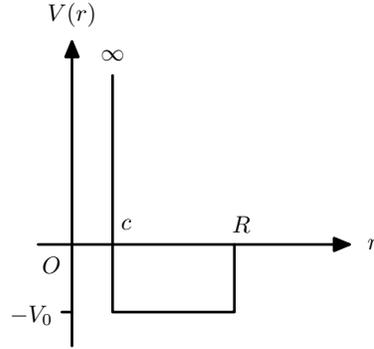


Fig. B-2

la longitud de dispersión resultante es

$$a = c \left[1 + \frac{R - c}{c} \left(1 - \frac{\tan \sqrt{2\mu V_0 (R - c)^2 / \hbar^2}}{\sqrt{2\mu V_0 (R - c)^2 / \hbar^2}} \right) \right]. \quad (\text{B-6})$$

Esta aparece graficada en la figura B-3.

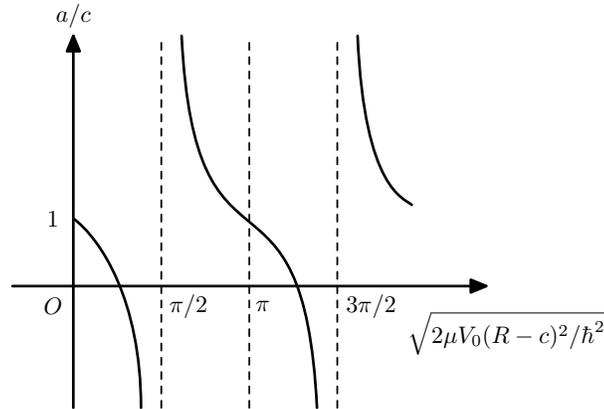


Fig. B-3

Notamos primero que (B-6) se reduce a (7.76) de la Ref.[106] si $c \rightarrow 0$, y al resultado anterior $a = c$ si $R \rightarrow 0$ o bien $V_0 \rightarrow 0$. Luego observamos que los polos en $(m - 1/2)\pi$, $m = 1, 2, \dots$

corresponden justamente a la condición (5.35) del capítulo 5 de la Ref.[106] para que el pozo rectangular, ahora de alcance neto $R - c$, ligue el primero, segundo, ..., estado S, ya que la presencia del potencial de esfera dura sólo corre el origen de O hasta c .

Bibliografía

- [1] V.V. Tolmachev, Phys. Lett. A **266**, 400 (2000)
- [2] M. de Llano & V.V. Tolmachev, Physica A **317**, 546 (2003)
- [3] S.K. Adhikari, M. de Llano, F.J. Sevilla, M.A. Solis, J.J. Valencia, Physica C, **453**, 37 (2007)
- [4] M. Grether, M. de Llano, & V.V. Tolmachev, Int. J. Quant. Chem. **112**, 3018 (2012)
- [5] N. Bernardes, Phys. Rev. **107**, 354 (1957)
- [6] M. A. Biondi, A. T. Forrester, M. P. Garfunkel, & C. B. Satterthwaite, Rev. Mod. Phys. **30**, 1109 (1958)
- [7] I. Giaver & K. Megerle, Phys. Rev. **122**, 1101 (1961)
- [8] H. K. Onnes, Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **12**, 120 (1911)
- [9] W. Meissner & R. Ochsenfeld. Naturwissenschaften **21** 44, 787 (1933)
- [10] C.P. Poole, Jr., H.A. Farach, R.J. Creswick, R. Prozorov, *Superconductivity*, 2nd. ed., (Academic Press, London, 2007)
- [11] M.K. Wu, M.K. Wu, J.R. Ashburn, C.J. Torng *et al.* Phys. Rev. Lett. **58**, 908 (1987)
- [12] F. London & H. London, Proc. Roy. Soc. A, **149**, 71 (1935)
- [13] V. L. Ginzburg & L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. (J. Exp. & Theo. Phys.) **20**, 1064 (1950)
- [14] L. Landau & E. Lifshitz, *Física Estadística*, Vol. 5, 2a. ed., (Editorial Revertè, México, 1964), pág. 522
- [15] E. Maxwell, Phys. Rev. **78**, 477 (1950)
- [16] C. A. Reynolds, B. Serin, W. H. Wright, & L. B. Nesbitt, Phys. Rev. **78**, 487 (1950)
- [17] H. Frölich, Phys. Rev. **79**, 845 (1950)
- [18] H. Frölich , Proc. Roy. Soc, **A215**, 291 (1952)
- [19] J. Bardeen, L. N. Cooper, & J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957)
- [20] L.N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956)

- [21] L. P. Gor'kov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **36**, 1364 (1959)
- [22] G.J. Bednorz & K.A. Müller, Z. Phys. B - Cond. Matt. **64**, 189 (1986)
- [23] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd Ed. (McGraw-Hill International Editions, 1996)
- [24] W.S. Corak, B.B. Goodman & C.B. Satterthwaite, Phys. Rev. **102**, 1442 (1954), **102**, 656 (1956)
- [25] M.A. Biondi, M.P. Garfunkel & A.O. McCoubrey, Phys. Rev. **102**, 1427 (1956)
- [26] R.E. Glover & M. Tinkham, Phys. Rev. **104**, 844 (1956), **108**, 243 (1957)
- [27] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 7th Ed. (John Wiley & Sons, Toronto, 1996)
- [28] H.B. Callen, *Thermodynamics and An Introduction to Thermostatistics*, 2nd. Ed. (John Wiley & Sons, Toronto, 1985)
- [29] V.V. Schmidt; P. Müller & A.V. Ustinov (eds.), *The Physics of Superconductors*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997)
- [30] J.F. Annett, *Superconductivity, Superfluids, and Condensates*, (Oxford University Press, Oxford, 2004)
- [31] A. García, Rev. Mex. Fís, **34**, 325 (1988)
- [32] Y. Nambu, Phys. Rev. **117**, 648 (1960)
- [33] L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory* (Reverté, Barcelona, 1983)
- [34] L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30** 1058 (1956) [Sov. Phys. JETP **3** 920 (1957)]
- [35] L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **32** 59 (1957) [Sov. Phys. JETP **5** 101 (1957)]
- [36] E. Kaxiras, *Atomic and Electronic Structure of Solids*, (Cambridge University Press, New York, 2003)
- [37] M. Fortes, M.A. Solís, M. de Llano, and V.V. Tolmachev, Physica C, **364**, 95 (2001)
- [38] M. de Llano, F.J. Sevilla, and S. Tapia, Int. J. Mod. Phys. B, **20**, 2931 (2006)
- [39] J.R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Ed. Benjamin (New York, 1964) p. 38.
- [40] B.S. Deaver, Jr. and W.M. Fairbank, Phys. Rev. Lett., **7**, 43 (1961)

- [41] R. Doll and M. Näbauer, Phys. Rev. Lett., **7**, 51 (1961)
- [42] C.E. Gough, M.S Colclough, E.M. Forgan, R.G. Jordan, M. Keene, C.M. Muirhead, I.M. Rae, N. Thomas, J.S. Abell, and S. Sutton, Nature, **326**, 855n Wang, C.J.Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C.S. Unnikrishnan, M. Leduc, & C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **86**, 3459 (2001)
- [43] C.E. Gough, priv. comm.
- [44] S. Fujita and D.L. Morabito, Mod. Phys. Lett. B, **12**, 753 (1998)
- [45] S. Fujita and S. Godoy, *Theory of High Temperature Superconductivity*, Ed. Kluwer, (New York, 2001) pp 97-98
- [46] A. Einstein, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften **1**, 3 (1925)
- [47] S.N. Bose, Zeitschrift für Physik **26**, 178 (1924)
- [48] R.M. May, Phys. Rev. **135**, A1515 (1964)
- [49] R.M. Ziff, G.E. Uhlenbeck & M. Kac, Phys. Rep. **32**, 169 (1977)
- [50] V.C. Aguilera-Navarro, M. de Llano & M.A. Solís, Eur. J. Phys. **20**, 177 (1999)
- [51] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Wieman, & E.A. Cornell, Science **269**, 198 (1995)
- [52] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett & R.G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995)
- [53] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Drutten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, & W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995)
- [54] D.G. Fried, T.C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S.C. Moss, D. Kleppner, & T.J. Greytak, Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998)
- [55] S.L. Cornish, N.R. Claussen, J.L. Roberts, E.A. Cornell, & C.E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **85**, 1795 (2000)
- [56] F. Pereira Dos Santos, J. Léonard, Junmin Wang, C.J.Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C.S. Unnikrishnan, M. Leduc, & C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **86**, 3459 (2001)
- [57] G. Mondugno, G. Ferrari, G. Roati, R.J. Brecha, A. Simoni, & M. Inguscio, Science **294**, 1320 (2001)
- [58] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.C. Nagel, & R. Grimm, Science **299**, 232 (2003)

- [59] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki, & Takahashi, Phys. Rev. Lett. **91**, 040404 (2003)
- [60] Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler, & T. Pfau, Phys. Rev. Lett. **94**, 160401 (2005)
- [61] J.L. Lin & J.P. Wolfe, Phys. Rev. Lett. **71**, 1222 (1993)
- [62] A. Oosawa, M. Ishii, & H. Tanaka, J. Phys. Condens. Matter **11**, 265 (1999)
- [63] T. Nikuni, M. Oshikawa, A. Oosawa, & H. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **84**, 5868 (2000)
- [64] E.Ya. Sherman, P. Lemmens, B. Busse, A. Oosawa, & H. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **91**, 057201 (2003) & refs. therein
- [65] A. Görlitz, J.M. Vogels, A.E. Leanhardt, C. Raman, T.L. Gustavson, J.R. Abo-Shaeer, A.P., S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, & W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001)
- [66] F. Schreck, L. Khaykovich, K.L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, & C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001)
- [67] S. Burger, F.S. Cataliotti, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, & M. Inguscio, Europhys. Lett. **57**, 1 (2002)
- [68] M. H. Lee, Phys. Rev. E **56**, 3909 (1997)
- [69] S. Wolfram, *The MATHEMATICA Book*, 4a. Ed. p. 764 (Wolfram Media, IL, 1999)
- [70] A. Dragos-Victor, Romanian. J. Phys. **53**, 689 (2008)
- [71] Pathria R.K., *Statistical Mechanics* 2a. Ed. (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1996)
- [72] D.L. Goodstein, *States of Matter* (Dover Publications, NY, 1985)
- [73] L. Lewin, *Dilogarithms and Associated Functions*, (McDonald, London, 1958) p. 5
- [74] D.M. Eagles, Phys. Rev. **186**, 456 (1969)
- [75] J. Ranninger, R. Micnas, & S. Robaszkiewicz, Ann. Phys. (Paris) **13**, 455 (1988)
- [76] R. Friedberg & T.D. Lee, Phys. Rev. B **40**, 6745 (1989)
- [77] R. Friedberg, T.D. Lee, & H.C. Ren, Phys. Lett. A **152**, 417 y 423 (1991)
- [78] Y.J. Uemura *et al.*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2317 (1988)

- [79] M. Casas, N.J. Davidson, M. de Llano, T.A. Mamedov, A. Puente, R.M. Quick, A. Rigo, & M.A. Solis, *Physica A* **295**, 146 (2001)
- [80] M. Casas, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo, & M.A. Solis, *Solid State Commun.* **123**, 101 (2002)
- [81] M. Casas, S. Fujita, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo, & M.A. Solis, *Physica C* **295**, 93 (1998)
- [82] P.W. Anderson, *Science* **235**, 1196 (1987)
- [83] A.S. Alexandrov, N.F. Mott, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1075 (1993)
- [84] M.R. Schafroth, *Phys. Rev.* **96**, 1442 (1954)
- [85] M.R. Schafroth, S.T. Butler, J.M. Blatt,, *Helv. Phys. Acta* **30**, 425 (1957)
- [86] J.D. Gunton, M.J. Buckingham, *Phys. Rev.* **166**, 152 (1960)
- [87] D. Jérôme, *Science* **252**, 1509 (1991)
- [88] J.M. Williams, A.J. Schultz, U. Geiser, K.D. Carlson, A.M. Kini, H.H. Wang, W.K. Kwok, M.H. Whangbo, & J.E. Schirber, *Science* **252**, 1501 (1991)
- [89] H. Hori, *Int. J. Mod Phys. B* **8**, 1 (1994)
- [90] M. de Llano, F.J. Sevilla & S. Tapia, *Int. J. Mod. Phys. B* **20**, 2931 (2006)
- [91] E.E. Salpether, H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **84**, 1232 (1951)
- [92] A.P. Sutton, *Electronic Structure of Materials* (Clarendon Press, Oxford, 1993)
- [93] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **112**, 1344 (1958)
- [94] A.L. Fetter & J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971)
- [95] J. Ranninger & S. Robaszkiewicz, *Physica B* **135**, 468 (1985)
- [96] Y. Bar-Yam, *Phys. Rev. B* **43**, 359 y 2601 (1991)
- [97] V.B. Geshkenbein, L.B. Ioffe, & A.I. Larkin, *Phys. Rev. B* **55**, 3173 (1997)
- [98] Y. Domanski & J. Ranninger, *Phys. Rev. B* **63**, 134505 (2001)
- [99] M.J. Holland, S.J.J.M.F. Kokkelmans, M.L. Chiofalo, & R.Walser, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 1204061 (2001)

- [100] E. Timmermans, K. Furuya, P.W. Milonni, & A.K. Kerman, Phys. Lett. A **285**, 228 (2001)
- [101] M.L. Chiofalo, S.J.J.M.F. Kokkelmans, J.N. Milstein, & M.J. Holland, Phys. Rev. Lett. **88**, 090402 (2002)
- [102] Y. Ohashi & A. Griffin, Phys. Rev. Lett. **89**, 130402 (2002)
- [103] M. de Llano en: B.P. Martins (Ed.) *Frontiers in Superconductivity Research*, (Nova Science Publishers, NY, 2004) pp. 1-52
- [104] N.N. Bogoliubov, N. Cim. **7**, 794 (1958)
- [105] (a) T.A. Mamedov & M. de Llano, J. Phys. Soc. Japan **79**, 044706-14 (2010) (b) T.A. Mamedov & M. de Llano J. Phys. Soc. Japan **80**, 074718-25 (2011) (c) T.A. Mamedov & M. de Llano Phil. Mag. **93**, 2896-2912 (2013)
- [106] M. de Llano, *Mecánica Cuántica*, (Facultad de Ciencias, UNAM, México D.F., 2006)
- [107] J. Valatin, N. Cim. **7**, 843 (1958)
- [108] M. Grether, M. de Llano, S. Ramírez & O. Rojo, Int. J. Mod. Phys. B **22**, 4367 (2008)
- [109] J. Labbé, S. Barisic, J. Friedel, Phys. Rev. Lett. **19**, 1039 (1967)
- [110] A.J. Leggett, J. Phys. (Paris). Colloq. **41** C7 (1980)
- [111] K. Miyake, Prog. Theor. Phys. **69**, 1794 (1983)
- [112] P. Nozières, S. Schmitt-Rink, J. Low. Temp. Phys. **59**, 195 (1985)
- [113] M. Randeria, J.M. Duan, L.Y. Shieh, Phys. Rev. Lett. **62**, 981 (1989)
- [114] M. Randeria, J.M. Duan, L.Y. Shieh, Phys. Rev. B **41**, 327 (1990)
- [115] D. van der Marel, Physica C **165**, 35 (1990)
- [116] M. Drechsler, W. Zwirger, Ann. der Physik **1**, 15 (1992)
- [117] R.M. Quick, C. Esebbag, M. de Llano, Phys. Rev. B **47**, 11512 (1993)
- [118] R. Haussmann, Z. Phys. B **91**, 291 (1993)
- [119] R. Haussmann, Phys. Rev. B **49**, 12975 (1994)
- [120] A. Tokumitsu, K. Miyake, K. Yamada, Phys. Rev. **47**, 11988 (1994)
- [121] D. Dzhumanov, P.J. Baimatov, A.A. Baratov, N.I. Rahmatov, Physica C **235–240**, 2339 (1994)

- [122] F. Pistolesi, G.C. Strinati, in: A. Griffin, D.W. Snoke, S. Stringari Ed., *Bose–Einstein Condensation*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
- [123] F. Pistolesi, G.C. Strinati, Phys. Rev. B **49**, 6356 (1994)
- [124] F. Pistolesi, G.C. Strinati, Phys. Rev. B **53**, 15168 (1996)
- [125] M. Randeria, in: A. Griffin, D.W. Snoke, S. Stringari Eds., *Bose–Einstein Condensation*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
- [126] E.V. Gorbar, V. M Loktev, S.G. Sharapov, Physica C **257**, 355 (1996)
- [127] Q. Chen, I. Kosztin, B. Janko, K. Levin, Phys. Rev. B **59**, 7083 (1999)
- [128] M. Casas et al., Phys. Lett. A **245**, 55 (1998)
- [129] M. de Llano & V.V. Tolmachev, Ukr. J. Phys. **55**, 1 (2010)
- [130] (a) Y. J. Uemura, J. Phys.: Condens. Matter 2004, 16, S4515; (b) Y. J. Uemura, Phys. B 2006, 374, 1.
- [131] B. Mühlischlegel, Z. Phys. **155**, 313 (1959)
- [132] N.W. Ashcroft, & N.D. Mermin, N. D., *Solid State Physics*, (Saunders, 1976)
- [133] C.H. Hurd, *The Hall Effect in Metals and Alloys*, (Plenum Press, New York-London, 1972)
- [134] J.E. Hirsch, Physica C **341-348**, 213 (2000)
- [135] F. Morales & R. Escudero, J. Low Temp. Phys. **154**, 68 (2009)