



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

CONSTRUCCIONES DE GRÁFICAS BIRREGULARES DE
CUELLO DADO Y ORDEN MÍNIMO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
GLORIA LÓPEZ CHÁVEZ

DIRECTORA: DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM UNIDAD JURQUILLA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORIAL:

DRA. CAMINO BALBUENA MARTÍNEZ
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA, ESPAÑA.

DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM UNIDAD JURQUILLA

MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE DEL 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia

*Por su incondicional apoyo
y motivación para culminar
mi formación académica.*

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Definiciones y Preliminares	1
1.2. Geometrías Finitas	7
1.2.1. Algunas geometrías finitas	8
1.2.2. Polígonos generalizados	9
1.2.3. Subestructuras de un plano proyectivo	10
1.2.4. Tres estructuras algebraicas	12
1.2.5. Tres gráficas de Levi	14
2. Jaulas birregulares de cuello impar	19
2.1. Jaulas birregulares de cuello cinco	20
2.1.1. Una familia de $(r, 2r - 3; 5)$ -jaulitas.	21
2.1.2. Operaciones sobre B_q	24
2.1.3. Una familia de $(r, 2r - 5; 5)$ -jaulitas	29
2.1.4. Dos $(r, r + 1; 5)$ -jaulitas semi-regulares, para $r = 5, 6$	32
2.2. Familias de $(r, m; g)$ -jaulitas con un único vértice de grado m	35
2.2.1. Operaciones que identifican vértices	36
2.2.2. Construcción de $(q, 2q - 1; 5)$ -jaulitas para $q = p^\alpha$, p primo impar	38
2.2.3. Construcción de $(q, 2q; 5)$ -jaulitas para $q = p^\alpha$, p impar	40
2.2.4. Construcción de $(q, 2q + 1; 5)$ -jaulitas para $q = p^\alpha$, p primo impar	43
2.2.5. Construcción de $(r, 2r - 4; 5)$ -jaulitas para $q = r - 1$, $q = 2^\alpha$	45
2.2.6. Construcción de $(5, m; 5)$ -jaulitas para todo $m \geq 6$	49
2.2.7. Construcción de $(6, 2s; 5)$ -jaulitas para todo $s \geq 4$	50
2.2.8. Construcción de $(6, 2s + 1; 5)$ -jaulitas para $s = 3, 4$	58
2.2.9. Construcción de $(4, 2s; 9)$ -jaulitas para $s \geq 7$	58

3. Jaulas birregulares de cuello par	61
3.1. Construcción de $(r, m; 2s)$ -gráficas con $s \geq 4$	63
3.1.1. Familias de gráficas birregulares con cuello par $g \geq 8$	63
3.1.2. Construcción de $(r, m; 8)$ -gráficas para $r - 1 = p^\alpha$	66
3.1.3. La mejor cota inferior para $n(3, m; 8)$	70
3.1.4. Construcción de $(3, m; 8)$ -gráficas con $9m + 3$ vértices	74
3.2. Una familia de $(r, m; 6)$ -jaulas	77
Apéndices	81
A. Breve reseña sobre $(k; g)$-jaulas	83
A.0.1. Construcción de cotas superiores	86
B. Breve reseña sobre propiedades estructurales en bijaulas	91
B.0.1. Resultados conocidos sobre propiedades estructurales de bijaulas	92
Conclusiones	97
Problemas abiertos	99

Capítulo 1

Introducción

1.1. Definiciones y Preliminares

Todas nuestras gráficas son no vacías, simples y finitas. A lo largo de esta tesis usaremos la notación y las definiciones que aparecen en [25, 39]. Sin embargo, puntualizamos algunas de ellas por su impacto en este trabajo.

Una gráfica G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ que consiste de un conjunto no vacío de puntos $V(G)$ llamados vértices y un conjunto $E(G)$ de pares no ordenados de elementos de $V(G)$ llamados aristas. El orden de una gráfica G se define como $|V(G)|$, así mismo el tamaño de G se define como $|E(G)|$. Si $x \in V(G)$ se define el grado de x como el número de aristas incidentes a él y se denota por $deg_G(x)$. El conjunto de grados de una gráfica G es $D(G) = \{a_1, \dots, a_s\}$, si $a_i = deg_G(x)$ y $x \in V(G)$. El grado mínimo y máximo en una gráfica G se denota por $\delta(G)$ y $\Delta(G)$, respectivamente. Una gráfica es k -regular si $deg_G(x) = k$ para todo $x \in V(G)$. Una gráfica se dice que es cúbica si es 3-regular. Dos vértices x y y se dice que son vecinos si estos son incidentes a una arista en común. El conjunto de vecinos o vecindad de un vértice $x \in V(G)$ es denotada por $N_G(x)$ y cuando la vecindad $N_G(x)$ incluye al vértice x , nos referiremos a ella como vecindad cerrada y la denotaremos por $N_G[x]$. Además como G es simple se cumple que $|N_G(x)| = deg_G(x)$. Una gráfica G de orden n es completa si cualesquiera dos vértices en $V(G)$ son adyacentes y en este caso G se denota por K_n . El complemento de una gráfica G se denota por \overline{G} y se define como la gráfica con conjunto de vértices $V(G)$ y cuyas aristas son los pares de vértices no

adyacentes en G . La gráfica vacía de orden n se define como \overline{K}_n .

Una gráfica G es bipartita si se puede inducir una partición (V_1, V_2) en $V(G)$ de forma que toda arista de G tenga un extremo en V_1 y el otro en V_2 . Se dice que (V_1, V_2) es una bipartición de G y que V_1 y V_2 son sus partes. Una estrella es una gráfica bipartita completa de orden $n+1$, con bipartición (V_1, V_2) tal que $|V_i| = 1$ y $|V_j| = n$, para $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$. Una trayectoria es una gráfica cuyos vértices pueden ser acomodados en una sucesión lineal de forma que dos vértices son adyacentes si ellos son consecutivos en la sucesión y son no adyacentes en otro caso. Si la trayectoria empieza en el vértice x y termina en el vértice y nos referiremos a esta como una xy -trayectoria. Así mismo, un ciclo es una gráfica de orden al menos tres cuyos vértices pueden ser acomodados en una sucesión circular de tal forma que dos vértices son adyacentes si ellos son consecutivos en la sucesión y son no adyacentes en otro caso. La longitud de una trayectoria o de un ciclo es el número de sus aristas. Una trayectoria o un ciclo de longitud k se dice que es una k -trayectoria o un k -ciclo, respectivamente. La distancia entre dos vértices x y y de una gráfica G se define como la longitud mas corta entre todas las xy -trayectorias que pertenecen a G y es denotada por $d_G(x, y)$. El diámetro de una gráfica G se denota por $diam(G)$ y se define como la máxima de las distancias que existe entre cualesquiera dos vértices de G . Diremos que un subconjunto de vértices S de una gráfica G es k -remoto si la distancia entre cualquier par de vértices de S es al menos k . En cualesquiera de los casos anteriores es posible omitir de la notación a G si no se cae en ambigüedades dentro del contexto.

Si G es una gráfica, se dice que H es una subgráfica de G si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$. Una subgráfica de G es generadora si $V(H) = V(G)$. Si $A \subset V(G)$, entonces se dice que H es la subgráfica inducida por el conjunto A de vértices si $V(H) = A$ y las aristas de H son las aristas de G con ambos extremos en A , en este caso H es denotada por $\langle A \rangle$. La identificación de vértices x y y no adyacentes de una gráfica G es la operación que reemplaza esos dos vértices por uno nuevo, él cual será incidente a todas las aristas que eran incidentes en G ya sea a x o a y . La gráfica resultante se denota por $G/\{x, y\}$. La contracción de una arista e de G es la operación que consiste en eliminar a la arista e y después identificar a sus extremos. La gráfica que resulta de este proceso es denotada por G/e . Si u y v son vertices no adyacentes de una gráfica G , entonces $G + uv$ denota la gráfica con conjunto de vertices $V(G)$ y conjunto de aristas $E(G) \cup \{uv\}$. En general, si S es un conjunto de aristas, se define $G + S$ como la gráfica que resulta de añadir el conjunto de aristas S

a $E(G)$. De igual forma se define $G \setminus S$ para $S \subset E(G)$, como la gráfica que resulta de eliminar el conjunto de aristas S de $E(G)$. De forma similar se define $G - v$ donde $v \in V(G)$ y $G - X$ donde $X \subset V(G)$. La unión de gráficas simples G y H es la gráfica $G \cup H$ con conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ y conjunto de aristas $E(G) \cup E(H)$. Si G y H son ajenas por vértices, en ese caso se dirá que su unión es una unión ajena y se denotará por $G + H$.

Otro concepto importante en la teoría de gráficas y muy empleado en la teoría de jaulas es el concepto de árbol definido como una gráfica T conexa acíclica. En relación a este concepto se dice que un vértice v en T es una hoja si $\deg_T(v) = 1$. Definimos también la *altura* de un árbol T como el entero j , $j \geq 1$, si existe un vértice x en $V(T)$ tal que al hacer pender a T desde x todas las hojas queden a distancia exactamente j de x , y en ese caso diremos que x es raíz de T . Cabe señalar que bajo esta definición de raíz queda determinado que ella misma no es una hoja y que es única. En este mismo contexto también diremos que un vértice es interno si no es raíz ni hoja.

Por el contrario, si G es una gráfica con al menos un ciclo se define el *cueño* $g(G)$ de G como la longitud del ciclo mas pequeño contenido en ella. En relación a los parámetros de regularidad y cueño de una gráfica, Tutte en [82] (1947) fue el primero en aportar algo al problema sobre la construcción de gráficas r -regulares con cueño dado g y orden mínimo. Una gráfica con estas tres características es una “jaula”:

Definición 1.1.0.1. *Una jaula es una gráfica r -regular con cueño g y orden mínimo.*

Este concepto dio lugar a una nueva línea de investigación en la teoría extremal de gráficas conocida como teoría de jaulas. Actualmente dicho tema tiene gran auge y es en una generalización de este concepto donde se enmarca este trabajo. La notación estándar que se emplea para referirse a una jaula r -regular y con cueño g es el de $(r; g)$ -jaula, y el orden de la misma es denotado por $n(r, g)$. Después de 16 años surgido el concepto, Erdős y Sachs probaron en [45] (1963) que para cualquier par de enteros positivos $r \geq 2$ y $g \geq 3$ siempre existe una gráfica r -regular con cueño g , y como consecuencia también la o las $(r; g)$ -jaulas que son las de orden mínimo.

En relación al orden de una $(k; g)$ -jaula, existe una cota inferior conocida como la Cota de Moore que indica el mínimo número de vértices requeridos para que exista una $(k; g)$ -jaula. Para su cálculo es necesario considerar la paridad del cueño, como se puede apreciar en la Cota (1.1). Para facilitar y entender esta cota denotamos

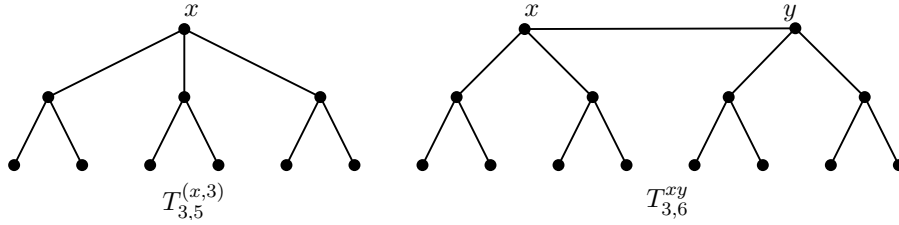


Figura 1.1: Árboles asociados a la $(3; 5)$ -jaula y a la $(3; 6)$ -jaula, respectivamente.

por $T_{r,g}^{(x,s)}$ para g impar, al árbol enraizado en el vértice x de grado s , de altura $(g-1)/2$ y con todos sus vértices internos de grado r . Si xy es una arista y g es par entonces definimos al árbol $T_{r,g}^{xy} := (T_{r,g-1}^{(x,r-1)} + T_{r,g-1}^{(y,r-1)}) + xy$. A modo de ilustración ver la Figura 1.1. En este contexto el mínimo número de vértices que se necesita para la existencia de una $(r; g)$ -jaula es $|V(T_{r,g}^{(x,r)})|$ si g es impar y $|V(T_{r,g}^{xy})|$ si g es par, de lo contrario en ambos casos habría al menos una arista que conecta a dos vértices internos formando un ciclo de longitud menor a la del cuello. Contando el número de vértices en cada árbol vemos que el orden de una $(r; g)$ -jaula está acotado inferiormente por:

$$n(r, g) \geq n_0(r, g) = \begin{cases} 1 + r + r(r-1) + \dots + r(r-1)^{\frac{(g-3)}{2}} & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2(1 + (r-1) + \dots + (r-1)^{\frac{g}{2}-1}) & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases} \quad (1.1)$$

En este trabajo nos referiremos a una $(r; g)$ -jaulita (o gráfica de Moore) como una $(r; g)$ -jaula que alcanza la cota de Moore, y en este caso su orden será denotado por $n_0(r; g)$ como se indica en la Cota (1.1). Además, se ha probado que una $(r; g)$ -jaula es jaulita si y sólo si alguna de las siguientes condiciones se cumple, [26, 41, 46]:

1. $r = 2$ y $g \geq 3$, ciclos;
2. $g = 3$ y $r \geq 2$, gráficas completas;
3. $g = 4$ y $r \geq 2$, gráficas completas bipartitas;
4. $g = 5$ y
 - a) $r = 2$, el 5-ciclo;
 - b) $r = 3$, la gráfica de Petersen;
 - c) $r = 7$, la gráfica de Hoffman-Singleton;

d) y posiblemente $r = 57$;

5. $g = 6, 8$ ó 12 y existe un n -gono gen. sim. de orden $r - 1$ una potencia de primo.

Las jaulitas del punto cinco son llamadas en [46] gráficas geométricas, y la justificación a este nombre es su estrecha relación con algunas estructuras de incidencia que relacionan puntos y líneas de forma “regular” a las que se les suele llamar geometrías finitas. Al final de esta introducción presentamos una breve reseña sobre “Geometrías Finitas” por el impacto que tuvo en este trabajo. Se puede leer mas sobre este tema en [46, 48].

Por otra parte, una línea de investigación intimamente ligada con la teoría de jaulas tuvo inicio en los años 70's con el estudio de las gráficas con conjunto de grados $\{a_1, \dots, a_n\}$, cuello dado g y orden mínimo. Estas gráficas reciben el nombre de $(D; g)$ -jaulas y de la misma manera que para jaulas es denotado por $n(D; g)$ el orden de una $(D; g)$ -jaula.

Los pioneros en esta nueva línea de investigación fueron Kapoor, Polimeni y Wall quienes en [62] (1977) prueban que siempre existe una gráfica con conjunto de grados $D = \{a_1, \dots, a_n\}$, cuello $g = 3$ y orden mínimo $1 + a_n$. Pocos años después, en 1981, Chartrand, Gould y Kapoor, basados en el resultado antes mencionado de Erdős y Sachs, prueban en [38] que siempre existe una $(D; g)$ -jaula para cualquier conjunto de grados D y cuello g dado.

La primer cota inferior que se tuvo para $n(D; g)$ se debe a Downs, Gould, Mitchem y Saba [42] (1981) obtenida con la misma filosofía que en jaulas, acomodando los vértices en orden descendente respecto al grado y tomando en cuenta el cuello de la misma.

$$n_0(D; g) = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^t a_k (a_1 - 1)^{i-1} & \text{si } g = 2t + 1; \\ 1 + \sum_{i=1}^{t-1} a_k (a_1 - 1)^{i-1} + (a_1 - 1)^{t-1} & \text{si } g = 2t. \end{cases} \quad (1.2)$$

Al igual que antes, diremos que una $(D; g)$ -jaula es $(D; g)$ -jaulita si su orden coincide con la Cota (1.2) y en este caso su orden es denotado por $n_0(D; g)$. Un cálculo directo de esta cota nos muestra que $n_0(D; 3) = a_n + 1$, es decir la familia de gráficas encontradas por Kapoor, Polimeni y Wall en [62] son $(D; 3)$ -jaulitas. Se ha hecho muy poco sobre el estudio de gráficas con muchos grados y cuello dado g , se ha trabajado

más en aquellas con dos grados de regularidad y cuello dado.

Precisamente, el propósito de esta tesis es profundizar más en el tema de las gráficas con conjunto de grados $D = \{r, m\}$, para $2 \leq r < m$, cuello dado g y orden mínimo. Estas gráficas son llamadas *bijaulas* o $(r, m; g)$ -*jaulas* y su orden es denotado por $n(r, m; g)$. También diremos que una $(r, m; g)$ -*jaula* es *bijaulita* si alcanza la Cota (1.2), y cuando una *bijaula* tenga conjunto de grados $D = \{r, r + 1\}$ nos referiremos a ellas como *jaulas semi-regulares*. En esta tesis se verán construcciones de *bijaulitas* con cuello impar 5, 7 y 9, y con cuello par 6 y 8. A continuación menciono algunos de los resultados conocidos en el área.

El primero es un Corolario del resultado general, mencionado anteriormente, dado por Kapoor, Polimeni y Wall en 1977, enfocado en un conjunto de grados $D = \{r, m\}$ y que muestra la existencia de las $(r, m; 3)$ -*jaulitas* de orden $n_0(r, m; 3) = 1 + m$. Para cuello $g = 4$ y $2 \leq r < m$ se probó en [38] (1981) que las gráficas bipartitas $K_{r,m}$ son las únicas *bijaulitas* con estos parámetros, así $n(r, m; 4) = n_0(r, m; 4) = r + m$. En ese mismo artículo se construyen familias de $(2, m; g)$ -*bijaulitas* con cuello $g \geq 3$. Por otro lado, Yuansheng y Liang en [90] (2003), mostraron que para $2 \leq r < m$ y $g = 6$ se cumple que $n(r, m; 6) > n_0(r, m; 6)$, concretamente probaron que $n(r, m; 6) \geq 2(rm - m + 1)$ y además probaron que $n(r, m; 6) = 2(rm - m + 1)$ si (i) $2 \leq r \leq 5$ y $r < m$ ó (ii) $m - 1$ es potencia de primo y $2 \leq r < m$. Posteriormente, en [3] (2008) se obtuvieron los primeros resultados generales para cuello $g \geq 6$ y $r \geq 3$, siendo uno de ellos la mejora a la Cota inferior (1.2) para $g \geq 8$, como se muestra en el Teorema 3.0.1.17, ya que para cuello $g = 6$ y $r \geq 3$ la cota dada en [90] es aún mejor.

Teorema 1.1.0.2. [3] Sea G una $(D; g)$ -*jaula* con $D = \{r, m\}$, donde $3 \leq r < m$ y el cuello $g \geq 6$ es par. Entonces

$$n(r, m; g) \geq \begin{cases} m + 2 + (mr - 2) \frac{(r - 1)^{g/2-2} - 1}{r - 2} + (r - 2)(r - 1)^{g/2-2} & \text{si } r \geq 4; \\ 1 + \frac{(7m + 3)2^{g/2-2}}{3} - m & \text{si } r = 3. \end{cases} \quad (1.3)$$

La existencia de las *bijaulitas* de cuello par encuentra su justificación en el siguiente corolario y su prueba es inmediata de la Cota (1.2) y de la Cota (3.2).

Corolario 1.1.0.3. Una $(r, m; g)$ -*jaula* de cuello par g es *bijaulita* si y sólo si (i) $r = 2$ y $g \geq 4$, ó (ii) $g = 4$. \square

$n(\{r, m\}; g)$	$g = 5$	$g = 6$	$g = 7$	$g = 8$	$g = 9$	$g = 11$
$r = 3$ $m \geq 4$	$3m + 1$ [42]	$4m + 2$ [54, 90]	$7m + 1$ [38]	$\frac{25m}{3} + 5$ $m = 3k$ [4] $9m + 3$ $m = 4, 5, 7$ [8]	$15m + 1$ $m \geq 6$ [42]	$31m + 1$ $m = 4k$ [4]
$r = 4$ $m \geq 5$	$4m + 1$ [54]	$6m + 2$ [90]	$13m + 1$ $m = 6k$ [4]			$121m + 1$ $m = 6k$ [4]
$5 \leq r < m$		$2(rm - m + 1)$ $m - 1 = p^\alpha$ [3, 90]				
$5 \leq r < m$ $r - 1 = p^\alpha$	$1 + rm$ $m = 2k(r - 1)$ [4]	$2(rm - m + 1)$ $m = k(r - 1) + 1$ [3], or $m = kr$ [4]	$1 + m(r^2 - r + 1)$ $m = 2k(r - 1)$ [4]			$1 + m \frac{(r-1)^5 - 1}{r-2}$ $m = 2k(r - 1)$ [4]

Cuadro 1.1: Valores exactos de $n(\{r, m\}; g)$.

En el Cuadro 1.1 se muestran los valores que se conocían hace un par de años sobre el orden de una $(r, m; g)$ -jaula, y como se puede observar para $r = 3$ sólo se conocían familias de $(3, m; g)$ -jaulas con cuellos $g \in \{4, 5, 6, 7, 9\}$ (ver [38, 42, 54, 90]), sin embargo para cuellos pares $g \geq 8$ no se tenían construcciones o pruebas de existencia de bijaulas con estos parámetros. A este respecto, los primeros resultados fueron mostrados en [4] (2009) para $g = 8$, basados en el hecho de que $n(\{3, 3k\}; 8) \geq 25k + 5$, como se desprende de la Cota (3.2).

Teorema 1.1.0.4. [4] Para $k \geq 2$, $n(\{3, 3k\}; 8) = 25k + 5$.

El problema para valores de $m \neq 3k$ queda planteado como un problema abierto en [4]. En esta tesis retomamos este problema dando solución para $m = 4, 5, 7$ y para los valores de $8 \leq m \leq 16$ obtenemos $(3, m; 8)$ -gráficas con ordenes cercanos al de una bijaula.

En esta tesis se construyen familias de bijaulitas de cuello impar, concretamente de cuello cinco y nueve. Las técnicas empleadas para construirlas varían dependiendo los parámetros como se verá a lo largo de este trabajo.

1.2. Geometrías Finitas

Los resultados que se muestran en esta tesis se basan en la existencia de modelos geométricos constituidos por un conjunto finito $X \neq \emptyset$ de elementos, un conjunto \mathcal{B}

de subconjuntos de X llamados bloques y una relación de incidencia entre X y \mathcal{B} . En nuestro trabajo los elementos son llamados puntos y los bloques son llamados líneas, y en este contexto dichas estructuras de incidencia son llamadas geometrías finitas.

El estudio que se ha hecho al respecto es muy amplio y se puede encontrar información en [44, 55], entre otros. Nosotros nos enfocamos en las geometrías finitas que se relacionan de manera regular, y que prueban la existencia de las $(k; g)$ -jaulitas de cuello par, cuando $k - 1$ es una potencia de primo.

1.2.1. Algunas geometrías finitas

La relación que guardan las geometrías finitas con las jaulas es un ejemplo de lo que sucede con frecuencia en matemáticas, en este caso la existencia de un vínculo entre dos ramas diferentes de la Combinatoria: la teoría de gráficas y la teoría de las geometrías finitas. Esta última fue clave para resolver en gran medida una pregunta que con la teoría de gráficas no se resolvió en un largo periodo de tiempo. A continuación definimos las geometrías finitas que fueron fundamentales en el desarrollo de esta tesis.

Definición 1.2.1.1. *Una estructura de incidencia es una terna $\mathcal{I} = (P, L, I)$ que consta de un conjunto finito de puntos P no vacío, un conjunto L de subconjuntos de P cuyos elementos son llamados líneas y una relación de incidencia $I \subseteq P \times L$. Si $(p, l) \in I$ diremos que el punto p es incidente a la línea l , o bien que la línea l pasa por el punto p .*

Definición 1.2.1.2. *Un espacio parcialmente lineal es una estructura de incidencia $\mathcal{I} = (P, L, I)$ que cumple dos axiomas:*

1. *Toda línea tiene al menos dos puntos.*
2. *Por cualesquiera dos puntos pasa a lo mas una línea.*

Definición 1.2.1.3. *Un espacio lineal $\mathcal{I} = (P, L, I)$ es un espacio parcialmente lineal que cumple que por cualesquiera dos puntos pasa exactamente una línea.*

Definición 1.2.1.4. *La gráfica de Levi ó gráfica de incidencia $\Omega(I)$ de una estructura de incidencia I , es una gráfica bipartita que tiene como conjunto de vértices a $P \cup L$ y donde dos vértices son adyacentes si son incidentes en I .*

1.2.2. Polígonos generalizados

Los polígonos generalizados son ejemplos de geometrías finitas que garantizan la existencia de las $(r; g)$ -jaulitas cuando $q = r - 1$ es una potencia de primo y $g = 6, 8, 12$.

Definición 1.2.2.1. *Un n -gono generalizado es una estructura de incidencia $\mathcal{I} = (P, L, I)$ de orden (s, t) si cumple los siguientes cuatro axiomas:*

1. *Existe $s \geq 1$ y $t \geq 1$ tal que cualquier línea es incidente a exactamente $s + 1$ puntos y cualquier punto es incidente a exactamente $t + 1$ líneas.*
2. *Cualesquiera dos líneas se intersectan en a lo mas un punto y por cualesquiera dos puntos hay a lo mas una línea que pasa por ellos.*
3. *El diámetro de la gráfica de incidencia $\Omega(\mathcal{I})$ es n .*
4. *El cuello de $\Omega(\mathcal{I})$ es $2n$.*

Un n -gono generalizado se dice que es regular si $s = t$, y en este caso el orden del n -gono se define como s . Se puede verificar directamente que un n -gono generalizado de orden $s = 1$ se corresponde con un polígono en dos dimensiones. Feit y Higman probaron en [48] (1964) que si $s \geq 1$ y $t \geq 1$, entonces $n = 2, 3, 4, 6, 8$. Los n -gonos asociados a los enteros 3, 4, 6 y 8 se identifican con los planos proyectivos finitos (3-gonos generalizados), cuadrángulos generalizados (4-gonos generalizados), hexágonos generalizados (6-gonos generalizados) y octágonos generalizados (8-gonos generalizados), respectivamente. Cada uno de ellos, excepto el último, pertenece a la familia de n -gonos regulares, como se muestra en detalle a continuación.

Definición 1.2.2.2. *Un plano proyectivo finito es un espacio lineal (P, L, I) que cumple los siguientes tres axiomas:*

1. *Para todo $x_1, x_2 \in P$ existe una única $l \in L$ tal que $\{x_1, x_2\} \in l$,*
2. *para todo $l_1, l_2 \in L$ se tiene que $|l_1 \cap l_2| = 1$ y*
3. *existe un subconjunto $F \subseteq P$ de 4 puntos tal que $|l \cap F| \leq 2$ para toda $l \in L$.*

No es difícil probar usando estos axiomas, que en un plano proyectivo cualesquiera dos líneas tienen el mismo número de puntos [27]. Así, si $l \in L$ y $|l| = q + 1$ diremos que el plano proyectivo tiene orden $q = |l| - 1$ y en este caso denotaremos al plano por

Π_q , para referirnos a él como un plano proyectivo finito combinatorio (que responde a los axiomas). Se verifica directamente que la gráfica de incidencia de Π_q es $(q+1)$ -regular, tiene orden $2(q^2+q+1) = n_0(q+1; 6)$, y no es difícil probar que tiene cuello seis, es decir, la gráfica de incidencia de Π_q es una $(q+1, 6)$ -jaulita.

Definición 1.2.2.3. *Un cuadrángulo generalizado es un 4-gono generalizado (P, L, I) de orden (s, t) que tiene $(s+1)(st+1)$ puntos, $(t+1)(st+1)$ líneas y que cumple que para todo $p \in P$ y $l \in L$, donde $(p, l) \notin I$, existe exactamente una línea incidente a p y que intersecta a l .*

En particular, si el orden del cuadrángulo generalizado es q , entonces su gráfica de incidencia es $(q+1)$ -regular, tiene cuello 8 y orden $2(q+1)(q^2+1) = n_0(q+1; 8)$, es decir, se comporta como una $(q+1; 8)$ -jaulita. Además se sabe que si q es potencia de primo entonces el cuadrángulo generalizado de orden q existe y por lo tanto también la jaulita con estos parámetros. Hasta el momento no se conocen ejemplos de cuadrángulos generalizados regulares con orden diferente a una potencia de primo, ni jaulitas que respondan a esto, por lo que se conjetura que ambas estructuras no existen si q no es potencia de primo.

Definición 1.2.2.4. *Un hexágono generalizado es un 6-gono generalizado (P, L, I) de orden (s, t) que satisface que para todo par $(p, l) \notin I$ existe una única trayectoria de p a l de longitud tres o cinco.*

Un hexágono generalizado de orden q , existe si q es potencia de primo, y en este caso su gráfica de incidencia es $(q+1)$ -regular, tiene cuello 12 y orden $2(q^3+1)(q^2+q+1) = n_0(q+1; 12)$, lo que la convierte en una $(q+1; 12)$ -jaulita. Al igual que los cuadrángulos generalizados, se sabe que ambas estructuras (el hexágono generalizado y su gráfica de incidencia) existen si q es potencia de primo, de lo contrario se desconoce la respuesta.

Por último, cabe destacar que los octógonos generalizados también existen si q es potencia de primo aunque no son regulares y por lo tanto su gráfica de incidencia no es una jaulita, que tiene cuello 16 y es birregular.

1.2.3. Subestructuras de un plano proyectivo

La mayoría de nuestros resultados se basan en la existencia de los planos proyectivos y los cuadrángulos generalizados. Otros se basan en la existencia de el plano afín y el

plano biafín, ambas subestructuras del plano proyectivo y cuyas gráficas de incidencia han sido empleadas en [1], entre otros trabajos, para construir gráficas regulares de cuello cinco con pocos vértices. A continuación son definidas estas estructuras y en cada caso son enlistadas sus propiedades mas destacadas.

Definición 1.2.3.1. *El plano afín es un espacio lineal (P, L, I) que satisface los siguientes axiomas:*

1. *Para todo par de puntos $x_1, x_2 \in P$ existe una única $l \in L$ tal que $\{x_1, x_2\} \subset l$ (axioma de espacio lineal del plano proyectivo);*
2. *Para todo par $(p, l) \notin I$, existe una única $l_1 \in L$ tal que $p \in l_1$ y $l \cap l_1 = \emptyset$ y*
3. *Existe un conjunto de tres puntos no colineales.*

En un plano afín A se dice que dos líneas l_1, l_2 son paralelas, denotado por $l_1 || l_2$, si: (i) $l_1 = l_2$ ó (ii) $l_1 \cap l_2 = \emptyset$. Es fácil ver que esta relación es de equivalencia y a sus clases de equivalencia se les llama puntos ideales [44]. Si se define la incidencia de un punto ideal con cada una de las líneas de su clase, esto para cada punto ideal del plano afín, y además se define una nueva línea, llamada la línea ideal como el conjunto de puntos ideales, entonces la estructura de incidencia construida a partir del plano afín es un plano proyectivo. Al revés, un plano afín se puede construir a través de un plano proyectivo al quitarle a este una única línea.

Definición 1.2.3.2. *En una estructura de incidencia (P, L, I) se define una **bandera** como una pareja $(p, l) \in I$ y una **antibandera** como una pareja $(p, l) \notin I$.*

Definición 1.2.3.3. *Un semiplano elíptico de orden $k - 1$ es un plano parcial con v puntos y v líneas, tal que cada punto es incidente con k líneas y cada línea es incidente con k puntos, y que cumple los siguientes axiomas de paralelas: (a) para cada antibandera (p, l) existe a lo mas una línea $l' \in L$ tal que $p \in l'$ y $l || l'$ y (b) existe a lo mas un punto $p' \in l$, tal que p y p' son paralelos (es decir, no existe una línea incidente a ambos puntos).*

P. Dembowski probó que en un semiplano elíptico (P, L, I) de orden $w = k - 1$ (es decir, con $k = w + 1$ puntos en cada línea), todas las clases de paralelas en P y L tienen el mismo tamaño. Si suponemos que m es el tamaño de estas clases entonces también probó que $m|n(n - 1)$ y que el número total de puntos (líneas) es $n(n - 1) + m$. Además clasifica a los semiplanos elípticos en impropios, del tipo \mathcal{C} , tipo \mathcal{L} , tipo \mathcal{D} y tipo \mathcal{B} , dependiendo de si m vale: $1, n, n - 1, n - \sqrt{n}$ y g , con

$g \leq n - \sqrt{n}$, respectivamente.

Ejemplos de semiplanos elípticos se pueden encontrar en [13, 44, 51] y ejemplos de semiplanos elípticos del tipo \mathcal{C} que guardan una estrecha relación con los planos proyectivos finitos, son mostrados en la siguiente sección.

1.2.4. Tres estructuras algebraicas

Sea $q = p^n \geq 2$ una potencia de primo y α una $(q - 1)$ -ésima raíz primitiva de la unidad, es decir, $\alpha^{q-1} = 1$. Sea $GF(q) = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{q-2}\}$ el campo finito de orden q . Sea $P_A := \{(x, y)_0 : x, y \in GF(q)\}$ un conjunto con q^2 elementos, llamados puntos. Para $m, b, i \in GF(q)$ se define:

1. la línea $(m, b)_1 = \{(x, y)_0 \in P_A : y = mx + b\}$,
2. el conjunto $L_m = \{(m, b)_1 : b \in GF(q)\}$ de líneas con pendiente $m \in GF(q)$,
3. la línea $(*, b)_1 = \{(b, y)_0 : y \in GF(q)\}$ que satisface la ecuación $x = b$, es decir, la línea con pendiente “infinito” y
4. el conjunto $L_* = \{(*, b)_1 : b \in GF(q)\}$ de líneas con pendiente “infinita”.

Sea $p_i := \bigcap_{l \in L_i} l$, para cada $i \in GF(q)$ y el punto $p_\infty := \bigcap_{l \in L_*} l$. Los $(q+1)$ elementos del conjunto $\{p_0, \dots, p_{\alpha^{q-2}}, p_\infty\}$ son llamados puntos al “infinito” y todos ellos definen una nueva línea l_∞ , llamada la línea al “infinito”.

Proposición 1.2.4.1. *La estructura de incidencia (P, L, I) con conjunto de puntos $\mathbb{P} = P_A \cup \{p_0, \dots, p_{\alpha^{q-2}}, p_\infty\}$ y conjunto de líneas $L = \bigcup_{i \in GF(q)} L_i \cup L_* \cup l_\infty$ es un plano proyectivo de orden q .*

Demostración. Sea $\mathbb{P} = (P, L, I)$ como en la proposición. Se probará que \mathbb{P} satisface los tres axiomas que definen a un plano proyectivo.

Nótese que: (i) si $(x_1, y_1)_0, (x_2, y_2)_0 \in P_A$ con $x_1 \neq x_2$, entonces la recta $(m, b)_1$ con pendiente $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ los contiene y si $x_1 = x_2$ entonces ambos puntos están contenidos en $(*, b)_1$, (ii) si $(x, y)_0 \in P_A$ y $p_i \in l_\infty$ entonces la línea $(i, y - ix)_1$ los contiene y (iii) por definición cualquier par de puntos al “infinito” pertenecen a l_∞ , por lo tanto el primer axioma se satisface.

Por definición, $p_i \in \{p_0, \dots, p_{q-2}, p_\infty\}$ es el único punto que pertenece a todas las líneas con pendiente i ; además si $(m_1, b_1)_1, (m_2, b_2)_1 \in L$ son dos líneas con diferentes pendientes, entonces el punto $(x, y)_0$ con $x = ((b_2 - b_1)/(m_1 - m_2))$ pertenece a ambas líneas, por lo tanto el segundo axioma se cumple. Finalmente, el conjunto de puntos $\{(0, 0)_0, (0, 1)_0, (1, 0)_0, (1, 1)_0\}$ satisface el tercer axioma de un plano proyectivo. Por lo tanto, \mathbb{P} es un plano proyectivo. Finalmente, por construcción cada punto pertenece a $q + 1$ líneas y cada línea tiene $q + 1$ puntos, es decir, el orden de \mathbb{P} es q lo que completa la prueba. \square

Es claro de la Proposición 1.2.4.1 que la construcción de \mathbb{P} depende de la existencia del campo finito $GF(q)$, por esta razón \mathbb{P} recibe el nombre de **plano proyectivo algebraico de orden q** , denotado por $PG(2, q)$. También es claro que todo plano proyectivo algebraico de orden q es un plano proyectivo combinatorio Π_q , pero en general no es cierto que un plano combinatorio sea algebraico. Por ejemplo, existen cuatro plano proyectivos de orden 9 no isomorfos entre sí, todos ellos combinatorios, pero sólo uno algebraico. Sin embargo, para las potencia de primo $q = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ el único plano proyectivo que existe es el algebraico, y en estos casos Π_q coincide con $PG(2, q)$. En la Figura 1.2 se muestra el mas pequeño de los planos proyectivos finitos, llamado Plano de Fano (cuyo nombre se debe a Gino Fano), que coincide con el plano algebraico $PG(2, 2)$.

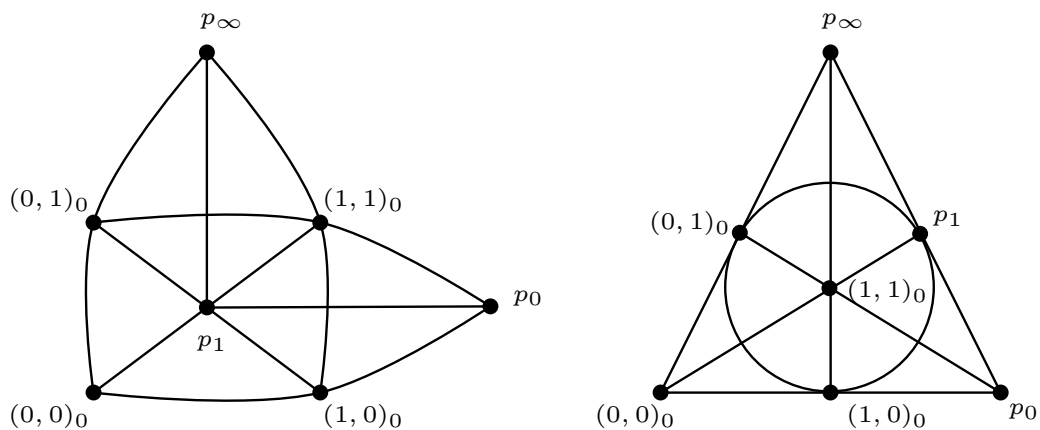


Figura 1.2: Ambas figuras representan al Plano de Fano. La de la izquierda es la representación “plantada” en el origen del plano cartesiano y la segunda es la representación estándar del plano proyectivo algebraico $PG(2, 2)$.

A la fecha sigue abierto el problema de determinar la existencia de un plano proyectivo de orden q , cuando q no es una potencia de primo. Sin embargo hay algunos resultados, como el Teorema 1.2.4.2 (1949) que descarta la existencia de planos proyectivos de ciertos ordenes.

Teorema 1.2.4.2. [61] *Sea q un entero que no es potencia de primo. Si $q \equiv 1, 2 \pmod{4}$ y q no es la suma del cuadrado de dos enteros, entonces el plano proyectivo de orden q no existe.*

La existencia de planos proyectivos de ordenes como 14, 21 y 22 quedan resueltos por el Teorema 1.2.4.2 y otros valores como 12 siguen abiertos. Sin embargo valores como 6 y 10 se han resuelto con otros métodos, el primero, resuelto alrededor de 1900, descarta la existencia de Π_6 al hacer un detallado análisis de casos y la prueba de que no existe el plano proyectivo de orden 10 es consecuencia de numerosos calculos computacionales.

Las otras dos estructuras de incidencia que son básicas en el desarrollo del Capítulo 2 se definen a continuación:

Definición 1.2.4.3. *Si q es una potencia de primo se define:*

1. el **plano afín algebraico de orden q** , como $AG(2, q) := PG(2, q) - \{l_\infty\}$ y
2. el **plano biafín de orden q** , como $AG(2, q) - L_*$.

Otra forma de obtener un plano biafín de orden q es eliminando del plano proyectivo $PG(2, q)$ la bandera (p_∞, l_∞) junto con todas las líneas y puntos incidentes a cada uno de ellos. Es fácil ver que todo plano biafín de orden q es un semiplano elíptico de tipo \mathcal{C} de orden $q - 1$ [44, 51], sin embargo la implicación contraria no necesariamente es cierta.

1.2.5. Tres gráficas de Levi

Dedicamos este apartado a las gráficas de incidencia (o gráficas de Levi) de un plano proyectivo algebraico, plano afín y biafín y al final desglosaremos las propiedades mas importantes de la gráfica de incidencia de un plano biafín, que fueron fundamentales para muchas de las pruebas del Capítulo 2.

La **gráfica de incidencia del plano proyectivo $PG(2, q)$** es una gráfica bipartita

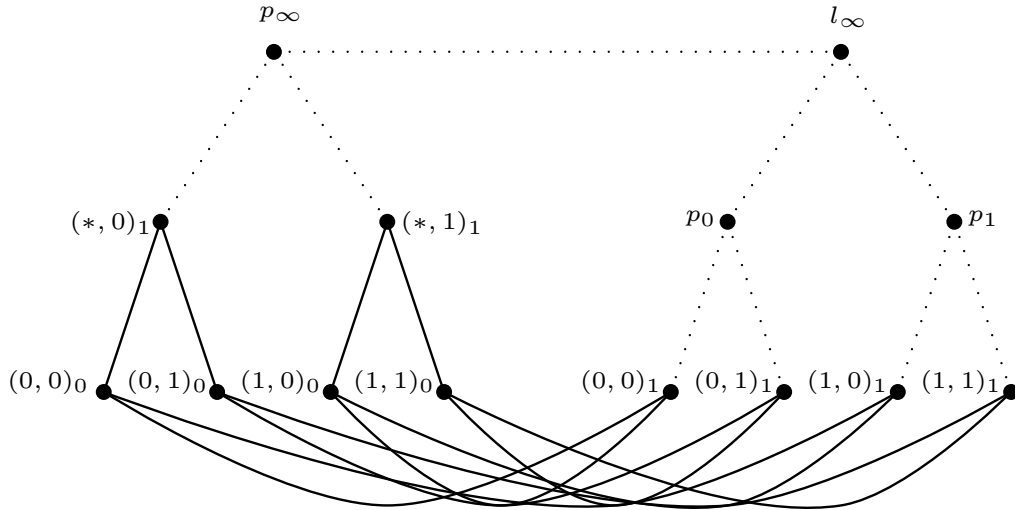


Figura 1.3: La gráfica de incidencia del plano proyectivo algebraico $PG(2,2)$. En punteado lo que no pertenece a la gráfica de incidencia del plano afín $AG(2,2)$ y B_2 es la gráfica $AG(2,2) - \{(*,0)_1, (*,1)_1\}$.

$(q+1)$ -regular, con $2(q^2 + q + 1)$ vértices, tal que:

- (i) $N(l_\infty) = \{p_0, \dots, p_{q^2-2}, p_\infty\}$,
- (ii) $N((*, b)_1) = \{(b, y)_0 : y \in GF(q)\} \cup \{p_\infty\}$ y
- (iii) $N((m, b)_1) = \{(x, y)_0 : y = mx + b\}$

La **gráfica de incidencia del plano afín $AG(2,q)$** , denotada por A_q , es la gráfica bipartita con $2q^2 + q$ vértices, que resulta de quitarle a la gráfica de incidencia del plano proyectivo $PG(2,q)$ el conjunto de vértices $\{l_\infty, p_0, \dots, p_{q^2-2}, p_\infty\}$.

Finalmente, la **gráfica de incidencia del plano biafín de orden q** es denotada por B_q y es definida como la gráfica bipartita que resulta de eliminar de la gráfica de incidencia de un plano afín de orden q , el conjunto de vértices $\{(*, b)_1 : b \in GF(q)\}$. Así, $V(B_q) = P_A \cup \bigcup_{m \in GF(q)} L_m$, y si $V_0 := P_A$ y $V_1 = \bigcup_{m \in GF(q)} L_m$, entonces el vértice $(x, y)_0 \in V_0$ es adyacente al vértice $(m, b)_1 \in V_1$ si y sólo si $y = mx + b$. Cabe resaltar que las etiquetas heredadas de la gráfica de incidencia del plano proyectivo $PG(2,q)$ a los vértices de B_q fueron muy útiles al momento de probar la regularidad y el cuello en las construcciones obtenidas en el Capítulo 2 (cfr. subsecciones 2.1.1, 2.1.2). Ver la Figura 1.3 a modo de ejemplo de estas tres estructuras para $q = 2$.

En el marco de la teoría de gráficas extremales, la gráfica B_q ha resultado muy útil en la búsqueda de gráficas sin ciclos cortos y en trabajos relacionados con el diámetro y la cota de Moore (cf. e.g. [1, 6, 7, 11, 12, 14, 67]). Además, la gráfica B_q coincide con la gráfica de Levi asociada a un semiplano elíptico de tipo \mathcal{C} de orden q .

A continuación se enuncian algunas de las propiedades más conocidas de B_q , fundamentales para el desarrollo del capítulo 2 [1, 56, 67]. Ver Figura 1.4 a modo de ilustración.

Proposición 1.2.5.1. *Sea B_q la gráfica de incidencia de un plano biafín. Para cada $x \in GF(q)$ se define $P_x = \{(x, y)_0 \mid y \in GF(q)\}$ y para cada $m \in GF(q)$ se define $L_m = \{(m, b)_1 \mid b \in GF(q)\}$. Entonces la gráfica B_q tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es q -regular, vértice transitiva, de orden $2q^2$ y tiene cuello 6 para $q \geq 3$;*
2. *Admite la partición (V_0, V_1) que la define como bipartita:
 $V_0 = \bigcup_{x \in GF(q)} P_x$ y $V_1 = \bigcup_{m \in GF(q)} L_m$ en su conjunto de vértices;*
3. *Para $x, m \in GF(q)$, el bloque P_x está conectado al bloque L_m por medio de un apareamiento perfecto;*
4. *Cada vértice en $P_0 \cup L_0$ está conectado de manera directa con todos sus vecinos en B_q , es decir $N((0, y)_0) = \{(i, y)_1 \mid i \in GF(q)\}$ y $N((0, b)_1) = \{(j, b)_0 \mid j \in GF(q)\}$;*
5. *El resto de los apareamientos entre P_x y L_m no van directos en el sentido anterior, pero sí preservan cierta traslación uniforme dada por la regla algebraica $y = mx + b$ sobre $GF(q)$.*

Se puede encontrar más información sobre estas propiedades, incluso sobre la matriz de adyacencia de B_q vista como bloques de matrices de ceros y unos, en [5, 13, 16].

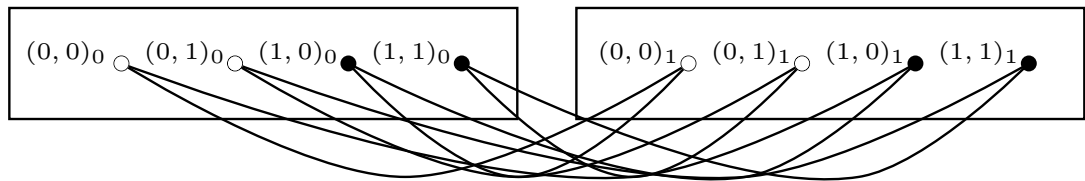


Figura 1.4: La gráfica B_2 y la partición en sus vértices: los dos rectángulos encierran de izquierda a derecha a los vértices de V_0 y V_1 respectivamente y los vértices de color negro pertenecen de izquierda a derecha a P_1 y L_1 respectivamente.

Capítulo 2

Jaulas birregulares de cuello impar

El contenido de este capítulo está dedicado al estudio de las bijaulitas de cuello impar, las cuales están completamente determinadas si el cuello es tres [62](1977), por lo cual a lo largo del capítulo se verán construcciones de bijaulas de cuellos al menos cinco, mismas que clasificamos en dos tipos: (i) construcciones de $(r, m; g)$ -jaulitas, con $m \in \mathbb{Z}^+ - A$, donde A es numerable y el valor de m depende de r y (ii) construcciones de $(r, m; g)$ -jaulitas, con $m \in \mathbb{Z}^+ - A$, donde A es finito y el valor de r es un entero fijo.

En el siguiente índice se desglosan los resultados abarcados en este capítulo de acuerdo a la clasificación anterior, indicando también la sección en que aparecerán. Los resultados se dividen en dos secciones, en la primera, Sección 2.1, se muestran los resultados obtenidos en el artículo “Biregular cages of girth 5”, aceptado y publicado recientemente en la revista “The Electronic Journal of Combinatorics”, 20(1) (2013), en correspondencia con los puntos 1(a), 1(b) y 1(c) de este índice. En la segunda sección se plantean construcciones de bijaulitas con la propiedad de tener un único vértice de grado máximo, en correspondencia con los puntos restantes de este índice.

Nuestros resultados muestran una valiosa aportación al estudio sobre la existencia de bijaulitas de cuello impar, ya que previo a este trabajo sólo eran conocidas las $(r, 2k(r - 1); g)$ -jaulas construidas para $g = 5, 7, 11$ y $r - 1$ una potencia de primo [4](2009) (que caen en el marco del punto (i) de nuestra clasificación), las $(3, m; 5)$ -jaulas, construidas por M. Downs, et al. en [42](1981) y las $(4, m; 5)$ -jaulas, construidas por D. Hanson et al. en [54](1992) (enmarcadas en el punto (ii) de nuestra

clasificación).

Jaulas birregulares de cuello impar

1. Construcción de $(r, m; g)$ -jaulitas para $m \in \mathbb{Z}^+ - A$, donde A es numerable.
 - (a) $(r, 2r - 3; 5)$ -jaulitas para todo $r - 1 \geq 4$ potencia de primo. (Subsección 2.1.1)
 - (1) Construcción de una familia con r elementos, de $(r, 2r - 3; 5)$ -jaulitas no isomorfas entre sí, para todo $r - 1 = p^\alpha$ par.
 - (b) $(r, 2r - 5; 5)$ -jaulitas para todo primo $r \geq 6$ (Subsección 2.1.3)
 - (c) $(r, r + 1; 5)$ -jaulitas para $r = 5, 6$. (Subsección 2.1.4)
 - (d) $(q, 2q - 1; 5)$ -jaulitas para $q = r - 1$, $q = p^\alpha$, p impar. (Subsección 2.2.1)
 - (e) $(q, 2q; 5)$ -jaulitas para $q = r - 1$, $q = p^\alpha$, p impar. (Subsección 2.2.2)
 - (f) $(q, 2q + 1; 5)$ -jaulitas para $q = r - 1$, $q = p^\alpha$, p impar. (Subsección 2.2.3)
 - (g) $(r, 2r - 4; 5)$ -jaulitas para $r - 1 = p^\alpha$, $r \geq 5$. (Subsección 2.2.4)
2. Construcción de $(r, m; g)$ -jaulitas para $m \in \mathbb{Z}^+ - A$, donde A es finito.
 - (a) Cuello $g = 5$
 - (1) $(5, m; 5)$ -jaulitas para toda $m \geq 6$. (Subsección 2.2.5)
 - (2) $(6, 2s; 5)$ -jaulitas para toda $s \geq 4$. (Subsección 2.2.6)
 - (3) $(6, 2s + 1; 5)$ -jaulitas para $s = 3, 4$. (Subsección 2.2.7)
 - (b) Cuello $g = 9$
 - (1) $(4, m; 9)$ -jaulitas para toda $m \geq 5$. (Subsección 2.2.8)

2.1. Jaulas birregulares de cuello cinco

Los resultados de esta sección fueron publicados en el artículo “Biregular cages of girth 5” [9], y las construcciones que responden a este artículo están en correspondencia con los puntos 1.a, 1.b y 1.c del índice anterior. Respecto a los métodos de

construcción que empleamos para obtener estas gráficas, el que predominó lleva por nombre “método de reducción y amalgama”, usado por primera vez bajo este nombre en [1] para construir $(r; 5)$ -gráficas con pocos vértices.

2.1.1. Una familia de $(r, 2r - 3; 5)$ -jaulitas.

Iniciamos este apartado con la justificación de los puntos 1.a y 1.a,1 del índice anterior. La descripción de estas construcciones es sencilla y se muestra ajena al método de “reducción y amalgama”, razón por la que decidimos presentarlas en primer lugar. En el siguiente apartado, Subsección 2.1.2, se describen las operaciones de reducción y amalgama empleadas en las Subsecciones 2.1.3 y 2.1.4 para construir las gráficas del punto 1.b y 1.c de este índice, respectivamente.

Al añadir aristas a la gráfica de Levi A_q asociada al plano afín $AG(2, q)$ de orden $q = r - 1$, obtuvimos una familia de $(r, 2r - 3; 5)$ -jaulitas para todo $r \geq 4$. De igual forma, se consiguen $q + 1$ de estas bijaulitas no isomorfas entre sí, siempre que q sea una potencia de primo par.

Para facilitar la descripción de nuestras pruebas empleamos las etiquetas de los vértices de B_q descritas en la Proposición 1.2.5.1 de la Introducción.

Teorema 2.1.1.1. *Sea q una potencia de primo. Si $r = q + 1$, entonces existe una $(r, 2r - 3; 5)$ -jaulita con $r(2r - 3) + 1$ vértices.*

Demostración. Sea R_q la gráfica con conjunto de vértices $V(R_q) := V(A_q)$ y conjunto de aristas $E(R_q) := E(A_q) \cup D$, donde $D = \{(m, 0)_1(m, b)_1 \mid b \in GF^*(q), m \in GF(q) \cup \{*\}\}$. Nótese que en R_q los vértices del conjunto $M := \{(m, 0)_1 \mid m \in GF(q) \cup \{*\}\} \subset V(R_q)$ tienen grado $q + (q - 1) = 2q - 1 = 2r - 3$ y el resto de ellos tienen grado $q + 1 = r$.

Considérese un ciclo C en R_q y téngase en cuenta que $B_q \subset A_q \subset R_q$. Si las aristas de C están totalmente contenidas en A_q , entonces la longitud de C es al menos seis ya que A_q es la gráfica de incidencia de un plano afín. En otro caso, C contiene al menos una arista $e = xy \in D$. Como $d_{A_q}(x, y) = 4$, entonces la longitud de C en R_q es al menos cinco y exactamente cinco si C contiene una única arista de D . Aun más, el ciclo de longitud cinco $C := \{(*, 0)_1, (*, 1)_1, (1, 0)_0, (0, 0)_1, (0, 0)_0\}$ está contenido en R_q , lo que indica que el cuello de R_q es cinco y $(*, 0)_1(*, 1)_1$ es la única arista de

C en D . Finalmente, $|V(R_q)| = |V(A_q)| = 2q^2 + q = 2r^2 - 3r + 1 = r(2r - 3) + 1$. \square

Corolario 2.1.1.2. *La gráfica R_q es una jaula semi-regular si y sólo si $r = 4$.*

Demostración. La prueba es inmediata ya que $2r - 3 = r + 1$ si y sólo si $r = 4$. \square

Cabe destacar que la gráfica R_3 , ilustrada en la Figura 2.1, es isomorfa a la $(4, 5; 5)$ -jaula obtenida por D. Hanson et. al. en [54], como parte de la familia de $(4, m; 5)$ -jaulas construidas por ellos. En particular, cuando $q = 2$ la gráfica R_2 es isomorfa a la gráfica de Petersen, como se muestra en la Figura 2.2.

A continuación se describe la construcción de una familia de $(r, 2r - 3; 5)$ -jaulitas, con $q + 1$ elementos no isomorfos entre sí.

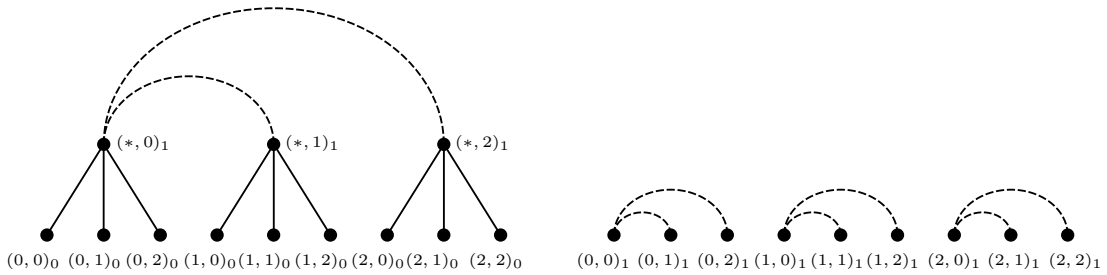


Figura 2.1: La gráfica R_3 (una $(4, 5; 5)$ -jaulita) sin las aristas de B_3 . Las aristas añadidas a la gráfica de incidencia del plano afín $AG(2, 3)$ aparecen punteadas.

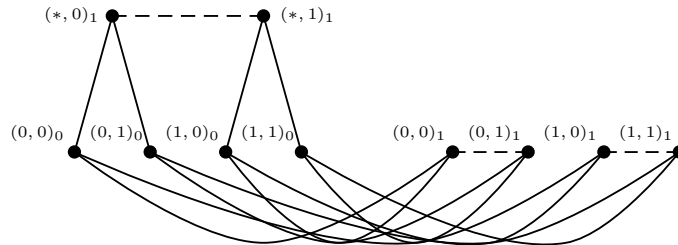


Figura 2.2: La gráfica R_2 isomorfa a la gráfica de Petersen. Las aristas añadidas a la gráfica de incidencia del plano afín $AG(2, 2)$ aparecen punteadas.

Construcción 2.1.1.3. Sea q una potencia de primo par. Considérense los siguientes conjuntos de aristas para cada $m \in GF(q)$:

1. $D_m := \{(m, 0)_1(m, b)_1 \mid b \in GF^*(q)\}$;
2. $F_m := \{(m, 0)_1(m, 1)_1\} \cup \{(m, \alpha^i)_1(m, \alpha^{i+1})_1 \mid 1 \leq i \leq q - 3, i \text{ impar}\}$.

Sea I_t un conjunto de índices, para $0 \leq t \leq q$, definido de la siguiente manera: (i) como el conjunto \emptyset , si $t = 0$, (ii) como el conjunto $\{\alpha^{q-t-1}, \dots, \alpha^{q-2}\}$, si $1 \leq t \leq q-1$ y (iii) como el conjunto $GF(q)$, si $t = q$.

Finalmente, si $D_* := \{(*, 0)_1(*, b)_1 \mid b \in GF^*(q)\}$, entonces se define la gráfica $G_t = (V(G_t), E(G_t))$, para cada $0 \leq t \leq q$ con $V(G_t) := V(A_q)$ y $E(G_t) := E(A_q) \cup F_t \cup D_t \cup D_*$, donde

$$F_t := \bigcup_{m \in GF(q) \setminus I_t} F_m \quad \text{y} \quad D_t := \bigcup_{m \in I_t} D_m.$$

Haciendo abuso de la notación, es claro que $D_m \cong K_{1, q-1}$ y que F_m es un apareamiento perfecto inducido por los vértices de L_m . Entonces G_t se puede obtener a partir de A_q al añadirle $q - t$ apareamientos perfectos y $t + 1$ estrellas, ver a modo de ejemplo la Figura 2.3, donde $q = 4$ y $t = 2$. Además G_q coincide con la gráfica R_q descrita anteriormente cuando $t = q$.

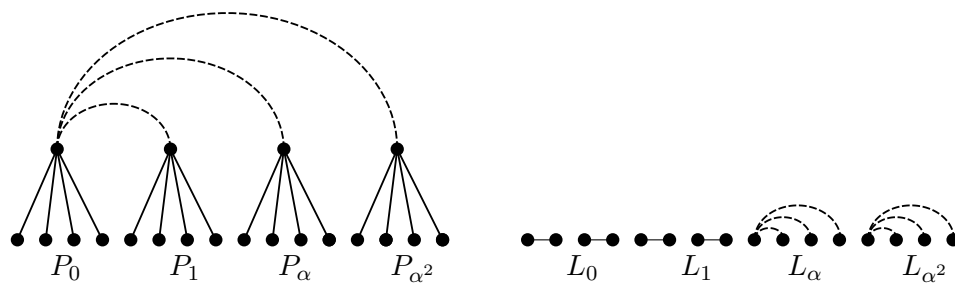


Figura 2.3: La gráfica G_2 es una $(5, 7; 5)$ -jaulita sin las aristas de B_3 . Las aristas añadidas a la gráfica de incidencia del plano afín $AG(2, 4)$ aparecen punteadas.

Teorema 2.1.1.4. Sea q una potencia de primo par. Si $q = r - 1$, entonces existen al menos $q + 1$ bijaulas con conjunto de grados $\{r, 2r - 3\}$, cuello $g = 5$ y no isomorfas entre sí.

Demostración. Sea $\{G_t\}_{t=0}^q$ una familia de gráficas definidas como en la Construcción 2.1.1.3. Haciendo un razonamiento análogo a la prueba del Teorema 2.1.1.1, se tiene

que para toda $0 \leq t \leq q$, la gráfica G_t tiene $t + 1$ vértices de grado $2r - 3$, el resto de grado r , cuello 5 y orden $r(2r - 3) + 1$. Aún mas, $G_i \not\cong G_j$, para $i, j \in GF(q) \cup \{q\}$ con $i \neq j$, ya que G_i y G_j tienen $i + 1$ y $j + 1$ vértices de grado $2r - 3$, respectivamente. \square

2.1.2. Operaciones sobre B_q

La eliminación de elementos de una gráfica ha sido utilizado, entre otros propósitos, para construir gráficas birregulares con pocos vértices. En este trabajo empleamos el término de “reducción” para referirnos a la operación que reduce el orden de la gráfica B_q al eliminar subconjuntos de vértices de ella. También empleamos el término “amalgama” para hacer referencia al proceso de añadir aristas de una gráfica a otra. El trato que le damos en esta tesis a estos dos términos es el de operación. Ambas son utilizadas como parte de un proceso para construir gráficas birregulares de cuello cinco con pocos vértices y en algunos casos bijaulitas. Esta idea está inspirada en la filosofía empleada en [1] para construir gráficas regulares de cuello cinco con orden pequeño, técnica y términos que Funk empleó por primera vez en [51] para construir gráficas de cuello cinco desde semiplanos elípticos.

Reducciones

Emplearemos dos tipos de reducciones, ambas fieles a la descripción dada en [1].

REDUCCIÓN 1 [1] Eliminar vértices de P_0 y L_0 .

Sean $T \subseteq S \subseteq GF(q)$, $S_0 = \{(0, y)_0 | y \in S\} \subseteq P_0$, $T_0 = \{(0, b)_1 | b \in T\} \subseteq L_0$ y $B_q(S, T) := B_q - S_0 - T_0$. A modo de ilustración ver la Figura 2.4.

Lema 2.1.2.1. *Sea $T \subseteq S \subseteq GF(q)$. Entonces $B_q(S, T)$ es una gráfica birregular con conjunto de grados $\{q - 1, q\}$ y orden $2q^2 - |S| - |T|$. Además, los únicos vértices de grado $q - 1$ en $B_q(S, T)$ satisfacen que $(i, t)_0 \in V_0$ y $(j, s)_1 \in V_1$, para cada $i, j \in GF(q) - \{0\}$, $s \in S$ y $t \in T$, junto con $(0, s)_1 \in V_1$ para $s \in S - T$ if $T \subsetneq S$.*

Demostración. La prueba es inmediata de la Proposición 1.2.5.1 (1), (5). \square

REDUCCIÓN 2 Eliminar los bloques P_i y L_j de B_q ó de $B_q(S, T)$.

Sean u_0, u_1 enteros, tales que $0 \leq u_0 \leq u_1 < q - 1$. Consideremos el conjunto de

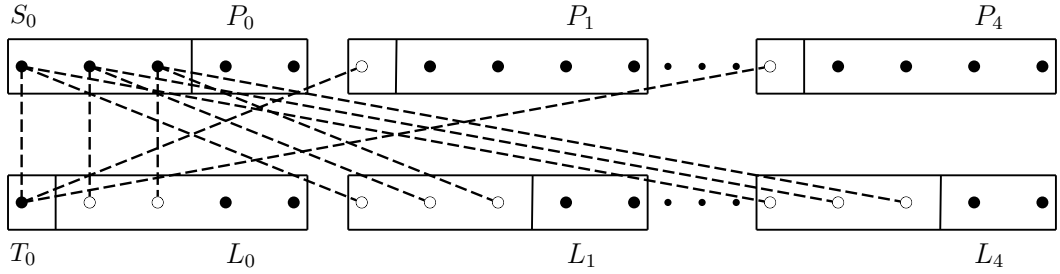


Figura 2.4: La gráfica $B_5(S, T)$ sin las aristas de B_5 , donde $T \subset S \subset \mathbb{Z}_5$ tales que $T = \{0\}$ y $S = \{0, 1, 2\}$. Las aristas punteadas no pertenecen a $B_5(S, T)$. Los vértices en $B_5(S, T)$: tienen grado 5 si son negros y tiene grado 4 si son blancos.

índices $U_i := \{\alpha^{q-j} \in GF(q) : j = 2, \dots, u_i + 1\}$, para $i = 0, 1$ y los siguientes conjuntos de bloques de B_q :

1. $\mathcal{U}_0 := \{P_x \subset V_0 : x \in U_0\}$ si $1 \leq u_0 \leq q - 1$ ó $\mathcal{U}_0 := \emptyset$ si $u_0 = 0$;
2. $\mathcal{U}_1 := \{L_m \subset V_1 : m \in U_1\}$ si $1 \leq u_1 \leq q - 1$ ó $\mathcal{U}_1 := \emptyset$ si $u_1 = 0$.

Se define $B_q(u_0, u_1) := B_q - \mathcal{U}_0 - \mathcal{U}_1$, es decir es la gráfica que resulta de B_q al eliminar los últimos u_0 bloques de V_0 y los últimos u_1 bloques de V_1 . Análogamente, se define $B_q(S, T, u_0, u_1) := B_q - (S_0 \cup T_0) - (\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1)$, es decir es la gráfica que resulta de operar la Reducción 1 en la gráfica $B_q(u_0, u_1)$. Claramente, cuando $u_0 = u_1 = 0$, se tiene que $B_q(0, 0) = B_q$ y $B_q(S, T, 0, 0) = B_q(S, T)$.

Lema 2.1.2.2. Sean u_0, u_1 enteros, con $0 \leq u_0 \leq u_1 < q - 1$. Entonces

1. la gráfica $B_q(u_0, u_1)$ tiene conjunto de grados $\{q - u_0, q - u_1\}$ y orden $2q^2 - q(u_0 + u_1)$ si $u_0 \neq u_1$;
2. la gráfica $B_q(u_0, u_1)$ es $(q - u_0)$ -regular de orden $2q(q - u_0)$ si $u_0 = u_1$;
3. la gráfica $B_q(S, T, u_0, u_1)$ tiene conjunto de grados $\{q - u_0, q - u_1, q - u_0 - 1, q - u_1 - 1\}$ y orden $2q^2 - q(u_0 + u_1) - |S| - |T|$. Además, los únicos vértices de grado $q - u_1 - 1$ satisfacen que $(i, t)_0 \in V_0$ con $i \in GF(q) - U_0$ y $t \in T$ y los únicos vértices de grado $q - u_0 - 1$ satisfacen que $(j, s)_1 \in V_1$ con $j \in GF(q) - U_1$ y $s \in S$, junto con los vértices $(0, s)_1 \in V_1$, para $s \in S - T$ si $T \subsetneq S$.

Demostración. Consecuencia de la Proposición 1.2.5.1 (1), (5) y el Lema 2.1.2.1. \square

Amalgama

Sean Γ_1 y Γ_2 dos gráficas del mismo orden y con las mismas etiquetas en sus vértices. En general, una *amalgama de Γ_1 en Γ_2* es una gráfica que se obtiene al añadir todas las aristas de Γ_1 a Γ_2 . Esta noción es empleada como parte del proceso que utilizamos para construir nuestras gráficas. La idea es partir de la gráfica B_q , reducir su orden al de la gráfica que se desea construir por medio de las operaciones de reducción y finalmente, amalgamar gráficas entre los vértices que sobrevivieron al proceso de reducción, a fin de completar los grados de los vértices necesarios para obtener birregularidad.

Para facilitar la descripción de las gráficas que amalgamamos, nos apoyamos en las etiquetas de los vértices de B_q introducidas en la Proposición 1.2.5.1.

Considérese la gráfica $B_q(S, T, u_0, u_1)$, para $T \subseteq S \subseteq GF(q)$ y $0 \leq u_0 \leq u_1 < q - 1$. Sean $S_0 \subseteq P_0$, $T_0 \subseteq L_0$ como en la Reducción 1 y sean $P'_0 := P_0 - S_0$ y $L'_0 := L_0 - T_0$ los bloques en $B_q(S, T, u_0, u_1)$ de orden $q - |S|$ y $q - |T|$, respectivamente.

Sean H_0, G_0, H_1 y G_1 gráficas de cuello al menos 5, con ordenes $q - |S|$, q , $q - |T|$ y q , respectivamente. Los vértices de P_i y L_i son etiquetados como en la Proposición 1.2.5.1, mientras que las etiquetas de H_0, G_0, H_1 , y G_1 corresponden unicamente a las segundas coordenadas de P'_0, P_i, L'_0 y L_j , para $i \in GF^*(q) - U_0$ y $j \in GF^*(q) - U_1$, respectivamente. La siguiente definición describe el concepto de amalgama y como apoyo sugerimos ver la Figura 2.5.

Definición 2.1.2.3. *La amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ es la gráfica que resulta de amalgamar a H_0 en P'_0 , H_1 en L'_0 , G_0 en P_i , para $i \in GF^*(q) - U_0$ y G_1 en L_j , para $j \in GF^*(q) - U_1$.*

Nótese que $|V(B_q^*(S, T, u_0, u_1))| = |V(B_q(S, T, u_0, u_1))|$ y que las etiquetas de G_0 y G_1 son los elementos de $GF(q)$, mientras que las etiquetas de H_0 y H_1 son, los elementos de $GF(q)$ o bien un subconjunto propio de acuerdo a los conjuntos S, T . El siguiente lema muestra el grado de los vértices de la amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$.

Lema 2.1.2.4. *Sea $G := B_q^*(S, T, u_0, u_1)$. Entonces los grados de los vértices de G son:*

1. $d_G((0, y)_0) = q - u_1 + d_{H_0}(y)$,
2. $d_G((0, b)_1) = q - u_0 + d_{H_1}(b)$ si $b \notin S - T$,

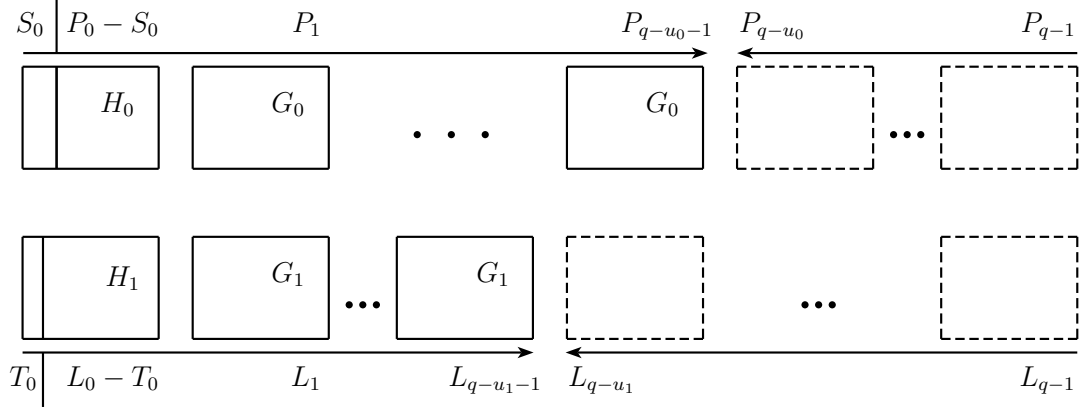


Figura 2.5: La amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ sin las aristas de B_q . Los paquetes punteados no pertenecen a la amalgama.

3. $d_G((0, b)_1) = q - u_0 - 1 + d_{H_1}(b)$ si $b \in S - T$,
4. $d_G((x, y)_0) = q - u_1 + d_{G_0}(y)$ si $y \notin T$,
5. $d_G((x, y)_0) = q - u_1 - 1 + d_{G_0}(y)$ si $y \in T$,
6. $d_G((m, b)_1) = q - u_0 + d_{G_1}(b)$ si $b \notin S$,
7. $d_G((m, b)_1) = q - u_0 - 1 + d_{G_1}(b)$ si $b \in S$,

Demostración. La prueba es inmediata de la Definición 2.1.2.3. □

Definición 2.1.2.5. Sea $M_F := \{(u, v) : u, v \in GF(q) \text{ y } uv \in E(F)\}$, para $F \in \{H_0, H_1, G_0, G_1\}$. Para cada $(u, v) \in M_F$, se define el peso ó color de Cayley como $\omega((u, v)) = \pm(u - v) \in GF^*(q)$ y se define el conjunto de pesos ó el conjunto de colores de Cayley de F como $\Omega(F) := \{\omega((u, v)) : (u, v) \in M_F\}$, para $F \in \{H_0, H_1, G_0, G_1\}$.

Obsérvese que la condición $\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2) = \emptyset$ implica que $M_{F_1} \cap M_{F_2} = \emptyset$, para $F_1, F_2 \in \{H_0, H_1, G_0, G_1\}$ y $F_1 \neq F_2$, sin embargo la implicación contraria no necesariamente es cierta.

El siguiente teorema establece condiciones suficientes sobre el peso de las aristas para que la amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ tenga cuello al menos cinco. Además, este teorema generaliza al Teorema 5 [1] y al Teorema 2.8 [51].

Teorema 2.1.2.6. Sean $T \subseteq S \subseteq GF(q)$ y $0 \leq u_0 \leq u_1 < q - 1$. La amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ tiene cuello al menos 5 y orden $2q^2 - q(u_0 + u_1) - |S| - |T|$ si las gráficas H_0, H_1, G_0, G_1 cumplen que $M_{H_0} \cap M_{H_1} = \emptyset$, $M_{H_0} \cap M_{G_1} = \emptyset$, $M_{H_1} \cap M_{G_0} = \emptyset$ y $\Omega(G_0) \cap \Omega(G_1) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos primero que $u_0 = u_1 = 0$, así $B_q^*(S, T, u_0, u_1) = B_q^*(S, T)$. Sea C un ciclo de longitud mínima en $B_q^*(S, T)$ y supongamos por reducción al absurdo que $|C| \leq 4$. Así, $C = (xyz)$ ó $C = (wxyz)$. Ya que B_q tiene cuello 6 y H_0, H_1, G_0, G_1 tienen cuello al menos cinco 5, entonces C no puede estar completamente contenido en ninguna de ellas. Entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que la trayectoria xyz es tal que $x, y \in P_i$, para algún $i \in GF(q)$ y $z \in L_m$ para alguna $m \in GF(q)$. Como la gráfica inducida por los vértices en $P_i \cup L_m$ es un apareamiento perfecto, entonces $xz \notin E(B_q)$ y de aquí que $xz \notin E(B_q^*(S, T))$. Se puede asumir entonces que $|C| = 4$ y que $C = (wxyz)$, con xyz como antes.

Si $w \in P_i$, por el mismo argumento, $wz \notin E(B_q^*(S, T))$, lo cual es una contradicción. Por otro lado, como no hay aristas en $B_q^*(S, T)$ entre P_i y P_j , entonces $w \notin P_j$ para $j \in GF(q) - \{i\}$ y como consecuencia $w \in L_n$, para algún $n \in GF(q)$. El caso $n \neq m$ también llega a una contradicción, ya que no hay aristas entre L_m y L_n en $B_q^*(S, T)$. Esto implica que $x, y \in P_i$ y $w, z \in L_m$. Si $x = (i, a_1)_0$, $y = (i, a_2)_0$, $w = (m, b_1)_1$ y $z = (m, b_2)_1$, entonces $wx, yz \in E(B_q^*(S, T))$. Esto implica que $a_1 = m \cdot i + b_1$ y $a_2 = m \cdot i + b_2$, respectivamente. Hay dos casos:

Caso 1) Si $m = 0$ ó $i = 0$, es decir, si $xy \in H_0$ ó $wz \in H_1$, entonces las ecuaciones de arriba se satisfacen si y sólo si $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$, pero esto contradice al menos una de las siguientes relaciones $M_{H_0} \cap M_{H_1} = \emptyset$, $M_{H_0} \cap M_{G_1} = \emptyset$ y $M_{H_1} \cap M_{G_0} = \emptyset$.

Caso 2) Si $m \neq 0$ y $i \neq 0$, es decir, si $xy \in G_0$ y $wz \in G_1$, entonces las ecuaciones de arriba son satisfechas si y sólo si $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, lo cual implica que $\pm(a_1 - a_2) \in \Omega(G_0)$ y $\pm(a_1 - a_2) = \pm(b_1 - b_2) \in \Omega(G_1)$, contradiciendo que $\Omega(G_0) \cap \Omega(G_1) = \emptyset$.

De aquí que $B_q^*(S, T)$ tiene cuello al menos cinco y ya que $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ es una subgráfica de $B_q^*(S, T)$, para $0 \leq u_0 \leq u_1 < q - 1$, entonces el cuello de $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ también es cinco. \square

2.1.3. Una familia de $(r, 2r - 5; 5)$ -jaulitas

Con ayuda del método de reducción y amalgama conseguimos construir $(r, 2r - 5; 5)$ -jaulitas, para todo primo $q = r + 1$. En este caso el campo finito $GF(q)$ coincide con \mathbb{Z}_q , por lo que las operaciones son tratadas módulo q . La descripción de esta familia es presentada en dos casos: para primos de la forma $q = 4n + 1$ y para primos de la forma $q = 4n + 3$. Además, el caso $q \equiv 3 \pmod{4}$ es presentado primero debido a que el valor mas pequeño que alcanza el entero $2r - 5$ ocurre cuando $q = 7 \equiv 3 \pmod{4}$.

En cada caso se especifican los conjuntos S_0 y T_0 que son eliminados de P_0 y L_0 , el número de bloques u_0 y u_1 eliminados en V_0 y V_1 y las gráficas H_0, H_1, G_0 y G_1 que usamos para construir la amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$.

Construcción para primos $q = 4n + 3, n \geq 1$.

Sean $S = \{\frac{q+1}{4}, -\frac{q+1}{4}\} = \{\frac{q+1}{4}, \frac{3q-1}{4}\}$; $T = \emptyset$; $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$. Consideremos la gráfica $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ que resulta de amalgamar las gráficas de la lista de acuerdo a los parámetros anteriores.

1. La gráfica H_0 es un $(q - 2)$ -ciclo tal que:

$$a) V(H_0) = \mathbb{Z}_q - \{\frac{q+1}{4}, \frac{3q-1}{4}\}$$

$$b) E(H_0) = \{(j, j + \frac{q-1}{2}) \mid j \in \mathbb{Z}_q - \{\frac{q+1}{4}, \frac{3q-1}{4}, \frac{3q+3}{4}\}\} \cup \{(\frac{3q+3}{4}, \frac{q-3}{4})\}$$

$$c) \Omega(H_0) = \{\frac{q-1}{2}, \frac{q-3}{2}\}$$

2. La gráfica G_0 es un q -ciclo tal que:

$$a) V(G_0) = \mathbb{Z}_q$$

$$b) E(G_0) = \{(j, j + \frac{q-1}{2}) \mid j \in \mathbb{Z}_q\}$$

$$c) \Omega(G_0) = \{\frac{q-1}{2}\}$$

3. Las gráficas $H_1 \cong G_1$ tales que:

$$a) V(H_1) = V(G_1) = \mathbb{Z}_q$$

$$b) E(H_1) = E(G_1) = \{(0, j) : j \in \mathbb{Z}_q^* - \{\frac{q-1}{2}, \frac{q+1}{2}\}\} \cup \{(\frac{q+1}{4}, \frac{q-1}{2}), (\frac{3q-1}{4}, \frac{q+1}{2})\}$$

$$c) \Omega(H_1) = \Omega(G_1) = \mathbb{Z}_q^* - \{\frac{q-1}{2}\}$$

A modo de ilustración se presenta en la Figura 2.6 la gráfica $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ para $q = 7$, sin las aristas de B_q . Cada estilo de línea representa un peso diferente (ó Color de Cayley). Como se probó en el Teorema 2.1.3.1, esta gráfica es una $(8, 11; 5)$ -jaula.

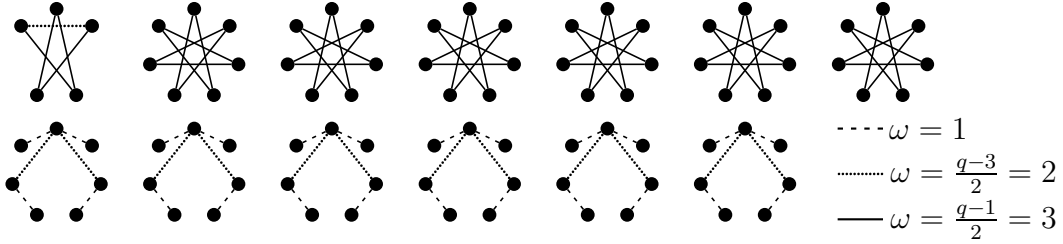


Figura 2.6: $B_7^*(S, T, 0, 1) - E(B_7)$ con $S = \{3, 5\}$ y $T = \emptyset$

Teorema 2.1.3.1. *Sea $n \geq 1$ y $q = 4n + 3$ un primo. Si $r = q + 1$, entonces la amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ es una $(r, 2r - 5; 5)$ -jaulita de orden $r(2r - 5) + 1$.*

Demostración. Del Lema 2.1.2.4 se tiene que $D(B_q^*(S, T, u_0, u_1)) = \{r, 2r - 5\}$. De hecho, todos los vértices en $V_0 \cap V(B_q(S, T, u_0, u_1))$ tienen grado $q - 1$. Además, $D(H_0) = D(G_0) = \{2\}$ ya que H_0 y G_0 son ciclos. De aquí que todos los vértices de $V_0 \cap V(B_q^*(S, T, u_0, u_1))$ tienen grado $q + 1 = r$. Distingamos tres subconjuntos de vértices en V_1 :

$$\begin{aligned}
 V_1' &:= \{(m, 0)_1 : m \in \mathbb{Z}_q\}, \\
 V_1'' &:= \{(m, t)_1 : m \in \mathbb{Z}_q, t \in \frac{q+1}{4}, \frac{3q-1}{4}\} \text{ y} \\
 V_1''' &:= \{(m, t)_1 : t \in \mathbb{Z}_q^* - \{\frac{q+1}{4}, \frac{3q-1}{4}\}\}.
 \end{aligned}$$

Los vértices en V_1''' tienen grado q en $B_q(S, T, u_0, u_1)$ y su grado en $H_1 \cup G_1$ es 1. De aquí que su grado en $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ sea $q + 1 = r$. Los vértices de V_1'' tienen grado $q - 1$ en $B_q(S, T, u_0, u_1)$, mientras que en $H_1 \cup G_1$ su grado es 2. De aquí que ellos tengan grado $q + 1 = r$ en $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$. Finalmente, los vértices en V_1' tienen grado q en $B_q(S, T, u_0, u_1)$, mientras que su grado en H_1 y G_1 es $q - 3$. De aquí que tengan grado $q + q - 3 = 2q - 3 = 2(r - 1) - 3 = 2r - 5$ en $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$.

Además, se puede verificar directamente que $\Omega(H_0) \cap \Omega(H_1) = \Omega(H_0) \cap \Omega(G_1) = \{\frac{q+3}{2}\}$ y que $M_{H_0} \cap M_{H_1} = M_{H_0} \cap M_{G_1} = \emptyset$, ya que la única arista de peso $\frac{q+3}{2}$ en H_0 es $(\frac{3q+3}{4}, \frac{q-3}{4})$, mientras que las aristas de peso $\pm \frac{q+3}{2}$ en H_1 y G_1 son $(0, \frac{q-3}{2})$ y $(0, \frac{q+3}{2})$. También se tiene que $\Omega(G_0) \cap \Omega(H_1) = \Omega(G_0) \cap \Omega(G_1) = \emptyset$, lo cual implica que $M_{G_0} \cap M_{H_1} = M_{G_0} \cap M_{G_1} = \emptyset$. Así, del Teorema 2.1.2.6 se tiene que el cuello de

$B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ es al menos 5. Además, el cuello es exactamente cinco, ya que contiene al 5-ciclo $\{(0, 0)_0, (0, \frac{q+1}{4})_0, (0, \frac{q-1}{2})_0, (0, \frac{q-1}{2})_1, (0, 0)_1\}$.

Por último, por el Lema 2.1.2.2, la gráfica $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ tiene orden $2q^2 - q(u_0 + u_1) - |S| - |T| = 2q^2 - q - 2 = r(2r - 5) + 1 = n_0(r, 2r - 5; 5)$. De aquí que la amalgama $B_q^*(S, T, 0, 1)$ es una $(r, 2r - 5; 5)$ -jaulita. \square

Construcción para primos $q = 4n + 1$, $n \geq 3$.

Sean $S = \{\frac{q-1}{4}, -\frac{q-1}{4}\} = \{\frac{q-1}{4}, \frac{3q+1}{4}\}$; $T = \emptyset$; $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$. Consideremos la gráfica $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ que resulta de amalgamar las gráficas de la lista de acuerdo a los parámetros anteriores.

1. La gráfica H_0 es un $(q - 2)$ -ciclo tal que:

$$a) V(H_0) = \mathbb{Z}_q - \{\frac{q-1}{4}, \frac{3q+1}{4}\}$$

$$b) E(H_0) = \{(j, j + \frac{q-1}{2}) \mid j \in \mathbb{Z}_q - \{\frac{q-1}{4}, \frac{3q+1}{4}, \frac{3q-3}{4}\}\} \cup \{(\frac{3q-3}{4}, \frac{q+3}{4})\}$$

$$c) \Omega(H_0) = \{\frac{q-1}{2}, \frac{q+3}{2}\}$$

2. La gráfica G_0 es un q -ciclo tal que:

$$a) V(G_0) = \mathbb{Z}_q$$

$$b) E(G_0) = \{(j, j + \frac{q-1}{2}) \mid j \in \mathbb{Z}_q\}$$

$$c) \Omega(G_0) = \{\frac{q-1}{2}\}$$

3. Las gráficas $H_1 \cong G_1$ tales que:

$$a) V(H_1) = V(G_1) = \mathbb{Z}_q$$

$$b) E(H_1) = E(G_1) = \{(0, j) : j \in \mathbb{Z}_q^* - \{\frac{q-1}{2}, \frac{q+1}{2}\}\} \cup \{(\frac{q-1}{4}, \frac{q-1}{2}), (\frac{3q+1}{4}, \frac{q+1}{2})\}$$

$$c) \Omega(H_1) = \Omega(G_1) = \mathbb{Z}_q^* - \{\frac{q-1}{2}\}$$

Teorema 2.1.3.2. *Sea $n \geq 3$ y $q = 4n + 1$ un primo. Si $r = q + 1$, entonces la amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ es una $(r, 2r - 5; 5)$ -jaulita de orden $r(2r - 5) + 1$.*

Demostración. Análoga a la demostración del Teorema 2.1.3.1. \square

2.1.4. Dos $(r, r + 1; 5)$ -jaulitas semi-regulares, para $r = 5, 6$

En esta sección se construyen dos nuevas jaulas semi-regulares, una $(5, 6; 5)$ -jaulita con 31 vértices y una $(6, 7; 5)$ -jaulita con 43 vértices. En ambos casos se muestran los parámetros $S, T, u_0, u_1, H_0, H_1, G_0$ y G_1 que son utilizados para construir la amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$, aunque para la segunda construcción fue requerida una pequeña adaptación de las operaciones de reducción. El resultado final en ambos casos es consecuencia del Teorema 2.1.2.6 y del Lema 2.1.2.4.

Construcción de una $(5, 6; 5)$ -jaulita.

Sean $S = \{0\}$; $T = \emptyset$; $u_0 = 0$ y $u_1 = 0$. Sea $GF(4) = \{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$ el campo finito de orden 4. Consideremos la gráfica $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ que resulta de amalgamar las gráficas de la lista de acuerdo a los parámetros anteriores. (Ver la Figura 2.7):

1. La gráfica H_0 es una 2-trayectoria tal que:

- a) $V(H_0) = GF^*(4)$
- b) $E(H_0) = \{(1, \alpha^2), (\alpha^2, \alpha)\}$
- c) $\Omega(H_0) = \{1, \alpha\}$

2. La gráfica G_0 es dos aristas ajenas tal que:

- a) $V(G_0) = GF(4)$
- b) $E(G_0) = \{(0, \alpha), (1, \alpha^2)\}$
- c) $\Omega(G_0) = \{\alpha\}$

3. Las gráficas $H_1 \cong G_1$ son cada una, una 3-trayectoria:

- a) $V(H_1) = V(G_1) = GF(4)$
- b) $E(H_1) = E(G_1) = \{(\alpha^2, 0), (0, 1), (1, \alpha)\}$
- c) $\Omega(H_1) = \Omega(G_1) = \{1, \alpha^2\}$

Teorema 2.1.4.1. *La amalgama $B_4^*(S, T, u_0, u_1)$ es una $(5, 6; 5)$ -jaulita de orden 31.*

Demostración. Por el Lema 2.1.2.4 se tiene que $D(B_4^*(S, T, u_0, u_1)) = \{5, 6\}$ y los únicos vértices de grado 6 están dados por el conjunto $\{(i, 1)_0 : i \in GF(4)\} \cup \{(0, \alpha^2)_1\}$.

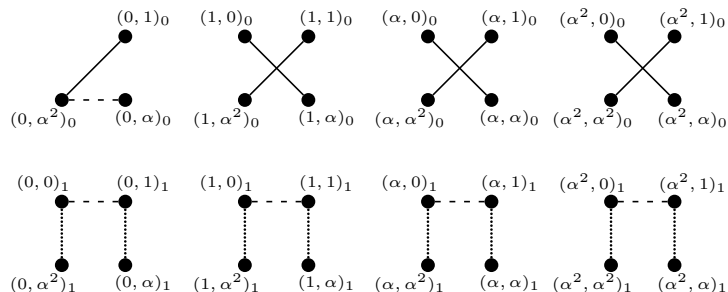


Figura 2.7: $B_4^*(S, T, 0, 0) - E(B_4)$ con $S = \{0\}$ y $T = \emptyset$

Además, es claro que $\Omega(H_0) \cap \Omega(H_1) = \Omega(H_0) \cap \Omega(G_1) = \{1\}$, sin embargo $M_{H_0} \cap M_{H_1} = M_{H_0} \cap M_{G_1} = \emptyset$, ya que (α^2, α) es la única arista de peso 1 en H_0 , mientras que la única arista de este peso en H_1 y G_1 es $(0, 1)$. También se tiene que $\Omega(G_0) \cap \Omega(H_1) = \Omega(G_0) \cap \Omega(G_1) = \emptyset$, lo cual implica que $M_{G_0} \cap M_{H_1} = M_{G_0} \cap M_{G_1} = \emptyset$.

Por el Teorema 2.1.2.6, el cuello de $B_4^*(S, T, u_0, u_1)$ es al menos cinco, y exactamente cinco ya que el 5-ciclo $\{(0, 0)_0, (0, 1)_0, (0, \alpha)_0, (1, \alpha)_1, (1, 0)_1\}$ pertenece a ella. Por último, por el Lema 2.1.2.2, el orden de la amalgama $B_4^*(S, T, u_0, u_1)$ es $2q^2 - q(u_0 + u_1) - |S| - |T| = 2(16) - 1 = 31 = n_0(5, 6; 5)$, lo cual completa la prueba. \square

Construcción de una $(6, 7; 5)$ -jaulita.

Empeñados en la idea de construir familias de bijaulas con el método de reducción y amalgama, encontramos viable adaptar las operaciones de reducción para conseguir a partir de B_q una gráfica de orden $n_0(6, 7; 5)$. Mientras que en la versión original sólo se permite eliminar vértices en V_1 que pertenezcan al bloque L_0 , en este caso vimos que bastaba con la eliminación de vértices en P_0 y de diferentes bloques de V_1 para alcanzar nuestro objetivo. Al igual que antes, se especifican los parámetros necesarios para construir una amalgama birregular con cuello cinco y orden $n_0(6, 7; 5)$.

Sean $T := \{3\} \subset GF(5)$, $S := \{0, 3\} \subset GF(5)$, $S_0 = \{(0, y)_0 | y \in S\} \subseteq P_0$, $T_j = \{(j, b)_1 | b \in T\} \subseteq L_j$, para $j \in GF(5)$. Si $B_5(S, TT) := B_5 - S_0 - \bigcup_{j \in GF(5)} T_j$, entonces $|V(B_5(S, TT))| = 2q^2 - |S| - q|T| = 50 - 2 - 5 = 43$. Además el conjunto de grados de esta gráfica es $\{q - 1, q\} = \{4, 5\}$, ya que (i) los vértices en $V_0 - P_0$ tienen grado $q - |T| = 4$, (ii) los vértices en V_1 con segunda coordenada en $S - T$ tienen grado $q - |S - T| = 4$ y (iii) el resto de ellos tiene grado $q = 5$.

Sean $H_0 := \{(2, 4), (4, 1)\}$ una 2-trayectoria, $H_1 := \{(4, 0), (0, 1), (1, 2)\}$ una 3-trayectoria y $G_0 := \{(0, 2), (2, 4), (4, 1), (1, 3), (3, 0)\}$ un 5-ciclo. Se puede verificar directamente que $\Omega(H_0) = \Omega(G_0) = \{2\}$ y $\Omega(H_1) = \{1\}$.

Sea $B_5^*(S, TT)$ la gráfica que resulta de amalgamar a H_0 en $P'_0 := P_0 - S_0$, G_0 en P_i , para todo $i \in GF^*(5)$ y a H_1 en $L'_j = L_j - T_j$, para todo $j \in GF(5)$. Ver la Figura 2.8.

Teorema 2.1.4.2. *La amalgama $B_5^*(S, TT)$ es una $(6, 7; 5)$ -jaulita de orden 43.*

Demostración. Usando el mismo razonamiento que en el Teorema 2.1.2.6 y tomando en cuenta que $\Omega(H_0) \cap \Omega(H_1) = \Omega(G_0) \cap \Omega(H_1) = \emptyset$ se tiene que la amalgama $B_5^*(S, TT)$ tiene cuello al menos 5. Sin embargo el cuello es exactamente 5, ya que G_0 es un 5-ciclo en $B_5^*(S, TT)$. Por otro lado, $D(B_5^*(S, TT)) = \{6, 7\}$, ya que todos los vértices de grado 4 en $B_5(S, TT)$ aumentan su grado en dos después de la amalgama y los vértices de grado 5 en $B_5(S, TT)$ aumentan su grado en uno o dos en $B_5^*(S, TT)$. Además, el orden de $B_5^*(S, TT)$ es por construcción $n_0(6, 7; 5) = 43$, lo cual completa la prueba. \square

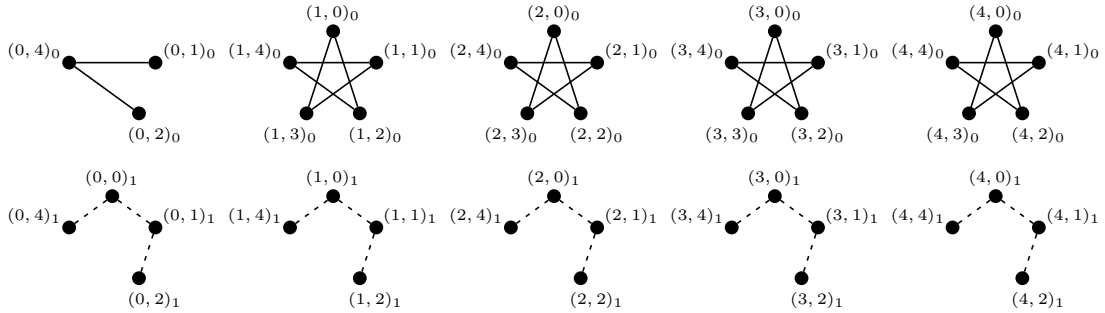


Figura 2.8: $B_5^*(S, TT) - E(B_5)$ with $S = \{0, 3\}$ and $T = \{3\}$

La construcción anterior es sólo un ejemplo del extenso tipo de modificaciones que se pueden realizar a las operaciones de reducción. La adaptación de cada una de ellas al método de reducción y amalgama sobre B_q , se verá reflejado en un vasto número de construcciones de gráficas birregulares de cuello cinco con pocos vértices, alcanzando en algunos casos la cota inferior. Sin embargo, la gráfica $B_q(S, TT)$ no se puede generalizar a casos donde las gráficas que son amalgamadas tienen grados grandes ya que el número de pesos no basta para garantizar el cuello cinco.

Para fines del siguiente resultado cabe aclarar que es tan importante mostrar cualquier método que de lugar a familias infinitas de gráficas birregulares con cuello fijo, como lo es mencionar aquellas construcciones que son elegantes por su descripción, aunque no sugieran un método para construir familias infinitas. Ejemplo de ello es la siguiente construcción.

Una construcción alternativa de la $(6, 7; 5)$ -jaulita a través de la gráfica de Hoffman-Singleton

Sea G la gráfica de Hoffman-Singleton, $x \in V(G)$ y $N(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$. Sea H la subgráfica de G que resulta de eliminar el conjunto de vértices $\{x\} \cup (N(x) - x_1)$. Es claro que H tiene cuello cinco y 43 vértices, seis de los cuales tienen grado 7 y el resto tiene grado 6. Por lo tanto, H es una $(6, 7; 5)$ -jaula y no es difícil probar que es isomorfa a $B_5^*(S, TT)$.

El siguiente resultado extiende esta construcción y esta sujeto a la existencia de una $(r + 1; 5)$ -jaulita, lo cual ocurre si $r = 3, 7$ y posiblemente si $r = 57$:

Teorema 2.1.4.3. *Sea G una $(r + 1; 5)$ -jaulita, $x \in V(G)$ y $N(x) = \{x_1, \dots, x_{r+1}\}$. Si $H := G - (\{x\} \cup \{N(x) - \{x_1\}\})$, entonces H es una $(r, r + 1; 5)$ -jaula.*

Demostración. Nótese que $A = N_G(N_G(x)) - (N_G(x_1) - \{x\}) \subset V(H)$. Por construcción, cualquier vértice en $H - (A \cup \{x_1\})$ tiene grado $r + 1$ y el resto tiene grado r . Además es claro que el cuello de H sigue siendo 5 y que el orden de H es $n_0(r+1; 5) - (r+1) = r^2 + 2r + 2 - (r+1) = r^2 + r + 1 = r(r+1) + 1 = n_0(\{r, r+1\}; 5)$. \square

2.2. Familias de $(r, m; g)$ -jaulitas con un único vértice de grado m

El número de vértices de grado m no es una propiedad invariante entre bijaulas con los mismos parámetros. Por ejemplo las q bijaulitas construidas en la Sección 2.1.1, son todas $(r, 2r - 3; 5)$ -jaulitas, sin embargo el número de vértices de grado m varía de una a otra. En esta sección todas las bijaulitas tienen un único vértice de grado m y las técnicas que empleamos para construirlas son dos esencialmente: (i) construir familias de bijaulas a través de la gráfica de incidencia de los planos proyectivos y (ii) construir familias de bijaulas basadas en la existencia de los primeros elementos

de la familia. En [4] se construyen $(r, k(r-1); g)$ -jaulitas con esta propiedad a partir de las $(r; g+1)$ -jaulitas de cuello par.

2.2.1. Operaciones que identifican vértices

A lo largo de la sección son construidas siete familias diferentes, una de cuello nueve y el resto de cuello cinco. La técnica asociada al punto (ii) del párrafo anterior se emplea para construir tres de las bijaulitas de cuello cinco junto con las de cuello nueve. La idea es “identificar” a los primeros elementos de cada familia a través de su vértice de grado máximo como se indica en el Corolario 2.2.1.5 y el Teorema 2.2.1.4.

La “identificación de vértices” es una operación definida entre dos vértices no adyacentes, sin embargo, se puede pensar esta operación entre vértices adyacentes como la contracción de la arista que los une, en ambos casos las gráficas resultantes corresponden con la representación gráfica de lo que intuitivamente se espera al identificar dos vértices en una gráfica. Estas definiciones se pueden extender para ser operadas sobre un conjunto de vértices independientes, ya sea que pertenezcan a una gráfica o a una unión ajena de ellas (o sobre un conjunto de vértices que compartan al menos una arista), al contraer cada par de vértices en cualquier orden (al contraer las aristas inducidas por ese conjunto de vértices en cualquier orden). Las definiciones de estas extensiones son descritas y empleadas en lo que sigue.

A lo largo de la tesis trabajamos con la identificación de vértices no adyacentes x y y de una gráfica G . La idea de esta operación es reemplazar a este par de vértices por un nuevo vértice w , haciéndolo incidente a todos los que eran vecinos ya sea de x ó de y en G . En particular, todos los vértices que identificaremos son al menos cuatro remotos (es decir, cualesquiera dos de ellos están a distancia al menos cuatro) y si dos de ellos pertenecen a diferentes componentes conexas entonces la remotividad se cumple trivialmente. La definiciones formales que empleamos para este propósito se enuncian a continuación.

Identificación de dos vértices no adyacentes:

Definición 2.2.1.1. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica y $x, y \in V(G)$ dos vértices no adyacentes. La identificación en G de los vértices x y y , se denota por $G/\{x, y\}$ y se define como la gráfica $G' = (V', E')$ donde $V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}$, tal que $N_{G'}(z) = N_G(x) \cup N_G(y)$ y $E' = E(G - \{x, y\}) \cup \{zw : w \in N_{G'}(z)\}$.*

Identificación de los vértices de un conjunto independiente:

Definición 2.2.1.2. Sean $\{G^i : i = 1, \dots, s, s \geq 2\}$ un conjunto de s gráficas ajenas por vértices y $z^i \in V(G^i)$. La identificación en $G := G^1 + \dots + G^s$ de los s vértices del conjunto independiente $Z := \{z^1, \dots, z^s\}$, se denota por G/Z y se define como la gráfica $G' = (V', E')$, donde $V' = (V(G) - Z) \cup \{z\}$, tal que $N_{G'}(z) = \bigcup_{z^i \in Z} N_G(z^i)$ y $E' = E(G - Z) \cup \{zw : w \in N_{G'}(z)\}$.

Sea $\mathcal{F} := \{G^i\}_{i=1}^s$ un conjunto de $s \geq 2$ gráficas ajenas por vértices y $\mathcal{Z} := \{Z^i \subset V(G^i) : i = 1, \dots, s\}$ un conjunto de conjuntos de vértices independientes, tales que $|Z^i| = |Z^j| = n$. Sea $\varphi_i : Z^1 \rightarrow Z^i$, para $i = 1, \dots, s$, cualquier biyección entre estos conjuntos y defínase $\Phi_z := \{\varphi_1(z), \dots, \varphi_s(z)\}$, para toda $z \in Z^1$. En particular, si $\mathcal{F} := \{A^i\}_{i=1}^s$ es un conjunto de s copias ajenas por vértices de una gráfica A , tal que $Z \subset A$, entonces los elementos de $\mathcal{Z} := \{Z^i \subset V(A^i) : i = 1, \dots, s\}$ son las copias de Z en cada A^i . Si $z^i \in Z^i$ denota la copia del vértice $z \in Z$, entonces $\varphi_i := id_i : Z^1 \rightarrow Z^i$ tal que $id_i(z^1) = z^i$ actúa como la identidad al mandar cada vértice de Z^1 en su copia en Z^i ; en este caso denotamos a Φ_z como Id_z .

Identificación de un conjunto de conjuntos independientes:

Definición 2.2.1.3. Sean $\mathcal{F} := \{G^i : i = 1, \dots, s, s \geq 2\}$ un conjunto de s gráficas ajenas por vértices, $\mathcal{Z} := \{Z^i \subset V(G^i) : i = 1, \dots, s\}$ un conjunto de conjuntos de vértices independientes, tales que $|Z^i| = |Z^j| = n$. La identificación en $G := G^1 + \dots + G^s$ de los s elementos de \mathcal{Z} , se denota por G/\mathcal{Z} y se define como la gráfica $\bigcup_{z \in Z^1} G/\Phi_z$. Además, si $\varphi_i := id_i$, para toda i , entonces G/\mathcal{Z} se define como $\bigcup_{z \in Z^1} G/Id_z$.

Teorema 2.2.1.4. Sea $G^i = (V_i, E_i)$ una $(r, m_i; g)$ -jaulita con cuello g impar y con un único vértice de grado m_i , para cada $i = 1, \dots, s$. La gráfica que resulta de identificar a los s vértices de grado m_i en $G := G^1 + \dots + G^s$ es una $(r, m_1 + \dots + m_s; g)$ -jaulita.

Demostración. Sea $Z := \{x^i \in V(G^i) \mid deg_{G^i}(x^i) = m_i\}$ y considérese la gráfica $H := G/Z$ de acuerdo a la Definición 2.2.1.2. Se probará que H es una $(r, m_1 + \dots + m_s; g)$ -jaulita, con $V(H) = (V(G) - Z) \cup \{z\}$. Por construcción z es el único vértice que tiene grado $\sum_{i=1}^s |N_{G^i}(x^i)| = m_1 + \dots + m_s$, el resto tiene grado r . Sea C un ciclo en H . Como z es un vértice de corte en H , entonces C está totalmente contenido en $G^i - \{x^i\}$, para alguna i , o bien en la subgráfica de H isomorfa a G_i , para alguna i , inducida por el conjunto de vértices $V(G^i - \{x^i\}) \cup \{z\}$. En ambos casos es claro

que $|C| \geq g$. Finalmente, si $m = m_1 + \dots + m_s$, entonces el orden de H es:

$$\begin{aligned}
 |V(H)| &= \sum_{i=1}^s n_0(r, m_i; g) - (s - 1) \\
 &= s + \sum_{i=1}^t (m_1(r - 1)^{i-1} + \dots + m_s(r - 1)^{i-1}) - (s - 1) \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^t (m_1 + \dots + m_s)(r - 1)^{i-1} \\
 &= n_0(r, m; g).
 \end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.1.5. *Sea G una $(r, m; g)$ -jaulita con cuello impar g y con un único vértice de grado m . Si $s \geq 2$ y G^1, \dots, G^s son s copias ajenas de G , entonces la gráfica obtenida al identificar a todas ellas por medio de los s vértices de grado m es una $(r, sm; g)$ -jaulita.*

Demostración. La prueba es inmediata del Teorema 2.2.1.4. □

A continuación describimos tres familias infinitas de bijaulitas de cuello cinco, y el primer elemento de cada una de ellas se empleará en la Sección 2.2.6 para construir una familia de $(5, m; 5)$ -jaulitas, para todo $m \geq 6$.

2.2.2. Construcción de $(q, 2q-1; 5)$ -jaulitas para $q = p^\alpha$, p primo impar

Para construir esta familia de bijaulitas se retomará el método de reducción y amalgama empleado en la sección 2.1. Al igual que antes, primero especificamos los parámetros S, T, u_0 y u_1 que determinan el orden de la amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$, y después enlistamos las descripciones de las cuatro gráficas que utilizamos para amalgamar en la gráfica $B_q(S, T, u_0, u_1)$.

Construcción 1

Sean $q = p^\alpha$, p primo impar, $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, $GF(q) = \{0, 1, \alpha, \dots, \alpha^{q-2}\}$ el campo finito de orden q , $S = GF^*(q)$, $T = \emptyset$, $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ y $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ la gráfica que resulta de amalgamar en $B_q(S, T, u_0, u_1)$ a las gráficas descritas en la siguiente lista. (c.f. Figura 2.9):

1. La gráfica H_0 es isomorfa a K_1 , además:

a) $V(H_0) = \{0\}$

b) $E(H_0) = \emptyset$

2. La gráfica G_0 es isomorfa a \overline{K}_q , además:

a) $V(G_0) = GF(q)$

b) $E(G_0) = \emptyset$

3. La gráfica H_1 es isomorfa a la estrella $K_{1,q-1}$, además:

a) $V(H_1) = GF(q)$

b) $E(H_1) = \{(0, b) \mid b \in GF^*(q)\}$

4. La gráfica G_1 es isomorfa a un vértice unión un conjunto de $(q - 1)/2$ aristas ajenas, concretamente:

a) $V(G_1) = GF(q)$

b) $E(G_1) = \{(\alpha^i, \alpha^{i+1}) \mid i = 0, \dots, q - 3\}$

Teorema 2.2.2.1. Sean $q = p^\alpha$, p primo impar, $\alpha \in \mathbb{Z}^+$. Si $q \geq 5$, entonces existe una $(q, 2q - 1; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado $2q - 1$.

Demostración. Sea $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ como en la Construcción 1. Se probará que la gráfica $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ es una $(q, 2q - 1; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado máximo.

Del Lema 2.1.2.4 se tiene que $D(B_q^*(S, T, u_0, u_1)) = \{q, 2q - 1\}$, siendo $(0, 0)_1$ el único vértice de grado $2q - 1$. Nótese también que las siguientes igualdades son evidentes: $\Omega(G_0) = \emptyset$, $M_{H_0} = \emptyset$ y $M_{G_0} = \emptyset$. Así $\Omega(G_0) \cap \Omega(G_1) = \emptyset$, $M_{H_0} \cap M_{H_1} = \emptyset$, $M_{H_0} \cap M_{G_1} = \emptyset$ y $M_{H_1} \cap M_{G_0} = \emptyset$, por lo cual las hipótesis del Teorema 2.1.2.6 se satisfacen, implicando que el cuello de $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ es al menos cinco, y exactamente cinco ya que el ciclo de tamaño cinco

$$C = \{(0, 0)_1, (0, 1)_1, (1, 1)_0, (1, 0)_1, (0, 0)_0\}$$

está contenido en $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$. Finalmente, su orden es $2q^2 - (q - 1)$, el cual coincide con el orden de una $(q, 2q - 1; 5)$ -bijaula. \square

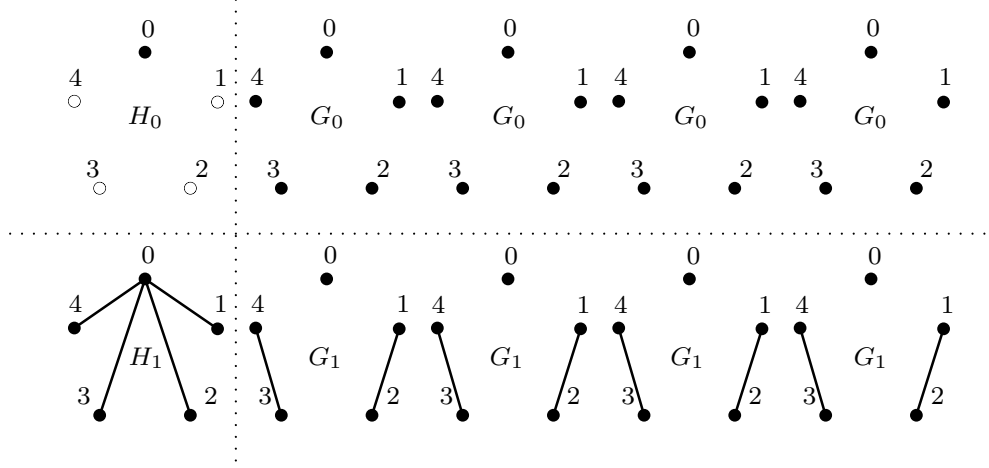


Figura 2.9: Sean $GF(q) = \mathbb{Z}_5$, $S = GF^*(q)$, $T = \emptyset$, $u_0 = 0$, $u_1 = 0$. La amalgama $B_q^*(S, T, u_0, u_1)$ es una $(5, 9; 5)$ -jaulita. Los vértices blancos no pertenecen a la gráfica y las etiquetas de los vértices corresponden a la segunda coordenada de la etiqueta original.

Corolario 2.2.2.2. *Existe una $(5, 9; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado 9.*

Demostración. Caso particular del Teorema 2.2.2.1 para $q = 5$. □

2.2.3. Construcción de $(q, 2q; 5)$ -jaulitas para $q = p^\alpha$, p impar

Esta construcción está basada en la gráfica de incidencia del plano proyectivo algebraico $PG(2, q)$ de orden impar y para simplificar su descripción se hará uso de la notación planteada en la Proposición 1.2.5.1 y de la Observación 2.2.3.1.

Construcción 2

Sean $q \geq 5$, $q = p^\alpha$, p primo impar, $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ y sea G_q la gráfica de incidencia del plano proyectivo $PG(2, q)$. Considérense al siguiente elemento y los dos conjuntos descritos a continuación:

1. sea $\nu_i := N_{G_q}((i, 0)_1) \cap P_i$, para cada $i \in GF(q)$, y
2. sean $L'_i := L_i - \{(i, 0)_1\}$ y $P'_i := P_i - \{\nu_i\}$, para cada $i \in GF(q)$.

Observación 2.2.3.1. *Los siguientes tres puntos son consecuencia directa de los incisos (2), (3) y (4) de la Proposición 1.2.5.1, respectivamente:*

1. *El conjunto $E(\langle P_i \cup P_j \rangle) = \emptyset$ (resp. $E(\langle L_i \cup L_j \rangle) = \emptyset$), si $i \neq j$.*
2. *La subgráfica inducida por el conjunto de vértices $P'_i \cup L'_i$ es isomorfa a un apareamiento de $q - 1$ aristas, que denotamos por \mathcal{H}_i .*
3. *La vecindad $N_{G_q}((0, 0)_0) = \{(i, 0)_1 \mid i \in GF(q)\}$.*

Sea \mathcal{G}_1 la subgráfica inducida por el conjunto de vértices $V_0 \cup V_1 \cup \{(*, 0)_1\}$. Sea \mathcal{G}_2 la gráfica que resulta de eliminar de \mathcal{G}_1 las $q - 1$ aristas ajenas de la subgráfica \mathcal{H}_0 , junto con la arista $\{(*, 0)_1(0, 0)_0\}$. Finalmente, sea \mathcal{G}_3 la gráfica que resulta de añadir a \mathcal{G}_2 el conjunto de aristas $\mathcal{E} := \{(0, 0)_1(0, b)_1 \mid b \in GF^*(q)\} \cup \{(0, 0)_1(*, 0)_1\}$.

Se puede verificar directamente que si $x \in V(\mathcal{G}_3)$, entonces $d_{\mathcal{G}_3}(x) = 2q$ si $x := (0, 0)_1$ y $d_{\mathcal{G}_3}(x) = q$ si $x \in V(\mathcal{G}_3) - \{(0, 0)_1\}$. (c.f. Figura 2.10).

Teorema 2.2.3.2. *Sean $q = p^\alpha$, p primo impar, $\alpha \in \mathbb{Z}^+$. Si $q \geq 5$, entonces existe una $(q, 2q; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado $2q$.*

Demostración. Sea \mathcal{G}_3 como en la Construcción 2. Se probará que \mathcal{G}_3 es una $(q, 2q; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado $2q$. El conjunto de grados de \mathcal{G}_3 es $\{q, 2q\}$, además el único vértice de grado $2q$ es el $(0, 0)_1$. El orden de \mathcal{G}_3 es $2(q^2 + q + 1) - (2q + 1) = 2q^2 + 1$, el cual coincide con el orden de una $(q, 2q; 5)$ -jaulita. Sólo resta ver que el cuello de \mathcal{G}_3 es cinco.

Como $E(\mathcal{G}_3) = E(G_q) \cup \mathcal{E}$ y como el cuello de G_q es seis, entonces cualquier ciclo de longitud menor a cinco debe tener al menos una arista de \mathcal{E} . Sea \mathcal{C} un ciclo de longitud mínima en \mathcal{G}_3 . En seguida se prueba que el cuello de la gráfica es 5.

Caso 1) Supongamos que $|E(\mathcal{C}) \cap \mathcal{E}| = 1$. Sea $e \in E(\mathcal{C}) \cap \mathcal{E}$. De los puntos 1) y 3) de la Proposición 1.2.5.1 se cumple que e no pertenece a ningún ciclo de longitud tres. Sólo resta ver que e no pertenece a ciclos de longitud cuatro.

1. Sea $e := (*, 0)_1(0, 0)_1$. Si $x_1 \in N_{\mathcal{G}_3}((*, 0)_1) - \{(0, 0)_1\}$, entonces $x_1 \in P_0$. Si $x_2 \in N((0, 0)_1) - \{(*, 0)_1\}$, entonces $x_2 \in V_0$. Si $x_2 \in P_0$, entonces e no pertenece a un ciclo de longitud cuatro ya que no hay aristas entre los vértices de P_0 . De lo contrario, $x_2 \in V_0 - P_0$. Por la Observación 2.2.3.1 la arista $x_1x_2 \notin E(\mathcal{G}_3)$ y en este caso e tampoco pertenece a un ciclo de longitud cuatro.

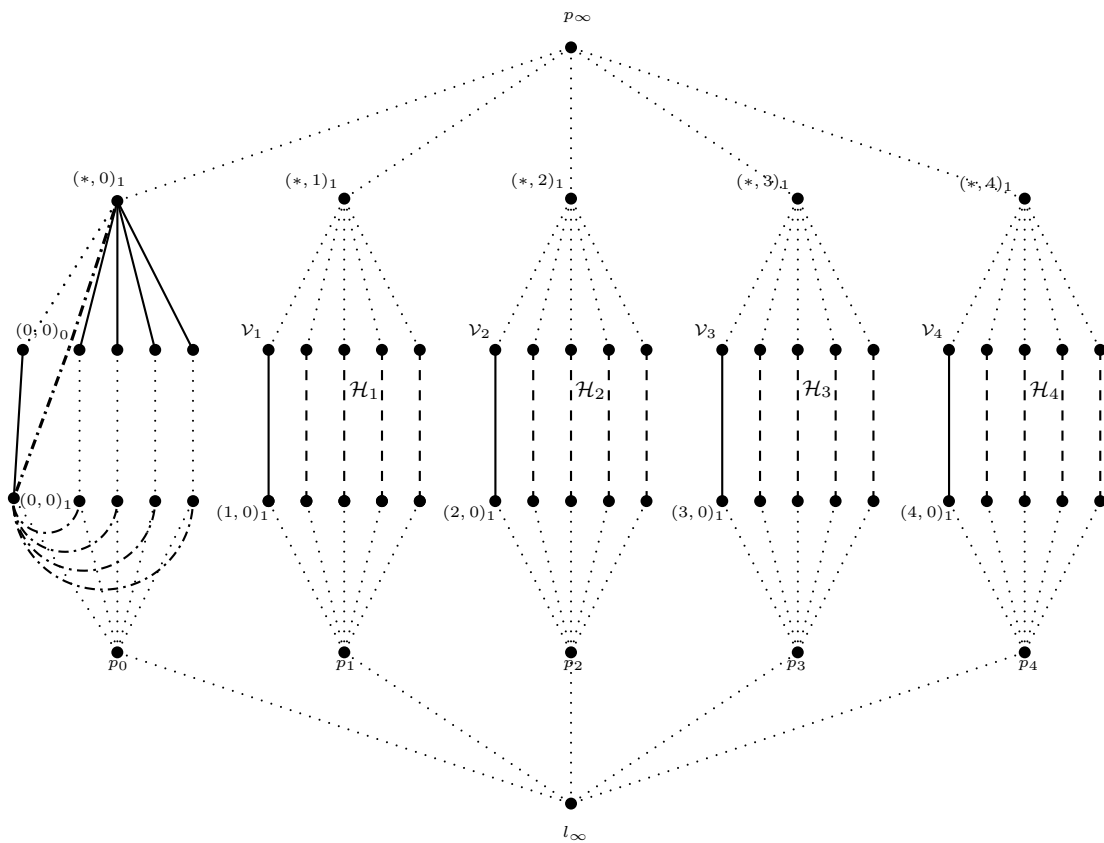


Figura 2.10: Una $(5, 10; 5)$ -jaulita construida a partir del campo \mathbb{Z}_5 . Las aristas punteadas no pertenecen a la gráfica. Las aristas del estilo $- \cdot -$ son las añadidas a \mathcal{G}_2 y las del tipo $- - -$ son las que inducen la gráfica \mathcal{H}_i .

2. Sea $e := (0, 0)_1(0, i)_1$, para algún $i \in GF^*(q)$. Sean $x_1 \in N_{\mathcal{G}_3}((0, 0)_1) - \{(0, i)_1\}$ y $x_2 \in N_{\mathcal{G}_3}((0, i)_1) - \{(0, 0)_1\}$. Como $|E(\mathcal{C}) \cap \mathcal{E}| = 1$, entonces $x_1, x_2 \in V_0$. Si $\{x_1, x_2\} \subset P_i$ entonces e no pertenece a un ciclo de longitud cuatro ya que no hay aristas entre los vértices de P_i . De lo contrario, $x_1 \in P_i$ y $x_2 \in P_j$, para $i \neq j$. Por la Observación 2.2.3.1 la arista $x_1x_2 \notin E(\mathcal{G}_3)$ y por lo tanto no hay ciclos de longitud cuatro que contengan a e en este caso.

Caso 2) Supongamos que $|E(\mathcal{C}) \cap \mathcal{E}| = 2$. Hay dos casos:

1. El ciclo \mathcal{C} contiene la trayectoria $T_1 := \{(*, 0)_1(0, 0)_1(0, i)_1\}$ para $i \in GF^*(q)$. Recordemos que $(N_{\mathcal{G}_3}((*, 0)_1) - \{(0, 0)_1\}) \subset P_0$. Sea $(0, i)_0 \in N_{\mathcal{G}_3}((*, 0)_1) - \{(0, 0)_1\}$. Por construcción la arista $(0, i)_0(0, i)_1 \notin E(\mathcal{G}_3)$ entonces la trayectoria T_1 no pertenece a un ciclo de longitud cuatro.
2. El ciclo \mathcal{C} contiene a la trayectoria $T_2 := \{(0, i)_1(0, 0)_1(0, j)_1\}$, para $i, j \in GF^*(q)$, $i \neq j$. Por construcción $N_{\mathcal{G}_3}((0, i)_1) - \{(0, 0)_1\} \subset V_0$ y $N_{\mathcal{G}_3}((0, j)_1) - \{(0, 0)_1\} \subset V_0$. De la Proposición 1.2.5.1 se cumple que no existe un vértice $x \in V_0$ que sea vecino de ambos extremos de T_2 , por lo tanto, no hay un ciclo de longitud cuatro que contenga a T_2 .

Por lo tanto, el cuello de \mathcal{G}_3 es al menos cinco y exactamente cinco ya que $\mathcal{C} := \{(0, 0)_0, (0, 0)_1, (0, 1)_1, (1, 1)_0, (1, 0)_1\}$ pertenece a \mathcal{G}_3 . Por lo tanto \mathcal{G}_3 es una $(q, 2q; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado $2q$. \square

Corolario 2.2.3.3. *Existe una $(5, 10; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado 10.*

Demostración. Caso particular del Teorema 2.2.3.2 para $q = 5$. \square

2.2.4. Construcción de $(q, 2q+1; 5)$ -jaulitas para $q = p^\alpha$, p primo impar

La siguiente construcción también está basada en la gráfica de incidencia del plano proyectivo algebraico $PG(2, q)$ de orden impar, y para simplificar su descripción usamos la notación planteada en la sección anterior y en la Proposición 1.2.5.1.

Construcción 3

Sean $q \geq 5$, $q = p^\alpha$, p primo impar, $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ y denotemos por G_q la gráfica de incidencia del plano proyectivo $PG(2, q)$ de orden impar.

Sea \mathcal{G}_1 la gráfica que resulta de eliminar en G_q los siguientes conjuntos:

1. el conjunto de vértices $\{(*, b)_1 : b \in GF^*(q)\} \cup \{p_0, p_\infty\}$,
 2. el conjunto de aristas $\{x_i y_i \mid x_i := p_i, y_i := (i, 0)_1, i \in GF^*(q)\} \cup \{(*, 0)_1(0, 0)_0\}$,
 3. el conjunto de las $q - 1$ aristas ajenas de la subgráfica \mathcal{H}_i , para cada $i \in GF(q)$.
- Ver el punto 2 de la Observación 2.2.3.1.

Como \mathcal{G}_1 es subgráfica de G_q , entonces el cuello de \mathcal{G}_1 es al menos cinco, además el orden de \mathcal{G}_1 es $2(q^2 + q + 1) - (q + 1) = 2q^2 + q + 1$. Enlistamos a continuación el grado de los vértices de \mathcal{G}_1 :

1. el vértice l_∞ tiene grado $q - 1$,
2. cada vértice del conjunto $\{p_i \mid i \in GF^*(q)\}$ tiene grado q ,
3. cada vértice $(m, b)_1 \in V_1$ tiene grado q ,
4. cada vértice $(x, y)_0 \in V_0 \cap P_0$ tiene grado q ,
5. cada vértice $(x, y)_0 \in V_0 - P_0$ tiene grado $q - 1$ y
6. el vértice $(*, 0)_1$ tiene grado $q - 1$.

Sea \mathcal{G}_2 la gráfica que resulta de añadir a \mathcal{G}_1 los siguientes conjuntos de aristas:

1. las q aristas de $\mathcal{E} = \{(0, 0)_1(0, b)_1 \mid b \in GF^*(q)\} \cup \{(0, 0)_1(*, 0)_1\}$,
2. las $1 + ((q - 1)^2/2)$ aristas del conjunto conformado: (i) por la arista $(0, 0)_1 l_\infty$ y (ii) cualquier apareamiento perfecto entre los $q - 1$ vértices de P'_i , para cada $i \in GF^*(q)$.

Nótese que el orden de \mathcal{G}_2 (c.f. Figura 2.11) es $2q^2 + q + 1$, el mismo que el de \mathcal{G}_1 . Además el conjunto de grados de \mathcal{G}_2 es $\{q, 2q + 1\}$ ya que:

1. el grado del vértice l_∞ es q ,
2. cada vértice del conjunto $\{p_i \mid i \in GF^*(q)\}$ tiene grado q ,

3. cada vértice $(m, b)_1 \in V_1 - \{(0, 0)_1\}$ tiene grado q ,
4. cada vértice $(x, y)_0 \in V_0$ tiene grado q ,
5. el vértice $(*, 0)_1$ tiene grado q y
6. el vértice $(0, 0)_1$ tiene grado $q + (q - 1) + 2 = 2q + 1$.

Teorema 2.2.4.1. *Sean $q = p^\alpha$, p primo impar, $\alpha \in \mathbb{Z}^+$. Si $q \geq 5$, entonces existe una $(q, 2q + 1; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado $2q + 1$.*

Demostración. Sea \mathcal{G}_2 como en la Construcción 3. Se probará que \mathcal{G}_2 es la bijaulita deseada. Por construcción, el conjunto de grados de \mathcal{G}_2 es $\{q, 2q + 1\}$, además el único vértice de grado $2q + 1$ es $(0, 0)_1$ y $|V(\mathcal{G}_2)| = 2q^2 + q + 1 = n_0(q, 2q + 1; 5)$. Sólo resta probar que \mathcal{G}_2 tiene cuello cinco. Como el cuello de G_q es seis, entonces cualquier ciclo de longitud menor a cinco debe tener al menos una arista en $\mathcal{G}_2 - G_q$. Sea \mathcal{C} un ciclo de longitud menor en \mathcal{G}_2 . Haciendo un análisis similar al hecho en la prueba del Teorema 2.2.3.2 se puede verificar que el cuello de \mathcal{G}_2 es al menos cinco y exactamente cinco ya que $\mathcal{C} := \{(0, 0)_0, (0, 0)_1, (0, 1)_1, (1, 1)_0, (1, 0)_1\}$ pertenece a \mathcal{G}_2 . Por lo tanto \mathcal{G}_2 es una $(q, 2q + 1; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado $2q + 1$. \square

Corolario 2.2.4.2. *Existe una $(5, 11; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado 11.*

Demostración. Caso particular del Teorema 2.2.4.1 para $q = 5$. \square

2.2.5. Construcción de $(r, 2r - 4; 5)$ -jaulitas para $q = r - 1$, $q = 2^\alpha$

En la presente sección construimos una familia de $(r, 2r - 4; 5)$ -jaulitas con un único vértice de grado $2r - 4$ y en particular es obtenida una $(5, 6; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado seis como se ilustra en la Figura 2.12.

En el Teorema 2.1.4.1 se construyó una $(5, 6; 5)$ -jaulita con cinco vértices de grado seis. En esta sección es obtenida una $(5, 6; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado seis como consecuencia de las $(r, 2r - 4; 5)$ -jaulitas construidas a continuación. Al igual que antes, la construcción de estas jaulitas depende de la gráfica de incidencia G_q del plano proyectivo $PG(2, q)$, para $q = r - 1$, aunque en este caso $q = 2^\alpha$ y $\alpha \in \mathbb{Z}^+$.

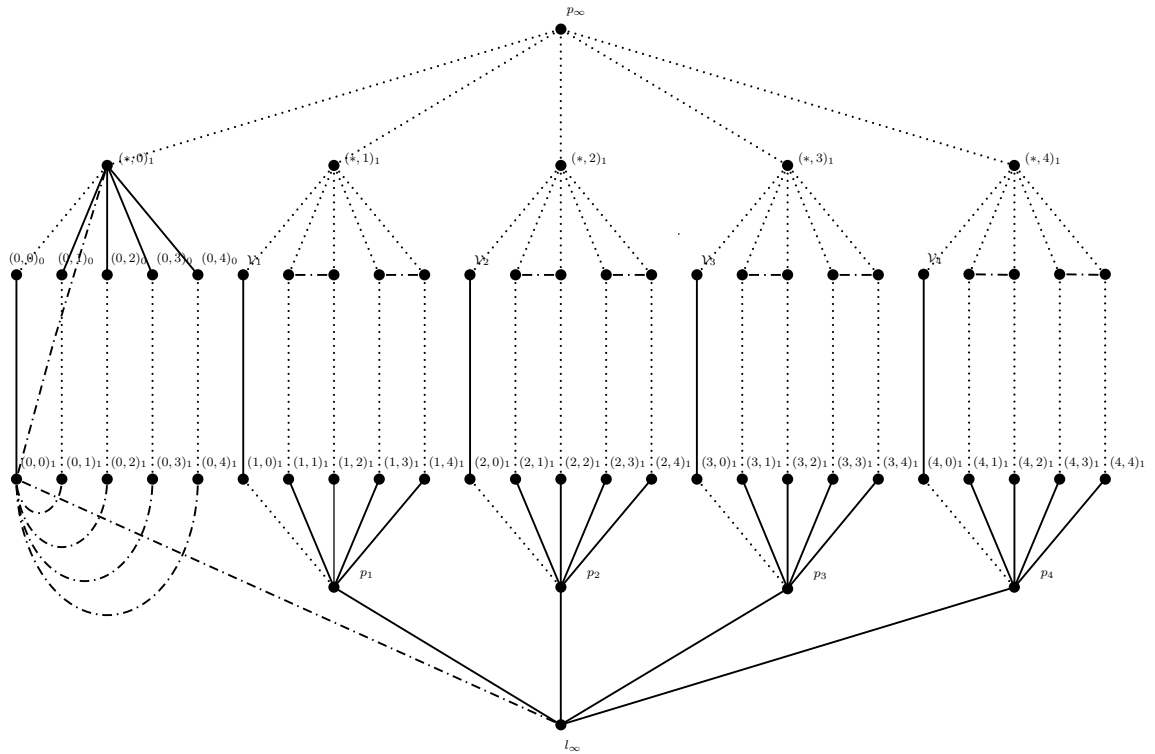


Figura 2.11: Una $(5, 11; 5)$ -jaulita construida a partir del campo \mathbb{Z}_5 . Las aristas punteadas no pertenecen a la gráfica, mientras que las aristas del estilo $- \cdot -$ son las añadidas a \mathcal{G}_2 .

Construcción 4

Sea \mathcal{G}_1 la gráfica que resulta de eliminar en G_q el conjunto de vértices $N_{G_q}[p_0] \cup N_{G_q}[(*, 0)_1] - \{p_\infty\}$. El orden de \mathcal{G}_1 es $2(q^2 + q + 1) - (2q + 3) = 2q^2 - 1$ que en términos de r es igual a $2r^2 - 4r + 1$. Sea \mathcal{G}_2 la gráfica que resulta de añadir a \mathcal{G}_1 las siguientes aristas:

1. el conjunto $\{p_\infty p_i \mid i \in GF^*(q)\}$,
2. el conjunto $\{(1, b)_0(\alpha, b)_0, \dots, (\alpha^{q-3}, b)_0(\alpha^{q-2}, b)_0\}$, para $b \in GF(q)$ y
3. el conjunto $\{(1, y)_1(\alpha, y)_1, \dots, (\alpha^{q-3}, y)_1(\alpha^{q-2}, y)_1\}$, para $y \in GF(q)$.

Finalmente, sea \mathcal{G}_3 la gráfica que resulta de eliminar en \mathcal{G}_2 las q aristas ajenas de la subgráfica inducida por $P_j \cup L_j$, para cada $j \in GF(q) - \{0, 1, \alpha^{q-2}\}$.

Teorema 2.2.5.1. *Sea $r - 1$ una potencia de primo. Si $r \geq 5$, entonces existe una $(r, 2r - 4; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado $2r - 4$.*

Demostración. Sea \mathcal{G}_3 como en la Construcción 4. Se probará que \mathcal{G}_3 es la bijaulita deseada. Por construcción el orden de \mathcal{G}_3 es $2r^2 - 4r + 1$, el cual coincide con el orden de una $(r, 2r - 4; 5)$ -jaulita. Por simple inspección se puede ver que el único vértice de grado $2r - 4$ es p_∞ y el resto tiene grado r , es decir el conjunto de grados de \mathcal{G}_3 es $\{r, 2r - 4\}$. Se probará por casos que el cuello de la gráfica es cinco. Sea \mathcal{C} un ciclo de longitud mínima en \mathcal{G}_3 .

Caso 1) Los vértices del ciclo \mathcal{C} no están totalmente contenidos en los vértices de B_q . Hay dos casos: (i) si $l_\infty \in \mathcal{C}$, entonces la longitud de \mathcal{C} es al menos cinco ya que $d_{\mathcal{G}_2}(p_\infty, x) = 2$ para todo $x \in V(B_q)$; (ii) en otro caso, \mathcal{C} tiene al menos un vértice del conjunto $\{(*, b)_1 \mid b \in GF^*(q)\} \cup \{p_i \mid i \in GF^*(q)\}$ y por las propiedades de B_q el ciclo también tiene tamaño al menos cinco.

Caso 2) Los vértices del ciclo \mathcal{C} están totalmente contenido en los vértices de B_q . Si $\mathcal{A} = E(\mathcal{G}_3) - E(\mathcal{G}_1)$, entonces hay dos casos: $|E(\mathcal{C}) \cap \mathcal{A}| = 1$ o $|E(\mathcal{C}) \cap \mathcal{A}| \geq 2$. A continuación son analizados los dos casos respectivamente:

1. Sea $e = xy$ la arista en $E(\mathcal{C}) \cap \mathcal{A}$. Como $d_{B_q}(x, y) = 2$, entonces $d_{\mathcal{G}_2 - \{e\}}(x, y) = 4$, es decir, la longitud de \mathcal{C} en este caso es al menos cinco.
2. Si $|E(\mathcal{C}) \cap \mathcal{A}| \geq 2$ entonces la longitud de \mathcal{C} es al menos seis. De lo contrario, sean $\{e_1, e_2\} \subset E(\mathcal{C}) \cap \mathcal{A}$.

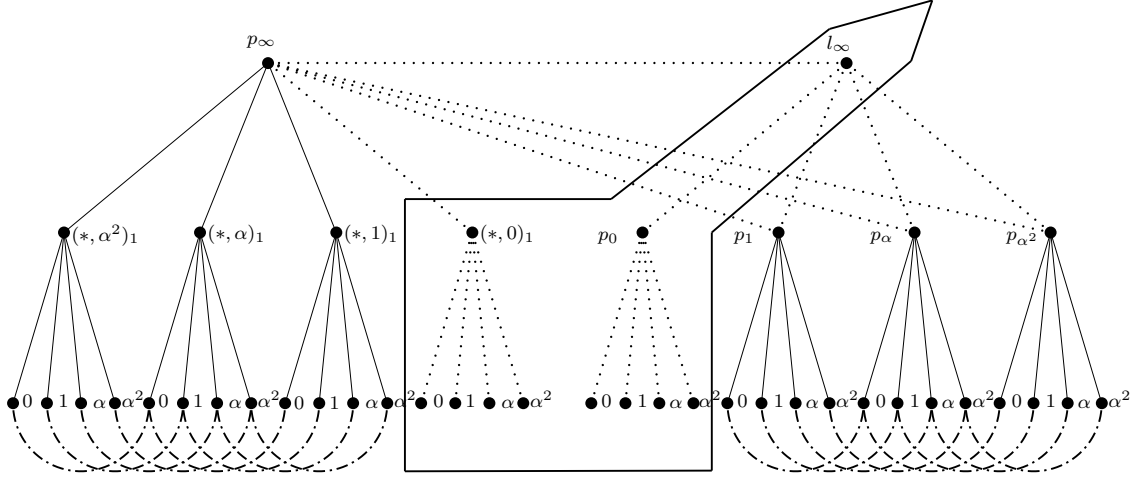
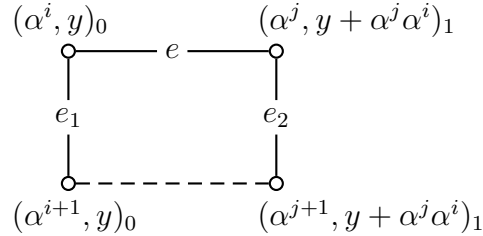


Figura 2.12: Una $(5, 6; 5)$ -jaulita G con un único vértice de grado 6. Únicamente el área encerrada y las aristas punteadas no pertenece a la jaulita. En cuanto a las etiquetas de los vértices en $B_4 \cap G$ sólo es mostrada la segunda coordenada de su etiqueta original.

Si e_1 y e_2 no son ajenas entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que la trayectoria $T := e_1 e_2$ tiene la forma $(\alpha^i, b)_0 (\alpha^{i+1}, b)_0 (\alpha^{i+2}, b)_0$ para algún $b \in GF(q)$. Como $(0, b)_1$ es el único vértice que es adyacente a los extremos de T y $(0, b)_1 \notin V(\mathcal{G}_3)$ entonces no hay ciclos de longitud cuatro que contengan a T . De lo contrario, e_1 y e_2 son dos aristas ajenas y el único caso que podría resultar en un ciclo de longitud cuatro es el siguiente: $e_1 := (\alpha^i, y)_0 (\alpha^{i+1}, y)_0$ y $e_2 := (\alpha^j, y + \alpha^j \alpha^i)_1 (\alpha^{j+1}, y + \alpha^j \alpha^i)_1$ para $i, j \in \{0, 1\}$, $y \in GF(q)$. Como estamos en un campo de orden potencia de dos se tiene que $2\alpha^i \alpha^j = 0$, es decir $(\alpha^i, y)_0$ y $(\alpha^j, y + \alpha^j \alpha^i)_1$ son adyacentes en B_q , ver el siguiente diagrama. Sin embargo los vértices $(\alpha^{i+1}, y)_0$ y $(\alpha^{j+1}, y + \alpha^j \alpha^i)_1$ no son adyacentes en B_q ya que $y \neq \alpha^{i+1} \alpha^{j+1} + y + \alpha^i \alpha^j$, por lo tanto no hay un ciclo de longitud cuatro que contenga a e_1 y e_2 .

Esto completa la prueba de que el cuello de \mathcal{G}_3 es al menos cinco y exactamente cinco, ya que $\mathcal{C} := \{p_1, (1, 1)_1, (1, 0)_0, (*, 1)_1, p_\infty\}$ pertenece a \mathcal{G}_3 . Por lo tanto \mathcal{G}_3 es una $(r, 2r - 4; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado $2r - 4$. \square



Corolario 2.2.5.2. *Existe una $(5, 6; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado 6.*

Demostración. Consecuencia del Teorema 2.2.5.1 para $r = 5$. □

2.2.6. Construcción de $(5, m; 5)$ -jaulitas para todo $m \geq 6$.

En esta sección es obtenida una familia de $(5, m; 5)$ -jaulitas con un único vértice de grado m para todo $m \geq 6$. El método que empleamos consiste en construir las primeras $(5, m; 5)$ -jaulitas, para $m \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, después con ayuda del Corolario 2.2.1.5 generaremos una familia de $(5, mk_m, 5)$ -jaulitas con un único vértice de grado mk_m , para cada $m \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ y $k_m \geq 2$, y finalmente como consecuencia del Teorema 2.2.1.4 obtenemos una $(5, 6k_6 + 7k_7 + 8k_8 + 9k_9 + 10k_{10} + 11k_{11}; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado máximo. Además cinco de las seis jaulitas a construir son consecuencia inmediata del siguiente Teorema.

Teorema 2.2.6.1. *Existe una $(5, m; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado m , para $m \in \{6, 7, 9, 10, 11\}$.*

Demostración. La existencia de estas bijaulitas es inmediata del Corolario 2.2.5.2, Teorema 2.1.1.4, para $r = 5$, Corolario 2.2.2.2, Corolario 2.2.3.3 y Corolario 2.2.4.2, respectivamente. □

Por último construimos una $(5, 8; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado ocho a partir de una $(5, 6)$ -jaulita al contraer una de sus aristas. Esta sencilla técnica, no por eso menos importante, fue empleada por primera vez en [4] (2009) para construir bijaulitas con un único vértice de grado máximo:

Teorema 2.2.6.2. *[4] Sean r, k y g enteros tales que $k \geq 2$ es par, $r - 1 \geq 2$ es una potencia de primo y $g \in \{5, 7, 11\}$. Entonces existe la $(r, k(r - 1); 5)$ -jaulita.*

El último resultado de este apartado garantiza la existencia de las $(5, m; 5)$ -jaulitas con un único vértice de grado m , para toda $m \geq 6$.

Teorema 2.2.6.3. *Existe una $(5, m; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado m para todo $m \geq 6$.*

Demostración. Las $(5, m; 5)$ -jaulitas, para $m \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ y con un único vértice de grado m , se obtienen como consecuencia de los Teoremas 2.2.6.1 y 2.2.6.2, para $r = 5$ y $k = 2$. Si consideramos k_m copias ajenas de cada una de estas seis jaulitas, entonces como consecuencia del Corolario 2.2.1.5 es obtenida una $(5, mk_m, 5)$ -jaulita, para cada $m \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ y con un único vértice de grado mk_m y finalmente, por el Teorema 2.2.1.4 existe una $(5, 6k_6 + 7k_7 + 8k_8 + 9k_9 + 10k_{10} + 11k_{11}; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado máximo. Como el máximo común divisor de $\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ es uno, entonces todo entero se puede expresar como combinación lineal de ellos y por lo tanto la existencia de una familia de $(5, m; 5)$ -jaulitas, para todo $m \geq 6$ y con un único vértice de grado m está garantizada. \square

2.2.7. Construcción de $(6, 2s; 5)$ -jaulitas para todo $s \geq 4$.

El objetivo ahora es construir una familia de $(6, 2s; 5)$ -jaulitas con un único vértice de grado $2s$, para todo $s \geq 4$. La técnica que empleamos para obtener esta familia es la misma que usamos para construir a las $(5, m; 5)$ -jaulitas, es decir, construimos los primeros elementos de esta familia para que junto con el Corolario 2.2.1.5 y el Teorema 2.2.1.4 se obtenga la familia deseada. Con esto en mente, es suficiente construir las primeras cuatro $(6, m; 5)$ -jaulitas con m par, $m \geq 8$, para obtener cualquiera de ellas. Las primeras dos son consecuencia del siguiente Teorema.

Teorema 2.2.7.1. *Existen una $(6, 8; 5)$ -jaulita y una $(6, 10; 5)$ -jaulita, ambas con un único vértice de grado máximo.*

Demostración. La prueba es inmediata del Teorema 2.2.5.1 para $r = 6$ y del Teorema 2.2.6.2 para $r = 6$ y $k = 2$, respectivamente. \square

Construcción de una $(6, 12; 5)$ -jaulita.

La construcción de esta gráfica se apoya en la existencia y propiedades de la única $(6; 5)$ -jaula de orden 40, construida por primera vez por Robertson [78, 86].

Propiedades de la (6; 5)-jaula

Si $x \in V(H)$ y T es un árbol generador de H enraizado en x , entonces T satisface las siguientes propiedades:

- (i) Es vértice-transitiva.
- (ii) Existen tres vértices x_1, x_2, x_3 en T tales que $d_T(x, x_i) = 3$. (Ver la Figura 2.13).
- (iii) $N(x_i) \cap N(x_j) = \emptyset$, si $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
- (iv) Cada vecino de x_k es adyacente a un único vecino de x_i , $k, i \in \{1, 2, 3\}$, $k \neq i$.

La cuarta propiedad es clave para probar que nuestra gráfica tiene cuello cinco y la siguiente notación es útil para simplificar dicha prueba. Sea $N(x_i) := \{x_j^i : j = 0, \dots, 5\}$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Si w es el vecino de x_k que es adyacente al vecino x_j^i de x_i , para alguna $j = 0, \dots, 5$, entonces denotaremos a w por $x_{k,j}^i$. Además podemos ordenar a los vecinos de x_k de forma que $x_j^k := x_{k,j}^i$, para $i \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq k$. En la Figura 2.14 se ilustra la cuarta propiedad bajo esta notación.

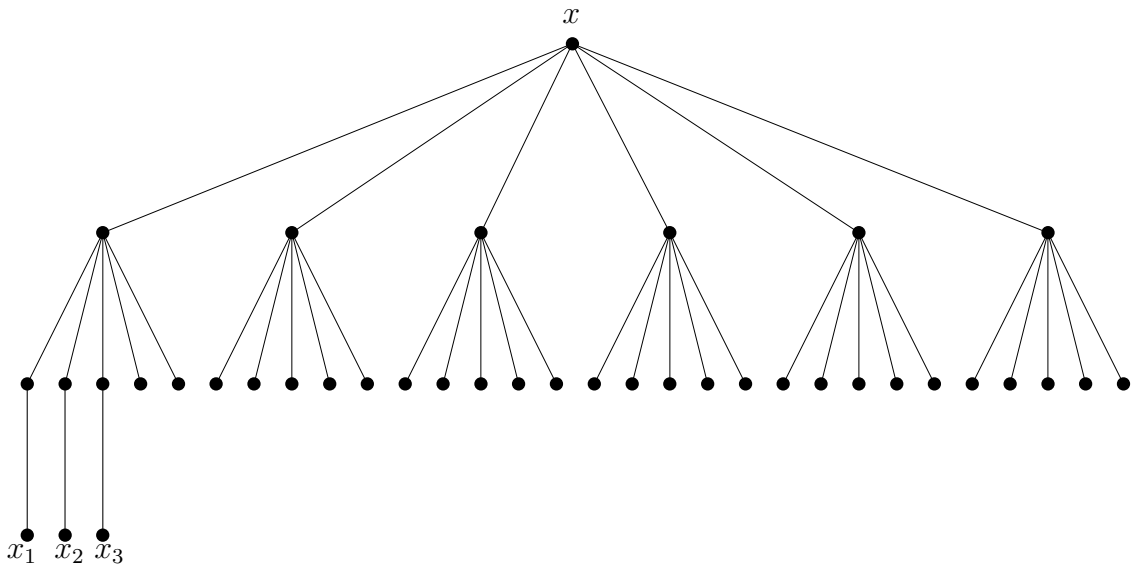


Figura 2.13: Un árbol generador de H .

Por otro lado, como H es vértice-transitiva se puede enraizar a T en cualquier vértice de H sin perder las propiedades anteriores. En particular si se considera un árbol generador de H enraizado en alguno de los tres vértices del punto (ii) se puede entender mejor la cuarta propiedad, como se ilustra en la Figura 2.15. En seguida la descripción de nuestra construcción.

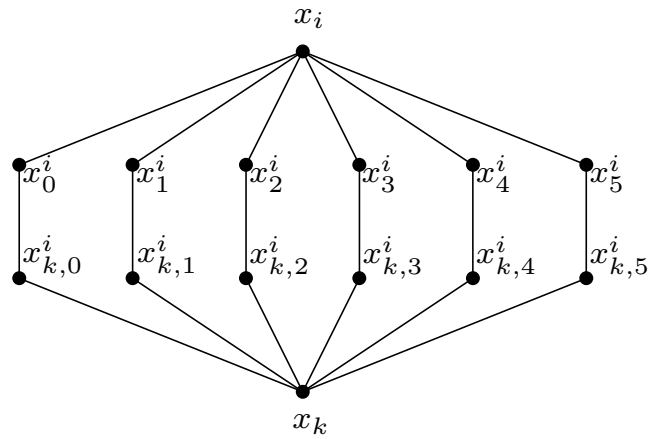


Figura 2.14: Ilustración de la propiedad (iv), donde el vecino x_j^k de x_k es redefinido como $x_{k,j}^i$.

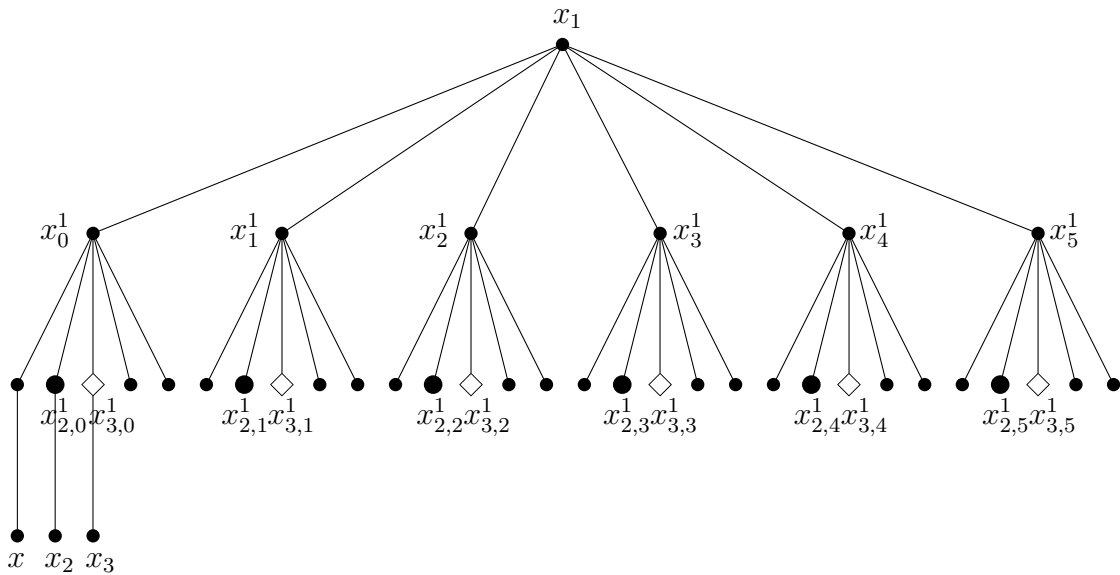


Figura 2.15: Un árbol generador de H enraizado en el vértice x_1 . Los vértices de mayor tamaño (círculo y rombo) de cada una de las ramas representan de izquierda a derecha a los vecinos de x_2 y x_3 respectivamente.

Sean $\mathcal{G}_1 := H - \{x_1, x_2, x_3\}$ y \mathcal{G}'_1 una copia ajena de \mathcal{G}_1 , tal que $V(\mathcal{G}'_1) = \{v' | v \in V(\mathcal{G}_1)\}$. Si $\mathcal{G}_2 := \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}'_1$, entonces $|V(\mathcal{G}_2)| = 2(37) = 74$, uno mas que $73 = n_0(6, 12; 5) = 6(12) + 1$. Lo que haremos a continuación es añadir una arista a \mathcal{G}_2 y luego contraerla para obtener finalmente una gráfica con 73 vértices. Sea $e := xx'$, donde x' es la copia de x en \mathcal{G}'_1 . Si $\mathcal{G}_3 := \mathcal{G}_2 + e$ y $\mathcal{G}_4 := \mathcal{G}_3/e$, entonces $|V(\mathcal{G}_4)| = n_0(6, 12; 5)$.

Se puede verificar directamente que el conjunto de grados de \mathcal{G}_4 es $\{5, 6, 12\}$ y que los vértices de grado 5 son los vecinos de x_i en H , para toda $i = 1, 2, 3$. Por último añadiremos aristas entre los vértices de grado cinco de \mathcal{G}_4 para obtener una gráfica con conjunto de grados $\{6, 12\}$ y orden $n_0(6, 12; 5)$. Sea \mathcal{G}_5 la gráfica que resulta de añadir a \mathcal{G}_4 los siguientes tres conjuntos de aristas (ver la Figura 2.18):

el conjunto $\mathcal{E}_1 := \{x_j^1 x_j^{1'} | j = 0, \dots, 5\}$,
 el conjunto $\mathcal{E}_2 := \{x_j^2 x_{j+1}^{2'} | i = 0, \dots, 5\}$ (suma módulo seis) y
 el conjunto $\mathcal{E}_3 := \{x_j^3 x_{j+2}^{3'} | i = 0, \dots, 5\}$ (suma módulo seis).

Teorema 2.2.7.2. *Existe una $(6, 12; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado 12.*

Demostración. Sea \mathcal{G}_5 como en la construcción anterior. Por definición \mathcal{G}_5 es una $(6, 12; g)$ -gráfica de cuello $g \geq 3$, orden $n_0(6, 12; 5)$ y con un único vértice w de grado 12, a saber el que resultó de contraer la arista $e \in E(\mathcal{G}_3)$. El siguiente análisis es para probar que el cuello de la gráfica es cinco.

Sean \mathcal{C} un ciclo de longitud mínima en \mathcal{G}_5 y $\mathcal{E}_{1,2,3} := \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$. Si \mathcal{C} está totalmente contenido en \mathcal{G}_2 , entonces $l(\mathcal{C}) \geq 5$. De lo contrario existen aristas de $\mathcal{E}_{1,2,3}$ que pertenecen a \mathcal{C} . Si $E(\mathcal{C}) \cap \mathcal{E}_{1,2,3} = \{a\}$, entonces el ciclo está obligado a pasar por w , y como la distancia de w a alguno de los extremos de a es al menos dos, entonces $l(\mathcal{C}) \geq 5$. Además, si hay al menos tres aristas de $\mathcal{E}_{1,2,3}$ en \mathcal{C} , entonces $l(\mathcal{C}) \geq 6$.

El resto de la prueba está dedicado al análisis de los casos en los que \mathcal{C} contiene exactamente dos aristas e_1 y e_2 en $\mathcal{E}_{1,2,3}$.

Caso 1) Las dos aristas $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_s$, para alguna $s \in \{1, 2, 3\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $s = 1$, es decir $e_1 := x_j^1 x_j^{1'}$ y $e_2 := x_k^1 x_k^{1'}$, para $j \neq k$. Como x_j^1 y x_k^1 son vecinos de x_1 en H , entonces $d_{\mathcal{G}_5}(x_j^1, x_k^1) = 3$. Por lo tanto, la longitud de \mathcal{C} en este caso es al menos ocho. De forma análoga se prueban los casos en los que $s = 2$ y $s = 3$. Ver la Figura 2.16.

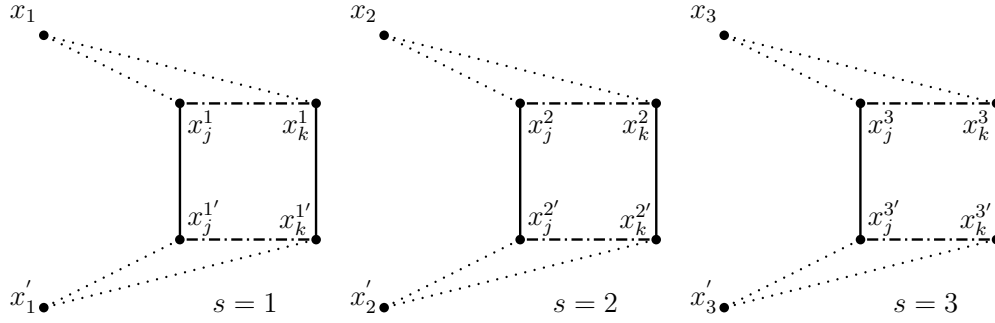


Figura 2.16: Casos $s = 1$, $s = 2$ y $s = 3$. Las aristas punteadas no pertenecen a \mathcal{G}_5 y las líneas del estilo $- \cdot -$ representan trayectorias de longitud tres.

Caso 2) La arista $e_1 \in \mathcal{E}_s$ y la arista $e_2 \in \mathcal{E}_j$, $s \neq j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $s = 2$ y $j = 3$, es decir $e_1 := x_{j_1}^2 x_{j_1+1}^{2'}$ y $e_2 := x_{j_2}^3 x_{j_2+2}^{3'}$. La única forma de que e_1 y e_2 pertenezcan a un ciclo de longitud cuatro es que $x_{j_1}^2 x_{j_2}^3 \in E(\mathcal{G}_5)$ o que $x_{j_1+1}^{2'} x_{j_2+2}^{3'} \in E(\mathcal{G}_5)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_{j_1}^2 x_{j_2}^3 \in E(\mathcal{G}_5)$, es decir $x_{j_2}^3$ es x_{3,j_1}^2 , lo que implica que $j_2 = j_1$, es decir $e_2 := x_{j_1}^3 x_{j_1+2}^{3'}$. Por la propiedad (iv) el vértice $x_{j_1+1}^{2'}$ es adyacente al vértice $x_{3,(j_1+1)}^{2'}$, y por otro lado, $x_{j_1+2}^{3'} := x_{3,(j_1+2)}^{3'}$, lo cual implica que $x_{j_1+1}^{2'} x_{j_1+2}^{3'} \notin E(\mathcal{G}_5)$ (ver la Figura 2.17, inciso (iii)). Por lo tanto en este caso la longitud de \mathcal{C} es al menos cinco. El resto de los casos $s = 1, j = 2$ y $s = 1, j = 3$ se analizan de forma análoga. Ver la Figura 2.17. \square

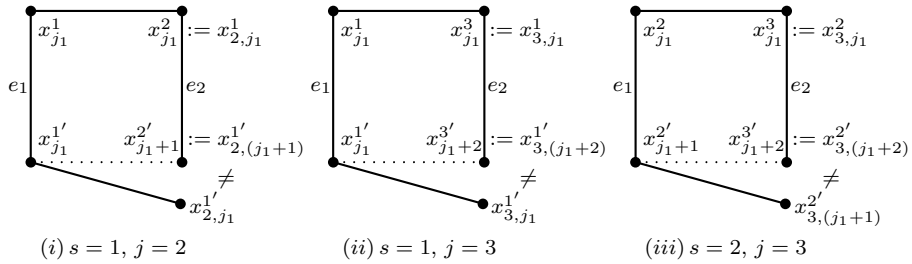


Figura 2.17: Casos del Caso 2). Las aristas punteadas no pertenecen a \mathcal{G}_5 .

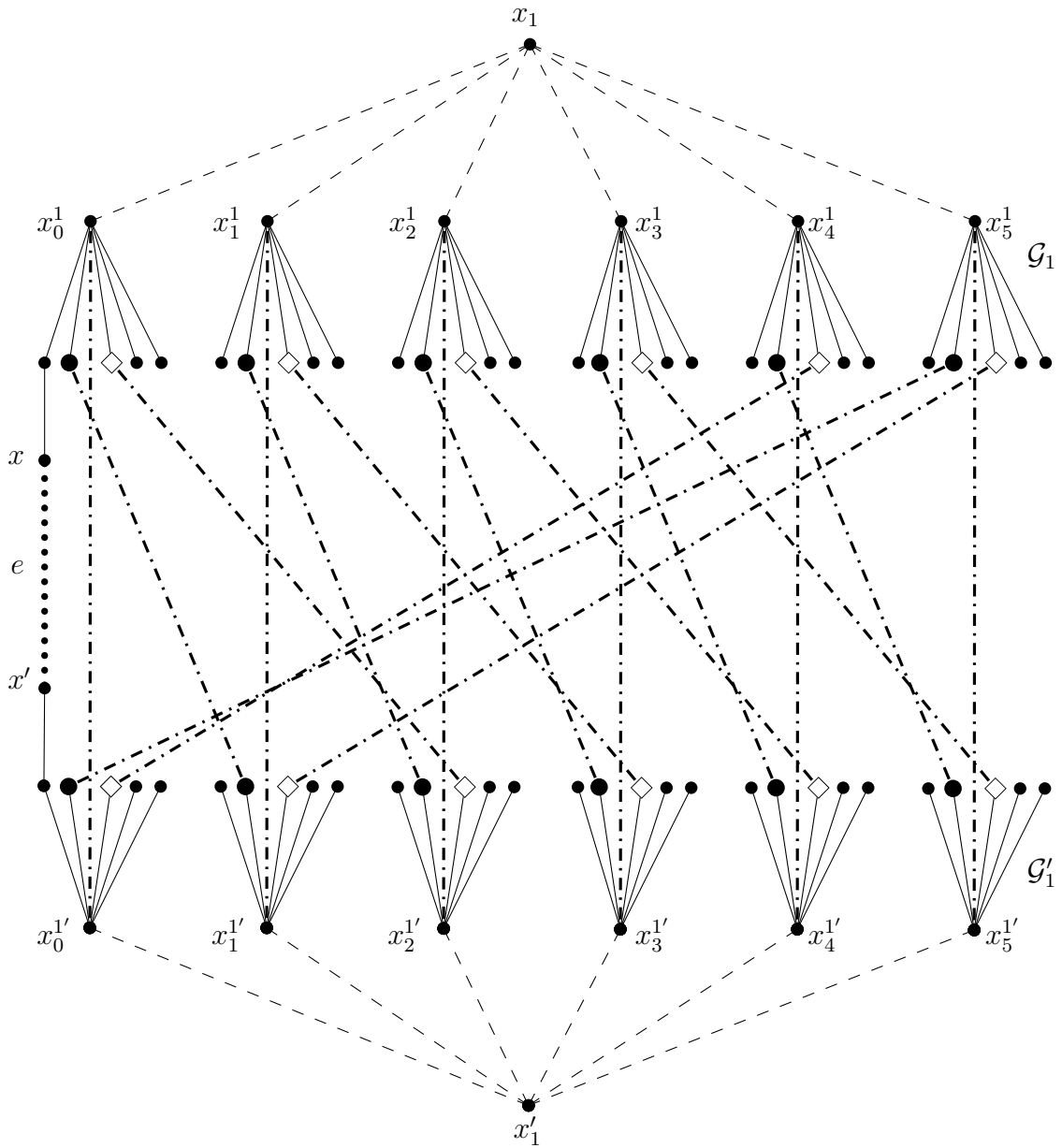


Figura 2.18: Una $(6, 12; 5)$ -jaulita G con un único vértice de grado 12, menos las aristas inducidas por los vértices finales del árbol generador de \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 , respectivamente. La arista punteada entre x y x' no pertenece a G , pero es la que al contraerse resulta en el único vértice de grado 12. Las aristas con estilo $--$ no pertenecen a G , mientras que toda arista del estilo $-\cdot-$ pertenece a $\mathcal{E}_{1,2,3}$. Los vértices de mayor tamaño (círculo y rombo) de cada una de las ramas representan de izquierda a derecha a los vecinos de x_2 y x_3 , respectivamente.

Construcción de una $(6, 14; 5)$ -jaulita.

Finalmente, es construida una $(6, 14; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado 14. Sea H la $(6, 7; 5)$ -jaulita con 6 vértices de grado siete que resulta al eliminar de la $(7; 5)$ -jaulita G (la gráfica de Hoffman-Singleton) un vértice x junto con todos sus vecinos $\{x_1, \dots, x_7\}$ menos uno de ellos, digamos x_1 y sea $N_H(x_1) = \{y_1, \dots, y_6\}$. Sea H' una copia ajena de H con $V(H') = \{v' \mid v \in V(H)\}$. Si $\mathcal{G}_1 := H \cup H'$ entonces $|V(\mathcal{G}_1)| = 2(6 \cdot 7 + 1) = 86$, uno más que $n_0(6, 14; 5) = 6(14) + 1$. Igual que antes se añadirá una arista a \mathcal{G}_1 que después será contraída para obtener una gráfica con $n_0(6, 14; 5)$ vértices. Si \mathcal{G}_2 es la gráfica que resulta de añadir a \mathcal{G}_1 la arista $y_1 y'_1$ y \mathcal{G}_3 es la gráfica que resulta de contraerla, entonces el orden de \mathcal{G}_3 coincide con $n_0(6, 14; 5)$ y el nuevo vértice z que resultó al contraer la arista es el único de grado 14 en \mathcal{G}_3 . Se puede ver por simple inspección que el conjunto de grados de \mathcal{G}_3 es $\{6, 7, 14\}$. Finalmente para obtener una gráfica con conjunto de grados $\{6, 14\}$ eliminamos y añadimos aristas como se indica a continuación. Considérense los conjuntos de aristas: $\mathcal{E} := \{y_i x_{2i} \mid x_{2i} \in N_G(x_2) \cap N_H(y_i), i = 2, \dots, 6\}$, \mathcal{E}' la copia de \mathcal{E} en H' y $\mathcal{E}_1 := \{x_{2i} x'_{2i} \mid i = 2, \dots, 6\}$. Sea \mathcal{G}_4 la gráfica que resulta al eliminar de \mathcal{G}_3 el conjunto $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ y de añadir a esta al conjunto \mathcal{E}_1 . Ver la Figura 2.19.

Teorema 2.2.7.3. *Existe una $(6, 14; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado 14.*

Demostración. Sea \mathcal{G}_4 como en la construcción anterior. Nótese que el conjunto de grados de \mathcal{G}_4 es $\{6, 14\}$ y que el único vértice de grado 14 es z . Además el orden de \mathcal{G}_4 coincide con $n_0(6, 14; 5)$ como se vio anteriormente. Resta probar que el cuello de la gráfica es cinco y para ello considérese \mathcal{C} un ciclo de longitud mínima en \mathcal{G}_4 . Si \mathcal{C} está totalmente contenido en \mathcal{G}_1 entonces la longitud de \mathcal{C} es al menos cinco. De lo contrario existen aristas de \mathcal{E}_1 que pertenecen al ciclo. Si $|\mathcal{E}_1 \cap E(\mathcal{C})| = 1$, entonces $l(\mathcal{C}) \geq 5$ y si $|\mathcal{E}_1 \cap E(\mathcal{C})| \geq 2$, entonces $l(\mathcal{C}) \geq 8$. La conclusión en ambos casos es que la longitud de los ciclos que contienen aristas de \mathcal{E}_1 es mayor que cinco y por lo tanto el cuello de \mathcal{G}_4 es cinco. \square

El siguiente Teorema muestra que las $(6, 2s; 5)$ -jaulitas con un único vértice de grado $2s$ existen para todo $s \geq 4$.

Teorema 2.2.7.4. *Existe una $(6, 2s; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado $2s$, para todo $s \geq 4$.*

Demostración. Las $(6, 2s; 5)$ -jaulitas, para $s \in \{4, 5, 6, 7\}$ y con un único vértice de

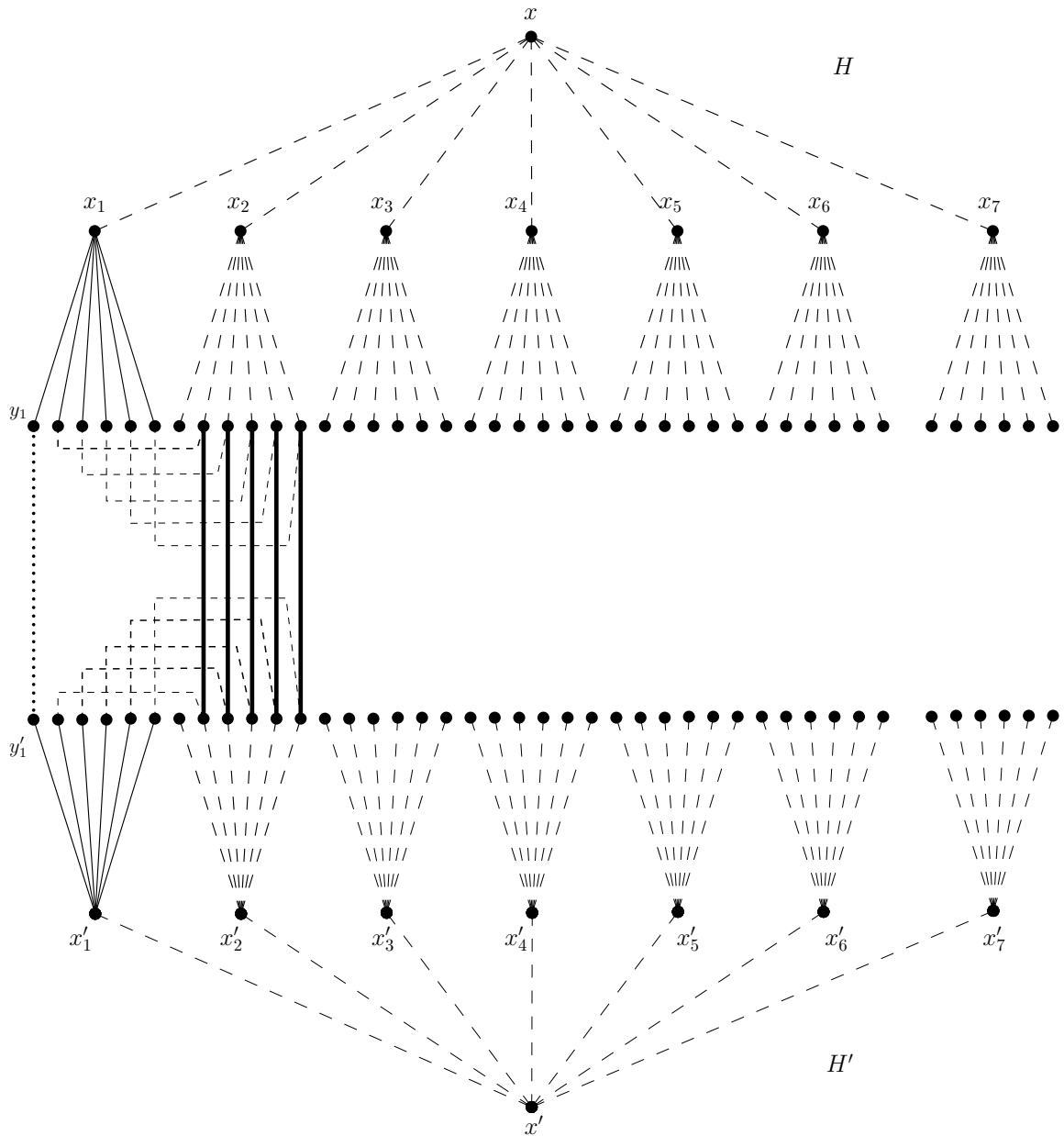


Figura 2.19: Una $(6, 14; 5)$ -jaulita G con un único v ertice de grado 14. La arista punteada entre y y y' no pertenece a G pero es la que al contraerse resulta en el único v ertice de grado 14. Las aristas del estilo $--$ no pertenecen a G , las aristas del conjunto $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ están representadas por las líneas punteadas con “tres lados” y las aristas de \mathcal{E}_1 están representadas por las aristas que destacan en negro.

grado $2s$ se obtienen como consecuencia del Teorema 2.2.7.1, Teorema 2.2.7.2 y el Teorema 2.2.7.3, respectivamente. Si $m = 2s$ y consideramos k_m copias ajenas de cada una de estas cuatro jaulitas, entonces como consecuencia del Corolario 2.2.1.5 es obtenida una $(6, mk_m, 5)$ -jaulita, para cada $m \in \{8, 10, 12, 14\}$ y con un único vértice de grado mk_m y finalmente, por el Teorema 2.2.1.4 la existencia de una $(6, 8k_8 + 10k_{10} + 12k_{12} + 14k_{14}; 5)$ -jaulita con un único vértice de grado máximo está garantizada. Como el máximo común divisor de $\{8, 10, 12, 14\}$ es dos, entonces todo entero par $w \geq 8$ se puede expresar como combinación lineal de ellos y por lo tanto existe una familia de $(6, m; 5)$ -jaulitas con un único vértice de grado m para todo $m \geq 8$ par. \square

2.2.8. Construcción de $(6, 2s + 1; 5)$ -jaulitas para $s = 3, 4$.

En la sección anterior se construyeron familias de $(6, m; 5)$ -jaulitas para m par y con un único vértice de grado m . Con esto en mente, el estudio sobre la existencia de las $(6, m; 5)$ -jaulitas podría completarse si existiera una familia de $(6, m; 5)$ -jaulitas, para toda $m \geq 7$ impar y con una cantidad par de vértices de grado m , ya que es bien sabido que en toda gráfica el número de vértices de grado impar es par. Sin embargo, los únicos elementos conocidos de esta familia son la $(6, 7; 5)$ -jaulita, construida en la Sección 2.1.4 y la $(6, 9; 5)$ -jaulita obtenida como consecuencia del Teorema 2.1.1.1, ambas con seis vértices de grado máximo. Sin embargo a pesar de que estas dos bijaulitas tienen la misma cantidad de vértices de grado m , no es posible usar nuestro método de identificación ya que se requiere que entre ellos sean 3-remotos, y en nuestro caso sólo tenemos 2-remoticidad. A la fecha sigue abierto el problema sobre la construcción de $(6, m; 5)$ -jaulitas, para $m \geq 11$ impar, dejando mucho trabajo que realizar a este respecto.

2.2.9. Construcción de $(4, 2s; 9)$ -jaulitas para $s \geq 7$.

En la página de Geoffrey Exoo <http://ginger.indstate.edu/ge/> se enlistan las adyacencias de las bijaulas que el autor de esta página ha hallado basándose en cálculos computacionales. Entre ellas muestra la siguiente lista de $(4, m; 9)$ -jaulitas, indicando en cada caso su orden y destacando en sus adyacencias que cada una de ellas tiene un único vértice de grado máximo.

1. $G(4, 14; 9)$ con orden $561 = n_0(4, 14; 9)$
2. $G(4, 16; 9)$ con orden $641 = n_0(4, 16; 9)$
3. $G(4, 18; 9)$ con orden $721 = n_0(4, 18; 9)$
4. $G(4, 20; 9)$ con orden $801 = n_0(4, 20; 9)$
5. $G(4, 22; 9)$ con orden $881 = n_0(4, 22; 9)$
6. $G(4, 24; 9)$ con orden $961 = n_0(4, 24; 9)$
7. $G(4, 26; 9)$ con orden $1041 = n_0(4, 26; 9)$

Esta lista contiene los elementos necesarios para que junto con el Teorema 2.2.1.4 se pueda construir una familia de $(4, m; 9)$ -jaulitas, para todo $m \geq 14$ par, y con un único vértice de grado máximo. Por otro lado, el autor no indica haber hallado $(4, m; 9)$ -jaulitas para $m \neq 2t$ y no se ha publicado nada mas al respecto, por lo cual pensamos que esta pregunta también es un problema abierto.

Capítulo 3

Jaulas birregulares de cuello par

Este capítulo está dedicado al estudio sobre la existencia de bijaulas de cuello par. Como se mencionó en el Corolario 1.1.0.3, una $(r, m; 2s)$ -gráfica es bijaulita si y sólo si: (i) se cumple que $r = 2$ y $g \geq 4$, ó (ii) tiene cuello $g = 4$. Por lo tanto todas nuestras construcciones muestran un exceso positivo, a diferencia del Capítulo 2, y la mayoría de ellas acotan por arriba el orden de una bijaula con cuello par al menos ocho.

Yiang y Liang probaron en [90] (2003) que $n(r, m; 6) \geq 2(rm - m + 1)$, para $2 \leq r < m$ y que $n(r, m; 6) = 2(rm - m + 1)$ si: (i) $2 \leq r \leq 5$ y $r < m$, ó (ii) si $m - 1$ es potencia de primo y $2 \leq r < m$. En ese mismo trabajo los autores conjeturan que para cualquier par de parámetros $2 \leq r < m$ se tiene que $n(r, m; 6) = 2(rm - m + 1)$. Ejemplos que dan soporte a esta conjetura son: (i) las $(r, k(r - 1) + 1; 6)$ -jaulas descritas en [3](2008), para $r - 1$ una potencia de primo, (ii) las $(3, m; 6)$ -jaulas obtenidas en [54](1992), para $m \geq 4$ y (iii) las $(p_1 + 1, a_1 p_1 + \dots + a_s p_s + 1; 6)$ -jaulas que construiremos en la Subsección 3.2, para $\{p_1, \dots, p_s\}$ potencias de primos y tal que $p_1 \geq p_i, i = 2, \dots, s$.

Además de nuestro resultado de cuello seis, se verán construcciones de $(r, m; g)$ -gráficas con cuello par $g \geq 8$ que acotan el orden de una bijaula con esos parámetros, centrando nuestra atención en valores de r cuando $r - 1$ es una potencia de primo y cuando el cuello $g = 8$, y profundizando aún más cuando $r = 3$. Algunos resultados, como la construcción de nuestras $(3, m; 8)$ -gráficas con orden cercano a la cota inferior, están inspirados en las $(3, m; 6)$ -jaulas construidas en [54](1992), para todo $m \geq 4$. Además son construidas tres bijaulas con cuello ocho al identificar vértices

a distancia adecuada, método empleado en [4](2009) para obtener $(3, 3k; 8)$ -jaulas, $k \geq 2$

En seguida es desglosado un índice que resume los resultados de este capítulo conforme a lo señalado en el índice general de esta tesis.

Gráficas birregulares de cuello par

- (1) Familias de gráficas birregulares con cuello par $g \geq 8$. (Subsección 3.1.1)
 - (a) Construcción de $(r, k(r - 1) + t - 1; \tilde{g})$ -gráficas, para $\tilde{g} \geq g \geq 8$, g par y $t = 1, 2$.
 - (b) Construcción de $(r, k(r - 1) + \varepsilon; g)$ -gráficas, para $\varepsilon = 0, 1$ y $g \geq 8$.
 - (c) Construcción de $(r, k(r - 1); 8)$ -gráficas con $(r - 1)^2 + r - 1$ vértices de grado $k(r - 1)$.
- (2) Construcción de $(r, m; 8)$ -gráficas para $r - 1 = p^\alpha$. (Subsección 3.1.2)
 - (a) Construcción de $(r, k(r - 1); 8)$ -gráficas con $(r - 1)^2 + 1$ vértices de grado $k(r - 1)$ y $r - 1 = p^\alpha$.
 - (b) Construcción de $(r, kr + t; 8)$ -gráficas, para $r - 1 = p^\alpha$, $k \geq r - t$ y $t = 1, \dots, r - 1$.
 - (c) Mejora de la cota superior del orden de una $(3, 3k + t; 8)$ -jaula, para $k \geq 2$ y $t = 1, 2$.
- (3) La mejor cota inferior para $n(3, m; 8)$. (Subsección 3.1.3)
 - (a) Condiciones para que una $(3, m; 8)$ -gráfica tenga al menos $9m + 3$ vértices.
 - (b) Cota inferior para el orden de una $(3, 3k + t; 8)$ -jaula, con $k \geq 2$ y $t = 1, 2$.
- (4) Construcción de $(3, m; 8)$ -gráficas con $9m + 3$ vértices. (Subsección 3.1.4)
 - (a) Construcción de $(3, m; 8)$ -jaulas, para $m = 4, 5, 7$.
- (5) Una familia de $(r, m; 6)$ -jaulas. (Sección 3.2)
 - (a) Construcción de $(p_1 + 1, a_1p_1 + \dots + a_s p_s + 1; 6)$ -jaulas, para el conjunto de potencias de primos $\{p_1, \dots, p_s\}$, tal que $p_1 \geq p_i$, para cada $i = 2, \dots, s$.

3.1. Construcción de $(r, m; 2s)$ -gráficas con $s \geq 4$

Se iniciará el desarrollo de la teoría necesaria para obtener las que de momento son las mejores cotas inferiores y superiores sobre el orden de una bijaula de cuello 8. El resultado de este trabajo nos permitió acercar las cotas inferiores a las cotas superiores conocidas sobre el orden de una bijaula con cuello par al menos ocho, y en algunos casos esa cercanía nos permitió obtener tres bijaulas de cuello 8 y grado mínimo 3. Cabe destacar que estos resultados fueron concentrados en el artículo “On bi-regular cages of even girth at least 8” publicándolo recientemente en la revista “Aequationes Mathematicae”, Vol. 86.

3.1.1. Familias de gráficas birregulares con cuello par $g \geq 8$

El Teorema de monotonía del cuello [49] (1997) en el marco de la teoría de jaulas, compara los ordenes de dos jaulas con cuellos diferentes y mismo grado de regularidad mostrando que esta relación es monótona. La generalización de este Teorema junto con la Definición 2.2.1.3 nos permitió calcular cotas superiores constructivas sobre el orden de una bijaula con cuello par $g \geq 8$. El enunciado de esta generalización se muestra en el Teorema 3.1.1.1 probado en [23](2011).

Teorema 3.1.1.1. [23] Sean r, m, g, g' enteros tales que $3 \leq r < m$ y $3 \leq g < g'$. Entonces $n(r, m; g) < n(r, m; g')$.

Sea G una $(r; g)$ -gráfica con $r \geq 2$ y cuello par $g \geq 8$. Como el cuello de G es par, se sigue que G contiene un árbol de altura $g/2 - 1$ enraizado en una arista xy . Esta arista induce de manera natural una partición en los vértices de este árbol en conjuntos X_j, Y_j con $0 \leq j \leq g/2 - 1$ como sigue:

$$\begin{aligned} X_j &= \{u \in V(G) : d(u, x) = j, d(u, y) = j + 1\}, \\ Y_j &= \{v \in V(G) : d(v, y) = j, d(v, x) = j + 1\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

El tamaño del cuello de G garantiza que los conjuntos X_j, Y_j ($0 \leq j \leq g/2 - 1$) son mutuamente ajenos. Añadiendo a esto la hipótesis de que G es r -regular se puede ver que $|X_j| = |Y_j| = (r - 1)^j$.

Construcción 5

Sea G una $(r; g)$ -gráfica con cuello par $g \geq 8$ y considérense los siguientes conjuntos: $D := (\cup_{j=0}^{\lfloor g/4 \rfloor - 1} X_j) \cup (\cup_{j=0}^{\lceil g/4 \rceil - 2} Y_j)$, $Z := X_{\lfloor g/4 \rfloor} \cup Y_{\lceil g/4 \rceil - 1}$ y $H := G - D$. Si $\mathcal{G}_t := H^t + \dots + H^k$ es la unión de $k - (t - 1)$ copias ajenas por vértices de H , entonces $\mathcal{Z}_t := \{Z^i \subset V(H^i) : i = t, \dots, k\}$, donde Z^i es la copia de Z en H^i , es un conjunto de conjuntos de vértices independientes y $\mathcal{G}_t/\mathcal{Z}_t$ es una $(r, k(r - 1) + t - 1; \tilde{g})$ -gráfica con $\tilde{g} \geq g$.

Teorema 3.1.1.2. (Cota superior) *Existe una $(r, k(r - 1) + t - 1; \tilde{g})$ -gráfica con $\tilde{g} \geq g$, $g \geq 8$ par.*

Demostración. Sea $J := \mathcal{G}_t/\mathcal{Z}_t$, $t = 1, 2$ como en la Construcción 5 y supongamos que $H^1 := G$ para $t = 2$. Veamos que J es la gráfica deseada suponiendo que $|Z| = n$. Por definición $V(J) = \bigcup_{i=t}^k V(H^i - Z^i) \cup N$, donde $N := \{z_1, \dots, z_n\}$ son los n nuevos vértices que resultaron al indentificar las k gráficas de \mathcal{G} . Nota que $d_J(z) = r - 1$ para todo $z \in N$. Asumamos primero que $t = 2$.

Nótese que cada vértice $z \in N$ tiene grado $r + \sum_{j=2}^k (r - 1) = k(r - 1) + 1$ y el resto tienen grado r , por lo tanto el conjunto de grados de $G_{2,k}$ es $\{r, k(r - 1) + 1\}$. Veamos que el cuello de $G_{2,k}$ es $\tilde{g} \geq g$.

Sea C un ciclo en $G_{2,k}$. Si $V(C) \cap N = \emptyset$, entonces la longitud del ciclo C es al menos g . Asumamos entonces que C tiene al menos dos aristas, digamos aw^i , bv^j donde $a, b \in N$, $w^i \in V(H^i - Z^i)$, $v^j \in V(H^j - Z^j)$. Nota que si $i = j = 1$, entonces C está totalmente contenido en H^1 y su longitud de nuevo es al menos g . Podemos asumir entonces que $i \neq 1$.

Si $i = j$, entonces C contiene una (a, b) -trayectoria en H^1 de longitud $d_{H^1}(a^1, b^1)$ y una (w^i, v^i) -trayectoria en $H^i - Z^i$ de longitud al menos $g - 2 - d_{H^i}(\varphi_i(a^1), \varphi_i(b^1))$. Además como $d_{H^i}(\varphi_i(a^1), \varphi_i(b^1)) = d_{H^1}(a^1, b^1)$, entonces se cumple que:

$$|V(C)| \geq d_{H^1}(a^1, b^1) + g - 2 - d_{H^i}(\varphi_i(a^1), \varphi_i(b^1)) + 2 = g$$

Supongamos entonces $i \neq j$. Entonces C contiene dos trayectorias de longitud dos, digamos, $w^i aw^j$ y $v^i bv^j$, unidas con una (w^i, v^i) -trayectoria en $H^i - Z^i$ de longitud al menos $g - 2 - d_{H^i}(\varphi_i(a^1), \varphi_i(b^1))$ y una (w^j, v^j) -trayectoria en $H^j - Z^j$ de longitud al menos $g - 2 - d_{H^j}(\varphi_j(a^1), \varphi_j(b^1))$. Ya que $d_{H^1}(a^1, b^1) \leq \lfloor g/4 \rfloor + (\lceil g/4 \rceil - 1) + 1 = g/2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|V(C)| &\geq g - 2 - d_{H^i}(\varphi_i(a^1), \varphi_i(b^1)) + g - 2 - d_{H^j}(\varphi_j(a^1), \varphi_j(b^1)) + 4 \\
&= 2g - 2d_{H^1}(a^1, b^1) \\
&\geq g.
\end{aligned}$$

En cualquier caso la longitud de C es al menos g y $G_{2,k}$ es una $(r, k(r-1) + 1; \tilde{g})$ -gráfica con $\tilde{g} \geq g$. Finalmente supongamos $t = 1$. El conjunto de grados de $G_{1,t}$ es $\{r, k(r-1)\}$ y por construcción la gráfica $G_{1,k}$ es una subgráfica de $G_{2,k}$. Así, $G_{1,k}$ es una $(r, k(r-1); \tilde{g})$ -gráfica con $\tilde{g} \geq g$. \square

Teorema 3.1.1.3. (Cota superior) Sean $r \geq 3$ y $k \geq 2$. Si $g \geq 8$ es par y $m = k(r-1) + \varepsilon$ con $\varepsilon = 0, 1$, entonces

$$n(r, m; g) \leq kn(r; g) - 2(k - \varepsilon) \sum_{i=0}^{\lceil g/4 \rceil - 1} (r-1)^i - R(r-1)^{\lceil g/4 \rceil - 1}$$

$$\text{donde } R = \begin{cases} m - r & \text{si } g \equiv 0 \pmod{4}; \\ 2(\varepsilon - 1) & \text{si } g \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Demostración. Sea Γ una $(r; g)$ -jaula con cuello par $g \geq 8$ y orden $n(r; g)$ y consideremos los conjuntos X_j, Y_j descritos en (3.1). Se tiene que

$$S = \sum_{j=0}^{\lfloor g/4 \rfloor} |X_j| + \sum_{j=0}^{\lceil g/4 \rceil - 1} |Y_j| = 2 \sum_{j=0}^{\lceil g/4 \rceil - 1} (r-1)^j + \alpha(r-1)^{\lfloor g/4 \rfloor},$$

donde $\alpha = 1$ si $g \equiv 0 \pmod{4}$ o $\alpha = 0$ si $g \equiv 2 \pmod{4}$. Sea $\Gamma_{\varepsilon+1,k}$ la gráfica dada por el Teorema 3.1.1.2. Si $\varepsilon = 1$,

$$|V(\Gamma_{2,k})| = kn(r; g) - (k-1)S.$$

y si $\varepsilon = 0$ tenemos que

$$|V(\Gamma_{1,k})| = kn(r; g) - kS + |X_{\lfloor g/4 \rfloor}| + |Y_{\lceil g/4 \rceil - 1}| = kn(r; g) - kS + \beta(r-1)^{\lceil g/4 \rceil - 1}$$

donde $\beta = r$ si $g \equiv 0 \pmod{4}$ o $\beta = 2$ si $g \equiv 2 \pmod{4}$. Todos estos hechos implican que

$$\begin{aligned}
|V(\Gamma_{\varepsilon+1,k})| &= kn(r; g) - (k - \varepsilon)S - (\varepsilon - 1)\beta(r-1)^{\lceil g/4 \rceil - 1} \\
&= kn(r; g) - 2(k - \varepsilon) \sum_{j=0}^{\lceil g/4 \rceil - 1} (r-1)^j - R(r-1)^{\lceil g/4 \rceil - 1},
\end{aligned}$$

donde R toma los siguientes valores:

$$R = \begin{cases} (k - \varepsilon)(r - 1) + (\varepsilon - 1)r = k(r - 1) + \varepsilon - r = m - r & \text{si } g \equiv 0 \pmod{4}; \\ 2(\varepsilon - 1) & \text{si } g \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Ya que $\Gamma_{\varepsilon+1,k}$ es una $(r, m; g')$ -gráfica con $g' \geq g$, por el Teorema 3.1.1.1 se sigue que $n(r, m; g) \leq n(r, m; g') \leq |V(\Gamma_{\varepsilon+1,k})|$. \square

El siguiente Corolario es consecuencia del Teorema 3.1.1.3 para $g = 8$.

Corolario 3.1.1.4. (Cota superior) Sean $r \geq 3$ y $k \geq 2$. Si $m = k(r - 1) + \varepsilon$ con $\varepsilon = 0, 1$, entonces $n(r, m; 8) \leq kn(r; 8) - 2r(k - \varepsilon) - (m - r)(r - 1)$.

Demostración. La prueba es consecuencia del Teorema 3.1.1.3 para $g = 8$. \square

3.1.2. Construcción de $(r, m; 8)$ -gráficas para $r - 1 = p^\alpha$

Cuando $r - 1$ es potencia de primo y el cuello es 8 existe una $(r; 8)$ -jaula Γ con orden $n_0(r; 8) = 2 \sum_{i=0}^3 (r - 1)^i$ y en este caso Γ es la gráfica de incidencia de un cuadrángulo generalizado de orden $r - 1$ como se mencionó en la Introducción. La existencia de estas jaulitas fue clave en [4] para probar la que de momento es la mejor cota superior para el valor $n(r, kr; 8)$, enunciada en el siguiente teorema, y que para $r = 3$ se comporta como una familia de $(3, 3k; 8)$ -jaulas de orden $25k + 5$ y que coincide con la Cota inferior (3.2). Esta cota es constructiva y se logró identificando k copias de Γ a través de algunos de sus vértices llamados en conjunto “ovoide”, mismo que aclaramos en la Definición 3.1.2.4.

Teorema 3.1.2.1. [4] Si $k \geq 2$ y $r - 1$ es una potencia de primo, entonces una $(r, rk; 8)$ -gráfica se construye identificando los $(r - 1)^2 + 1$ vértices de un ovoide en k copias de una $(r; 8)$ -jaulita. Así

$$n(r, kr; 8) \leq 2k \sum_{i=0}^3 (r - 1)^i - (k - 1)((r - 1)^2 + 1).$$

Los resultados de esta sección también dependen de la existencia de las $(r; 8)$ -jaulitas, en este caso encaminados a probar la que también de momento es la mejor cota superior sobre el orden de una $(r, m; 8)$ -gráfica, para $m \neq kr$. Por un lado, esto

completa el estudio iniciado en [4] en busca de una respuesta al orden de una $(r, m; 8)$ -jaula, para $2 < r \leq m$, aunque por otro lado no se tiene la certeza de que no exista una mejora a esta cota, abriendo campo a investigaciones futuras que tengan como tarea determinar si es posible o no mejorarla.

El primer resultado en esta línea es consecuencia del Corolario 3.1.1.4 y del orden de las $(r; 8)$ -jaulitas cuando $r - 1$ es potencia de primo.

Corolario 3.1.2.2. (Cota superior) Sean $k \geq 2$, $\varepsilon = 0, 1$ y $r - 1 \geq 2$ una potencia de primo. Entonces $n(r, k(r - 1) + \varepsilon; 8) \leq (2k(r - 1)^2 + k(r - 1) + r)(r - 1) + \varepsilon(r + 1)$.

Demostración. La prueba es inmediata del Corolario 3.1.1.4 y del hecho de que $n(r; 8) = 2 \sum_{i=0}^3 (r - 1)^i$ □

El siguiente resultado es consecuencia del Corolario 3.1.2.2 para $r = 3$ y muestra cómo queda acotado hasta el momento el número $n(3, m; 8)$, para todo $m \geq 4$.

Corolario 3.1.2.3. Si $m = 2k + \varepsilon$ con $k \geq 2$ y $\varepsilon = 0, 1$, entonces

$$\left\lceil \frac{25m}{3} \right\rceil + 5 \leq n(3, m; 8) \leq 10m - 6\varepsilon + 6.$$

Demostración. La prueba es inmediata del la cota inferior (3.2) y del Corolario 3.1.2.2 para $r = 3$. □

Una mejora a la cota superior del Corolario 3.1.2.2 cuando $r - 1$ es una potencia de primo se muestra en seguida, y en la siguiente sección las cotas inferior y superior que aparecen en el Corolario 3.1.2.3 son mejoradas para $r = 3$. Abordamos este trabajo iniciando con la definición de “ovoide”.

Definición 3.1.2.4. Sea Γ una $(r; 8)$ -jaulita con $r - 1$ una potencia de primo. Un ovoide O en Γ es un conjunto máximo de vértices mutuamente a distancia 4. Como consecuencia cualquier elemento v de Γ que pertenezca al mismo conjunto partito que los vértices de O , está a distancia a lo mas 2 de al menos un elemento de O . También se sabe que los ovoides tienen cardinalidad $(r - 1)^2 + 1$ (ver [35, 76, 83]).

Mostramos un breve esquema de lo que a continuación se verá: en el Teorema 3.1.2.5 es exhibida una familia de $(r, k(r - 1); 8)$ -gráficas con el mismo número de vértices de grado m que las gráficas obtenidas del Teorema 3.1.2.1. El hecho de que estas dos familias tengan el mismo número de vértices de grado m nos permitió mostrar en el

Teorema 3.1.2.7 una construcción de $(r, m; 8)$ -jaulas, para $m \neq kr$, como resultado de identificar un número adecuado de copias de cada una de estas dos familias, por medio de sus vértices de grado m . La conclusión del Teorema 3.1.2.7 se verá reflejada como la mejor cota superior sobre el orden de una $(r, m; 8)$ -jaula, cuando $m \neq kr$.

El siguiente resultado muestra una familia de $(r, k(r-1); 8)$ -gráficas con $(r-1)^2 + 1$ vértices de grado $k(r-1)$, mismo número de vértices de grado m que la familia obtenida del Teorema 3.1.2.1. Cabe señalar que una $(r, k(r-1); 8)$ -gráfica también es obtenida del Teorema 3.1.1.2 cuando $g = 8$, aunque el número de vértices de grado $k(r-1)$ en ese caso es $(r-1)^2 + r - 1$.

Construcción 6 Sean X_0 y X_2 como en (3.1), Γ una $(r; 8)$ -jaulita con $r-1$ una potencia de primo y $xy \in E(\Gamma)$ tal que $x \in X_0$. Considérense $D = (N_\Gamma(x) - y) \cup \{x\}$, $Z = X_2 \cup \{y\}$ y $H := \Gamma - D$. Si $\mathcal{G} := H^1 + \dots + H^k$ es la unión de k copias ajenas por vértices de H y $\mathcal{Z} := \{Z^i \subset V(H^i) : i = 1, \dots, k\}$, donde Z^i es la copia de Z en H^i , entonces \mathcal{G}/\mathcal{Z} es una $(r, k(r-1); 8)$ -gráfica con $(r-1)^2 + 1$ vértices de grado $k(r-1)$ y orden $2k \sum_{t=0}^3 (r-1)^t - kr - (k-1)((r-1)^2 + 1)$.

Teorema 3.1.2.5. *Sea $r-1$ una potencia de primo. Existe una $(r, k(r-1); 8)$ -gráfica con $(r-1)^2 + 1$ vértices de grado $k(r-1)$ y orden $2k \sum_{t=0}^3 (r-1)^t - kr - (k-1)((r-1)^2 + 1)$.*

Demostración. Sea $G := \mathcal{G}/\mathcal{Z}$ como en la Construcción 6 y supongamos que $|Z| = n$. Por construcción $n = (r-1)^2 + 1$ y $V(G) = \bigcup_{i=1}^k V(H^i - Z^i) \cup N$, donde N son los n nuevos vértices que resultaron al indentificar las k gráficas de \mathcal{G} . Nota que cualquier vértice en N tiene grado $k(r-1)$ y cualquier otro vértice en la gráfica tiene grado r , es decir, el conjunto de grados de G es $\{r, k(r-1)\}$ y aún mas hay n vértices de grado $k(r-1)$.

Ya que $d_{H^i}(z, w) \geq 4$ para todo par de vértices distintos $z, w \in Z^i$, se sigue que el cuello de G es al menos 8. Además, el cuello de G es exactamente ocho porque H^i aún contiene ciclos de longitud ocho. Finalmente, $|V(G)| = |V(H^1)| + \sum_{i=2}^k |V(H^i - Z^i)| = 2k \sum_{i=0}^3 (r-1)^i - kr - (k-1)((r-1)^2 + 1)$. \square

El Teorema 3.1.2.5 será útil en la prueba del Teorema 3.1.2.7, y se puede ver como un caso particular del Teorema 3.1.2.6 que en seguida probaremos.

Construcción 7 Para $i = 1, 2$ considérese una $(r, m_i; g)$ -gráfica G_i con cuello par g y $Z_i \subset V(G_i)$ su conjunto de vértices de grado m_i . Supongamos que $|Z_1| = |Z_2| = z$ y sea $\mathcal{Z} = \{Z_1, Z_2\}$. Si $d_{G_i}(u, v) \geq g/2$ para todo par $u, v \in Z_i$, entonces $(G_1 + G_2)/\mathcal{Z}$ es una $(r, m_1 + m_2; \tilde{g})$ -gráfica con $\tilde{g} \geq g$ y orden $|V(G_1)| + |V(G_2)| - z$.

Teorema 3.1.2.6. *Sea $r - 1$ una potencia de primo. Existe una $(r, m_1 + m_2; \tilde{g})$ -gráfica con $\tilde{g} \geq g$ y orden $|V(G_1)| + |V(G_2)| - z$.*

Demostración. Sea $G := (G_1 + G_2)/\mathcal{Z}$ una gráfica como en la Construcción 7. El orden y el conjunto de grados de G es inmediato de la Definición 2.2.1.3 y la prueba de que su cuello es al menos g se sigue de la condición: $d_{G_i}(u, v) \geq g/2$ para todo par $u, v \in Z_{G_i}$, $i=1,2$. \square

El teorema principal de esta sección muestra la que de momento es la mejor cota superior sobre el orden de una $(r, m; 8)$ -jaula, para $m \neq kr$, además de mostrar una mejora al Corolario 3.1.2.2:

Teorema 3.1.2.7. *Sea $r - 1$ una potencia de primo, $k \geq r - t$ y $t = 1, \dots, r - 1$. Entonces $n(r, kr + t; 8) \leq (k + 1)(2r - 1)((r - 1)^2 + 1) + (t - 2)r + 2$.*

Demostración. Sea $b = k + 1 - (r - t)$. Como $k \geq r - t$, entonces $b \geq 1$. Sea G_1 una $(r, br; 8)$ -gráfica obtenida del Teorema 3.1.2.1 para $b \geq 2$ y nótese que si $b = 1$, entonces G es una $(r; 8)$ -jaula. Sea Z_1 el conjunto de $(r - 1)^2 + 1$ vértices en G_1 de grado br , que por construcción corresponden al conjunto de $(r - 1)^2 + 1$ vértices de un ovoide en una $(r; 8)$ -jaula. Además, sea G_2 una $(r, (r - t)(r - 1); 8)$ -gráfica obtenida del Teorema 3.1.2.5 y sea Z_2 el conjunto de $(r - 1)^2 + 1$ vértices en G_2 de grado $(r - t)(r - 1)$.

Por definición la gráfica G_i , $i = 1, 2$ cumple que $d_{G_i}(u, v) \geq 4$ para todo par $u, v \in Z_i$. Si $\mathcal{Z} = \{Z_1, Z_2\}$, entonces la gráfica $Q := (G_1 + G_2)/\mathcal{Z}$ obtenida del Teorema 3.1.2.6 tiene cuello $g \geq 8$, $(r - 1)^2 + 1$ vértices de grado $br + (r - t)(r - 1) = (b + r - t - 1)r + t = kr + t$ y el resto de ellos de grado r . Además,

$$\begin{aligned} |V(Q)| &= |V(G_1)| + |V(G_2)| - ((r - 1)^2 + 1) \\ &= 2(b + r - t) \sum_{i=0}^3 (r - 1)^i - (b - 1 + r - t) ((r - 1)^2 + 1) - (r - t)r \\ &= 2(k + 1) ((r - 1)^3 + (r - 1)) + (k + 2) ((r - 1)^2 + 1) - (r - t)r \\ &= (k + 1) ((r - 1)^2 + 1) (2r - 1) + (r - 1)^2 + 1 - (r - t)r \\ &= (k + 1)(2r - 1) ((r - 1)^2 + 1) + (t - 2)r + 2. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.1.1.1 se sigue que $n(r, kr + t; 8) \leq n(r, kr + t; g) \leq |V(Q)|$, para todo $g \geq 8$. \square

3.1.3. La mejor cota inferior para $n(3, m; 8)$

Los resultados de esta sección están enfocados en mejorar la Cota inferior (3.2) para $r = 3$ y $g = 8$, acercando así los ordenes de las gráficas obtenidas del Teorema 3.1.2.7 al de una bijaula. El primer resultado es consecuencia del Teorema 3.1.2.7 para $r = 3$, mostrando una mejora al Corolario 3.1.2.3 cuando $m \geq 8$.

Corolario 3.1.3.1. *Sea $k \geq 2$ y $t = 1, 2$. Entonces $n(3, 3k + t; 8) \leq 25k + 3t + 21$.*

Demostración. La prueba es inmediata del Teorema 3.1.2.7 para $r = 3$. \square

La mejora a la cota inferior dada en (3.2) para $r = 3$ se muestra en el Teorema 3.1.3.3 y en su prueba es empleado el Lema 3.1.3.2, que da una condición suficiente para que una $(3, m; 8)$ -gráfica tenga al menos $9m + 3$ vértices. En lo sucesivo si G es una gráfica y $S \subset V(G)$, entonces considérese $\partial(S) := (\cup_{s \in S} N(s)) \setminus S$.

Lema 3.1.3.2. *Sea $m \geq 4$, $m \not\equiv 0 \pmod{3}$. Si G es una $(3, m; 8)$ -gráfica con al menos dos vértices de grado m a distancia a lo mas tres, entonces $|V(G)| \geq 9m + 3$.*

Demostración. De (3.2) se sigue que $n(3, 4; 8) \geq 39$ y el resultado vale si $m = 4$. En el resto de la prueba asúmase $m \geq 5$. Sea $x \in V(G)$ de grado m y $y \in N(x)$. Considérense los conjuntos X_i, Y_i , $i = 0, 1, 2, 3$ definidos en (3.1).

Si f es un vértice de grado m tal que $d_G(x, f) \leq 2$, entonces $|V(G)| \geq 1 + \sum_{i=1}^3 (|X_i| + |Y_i|) \geq 1 + (m - 1) + 2(m - 1) + 4(m - 1) + 1 + 2 + m - 1 + 2 + 2(m - 1 + 2) = 10m$.

Sean $x, f \in V(G)$ de grado m tales que $d_G(x, f) = 3$ y supóngase que $f \in Y_2$. Sea T el árbol inducido por $\cup_{i=0}^2 (X_i \cup Y_i) \cup X_3$ y $R = G - V(T)$. Claramente $|V(T)| = 7m + 1$ y

$$|V(G)| = 7m + 1 + |V(R)|. \quad (3.2)$$

Sea $S \subset V(R)$ el conjunto de vértices de grado m y sea $s = |S|$. Nótese que $N(f) \cap (S \cup \partial(S)) = \emptyset$, ya que $d_G(f, w) \geq 3$ para todo $w \in S$. Si $F = N(f) \cap V(R)$, entonces $|F| = m - 1$. Además para todo $w \in S$ se tiene que $|N(w) \cap \partial(F)| \leq 1$ ya que $g = 8$ y $d_G(f, w) \geq 3$. Esto implica que $|\partial(S) \cap \partial(F)| \leq |S| = s$ y

$|\partial(S) \cup \partial(F)| \geq sm + 2(m-1) - s$. Como $(\partial(S) \cup \partial(F)) \cap V(T) \subset X_3 \cup Y_2$, se tiene que $|(\partial(S) \cup \partial(F)) \cap V(T)| \leq 4m$. De aquí que $|(\partial(S) \cup \partial(F)) \cap V(R)| \geq sm - 2m - 2 - s$ y $|V(R)| \geq |S| + |F| + |(\partial(S) \cup \partial(F)) \cap V(R)| \geq sm - m - 3$.

Sea $s \geq 4$. Como $m \geq 5$, entonces por (3.2) se sigue que $|V(G)| \geq 7m + 1 + sm - m - 3 \geq 10m - 2 \geq 9m - 3$.

Sea $s \leq 3$. El número de aristas que unen a los vértices de T con vértices en R es al menos $2(|X_3| + |Y_2| - 1) + |N(f) \cap V(R)| = 2(4m - 1) + m - 1 = 9m - 3$. Además, este número de aristas es a lo mas $sm + 3(|V(R)| - s) = s(m - 3) + 3|V(R)| \leq 3m + 3|V(R)| - 9$. Entonces

$$9m - 3 \leq 3m + 3|V(R)| - 9,$$

implica que $|V(R)| \geq 2m + 2$ y por (3.2), $|V(G)| \geq 9m + 3$. \square

Teorema 3.1.3.3. *Si $m \geq 7$, $k \geq 2$ y $m \neq 3k$, entonces $n(3, m; 8) \geq \lceil 25m/3 \rceil + 7$.*

Demostración. Sea G una $(3, m; 8)$ -jaula de orden $n = n(3, m; 8)$. Si en G existen dos vértices de grado m a distancia a lo mas tres, entonces por el Lema 3.1.3.2 se tiene que $n \geq 9m + 3 \geq \lceil 25m/3 \rceil + 7$, para todo $m \geq 7$ y en este caso el resultado es cierto. Asíumase en el resto de la prueba que los vértices de grado m en G están a distancia al menos cuatro. Sea T un árbol de radio 3 enraizado en un vértice x de grado m y tal que cualquier vértice interno tiene grado 3. Sea $T^3 = \{t \in V(T) : d_G(t, x) = 3\}$ y $R = G - V(T)$. Claramente $|T^3| = 4m$, $|V(T)| = 7m + 1$ y

$$n = 7m + 1 + |V(R)|. \tag{3.3}$$

Sea S el conjunto de vértices de grado m contenidos en R y $s = |S|$. El número de aristas que unen a los vértices de T^3 con R es $8m$. Si $|E(R)|$ es el número de aristas inducidas por la subgráfica R , entonces $8m = sm + 3(|V(R)| - s) - 2|E(R)|$, lo cual implica que

$$3|V(R)| = 8m - sm + 3s + 2|E(R)|. \tag{3.4}$$

Si $s \leq 2$, $|V(R)| \geq 2m + 2$ y de (3.3) se sigue que $n \geq 9m + 3$ y en este caso el Lema vale. Si $s = 3$, entonces $|V(R)| \geq \lceil 5m/3 \rceil + 3$ y de (3.3) se tiene que $n \geq \lceil 26m/3 \rceil + 4 \geq \lceil 25m/3 \rceil + 7$ para todo $m \geq 8$. Si $m = 7$, entonces n debe ser par, así $n \geq 66 = \lceil 25m/3 \rceil + 7$ for $m = 7$. Por lo tanto el teorema vale si $s \leq 3$.

Caso $s = 4$. En este caso se tiene de la ecuación (3.4) lo siguiente:

$$3|V(R)| = 4m + 12 + 2|E(R)|. \quad (3.5)$$

De (3.5) y del hecho de que $m \not\equiv 0 \pmod{3}$ (por hipótesis), se tiene que $|E(R)| \neq 0$. Sea $N(x) = \{x_1, \dots, x_m\}$ y $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Se probará por reducción al absurdo que $|E(R)| \geq 3$. Supongamos que $|E(R)| \leq 2$ y considérense los siguientes casos:

(i) Asúmase que R contiene una arista aislada fb tal que $f \in S$. Entonces $|N(f) \cap T^3| + |N(b) \cap T^3| = (m - 1) + 2 = m + 1$. Por el principio de casillas existe un $x_i \in N(x)$ y dos vértices distintos $z, b' \in T^3$ tales que $d_T(z, x_i) = d_T(b', x_i) = 2$ y $fz, bb' \in E(G)$, ver Figura 3.1 (i). Entonces G contiene un ciclo que pasa a través de los vértices $\{z, f, b, b', x_i\}$ de longitud a lo mas 7, lo cual es una contradicción.

(ii) Asúmase que R contiene una arista aislada ab , $a, b \notin S$. Por el caso (i) cualquier otra arista de R debe tener sus extremos incidentes en $R - S$, es decir $\partial(S) = T^3$ lo que implica que para cualquier $t \in T^3$ existe un único $f \in S$ tal que $ft \in E(G)$. Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in T^3$ tales que $aa_1, aa_2, bb_1, bb_2 \in E(G)$ y asumamos que $f_1a_1, f_2a_2, f_3b_1, f_4b_2 \in E(G)$. Sea $t \in T^3$ tal que $d_T(a_1, t) = 2$; ver Figura 3.1 (ii). Como el cuello es 8, $t \notin \{a_2, b_1, b_2\}$ y ya que $\partial(S) = T^3$ entonces $t \in N(f_i)$ para algún $i \in \{1, \dots, 4\}$. Si $t \in N(f_1)$, entonces G contiene un ciclo que pasa a través de los vértices $\{f_1, t, a_1\}$ de longitud a lo mas cuatro; si $t \in N(f_2)$, entonces G contiene un ciclo que pasa a través de los vértices $\{f_2, t, a_1, a, a_2\}$ de longitud a lo mas seis; si $t \in N(f_3) \cup N(f_4)$ entonces G contiene un ciclo que pasa a través de los vértices $\{f_i, t, a_1, a, b, b_1\}$, $i = 3, 4$, de longitud a lo mas siete. En cualquiera de los casos anteriores se tiene una contradicción.

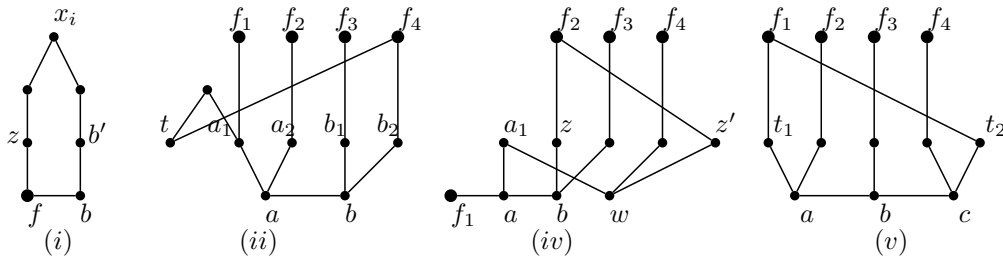


Figura 3.1: Algunos casos en la demostración 3.1.3.3.

(iii) Supóngase que R contiene una trayectoria afb de longitud dos con $f \in S$. Entonces $\partial(S) \cap T^3 \cap (N(a) \cup N(b)) = \emptyset$ ya que $d_G(f, f') \geq 4$ y por lo tanto $|\partial(S) \cap$

$T^3| \leq 4m-4$. Por otro lado, $|\partial(S) \cap T^3| = |\partial(S-f) \cap T^3| + |N(f) \cap T^3| = 3m+m-2 = 4m-2$, lo cual es una contradicción.

(iv) Asúmase que R contiene una trayectoria fab de longitud dos con $f \in S$. Sea $a_1 \in N(a) \cap T^3$ y obsérvese que $\partial(S) \cap T^3 = T^3 - a_1$ ya que $|E(R)| = 2$. Además, existe $w \in N(a_1) \cap (V(R) \setminus \{f, a, b\})$ tal que $w \notin S$ porque $d_G(f, w) = 3$ el cual tiene su vecindad $N(w) \subset T^3$. Como el cuello de G es 8 tenemos que $(N(b) \cup N(w)) \cap N(f) = \emptyset$, entonces $(N(b) \cup N(w)) \cap (T^3 - a_1) \subset \partial(S-f)$. Como $|(N(b) \cup N(w)) \cap (T^3 - a_1)| = 4$, existe $f' \in S - f$ y dos vértices distintos $z, z' \in (N(b) \cup N(w)) \cap (T^3 - a_1)$ tales que $f'z, f'z' \in E(G)$; ver Figura 3.1(iv). Entonces existe un ciclo de longitud siete que pasa por los vértices $\{a_1, a, b, z, f', z', w\}$, lo cual es una contradicción.

(v) Asúmase que R contiene una trayectoria abc de longitud dos con $a, b, c \notin S$. Entonces $\partial(S) = T^3$. Además, como $|(N(a) \cup N(b) \cup N(c)) \cap T^3| = 5$, entonces debe existir un vértice $f \in S$ y dos vértices distintos $t_1, t_2 \in (N(a) \cup N(b) \cup N(c)) \cap T^3$ tales que $ft_1, ft_2 \in E(G)$, ver Figura 3.1(v), entonces se crea un ciclo de longitud seis en G , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $|E(R)| \geq 3$ y utilizando (3.3) y (3.5) se tiene que $n \geq \lceil 25m/3 \rceil + 7$ y el teorema es cierto cuando $s = 4$.

Caso $s \geq 5$. Como $d_G(f, f') \geq 4$ para todo par de vértices $f, f' \in S$, se puede inducir una partición en $V(R)$ en tres conjuntos ajenos S , $\partial(S) \cap V(R)$ y $R' = V(R) \setminus (S \cup (\partial(S) \cap V(R)))$. De aquí que

$$|V(R)| = s + |\partial(S) \cap V(R)| + |R'| = s + sm - |\partial(S) \cap T^3| + |R'| \quad (3.6)$$

ya que $sm = |\partial(S) \cap V(R)| + |\partial(S) \cap T^3|$. Obsérvese que para cualquier vértice $t \in \partial(S) \cap T^3$ existe un único $f_t \in N(t) \cap (S \cup (\partial(S) \cap V(R)))$ ya que $d_G(f, f') \geq 4$ para cualesquiera dos vértices distintos $f, f' \in S$. Por lo tanto para cualquier $t \in \partial(S) \cap T^3$ se tiene que $|N(t) \cap R'| = 1$ y entonces $|R'| \geq |\partial(S) \cap T^3|/3$. De este hecho junto con (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned} |V(R)| &\geq sm + s - 2/3|\partial(S) \cap T^3| \\ &\geq 5m + 5 - 8m/3 \\ &= 7m/3 + 5 \end{aligned}$$

porque $|\partial(S) \cap T^3| \leq 4m$. De (3.3) se sigue que $n \geq \lceil 28m/3 \rceil + 5 > \lceil 25m/3 \rceil + 7$. Por lo tanto el teorema vale si $s \geq 5$. \square

Como consecuencia del Teorema 3.1.3.3 se obtiene el siguiente Corolario el cual mues-

tra la cercanía que guardan los ordenes de las gráficas obtenidas del Teorema 3.1.2.7 para $r = 3$ y del Corolario 3.1.3.1.

Corolario 3.1.3.4. *Sea $k \geq 2$ y $t = 1, 2$. Si $m = 3k + t$, entonces*

$$25k + 8t + 8 \leq n(3, 3k + t; 8) \leq 25k + 3t + 21.$$

Demostración. La prueba es inmediata del Teorema 3.1.3.3 y del Corolario 3.1.3.1. □

3.1.4. Construcción de $(3, m; 8)$ -gráficas con $9m + 3$ vértices

La construcción de $(3, m; 8)$ -gráficas con $9m+3$ vértices tiene lugar en esta subsección, que para los valores de $m = 8, 10, 13$ y 16 mejora en orden a la cota constructiva superior del Teorema 3.1.2.7. La base para la construcción de esta familia de gráficas es la existencia de una $(3, 4; 8)$ -jaula, una $(3, 5; 8)$ -jaula y una $(3, 7; 8)$ -jaula, cada una de ellas con la propiedad de tener sólo tres vértices de grado máximo 4-remotos. A continuación se muestra la construcción de cada una de ellas y en seguida la construcción de la familia de $(3, m; 8)$ -gráficas con $9m + 3$ vértices.

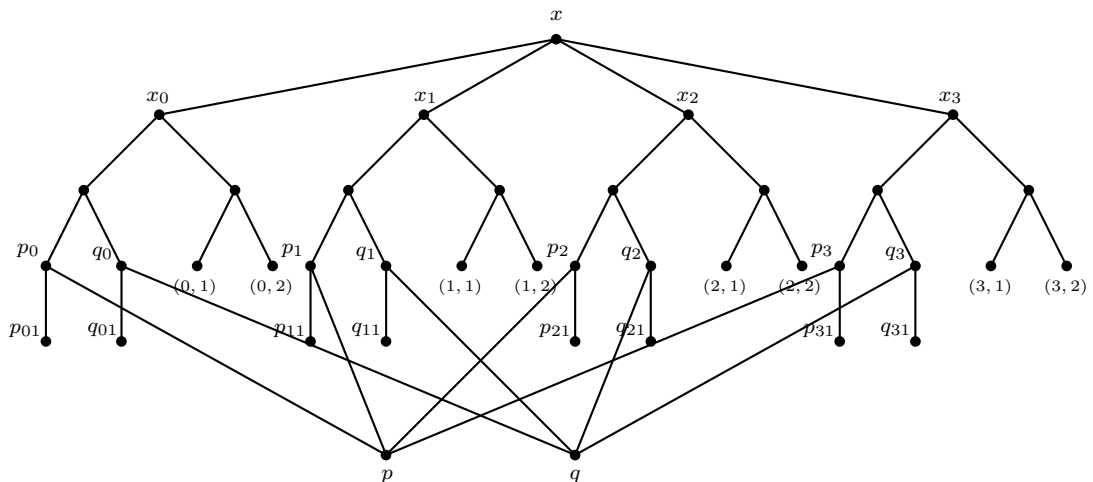


Figura 3.2: La gráfica T^* asociada a $m = 4$.

Construcción 8

Sea T un árbol de longitud tres enraizado en un vértice x de grado m , tal que $N(x) = \{x_0, \dots, x_{m-1}\}$ y tal que cualquier vértice en $T - x$ a distancia a lo mas dos de x tiene grado tres. Sea $D_2(x_i) = \{v \in V(T) : d_T(v, x_i) = 2\} \setminus N_T(x)$, para cada $i = 0, \dots, m - 1$. Nótese que $|D_2(x_i)| = 4$, para cada i y sean $p_i, q_i, (i, 1), (i, 2)$ las etiquetas de los elementos de $D_2(x_i)$ que satisfagan las siguientes tres condiciones: $d_T(p_i, q_i) = 2$, $d_T((i, 1), (i, 2)) = 2$ y $d_T((i, j), w) = 4$, para $i \in \{0, \dots, m - 1\}$, $j \in \{1, 2\}$ y $w \in \{p_i, q_i\}$. Sea T_1 la gráfica obtenida a partir de T al añadir dos nuevos vértices p y q tales que $N_{T_1}(p) = \{p_0, \dots, p_{m-1}\}$ y $N_{T_1}(q) = \{q_0, \dots, q_{m-1}\}$, y sea T^* la gráfica obtenida a partir de T_1 al añadir $2m$ nuevos vértices etiquetados por p_{i1}, q_{i1} , adyacentes a p_i y q_i respectivamente; ver la Figura 3.2.

Sea G la gráfica que resulta de T^* al añadir las siguientes aristas:

$$\{p_{i1}, (i + 1, 1)\}, \{p_{i1}, (i + 2, 2)\}, \{q_{i1}, (i + 1, 2)\}, \{q_{i1}, (i - 1, 1)\},$$

donde la suma es tomada modulo m . Entonces G es una $(3, m; 8)$ -jaula para $m = 4, 5, 7$ con $|V(G)| = 9m + 3$.

Teorema 3.1.4.1. *Existen $(3, m; 8)$ -jaulas, para $m = 4, 5, 7$.*

Demostración. Sea G como en la Construcción 8. Nota que $\{x, p, q\}$ es el conjunto de vértices de grado m en G , que por construcción están a mutua distancia cuatro. Haciendo un sencillo análisis casuístico se puede verificar que el cuello de la gráfica es 8 en los tres casos. Estas tres gráficas birregulares son bijaulas pues 39 y 48 coinciden con la Cota inferior (3.2) para $m = 4, 5$ y 66 coincide con la cota inferior dada en el Teorema 3.1.3.3 para $m = 7$. Cabe destacar que para $m = 5$ la cota inferior dada en (3.2) es 47, sin embargo como todos sus vértices tienen grado impar, el orden en este caso es 48. La Figura 3.3 muestra a la $(3, 4; 8)$ -jaula con 39 vértices, mientras que la Figura 3.4 muestra a la $(3, 5; 8)$ -jaula con 48 vértices. \square

Otra forma de construir la $(3, 7; 8)$ -jaula es usando el método de identificación de vértices como sigue: Sea G una $(3, 4; 8)$ -jaula como en la construcción anterior y sea H la $(3; 8)$ -jaulita. Sea Z_G el conjunto de tres vértices de grado 4 en G y Z_H un conjunto de tres vértices contenidos en un ovoide de H . Si $\mathcal{Z} := \{Z_G, Z_H\}$, entonces $(G + H)/\mathcal{Z}$ es una $(3, 7; 8)$ -jaula con $39 + 30 - 3 = 66$ vértices.

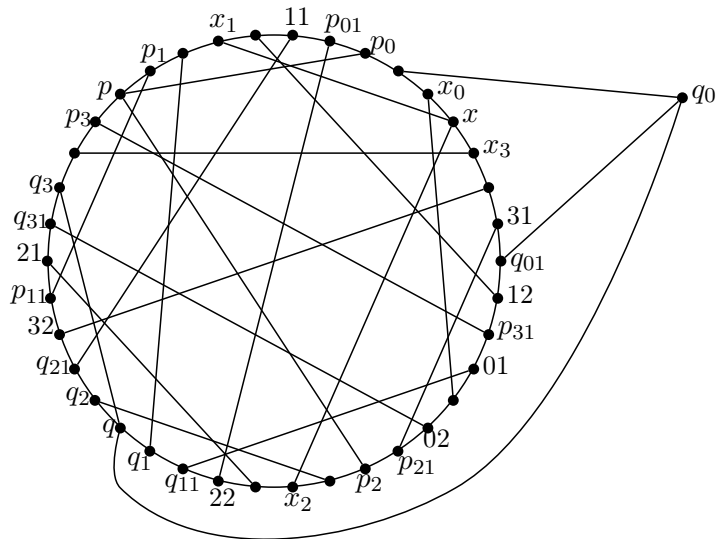


Figura 3.3: Una $(3, 4; 8)$ -jaula con 39 vértices.

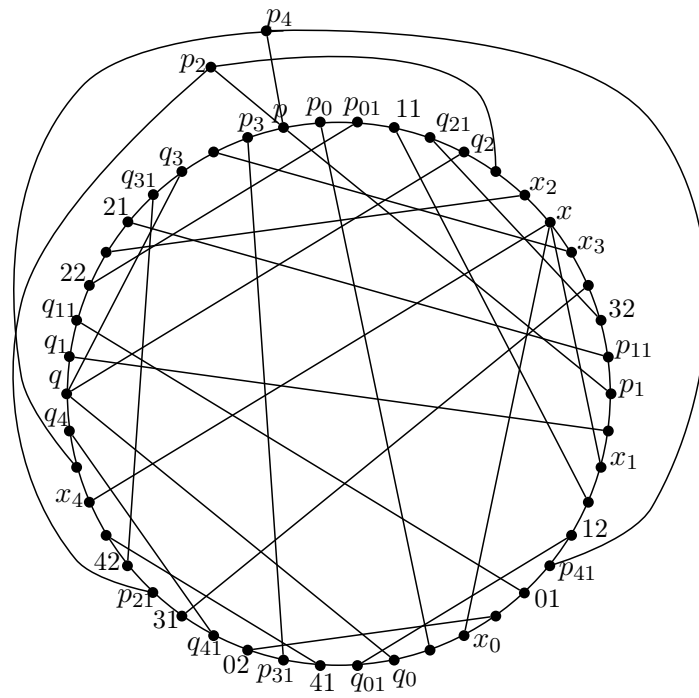


Figura 3.4: Una $(3, 5; 8)$ -jaula con 48 vértices.

El siguiente resultado muestra cómo construir $(3, m; 8)$ -gráficas de orden $9m + 3$ utilizando el mismo método empleado en el Teorema 3.1.2.6, apoyados en la existencia de las $(3, m; 8)$ -jaulas antes descritas.

Teorema 3.1.4.2. *Sea $m \geq 8$, $m \not\equiv 0 \pmod{3}$. Existe una $(3, m; 8)$ -gráfica con $9m + 3$ vértices con tres vértices de grado m a mutua distancia cuatro entre ellos.*

Demostración. Observa que la ecuación diofantina $m = 4\alpha + 5\beta + 7\gamma$ tiene soluciones enteras no negativas ya que $\gcd(4, 5, 7) = 1$ es un divisor de m . Sea A una $(3, 4; 8)$ -jaula, B una $(3, 5; 8)$ -jaula y C una $(3, 7; 8)$ -jaula como en el Teorema 3.1.4.1. Sea Z_α el conjunto de vértices de grado 4 en A , Z_β el conjunto de vértices de grado 5 en B y Z_γ el conjunto de vértices de grado 7 en C . Por construcción $|Z_\alpha| = |Z_\beta| = |Z_\gamma| = 3$. Sea $G_\alpha := A^1 + \dots + A^\alpha$ la unión ajenas por vértices de α copias de A y sea $\mathcal{Z}_\alpha := \{Z^i \subset V(A^i) : i = 1, \dots, \alpha\}$, donde Z^i es la copia de Z_α en A^i . Análogamente defínanse $G_\beta, \mathcal{Z}_\beta, G_\gamma$ y \mathcal{Z}_γ . Entonces $G_\alpha/\mathcal{Z}_\alpha, G_\beta/\mathcal{Z}_\beta$ y $G_\gamma/\mathcal{Z}_\gamma$ es una $(3, 4\alpha; 8)$ -gráfica, $(3, 5\beta; 8)$ -gráfica y una $(3, 7\gamma; 8)$ -gráfica, respectivamente, cada una con tres vértices de grado máximo. Finalmente, si $\mathcal{G} := G_\alpha/\mathcal{Z}_\alpha + G_\beta/\mathcal{Z}_\beta + G_\gamma/\mathcal{Z}_\gamma$ y \mathcal{Z} es la unión de los vértices de grado $4\alpha, 5\beta$ y 7γ en \mathcal{G} , entonces \mathcal{G}/\mathcal{Z} es una gráfica de cuello 8, con tres vértices de grado $m = 4\alpha + 5\beta + 7\gamma$ y orden $39\alpha + 48\beta + 66\gamma - 3(\alpha + \beta + \gamma - 1) = 9(4\alpha + 5\beta + 7\gamma) + 3 = 9m + 3$. \square

La siguiente tabla compara los ordenes de las $(3, m; 8)$ -gráficas obtenidas del Teorema 1.1.0.4, Teorema 3.1.2.7 y Teorema 3.1.4.2 para $4 \leq m \leq 18$. Se puede observar que las $(3, m; 8)$ -gráficas de orden $9m + 3$ construidas en el Teorema anterior tienen menos vértices que las gráficas construidas en el Teorema 3.1.2.7 para $m = 8, 10, 13, 16$.

m	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$n(3, m; 8)$	66		80			105			130			155
cota inferior		74		91	100		116	124		141	150	
cota superior		75		93	102		120	127		147	152	

3.2. Una familia de $(r, m; 6)$ -jaulas

La presente sección está dedicada a un resultado que da soporte a la conjetura de Yuansheng y Liang sobre la existencia de $(r, m; 6)$ -jaulas de orden $2(rm - m + 1)$. En este contexto las únicas bijaulas conocidas de cuello seis son:

1. las $(r, m; 6)$ -jaulas, si (i) $2 \leq r \leq 5$ y $r < m$ ó (ii) $m - 1$ es potencia de primo y $2 \leq r < m$ [90],
2. las $(3, m; 6)$ -jaulas, de orden $4m + 2$ (el cual coincide con $2(rm - m + 1)$ para $r = 3$), para toda $m \geq 3$ [54], y
3. las $(r, m; 6)$ -jaulas, para $m - 1 = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_s p_s$, $r = p_1 + 1$ y $a_i \geq 1$, donde $\{p_1, \dots, p_s\}$ es un conjunto de potencias de primos tales que $p_1 \leq p_i$ para toda i . (Sección actual).

El siguiente resultado aporta al conocimiento sobre la existencia de bijaulas de cuello seis con $2(rm - m + 1)$ vértices, mostrando de manera explícita la construcción bajo el uso de la técnica de identificación de vértices entre copias de subgráficas de la $(p_i + 1; 6)$ -jaulita, p_i potencia de primo, para $i = 1, \dots, s$.

Teorema 3.2.0.3. Sean $3 \leq r \leq m$ y $\{p_1, \dots, p_s\}$ un conjunto de potencias de primos tales que $p_1 \leq p_i$ para toda i . Existe una $(r, m; 6)$ -jaula, para $m - 1 = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_s p_s$, $r = p_1 + 1$ y $a_i \geq 1$.

Demostración. Sea Γ_i una $(p_i + 1; 6)$ -jaulita, para cada $i = 1, \dots, s$ y sea $x^i y^i \in E(\Gamma_i)$. Sea $N_{\Gamma_i}(x^i) = \{x_1^i, \dots, x_{p_i+1}^i\}$ y $N_{\Gamma_i}(y^i) = \{y_1^i, \dots, y_{p_i+1}^i\}$, tal que $x_{p_i+1}^i = y^i$ y $y_{p_i+1}^i = x^i$. Sea H_1 la gráfica que resulta de Γ_1 al eliminar los vértices $\{x^1, y^1\}$ y considérese a $G_{a_1-1} := H_1^1 + \cdots + H_1^{a_1-1}$, la unión ajena por vértices de $a_1 - 1$ copias de H_1 . Sea $\mathcal{Z}_{a_1-1} := \{Z_1^i \subset V(H_1^i) : i = 1, \dots, a_1 - 1\}$, donde $Z_1^i = \{x_1^{1i}, \dots, x_{p_1}^{1i}, y_1^{1i}, \dots, y_{p_1}^{1i}\}$ son los vértices de grado p_1 en cada H_1^i . Con esto en mente, defínase $H_1^0 := \Gamma_1$ y $G_{a_1} := H_1^0 + G_{a_1-1}$. Así mismo, defínase $Z_1^0 = \{x_1^1, \dots, x_{p_1}^1, y_1^1, \dots, y_{p_1}^1\}$ y $\mathcal{Z}_{a_1} := Z_1^0 + \mathcal{Z}_{a_1-1}$.

Además para cada $2 \leq j \leq s$, considérese la gráfica H_j que se obtiene a partir de Γ_j al eliminar la unión de vecindades cerradas $\bigcup_{k=p_1+1}^{p_j} (N_{\Gamma_j}[x_k^j] \cup N_{\Gamma_j}[y_k^j])$ y considérese a $G_{a_j} := H_j^1 + \cdots + H_j^{a_j}$, la unión ajena por vértices de a_j copias de H_j . Sea $\mathcal{Z}_{a_j} := \{Z_j^i \subset V(H_j^i) : i = 1, \dots, a_j\}$, donde $Z_j^i = \{x_1^{ji}, \dots, x_{p_1}^{ji}, y_1^{ji}, \dots, y_{p_1}^{ji}\}$ son los vértices de grado p_j en cada H_j^i .

De lo anterior se tiene que $G_{a_1}/\mathcal{Z}_{a_1}$ es una $(p_1 + 1, a_1p_1 + 1; 6)$ -gráfica, y que $G_{a_j}/\mathcal{Z}_{a_j}$ es una $(p_1 + 1, a_j p_j; 6)$ -gráfica, para cada $2 \leq j \leq s$. Nótese también que $|\mathcal{Z}_{a_1}| = \cdots = |\mathcal{Z}_{a_s}| = 2p_1$. Finalmente, sea $\mathcal{G} := G_{a_1}/\mathcal{Z}_{a_1} + \cdots + G_{a_s}/\mathcal{Z}_{a_s}$ y $\mathcal{Z} := \{Z'_{a_j} \subset G_{a_j}/\mathcal{Z}_{a_j} : j = 1, \dots, s\}$, donde $Z'_{a_j} := \{w \in V(G_{a_j}/\mathcal{Z}_{a_j}) : w \text{ tiene grado máximo}\}$. Nuevamente se cumple que $|Z'_{a_1}| = \cdots = |Z'_{a_s}| = 2p_1$, por lo tanto la gráfica \mathcal{G}/\mathcal{Z} es

una gráfica con conjunto de grados $\{p_1 + 1; a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_sp_s + 1\}$. Ahora se probará que el cuello de la gráfica es al menos seis. Sea \mathcal{C} un ciclo de longitud mínima contenido en \mathcal{G}/\mathcal{Z} . Si \mathcal{C} está totalmente contenido en alguna $G_{a_i}/\mathcal{Z}_{a_j}$, entonces el cuello de la gráfica es al menos seis. De lo contrario existen varios casos, analizados a continuación:

1. Si $V(\mathcal{C}) \cap \{x^1, y^1\} \neq \emptyset$, entonces \mathcal{C} tiene longitud 6.
2. Si $V(\mathcal{C}) \cap \{x^1, y^1\} = \emptyset$, entonces \mathcal{C} pasa por dos vértices de grado máximo w_1, w_2 , de lo contrario el ciclo tiene longitud al menos 8:
 - a) Si $d_{\mathcal{G}/\mathcal{Z}}(w_1, w_2) = 2$ (es decir, ambos son vecinos de x^1 o de y^1), entonces $d_{(\mathcal{G}/\mathcal{Z})-\{a\}}(w_1, w_2) = 4$, para $a \in \{x^1, y^1\}$, por lo tanto $l(\mathcal{C}) = 6$.
 - b) De lo contrario $d_{\mathcal{G}/\mathcal{Z}}(w_1, w_2) = 3$ y como $d_{(\mathcal{G}/\mathcal{Z})-\{x^1, y^1\}}(w_1, w_2) = 3$, entonces $l(\mathcal{C}) = 6$.

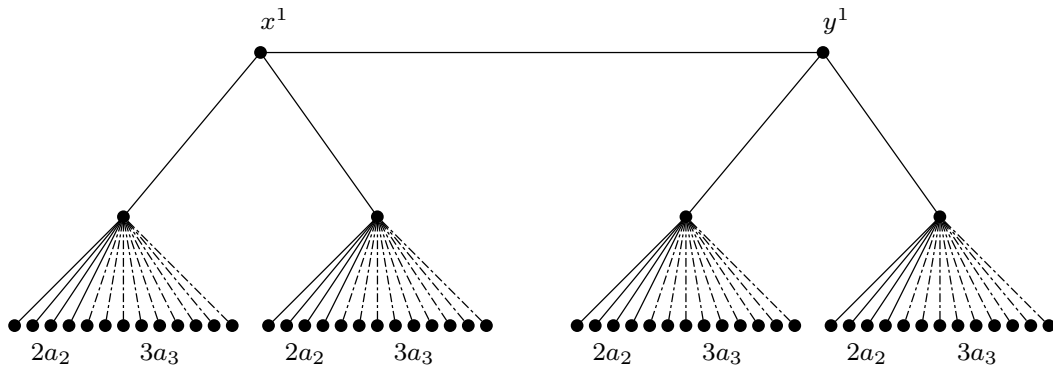


Figura 3.5: Si $a_2 = 2$ y $a_3 = 3$, entonces se tienen una $(3, 14; 6)$ -jaula G con cuatro vértices de grado 14. Las aristas punteadas sí pertenecen a la gráfica y corresponden a las aristas asociadas al primo 3 y se dibujan diferente para distinguirlas de las aristas correspondientes al primo 2.

Por lo tanto G es una $(r, m; 6)$ -jaula ya que su orden es:

$$\begin{aligned}
 |V(G)| &= 2(1 + p_1 + (a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_sp_s)p_1) \\
 &= 2(1 + p_1 + (m - 1)p_1) \\
 &= 2(1 + (r - 1) + (m - 1)(r - 1)) \\
 &= 2(rm - m + 1) = n_0(r, m; 6).
 \end{aligned}$$

□

Apéndices

Apéndice A

Breve reseña sobre $(k; g)$ -jaulas

La presente reseña muestra un breve resumen de los resultados mas destacados en jaulas, enfatizando en jaulas con cuello cinco. Nuestro objetivo es dar un enfoque global sobre los métodos que se han empleado en esta área para resolver el problema de construcción de jaulas y pensamos que el caso de las jaulas de cuello cinco es un buen ejemplo para dicho objetivo.

Edward F. Moore quien fue la primera persona en proponer el estudio sobre la clasificación y construcción de las jaulas, inspiró a A.J. Hoffman y R.R. Singleton a trabajar en ello, quienes publicaran por primera vez en su artículo “On Moore graphs with diameters 2 and 3” [57] la primer cota superior sobre el orden de una $(r; d)$ -gráfica (gráfica r -regular con diámetro d) que llamaron como la cota de Moore y probando a su vez la existencia de aquellas que alcanzan dicha cota, a las que nombraron gráficas de Moore.

No es difícil ver que el orden de una gráfica de Moore r -regular con diámetro d coincide con el orden de una $(r; g)$ -jaulita:

$$n(r; g) \geq n_0(r; g) = \begin{cases} 1 + r + r(r-1) + \dots + r(r-1)^{\frac{(g-3)}{2}} & \text{si } g \text{ es impar;} \\ 2(1 + (r-1) + \dots + (r-1)^{\frac{g}{2}-1}) & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

Con esta idea en mente el trabajo de Hoffman y Singleton [57] da una prueba de que las únicas $(r; g)$ -jaulitas existen sólo en los casos mostrados en la siguiente lista.

1. $r = 2$ y $g \geq 3$, ciclos;
2. $g = 3$ y $r \geq 2$, gráficas completas;
3. $g = 4$ y $r \geq 2$, gráficas completas bipartitas;
4. $g = 5$ y
 - a) $r = 2$, el 5-ciclo;
 - b) $r = 3$, la gráfica de Petersen;
 - c) $r = 7$, la gráfica de Hoffman-Singleton;
 - d) y posiblemente $r = 57$;
5. $g = 6, 8$ ó 12 y existe un n -gono generalizado simétrico de orden $r - 1$ una potencia de primo.

Atendiendo a lo anterior, el estudio sobre la construcción de las jaulas se tornó en la construcción de aquellas con orden estrictamente mas grande que la cota de Moore. Por este motivo, Biggs e Ito en [32] (1980) definen el exceso de una $(k; g)$ -gráfica G como $|V(G)| - n(k; g)$. En relación a este término, actualmente el problema sobre la construcción de jaulas se plantea como la construcción de $(k; g)$ -gráficas con exceso pequeño. Mostramos a continuación una breve reseña sobre algunos de los resultados mas destacados en esta área y otros que fueron motor de inspiración para este trabajo. Para mayor referencia sobre estos resultados ver el survey de Wong [87], el libro de Holton y Sheehan [58] o el survey mas reciente elaborado por Exoo y Jajcay [46].

En general las jaulas conocidas que no son gráficas de Moore tienen un exceso pequeño. Las siguientes dos tablas aparecen en [46] y exponen dos de los casos mas estudiados en esta teoría: jaulas tres regulares (o cúbicas) y jaulas de cuello cinco, la mayoría de ellas con exceso pequeño.

g	5	6	7	8	9	10	11	12
$n(3; g)$	10	14	24	30	58	70	112	126
Número de jaulas	1	1	1	1	18	3	1	1

Cuadro A.1: Valores exactos de $n(3; g)$.

El primer elemento del Cuadro A.1 es la $(3; 5)$ -jaula o gráfica de Petersen construida en 1898 como la mas pequeña de las gráficas cúbicas sin puentes y sin exceso, además

de K_4 . Cabe resaltar que a pesar de que la existencia de esta gráfica se le atribuye a Petersen, fue Kempe quien la introdujo por primera vez en [63] (1886). La $(3, 6)$ -jaula o gráfica de Heawood se corresponde con la gráfica de incidencia del plano proyectivo $PG(2, 2)$ y por lo tanto es jaulita, es decir no tiene exceso. La $(3, 7)$ -jaula o gráfica de McGee es la primer jaula cúbica que no es jaulita, tiene orden 24 y exceso 2. La $(3; 8)$ -jaula o gráfica de Tutte-Coxeter es la gráfica de incidencia del cuadrángulo generalizado $CG(2, 2)$, es decir es jaulita. El primer caso de jaula cúbica que no es única se da cuando $g = 9$ ya que se conocen dieciocho $(3; 9)$ -jaulas no isomorfas entre sí, todas ellas con 58 vértices y la primera de ellas se encontró especialmente con ayuda de muchos cálculos computacionales por Biggs y Hoare en [30] (1980). Además en [31] (1995) se exponen dos métodos computacionales para construir gráficas cúbicas con cuello dado que fueron empleadas para dar dos pruebas independientes de que una $(3; 9)$ -jaula debe tener 58 vértices, mostrando ahí mismo la lista de las 18 jaulas. Para cuello 10 se sabe que existen tres $(3; 10)$ -jaulas, la primera hallada por Balaban en [21] (1972) al conectar ciclos de longitud diez por medio de trayectorias de longitud cinco y las otras dos halladas al hacer un análisis de casos en [74] (1980) en donde además prueban que $n(3, 10) = 70$. La existencia de otra $(3; 10)$ -jaula no ha sido descartada por los autores de [74]. El caso $g = 11$ fue resuelto por Balaban en [22] (1973) al eliminar un subárbol de la $(3; 12)$ -jaulita y la unicidad de esta jaula fue probada en [71] (1998). El proceso de eliminar de una $(k; g)$ -gráfica G una subgráfica H con conjunto de grados $\{1, k\}$ tal que la gráfica $G - H$ tenga un cuello de tamaño al menos $g - 1$ es un ejemplo de las construcciones usualmente llamadas “por escisión” y fue empleado por primera vez en [22] (1973) para obtener la $(3; 11)$ -jaula. Finalmente, la $(3; 12)$ -jaula es la gráfica de incidencia del hexágono generalizado de orden dos y por lo tanto no tiene exceso, es decir, es jaulita.

La siguiente tabla muestra los ordenes de las jaulas de cuello cinco conocidas hasta el momento.

k	3	4	5	6	7
$n(k; 5)$	10	19	30	40	50
Número de jaulas	1	1	4	1	1

Cuadro A.2: Valores exactos de $n(r; 5)$.

La primera de ellas es la $(4; 5)$ -jaula o gráfica de Robertson construida en [78] (1964) al hacer un análisis de casos, es única y tiene un exceso de dos. Por otro lado, se conocen cuatro jaulas para $k = 5$, todas tienen un exceso de cuatro, una de ellas

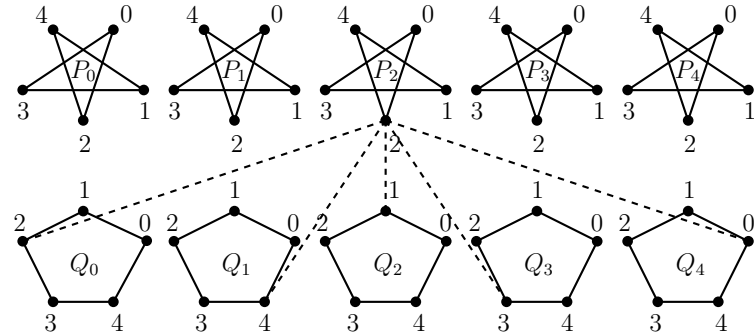


Figura A.1: Gráfica de Hoffman-Singleton

es subgráfica de la gráfica de Hoffman-Singleton y otra se puede construir desde el dodecaedro [85]. La $(6; 5)$ -jaula es única [86], se construyó en la tesis de doctorado de Neil Robertson y una construcción diferente se publicó por primera vez en [73], también se puede ver como subgráfica de la gráfica de Hoffman-Singleton al eliminar de ésta un pentágono y su pentagrama correspondiente. Finalmente, la $(7; 5)$ -jaula o gráfica de Hoffman-Singleton fue obtenida en [57] (1960) por Alan Hoffman y Robert Singleton mientras intentaban clasificar a todas las gráficas regulares con diámetro dos y tres (llamadas gráficas de Moore), siendo esta la de mayor orden con estas características. Existen diferentes construcciones de esta gráfica y la mas conocida fue construida por Robertson en 1969: considérense cinco pentágonos P_i y cinco pentagramas Q_j , $0 \leq i, j \leq 4$, etiquetados de forma que el vértice k de P_i sea adyacente al vértice $k - 1$ y $k + 1$ de P_i , y el vértice k de Q_j sea adyacente al vértice $k - 2$ y $k + 2$ de Q_j . Finalmente hacer adyacente al vértice k de P_i con el vértice $ij + k$ (mód 5) de Q_j , implicando que para cada i y j la gráfica inducida entre P_i y Q_j es isomorfa a la gráfica de Petersen. El resultado de esta construcción es isomorfa a la que resulta de amalgamar 5 pentagramas y 5 ciclos de longitud cinco en B_5 . Ver Figura A.1.

A.0.1. Construcción de cotas superiores

Cuando el orden de una $(k; g)$ -jaula no es conocido se suele denotar por $rec(k; g)$ (el récord actual) al orden de la $(k; g)$ -gráfica mas pequeña conocida hasta el momento. Este nuevo concepto es la herramienta para medir los avances relacionados a la construcción de (k, g) -jaulas. En [80] 1967 Sauer da una primera cota superior del

orden de una $(k; g)$ -jaula, para todo $k \geq 2$ y $g \geq 3$.

Teorema A.0.1.1. [80] Para todo par de enteros $k \geq 2$ y $g \geq 3$ se tiene que:

$$n(k; g) \leq \begin{cases} 2(k-2)^{g-2} & \text{si } g \text{ es impar} \\ 4(k-1)^{g-3} & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

Pasaron treinta años para que la cota de Sauer fuera mejorada. Los autores de esta nueva cota son Lazebnik, Ustimenko y Woldar quienes prueban en [68] el siguiente resultado:

Teorema A.0.1.2. [68] Sean $r \geq 2$, $g \geq 5$ y q la potencia de primo impar mas pequeño tal que $r \leq q$. Entonces, $n(r; g) \leq 2rq^{\frac{3g}{4}-a}$, donde $a = 4, \frac{11}{4}, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}$ para $g \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ respectivamente.

A partir del trabajo desarrollado en [68] surge el interes de construir $(k; g)$ -gráficas con pocos vértices, buscando disminuir cada vez mas el valor de $rec(k; g)$.

Por otro lado, respecto al orden de una $(k; g)$ -gráfica con cuello $g \in \{6, 8, 12\}$ y $k-1$ diferente a una potencia de primo, se tiene el siguiente teorema [18] (2010) que encapsula todo los resultados conocidos referentes a este tópico.

Teorema A.0.1.3. [18] Sea $q \geq 2$ una potencia de primo y $g = 6, 8, 12$.

1. [11, 16] $n(q; 6) \leq 2(q^2 - 1)$;
2. [16] $n(q-1; 6) \leq 2(q^2 - q - 2)$;
3. [2] $n(k; 6) \leq 2(qk - 2)$ para todo $k \leq q-1$;
4. [17] $n(k; 8) \leq 2q(qk - 1)$ para todo $k \leq q$;
5. [52] $n(q; 8) \leq 2q(q^2 - 2)$ si q es un cuadrado;
6. [6] $n(k; 12) \leq 2kq^2(q^2 - 1)$ para todo $k \leq q$.

Construcciones de cotas superiores de cuello 5

El siguiente listado muestra los avances sobre el orden de una $(k; 5)$ -jaula para todo k entero. Todos los resultados muestran diferentes métodos constructivos y cada uno de ellos aporta una cota superior constructiva para el orden de una $(k; 5)$ -jaula.

1) La construcción de gráficas de cuello cinco a partir de la gráfica B_q empleada por Brown en [37] (1967) fue el primer resultado en esta línea de estudio. La construcción de $(q+2; 5)$ -gráficas de orden $q^2 = |V(B_q)|$ se obtiene al amalgamar q ciclos en cada uno de los paquetes P_i y L_i , $1 \leq i \leq q$ de B_q . Además el exceso de estas gráficas es ligeramente menor a la cota de Moore.

2) Wegner en [85] (1973) construye una familia de $(k; 5)$ -gráficas para k primo y orden $2(k^2 - k)$. Un elemento de esta familia se obtiene al conectar los vértices de un p^2 -ciclo a un conjunto independiente de vértices de tamaño $p(p-2)$. Por ejemplo, si $k = 5$ se construye una $(5; 5)$ -gráfica de orden $k^2 + k(k-2) = 40$ con un exceso de diez. Cabe destacar que esta construcción mejora a la de Brown por $2k$ vértices para k primo.

3) Parsons en [77] (1976) construye $(k; 5)$ -gráficas para $k = (q+1)/2$, q potencia de primo y orden $2k^2 - 3k + 1$. Sus construcciones parten del plano proyectivo $PG(2, q)$ construido a partir de los subespacios de dimensión uno y dos del espacio vectorial de dimensión tres sobre el campo \mathbb{F}_q . El exceso de estas gráficas es menor al de las gráficas construidas por Wegner para $k = (q+1)/2$ donde q es primo y cabe señalar que su trabajo está inspirado en el artículo de Coxeter titulado "Self-dual configurations and regular graphs" [40] (1950). Primero construye un conjunto de gráficas G_q que tienen como conjunto de vértices los puntos de $PG(2, q)$ y dos de ellos son adyacentes si su producto punto es cero. Las $(k; 5)$ -gráficas que él obtiene son subgráficas inducidas de G_q . El exceso de estas gráficas es menor al de las gráficas construidas por Wegner para $k = (q+1)/2$ donde q es primo.

4) Murty en [72] (1979) construyó una familia de $(pm+2)$ -gráficas regulares de cuello cinco de orden $2p^{2m}$, para $p \geq 5$ primo, obteniendo como caso particular a la gráfica de Hoffman-Singleton.

5) O'Keefe y P.K. Wong muestran en [75] (1984) dos cotas superiores constructivas para $n(k; 5)$, una de ellas considerablemente mejor cuando $k-2$ es potencia de primo. En particular, cuando $k = 7$, obtienen la gráfica de Hoffman-Singleton. Ellos prueban para $k \geq 7$ con $k-2$ potencia de primo y con el apoyo de q cuadrados mutuamente ortogonales que $n(k; 5) \leq 2(k-2)^2$ y si n es un entero tal que $3 \leq f \leq k$ entonces $n(f; 5) \leq 2(k-2)(f-2)$. Trece años más tarde, con el apoyo de un conjunto completo de cuadrados latinos de orden 2^s , junto con el cuadrado $L_0 = [a_{ij}]$, $a_{ij} = i$, para $0 \leq j \leq k-2$, Wang probó en [84] (1997) que $n(k; 5) \leq 2k^2 - 4k + 2$ para $k = 2^s + 1$.

6) Araujo-Pardo y Montellano-Ballesteros en [15] (2005) construyen a partir de las gráficas de incidencia del plano proyectivo $PG(2, q)$ y el plano afín $AG(2, q)$ familias de $(k; 5)$ -gráficas [15] para $k = p + 2$ y cuando p es primo sus gráficas coinciden con las de O’Keefe y P.K. Wong.

7) Jørgensen en [60] (2005) construye $(k; 5)$ -gráficas a partir de conjuntos de diferencia relativa y la mejor de sus construcciones se obtiene para $k = q + 3$, q potencia de primo y orden $2k^2 - 12k + 16$.

8) En [12] (2008) M. Abreu, M. Funk, D. Labbate y V. Napolitano extienden la construcción de Murty a $(k; 5)$ -gráficas, para $k = q + 2 - \lambda$ de orden $2q(q - \lambda)$ con $q = p^m$, $p \geq 5$ y $0 \leq \lambda \leq q - 2$. Sus construcciones se basan en matrices con entradas en el campo $GF(q)$ cuyas entradas son “explotadas” en matrices cuadradas de $(0, 1)$ -bloques la cual resulta ser la matriz de adyacencia de una gráfica regular de cuello cinco.

9) M. Funk en [51] (2009) construye $(k; 5)$ -gráficas a partir de semiplanos elípticos de orden $n - 1$ donde $n = k - r$ para algún $r \geq 1$. En este trabajo el autor iguala o mejora los valores de $rec(k; 5)$ para ciertos valores de k .

10) El último trabajo en esta línea fue dado por M. Abreu, G. Araujo-Pardo, C. Balbuena y D. Labbate [1] (2011). La construcción de $(q + 3; 5)$ -gráficas es mostrada para diferentes valores de q . En particular, para $q = 13, 17, 19$ se obtienen gráficas que mejoran las cotas conocidas. El método empleado para cualquier primo $q \geq 23$ fue realizar operaciones de reducción y amalgama sobre la gráfica de Levi B_q de un semiplano elíptico de tipo C .

Apéndice B

Breve reseña sobre propiedades estructurales en bijaulas

Debido a que esta tesis está enmarcada en el tema de construcción de bijaulas, nos parece importante dedicar un apéndice al estudio desarrollado sobre sus propiedades estructurales, tales como la conexidad y el diámetro, mismas que han sido intensamente estudiadas en el área de teoría de jaulas, entre otras.

Retomando lo que se mencionó en la introducción sobre el origen del concepto de $(D; g)$ -jaula este fue propuesto por primera vez por Chartrand, Gould y Kapoor en [38] (1981). En el mismo trabajo los autores dan una prueba sobre la existencia de toda $(D; g)$ -jaula basada fuertemente en la existencia de las $(k; g)$ -jaulas. La construcción de estas gráficas ha sido ampliamente estudiada desde el trabajo desarrollado por Kapoor, Polimeni y Wall en [62] (1977), siendo una de sus aportaciones principales la construcción de gráficas con conjunto de grados D , cuello tres y orden $n_0(D; 3)$.

En lo que a cotas inferiores sobre el orden de una $(D; g)$ -jaula concierne, M. Downs, R.J. Gould, J. Mitchem y F. Saba [42] obtuvieron la siguiente cota al contar los vértices que emergen de un vértice de grado máximo.

$$n(D; g) \geq \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^t a_k (a_1 - 1)^{i-1} & \text{if } g = 2t + 1; \\ 1 + \sum_{i=1}^{t-1} a_k (a_1 - 1)^{i-1} + (a_1 - 1)^{t-1} & \text{if } g = 2t. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Como consecuencia de la Cota (B.1) el orden de una $(r; g)$ -jaula queda acotado entre los ordenes de dos bijaulas de cuello g :

Teorema B.0.1.4. [42] Sea Γ una $(r; g)$ -jaula:

1. Si $r \geq 3$ y t es el número de vértices de grado $2r$ en alguna $(r, 2r; g)$ -jaula, entonces $f(r-1, r; g) \leq f(r; g) \leq f(r, 2r; g) + t$.
2. Si $f(r; g) = m$, entonces $f(r, kr; g) \leq k(m-1) + 1$ y la igualdad se alcanza cuando n es impar y m es igual a la cota inferior (B.1).

B.0.1. Resultados conocidos sobre propiedades estructurales de bijaulas

La breve reseña sobre cuello cinco del Apéndice A muestra lo complejo que puede resultar acercarse al orden de una $(r; g)$ -jaula. También se han estudiado ampliamente algunas propiedades estructurales sobre jaulas como la conexidad y el diámetro [14, 43, 49, 59, 64, 69, 70, 88]. Un punto clave para las pruebas de la mayoría de estos resultados es el llamado “teorema de monotonía del cuello” probado por Erdős y Sachs en [45] (ver también [49, 58]).

Teorema B.0.1.1. (Teorema de monotonía del cuello) [45, 49, 58] Sean $r \geq 2$, $3 \leq g_1 < g_2$ enteros y sea $n(r; g_i)$ el orden de la $(r; g_i)$ -jaula, $i = 1, 2$. Entonces $n(r; g_1) < n(r; g_2)$.

Por otro lado, lo que se sabe sobre propiedades estructurales de una $(D; g)$ -jaula se debe en parte a resultados que extienden algunos en teoría de jaulas. Por ejemplo, C. Balbuena y X. Marcote [23] (2011) dan una generalización del Teorema B.0.1.1, misma que les sirvió de apoyo para estudiar otras propiedades estructurales en $(D; g)$ -jaulas.

Teorema B.0.1.2. [23] Sean $D = \{a_1, \dots, a_k\}$ con $2 \leq a_1 < \dots < a_k$ y g_1, g_2 tales que $3 \leq g_1 < g_2$. Entonces $n(D; g_1) < n(D; g_2)$ si:

1. $g_1 = 3$;
2. algún $a_i \in D$ es par y tiene frecuencia al menos dos;
3. cualquier $a_i \in D$ es par;
4. algún $a_i \in D$ es impar y $g_1 \geq k - 1$;
5. $k \leq 5$;
6. algún $a_i \in D$ es impar para $i \geq \lfloor (k + 8)/3 \rfloor$ y tiene frecuencia al menos tres.

Conjetura B.0.1.3. [23] La desigualdad $n(D; g_1) < n(D; g_2)$ vale para cualquier conjunto de grados y todos los enteros $3 \leq g_1 < g_2$.

El tema de la conexidad en jaulas ha sido estudiado por varios autores, y uno de los problemas en el que se ha trabajado intensamente es la conjetura de Fu et. al. [49] que plantea que cualquier $(r; g)$ -jaula es maximalmente conexa, es decir, la conexidad por vértices es igual a r . A este respecto, se ha demostrado que la conjetura es válida si $g \in \{6, 8, 12\}$ y $r \geq 3$, o bien si $g \in \{5, 7, 11\}$ y $r - 1$ es una potencia de primo [10, 70], o también si $r \in \{3, 4\}$ para todo $g \geq 3$ [43, 49, 59, 69, 88]. El mejor resultado para cuello impar muestra que cualquier $(r; g)$ -jaula es $\lceil \sqrt{r + 1} \rceil$ -conexa, para todo $r \geq 3$ y cuello impar $g \geq 7$ y si $r \geq 3$ y el cuello es par $g \geq 6$ entonces toda $(r; g)$ -jaula es $(s + 1)$ -conexa donde s es el entero mas grande tal que $s^3 + 2s^2 \leq r$ [65]. Varios de estos resultados están apoyados en el “Teorema del Diámetro”, demostrado por Sauer en [80] (1967) y que por su importancia en el área enuncio a continuación.

Teorema B.0.1.4. [80] (Teorema del Diámetro) Sean $r \geq 2$ y $k \geq 3$ enteros. Entonces el diámetro de una $(r; g)$ -jaula G satisface que $\text{diam}(G) \leq g$.

Regresando al tema sobre la conexidad en $(D; g)$ -jaulas, existen ejemplos como la $(2, 4; 4)$ -bijaula con un único vértice de corte que la hace no maximalmente conexa [24], que hizo que el estudio sobre la conexidad en $(D; g)$ -jaulas persiguiera un objetivo diferente al planteado en [49]. Al igual que varios resultados sobre conexidad en jaulas tienen apoyo en el Teorema B.0.1.4, en $(D; g)$ -jaulas existe un resultado que extiende el teorema del diámetro y que es base en varias pruebas sobre la conexidad en $(D; g)$ -jaulas. Antes de enunciar el resultado, cabe mencionar que si G es una gráfica con conjunto de grados D , entonces la frecuencia de cada grado en D es el número de vértices de la gráfica que tienen ese grado.

Teorema B.0.1.5. [24] Sea $D = \{r, m\}$ con $2 \leq r < m$ y sea G una $(D; g)$ -jaula.

Entonces $\text{diam}(G) \leq g$ si uno de los siguientes puntos vale:

1. r es par y tiene frecuencia al menos dos;
2. $m = r + 1$

En [24] se inicia el estudio sobre la conexidad en $(D; g)$ -jaulas centrando su atención en bijaulas. Con esto en mente, los autores primero prueban que todas las $(D; g)$ -jaulas son conexas.

Teorema B.0.1.6. [24] *Cualquier $(D; g)$ -jaula es conexa si $n(D; g) < n(D; g')$ para cualesquiera $g < g'$. Además, $n(D; g) \leq \sum_{i=1}^k n(a_i; g) - 2(k - 1)$, donde $D = \{a_1, \dots, a_k\}$, $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$.*

Finalmente establecen un resultado que da condiciones suficientes para que una $(D; g)$ -jaula sea 2-conexa.

Teorema B.0.1.7. [24] *Sea G una $(r; m; g)$ -jaulita con $2 \leq r < m$. Entonces G es 2-conexa si cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. la frecuencia de m es al menos dos;
2. r es par y m es impar;
3. g y m son impares, con $m \leq 2r - 1$;
4. $g = 3$ y G es diferente de una $\{r, m\}$ -flor;
5. $r = 2$ y G no es una $\{2, m\}$ -flor.

En relación a la conexidad por aristas en una bijaula se tiene lo siguiente:

Teorema B.0.1.8. [24] *Sea G una $(r, m; g)$ -jaula con $2 \leq r < m$ y supóngase que r es par con frecuencia al menos dos. Entonces G es 2-conexa por aristas.*

Una $(D; g)$ -jaula con conjunto de grados $D = \{r, r + 1\}$ se dice que es una jaula semi-regular. El primer estudio en esta línea fue hecho por C. Balbuena, D. González, X. Marcote [20] (2010):

Teorema B.0.1.9. [20] *Cualquier $(r, r + 1; g)$ -jaula es maximalmente conexa por aristas y cualquier $(3, 4; g)$ -jaula es maximalmente conexa.*

El mismo año C. Balbuena, D. González, X. Marcote [18] ampliaron su estudio sobre la conexidad en jaulas semi-regulares. Su trabajo empieza con el siguiente resultado que muestra condiciones suficientes sobre el diámetro en términos del cuello para

determinar la conexidad de una gráfica. Antes de enunciarlo, es necesario definir un par de conceptos en relación al tercer punto de este resultado. Si G es una gráfica, se define el grado de una arista $uv \in E(G)$ como $d(u) + d(v) - 2$, y con $\xi(G)$ se denota al grado mínimo de las aristas en G . Un conjunto de aristas restringido en G es un conjunto de aristas que al ser eliminadas inducen una gráfica desconexa sin vértices aislados. Una gráfica G se dice que es optimalmente arista-conexa restringida si la cardinalidad mínima de un conjunto de aristas restringido es igual a $\xi(G)$.

Teorema B.0.1.10. [18] Sea G una gráfica con grado mínimo $\delta \geq 2$, con diámetro $diam(G)$ y cuello g . Entonces,

1. [81] si $diam(G) \leq \lfloor (g-1)/2 \rfloor - 1$, entonces $\kappa(G) = \delta$;
2. [81] si $diam(G) \leq \lfloor (g-1)/2 \rfloor - 1$, entonces $\lambda(G) = \delta$;
3. [19] si $diam(G) \leq g - 2$, entonces es optimalmente arista-conexa restringida.

El primero de sus resultados muestra que el diámetro de una $(r, r+1; g)$ -gráfica es a lo mas $g - 2$ si su orden es “suficientemente” cercano a $n_0(r, r+1; g)$.

Teorema B.0.1.11. [18] Sea G una $(r, r+1; g)$ -gráfica con $r \geq 2$ y $g \geq 6$ con a lo más $n_0(r, r+1; g) + r - 1$ vértices. Entonces $diam(G) \leq g - 2$.

Como consecuencia del Teorema B.0.1.11 y del Teorema B.0.1.10 obtuvieron el siguiente resultado que determina cuando una $(r, r+1; g)$ -gráfica es maximalmente conexa.

Teorema B.0.1.12. [18] Sea G una $(r, r+1; g)$ -gráfica con $r \geq 2$. Entonces G es maximalmente conexa si $g \geq 7$ es impar y el orden es a lo mas $n_0(r, r+1; g) + r - 1$.

Cabe destacar que el Teorema B.0.1.12 presenta una mejora al Teorema B.0.1.7 cuando $m = r + 1$ y el orden es “cercano” a $n_0(r, r+1; g)$. Sobre el orden de una jaula semi-regular se tiene el siguiente resultado probado en [18] (2010).

Teorema B.0.1.13. [18] Sean $r \geq 2$ y $g \geq 6$ dos enteros. Entonces,

$$n(r, r+1; g) \leq n(r+1; g) - \begin{cases} \frac{(r+1)r^{(g-3)/2}-2}{r-1} & \text{si } g \text{ es impar} \\ \frac{2r^{(g-2)/2}-2}{r-1} & \text{si } g \text{ es par.} \end{cases}$$

Además, si g es par y $n(r+1; g) = n_0(r+1; g)$, entonces $n(r, r+1; 6) = 2r^2$ y $n(r, r+1; g) \leq 1 + 2r^{(g-6)/2}(r^2 - 1)$ para $g = 8, 12$.

El siguiente Corolario es consecuencia del Teorema B.0.1.13 para $g = 6$.

Corolario B.0.1.14. *Si $r \geq 2$ y $g = 6$, entonces existe una $(r, r + 1; 6)$ -jaula de orden $2r^2$.*

Demostración. La prueba es inmediata del Teorema B.0.1.13 y del hecho de que $n(r, r + 1; 6) \geq 2(rm - m + 1)$ para cualesquiera $2 \leq r < m$ [90]. \square

Tomando en cuenta que $n(r, m; 6) = 2(rm - m + 1)$ si (i) $2 \leq r \leq 5$ y $r < m$ ó (ii) $m - 1$ es potencia de primo y $2 \leq r < m$ [90], se tiene que el Teorema B.0.1.13 es una extensión a dicho resultado cuando $r - 1$ es potencia de primo. Por otro lado, referente a la conexidad de una jaula semi-regular se tiene el siguiente resultado que expone condiciones suficientes para este propósito [18].

Teorema B.0.1.15. [18] *Sea G una $(r, r + 1; g)$ -jaula con $r \geq 3$ y $g \geq 6$. Entonces G es maximalmente conexa si (i) $g = 6, 8$ y si (ii) $g = 12$ y $r \geq 7$, $r \neq 20$.*

El último resultado referente a propiedades estructurales en bijaulas está ubicado en el contexto de jaulas semi-regulares.

Teorema B.0.1.16. [18] *Cualquier $(r, r + 1; g)$ -jaula con $r \geq 3$ y $g \geq 6$ es 3-conexa.*

Conclusiones

Como se ha dicho a lo largo de esta tesis, su objetivo es abordar el problema sobre la existencia y construcción de jaulas birregulares, el cual extiende el problema sobre la existencia y construcción de jaulas que ha sido ampliamente estudiado. Los resultados que aporta este trabajo hacen más sólido el conocimiento que se tenía sobre la existencia de bijaulas y el comportamiento de sus ordenes. En nuestro trabajo se expusieron métodos para construir $(r, m; g)$ -gráficas con pocos vértices, cuyos ordenes acotan superiormente al orden de una $(r, m; g)$ -jaula. En algunos casos la cota inferior se alcanza y como consecuencia se obtienen familias de bijaulas.

Los resultados del Capítulo 1 se concentraron en la construcción de $(r, m; g)$ -jaulas de cuello impar, la mayor parte de cuello cinco y todas ellas de orden $n_0(r, m; g)$. La mayoría de ellas está vinculada de manera directa con la existencia de los planos proyectivos finitos $PG(2, q)$. En cada caso, el método de escisión se empleó sobre la gráfica de incidencia del plano proyectivo con los parámetros más adecuados para su construcción. El segundo método en el que nos apoyamos es el de “la identificación de vértices” entre $(r, m; g)$ -gráficas con un único vértice de grado m . Como resultado se obtuvieron familias de $(r, m; g)$ -jaulas con un único vértice de grado máximo. Un segundo proceso de identificación entre algunas de ellas concluyó en la obtención de $(5, m; 5)$ -jaulas, para todo $m \geq 6$, siendo esta la primera prueba conocida desde que Y. Yuansheng y W. Liang en el 2001 redactan un manuscrito [89], aún pendiente de publicar, donde afirman dar una solución a dicho problema.

La importancia de los resultados en el Capítulo 2 radica en el hecho de que la cota inferior dada por Downs, Gould, Mitchem y Saba [42], fue mejorada para todo $g \geq 6$ [3], añadiendo un grado más de complejidad a la construcción de bijaulas de cuello par al menos seis. Yuansheng y Liang resuelven parcialmente el problema sobre la existencia de bijaulas de cuello seis [90] y plantean la conjetura de que toda

$(r, m; 6)$ -jaula tiene orden $2(rm - m + 1)$. Uno de nuestros resultados da soporte a su conjetura y el resto de ellos hacen importantes aportaciones al comportamiento del orden de una $(r, m; g)$ -jaula con cuello par $g \geq 8$. Nuestro primer resultado en esta línea es la prueba de la mejor cota superior sobre el orden de una $(r, m; g)$ -jaula de cuello par $g \geq 8$. Este resultado es mejorado para $r - 1$ potencia de primo y $g = 8$ al hacer uso del ovoide de un cuadrángulo generalizado. En cuanto a los valores de $r = 3$ y $g = 8$, la cota inferior del orden de una $(3, m; g)$ -gráfica con cuello par $g \geq 6$ mostrada en [3], es mejorada aún mas al hacer un análisis de casos en el exceso de la gráfica. Además para $m \neq 3k$ se describe la construcción de una familia de $(3, m; 8)$ -gráficas de orden $9m + 3$ cercanas al orden de una $(3, m; 8)$ -jaula y para $m = 4, 5, 7$ la cota inferior es alcanzada.

Además hemos planteado diversos problemas abiertos como guía para investigaciones futuras.

Problemas abiertos

Problemas asociados a cuello impar

Cuello $g = 5$

Problema 1. *Determinar la existencia de las $(r, m; 5)$ -jaulitas, para todo $r \geq 6$.*

Problema 2. *Determinar la existencia de las $(6, m; 5)$ -jaulitas, para $m \geq 11$ impar.*

Cuello $g = 9$

Problema 3. *Determinar la existencia de las $(4, m; 9)$ -jaulitas para $m \geq 5$ impar.*

Cuello impar $g \geq 5$

Problema 4. *Determinar la existencia de las $(r, r + 1; g)$ -jaulitas semi-regulares de cuello impar $g \geq 5$.*

Cuello impar $g \geq 13$

Problema 5. *Determinar la existencia de las $(3, m; g)$ -jaulitas de cuello impar $g \geq 13$.*

Problemas asociados a cuello par

Cuello $g = 6$

Problema 6. *Probar la conjetura de Yuansheng y Liang: $n(r, m; 6) = 2(rm - m + 1)$ para toda r , con $2 \leq r < m$.*

Cuello $g \geq 8$

Problema 7. Probar que $n(3, m; 8) = \lfloor \frac{25m}{3} \rfloor + 7$, para $m \neq 3k$ y cuello par $g \geq 8$, o bien, mejorar la cota inferior.

Problema 8. Probar que el Teorema 3.0.1.17 es exacto para $r \geq 4$ o mejorarlo, y para $r = 3$ probar que es exacto o mejorarlo si el cuello es par $g \geq 10$:

Teorema 3.0.1.17. [3] Sea G una $(D; g)$ -jaula con $D = \{r, m\}$, donde $3 \leq r < m$ y el cuello $g \geq 6$ es par. Entonces

$$n(r, m; g) \geq \begin{cases} m + 2 + (mr - 2) \frac{(r - 1)^{g/2-2} - 1}{r - 2} + (r - 2)(r - 1)^{g/2-2} & \text{si } r \geq 4; \\ 1 + \frac{(7m + 3)2^{g/2-2}}{3} - m & \text{si } r = 3. \end{cases} \quad (3.2)$$

Bibliografía

- [1] M. Abreu, G. Araujo–Pardo, C. Balbuena, D. Labbate. Families of Small Regular Graphs of Girth 5. *Discrete Math.* **312**(18) (2012) 2832–2842 DOI: 10.1016/j.disc.2012.05.020.
- [2] G. Araujo-Pardo and C. Balbuena, Constructions of small regular graphs of girth 6, *Networks* (2010), *Networks*, n/a. doi: 10.1002/net.20392.
- [3] G. Araujo-Pardo, C. Balbuena, P. García-Vázquez, X. Marcote, J.C. Valenzuela, On the order of $(\{r, m\}; g)$ -cages of even girth, *Discrete Math.* **308** (2008) 2484–2491.
- [4] G. Araujo-Pardo, C. Balbuena, J.C. Valenzuela, Constructions of bi-regular cages, *Discrete Math.* **309** (2009) 1409–1416.
- [5] M. Abreu, C. Balbuena, D. Labbate. Adjacency matrices of polarity graphs and other C_4 -free graphs of large size *Des. Codes Cryptogr.* **55**(2–3) (2010) 221 – 233.
- [6] G. Araujo-Pardo, C. Balbuena, T. Héger, Finding small regular graphs of girth 6, 8 and 12 as subgraphs of cages, *Discrete Math.* **310** (2010) 1301–1306.
- [7] G. Araujo-Pardo, C. Balbuena, Constructions of small regular bipartite graphs of girth 6. *Networks* **57**(2) (2011) 121–127.
- [8] G. Araujo-Pardo, C. Balbuena, G. López-Chávez, L. Montejano, Bi-regular small graphs of even girth at least 8.
- [9] M. Abreu, G. Araujo-Pardo, C. Balbuena, D. Labbate, G. López-Chávez, Biregular cages of girth five, *The Electronic Journal of Combinatorics.* **20**(1) (2013) 71–85.

-
- [10] G. Araujo, D. González, J.J. Montellano, and O. Serra, On upper bounds and connectivity of cages, *Australas. J. Combin.* **38** (2007) 221–228.
- [11] M. Abreu, M. Funk, D. Labbate, V. Napolitano. On (minimal) regular graphs of girth 6. *Australas. J. Combin.* **35** (2006) 119–132.
- [12] M. Abreu, M. Funk, D. Labbate, V. Napolitano. A family of regular graphs of girth 5. *Discrete Math.* **308**(10) (2008) 1810–1815.
- [13] M. Abreu, M. Funk, D. Labbate, V. Napolitano. A $(0, 1)$ -matrix framework for elliptic semiplanes. *Ars Combinatoria* **88** (2008) 175–191.
- [14] G. Araujo-Pardo, D. González-Moreno, J.J. Montellano, O. Serra. On upper bounds and conectivity of cages, *Australas J. Combin.* **38** (2007), 221–228.
- [15] G. Araujo-Pardo and J. Montellano-Ballesteros, Cages: constructions and new upper bounds. Proceedings of the 8th International IEEE Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks (2005)
- [16] C. Balbuena, Incidence Matrices of Projective Planes and of Some Regular Bipartite Graphs of Girth 6 with Few Vertices, *Siam Journal of Discrete Math.* **22**(4) (2008) 1351–1363.
- [17] C. Balbuena, A construction of small regular graphs of girth 8, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **11**(2) (2009) 33–46.
- [18] C. Balbuena, D. González, X. Marcote, Some properties of semiregular cages, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **12** 5 (2010) 125–138.
- [19] C. Balbuena, P. García-Vázquez, X. Marcote, Sufficient conditions for λ' -optimality in graphs with girth g , *J. Graph Theory* **53**(1) (2006) 73–86.
- [20] C. Balbuena, D. González-Moreno, X. Marcote, On the connectivity of semiregular cages, *Networks* **56**(1) (2010), 81–88.
- [21] A. T. Balaban, A trivalent graph of girth ten, *J. Combin. Theory Ser. B* **12** (1972) 1–5.
- [22] A. T. Balaban, Trivalent graphs of girth nine and eleven, and relationships among cages, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* **18** (1973) 1033–1043.
- [23] C. Balbuena and X. Marcote, Monotonicity of the order of $(D; g)$ -cages, *Applied*

- Mathematics Letters* **24** (2011) 1933–1937.
- [24] C. Balbuena, X. Marcote, Diameter and connectivity of $(D; g)$ -cages, *International Journal of Computer Mathematics* **88**, No. 7, (2011) 1387–1397
- [25] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, U. S. R. *Graph Theory*, Springer Series: Graduate Texts in Mathematics, Vol. **244**, 2008.
- [26] E. Bannai and T. Ito, On finite Moore graphs, *J. Fac. Sci. Tokyo, Sect. 1A*, **20** (1973) 191–208.
- [27] L.M. Batten, *Combinatorics of finite geometries*, Cambridge University Press, Cambridge, Melbourne, New York, 2nd edition, 1997.
- [28] C.T. Benson, Minimal regular graphs of girth eight and twelve, *Canad. J. Math.* **18** (1966), 1091–1094.
- [29] B. Bollobas, *Extremal Graph Theory*, Academic Press, London NW1, 1978.
- [30] N.L. Biggs and M.J. Hoare, *A trivalent graph with 58 vertices and girth 9*, *Discrete Math.* **30** (1980) 299–301.
- [31] G. Brinkmann, B. D. McKay and C. Saager, The smallest cubic graphs of girth nine, *Combin. Probab. Comput.* **5** (1995) 1–13.
- [32] Biggs, N. L. and Ito, T. *Graphs with Even Girth and Small Excess*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **88**, 1–10, 1980.
- [33] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, 2nd edition., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [34] N. Biggs, Construction for cubic graphs with large girth, *Electron. J. Combin.* **5** (1998) 56–62.
- [35] Buekenhout F., *Handbook of Incidence Geometry*, Elsevier Science, 1995.
- [36] W.G. Brown, On Hamiltonian regular graphs of girth six, *J. London Math. Soc.* **42** (1967) 514–520.
- [37] W. G. Brown, On the non-existence of a type of regular graphs of girth 5, *Canad. J. Math.* **19** (1967) 644–648.
- [38] G. Chartrand, R.J. Gould, S.F. Kapoor, Graphs with prescribed degree set and

- girth, *Period. Math. Hungar.*, **6** (1981) 261–266.
- [39] G. Chartrand, L. Lesniak *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall, 3rd edition, 1996.
- [40] H.S. M. Coxeter, *Bull. Amer. Math. Soc.* **56** (1950), 413–455
- [41] R. M. Damerell, On Moore graphs, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **74** (1973) 227–236.
- [42] M. Downs, R.J. Gould, J. Mitchem, F. Saba, $(D; n)$ -cages, *Congr. Numer.* **32** (1981) 179–193.
- [43] M. Daven, C.A. Rodger, $(k; g)$ -cages are 3-connected, *Discrete Math.* **199** (1999) 207–215.
- [44] P. Dembowski, *Finite Geometries*. Springer, New York 1968, reprint 1997.
- [45] P. Erdős, H. Sachs H. Regulare Graphen gegebener Tailenweite mit minimaler Knotenzahl, *Wiss. Z. Martin- Luther-Univ. Halle-Wittunberg Math-Naturwiss. Reih.* **12** (1963) 251–257.
- [46] G. Exoo and R. Jajcay, Dynamic Cage Survey, *Electron. J. Combin.* **15** (2008) #DS16.
- [47] G. Exoo and R. Jajcay, Biregular Cage of odd girth. Press.
- [48] W. Feit and G. Higman, The non-existence of certain generalized polygons, *J. Algebra* **1** (1964) 114–131.
- [49] H.L. Fu, K.C. Huang, C.A. Rodger, Connectivity of cages, *J. Graph Theory* **24** (1997) 187–191.
- [50] Z. Füredi, F. Lazebnik, À. Seress, V.A. Ustimenko, and A.J. Woldar, Graphs of prescribed girth and bi-degree, *J. Combin. Theory Series B* **64**(2) (1995) 228–239.
- [51] M. Funk, Girth 5 graphs from elliptic semiplanes, *Note di Matematica*, **29** suppl. 1 (2009) 91–114.
- [52] A. Gács and T. Héger, On geometric constructions of (k, g) -graphs, *Contributions to Discrete Mathematics* **3**(1) (2008) 63–80.

- [53] C. Godsil, G. Royle, Algebraic Graph Theory, Springer-Verlag Press, 2001.
- [54] D. Hanson, P. Wang, L. Jørgensen, On cages with given degree sets, *Discrete Math.*, **101** (1992) 109–114.
- [55] J. W. P. Hirschfeld, Projective Geometries over Finite Fields, Oxford Mathematical Monographs, 2nd. ed., 1998.
- [56] P. Hafner, Geometric realisation of the graphs of McKay-Miller-Širáň, *J. Combin. Theory Series B* **90** (2004) 223–232.
- [57] A.J.Hoffman and R.R. Singleton, On Moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM J. Res. Dev.* **4** (1960) 497–504.
- [58] D.A. Holton and J. Sheehan, The Petersen Graph, Chapter 6: Cages, Cambridge University (1993).
- [59] T. Jiang, D. Mubayi, Connectivity and separating sets of cages, *J. Graph Theory* **29** (1998) 35–44.
- [60] L. Jørgensen, Girth 5 graphs from difference sets, *Discrete Math.* **293** (2005) 177–184.
- [61] J.H. Vant Lint and R. M. Wilson, Ed. Cambridge University, 1992.
- [62] S.F. Kapoor, A.D. Polimeni, C.E. Wall, Degree sets for graphs, *Fund. Math.* **95** (1977) 189–194.
- [63] Kempe, A. B., A memoir on the theory of mathematical form, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **177** (1886) 1–70.
- [64] Y. Lin, M. Miller, C. Balbuena, Improved lower bound for the vertex connectivity of $(\delta; g)$ -cages, *Discrete Math.* **299** (2005) 162–171.
- [65] Y. Lin, C. Balbuena, X. Marcote, and M. Miller, On the Connectivity of (k, g) -cages of even girth, *Discrete Math.* **308** **15** (2008) 3249–3256.
- [66] N.B. Limaye, D.G. Sarvate, $(D; n)$ -cages with $|D| = 2, 3, 4$, *Congr. Numer.*, **133** (1998) 7–20.
- [67] F. Lazebnik and V.A. Ustimenko, Explicit construction of graphs with an arbitrary large girth and of large size, *Discrete Appl. Math.* **60** (1995) 275–284.

-
- [68] F. Lazebnik, V.A. Ustimenko, A.J. Woldar, New upper bounds on the order of cages, *Electronic Journal of Combinatorics* **14** R13 (1997), 1–11.
- [69] X. Marcote, C. Balbuena, I. Pelayo, J. Fàbrega, (δ, g) -cages with $g \geq 10$ are 4-connected, *Discrete Math.* **301** (2005) 124–136.
- [70] X. Marcote, C. Balbuena, I. Pelayo, On the connectivity of cages with girth five, six and eight, *Discrete Math.* **307** (2007) 1441–1446.
- [71] B.D. McKay, W. Myrvold and J. Nadon, Fast backtracking principles applied to find new cages, 9th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (1998) 188–191.
- [72] Murty, A generalization of the Hoffman-Singleton graph, *Ars Combin.* **7** (1979) 191–193.
- [73] M. O’Keefe and P.K. Wong, A smallest graph of girth 5 and valency 6, *J. Combin. Theory Ser. B* **26** (1979) 145–149.
- [74] M. O’Keefe and P.K. Wong, A smallest graph of girth 10 and valency 3, *J. Combin. Theory Ser. B* **29** (1980) 91–105.
- [75] M. O’Keefe and P.K. Wong, On certain regular graphs of girth 5, *Int. J. Math. and Math. Sci.*, **7** (1984) 785–791.
- [76] C. M. O’Keefe and J.A. Thas, Ovoids of the quadric $Q(2n, q)$, $n \geq 2$, *European J. Combin.*, **16** (1995) 87–92.
- [77] T. Parsons, Graphs from projective planes, *Aequationes Math.* **14** (1976) 167–189.
- [78] Robertson, N. The smallest graph of girth 5 and valency 4, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70**, 824–825, 1964.
- [79] H. Sachs, Regular graphs with given girth and restricted circuits, *J. London Math. Soc.* **38** (1963) 423–429.
- [80] N. Sauer, Extremaleigenschaften regulärer Graphen gegebener Tailenweite. I, II., *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II* **176** (1967) 9–25; N. Sauer, Extremaleigenschaften regulärer Graphen gegebener Tailenweite. I, II., *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II* **176** (1967) 27–43.

-
- [81] T. Soneoka, H. Nakada, M. Imase, and C. Peyrat, Sufficient conditions for maximally connected dense graphs, *Discrete Math.* **63** (1987) 53–66.
- [82] W. T. Tutte, A family of cubical graphs. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, (1947) 459–474.
- [83] H. Van Maldeghem, Generalized Polygons, Birkhuser, Basel, 1998.
- [84] P. Wang, An upper bound for the $(n,5)$ -cages, *Ars Combin.* **47** (1997) 121–128.
- [85] G. Wegner, A smallest graph of girth 5 and valency 5, *J. Combin. Theory Ser. B* **14** (1973) 203–208.
- [86] P.K. Wong, On the uniqueness of the smallest graphs of girth 5 and valency 6, *J. Graph Theory* **3** (1978) 407–409.
- [87] P.K. Wong, Cages - A Survey, *J. Graph Theory* **6** (1982) 1–22.
- [88] B. Xu, P. Wang, J.F. Wang, On the connectivity of $(4, g)$ -cages, *Ars Combin.* **64** (2002) 181–192.
- [89] Y. Yuansheng, W. Liang, The minimum number of vertices with degree set $D=r;m$ and girth 5 (manuscript), May 2001.
- [90] Y. Yuansheng, W. Liang, The minimum number of vertices with girth 6 and degree set $D = \{r, m\}$, *Discrete Math.*, **269** (2003) 249–258.