



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

INSTITUTO DE GEOFÍSICA  
EXPLORACIÓN GEOFÍSICA

T E S I S

ANÁLISIS DE LA FRECUENCIA INSTANTÁNEA EN  
SEÑALES DE GPR MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE  
WIGNER-VILLE

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MARTHA ANGÉLICA ELIZONDO SÁMANO

TUTOR  
Dr. RENÉ E. CHÁVEZ SEGURA





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Of. No. PCT/GITJ/1017/11

Asunto: Aprobación de tema, asesor de tesis  
y asignación de jurado para examen de grado.

**MARTHA ELIZONDO SAMANO**

Estudiante de Doctorado  
Presente,

El Comité Académico del Posgrado, reunido en sesión ordinaria el 25 de octubre del año en curso, aprobó el tema de tesis titulado "*Análisis de la frecuencia instantánea de señales de GPR mediante la transformada de Wigner-Ville*". Así mismo ratificó al Dr. René Chávez Segura como asesor del mismo y designó a los siguientes investigadores como jurado para su examen de grado.

Dr. Oscar Campos Enríquez	Presidente
Dra. Dora Carreón Freyre	Vocal
Dr. René Chávez Segura	Secretario
Dr. Gerardo Ronquillo	Suplente
Dra. María Encarnación Cámara	Suplente

Sin otro particular por el momento, reciba un saludo cordial.

Atentamente,  
**"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"**  
Ciudad Universitaria, a 26 de octubre de 2011.  
**COORDINADOR DEL PROGRAMA**

**DR. GUSTAVO TOLSON JONES**

GITJ'achg

## **AGRADECIMIENTOS**

*Un agradecimiento muy especial, a mi asesor el **Dr. René Efraín Chávez Segura**, por todo el apoyo que me ha brindado, no solo como asesor, sino como ser humano, porque siempre ha estado dispuesto en ayudarme para la realización de este trabajo.*

*Mi más sincero agradecimiento al **Dr. Andrés Tejero**, por todo su apoyo, por compartirme sus conocimientos y sus observaciones que permiten enriquecer este trabajo y porque siempre tiene un espacio para mí. Gracias Dr. Andrés.*

*Agradezco también su apoyo incondicional y sus comentarios valiosos para mejorar mi trabajo a la **Dra. Encarnación Cámara Moral** brindándome su amistad y por darme ánimos para seguir adelante.*

*Por su profesionalismo y ejemplo, a la **Dra. Dora Carreón** quien siempre me brinda su apoyo para enriquecer mi conocimiento y formación.*

*Al **Dr. Gerardo Ronquillo** por su ayuda en la revisión de este trabajo, que con sus comentarios ayudaron a mejorarlo y complementarlo.*

*Al **Dr. Oscar Campos** por la revisión a este trabajo y por sus comentarios que ayudaron a la terminación de este trabajo.*

*Al **Mtro. Gerardo Cifuentes** por permitirme recabar la información necesaria, para este trabajo y enseñarme a utilizar el GPR.*

*Por su valiosa ayuda técnica al **Lic. Oscar Caballero**, por ayudarme a visualizar mis datos en las graficas y brindarme el apoyo en el manejo de MATLAB para finalizar este trabajo.*

*A mis amigas **Miriam Velasco** y **Alejandra Aguilar** quienes siempre están conmigo y me acompañaron a lo largo de este trabajo.*

*Por su amistad y compañerismo al **Ing. Martín Vidal**, al **Dr. David Rivera**, al **Ing. Eliseo Padrón** y a la **Mtra. Carmen Villar**, que con sus comentarios aportaron información necesaria y conocimientos, en la realización de este trabajo.*

*A todos mis profesores, gracias por todas sus enseñanzas que sentaron las bases para realizar este trabajo.*

*A mis compañeros y amigos.*

*Al **INSTITUTO DE GEOFÍSICA** por encausar mi vocación.*

*A mi **ALMA MATER**, la **UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO** por mi formación profesional.*

*Dedico este trabajo*

*A Armando*

*Con todo mi amor, por todo lo que hemos vivido, por tenerme siempre en tu corazón y por apoyarme en todos mis proyectos.*

*A mis hijos*

*Armando*

*Fernando*

*Ricardo*

*Con todo mi cariño, para que alcancen todas sus ilusiones, por ser quiénes son y por estar siempre conmigo.*

*A mi Mamá*

*Por siempre.*

*A mi Papá*

*Por dejarme ser.*

*A mis hermanos*

*Gonzalo, Verónica, Enrique y Carlos*

*Porque sigan luchando.*

---

**ÍNDICE**

<b>RESUMEN</b> .....	VII
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<b>CAPÍTULO I. BASES TEÓRICAS DE GPR PARA LA GENERACIÓN DE MODELOS SINTÉTICOS</b> .....	4
OBJETIVO .....	4
INTRODUCCIÓN.....	4
MÉTODO DE GPR .....	4
Principio Básico.....	4
Tipos de modelado de los datos.....	6
Profundidad del plano de estudio .....	7
Rango de frecuencias del GPR. ....	7
Resolución .....	8
TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA .....	8
Ecuaciones de Maxwell.....	8
Ecuación de Onda.....	10
PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS .....	12
Constante de propagación.....	12
GENERACIÓN DEL MODELO DIRECTO.....	16
MÉTODO PROPUESTO .....	19
TEOREMA DE CONVOLUCIÓN .....	23
ONDICULA DE RICKER .....	27
CONCLUSIONES .....	28
 <b>CAPÍTULO II. ANÁLISIS DE SEÑALES EN TIEMPO-FRECUENCIA</b> .....	 30
OBJETIVO .....	30
INTRODUCCIÓN .....	30
CARACTERÍSTICAS DE LA SEÑAL .....	31
TRANSFORMADA DE FOURIER.....	32
REPRESENTACIÓN TIEMPO-FRECUENCIA.....	36
PROPIEDADES GENERALES DE LAS REPRESENTACIONES TIEMPO-FRECUENCIA .....	38
Marginales .....	38
Energía Total .....	39
Invarianza ante Desplazamientos Temporales y Frecuenciales .....	39
Escalado Lineal.....	39
Soporte Finito de la Señal.....	40
Distribuciones Reales y Positivas.....	40
Frecuencia Instantánea y Grupo de Retardo.....	41

TIPO DE REPRESENTACIONES TIEMPO-FRECUENCIA.....	41
Clase Cohen.....	42
Clase Afín.....	42
FUNCIÓN DE AMBIGÜEDAD.....	43
TRANSFORMADA DE WIGNER-VILLE.....	44
CONCLUSIONES.....	45

**CAPÍTULO III. EXTRACCIÓN DEL ATRIBUTO DE FRECUENCIA INSTANTÁNEA DE LA TRAZA DE RADAR EN EL ESPECTRO TIEMPO-FRECUENCIA ..... 48**

OBJETIVO .....	48
INTRODUCCIÓN .....	48
SIGNIFICADO DE LOS ATRIBUTOS DE LA SEÑAL.....	48
MEDICIONES EXPECTRALES.....	49
ATRIBUTOS BÁSICOS OBTENIDOS DE LA TRAZA COMPLEJA .....	50
ATRIBUTOS DE TRAZA COMPLEJA Y LA DISTRIBUCIÓN WIGNER.....	52
ATRIBUTOS DE TRAZA COMPLEJA EN LA TRANSFORMADA DE WIGNER-VILLE.....	52
CONCLUSIONES.....	57

**CAPÍTULO IV. ANALISIS DE LA FRECUENCIA INSTANTÁNEA DE LA SEÑAL DE GPR MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE WIGNER-VILLE ..... 58**

OBJETIVO .....	58
INTRODUCCIÓN.....	58
PRUEBA DEL MODELO DIRECTO.....	59
CARACTERÍSTICAS DEL SUBSUELO .....	60
DEFINICIÓN DE PARÁMETROS.....	60
MODELO UTILIZANDO UNA FRECUENCIA DE 200 MHz, EN EL SISTEMA .....	61
MODELO UTILIZANDO UNA FRECUENCIA DE 100 MHz EN EL SISTEMA .....	65
MODELO CON UNA FRECUENCIA CENTRAL DE 40 MHz EN EL SISTEMA .....	68
MODELO INTRODUCIENDO UN DESPLAZAMIENTO DE 15(ns).....	71
MODELO DE CONTRASTES DE PERMITIVIDAD ELECTRICA.....	73
MODELO CON CONTRASTES DE RESISTIVIDAD.....	74
MODELO VARIANDO EL ESPESOR DE LAS CAPAS .....	75
MODELO EN 1D.....	77
TRANSFORMADA DE WIGNER-VILLE.....	77
MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE UTILIZANDO UNA FRECUENCIA CENTRAL DE 200 MHz .....	78

MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE UTILIZANDO UNA FRECUENCIA CENTRAL DE 100 MHz .....	80
MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE UTILIZANDO UNA FRECUENCIA CENTRAL DE 40 MHz .....	82
MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE INTRODUCIENDO UN DESPLAZAMIENTO .....	84
MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE CON CONTRASTES DE PERMITIVIDAD .....	85
MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE CON CONTRASTES DE RESISTIVIDAD .....	87
MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE VARIANDO EL ESPESOR DE LAS CAPAS .....	89
MODELO EN 2-D .....	90
MODELO EN 3-D .....	91
MODELO DE FRECUENCIA INSTANTÁNEA DE TRAZA COMPLEJA EN EL PLANO TIEMPO-FRECUENCIA .....	92
EJEMPLO PRÁCTICO .....	93
Modelo propuesto .....	95
Traza sintética .....	100
Traza Real .....	102
Modelo en 1-D sintético de la traza real .....	104
Modelo en 2-D sintético de la traza real .....	105
Modelo en 3-D sintético de la traza real .....	106
Modelo en 3-D de la traza real .....	107
Modelo de frecuencias instantáneas de las trazas complejas sintéticas del modelo real .....	107
Modelo de frecuencia instantánea de las trazas complejas sintéticos del modelo real removiendo ecos no deseados .....	108
Modelo de las trazas reales .....	108
Modelo de frecuencia instantánea de las trazas complejas del modelo real removiendo ecos no deseados .....	109
Representación del radagrama real .....	109
Representación del radagrama de frecuencias instantáneas de traza compleja del radagrama real .....	110
CONCLUSIONES .....	111
<b>DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES FINALES .....</b>	<b>114</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>117</b>



## RESUMEN

La señal generada por el GPR generalmente contiene altos niveles de ruido, eventos no claramente definidos, anomalías encubiertas en el perfil y energía electromagnética absorbida. La interpretación de la señal por medio de la técnica tradicional, se realiza mediante la Transformada de Fourier, con la cual obtenemos el espectro de frecuencia, que es el que define las frecuencias que se encuentran en un periodo de tiempo y para las cuales podemos diseñar filtros, sin que conozcamos exactamente el momento en el cual cada una de las frecuencias ocurre.

Todo esto nos lleva a analizar con mayor detenimiento la información proporcionada por el GPR e interpretarla de una manera más adecuada, por lo que se hace necesario llevar un proceso de interpretación y procesamiento de la señal.

Se describe un análisis de la forma en que las propiedades eléctricas y magnéticas afectan la propagación de las ondas electromagnéticas en el medio. Se determinan cuales son las ecuaciones adecuadas para modelar un medio geológico en particular, simplificando dichas ecuaciones y describiéndose la propagación de onda, con estas simplificaciones se resuelve el problema del modelo directo.

El problema directo expone la dificultad de obtener un radagrama característico de un modelo de tierra estratificado unidimensional en el que se hacen variar las tres propiedades eléctricas y magnéticas ( $\epsilon, \mu, \sigma$ ) y su solución requiere determinar el campo electromagnético en la superficie del modelo, por lo que es necesario obtener la solución de la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia, considerando un frente de onda plana que incide normalmente sobre el modelo y con condiciones de frontera correspondientes a la continuidad de los campos en los límites de capa.

Mediante el problema propuesto por Weng (1995) se obtiene una relación de recurrencia para la determinación de las constantes de amplitud de los campos en cada estrato.

Una vez obtenida la solución analítica del campo electromagnético en el dominio de las frecuencias, se acopla un pulso de Ricker y mediante la transformada de Fourier se lleva este resultado al tiempo, para la obtención del radagrama sintético característico del medio estratificado (Lázaro-Mancilla y Gomes-Treviño, 1996).

Se obtuvo la traza del radagrama sintético del modelo propuesto en el que se aprecia la respuesta del medio a la señal inyectada. Se visualizó a partir de este radagrama la amplitud de cada una de las reflexiones, disminuyendo esta reflexión conforme se atraviesa el medio. En estos resultados podemos observar la aparición de las reflexiones en el radagrama, y visualizar la amplitud relativa de cada una de las reflexiones, estas características de la señal, son importantes.

Los campos de aplicación de las transformadas en tiempo y frecuencia, son cada vez más amplios, pues se ha comprobado que mejoran los resultados de los métodos espectrales y temporales clásicos, al ser capaces de reflejar cambios en frecuencia con respecto al tiempo (transitorios espectrales), cosa que en el análisis espectral clásico no se pueden detectar, por lo que la clasificación o detección de determinadas propiedades de la señal analizada se

mejora. Análogamente, los métodos basados en características temporales no consiguen detectar características esenciales de la señal que muestran con certeza su naturaleza. Para la realización de evaluaciones más confiables de las características de la señal, es necesario el uso combinado de ambos dominios. Por ello un uso combinado de ambos dominios resulta en el aprovechamiento de características útiles presentes en ambos dominios para así realizar diagnósticos más fiables.

Se presenta una metodología de análisis de la señal, que examina la información en términos de tiempo-frecuencia contenidos en una señal. El empleo de la transformada de Wigner-Ville proporciona información detallada y rápida de una señal no estacionaria. Del radagrama sintético obtenido en el Capítulo I, se obtiene primero la transformada de Wigner-Ville, en el que se muestra una buena resolución tanto temporal como frecuencial. Mediante ellas podemos obtener los atributos de la señal en este caso de la traza de radar.

Los atributos basados en la amplitud de la traza compleja, son medidas específicas de características geométricas y/o estadísticas derivadas de la información de la traza, aportan información sobre los cambios litológicos importantes y de las discontinuidades, también pueden ser empleados en interpretación estratigráfica para definir geometrías internas de los estratos y sus terminaciones o para relevar patrones relacionados con los ambientes de sedimentación, fallas, fracturas, etc. que son importantes en la caracterización del subsuelo.

En este trabajo de investigación, se implementa el algoritmo del proceso para la aplicación práctica de las transformadas en tiempo-frecuencia descritas en Capítulo II, presentando una metodología de análisis que examina la información en términos de tiempo-frecuencia contenidas en una señal.

Finalmente siguiendo la misma secuencia de los modelos utilizados anteriormente a continuación se presentan los resultados obtenidos para cada una de las pruebas hechas, el proceso se realizó como una metodología de análisis identificando en cada uno de los procesos, la localización de los armónicos en el tiempo y la región en frecuencia donde se observa, la frecuencia central del sistema, donde se encuentra la información principal de la señal.

Se implementó el algoritmo del proceso para la aplicación práctica de la obtención del radagrama sintético en el Capítulo I y de la transformada tiempo-frecuencia de Wigner-Ville descritas en el Capítulo II, utilizando la librería de MATLAB que es una herramienta de programación y que tiene incluida una colección de archivos M-files desarrollados para el análisis de señales no estacionarias usando distribuciones tiempo y frecuencia, por Auger, (1996).

Usando las definiciones de atributos espectrales instantáneos desde el plano de tiempo-frecuencia en la distribución de Wigner-Ville son derivadas las fórmulas para obtener estos atributos. Se presentan el atributo de frecuencia instantánea para enfatizar sus reglas como una medición de las propiedades promedio espectrales variantes en el tiempo.

## INTRODUCCIÓN

Algunas características físicas del subsuelo, son susceptibles de ser identificadas mediante la utilización del Radar de Penetración Terrestre (o GPR por sus siglas en inglés). La actividad con este método de exploración geofísica ha sido muy intensa desde hace ya varios años. Basta mencionar que existe una gran cantidad de bibliografía relacionada con el tema en publicaciones de divulgación científica y tecnológica, así como una amplia oferta de servicios y sistemas por parte de proveedores alrededor de todo el mundo. México, por su parte, cuenta con autores que han hecho aportaciones importantes en este campo.

El método permite observar cambios en el comportamiento de la señal electromagnética enviada al subsuelo, dependiendo de sus características electromagnéticas, para cada rango específico de frecuencias utilizado.

El GPR puede ser la solución a varios tipos de problemas, si se tienen en cuenta sus posibilidades y limitaciones. Debido a que el sistema GPR emite pulsos electromagnéticos en un intervalo de alta frecuencia (de 1Mhz. a 1.2Ghz.) generando una diferencia de voltaje que varía con el tiempo (el pulso de voltaje) con una duración corta y con un rango de frecuencia específico (frecuencia central).

La técnica hace penetrar la señal de entrada y capta la señal de respuesta sin invadir el subsuelo, lo cual deriva en ventajas adicionales en tiempo y costo. Para su aplicación hay que tener en cuenta que los horizontes arcillosos y otros materiales conductores son los principales obstáculos para el empleo de GPR

El modelado es una técnica frecuentemente utilizada en diversas ramas de la Ingeniería pues permite hacer representaciones de la realidad, y con ello generar o adaptar fenómenos naturales dentro de estructuras abstractas, que explican su alcance. Es posible así encontrar la solución a problemas específicos dentro de un cierto contexto.

El modelar datos de GPR es útil cuando es necesario dar información cuantitativa acerca de las propiedades y de la geometría del subsuelo. El sistema GPR mide y registra amplitudes del campo eléctrico como una función espacial de la posición y orientación, en el tiempo.

En electromagnetismo, el modelado de datos involucra la solución del campo electromagnético mediante un sistema de ecuaciones diferenciales bajo ciertas condiciones, en donde plantear una solución analítica para la resolución del problema resulta ser lo mejor. Este tipo de soluciones permite el estudio de cualquier aspecto de la geometría del medio, de los campos electromagnéticos y de las interacciones entre las características del subsuelo, éstas solo son posibles obtenerlas en ciertos casos, sin embargo, casi siempre son muy complejas (Sadiku, 2001).

El objetivo general es describir el método de Radagramas Sintéticos, para investigar el comportamiento de la respuesta del subsuelo dada por la señal de GPR, mediante el modelo directo que plantea el problema de determinar un radagrama sintético característico en el que se hace variar las tres propiedades eléctricas y magnéticas (permitividad eléctrica ( $\epsilon$ ), permeabilidad magnética ( $\mu$ ) y conductividad eléctrica ( $\sigma$ )) cuyo marco de referencia es un modelo para un medio estratificado, donde se realizan las consideraciones necesarias para llegar a establecer la solución de la ecuación del campo electromagnético en la superficie de la tierra. Para este modelo se establece la constante de propagación. Para el caso particular del GPR, se emplea el concepto en el que un frente de ondas planas incide normalmente sobre el modelo estratificado, con condiciones de frontera correspondientes a la continuidad de los campos en los límites de las capas.

Todo esto se hace mediante el procedimiento propuesto por Weng, (1995), donde se obtiene un coeficiente de reflexión generalizado, para un medio estratificado de  $n$  capas cuya ecuación se resuelve recursivamente en todas las regiones lo que permite obtener el campo eléctrico del modelo para un medio estratificado de  $n$  estratos homogéneos, en el dominio de la frecuencia.

A esta solución se le acopla un pulso de Ricker y mediante la transformada de Fourier se transforma este resultado al dominio del tiempo, para la obtención del radagrama sintético característico del medio estratificado. Lázaro-Mancilla, (1996).

Finalmente, se hacen variar las propiedades eléctricas y magnéticas del medio para ver el comportamiento de la respuesta del subsuelo en la señal.

Esto se hace con el fin de poder determinar la aparición de las reflexiones en el radagrama, y visualizar la amplitud relativa de cada una de las reflexiones, mediante ellas podemos obtener los atributos de la señal, en este caso de la traza de radar, que aportan información sobre los cambios litológicos importantes y de las discontinuidades del subsuelo, que son fundamentales para la caracterización del subsuelo.

Mediante el procesamiento de la señal, que consiste en la aplicación de una serie de conceptos matemáticos, que distinguen o realzan anomalías de las propiedades físicas observadas mediante el método utilizado. La información obtenida se representa en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia

La descripción de una señal se representa primero en tiempo, la cual involucra usualmente cantidades estadísticas. Las cantidades estadísticas nos dan sólo una idea, dentro de los diferentes tipos de señales, de cómo son mezclas cuando se hace el registro.

Para poder apreciar cómo han evolucionado las componentes frecuenciales a lo largo del tramo de tiempo analizado, es necesario representar una superficie tridimensional, en la

cual se pueda conocer la forma de la señal en un plano tiempo-frecuencia y obtener el valor de la concentración de intensidad en cada punto. Para esto se utilizan las distribuciones.

Dentro de estas distribuciones la transformación de Wigner-Ville, presenta el mejor conjunto de propiedades útiles. Esta distribución cobra interés en el análisis de señales, porque no existe suavizado y tampoco se toman tramos de la señal, por lo que sólo es necesario especificar la longitud del segmento temporal y del segmento frecuencial, para obtener la resolución deseada y ver cómo van evolucionando las componentes frecuenciales a lo largo del tiempo analizado y el valor de la amplitud de cada par  $(t, f)$ .

Esta transformación suministra otra visión de la señal de GPR, que complementa lo que otros mecanismos pueden lograr. Permite una representación más precisa de la evolución de la señal no estacionaria, ayudando a realizar un análisis más completo de la señal, facilitando su clasificación, modelado y determinación de parámetros patrones.

La transformación de Wigner-Ville es una herramienta que permite aplicar las propiedades espectrales y temporales en el plano tiempo-frecuencia, lo hace mediante los atributos de traza compleja, como el atributo de frecuencia instantánea, lo que permite interpretar y seguir eventos débiles en una señal de GPR.

La teoría de las representaciones tiempo-frecuencia provee una estructura para la extracción de atributos de traza compleja, los cuales son parámetros que describen la forma de un espectro local como un promedio, tanto de frecuencia como de banda ancha. Usando estas representaciones, la proporción de ruido de la señal con la extracción del atributo puede ser mejorada sin que la resolución sea significativamente menor en tiempo.

Se adapta la función de tiempo-frecuencia de Wigner-Ville, cuyo kernel es 1, para obtener el espectro tiempo frecuencia y a partir de este, obtener el atributo de frecuencia instantánea en la traza compleja de la distribución, para enfatizar sus reglas como una medición de las propiedades promedio espectrales variantes en el tiempo.

Finalmente se hace una secuencia de análisis y se muestran los resultados obtenidos, los cuales son muy alentadores.

## **CAPITULO I**

### **BASES TEÓRICAS DE GPR PARA LA GENERACIÓN DE MODELOS SINTÉTICOS.**

#### **OBJETIVO.**

Conocer las bases teóricas que describen el funcionamiento del sistema de Radar de Penetración Terrestre (GPR), para generar los modelos sintéticos, necesarios en el procesamiento de la señal de GPR en el subsuelo.

#### **INTRODUCCIÓN.**

Algunas características físicas del subsuelo, son susceptibles de ser identificadas mediante la utilización del Radar de Penetración Terrestre. El método permite observar cambios en el comportamiento de la señal electromagnética enviada al subsuelo, dependiendo de sus características electromagnéticas, para cada rango específico de frecuencias utilizado.

El sistema GPR emplea pulsos electromagnéticos en un intervalo de frecuencia (de 1Mhz. a 1.2Ghz.) generando una diferencia de voltaje que varía con el tiempo (el pulso de voltaje) con una duración corta y con un rango de frecuencia específico (frecuencia central).

#### **METODO DE GPR.**

##### **Principio Básico.**

La obtención de datos de GPR se puede realizar en la superficie del terreno, en donde las antenas de transmisión y recepción son desplazadas y el subsuelo es caracterizado de manera vertical en término de las variaciones de sus propiedades electromagnéticas, obteniendo una representación grafica de la señal reflejada en amplitud-tiempo denominada radagrama.

Las antenas del GPR se encargan de transformar la señal de voltaje en una onda electromagnética que es irradiada al subsuelo, esta onda es reflejada y es captada mediante la misma antena (modo estático) o por otra antena (modo bi-estático), que traduce la información en una señal de voltaje que se registra en función del tiempo (Annan 1992; Annan and Chua 1992), esto se logra mediante un transmisor que adapta la entrada de la señal de voltaje al medio y mediante un receptor se captan las reflexiones producidas por cambios en el subsuelo a una señal de voltaje de salida (Peterson et. al., 1998, Taflove; 1998).

La ecuación de radar, describe cómo los parámetros del sistema se combinan con parámetros del medio, para determinar el nivel de energía que el sistema registra (Annan, 1992; Annan and Chua, 1992).

$$P_{RX} = [ (\xi_{TX} G_{TX} \xi_{RX} G_{RX} g \sum A e^{-4\alpha h}) / (4\pi h)^2 ] P_{TX} \quad 1.1$$

donde:  $P_{RX}$  = Energía generada  
 $\xi_{TX}$  = Eficiencia del transmisor  
 $G_{TX}$  = Ganancia del transmisor  
 $\xi_{RX}$  = Eficiencia del receptor  
 $G_{RX}$  = Ganancia del receptor  
 $P_{TX}$  = Energía registrada

La energía que es pasada del transmisor a la antena presenta pérdidas, estas pérdidas son registradas mediante la eficiencia del transmisor ( $\xi_{TX}$ ), e irradiadas al subsuelo mediante el patrón de dirección de la antena llamado también ganancia directiva ( $G_{TX}$ ). La energía que se propaga a través del medio, se atenúa por pérdidas eléctricas y por la dispersión esférica del frente de onda, además parte de la energía es dispersada por el medio ( $e^{-2\alpha h / 4\pi h^2}$ ). La energía reflejada sufre una atenuación por divergencia esférica y por las propiedades del medio ( $e^{-2\alpha h / 4\pi h^2}$ ) y depende del objetivo y de la función de ganancia ( $\sum A$  y de  $g$ ), donde para el caso de un dipolo tenemos:

$$A = \lambda^2 / 4 \pi \quad 1.2$$

donde:  $\lambda$  = longitud de onda

La señal adquirida por el receptor depende de la dirección de la antena y el área efectiva ( $G_{RX}$ ), esta señal es reducida por la eficiencia de la antena ( $\xi_{RX}$ ) receptora.

El factor de eficiencia  $Q$  relaciona las señales de entrada y salida, es una medida de la proporción (en decibeles) de la energía generada  $P_{TX}$  y de la energía registrada  $P_{RX}$  (Annan, 1992; Annan and Chua, 1992).

$$Q = P_{TX} / P_{RX} \quad 1.3$$

donde:  $Q$  = Factor de eficiencia del sistema

Para poder aislar la forma en que la onda electromagnética es modificada por el medio, se deben tomar todas las variables del sistema, esto implica conocer todas los parámetros del mismo ( $\xi_{TX}$ ,  $G_{TX}$ ,  $\xi_{RX}$ ,  $G_{RX}$ , etc.). De tal manera que para modelar los datos de GPR no solo se necesita conocer la forma en que la onda electromagnética se propaga en el medio, sino que además determinar las variables del sistema y los parámetros del medio.

Los métodos más utilizados para modelar los datos de GPR son, los que se basan en la solución directa de ecuaciones diferenciales parciales por separación de variables para la

solución de la ecuación de onda, las cuales nos proporcionan una mejor solución de este problema. Estas soluciones son de tipo Laplace y Poisson, que ocurren en términos de soluciones armónicas para el caso de coordenadas cartesianas. En estos métodos las ecuaciones de los campos electromagnéticos, son nuevamente formuladas en forma de una ecuación diferencial parcial de 2° orden, mediante cambios de variables y dependiendo de la ecuación se pueden resolver, por integración directa o por definición de variables. En el caso de establecer las variables, se integra sobre un dominio en el que se introducen las ecuaciones de frontera que completan el proceso (Sadiku, 2001).

### **Tipos de modelado de los datos.**

El encontrar soluciones que satisfagan dichas ecuaciones, requiere en la mayoría de los casos el uso de una combinación de modelos analíticos y métodos numéricos para realizar las operaciones e interacciones.

El modelado de datos se puede dar mediante tres modelos:

- Ecuación de Radar
- Sistema de Rayos
- Radagramas Sintéticos

El sistema de “Ecuación de Radar” implica conocer las características del subsuelo y los diseños de la antena transmisora y de la antena receptora.

El “Sistema de Rayos” modela la propagación de ondas electromagnéticas y las representa en estructuras con geometrías complejas, utilizando los métodos numéricos como el de diferencias finitas (Sierra, 2007) y el del elemento finito, lo cual implica mucho tiempo de computo.

El modelado de GPR, mediante “Radagramas Sintéticos”, es de utilidad para determinar la forma en que la naturaleza de la onda electromagnética modifica su propagación en el medio y permite la identificación de interfases de interés en los estudios geofísicos, permitiendo comparar estos radagramas sintéticos con radagramas reales, en donde se pueden descartar señales debidas a reflexiones múltiples, mejorando así la interpretación de los datos.

Todos ellos cumplen de manera efectiva la forma de hacer un modelo, pero su elección depende de los requerimientos de tiempo y de la información con que se cuenta.

En este caso se eligió el método de Radagramas Sintéticos, para investigar el comportamiento de la respuesta del subsuelo, empleando una antena mono-estática cuya constante de propagación sigue el comportamiento de una onda plana y la frecuencia de los pulsos que utiliza es de 200 y 270 MHz.

Para modelar los datos de GPR, es importante determinar las ecuaciones adecuadas para el medio geológico en que se realiza la prospección, siendo necesario cuantificar la proporción que guardan las corrientes de conducción y de desplazamiento de los materiales



en la propagación de la onda electromagnética, para el rango de frecuencias del GPR, pues es claro que para este rango de frecuencias la clasificación de los materiales no puede hacerse solo desde el punto de vista de la conductividad eléctrica. De aquí la necesidad de conocer la forma en la que las propiedades eléctricas y magnéticas ( $\mu, \sigma, \epsilon$ ) modifican las características de la onda electromagnética.

### **Profundidad del plano de estudio.**

Al igual que en otros métodos de exploración geofísica en el GPR, es recomendable conocer la información de otros trabajos en la zona, así como la profundidad tentativa o posible a la que se encuentra el objeto en estudio.

El medio geológico es factor decisivo en las posibilidades de penetración de la onda electromagnética en el medio. El GPR ha sido utilizado con éxito en problemas de investigación somera donde se requiere de alta resolución, en determinadas condiciones estas son profundidades de menos de un metro, por ejemplo en suelos arcillosos o con contenidos de agua salada; en arenas libres de arcilla saturada de agua dulce la profundidad llega a ser de hasta 30 m.; y en el hielo polar ha sido posible investigar a más profundidad.

En lo que se refiere a la propagación de la onda electromagnética, existen varios factores que afectan la profundidad de investigación. Los más importantes son: (Davis y Annan, 1989):

- a) Desempeño del sistema de radar. Dado por el factor de eficiencia  $Q$  que debe ser lo más grande posible y que forma el rango de un sistema de radar en el que se tiene un mayor control, porque puede ser cuantificado con facilidad.
- b) Atenuación de la onda electromagnética. La cual se ve influenciada por el número de capas que atraviesa el medio (a mayor número de capas la penetración es menor) y por la distancia de las antenas a los reflectores, aun en presencia de material de baja conductividad.
- c) Características de reflexión de la onda electromagnética en las interfases eléctricas. En donde la amplitud de la señal es reducida en las zonas de contraste de las propiedades como la permeabilidad magnética, la permitividad y la conductividad eléctrica, que atraviesa durante su viaje la onda electromagnética hacia el interior del subsuelo.

### **Rango de frecuencias del GPR.**

En las ondas electromagnéticas, la organización de bandas de longitud de onda se denomina espectro electromagnético, estas series de bandas se establecen por la manifestación de un comportamiento similar en la radiación electromagnética, aunque la sucesión de valores de longitud de onda sea continua. La frecuencia mientras tanto, designa el número de ciclos pasando por un punto fijo en una unidad de tiempo.

Los sistemas de radar operan normalmente en un rango de frecuencias que va de 10 a 2000 MHz, o sea en la categoría de ondas cortas de muy alta frecuencia (VHF, very high frequency) y de ultra alta frecuencia (UHF, ultra high frequency). Para describir la respuesta eléctrica de los materiales que se encuentran en el medio, Davis y Annan (1989) establecen que la permitividad relativa es un parámetro apropiado, porque en este rango de frecuencias en el que opera el GPR, las corrientes de desplazamiento dominan sobre las corrientes de conducción para la mayoría de los materiales geológicos.

Los radares de bajas frecuencias, desde 1 a 200 MHz, han sido utilizados para explorar estructuras geológicas, en estudios de ingeniería civil, de geohidrología y en aplicaciones mineras. En un rango de frecuencias intermedio de 200 a 500 MHz, se han utilizado para detectar el movimiento de desechos contaminantes en suelos someros, investigaciones arqueológicas y en exploración de estructuras de suelos. En el rango de altas frecuencias, de 500 a 1500 MHz, han sido utilizados principalmente para detectar fallas en las estructuras de edificios, puentes y carreteras. Peniche (2008).

### **Resolución.**

Existen dos tipos de resolución en la señal de GPR, la resolución vertical y la resolución horizontal, cuando se desea considerar las dimensiones laterales y la geometría del objeto en estudio, se habla de resolución horizontal. Para evaluarla deben ser tomados en cuenta factores como el patrón de radiación de la antena, profundidad y dimensiones del objeto, número de trazas por metro y número de trazas por segundo.

Mientras que en la resolución vertical, se da en términos de las propiedades eléctricas se puede ser expresada como (Blancas, 2000):

$$T_m = \frac{c}{2f\sqrt{\epsilon_r}} \quad 1.4$$

En donde  $T_m$  es el mínimo espesor de capa en el medio que puede ser resuelto,  $\epsilon_r$  es la permitividad relativa del material,  $f$  la frecuencia central de la antena y  $c$  es la velocidad de la luz

## **TEORIA ELECTROMAGNÉTICA.**

### **Ecuaciones de Maxwell.**

Para estudiar como la onda electromagnética se propaga en el medio geológico es necesario conocer todas las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos y sus fuentes, estas pueden establecerse de manera compacta en cuatro relaciones conocidas como ecuaciones de Maxwell, que son la base de la teoría electromagnética, la cual comprende el estudio de las leyes de propagación del campo electromagnético en un medio heterogéneo de origen natural o artificial, cuyas ecuaciones generales dependientes del tiempo en forma diferencial son.

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad 1.5$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad 1.6$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad 1.7$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad 1.8$$

donde:  $H$  es el vector de Intensidad Magnética [ A/m ]

$B$  el vector de Flujo Magnético o Inducción Magnética [ T = Wb/m<sup>2</sup> ]

$E$  es el vector de Intensidad Eléctrica [ V/m ]

$D$  es el vector de Flujo Eléctrico o Inducción Eléctrica [ C/m<sup>3</sup> ]

$J$  es el vector de Intensidad de Corriente (conducción) [ A/m<sup>3</sup> ]

$\rho$  es la Densidad de Cargas libres [ C/m<sup>2</sup> ]

En un medio homogéneo e isótropo, estas ecuaciones son sustancialmente simplificadas, donde la ecuación 1.5 en esencia es la expresión de la Ley de Inducción Electromagnética de Faraday, que relaciona el vector de Intensidad Eléctrica [ V/m ] con las variaciones del vector del Flujo Magnético o Inducción Magnética [ T=Wb/m<sup>2</sup> ] y establece que un campo magnético puede producir una corriente en una trayectoria cerrada, si el flujo magnético  $B$  está variando con el tiempo. El signo negativo de la ecuación, está dado por la Ley de Lenz, la cual establece que el voltaje inducido por el flujo del campo variable  $B$  tiene una polaridad tal, que la corriente establecida en una trayectoria cerrada da lugar a un flujo que se opone al cambio del flujo magnético. Cuando un conductor se mueve a través de un campo estacionario  $B$  la polaridad de la Ley de Lenz siempre será tal que el conductor experimenta fuerzas magnéticas que se oponen al movimiento.

La ecuación 1.6 es conocida como la Ley de Ampere y establece que el campo magnético es generado, tanto por la corriente de conducción (  $\vec{J}$  ) como por la corriente de desplazamiento  $\left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$ , expresando la manera por la cual un campo magnético puede crear una separación en corrientes de conducción (  $\vec{J}$  ) y un campo eléctrico variable en el tiempo.

La ecuación 1.7 indica que las fuentes del vector de inducción eléctrica (dieléctrica) son cargas ( $q$ ) y es la expresión matemática de la Ley de Coulomb, obtenida a través de la Ley de Gauss que expresa que la divergencia de  $\vec{D}$  no es cero y se demuestra que el flujo del vector  $D$  no es conservativo. (Sears, 1999).

En la ecuación 1.8 el flujo magnético es cero, esto indica la ausencia de fuentes del campo magnético (cargas magnéticas) y que las líneas del campo  $B$  son continuas y forman curvas

cerradas, es decir, que el flujo magnético entrante en un volumen es igual al flujo magnético que sale del volumen.

### Ecuación de Onda.

Las ecuaciones de Maxwell, que son cuatro cantidades de campo (E, H, D y B), escritas como ecuaciones lineales diferenciales parciales, no son independientes y son definidas por las interacciones de los campos electromagnéticos con los materiales, asociadas a la linealidad y la no-linealidad de las relaciones de campo con las propiedades de la materia, (Escobar-Salguero y Cortes-Soto; 2000; Sadiku, 2001). En las que se puede demostrar que las dos últimas ecuaciones pueden ser obtenidas a partir de las dos primeras por álgebra vectorial, de tal forma que necesitamos incluir las relaciones constitutivas de la materia para poder completar el sistema de ecuaciones de la manera siguiente (Nathan Ida, 1995).

$$D = \epsilon \vec{E} \quad 1.9$$

$$\vec{B} = \mu H \quad 1.10$$

Estas ecuaciones vectoriales que definen las interacciones entre los campos y los materiales, son equivalentes a seis ecuaciones escalares, en la que  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica ( F/m ) y  $\mu$  es la permeabilidad magnética ( H/m ) de los materiales. En general estas ecuaciones no son lineales

Cuando el campo electromagnético experimenta cambios, como cuando pasa de un material a otro, se debe tener en cuenta la relación empírica de la Ley de Ohm en forma diferencial, que establece que la densidad de corriente J es directamente proporcional al vector E.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad 1.11$$

En donde  $\sigma$  es la conductividad del medio (Siemens)

Las propiedades eléctricas y magnéticas de las rocas, suelos y fluidos controlan la velocidad de propagación de la onda electromagnética y sus amplitudes. En la mayoría de los casos las propiedades eléctricas son mucho más dominantes que las propiedades magnéticas. A determinadas frecuencias las propiedades eléctricas son predominantemente controladas por la densidad del suelo o de la roca, debido a su composición química, su distribución y su contenido de agua.

Suponiendo que las propiedades  $\epsilon$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes, indica que en un medio conductor homogéneo no se puede acumular carga, porque la forma de caracterizar el medio es mediante un espacio libre de fuentes, de tal forma que la densidad de carga eléctrica q es igual a cero y las ecuaciones de Maxwell para medios homogéneos quedan de la siguiente manera:

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad 1.12 \text{ a}$$

$$\nabla \cdot E = 0 \quad 1.12 \text{ b}$$

$$\nabla \times H = \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad 1.12 \text{ c}$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad 1.12 \text{ d}$$

Si a cada miembro de la ecuación 1.12a, le aplicamos el rotacional y luego al resultado le sustituimos 1.12c y análogamente a 1.12c aplicamos el rotacional y luego al resultado le sustituimos 1.12a, obtenemos respectivamente las siguientes ecuaciones

$$\nabla \times (\nabla \times E) + \sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad 1.13 \text{ a}$$

$$\nabla \times (\nabla \times H) + \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad 1.13 \text{ b}$$

Y teniendo en cuenta la identidad vectorial  $\nabla \times (\nabla \times V) = \nabla (\nabla \cdot V) - \nabla^2 V$  y la ecuación 1.12 d, se obtiene la ecuación de onda para los campos eléctrico y magnético respectivamente.

$$\nabla^2 E - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad 1.14 \text{ a}$$

$$\nabla^2 H - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad 1.14 \text{ b}$$

Que son las ecuaciones de onda para el campo eléctrico y magnético respectivamente y representan la forma en que cada campo se propaga en función del tiempo y de las propiedades del medio.

Para poder manejar fácilmente las ecuaciones anteriores, el campo electromagnético es definido recurriendo al concepto de campos armónicos, con una frecuencia dada ( $\omega$ ), de manera que el sistema de ecuaciones puede ser simplificado considerablemente (Chen; 1971).

Definiéndose de la siguiente manera:

$$H(x, y, z; t) = H_{x0} \cos(\omega t + \varphi_x)_i + H_{y0} \cos(\omega t - \varphi_y)_j + H_{z0} \cos(\omega t - \varphi_z)_k \quad 1.15$$

Donde la frecuencia angular del campo  $\omega = 2 \pi f$

$H_x$ ,  $H_y$  y  $H_z$  son las componentes de amplitud, de la onda electromagnética.

$\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  y  $\varphi_z$  son las componentes de fase, de la onda electromagnética.

Si introducimos el vector complejo, recordando que las funciones de amplitud y fase son funciones de posición.

$$H^*(x, y, z) = H_{x0}e^{i\varphi_x}i + H_{y0}e^{i\varphi_y}j + H_{z0}e^{i\varphi_z}k \quad 1.16$$

Sustituyendo la ecuación 1.16 en 1.15 queda como:

$$H(t) = H_0e^{-i(\omega t - \varphi)} \quad 1.17$$

Análogamente se puede obtener expresiones para los vectores complejos de  $B_0$ ,  $D_0$ ,  $E_0$  y para la densidad de carga  $q_0$ . Multiplicando los vectores complejos por el factor  $e^{-i(\omega t - \varphi)}$  se pasa del dominio de las frecuencias al dominio del tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -i\omega H_0e^{-i(\omega t - \varphi)} = -i\omega H \quad 1.18$$

Utilizándose por conveniencia el concepto de campos sinusoidales, es decir, la transformada de Fourier con respecto al tiempo, las ecuaciones 1.14a y 1.14b antes descritas se pueden escribir como sigue en el dominio de la frecuencia:

$$\nabla^2 E + \mu \epsilon \omega^2 E + i \mu \omega \sigma E = 0 \quad 1.19 \text{ a}$$

$$\nabla^2 H + \mu \epsilon \omega^2 H + i \mu \omega \sigma H = 0 \quad 1.19 \text{ b}$$

## PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.

### Constante de propagación.

Por definición  $\gamma^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i \omega \mu \sigma$ , es la constante de propagación, de tal forma que las ecuaciones de onda se pueden escribir de la siguiente manera. (King, 1963).

$$\nabla^2 E + \gamma^2 E = 0 \quad 1.20 \text{ a}$$

$$\nabla^2 H + \gamma^2 H = 0 \quad 1.20 \text{ b}$$

A partir de las ecuaciones de onda, donde se define a  $\gamma$  como la constante de propagación, que es un vector complejo en el cual la parte real se llama constante de fase (a) y la parte

imaginaria ( $b$ ) que determina la amplitud de la onda electromagnética se llama constante de atenuación. Orellana, (1974). Se tiene que:

$$\gamma = a + ib \quad 1.21$$

Por lo que

$$\gamma^2 = (a + ib)^2 \quad 1.22$$

Desarrollando el binomio, comparando con la ecuación de onda, igualando términos semejantes y resolviendo simultáneamente las ecuaciones, se puede obtener a la constante de atenuación y a la constante de fase en función de las propiedades del medio ( $\mu, \sigma, \varepsilon$ ) y de la naturaleza de la onda (frecuencia angular  $\omega$ ).

$$a = \sqrt{\frac{\mu \omega}{2} \left[ \sqrt{(\sigma^2 + \varepsilon^2 \omega^2)} + \varepsilon \omega \right]} \quad 1.23$$

$$b = \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \sqrt{(\sigma^2 + \varepsilon^2 \omega^2)} - \varepsilon \omega \right]} \quad 1.24$$

Las expresiones 1.23 y 1.24, pueden encontrarse en la literatura en función de la tangente de pérdida, de la siguiente manera:

$$b = \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \sqrt{\left( \left( \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2 + 1 \right)} - 1 \right]} \quad 1.25$$

$$a = \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \sqrt{\left( \left( \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2 + 1 \right)} + 1 \right]} \quad 1.26$$

Cuando la frecuencia representa el rango en que las corrientes de conducción y las corrientes de desplazamiento son iguales, es donde la tangente de pérdida, que representa la razón entre, las corrientes de desplazamiento y la de conducción está dada por la expresión siguiente:

$$\tan \alpha = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \quad 1.27$$

La cual está en función de la frecuencia y de la onda electromagnética y que permite determinar el tipo de corriente que predomina, siendo esto producto de dos factores: la naturaleza del medio y la naturaleza de la onda electromagnética, Annan, (1992).

En las ecuaciones de la constante de atenuación y de la constante de fase, se puede ver que tanto la constante de fase como la constante de atenuación son directamente proporcionales a la frecuencia.

En la modelación de GPR, se determinan las ecuaciones para el medio geológico en el que se realiza la prospección, para ello es necesario determinar la proporción que guardan la permeabilidad y la conductividad eléctrica en los materiales del medio. Para el rango de frecuencias donde trabaja el GPR, no se puede hacer desde el punto de vista solo de la conductividad.

Por lo que es necesario ver el comportamiento de estas propiedades en las constantes de fase y atenuación. Se supone un medio con una permitividad eléctrica de 20 veces la permitividad de vacío, una permeabilidad magnética igual a la permeabilidad del vacío y diferentes conductividades en un rango de frecuencia de  $1 \times 10^{-4}$  a  $1 \times 10^{20}$ . En el rango de baja frecuencia veremos que el comportamiento de la constante de fase y el de la constante de atenuación son equivalentes, mientras que el campo electromagnético varía relativamente poco con respecto al tiempo, porque este campo electromagnético se presenta en el dominio de validez del modelo cuasiestacionario, mientras que en el rango de alta frecuencia, la constante de atenuación permanece constante y la constante de fase tiende a hacerse asintótica respecto a la frecuencia y ambas constantes aumentan con el incremento en la conductividad. Además existe una frecuencia en la que las constantes de atenuación y la constante de fase dejan de ser iguales y están en relación directa con la tangente de pérdida. Esto lo representamos en la Figura 1.1

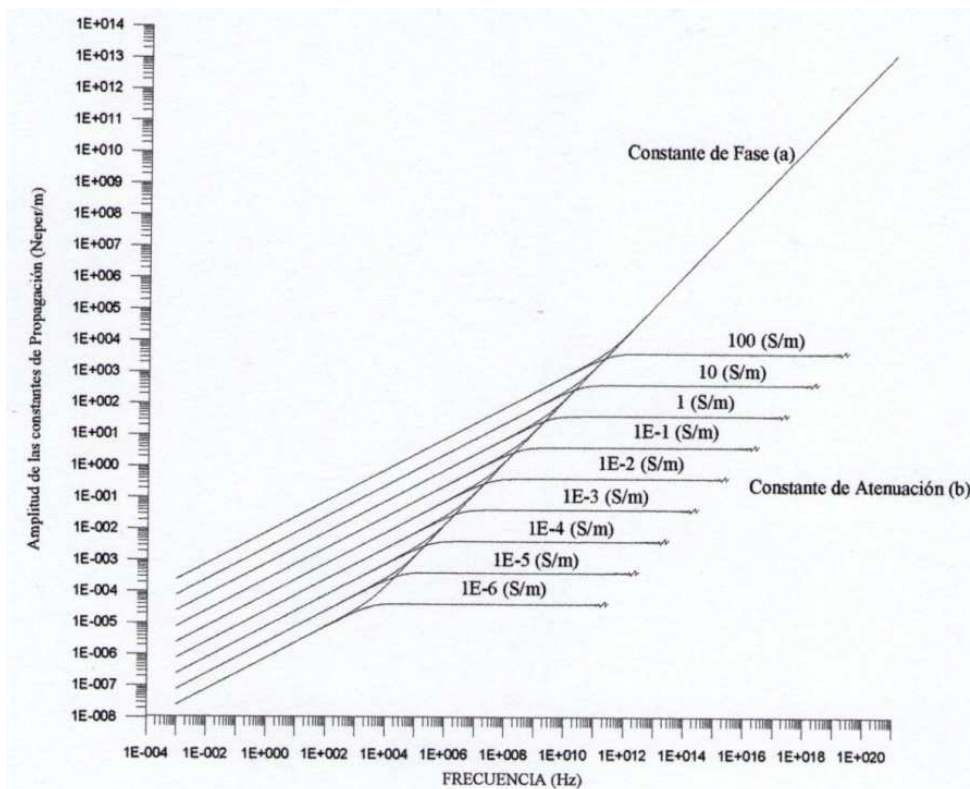


Figura 1.1. Gráfica que representa la constante de atenuación y la constante de fase con respecto de la frecuencia de oscilación. Para una permitividad 20 veces mayor a la del vacío y una permeabilidad igual a la de vacío. Tomada de Díaz (2003).



Si posteriormente analizamos el comportamiento de estas constantes pero suponiendo un medio en el que tomamos, el mismo rango de frecuencias y la misma permeabilidad magnética, pero con una conductividad constante de  $1 \times 10^{-3}$  S/m y en el cual varié la permitividad eléctrica. Lo que veremos en el rango de baja frecuencia será que existe una zona en que ambas, tanto la constante de atenuación como la constante de fase son iguales y después tiende a un mismo valor que no depende de la permitividad eléctrica. En el rango de alta frecuencia, la constante de fase es directamente proporcional a la permitividad eléctrica, mientras que la constante de atenuación tiende a hacerse constante y también es directamente proporcional a la permitividad eléctrica. Figura No.1.2.

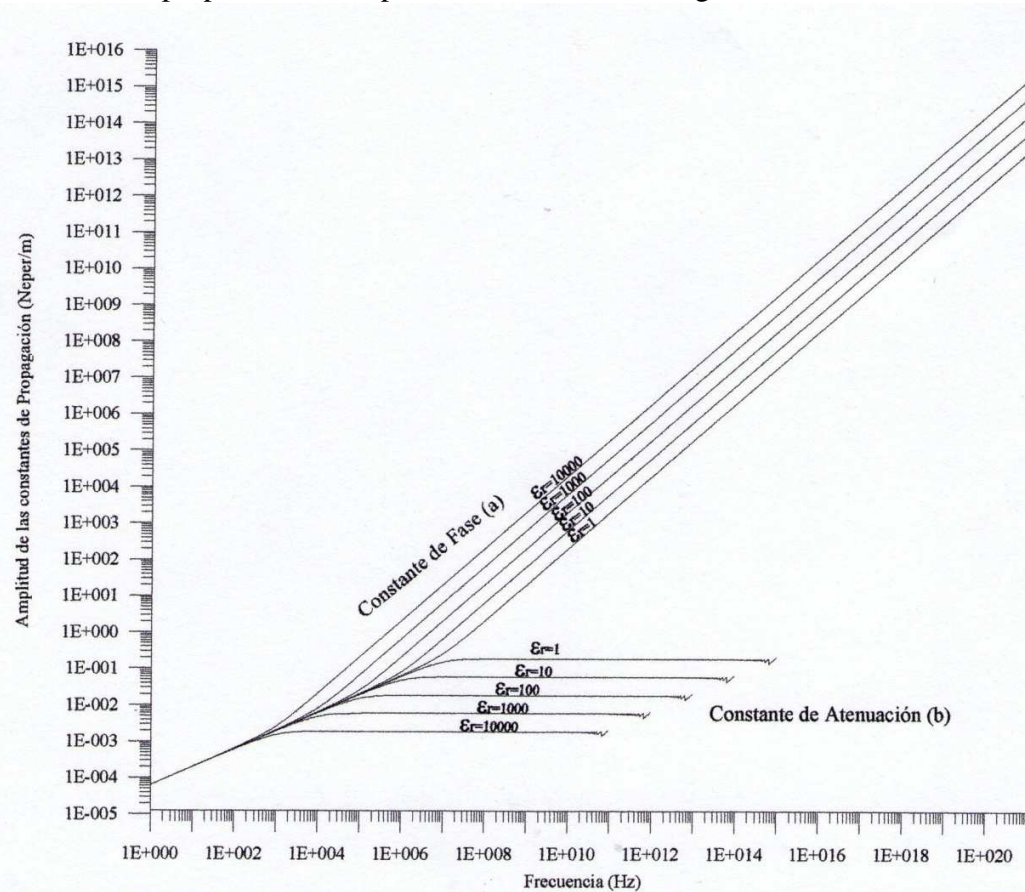


Figura 1.2.- Grafica del comportamiento de la constante de atenuación y la constante de fase con respecto de la frecuencia de oscilación. Variando la permitividad eléctrica relativa, para una conductividad de  $1 \times 10^{-3}$  S / m y una permeabilidad igual a la del vacío. Tomada de Díaz (2003).

En ambos casos lo que se observa es, que en la constante de atenuación existe una frecuencia tal que tiende a cero y esto ocurre de manera abrupta. A partir de ésta frecuencia límite es cuando el material se comporta como un dieléctrico perfecto.

Por lo que el comportamiento de las constantes de fase y atenuación con respecto a la frecuencia, se divide en tres regiones que están sólo determinadas por los valores de conductividad y permitividad eléctrica, Díaz (2003):

- En la 1ª región de baja frecuencia en donde ambas constantes tienen el mismo valor y sólo dependen de la conductividad, en esta región el medio se comporta como un **buen conductor**.
- En la 2ª región de alta frecuencia, siempre está delimitada por la misma banda de frecuencias y en donde la constante de fase sólo depende de la permitividad eléctrica y la constante de atenuación, permanece invariante ante la frecuencia pero es directamente proporcional a la conductividad e inversamente proporcional a la permitividad, en esta región el medio se comporta como un **dieléctrico disipativo**.
- En la 3ª región aquí la constante de atenuación es nula y en ésta región el medio se comporta como un **dieléctrico perfecto**.

Esto en la prospección geofísica del GPR es sustancial, el rango de frecuencias y las características de los medios que se encuentran en la segunda región, son de particular interés porque los materiales del subsuelo son en general dieléctricos disipativos.

De tal forma, que las propiedades electromagnéticas afectan la propagación de la onda electromagnética en el medio y se puede determinar cuáles son las ecuaciones adecuadas para modelar un medio geológico particular. Simplificando dichas ecuaciones y describiendo la propagación de la onda, se resuelve el problema del modelo directo, se le conoce así porque su solución proviene directamente de las ecuaciones planteadas por el problema, Lines, (1982).

### **GENERACIÓN DEL MODELO DIRECTO.**

El problema del modelo directo, en este caso expone la dificultad de obtener un radagrama característico de un modelo para un medio estratificado unidimensional, en el que se hacen variar las propiedades eléctricas y magnéticas del medio ( $\epsilon, \mu, \sigma$ ) y cuya solución requiere determinar el campo electromagnético en la superficie del modelo, por lo que es necesario resolver la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia, considerando un frente de onda plana que incide normalmente sobre el modelo, propagándose en la dirección positiva del eje z, con condiciones de frontera correspondientes a la continuidad de los campos en los límites de capa, método que fue propuesto por Wait (1970) y que posteriormente Weng (1995) propuso una solución al problema, en el que se obtiene una relación de recurrencia para la determinación de las constantes de amplitud de los campos en cada estrato, ver Figura 1.3.

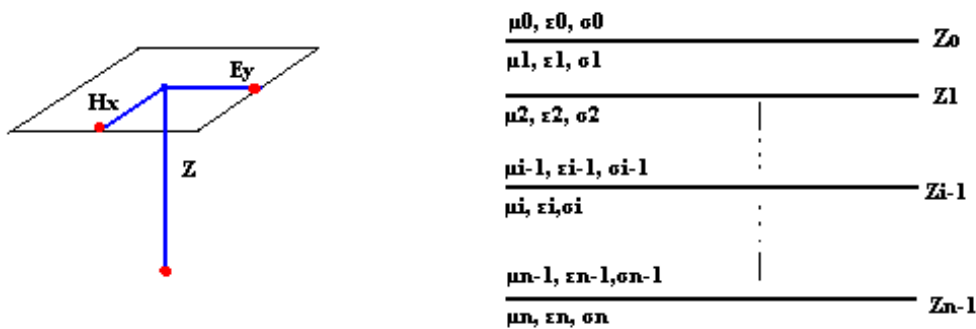


Figura 1.3.- Modelo para un medio estratificado homogéneo e isótropo en una dimensión (Tomado de Díaz, 2003).

Para obtener el campo electromagnético en la superficie de la tierra, se hace necesario establecer las condiciones de frontera de la siguiente forma:

Se asume que el modelo es un modelo físico que está ligado a la estratigrafía del subsuelo y a la secuencia de radar. Los vectores infinitesimales de campo electromagnético cercanos a la superficie límite de dos medios con distintas propiedades, contienen densidades de corriente y densidades de carga en la superficie y en cada lado de esta interfase, además los materiales tienen propiedades uniformes y son lineales.

En los límites de los diferentes estratos del subsuelo las propiedades  $\mu$ ,  $\epsilon$  y  $\sigma$  ( $1/\rho$ ) pueden variar, ocasionando a su vez que los campos  $E$ ,  $D$ ,  $B$  y  $H$  también varíen, si se aplican en forma integral las ecuaciones de Maxwell a la interfase, se determinan las ecuaciones de campo eléctrico y magnético en ambos lados de la interfase y las componentes escalares, tangenciales y normales en la interfase son las condiciones de frontera requeridas.

En el caso más general, la superficie que separa a dos medios ( $i$ ) y ( $i+1$ ) es una superficie lisa ( $S$ ) y los parámetros de cada uno de los medios son constantes o cambian gradualmente, en este caso la componente normal del campo magnético  $B$  es continua al pasar del medio ( $i+1$ ) al medio ( $i$ ) y la componente normal del vector del flujo eléctrico varía discontinuamente y esta discontinuidad, es igual a la densidad de carga eléctrica superficial ( $q$ ) en la interfase.

$$B_n^{(i+1)} - B_n^{(i)} = 0 \quad 1.28 \text{ a}$$

$$D_n^{(i+1)} - D_n^{(i)} = q \quad 1.28 \text{ b}$$

En el caso de la componente tangencial del campo eléctrico, la densidad de corriente eléctrica superficial es diferente de cero sólo en la superficie de los conductores ideales.

$$E_\tau^{(i+1)} - E_\tau^{(i)} = 0 \quad 1.29 \text{ a}$$

$$H \tau (i + 1) - H \tau (i) = J \quad 1.29 \text{ b}$$

Para el caso de un medio homogéneo e isótropo las ecuaciones 1.28 b y 1.29 b quedan de la siguiente manera

$$D_n^{(i+1)} - D_n^{(i)} = 0 \quad 1.30 \text{ a}$$

$$H \tau (i + 1) - H \tau (i) = 0 \quad 1.30 \text{ b}$$

A partir de estas ecuaciones se pueden obtener las relaciones de continuidad para las componentes normal y tangencial de los vectores E, D, B y H (Cheni; 1971).

Como cada estrato es homogéneo en el modelo se pueden utilizar las ecuaciones 1.18 a y 1.18 b, aplicando a estas ecuaciones una polarización de Transversal Eléctrica (TE), es decir, que el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia mientras que el campo magnético es paralelo, bajo estas condiciones los campos eléctricos y magnéticos tienen las siguientes componentes (Wolf, 1946; Zaborovsky, 1963; Wait, 1962; Ward, 1967):

$$E (0, E_y, 0)$$

$$H (H_x, 0, 0)$$

Y se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^2 E_{yi}}{d_z^2} + \gamma_i^2 E_{yi} = 0 \quad 1.31 \text{ a}$$

$$\frac{d^2 H_{xi}}{d_z^2} + \gamma_i^2 H_{xi} = 0 \quad 1.31 \text{ b}$$

Donde el índice i indica que existe una ecuación para cada estrato. Recordando que en el caso de un medio estratificado  $\gamma = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon_i + i \omega \mu \sigma_i}$ . (Orellana, 1974).

Con base en el concepto de onda plana, en un medio homogéneo e isótropo con los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  en el que se propaga un campo electromagnético, se le puede introducir un sistema coordenadas rectangulares ( x, y, z ) y el eje z lo dejamos hacia abajo y los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  cumplen:

1° Que si z es constante en cualquier campo horizontal  $\vec{E} \cong \vec{H} \cong 0$

2° Que el campo tiende a cero cuando z tiende a infinito.

La solución de la ecuación 1.30 a y b se escribe:

$$E_{yi} = A_i e^{i\gamma_i z_i} + B_i e^{-i\gamma_i z_i} \quad 1.32 \text{ a}$$

$$H_{yi} = C_i e^{i\gamma_i z_i} + D_i e^{-i\gamma_i z_i} \quad 1.32 \text{ b}$$

donde: A, B, C y D son los vectores unitarios complejos.

### METODO PROPUESTO.

En la solución propuesta por Weng (1995). Como se ha visto, cuando las propiedades electromagnéticas ( $\mu, \epsilon, \rho$ ) son variables en la dirección z en un medio homogéneo, isótropo y estratificado, la solución de la ecuación de onda vectorial no necesita ser resuelta en forma completa.

De forma que, del campo eléctrico para el caso de una fuente libre, representado en su variación temporal puede ser reducido a dos ecuaciones escalares que están desacopladas, y que pueden ser caracterizadas en dos tipos de polarización, el transversal eléctrico ( TE ) y el transversal magnético ( TM ), de tal manera que pueden simplificarse a una dimensión.

En este caso es considerada la polarización transversal eléctrica ( TE ), por lo tanto:

$$E = E_y$$

O usando la componente magnética

$$H_z \neq 0$$

$$E_z = 0$$

Y similarmente en el caso de considerar la polarización transversal magnético ( TM )

Donde  $E_y$  y  $\mu H_z$ , describen el mismo fenómeno físico por el “Principio de Dualidad”, de tal forma que las ecuaciones pueden admitir soluciones de la forma:

$$\begin{bmatrix} E_y \\ H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_y(z) \\ h_y(z) \end{bmatrix} e^{\pm i\gamma_z x}, \quad \forall z \quad 1.33$$

Bajo esta suposición las ecuaciones se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias, donde las propiedades electromagnéticas son funciones arbitrarias de z, y para su solución existen diferentes métodos.

Uno de estos métodos para resolver este tipo de ecuaciones es como se ha visto fundamentando en base a las condiciones de frontera de manera que, cada capa o región es

homogénea, en la cual describimos una polarización transversal eléctrica (TE), y definimos a la constante de propagación ( $\gamma$ ) como:

$$\gamma = (\omega^2 \mu \varepsilon + i \omega \mu \sigma)^{\frac{1}{2}} \quad 1.34$$

Las soluciones a las ecuaciones tienen la forma:

Para el campo eléctrico:

$$E_{yi} = A_i e^{i\gamma_i z} + B_i e^{-i\gamma_i z} \quad 1.35 \text{ a}$$

Para el campo magnético:

$$H_{yi} = A_i e^{i\gamma_i z} + B_i e^{-i\gamma_i z} \quad 1.35 \text{ b}$$

En este punto es necesario establecer los valores de las constantes de amplitud de las ecuaciones, haciendo la consideración de que los campos no pueden propagarse infinitamente, esto es posible si en la interfase, las condiciones de frontera para  $e_y$  a través de una discontinuidad de dos regiones son:

$$e_{1y} = e_{2y} \quad 1.36 \text{ a}$$

Similarmente para  $h_y$  las condiciones de frontera son:

$$h_{1y} = h_{2y} \quad 1.36 \text{ b}$$

En estas condiciones de frontera donde  $z = 0$  se llega a:

$$1 + R^{TE} = T^{TE} \quad 1.37$$

$$\frac{\gamma_{1z}}{\mu_1} (1 - R^{TE}) = \frac{\gamma_{2z}}{\mu_2} T^{TE} \quad 1.38$$

Donde  $T^{TE}$  es el radio de amplitud de la onda transmitida y  $\gamma_i^2 = \omega^2 \mu_i \varepsilon_i$

Resolviendo estas ecuaciones, se obtienen los coeficientes de Reflexión y Transmisión de Fresnel para el campo eléctrico:

$$R^{TE} = \frac{\mu_2 \gamma_{1z} - \mu_1 \gamma_{2z}}{\mu_2 \gamma_{1z} + \mu_1 \gamma_{2z}} \quad 1.39 \text{ a}$$

$$T^{TE} = \frac{2\mu_2\gamma_{1z}}{\mu_2\gamma_{1z} + \mu_1\gamma_{2z}} \quad 1.39 \text{ b}$$

Similarmente para el campo magnético los coeficientes son:

$$R^{TM} = \frac{\varepsilon_2\gamma_{1z} - \varepsilon_1\gamma_{2z}}{\varepsilon_2\gamma_{1z} + \varepsilon_1\gamma_{2z}} \quad 1.39 \text{ c}$$

$$T^{TM} = \frac{2\varepsilon_2\gamma_{1z}}{\varepsilon_2\gamma_{1z} + \varepsilon_1\gamma_{2z}} \quad 1.39 \text{ d}$$

Cuando toda la energía de la onda incidente es reflejada, es decir, si  $\gamma_1 > \gamma_2$  implica que  $R^{TE}$  o  $R^{TM}$  es igual a 1, este fenómeno es conocido como “Reflexión Interna”.

Si  $R^{TE}$  o  $R^{TM}$  es igual a cero, este fenómeno es conocido como “el ángulo de Brewster”, esto es más común para la onda TM que para la onda TE, por lo que más materiales son no magnéticos, donde  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$  o  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1$

Para resolver el problema general en la región 1, es decir, cuando el material se comporta como un buen conductor, la ecuación puede ser escrita como:

$$e_{1y} = A_1 [ e^{-i\gamma_{1z}z} + R_{12} e^{2i\gamma_{1z}d_1 + i\gamma_{1z}z} ] \quad 1.40$$

En esta ecuación el factor de fase asegura que el coeficiente de reflexión en la primera interfase está definido. En la región 2 donde el material se comporta como un dieléctrico disipativo, la ecuación tiene la forma:

$$e_{2y} = A_2 [ e^{-i\gamma_{2z}z} + R_{23} e^{2i\gamma_{2z}z d_2 + i\gamma_{2z}z} ] \quad 1.41$$

Donde  $R_{23}$  es el coeficiente de reflexión de la zona de Fresnel en la región 2 reflejado por la región 3 que es cuando se comporta como dieléctrico perfecto. En la región 3 asume la forma:

$$e_{3y} = A_3 e^{-i\gamma_3 z} \quad 1.42$$

Donde la onda en la región 3 se extiende al infinito.

Por lo tanto,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y el coeficiente de reflexión  $R_{12}$ , son desconocidos, pero están fundamentados en las condiciones de frontera

$$A_2 e^{i\gamma_2 z d_1} = A_1 e^{i\gamma_1 z d_1} T_{12} + R_{21} A_2 R_{23} e^{2i\gamma_2 z d_2 - i\gamma_2 d_1} \quad 1.43$$

Y consecuentemente en la interfase  $z = -d_1$

$$A_1 \tilde{R}_{12} e^{i\gamma_1 z d_1} = A_1 R_{12} e^{i\gamma_1 z d_1} + T_{21} A_2 R_{23} e^{2i\gamma_2 z d_2 - i\gamma_2 d_1} \quad 1.44$$

$A_2$  puede ser resuelta en términos de  $A_1$

$$A_2 = \frac{T_{12} A_1 e^{i(\gamma_1 z - \gamma_2 z) d_1}}{1 - R_{21} R_{23} e^{2i\gamma_2 z (d_2 - d_1)}} \quad 1.45$$

Sustituyendo 1.42 en 1.40 se tiene

$$\tilde{R}_{12} = R_{12} + \frac{T_{12} R_{23} T_{21} e^{2i\gamma_2 z (d_2 - d_1)}}{1 - R_{21} R_{23} e^{2i\gamma_2 z (d_2 - d_1)}} \quad 1.46$$

$\tilde{R}_{12}$  es el coeficiente de reflexión generalizado para un medio de tres capas, esta ecuación puede ser expandida por medio de una serie geométrica óptica. Si se agrega una capa después de la región 3, solo es necesario reemplazar  $R_{23}$  en la ecuación 1.46 por  $\tilde{R}_{23}$ , que es el coeficiente generalizado que incorpora las reflexiones de la siguiente capa.

En general para un medio de N-capas el coeficiente de reflexión generalizado en las interfases entre la región  $i$  y la región  $i+1$ , usando los factores  $T_{ij} = 1 + R_{ij}$  y  $R_{ij} = -R_{ji}$ ,  $\tilde{R}_{i,i+1}$  puede ser escrito como:

$$\tilde{R}_{i,i+1} = \frac{R_{i,i+1} + \tilde{R}_{i+1,i+2} e^{2i\gamma_{i+1,z}(d_{i+1}-d_i)}}{1 + R_{i,i+1} \tilde{R}_{i+1,i+2} e^{2i\gamma_{i+1,z}(d_{i+1}-d_i)}} \quad 1.47$$



Las ecuaciones anteriores son ecuaciones recursivas atribuidas a Stokes (Bellman and Wing 1975), que expresan a  $\tilde{R}_{i,i+1}$  en términos de  $\tilde{R}_{i+1,i+2}$ , la onda en la i-esima región asume la forma:

$$e_{iy} = A_i [e^{i\gamma_i z} + \tilde{R}_{i,i+1} e^{2i\gamma_i d_i + i\gamma_i z}] \quad 1.48$$

La cual es la generalización de las ecuaciones 1.36 y 1.37, entonces si  $R_{N,N+1} = 0$  la ecuación 1.44 puede ser resuelta recursivamente para  $\tilde{R}_{i,i+1}$  en todas las regiones. Lo que permite obtener finalmente el campo eléctrico del modelo estratificado del subsuelo de n estratos homogéneos, cuyas tres propiedades electromagnéticas ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) varían de estrato a estrato y considerando un frente de onda plana incidiendo normalmente sobre el modelo propagándose en la dirección positiva del eje z.

Para la obtención del campo eléctrico se ha optado el modelo propuesto por Weng (1995).

### TEOREMA DE CONVOLUCIÓN.

La operación espectral de convolución involucra, la integral de convolución de dos funciones es un concepto físico importante en muchos y diversos campos científicos. Está dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad 1.49$$

Donde la función de y (t) es la convolución de dos funciones x (t) y h (t) (Acebal, 1999).

La operación matemática de la ecuación anterior es muy difícil de visualizar, así que se ha desarrollado un análisis gráfico para darle sentido a la convolución. Esta técnica para evaluar la integral de convolución es resumida en los siguientes pasos (Anguiano 1996).

- 1°.- Plegamiento. Se toma la imagen de espejo de la función h (  $\tau$  ) cerca de la ordenada.
- 2°.- Desplazamiento. Consiste en desplazar un intervalo t a la función h ( -  $\tau$  ), es decir, se obtiene h(t -  $\tau$ ).
- 3°.- Multiplicación. Se multiplica la función desplazada h (t-  $\tau$ ) por x (  $\tau$ ).
- 4°.- Integración. Consiste en calcular el área bajo el producto de h (t-  $\tau$ ) y x (  $\tau$ ), esta área es el valor de la convolución para un desplazamiento t, en tiempo.

El procedimiento de la convolución puede ser determinado directamente desde la ecuación

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad 1.50$$

Y una regla general para determinar los límites de integración puede entonces ser tomados como sigue:

Tomando dos funciones de  $\tau$ , una con valores más pequeños diferentes de cero  $L_1$  y  $L_2$  y otra con los valores más grandes diferentes de cero  $U_1$  y  $U_2$ , de tal manera que, se cambia el límite inferior de integración por el máximo de  $[L_1, L_2]$  y el límite superior de integración por el mínimo de  $[U_1, U_2]$ .

La ecuación anterior puede ser escrita equivalentemente como:

$$y(t) = \int h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad 1.51$$

Cuando tenemos una cantidad física como fuente, normalmente asumimos que esta fuente es una función de tiempo bien definida y que una medición revela este valor, pero en realidad no existe un aparato que pueda medir exactamente la fuente. Sin embargo una interpretación de la cantidad física de la fuente se define en términos de los efectos que produce, la respuesta es válida, porque esta respuesta es un proceso de transferencia para una función arbitraria  $\phi(t)$  a una respuesta o número  $R[\phi(t)]$ , donde  $\phi(t)$  es el término en una distribución y es continuo, es cero fuera de un intervalo y tiene derivadas continuas de todo orden.

El número asignado para la función  $\phi(t)$  para la distribución  $g(t)$  está dado por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \phi(t) dt = R[\phi(t)] \quad 1.52$$

Donde el lado izquierdo de la ecuación es definido por el número  $R = [\phi(t)]$  asignado por la distribución  $g(t)$

El subsuelo es modelado como un sistema lineal (Liu, 1975).

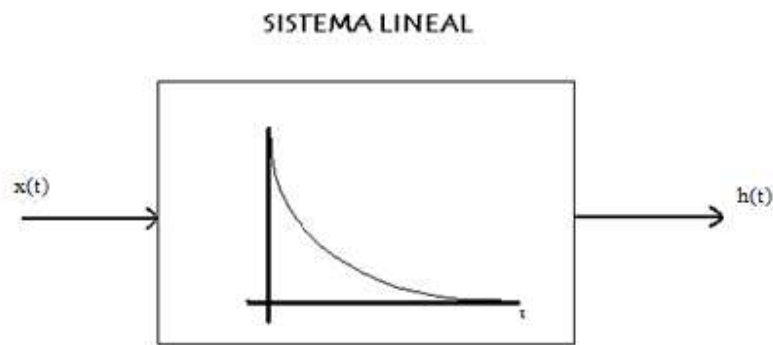


Figura 1.4.- Sistema Lineal, donde la salida en tiempo está dado por la integral de convolución

Donde la salida en tiempo es dado por la integral de convolución:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) h(t_0 - t) dt \quad 1.53$$

Y  $h(t)$  es la respuesta en el dominio del tiempo del sistema, ésta respuesta es considerada como una distribución particular para cada sistema con diferentes características internas, para una misma entrada el resultado esta dado por diferentes respuestas, donde la integral de convolución toma la forma de:

$$\int v(t) \phi(t, t_0) dt = R[\phi(t, t_0)] \quad 1.54$$

Así, para cada entrada de la fuente la respuesta  $R$  es un número dependiendo en el sistema de la función  $\phi(t, t_0)$ , de tal manera que se asume que hay una fuente que causa la respuesta y que el método de caracterización de la fuente es por medio de la distribución.

Si tenemos una función  $\delta$  que es una distribución particular, que asigna a la distribución  $\phi(t)$  el número  $\phi(0)$ :

$$\int \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0) \quad 1.55$$

Para evaluar la integral de convolución, el tipo más simple, es cuando una u otra función  $x(t)$  o  $h(t)$  es una función impulso definida ésta como (función “delta”  $\delta$ )

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad t \neq t_0$$

$$\int \delta(t - t_0) dt = 1 \quad 1.56$$

Es decir, se define a la función  $\delta$  como una magnitud indefinida en tiempo de ocurrencia y cero en cualquier otro parte, con la propiedad adicional que el área bajo la función es 1. Obviamente para una señal física relacionar un impulso es muy difícil, sin embargo, se puede tomar un impulso como una forma de onda (pulso) de muy larga magnitud e infinitamente pequeña de duración, tal que el área del pulso es la unidad.

La convolución  $x(t)$  con una función impulso es evaluada por simple reconstrucción de  $x(t)$  con la posición de la función impulso reemplazando la ordenada de  $x(t)$ , la capacidad de visualizar la convolución involucrando la función impulso es de considerable importancia.

La convolución de dos funciones en un sistema lineal, está caracterizado por una salida que es determinada por la convolución del sistema de entrada y el sistema de impulso respuesta.

Si el sistema de entrada es un impulso el sistema de salida es la respuesta que permite expresar la salida en términos del impulso.

Si se asume que el sistema es invariante en el tiempo, esto es, si el impulso es retrasado por un tiempo  $t = \tau$  donde la respuesta de salida es sólo retrasada por la misma duración de tiempo tenemos que:

$$\text{entrada } \delta(t - \tau) \qquad \text{salida } h(t - \tau)$$

Y como se asume que el sistema es lineal, donde si la entrada  $x(t)$  produce una salida  $y(t)$  tenemos:

$$\text{entrada } \rightarrow k_1 x(t) + k_2 x(t) \qquad \text{salida } \rightarrow k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$

Si la entrada se compone de una serie de impulsos retrasados o de campo de amplitud variable, la salida se compondrá de una serie de impulsos respuestas retrasados, cuyas amplitudes son determinadas por la amplitud del impulso de entrada causando la respuesta.

La suma de estos impulsos respuesta individual, es el sistema de salida y es calculada por la suma de:

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 k_i(t - \tau_i) \qquad 1.57$$

Para extender esta ecuación a una forma general de onda, si se divide la entrada en pequeños elementos que tienen una altura de  $x(n \xi_\tau)$  y un ancho de  $\xi_\tau$  y asumimos que este elemento representa el impulso con área de  $[x(n \xi_\tau)] [\xi_\tau]$ , se conoce que la salida correspondiente a este impulso es  $[h(t - n \xi_\tau)] [x(n \xi_\tau)] [\xi_\tau]$ , y para determinar la salida debida a todos los elementos se calcula la suma:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [h(t - n \xi_\tau)] [x(n \xi_\tau)] [\xi_\tau] \qquad 1.58$$

Si permitimos que  $\xi_\tau \rightarrow 0$  y  $n \rightarrow \infty$  tal que  $n \xi_\tau \rightarrow \tau$  se obtiene:

$$y(t) = \int h(t - \tau) x(\tau) d\tau \qquad 1.59$$

En el análisis moderno la relación entre la ecuación anterior y su Transformada de Fourier es conocida como el Teorema de la Convolución y da la libertad para realizar la operación de convolución matemática o visual en el dominio del tiempo o una simple multiplicación

en el dominio de la frecuencia, esto es si la función  $h(t)$  tiene Transformada de Fourier  $H(f)$  y la función  $x(t)$  tiene Transformada de Fourier  $X(f)$ , donde  $h(t) * x(t)$  tienen Transformada de Fourier  $H(f) X(f)$ . Resumidamente el Teorema de Convulación está dado por (Hsu, 1973).

$$h(t) * x(t) \quad \text{---} \quad H(f) X(f) \quad 1.60$$

Una de las contribuciones de los resultados de la teoría de distribución, es que el producto de una función continua y una función impulso, está bien definido, por lo tanto, si  $h(t)$  es continua en  $t = t_0$  donde:

$$h(t) \delta(t - t_0) = h(t_0) \delta(t - t_0) \quad 1.61$$

Este resultado junto con el Teorema de Convulación, elimina la tediosa derivación de muchas Transformaciones pares de Fourier y nos permite cambiar una operación de convolución matemática en el dominio del tiempo a una multiplicación en el dominio de la frecuencia, lo que permite resolver de manera directa problemas difíciles de manejar.

**ONDÍCULA DE RICKER.**

Para obtener el radagrama sintético en el dominio de la frecuencia basta realizar el producto del campo eléctrico obtenido por un pulso, en este caso se utiliza el pulso de Ricker (Lázaro-Mancilla y Gómez-Treviño, 1996; Díaz-Molina, 2003).

La expresión para el pulso de Ricker es:

$$S(f) = \frac{f^2}{f_c^2} e^{-\frac{f^2}{f_c^2}} \quad 1.62$$

En donde  $f$  es la frecuencia y  $f_c$  es la frecuencia central oscilación del pulso (Ricker, 1977).

La cual se caracteriza por tener una construcción lenta y un decaimiento de energía en los extremos de la función, en la que el estándar de esta ondícula es suave y continua en su 1ª y 2ª derivada y puede ser optimizada para satisfacer la frecuencia central de una antena de GPR, que es diseñada para igualar la entrada de impedancia en el punto central de alimentación y el origen de la ondícula es usado para forzar el vector de campo eléctrico en el punto central de alimentación, (Daniels, 2004; Cassidy, 2000).

Esto se hace a través del Teorema de Convulación.

Así de esta manera el radagrama sintético  $R(f)$  está dado en el dominio de las frecuencias por:

$$R(f) = E(f) S(f) \quad 1.63$$

donde:

$E(f)$  es el campo eléctrico en el dominio de las frecuencias  
 $S(f)$  es el pulso de Ricker en el dominio de las frecuencias

Para darle sentido físico al radagrama, es necesario llevarlo al dominio del tiempo mediante el cálculo de su transformada inversa de Fourier.

$$R(t) = F^{-1} \{ E(f) s(f) \} \quad 1.64$$

En este caso, se ha acoplado un pulso ondicular de Ricker con el campo eléctrico obtenido y con esto, se tiene el radagrama sintético del modelo propuesto.

## CONCLUSIONES.

En base a la Teoría Electromagnética se estudia la propagación de una onda electromagnética en un medio y se establece la relación que existe entre los campos eléctricos y magnéticos y entre las fuentes que los generan como está definido por las ecuaciones de Maxwell. Weng (1995) propone como solución al problema del empleo del modelo directo que permite establecer ecuaciones para un medio estratificado unidimensional en el que hacen variar las propiedades electromagnéticas de cada estrato. A partir de una relación de recurrencia para la determinación de las constantes de amplitud y fase de los campos en cada estrato es posible simular la prospección con el GPR en un medio geológico. En este capítulo se plantea un modelo directo para obtener una traza de radagrama sintético para simular el comportamiento de la respuesta del terreno.

Las propiedades electromagnéticas de los materiales del subsuelo se comportan como materiales dieléctricos disipativos en el rango de frecuencia en el que trabaja el GPR. Cuando éstas varían en la dirección  $z$  la ecuación de onda vectorial no se resuelve en forma completa. El campo eléctrico representado en su variación temporal, para el caso de fuente libre es reducido a dos ecuaciones escalares desacopladas que se pueden resolver asumiendo dos tipos de polarización, la transversal eléctrica y la transversal magnética. En este trabajo se utiliza la polarización transversal eléctrica que define la constante de propagación del medio; al resolver las dos ecuaciones escalares se determinan los coeficientes de reflexión y de transmisión de Fresnel para el campo eléctrico y para el campo magnético.

Mediante el planteamiento de ecuaciones recursivas atribuidas a Stokes, (Bellman and Wing, 1975), se establece un coeficiente de reflexión generalizado para  $N$ -capas que expresa un coeficiente de la onda electromagnética en la  $i$ -ésima región del medio estratificado. Una vez establecido el coeficiente de reflexión se asume la forma para la ecuación del campo eléctrico recursivamente en todas las regiones, esto permite obtener el campo eléctrico del modelo estratificado del subsuelo de  $n$ - estratos homogéneos. Las

propiedades del medio varían de estrato a estrato en un frente de onda plana incidiendo normalmente sobre el modelo en la dirección  $z$ .

En el dominio de la frecuencia se utiliza el teorema de convolución para acoplar al campo eléctrico el pulso eléctrico de Ricker, que se caracteriza por tener una construcción lenta y un decaimiento de energía en los extremos de la función. La ondícula de Ricker se diseña para igualar la impedancia en el punto central de la alimentación. El origen de la ondícula se usa para forzar al vector del campo eléctrico en el punto central de la alimentación y así se obtiene la traza del radagrama sintético.

El radagrama sintético se lleva al dominio del tiempo mediante la transformada de Fourier para darle un sentido físico, con lo que se obtiene la traza en el dominio del tiempo del modelo propuesto. Con esta metodología se determinaron diferentes radagramas sintéticos estableciendo las características electromagnéticas del medio a modelar mediante la aplicación del método GPR.

## CAPITULO II

### ANÁLISIS DE SEÑALES EN TIEMPO-FRECUENCIA.

#### OBJETIVO.

Analizar las señales de GPR en tiempo-frecuencia para el procesamiento e interpretación de anomalías de interés geológico.

#### INTRODUCCIÓN.

En las observaciones de los campos geofísicos se estudian diferentes tipos de señales (impulso físico detectable, a través del cual puede transmitirse información en función del tiempo), estas pueden ser electromagnéticas, sísmicas, gravitacionales, etc.

Estas señales pueden ser estacionarias (no sufren cambios apreciables con respecto al paso del tiempo). Sin embargo, la mayor parte de los fenómenos físicos que ocurren cuando los diferentes campos geofísicos se propagan en el interior de la tierra, experimentan transformaciones o variaciones a través del tiempo, por lo que estas señales son no estacionarias o transitorias.

Para superar las desventajas de las señales estacionarias y sus algoritmos como por ejemplo, la transformada de Fourier ( FT ), han surgido técnicas que consideran el carácter transitorio de las señales.

La información obtenida es una representación en tiempo, que usualmente involucra muestras derivadas de cantidades estadísticas y ésta representación es la primera descripción de la señal. Las cantidades estadísticas nos dan sólo una idea, dentro de los diferentes tipos de señales, de cómo son mezcladas cuando se hace el registro.

Sin embargo, resulta provechoso disponer de una representación en el dominio de la frecuencia, este tipo de representación como la (FT) permiten extraer características que suelen no estar evidenciadas en el dominio temporal y que son de utilidad para comprender su naturaleza.

Aún mejor, se puede apreciar cómo han evolucionado las componentes frecuenciales a lo largo del tramo de tiempo analizado, esto consiste de una superficie tridimensional, en la cual para conocer la forma de la señal en un plano tiempo-frecuencia y obtener el valor de la concentración de intensidad en cada punto se utiliza una distribución.

La Transformación de Wigner-Ville, presenta el mejor conjunto de propiedades útiles, esta distribución cobra interés en el análisis de señales, porque no existe ni suavizado y no toma tramos de tiempo, por lo que sólo es necesario especificar la longitud del segmento temporal y del segmento frecuencial, para obtener la resolución deseada y ver cómo van



evolucionando las componentes frecuenciales a lo largo del tiempo analizado y el valor de la amplitud de cada par  $(t, f)$ .

### **CARACTERÍSTICAS DE LA SEÑAL.**

En el GPR, las ondas que se reflejan en las diferentes capas del subsuelo, son registradas en forma de señal y contienen información que es necesaria, más ruido.

El análisis y proceso de la información tiene por objeto lograr a partir de un número finito de datos obtener información referida a un fenómeno o sistema que ellos representen, las señales tienen características como son la longitud de onda, que es la distancia entre dos frentes de onda que están en la misma fase y se mide en m; la amplitud, que es la máxima elongación de su posición de equilibrio que alcanza la onda; el período, que es el tiempo que tarda en realizarse un ciclo de la onda y finalmente, la frecuencia, que es el número de ondas emitidas por el centro emisor en un segundo, se mide en Hertz.

Para poder utilizar este tipo de señales hay que discretizar o digitalizar la señal, en un período de tiempo el cual contiene un pedazo de la información. Para clasificar esta información, se dice que la señal es de tipo continuo si esta señal puede tomar cualquier forma o bien, de tipo discreto si la señal toma únicamente ciertos valores. Para trabajar con la señal existen varios procesos de clasificación que son:

En los procesos estacionarios y los procesos no estacionarios, las señales que ocurren generalmente en la naturaleza, son no estacionarias, es decir, son aquellas cuyas propiedades varían a lo largo del tiempo, esto nos lleva a que la variable intrínseca sea el tiempo y que en la obtención o generación de la señal tenga como paso imprescindible el tratamiento de la señal en el dominio temporal.

El concepto de estacionariedad, implica que sus propiedades o momentos estadísticos no varían a lo largo del tiempo y en sentido amplio, permite realizar estimaciones bastante fiables (Porat, 1994). Esta suposición restringe el ámbito de aplicación ya que en el caso de señales no estacionarias la señal varía en el tiempo, por lo tanto, al aplicar métodos para señales estacionarias, los resultados no siempre son los esperados.

Los procesos también pueden ser de tipo determinístico cuando el argumento de la señal está definido en cada momento del tiempo, o bien, procesos aleatorios donde el argumento de la señal no está determinado en un tiempo.

Las señales del GPR son digitalizadas en un periodo de tiempo, de forma continua mediante un proceso no estacionario aleatorio y son editadas y verificadas por un receptor.

Las señales vienen dadas como funciones en el dominio del tiempo, desde el punto de vista matemático pueden venir descritas de muy diferentes maneras, pero en el estudio de señales resulta provechoso disponer de una representación en el dominio de la frecuencia, este tipo de representación permite extraer características que suelen no estar evidenciadas en el dominio temporal y que son de utilidad para comprender su naturaleza.

Una función en el dominio temporal indica como la amplitud cambia con respecto al tiempo, su representación en el dominio de la frecuencia nos permite conocer, que tan a menudo esos cambios tienen lugar.

La señal en el dominio temporal se define a través de dos características especiales: el tiempo medio y la duración.

Al momento en el tiempo en el que ambos lados de él se concentra la densidad de energía de la señal corresponde al Tiempo Medio. Peebles, (1987) lo define como el valor absoluto de  $t$ , o como el valor absoluto de  $t^2$ :

$$\langle t \rangle = \int t |S(t)|^2 dt \quad 2.1$$

$$\langle t^2 \rangle = \int t^2 |S(t)|^2 dt \quad 2.2$$

donde:  $S(t)$  es la señal en el dominio temporal

A la desviación estándar de la señal o momento central de segundo orden, se define como duración (Kay, 1993), esto nos indica el tiempo alrededor del tiempo medio en el cual la señal persiste y nos dice si una serie de datos están muy alejados respecto a la media de esta serie.

$$\sigma_t^2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 \quad 2.3$$

La representación de una señal observada en el dominio de la frecuencia permite:

1ª Conocer el origen de la señal en el análisis espectral.

2º Conocer los diferentes medios por el que viaja una señal, esto es porque la frecuencia varía con el medio que atraviesa.

3º La simplicidad, debida a que una sencilla suma de sinusoides se reduce a elementos frecuenciales puntuales mediante la transformada de Fourier.

4º Que las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales sean una herramienta muy potente para su solución.

## **TRANSFORMADA DE FOURIER.**

La Transformada de Fourier (FT) cuya idea fundamental es descomponer a la señal en una suma pesada de funciones sinusoidales, de diferentes frecuencias (Proakis, 1997), brinda la vinculación entre el dominio del tiempo y el dominio de las frecuencias, cada senoide de frecuencia  $\omega$  contribuye a la formación de la señal  $s(t)$  en una cantidad que se conoce como espectro de la señal  $S(\omega)$ .

La expresión de la Transformada de Fourier es:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad 2.4$$

En el dominio de la frecuencia, también se define una densidad de energía, que localiza las frecuencias más relevantes contenidas en la señal, en una media frecuencial, así como su desviación estándar conocida como “ancho de banda”.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int s(t) e^{j\omega t} dt \quad 2.5$$

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi vt} dt \quad 2.6$$

Comparar señales de radar con señales sinusoidales que se extienden en el tiempo de  $-\infty$  a  $\infty$  no resulta ser lo más adecuado, porque en la expresión de Fourier se observa que es necesario el conocer toda la información temporal de la señal para su análisis de frecuencia, por lo que esta transformación no es posible utilizarla para aplicaciones en tiempo real, pues se carece de información sobre la evolución de la señal en el futuro, también se desconocen discontinuidades o transiciones abruptas debidas a características de la información o por adición de ruido en un instante determinado, que producen efectos que se extienden sobre todo el rango de frecuencias (Williams, 1998).

En el análisis de Fourier existe una hipótesis implícita que es la estacionariedad de la señal en estudio y esta es la razón de estos inconvenientes, por lo que una limitación importante de la Transformada de Fourier es que no es posible analizar la evolución de los contenidos de frecuencia de la señal en tiempo.

En efecto cuando se pasa del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia se pierde toda la información temporal, por lo que no se puede determinar el instante en que la señal presente cambios, alteraciones o rupturas.

Un camino sencillo para caracterizar una señal simultáneamente en el tiempo y en la frecuencia, es considerar su localización y dispersión en cada una de estas representaciones, esto puede obtenerse considerando  $|x(t)|^2$  y  $|X(\omega)|^2$  como una distribución de probabilidad y viendo su valor medio y su desviación estándar. Auger (1991).

Así tenemos

$$t_m = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt \quad \text{Promedio de tiempo} \quad 2.7$$

$$v_m = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |X(\omega)|^2 d\omega \quad \text{Promedio de frecuencia} \quad 2.8$$

$$T^2 = \frac{4\pi}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (t-t_m)^2 |x(t)|^2 dt \quad \text{Tiempo expandido} \quad 2.9$$

$$B^2 = \frac{4\pi}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_m)^2 |X(\omega)|^2 d\omega \quad \text{Frecuencia expandida} \quad 2.10$$

donde:  $E_x$  es la energía de la señal limitada:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad 2.11$$

Por lo tanto, una señal puede ser caracterizada en el plano tiempo-frecuencia por su posición media ( $t_m, v_m$ ) y en el dominio de localización de energía media, donde el área es proporcional al producto tiempo de observación-ancho de banda,  $T \times B$ .

Una interesante propiedad de este producto es que su límite inferior:  $T \times B \geq 1$ , es conocido como la Ecuación de Heisenberg – Gabor, la cual muestra que una señal no puede tener al mismo tiempo un soporte en el tiempo y en la frecuencia, debido a la definición de la Transformada de Fourier.

Cuando el límite del producto  $T \times B = 1$  que es alcanzado por la función gaussiana:

$$x(t) = C \exp \left[ -\alpha(t-t_m)^2 + j2\pi v_m(t-t_m) \right] \quad 2.12$$

donde:  $C \in \mathfrak{R}$  y  $\alpha \in \mathfrak{R}_+$

Por lo tanto, las señales gaussianas son aquellas en las cuales se minimiza el producto  $T \times B$  acordado por la desigualdad de Heisenberg – Gabor (Auger, 1996).

Esta propiedad supone una restricción importante para las representaciones Tiempo-Frecuencia, por ello, conociendo la aplicación en la que se va utilizar y las características de resolución temporal y espectral de cada transformada Tiempo – Frecuencia en particular, habrá que decidir en cada caso la representación más apropiada.

La frecuencia instantánea y el grupo de retardo son otro camino para describir la señal en tiempo y en frecuencia, para ello necesitamos introducir el concepto de señal analítica.

Si en una señal real obtenemos su espectro, veremos que es simétrico con respecto al origen, esta característica no es deseable para las representaciones Tiempo - Frecuencia, porque tendríamos un plano con información duplicada añadiendo interferencia a la distribución.

En la obtención de una representación Tiempo - Frecuencia se debe tener en cuenta las señales que intervienen para calcular cada punto ( t, f ), por que provocaría una distorsión en la representación. La señal analítica intenta evitar este problema. De tal forma que, la señal analítica es una señal compleja que tiene como característica principal, poseer un espectro positivo, eliminando información redundante (Cohen, 1995).

Si tenemos una señal temporal real, la parte real de la señal analítica se obtiene conservando la misma señal original, y la parte compleja se obtiene aplicando la transformada de Hilbert ( HT ) a la señal real x ( t ) (Kay, 1993).

Para una señal real

$$[x(t)]_a = x(t) + jHT[x(t)] \Leftarrow HT[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad 2.13$$

$[x(t)]_a$  Es llamada la señal analítica asociada a la señal t ( x )

Para un tratamiento discreto de la señal, en el caso de las representaciones Tiempo-Frecuencia, es necesario muestrear la señal a 4 veces la frecuencia de Nyquist, para evitar el aliasing, o bien, obtener la señal analítica, para que la frecuencia de 2 veces la frecuencia de Nyquist sea un valor suficiente. Esto es porque la versión discreta de estas representaciones se ve afectada por un aliasing espectral, en particular si la señal es muestreada a la frecuencia de Nyquist, consecuentemente el número de términos de interferencia disminuyen significativamente

En algunas señales la no estacionariedad se refleja en tener un espectro variable en el tiempo, un índice de esta variación la da la Frecuencia instantánea de la señal compleja x ( t ), que es el cambio instantáneo en la frecuencia, definida como la derivada de la fase con respecto al tiempo

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (\arg x(t)) \quad 2.14$$

Una cantidad similar es el Grupo de retardo, que es el retardo de una señal que se compone de oscilaciones de un determinado grupo de frecuencias definido por:

$$t_x(\omega) = -\frac{d}{d\omega} (\arg X(\omega)) \quad 2.15$$

En el que  $\arg X(\omega)$  corresponde a la fase del espectro. El grupo de retardo es significativo cuando x ( t ) es la respuesta al impulso del sistema, bajo estas condiciones

$t_x(\omega)$  puede ser interpretado como el tiempo de retardo introducido por el sistema (Hlawatsch 1992a).

Sin embargo la frecuencia instantánea y el grupo de retardo son solo capaces de describir adecuadamente la localización de componentes espectrales para una restringida grupo de señales, porque la hipótesis claramente es que una frecuencia dada está concentrada alrededor de un instante de tiempo.

Y estas describen a la señal por una curva en una dimensión, esto podría ser solucionado si la señal fuera representada en dos dimensiones de aquí la necesidad de un análisis conjunto Tiempo-Frecuencia, que al realizar el análisis de la señal en una función de dos variables el tiempo y la frecuencia que muestre la localización temporal del espectro de la señal.

Donde se crea una situación de compromiso conocida como Principio de Incertidumbre de Haisenberg, este principio supone que una transformación en tiempo-frecuencia llega a un punto límite en el que la duración, para frecuencia y tiempo respectivamente, no puede ser mejorado simultáneamente y solo impone que la distribución tiempo-frecuencia cumpla con la propiedad de los marginales (Cohen, 1989).

## **REPRESENTACIÓN TIEMPO-FRECUENCIA.**

En el intento de obtener las funciones capaces de representar simultáneamente el hecho físico de la variación del espectro de frecuencias con respecto al tiempo y utilizar esta función, tal como se emplea la función de densidad de energía. Se han desarrollado serie de representaciones Tiempo-Frecuencia, en donde se puede apreciar cómo han evolucionado las componentes frecuenciales a lo largo del tramo de tiempo analizado.

Consiste de una superficie tridimensional, cuyos ejes son el tiempo, la frecuencia y para cada par  $(t, f)$ , se dispone de un valor de amplitud al que se le va a llamar “energía” del punto. Se emplea para conocer la forma de la señal en el plano tiempo-frecuencia y obtener el valor de la concentración de intensidad en cada punto de la distribución, apreciando la evolución de dicha amplitud tanto en el tiempo como en la frecuencia.

Dependiendo de la aplicación de las representaciones Tiempo-Frecuencia, resulta conveniente que satisfagan diferentes propiedades o que tengan características de resolución y términos de interferencia concretos, para ello se han desarrollado diferentes representaciones:

Las representaciones Tiempo-Frecuencia Lineales, donde se muestra la señal descompuesta en el plano tiempo frecuencia basada en la amplitud de la señal temporal (Hlawatsch, 1991). Se basan en comparar la señal a analizar con un conjunto de funciones adecuadamente seleccionadas, la diferencia entre ellas estriba en cómo son construidos los conjuntos de funciones elementales de referencia. Debido a su sencillez y similitud en cuanto a concepto y estrategia de cálculo con los métodos espectrales clásicos, las representaciones Tiempo-Frecuencia lineales son ampliamente utilizadas (Callahan, 1976; Portnoff, 1981; Allen, 1982).

Estas representaciones cumplen el principio de superposición y también se le llama descomposiciones atómicas, ya que proyectan la señal en el plano de forma que se obtienen celdas, que conforman la representación.

Posteriormente se desarrolla una amplia gama de diferentes representaciones que se pueden agrupar dentro de las llamadas representaciones Tiempo-Frecuencia cuadráticas o Bi-lineales. En las representaciones cuadráticas, la distribución en el plano tiempo-frecuencia es la energía de la señal, que para obtenerse se requiere de la señal al cuadrado. Esto permite asumir que se trata de una distribución energética dado que la energía es una representación cuadrática de la señal, por ello también se les llama “representaciones energéticas” y tratan de combinar los conceptos de potencia instantánea y densidad espectral de energía. Es decir, para una señal  $s(t)$ :

$$x(t) = |s(t)|^2 \quad \text{y} \quad X(f) = |S(f)|^2, \text{ respectivamente} \quad 2.16$$

Aunque no siempre pueden ser interpretadas como energía, ya que para ello deben cumplir las propiedades marginales. A través de la representación Tiempo-Frecuencia, siempre es posible hacerse una idea de la distribución energética aproximada de la señal analizada.

Los términos de interferencia o cruzados, son los principales inconvenientes de las representaciones Tiempo-Frecuencia Bi-lineales. Estos términos se generan debido a la presencia cuadrática de la señal que contiene varias componentes frecuenciales incluyendo el ruido (Señal multi-componente).

Para una señal formada por la suma de dos señales mono-frecuenciales se tiene que:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = e^{j2\pi \cdot f_1 \cdot t} + e^{j2\pi \cdot f_2 \cdot t} \quad 2.17$$

Donde, la transformada Tiempo-Frecuencia de  $s(t)$  está dada por dos términos llamados “auto términos” correspondientes a la representación Tiempo-Frecuencia de cada señal mono-frecuencial, más dos términos cruzados (Loughlin, 1993).

$$\begin{aligned} TFR_x(t, F) = & |c_1|^2 TFR_{x_1}(t, f) \\ & + |c_2|^2 TFR_{x_2}(t, f) \\ & + c_1 c_2 * TFR_{x_{1,2}} \\ & + c_2 c_1 * TFR_{x_{2,1}}(t, f) \end{aligned} \quad 2.18$$

En estas representaciones, los términos cruzados o de interferencia generan contribuciones inexistentes, de hecho, ocurre que aparecen términos de energía en zonas donde resulta incongruente tenerlos. Para cualquier señal, se genera su correspondiente término cruzado,

donde la señal útil puede ser perjudicada por la presencia de un gran número de componentes añadidas.

La representación Tiempo-Frecuencia para una señal que contenga  $N$  componentes frecuenciales, estará constituida por  $N$  términos de señal más  $N(N-1)/2$  términos cruzados, por lo que su número crece de forma cuadrática con el número de componentes.

Esto es un serio problema para poder realizar un análisis en las representaciones Tiempo-Frecuencia. Los términos de interferencia pueden enmascarar términos propios, sobre todo en las representaciones que proporcionan resultados reales, esto es debido a que si no existe alguna atenuación, la amplitud de los términos cruzados es el doble que los términos propios o auto términos.

Los llamados “kernel” se utilizan para atenuar los términos cruzados, proporcionando más intensidad a los términos propios, en muchas ocasiones consisten en filtros bidimensionales (Claasen, 1980).

Son muchos los autores que proponen diferentes tipos de kernel, cada uno de ellos posee diferentes propiedades en cuanto a atenuación de términos cruzados. Algunos de ellos dejan de satisfacer las propiedades de las representaciones, debido a la inclusión del kernel, disminuyendo la resolución que se produce por el filtrado a que se somete la señal, generando una dispersión de energía en los ejes temporal y frecuencial.

## **PROPIEDADES GENERALES DE LAS REPRESENTACIONES TIEMPO-FRECUENCIA.**

Las condiciones que se deben cumplir para que una representación Tiempo-Frecuencia corresponda con una densidad de energía, en el sentido estricto de la palabra son las siguientes:

### **Marginales.**

Las condiciones marginales de tiempo y frecuencia establecen, que cuando se suman todos los términos de la distribución correspondientes a un mismo tiempo y frecuencia, se obtiene la energía instantánea y el espectro de densidad de energía respectivamente. Flandrin, ( 1993 ); Auger ( 1996 ); Rosado, ( 1998 ).

$$P(\omega) = \int P(t, \omega) dt = |S(\omega)|^2 \quad 2.19$$

$$P(t) = \int P(t, \omega) d\omega = |s(t)|^2 \quad 2.20$$



Donde  $P(t, \omega)$  corresponde con la intensidad en el punto  $(t, \omega)$  del plano tiempo-frecuencia,  $|s(t)|^2$  es la intensidad de la señal en el tiempo  $t$ , y  $|S(\omega)|^2$  la intensidad en la frecuencia  $\omega$ .

### Energía Total.

Si a la transformada de tiempo-frecuencia corresponde con una densidad de energía, se debe cumplir que:

$$\iint P(t, \omega) d\omega dt = \int |s(t)|^2 dt = \int |S(\omega)|^2 d\omega \quad 2.21$$

Si los marginales cumplen, esta propiedad de energía total se cumple automáticamente, aunque lo contrario no siempre es cierto.

### Invarianza ante Desplazamientos Temporales y Frecuenciales.

Sea una señal  $s(t)$ , en la cual respectivamente se tiene desplazamiento en el tiempo, o existe un desplazamiento en frecuencia:

$$s(t) = s(t - t_0) \quad 2.22$$

$$s(t) = s(t) e^{j\omega_0 t} \quad 2.23$$

Donde, la representación Tiempo-Frecuencia correspondiente a dicha señal cumple la propiedad de invarianza respectivamente ante desplazamientos temporales y frecuenciales si:

$$P_x(t, \omega) = P_x(t - t_0, \omega) \quad 2.24$$

$$P_x(t, \omega) = P_x(t, \omega - \omega_0) \quad 2.25$$

### Escalado Lineal.

La versión escalada de una señal  $s(t)$  dada es:

$$s_c(t) = \sqrt{a} \cdot s(at) \quad 2.26$$

Con lo que  $s_c(t)$  es expandida o reducida dependiendo si  $a$  es mayor o menor que la unidad.

Al obtener el espectro de la señal:

$$S_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} S\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad 2.27$$

Si la señal se comprime, el espectro se expande y viceversa. Para que esta propiedad se cumpla en las distribuciones Tiempo-Frecuencia, debemos obtener que:

$$P(t, \omega) = P\left(at, \frac{\omega}{a}\right) \quad 2.28$$

Esta propiedad resulta bastante útil en señales con transitorios de corta duración, pues ello permite una mejor apreciación, dependiendo de la escala que emplee.

### **Soporte Finito de la Señal.**

Esta condición se cumple si la representación Tiempo-Frecuencia no toma valores mientras no lo hace la señal. Matemáticamente la propiedad viene expresada de la siguiente forma:

$$P(t, \omega) = 0 \text{ para } t \notin (t_1, t_2), \text{ si } s(t) = 0 \text{ para cualquier } t \notin (t_1, t_2) \quad 2.29$$

$$P(t, \omega) = 0 \text{ para } \omega \notin (\omega_1, \omega_2), \text{ si } S(\omega) = 0 \text{ para cualquier } \omega \notin (\omega_1, \omega_2) \quad 2.30$$

Esto parece obvio, pero no siempre se cumple, es la condición de que la representación Tiempo-Frecuencia no comience mientras la señal no lo haya hecho (comienzo de la señal en tiempo  $t_1$ ) y que no se siga manteniendo una vez que la señal ha finalizado (finalización de la señal en el tiempo  $t_2$ ).

### **Distribuciones Reales y Positivas.**

También es necesario que se cumplan las propiedades de valor positivo y su pertenencia al conjunto de números reales definidas como:

$$P(t, \omega) = P^*(t, \omega) \quad 2.31$$

$$P(t, \omega) \geq 0 \quad 2.32$$

Esto es, porque es importante que los resultados que la distribución Tiempo-Frecuencia proporciona, sean fácilmente manejables.

### Frecuencia Instantánea y Grupo de Retardo.

La frecuencia instantánea y grupo de retardo, vienen definidos por la derivada en el tiempo de fase de la señal y la derivada en la frecuencia de la parte imaginaria de la transformada de Fourier de la señal, respectivamente:

$$\phi'(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d \arg x(t)}{dt} \Rightarrow \text{Frecuencia Instantánea} \quad 2.33$$

$$\psi'(\omega) = - \frac{d \arg X(\omega)}{d\omega} \Rightarrow \text{Retardo de Grupo} \quad 2.34$$

Para señales con determinadas propiedades, una de las formas de describir la evolución frecuencial de la señal a lo largo del tiempo y que puede ser válida para su caracterización, es a través de ellas.

La frecuencia instantánea nos da idea del valor de la frecuencia imperante en un determinado momento y que, a su vez, puede ser suma de varias componentes de frecuencia, así decimos que una representación Tiempo-Frecuencia cumple la propiedad de Frecuencia Instantánea si:

$$\frac{\int \omega P(t, \omega) d\omega}{\int P(t, \omega) d\omega} = \phi'(t) \quad 2.35$$

Es decir, la frecuencia media de la representación Tiempo-Frecuencia en un determinado momento coincide con la frecuencia instantánea de la señal en ese instante, esta magnitud proporciona información útil sólo si la señal contiene en cada instante un rango de frecuencias estrecho.

En el plano temporal, se define el grupo de retardo, que nos proporciona una idea del tiempo medio de llegada de una determinada frecuencia dentro de la señal analizada, dentro de las transformadas Tiempo-Frecuencia, se dice que cumplen la propiedad del grupo de retraso si:

$$\frac{\int t P(t, \omega) dt}{\int P(t, \omega) dt} = \psi'(\omega) \quad 2.36$$

El centro de gravedad o media en la dirección temporal debe ser igual al grupo de retardo.

### TIPO DE REPRESENTACIONES TIEMPO FRECUENCIA.

Básicamente estas transformaciones se dividen en transformaciones tiempo-frecuencia lineales y en transformaciones tiempo-frecuencia cuadráticas.

Las transformaciones tiempo-frecuencia lineales, son ampliamente empleadas debido a su sencillez y similitud con los métodos espectrales clásicos. Estas representaciones cumplen con el principio de superposición y proyectan la señal en el plano de forma que se obtienen celdas (cuyo tamaño depende del tipo de representación, frecuencia de muestreo, número de puntos elegidos, etc.) que conforman la representación. Como representantes principales se encuentra la transformada corta de Fourier, la transformada de Gabor y la transformada de ondícula (Wavelet).

Las transformadas de tiempo cuadráticas o bilineales, son aquellas en la que la dependencia con respecto a la señal es cuadrática y nos permiten asumir que se trata de una distribución energética. En estas transformaciones se desarrolla un amplio abanico de diferentes transformaciones tiempo-frecuencia que se pueden agrupar dentro de las llamadas Clase Cohen y Clase Afín. Su principal inconveniente son los términos de interferencia o cruzados, que se generan debido a la presencia cuadrática.

### **CLASE COHEN.**

Las representaciones tiempo-frecuencia que cumplen con todas las condiciones anteriormente mencionadas, se engloban en la denominación de miembros de la Clase Cohen, cuyo objetivo principal no solo es preservar las propiedades de una transformación tiempo-frecuencia, sino que también reducir la interferencia de los términos cruzados (Cohen, 1998).

Su principal representante es sin duda la Transformación de Wigner-Ville la cual, presenta el mejor conjunto de propiedades útiles, las otras distribuciones parten de la premisa de tratar de eliminar los términos de interferencia, intentando mantener la mayor cantidad posible de propiedades de la distribución de Wigner.

La distribución Wigner es una transformación bilineal que sirve de base para expresar cualquier distribución tiempo-frecuencia en función de ella, debido a su similitud con la función de ambigüedad, la relación entre ellas constituye lo que se llama par de Fourier (Claasen, 1980c). Esta transformada cumple con la mayoría de las propiedades generales de las transformadas tiempo-frecuencia y nos interesa porque no existe un suavizado, tan poco se utilizan tramos de la señal debido a que su kernel = 1, únicamente se debe especificar la longitud del segmento temporal y la resolución espectral deseada.

### **CLASE AFIN.**

Existen distribuciones que no pertenecen a la Clase Cohen ya que no son covariantes por corrimiento en tiempo y en frecuencia, son las distribuciones Afines (A), basadas en la propiedad de covarianza por corrimientos en tiempo y dilatación o escala. Comprenden a las Transformaciones que preservan el escalamiento en tiempo, duplicando la escala de tiempo de la señal, también se duplica la escala de tiempo en la representación tiempo-frecuencia mientras divide por dos la escala de frecuencias y preservan los corrimientos en tiempo. Rioul, (1992); Hlawatsch, (1992) Boudreaux-Bartels, (1995)

## FUNCIÓN DE AMBIGÜEDAD.

Esta función permite sintetizar señales con propiedades muy específicas, si se genera una señal que tenga una función de ambigüedad concreta y que cumpla ciertas características en el plano ambiguo, las propiedades que tendrá a nivel temporal y frecuencial serán las que concretamente se han definido.

Esta función fue empleada originalmente para aplicaciones de radar, (Rihaczeck, 1969; Steiner, 1981; Lieb, 1990); y fue definida por, Woodward, (1953), aunque Ville, (1948) y Moyal, (1949) ya habían sentado las bases para su obtención, puede interpretarse como una función de correlación tiempo-frecuencia, recordando que la función de auto-correlación que depende del tiempo es de la forma:

$$R(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad 2.37$$

A partir de esta ecuación se obtiene la expresión de Wigner-Ville

$$WV(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\tau\omega} d\tau \quad 2.38$$

Si se cambia la variable de integración y tomamos la transformada de Fourier con respecto a  $t$ , tendremos la función de ambigüedad simétrica (Woodward, 1953; Van Trees, 1971).

$$AF(t, \nu) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad 2.39$$

Si tomamos dos señales diferentes, en lugar de tomar la misma señal para el producto de la señal y su conjugado, se obtiene la función de ambigüedad cruzada. Esta representación no nos proporciona información respecto a las variables absolutas de tiempo y frecuencia, sino respecto a las ordenadas relativas  $\tau$  y  $\nu$ , llamadas retardo y doppler respectivamente debido a su amplia utilización en radar.

Esta función sirve de base, para poder expresar cualquier distribución Tiempo-Frecuencia en función de ella, debido a su gran similitud con la distribución Wigner-Ville, resulta inmediata la relación entre ambas, constituyendo lo que se llama un “par de Fourier” (Claasen, c, 1980), esto quiere decir, que la función de ambigüedad se obtiene con la transformada doble de Fourier de la distribución Wigner-Ville y viceversa.

Es importante que  $AF_x(0, 0) = 1$ , para una representación normalizada, es decir, para una representación de la función de ambigüedad es necesario tener en cuenta la característica por la que el valor máximo de energía de la representación se produce en el origen de la distribución  $AF_x(0, 0)$  (Hlawatsch, 1992).

La función de ambigüedad, genera términos cruzados, donde los términos propios de la señal se localizan alrededor del origen, dejando a los términos de interferencia como los más alejados del origen.

Una representación Tiempo-Frecuencia, se puede expresar como la función de ambigüedad más un kernel añadido que será el que modifica el comportamiento, permitiendo la atenuación de los términos cruzados e intentando dejar los términos propios intactos. Este kernel se suele expresar en el plano ambiguo porque su caracterización resulta más precisa, con lo que la función de suavizado que se defina se podrá adoptar más a las necesidades planteadas.

### **LA TRANSFORMADA DE WIGNER- VILLE.**

La distribución Wigner y la función de ambigüedad, no se utilizan en el análisis de señales, por la presencia de términos de interferencia o cruzados, que en el plano Tiempo-Frecuencia, pueden llegar a confundir la interpretación de la señal. Al tratar de discretizar la distribución Wigner, Clossen, (1983) y Jean y Williams (1992) se dieron cuenta que no era tan sencilla como la Transformada de Fourier con Ventanas, porque es una función de período de  $\frac{1}{2}$  en frecuencia y para señales de banda limitada exige que la señal  $s(t)$  se haya muestreado a una frecuencia superior a la de Nyquist, si se quiere evitar el aliassin de la señal. Por esta razón, se utiliza la señal analítica de la señal evitando el doblamiento de la señal en frecuencia de muestreo.

La distribución Wigner de la señal analítica obtenida a partir de la señal real, se acostumbra llamar transformada de Wigner-Ville. A partir de la función de auto-correlación dependiente del tiempo que es de la misma forma que la ecuación 2.37. Se obtiene la expresión de la Transformación Wigner-Ville como se menciona en la ecuación 2.38:

Y que es la base sobre la cual se puede construir el resto de las Transformada; (Wigner, 1932; Ville, 1948; Cohen, 1966). Esta distribución es muy importante y de gran interés debido a que cumple las siguientes propiedades:

- 1.- Conservación de la energía.
- 2.- Propiedades marginales
- 3.- Pertenencia a los Reales
- 4.- Invarianza ante traslación
- 5.- Invarianza ante dilataciones
- 6.- Propiedad de la frecuencia instantánea
- 7.- Propiedad de retardo de grupo

Todas ellas descritas anteriormente. Su principal problema reside en la gran cantidad de términos de interferencia que genera, de tal manera que una regla para conocer la situación de estos términos fue dada por (Auger, 1997) y es la siguiente:

*“Dos puntos del plano Tiempo-Frecuencia, generan un tercer punto localizado en el punto medio geométrico entre ambos. Además, estos términos oscilan perpendicularmente a la línea que une los dos puntos de origen, con una frecuencia proporcional a la distancia que separa los puntos de origen”.*

Recordando que en la distribución Wigner-Ville, los términos cruzados se sitúan a medio camino entre dos contribuciones de señal de radar diferentes en tiempo y/o frecuencia.

El kernel correspondiente a la ecuación:

$$TFR(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint AF(\tau, \nu) \Phi(\tau, \nu) e^{j((t\nu - \omega\tau))} d\tau d\nu \quad 2.40$$

Para la distribución Wigner-Ville la función Kernel es:

$$\Phi(\tau, \nu) = 1$$

Debido a su kernel = 1, esta transformada cobra interés en el análisis de señales porque no existe ni suavizado ni se toma ningún tramo ni en tiempo ni en frecuencia, por lo que sólo es necesario especificar la longitud del segmento temporal y frecuencial, para obtener la resolución deseada.

Para ver cómo van evolucionando las componentes frecuenciales a lo largo del tiempo analizado y el valor de la amplitud de cada par (t, f), se empleará esta transformación para hacer el análisis tiempo-frecuencia de las señales utilizadas y obtenidas con el sistema de GPR y con ella se obtendrá el espectro de tiempo-frecuencia para obtener atributos de la señal.

## CONCLUSIONES.

La señal de radar se obtiene mediante un receptor, cuyas propiedades se digitalizan de manera continua mediante un proceso no estacionario y para darles un sentido físico se dan de forma matemática en funciones en el dominio del tiempo.

La señal obtenida de radar se analiza para conocer sus características en el dominio del tiempo, esta representación muestra físicamente como cambia con respecto al tiempo, su amplitud, nos define su tiempo medio y su duración, pero para conocer que tan a menudo son esos cambios de características es necesario pasar al dominio de las frecuencia, lo cual permite conocer, el origen de la señal, que en nuestro caso es electromagnética, los

diferentes medios por los que viaja, es decir el rango de frecuencia, que para la señal de radar analizada, es un intervalo de alta frecuencia de 1Mhz. a 1.2Ghz.

Esta vinculación se hace mediante la transformada de Fourier, cuya idea fundamental es descomponer la señal en una suma pesada de funciones sinusoidales, de diferentes frecuencias, donde cada senoide contribuye a la formación de la señal, cantidad conocida como espectro de la señal.

Se define en el dominio de la frecuencia su ancho de banda, que es una densidad de energía que localiza las frecuencias contenidas en la señal, pero analizar la señal de radar con señales sinusoidales que se extienden de  $-\infty$  a  $\infty$  no resulta ser lo más adecuado, porque para utilizar la expresión de Fourier, es necesario conocer toda la información temporal para el análisis de frecuencia, lo que para una aplicación de este tipo, que es en tiempo real, se carece de la información sobre la evolución en el futuro, se desconoce también sus discontinuidades o transiciones abruptas debidas a las características de la información contenida en la señal o por adición de ruido en un instante determinado, que producen efectos sobre todo el rango de frecuencias.

Se comprueba que cuando se pasa del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia se pierde la información temporal, por lo que no se puede determinar el instante en que la señal presenta cambios, alteraciones o rupturas.

Se utiliza una representación que es capaz de mostrar el hecho físico de la variación del espectro de frecuencias con respecto al tiempo y utilizar la función, tal como se emplea la función de densidad de energía, para ello se analiza un grupo de representaciones, en donde se aprecia cómo van evolucionando las componentes frecuenciales con respecto al tiempo, en una superficie tridimensional, cuyos ejes son el tiempo, la frecuencia y para cada par  $(t, f)$ , se dispone de un valor de amplitud al que se le llama energía del punto.

Resulta conveniente que estas representaciones cumplan con diferentes propiedades o que tengan características de resolución y términos de interferencia concretos, se obtienen diferentes representaciones Tiempo-Frecuencia. Estas se dividen en dos, el primer grupo de representaciones de tiempo-frecuencia lineales o atómicas, las cuales proyectan a la señal en el plano de forma que se obtienen celdas que conforman la representación.

El otro grupo de representaciones llamadas cuadráticas, bi-lineales o energéticas, en las que la distribución del plano es la energía de la señal, se obtienen teniendo la señal al cuadrado y combinan los conceptos potencia y densidad de energía espectral.

Se enfoca el estudio en la transformada de Wigner:Ville, porque es la base para la construcción de las demás representaciones, cumple con las propiedades de estas distribuciones y además los términos de interferencia se sitúan a medio camino entre dos contribuciones de la señal de radar en tiempo y/o en frecuencia por lo que se pueden distinguir, su Kernel es 1 y no toma tramos de la señal, con lo cual no es necesario especificar la longitud del segmento temporal y frecuencial para obtener la resolución deseada.



Por lo que esta transformación en tiempo-frecuencia de Wigner-Ville, suministra otra visión de la señal de GPR, que complementa los otros mecanismos de análisis de señales, nos provee una representación más precisa en la evolución de la señal no estacionaria ayudándonos a realizar un análisis más completo de la señal, facilitando su clasificación, modelado y determinación de características que se puedan presentar en la señal.

## **CAPITULO III.**

### **EXTRACCIÓN DEL ATRIBUTO DE FRECUENCIA INSTANTÁNEA DE LA TRAZA DE RADAR EN EL ESPECTRO TIEMPO-FRECUENCIA.**

#### **OBJETIVO.**

Mediante los atributos de traza compleja que se obtienen del análisis de tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner –Ville, utilizar el atributo de frecuencia instantánea para observar características propias de los datos de GPR, como la forma de su onda, que permitan ayudar a interpretar y seguir eventos débiles en la señal.

#### **INTRODUCCIÓN.**

Los atributos de una señal sirven para interpretar mejor los datos, ya sea combinándolos o midiendo una sola característica específica de la señal. Existen varios métodos para obtener una descomposición espectral, una de ellas es el espectro de frecuencias de Fourier, caracterizado por emplear mediciones promedio.

Cohen (1989), llegó a un resultado desde la teoría de la probabilidad y lo presenta en forma de traza compleja, para enfatizar la medición de propiedades promedio espectrales en el tiempo, proponiendo aplicaciones útiles.

Basándose, en que una traza de radar es una función real y recordando que la frecuencia negativa del espectro puede ser ignorada, porque es la imagen espejo de la frecuencia positiva, se obtiene el atributo de traza compleja de frecuencia instantánea utilizando la señal analítica de la traza de radar.

Esto se logra utilizando los atributos de traza compleja derivados como parámetros que describen la distribución de Wigner-Ville de una señal. Utilizando la propiedad de frecuencia instantánea de traza compleja lo que nos permite es precisar mejor la ubicación de los reflectores de la señal de radar, produciendo un modelo de frecuencia que cambia su carácter de la misma forma en que cambian los efectos de la señal en su viaje por el subsuelo, como por ejemplo al pasar por los diferentes espesores de los estratos.

#### **SIGNIFICADO DE LOS ATRIBUTOS DE LA SEÑAL.**

Se denomina atributo a las características propias de los datos, los atributos son utilizados para la estimación de propiedades y pueden ayudar a interpretar y seguir eventos débiles. Desde su aparición en los 70's, han surgido cientos de atributos a partir de diferentes métodos computacionales

Existen atributos que pueden medir una sola característica, pero que al combinarlos a través de la estadística, redes neuronales o manipulaciones matemáticas, se obtienen mayores y mejores características de la señal (Taner, 2002).

La frecuencia instantánea es un atributo básico basado en la amplitud de la traza, en este caso de la traza de radar, también es una medida específica de características geométricas

y/o estadísticas derivadas de la información de la traza. La frecuencia instantánea está clasificada entre los atributos de frecuencia y está representada en tiempo, debido a que la precisión de la ubicación de los reflectores es mayor, por lo que no necesita conversiones que pudieran arrastrar errores, lo que implica una mayor exactitud en los resultados.

Además este atributo provee información acerca de la frecuencia característica de los eventos, mediante una reflexión individual, que puede ser producida por un efecto, por ejemplo el fracturamiento de la roca. La reflexión compuesta se caracteriza por la superposición de reflexiones individuales, produciendo un modelo de frecuencia que cambia su carácter, de la misma manera en que cambian los efectos, como la litología, el espesor de los estratos, etc.

También la frecuencia instantánea es uno de los parámetros básicos de las señales no estacionarias, la cual provee información de los cambios de la variación espectral en el tiempo.

Los atributos espectrales son usados como herramienta para caracterizar propiedades dependientes de la frecuencia, por lo que una señal de radar es descompuesta en su espectro tiempo y frecuencia, con el fin de revelar a partir de la información contenida en la traza de radar, las características de la variación frecuencial en el tiempo.

## MEDICIONES EXPECTRALES

Existen varios métodos para obtener la descomposición espectral, uno de ellos es el espectro de frecuencia de Fourier, caracterizado por emplear mediciones promedio, como la frecuencia central, la frecuencia dominante y la banda ancha espectral, que son cantidades familiares en la teoría de la probabilidad (Anstey, 1977; Widess, 1982; Kalwietand Wood, 1982; Berkout, 1984).

La banda ancha y la frecuencia dominante, complementan la frecuencia instantánea y encuentran su aplicación en el análisis de las propiedades de variación del tiempo y de la información espectral. Para que estas medidas sean instantáneas en tiempo, es necesario representarlas a través de sus promedios y completar el espectro de potencia instantáneo.

Los atributos espectrales, también son usados para revelar las propiedades de variación espectral de la información en el tiempo y pueden ayudar en la búsqueda de frecuencias ocultas o bajas, en el análisis de cambios de frecuencia debidas al proceso para obtener la información.

Para poder introducir las mediciones espectrales promedio es necesario revisar las definiciones de frecuencia central, banda ancha espectral y frecuencia dominante desde el espectro de potencia de Fourier que nos provee las bases, así la frecuencia central del espectro de Fourier es definida como (Berkhout, 1984; Cohen, 1989; Cohen and Lee, 1990):

$$f_c = \frac{\int_0^{\infty} f P(f) df}{\int_0^{\infty} P(f) df} \quad 3.1$$

donde:  $f$  es la frecuencia

La varianza de la frecuencia sobre esta media

$$f_b^2 = \frac{\int_0^{\infty} (f - f_c) P(f) df}{\int_0^{\infty} P(f) df} \quad 3.2$$

Donde la cantidad  $f_b$  es la desviación estándar de la frecuencia central y es dada como una medida de la banda ancha (Gram-Hansen, 1991).

Otra medida espectral promedio es el segundo momento del espectro de potencia dado por:

$$f_r^2 = \frac{\int_0^{\infty} f^2 P(f) df}{\int_0^{\infty} P(f) df} \quad 3.3$$

Esta medida es una medida promedio de la frecuencia cero cruzada y es el número de ceros que ocurren en la traza, dividida por el doble de la longitud de la traza, es una función de la amplitud espectral y de la fase espectral de la información.

Observando las ecuaciones anteriores se llega a un resultado familiar desde la teoría de la probabilidad obtenida por (Cohen, 1989).

$$f_r^2 = f_c^2 + f_b^2 \quad 3.4$$

Estos conceptos se presentan como mediciones instantáneas del espectro de potencia, son reducidas a fórmulas simples en forma de traza compleja, cuyo objetivo es, presentar los atributos de esta manera para enfatizar como la medición de propiedades promedio espectrales variante en el tiempo, propone aplicaciones útiles de manera atractiva.

El desarrollo matemático de estos conceptos en el espectro de Fourier, nos proporcionan las bases para introducir las mediciones espectrales correspondientes, reduciéndolas a atributos de la traza compleja.

El desarrollo de las fórmulas considera un solo lado del espectro de poder, basándose en que una traza de radar es una función puramente real (e.g. Berkhout, 1984) y recordando que la frecuencia negativa del espectro, es la imagen espejo de la frecuencia positiva por tal razón, la frecuencia negativa puede ser ignorada, obviando la necesidad de considerar valores absolutos de frecuencia (e.g. McCarley, 1985). Lo anterior solo es aplicable si la traza de radar es transformada a una señal analítica.

Para poder describir las propiedades de la señal dependientes del tiempo, estas son extraídas desde el espectro tiempo-frecuencia.

### **ATRIBUTOS BÁSICOS OBTENIDOS A PARTIR DE LA TRAZA COMPLEJA.**

Cualquier distribución tiempo-frecuencia puede ser caracterizada por varios momentos de sus espectros de poder instantáneos. En la reflexión de la señal de radar el espectro de frecuencias es caracterizado por varios parámetros promedio como la frecuencia central, la banda ancha espectral y la frecuencia dominante (Ansley 1977).

La frecuencia central es comúnmente definida como el promedio de la frecuencia del espectro de potencia, la banda ancha como la desviación estándar sobre la frecuencia central, estas mediciones son un tanto intuitivas y sugieren mediciones instantáneas (Cohen and Lee 1988, Cohen 1989, Jones and Boashash 1990). Mientras que la frecuencia dominante, es comparada con la velocidad, definida en términos de la densidad de amplitud máxima y como una medida práctica de la frecuencia dominante, la podemos obtener mediante la raíz cuadrada del 2º momento del espectro de potencia.

Estas cantidades son calculadas como atributos de la traza de radar compleja, encontrando su aplicación en el análisis de las propiedades de la información espectral y su variación con el tiempo.

El desarrollo matemático de estos conceptos en el espectro de Fourier, nos proporcionan las bases para introducir las mediciones espectrales correspondientes, reduciéndolas a atributos de la traza compleja.

Los atributos de traza compleja fueron introducidos por primera vez en la interpretación sísmica por Taner and Sheriff (1977), estos se utilizan para la caracterización de la forma de onda en una señal. La relación entre los atributos que se obtienen del análisis de la señal analítica y de las representaciones tiempo-frecuencia de clase cuadrática, se describe a continuación.

En el contexto de la señal analítica, los atributos de la traza compleja son usados en la interpretación de trazas, (Taner et.al., 1979). La parte imaginaria de la señal analítica de radar, es encontrada por la transformada de Hilbert de la señal real de radar  $s(t)$ , de la siguiente manera:

$$\text{Im} \{ u^a \} (t) = H \{ s(t) \} \quad 3.5$$

Donde  $H \{ s \}$ , denota la transformada de Hilbert de  $u$  con respecto al tiempo. Para obtener la señal analítica, de una señal dada:

$$u^a(t) = s(t) + j H \{ s \} (t) = a(t) \exp(j 2 \pi \phi(t)) \quad 3.6$$

Donde  $a(t) = \sqrt{s(t)^2 + H \{ s \} (t)^2}$  es el modulo o envolvente.

$$\phi(t) = \tan^{-1} \left\{ \frac{H \{ s \} (t)}{s(t)} \right\} \text{ es el argumento o fase.}$$

La envolvente y la fase de la señal analítica son funciones de tiempo, para la función espectral de amplitud y de fase, estas son llamadas frecuentemente amplitud instantánea y fase instantánea.

La frecuencia instantánea es un parámetro significativo derivado de la fase con respecto al tiempo, denotado como  $f^c(t)$ :

$$f^c(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad 3.7$$

En el análisis de señales, la amplitud instantánea, la fase instantánea y la frecuencia instantánea son llamados atributos de traza compleja.

Las ecuaciones anteriores son simples, consistentes y están relacionadas útilmente e independientes de la fase. Por lo tanto nos conducen directamente a las mediciones instantáneas de frecuencia central, banda ancha espectral y frecuencia dominante, las cuales son definidas para relacionar el espectro de potencia de Fourier  $P(f)$  con el espectro de potencia instantáneo en tiempo y frecuencia  $E(t, f)$ .

Donde la frecuencia instantánea está dada por la ecuación:

$$f_i(t) = \frac{\int_0^{\infty} f E(t, f) df}{\int_0^{\infty} E(t, f) df} \quad 3.8$$

La banda ancha espectral instantánea por:

$$\sigma_f^2(t) = \frac{\int_0^{\infty} (f - f_i)^2 E(t, f) df}{\int_0^{\infty} E(t, f) df} \quad 3.9$$

Y la llamada frecuencia dominante instantánea dada por (Barnes, 1993).

$$f_d^2(t) = \frac{\int_0^{\infty} f^2 E(t, f) df}{\int_0^{\infty} E(t, f) df} \quad 3.10$$

Y donde estas mediciones son relacionadas por (Cohen and Lee, 1988, 1990; Cohen, 1989; Jones and Boashash, 1990).

$$f_d^2(t) = f_i^2(t) + \sigma_f^2(t) \quad 3.11$$

Que es equivalente a la ecuación de dada por (Cohen en 1989).

### **ATRIBUTOS DE TRAZA COMPLEJA Y LA DISTRIBUCIÓN DE WIGNER.**

Los atributos de traza compleja los podemos derivar como parámetros que describen la distribución de Wigner de una señal. La distribución de Wigner es un espectro de potencia que es obtenido por una transformación de Fourier de una función de autocorrelación local Steeghs and Drijkonigen (2001), en donde la función de autocorrelación instantánea de una señal  $u(t)$  es definida de la siguiente manera:

$$R(t; \tau) = u\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) u^*\left(t - \frac{1}{2}\tau\right) \quad 3.12$$

donde:  $u^*$  es el complejo conjugado de la función  $u$  y  $\tau$  es la traslación de tiempo a lo largo del eje.

Y la distribución de Wigner  $W(t; f)$  de una señal  $u(t)$  está dada por:

$$\begin{aligned} W(t; f) &= \int_{\tau \in \mathbb{R}} \exp(-j2\pi f\tau) u\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) u^*\left(t - \frac{1}{2}\tau\right) d\tau \\ &= F_{\tau}^{-1}\{R(t; \tau)\} \end{aligned} \quad 3.13$$

Donde el asterisco denota el complejo conjugado.

La distribución de Wigner tiene muchas propiedades matemáticas atractivas (Cohen, 1995; Steeghs, 1997), algunas de estas propiedades son de interés particular en términos de análisis de atributos de la señal.

La integración de la distribución Wigner sobre el tiempo produce el espectro de densidad de energía espectral  $E(f)$  de una señal, es decir:

$$E(f) = \int_{t \in \mathbb{R}} W(t; f) dt = |\hat{u}(f)|^2 \quad 3.14$$

Del mismo modo, la integración de la distribución de Wigner sobre la frecuencia produce la energía instantánea de la señal

$$E(t) = \int_{f \in \mathbb{R}} W(t; f) df = |u(t)|^2 \quad 3.15$$

Para una señal analítica,  $E(t)$  es el poder instantáneo de la fuerza de reflexión, la cual es el cuadrado de la amplitud instantánea o envolvente de la señal, en donde la  $E(f)$  y  $E(t)$  son llamadas respectivamente la frecuencia marginal y tiempo marginal de la distribución.

La frecuencia instantánea de una traza compleja, es igual a la frecuencia media como una función de tiempo de la distribución de Wigner. El primer momento relativo de la distribución de Wigner con respecto a la frecuencia está dado por:

$$\langle f \rangle_t = \frac{1}{E(t)} \int_{f \in \mathbb{R}} f W(t; f) df \quad 3.16$$

donde, los corchetes denotan el promedio y el subíndice  $t$  que este promedio es tomado para todo el tiempo  $t$ .

Por lo que, se necesita obtener la frecuencia promedio de la distribución Wigner directamente de la señal, para obtener la frecuencia instantánea de la traza compleja, para ello en la ecuación anterior se obtiene la transformada inversa de Fourier

$$\langle f \rangle_t = \frac{1}{E(t)} F_f^+ \{ f W(t; f) \} (t; \tau = 0) \quad 3.17$$

donde se puede obtener el producto  $f W$ , a partir de la definición de la distribución de Wigner.

$$f W(t; f) = \frac{1}{j 2\pi} F_\tau^- \{ \partial_\tau R(t; \tau) \} \quad 3.18$$

y sustituyendo este resultado, se produce:

$$\langle f \rangle_t = \frac{1}{j 2\pi E(t)} \partial_\tau R(t; \tau) \Big|_{\tau=0} \quad 3.19$$

Con la definición de la función de autocorrelación instantánea, se obtiene la diferenciación, y el resultado es una expresión de la frecuencia promedio en términos de la señal  $u(t)$  dada por:

$$\langle f \rangle_t = \frac{j}{4\pi E(t)} [ u(t) \partial_t u^*(t) - u^*(t) \partial_t u(t) ] \quad 3.20$$

Usando la energía instantánea de la señal.  $E(t) = u(t) u^*(t)$  se puede simplificar este resultado y llegar a:

$$\langle f \rangle_t = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ \frac{\partial_t u(t)}{u(t)} \right\} = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \{ \partial_t \ln u(t) \} \quad 3.21$$

Donde  $u(t)$  es la señal analítica, por lo que tenemos

$$\langle f \rangle_t = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \{ \partial_t \ln [ a(t) \exp(j \phi(t)) ] \} = \frac{1}{2\pi} \partial_t \phi(t) = f^c(t) \quad 3.22$$

Donde  $\phi(t)$  es la fase instantánea y  $f^c(t)$  es la frecuencia instantánea de la señal analítica, por lo que se obtuvo la frecuencia instantánea de una señal, como una función de tiempo de la distribución de Wigner de la señal.



De manera general, una representación tiempo-frecuencia  $P(t; f)$ , es relacionada a su función característica por una transformación de Fourier con respecto a las variables de correlación  $\nu$  y  $\tau$ , en el caso de la distribución de Wigner, es la función de ambigüedad dada por:

$$A(\nu; \tau) = \iint \exp(-j2\pi(\nu t - f\tau)) W(t, f) dt df \quad 3.23$$

Si se aplica un filtro a la función de ambigüedad, obtenemos una nueva representación tiempo-frecuencia donde la función característica es una función de ambigüedad pesada, en una representación tiempo-frecuencia de clase general, se necesita retener la propiedad en la cual, al integrar la distribución de Wigner sobre la frecuencia se produce la energía instantánea de la señal en un tiempo marginal.

Para ello se requiere que

$$\int_{f \in \mathbb{R}} P(t; f) df = |u(t)|^2 \quad 3.24$$

Y esto solo es posible si:

$$\Psi(\nu; 0) = 1 \quad \text{para } \nu \in \mathbb{R}$$

También se requiere conservar la propiedad de frecuencia marginal

$$\int_{t \in \mathbb{R}} W(t; f) dt = |u(f)|^2 \quad 3.25$$

Lo que conduce a la condición:

$$\Psi(0; \tau) = 1 \quad \text{para } \tau \in \mathbb{R}$$

Por lo que, en una representación tiempo-frecuencia  $P(t; f)$ , la frecuencia media o frecuencia instantánea central como una función de tiempo está dada por:

$$f^m(t) = \frac{\int_{f \in \mathbb{R}} f W(t; f) df}{\int_{f \in \mathbb{R}} W(t; f) df} = f_c(t) \quad 3.26$$

Que es el primer momento a lo largo de la abscisa de frecuencia, en una representación tiempo-frecuencia y es solo una frecuencia promedio.

En la teoría de la probabilidad estos momentos son una medida para caracterizar la distribución y en una señal son medidas de sus propiedades espectrales (Barnes, 1993).

### **ATRIBUTOS DE TRAZA COMPLEJA EN LA TRANSFORMADA DE WIGNER-VILLE.**

La definición del atributo de frecuencia instantánea es aplicable a las propiedades espectrales de cualquier espectro tiempo-frecuencia, los términos cruzados de la distribución Wigner son fuertemente oscilantes, resultan de su naturaleza cuadrática. La

extracción de atributos es menos conveniente por el esfuerzo computacional que se requiere para adaptar la función kernel en cada muestreo de tiempo.

Además, desafortunadamente esta estimación es altamente susceptible a ruido, sin embargo la frecuencia instantánea solo puede ser estimada desde la representación tiempo frecuencia, en donde para la distribución Wigner, la frecuencia instantánea de la traza compleja y la frecuencia media son equivalentes.

En la extracción de atributos, es preferible usar un kernel tiempo-frecuencia para calcular el promedio frecuencial, donde se conserven las propiedades de la frecuencia instantánea de la traza compleja y su tendencia a ser negativa y su sensibilidad al ruido pueden ser evitados.

La distribución de Wigner de una señal analítica obtenida a partir de la señal real, se acostumbra llamar la Transformada de Wigner-Ville, esta distribución cumple con la propiedad de frecuencia instantánea como vimos en el capítulo II, recordando que esta distribución los términos cruzados se sitúan a medio camino entre dos contribuciones diferentes de la señal en tiempo y/o en frecuencia.

La ecuación de la representación tiempo-frecuencia de esta distribución está dada por:

$$TFR ( t, \omega ) = \frac{1}{2\pi} \iint AF ( \tau, \nu ) \Phi ( \tau, \nu ) e^{j ( (1\nu - \omega)\tau )} d\tau d\nu \quad 3.27$$

Y el kernel para la distribución Wigner-Ville es:

$$\Phi(\tau, \nu) = 1$$

El análisis tiempo-frecuencia, es por sí mismo, un método efectivo para estudiar el contenido espectral de la contribución de las reflexiones del subsuelo en la información de la señal. Una imagen legible del contenido espectral de la información, puede ser obtenida por usar una representación tiempo-frecuencia que es adaptada a la señal estudiada, en este caso la de GPR.

La teoría de las representaciones tiempo-frecuencia proveen una estructura para la extracción de atributos de traza compleja, en esta estructura, los atributos son parámetros que describen la forma de un espectro local como un promedio tanto de frecuencia como de banda ancha y usando estas representaciones, la proporción de ruido de la señal con la extracción del atributo puede ser mejorada, sin una resolución significativamente menor de tiempo.

Un mayor refinamiento del método es adaptar la forma del kernel como una función de tiempo, por lo que se utiliza la transformada de Wigner-Ville cuyo Kernel es 1, y a partir del espectro tiempo-frecuencia obtenido con esta transformación de la señal de GPR, se extrae el atributo de frecuencia instantánea.

Recordando que, la transformada de Wigner-Ville satisface un largo número de propiedades deseables y en particular siempre valores reales.

El desarrollo solo considera la parte real del espectro de poder de la traza de radar, esto es justificado por que la traza de radar es puramente real, obviando la necesidad de considerar valores absolutos.

Para ello es necesario utiliza la señal analítica, donde la parte negativa de su espectro de potencia es cero y puede ser discontinuo.

Las mediciones instantáneas, dependen del espectro de potencia particularmente planteado, su forma exacta no necesita ser especificada si considero dos condiciones. La primera, es que la frecuencia central instantánea es frecuencia instantánea en sí misma Y la segunda, es que la banda ancha espectral es siempre real y positiva, esto nos permite expresar a la banda ancha como una medida de la velocidad del cambio relativo de amplitud, es decir, a largas velocidades de cambio en amplitud relativa asociadas con señales limitadas, resultan largas bandas anchas, mientras cambios de velocidades pequeñas en amplitud relativa son asociadas a señales anchas que resultan en cortas bandas anchas.

Estos conceptos pueden ser utilizados como atributo de la traza de GPR compleja y complementan el análisis general de la información.

## CONCLUSIONES.

Se investigaron los atributos espectrales más utilizados para la estimación de propiedades de los datos de una señal. Dentro de los estudios de las representaciones tiempo frecuencia, que proveen una estructura adecuada para la extracción de atributos de traza compleja, que describen la forma de un espectro local, como un promedio tanto de frecuencia como de banda ancha, se logra que la proporción de ruido de la señal al extraer el atributo deseado, pueda ser mejorada sin que la resolución sea significativamente menor en el tiempo.

Se escogió el atributo de frecuencia instantánea como un atributo que puede ayudar a interpretar y seguir eventos débiles en la señal de radar. Basado en la amplitud de la traza compleja, da una medida específica de las características geométricas y/o estadísticas de la información contenida en la señal, es un atributo de frecuencia y está representado en tiempo, lo que nos permite una mayor ubicación de los reflectores en la traza de radar, esto se logra sin la necesidad de conversiones que puedan arrastrar errores, lo que nos permite una mayor exactitud en los resultados.

Se derivan las formulas para obtener los atributos de traza compleja en la señal de radar, usando las definiciones de atributos espectrales instantáneos desde el plano tiempo-frecuencia de Wigner-Ville y se presenta el atributo de frecuencia instantánea para enfatizar sus reglas como una medición de sus propiedades promedio espectrales variantes en el tiempo.

Se adapta la función de tiempo-frecuencia de Wigner-Ville cuyo kernel es 1, para obtener el espectro tiempo-frecuencia y a partir de este se obtiene el atributo de frecuencia instantánea en la traza compleja de la distribución.

Este atributo permite establecer información de la frecuencia característica de los eventos, mediante una reflexión individual que fue producida por un solo efecto, mediante la caracterización de la reflexión compuesta se produce un modelo de frecuencia que cambia su carácter, de la misma manera que cambian los efectos en la señal. También, se pueden establecer los cambios en la variación espectral en el tiempo.

El espectro de potencia particularmente planteado por la distribución de Wigner-Ville, considera que la frecuencia central instantánea es frecuencia instantánea por sí misma y que la banda ancha espectral es siempre real y positiva, lo que permite expresar la banda ancha como una medida de la velocidad de cambio relativo de amplitud.

## CAPITULO IV

### ANÁLISIS DE LA FRECUENCIA INSTANTÁNEA DE LA SEÑAL DE GPR MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE WIGNER-VILLE.

#### OBJETIVO.

Presentar una metodología para analizar la información de GPR y poder realzar eventos que no están claramente definidos, para localizar las anomalías en la señal e interpretar de manera más adecuada las características del subsuelo.

Implementar el algoritmo de proceso para la obtención del radagrama sintético, de la transformación en tiempo-frecuencia de Wigner-Ville y el atributo en la traza compleja de frecuencia instantánea.

#### INTRODUCCIÓN.

La señal generada por el GPR generalmente contiene altos niveles de ruido, eventos que no están claramente definidos, energía electromagnética absorbida y anomalías encubiertas en el perfil. La interpretación por medio de la técnica tradicional se realiza mediante la Transformada de Fourier, con la que se obtiene el espectro de frecuencias, que define las frecuencias que se encuentran en un periodo de tiempo y para las cuales podemos diseñar filtros y visualizar algunas de las frecuencias de interés, sin que conozcamos exactamente el momento en el cual cada una de las frecuencias ocurre.

Todo esto nos lleva a analizar con mayor detenimiento la información proporcionada por el GPR para poder interpretarla de una manera más adecuada, lo que se hace necesario llevar un proceso que permita mejorar la técnica de interpretación y procesamiento de la señal.

Para modelar datos de GPR se necesita conocer la forma de propagación de la onda electromagnética a través del medio y conocer los parámetros de ese medio, para hacerlo en este caso utilizaremos el método de radagramas sintéticos.

La solución al problema del método de radagramas sintéticos, permite establecer primero un modelo directo, en el que se plantea el problema y posteriormente un modelo inverso, por medio del cual se establece la estimación de los parámetros necesarios.

El modelo directo consiste en obtener el campo eléctrico en la superficie de la Tierra, se hace a través de la teoría electromagnética, asociando un modelo para un medio estratificado, al que se acopla un pulso eléctrico, en este caso un pulso de Ricker y se tiene obtiene la traza del radagrama sintético, posteriormente se calibra el modelo.

El modelo estratificado es homogéneo e isótropo en una dimensión, la solución a este tipo de modelo fue encontrada por Chew (1970), utilizando las ecuaciones de Maxwell, las relaciones constitutivas y la relación empírica de la ley de Ohm, lo cual se describe

detalladamente en el capítulo I. Se establece entonces, la ecuación de onda y se resuelve considerando la propagación de la onda electromagnética mediante una polarización transversal de eléctrica y el concepto de onda plana, en un medio dieléctrico disipativo, se fijan las condiciones de frontera siguientes:

- ✦ Separación de medios en una superficie lisa
- ✦ Los parámetros de los medios son constantes
- ✦ La componente normal del campo magnético es continua
- ✦ La componente del flujo varía discontinuamente
- ✦ En la componente tangencial del campo la corriente eléctrica superficial es cero

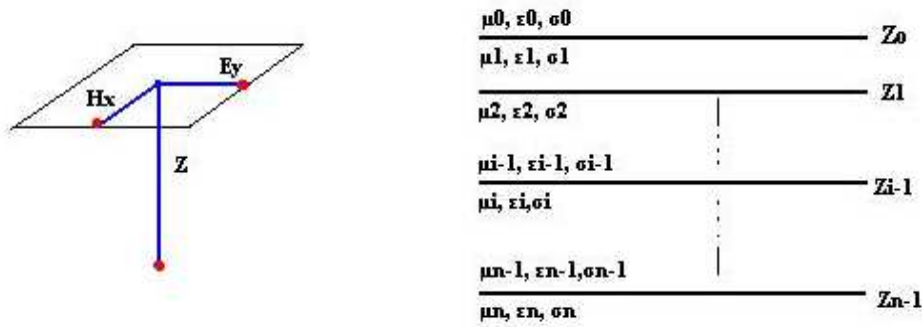
Con las cuales se llega a los llamados coeficientes de transmisión y reflexión de Fresnel, estos coeficientes se generalizan para obtener el coeficiente generalizado para  $n$ -capas o estratos del subsuelo, con lo que se tiene la fórmula de recurrencia con la que se obtiene el campo eléctrico en la superficie del terreno.

Al campo eléctrico obtenido en el dominio de las frecuencias, se le acopla un pulso eléctrico, en este caso se utilizó el pulso de Ricker, esto se hace mediante el Teorema de Convolución y se pasa al dominio del tiempo mediante la Transformada de Fourier.

### **PRUEBA DEL MODELO DIRECTO.**

Se implementó el algoritmo del proceso para la obtención de la traza del radagrama sintético y se prueba el modelo para ver su eficacia, utilizando como herramienta de programación las librerías de MATLAB, que tiene incluida una colección de archivos desarrollados para el análisis de señales no estacionarias usando transformaciones en tiempo-frecuencia, (Auger, *et. al.* 1996).

Para calibrar el modelo directo, se adopta uno similar al empleado por Annan y Chua (1992) y Díaz (2003), mostrado en la figura (4.1), considerando las condiciones de frontera para un modelo en un medio estratificado, isótropo y homogéneo.



**Figura 4.1.-** Modelo para un medio estratificado, isotrópico y homogéneo en 1-dimensión similar al de Annan y Chua, (1992); Díaz (2003). En el cual se definen sus características y las condiciones de frontera.

El modelo consta de tres capas o estratos, una primera capa de roca caliza, una segunda capa que representa una caverna o cavidad definida por aire y una tercera capa de roca caliza.

### CARACTERÍSTICAS DEL SUBSUELO.

Se calcula la traza del radagrama sintético, usando las características de cada capa indicadas en la Tabla No. 1, como son tipo de material, profundidad, permeabilidad magnética, conductividad eléctrica y permitividad eléctrica, propiedades que varían entre capa y capa del subsuelo.

Tabla 1.- Características de las capas que forman el modelo de prueba de tres capas, caliza-aire-caliza.

CAPA	MATERIAL	PROFUNDIDAD (M)	PERMEABILIDAD MAGNÉTICA (H/M)	CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA (S/M)	PERMITIVIDAD ELÉCTRICA (F/M)
1	Caliza	0	$\mu_0$	0.002	$6\epsilon_0$
2	Aire	4	$\mu_0$	0	$\epsilon_0$
3	Caliza	6	$\mu_0$	0.002	$6\epsilon_0$

De acuerdo a los principios del método, la permeabilidad magnética se considera constante en cada una de las capas, siendo su valor el del espacio libre.

### DEFINICION DE PARÁMETROS.

Tomando los parámetros de la Tabla 1 y la formulación matemática mostrada en el capítulo I, permite denotar una serie de tiempo continua, especificada solo en tiempo discreto en el cual se define una ventana de muestreo de 200 ns y se toman 512 muestras por registro, para obtener el campo eléctrico en la superficie del terreno.

Usando el análisis de Fourier para estimar el espectro de potencia, es posible reproducir la señal original como una suma de senos y cosenos de diferente amplitud y fase, en el dominio de la frecuencia.

Para mejorar las características del radagrama en el dominio del tiempo, se consideró la frecuencia de Nyquist y se hizo variar la frecuencia central del sistema en 200, 100 y 40 MHz, aplicando en algunos casos un factor de desplazamiento de 10 ns para visualizar mejor las reflexiones.

Esto con la intención de ver como las características de la antena seleccionada, puede dar lugar a que rasgos importantes sean atenuados o perdido por completo. Los modelos que se describen a continuación.

### **MODELO UTILIZANDO UNA FRECUENCIA CENTRAL DE 200 MHz. EN EL SISTEMA.**

Para obtener la traza del radagrama sintético, se le asigna al modelo un valor de frecuencia central de 200 MHz, empleando la ecuación para calcular el campo eléctrico, desarrollada en el capítulo I y con la información del modelo representado en las características de la Tabla 1, obtenemos una serie de tiempo, a cual aplicamos el análisis de Fourier y desplegamos la componente real y la componente imaginaria del campo eléctrico en la superficie de la Tierra, en el dominio de la frecuencia, donde la frecuencia y la forma de los armónicos tienen una amplitud y fase, como se muestra en las gráficas de la Figura No. 4.2.

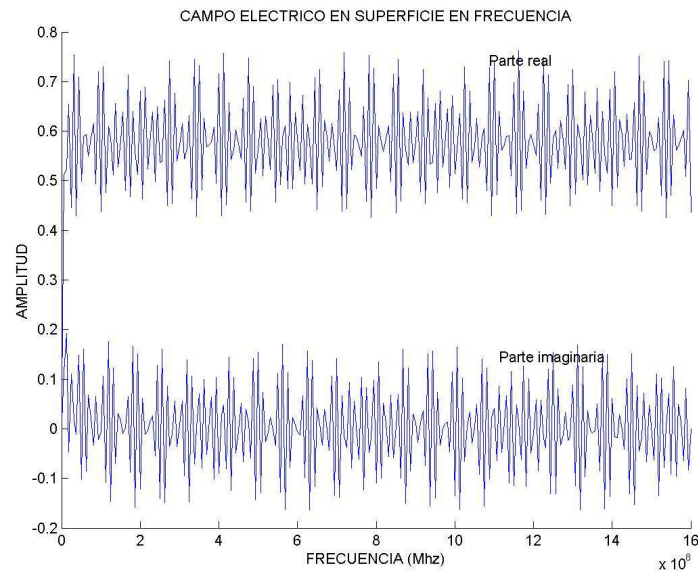


Figura 4.2.- Campo eléctrico obtenido en la superficie del terreno con una frecuencia central de 200 MHz, en el dominio de la frecuencia, en su parte real y su parte imaginaria.

Posteriormente se requiere acoplar un pulso a la señal del campo eléctrico obtenido, en nuestro caso se escogió el pulso de Ricker, resolviéndose su ecuación, descrita también en el capítulo I, con una frecuencia central de oscilación de 200 MHz que es representado en tiempo y frecuencia en la Figura No.4.3. En la cual se puede ver las características de frecuencia, amplitud y longitud de onda específicas para el pulso.

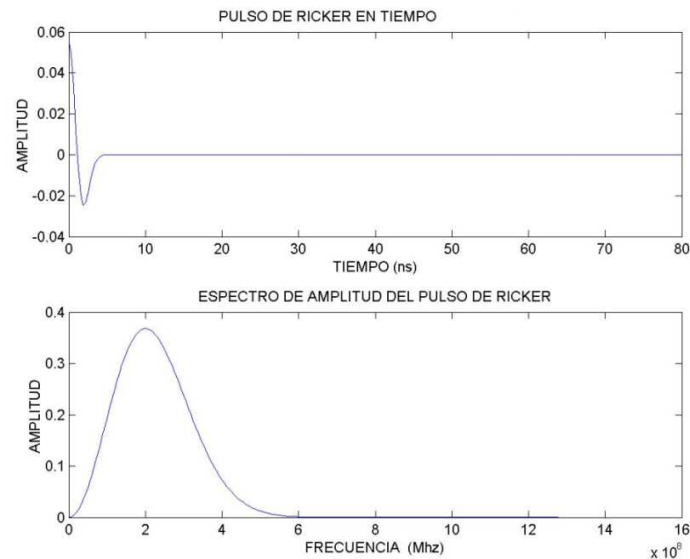


Figura 4.3.- Pulso de Ricker, representado en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, con una frecuencia central de 200 MHz.



Mediante el teorema de la convolución en el dominio de las frecuencias, se acopla la señal obtenida del pulso de Ricker con la señal del campo eléctrico en la superficie de la Tierra. En la Figura No.4.4 se ve la traza del radagrama sintético en el dominio de la frecuencia, resultado de convolucionar la señal del campo eléctrico con la ondícula de Ricker. Así mismo, se aprecia la parte real e imaginaria de la traza del radagrama, donde se puede ver que la parte más alta de la envolvente muestra la frecuencia central.

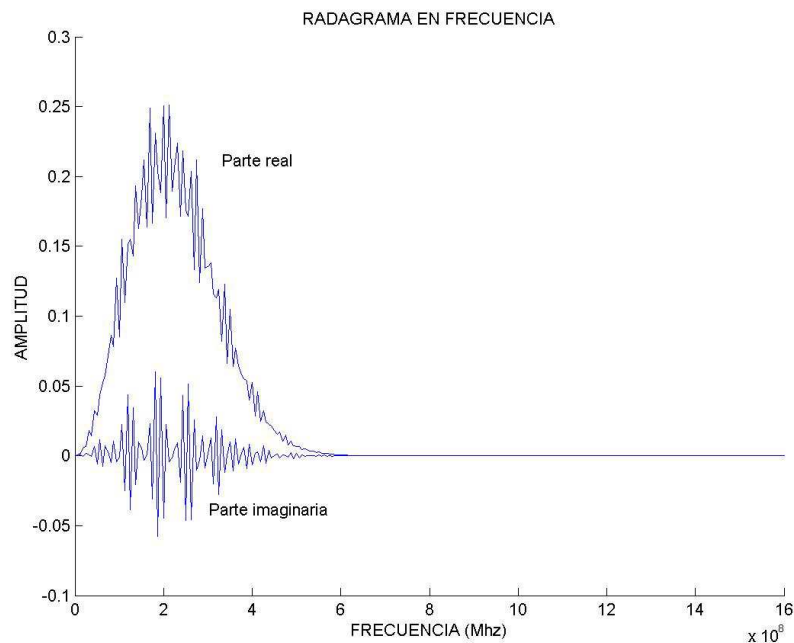


Figura 4.4.- Parte real y parte imaginaria de la traza del radagrama sintético en el dominio de la frecuencia, en donde la frecuencia central está definida en la parte más alta de las dos envolventes y es de 200 MHz.

Los impulsos que representan las zonas de contraste o las interfaces, de las propiedades eléctricas propuestas por el modelo de prueba, son posibles de observar en la transformada inversa de Fourier del campo eléctrico, regresando al dominio del tiempo. La respuesta del medio estratificado se puede apreciar en la señal de la traza del radagrama sintético, en el dominio del tiempo, el cual también se obtiene mediante la transformada inversa de Fourier.

Ambos conceptos son mostrados en la Figura No.4.5, para ver la amplitud relativa de cada una de las reflexiones en el radagrama y confirmar que el fenómeno físico es reproducido adecuadamente por el proceso, se verifica que la amplitud de la ondícula disminuya conforme ésta atraviese el medio estratificado.

En la gráfica superior de la Figura No.4.5 se observan los pulsos, estos se dan, cuando se producen los cambios en las propiedades del subsuelo y se ven reflejados en el campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra, en el dominio del tiempo, aproximadamente a 65 y 78 ns. respectivamente. En la gráfica inferior de la misma figura, se ve la traza del radagrama sintético, en donde observamos el resultado de la convolución entre el campo

eléctrico y el pulso de Ricker, y vemos los pulsos con la forma obtenida a partir de esta operación, también en el dominio del tiempo.

Los pulsos observados corresponden a la primera y segunda capa, propuesta en el modelo estratificado utilizando la frecuencia de 200 MHz. Además vemos, que el procedimiento desarrollado no produce múltiples, ya que la traza se ve limpia, este comportamiento se debe, a que no se utilizó la solución homogénea de la función de Green, en la resolución de la ecuación de onda, ver capítulo I.

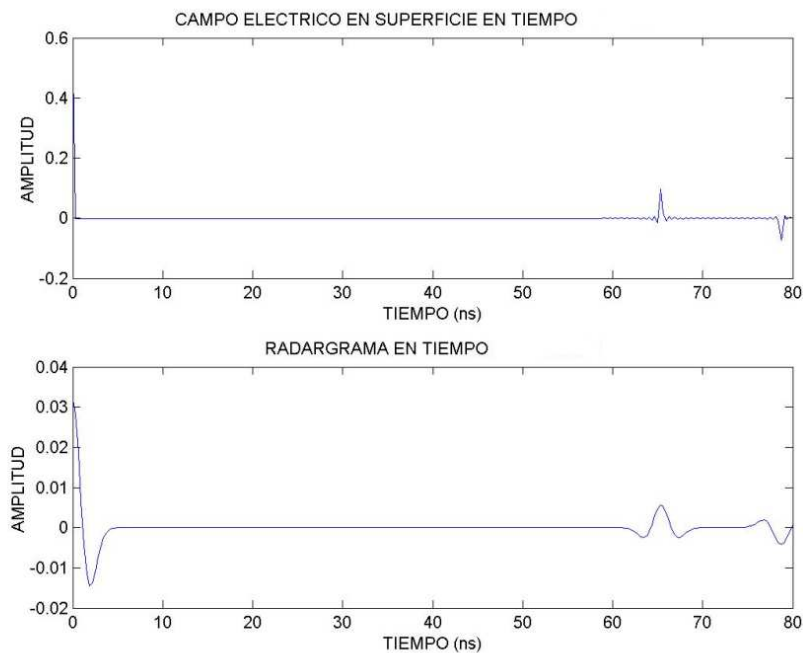


Figura 4.5.- En la grafica superior se ven los pulsos de la primera y segunda capa del subsuelo, que aparecen aproximadamente en 65 y 78 ns respectivamente en el campo eléctrico, obtenido en la superficie de la Tierra en el dominio del tiempo. En la grafica inferior se tiene la traza del radagrama sintético, en donde observamos la forma de los pulsos debidos al proceso de la convolución, entre el campo eléctrico y el pulso de Ricker, en el dominio del tiempo.

En el espectro de potencia de Fourier se puede ver bien definida la frecuencia central, en el pico más alto de la envolvente, que es de 200 MHz. Situación que se aprecia en la Figura No.4.6

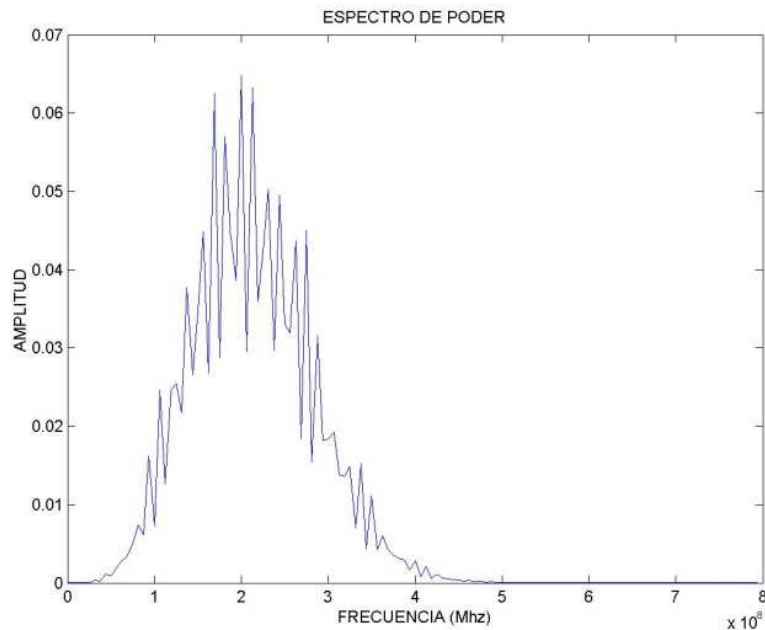


Figura4.6.- Espectro de potencia de Fourier de la traza del radagrama, con una frecuencia central en la parte más alta de la envolvente de 200 MHz.

### **MODELO UTILIZANDO UNA FRECUENCIA CENTRAL DE 100 MHz. EN EL SISTEMA.**

Los resultados obtenidos con una frecuencia central de 100 MHz. se muestran a continuación.

El campo eléctrico es resuelto asignándole ahora una frecuencia central de 100 MHz, la serie de tiempo es representada mediante el análisis de Fourier, desplegando la parte real y la parte imaginaria del campo.

Si comparamos la Figura No.4.7 con la Figura No.4.2, podemos apreciar que la frecuencia y la forma de los armónicos en la señal del campo eléctrico cambian. La longitud de onda es mayor en el armónico.

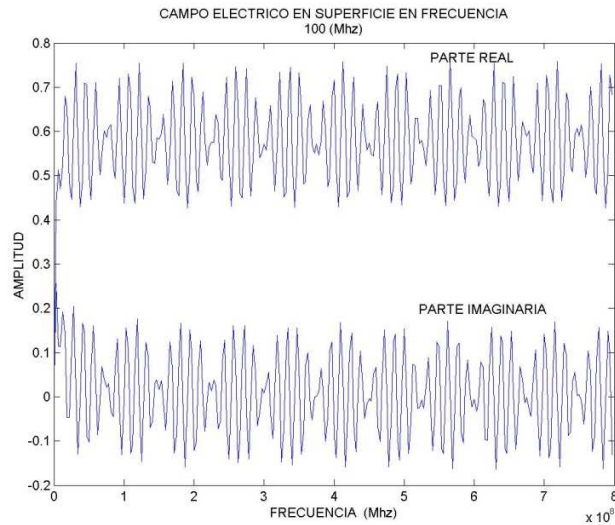


Figura 4.7.- Campo eléctrico obtenido en superficie de la Tierra, con 100 MHz de frecuencia central. Se muestra su componente real en la parte superior y su componente imaginaria en la parte inferior, en el dominio de la frecuencia

El pulso de de Ricker, es calculado para una frecuencia central de 100 MHz, las características de frecuencia, amplitud y longitud de onda específicas para el pulso, se muestran en el dominio del tiempo y de la frecuencia, en la Figura No.4.8.

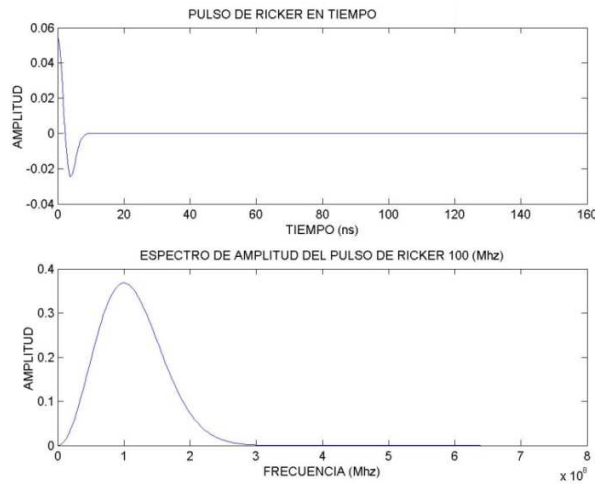


Figura 4.8.- Pulso de Ricker en el dominio del tiempo y su espectro de amplitud con 100 MHz de frecuencia central.

La traza del radagrama sintético en el dominio de la frecuencia como resultado de convolucionar el campo eléctrico con la ondícula de Ricker, se aprecia en la Figura No.4.9 en donde se ven sus componentes real e imaginaria.

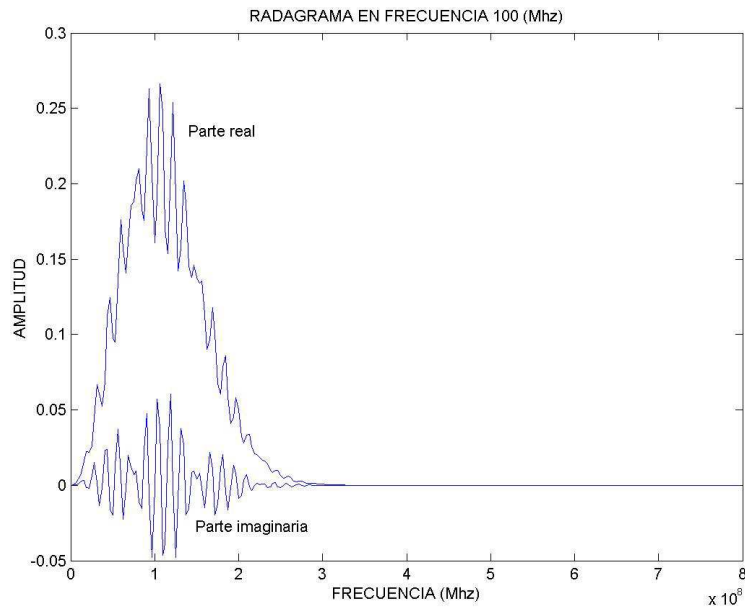


Figura 4.9.- Componentes real e imaginaria de la traza del radagrama sintético en el dominio, obtenido con una frecuencia central de 100 MHz, la cual se observa en la parte más alta de la envolvente.

Si comparamos la Figura No.4.4 con la Figura No.4.9, el valor de la longitud de onda en este caso aumenta en los armónicos de la señal.

En la transformada inversa de Fourier del campo eléctrico obtenido, se ven los impulsos que representan las zonas de contraste de las propiedades electromagnéticas propuestas por el modelo, este concepto es mostrado en la grafica superior de la Figura No.4.10.

En la grafica inferior de la Figura No.4.10, la transformada inversa de Fourier del radagrama sintético, en el dominio de la frecuencia, muestra la respuesta del medio estratificado, lo cual se puede apreciar en la señal de la traza sintética del radagrama, en el dominio del tiempo. Si se compara la Figura No.4.10 con la Figura No.4.5, los valores de la longitud de la onda aumentan así como la relación de la longitud de onda entre el espesor entre capas, por lo que todavía es posible diferenciar completamente la forma de los reflejos entre la primera capa y la segunda capa.

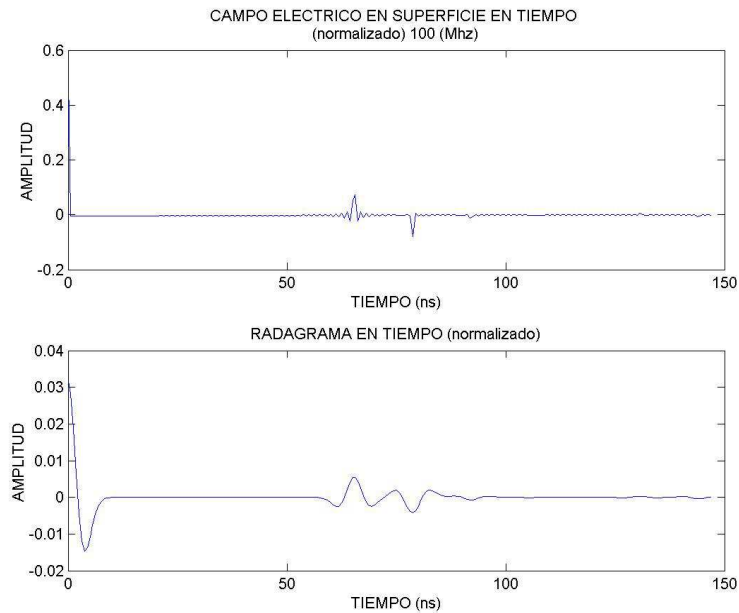


Figura 4.10.- Campo eléctrico en la superficie de la Tierra y la traza del radagrama sintético ambos conceptos en el dominio del tiempo. Para el modelo con una frecuencia central de 100 MHz. La relación entre la longitud de la onda y el espesor de la capa, todavía permite diferenciar completamente los reflejos entre la primera capa y la segunda capa del medio estratificado.

### **MODELO CON UNA FRECUENCIA CENTRAL DE 40 MHz. EN EL SISTEMA.**

Ahora se muestra el modelo con una frecuencia central de 40 MHz.

La serie de tiempo para el campo eléctrico es calculada con la ecuación del campo eléctrico al asignar el valor de la frecuencia central de 40 MHz., al modelo, y se representan sus componentes real e imaginaria en la Figura No. 4.11 en el dominio de la frecuencia obtenidas mediante el análisis de Fourier.

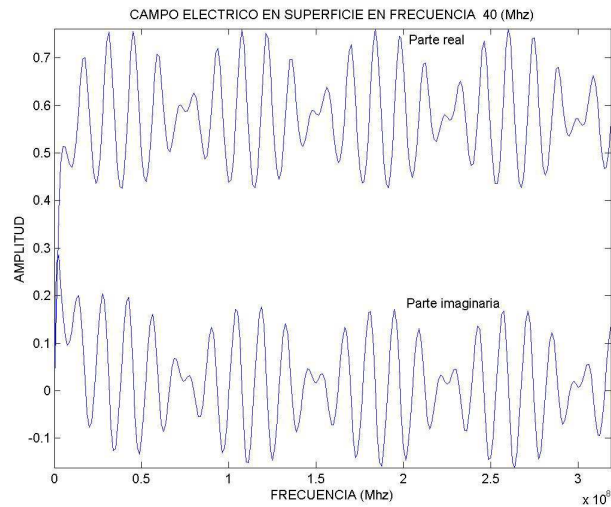


Figura 4.11.- Componentes real y imaginaria del campo eléctrico obtenido en la superficie del Tierra, en el dominio de la frecuencia, con una frecuencia central asignada de 40 MHz., se aprecia que la frecuencia y forma de los armónicos son mucho más amplios.

Se observa en la Figura No. 4.11 que la frecuencia y la forma de los armónicos en la señal del campo eléctrico nuevamente cambian al comparar las Figuras No. 4.11, 4.7 y 4.2, donde se puede apreciar que la longitud de onda en los armónicos es mayor.

Las características de frecuencia, amplitud y longitud de onda específicas para el pulso de Ricker son calculadas nuevamente, con una frecuencia central de 40 MHz., se muestran en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia en la Figura No.4.12

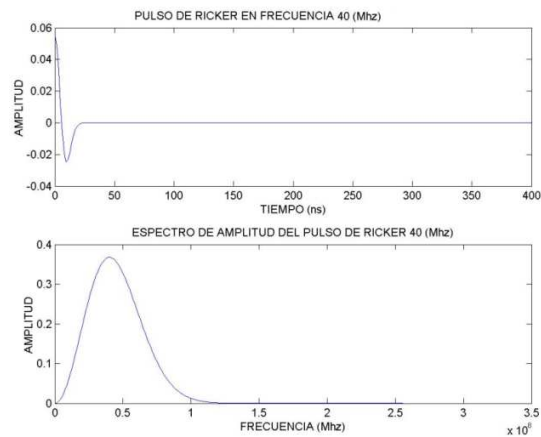


Figura 4.12.- Pulso de Ricker en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia con una frecuencia central de 40 MHz.

Nuevamente obtenemos la traza de radagrama sintético como resultado de convolucionar el campo eléctrico con la ondícula de Ricker, ahora con una frecuencia de 40 MHz, en la Figura No. 4.13 se muestra la componente real y la componente imaginaria, en el dominio de la frecuencia.

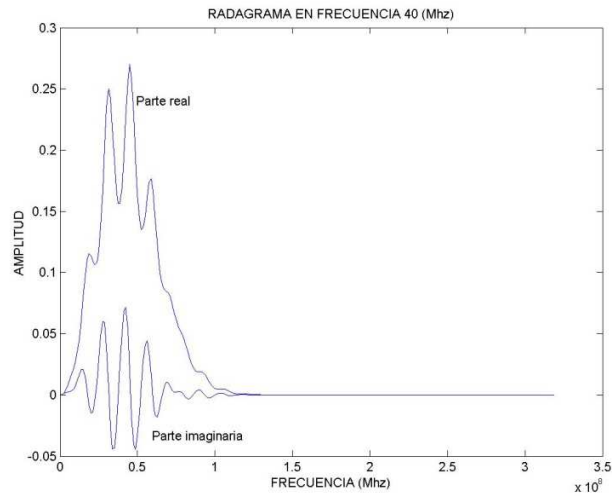


Figura 4.13.-Las componentes de las trazas del radagrama sintético en el dominio de la frecuencia, con una frecuencia de 40 MHz., en la parte más alta de la envolvente.

En la Figura No.4.13, notamos que el valor de la longitud de onda en este caso aumenta en los armónicos de la señal, al compararlo con los resultados de los modelos a los cuales se asignaron valores de 200 y 100 MHz., mostrados en las Figuras números 4. 4 y 4.9

Al obtener la transformada inversa de Fourier, tanto del campo eléctrico obtenido en superficie de la Tierra, como de la traza de radagrama sintético resultado de la convolución entre el pulso de Ricker y el campo eléctrico, se obtiene la serie de tiempo del campo eléctrico y la traza de radagrama sintético ambos en el dominio del tiempo. Esto se ve en la Figura No. 4.14.

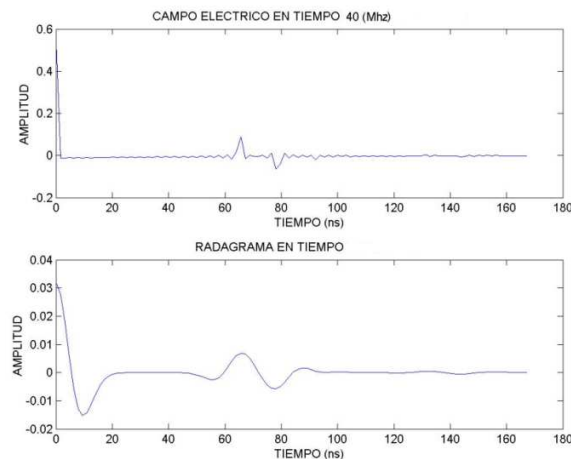


Figura 4.14.- Campo eléctrico obtenido en el dominio del tiempo y la traza del radagrama sintético con una frecuencia central de 40 MHz., la forma de la señal es diferente, el valor de la longitud de onda aumenta.



Al comparar las Figuras números 4.5 y 4.10 con la Figura No. 4.14, se puede percatar que la forma de la señal ha cambiado, el valor de la longitud de onda aumenta así como la relación entre la longitud de onda y el espesor de la capa, en el radagrama sintético calculado con una frecuencia central de 40 MHz, no se diferencia entre la primera y segunda capa, la forma de la onda se mezcla una con otra formando un solo reflejo.

El fin de visualizar este fenómeno, el cual nos permite diferenciar la forma en que los reflejos se muestran en la señal, es porque la longitud de la onda afecta, la capacidad del GPR para identificar los estratos en un medio. Razón por la cual es necesario conocer la forma que tiene de entrada el sistema, o pulso que envía el GPR, el cual se simula con el pulso de Ricker, para dar la forma a la señal. Las diferentes antenas del GPR, nos permiten visualizar que cuando ellas transmiten altas frecuencias, se obtiene una mejor resolución de capas, pero baja penetración en profundidad y las bajas frecuencias en la antena permiten más penetración pero poca resolución de los estratos.

Conociendo estos modelos en los cuales se ve la forma del pulso producida por el modelo en el sistema de GPR, permite analizar de mejor manera las características con las cuales debemos utilizar las antenas, para obtener mejores resultados en un estudio real.

Por lo que es muy importante, hacer la selección de la antena del radar según los requerimientos del objetivo de estudio que se realice, se debe hacer con cuidado para no perder rasgos o características por completo, o bien, que sean atenuadas de tal forma que no se distingan en el estudio.

#### MODELO INTRODUCIENDO UN DESPLAZAMIENTO DE 15 (ns).

El mismo modelo estratificado de la sección anterior es utilizado para obtener una traza de radagrama pero en él se introduce un desplazamiento de 15 ns, esto se consigue multiplicando en frecuencia el pulso de Ricker por un factor de  $e^{-i\omega f_d}$  donde  $f_d$  es la frecuencia de desplazamiento, la ondícula del pulso de Ricker es mostrado en la Figura No. 4.15 y se representa con el fin de ver en el dominio del tiempo, la ondícula del pulso de Ricker completa:

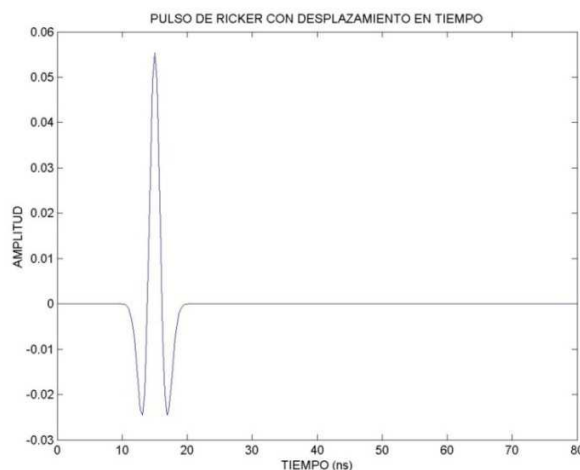


Figura 4.15.- Pulso de Ricker con desplazamiento de 15 (ns) en el dominio del tiempo.

En la Figura No.4.16, es mostrada la traza de radagrama sintético en el dominio de la frecuencia con el mismo desplazamiento de 15 ns.

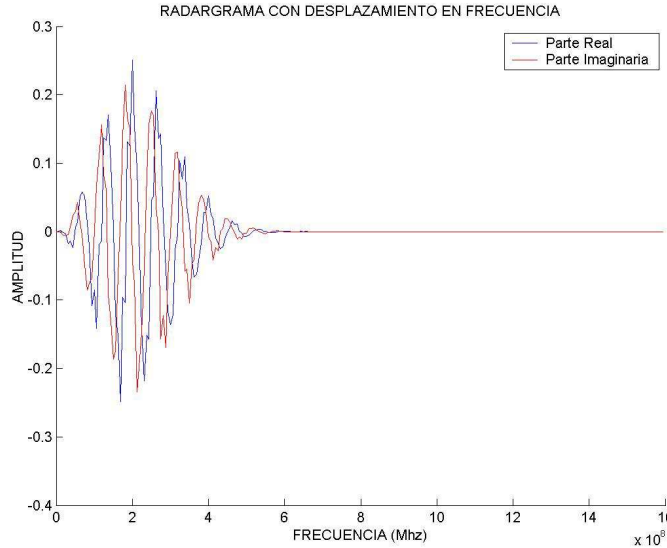


Figura 4.16.- Traza del radagrama sintético en el dominio de la frecuencia con un desplazamiento de 15 ns.

A continuación se muestra en la Figura No. 4.17, la traza del radagrama sintético en el dominio del tiempo con desplazamiento de 15 ns, el cual varía en apariencia pues ahora es posible ver completamente el pulso que representa la incidencia de la energía en la superficie del Terreno, las posiciones de las reflexiones y sus amplitudes son consistentes en relación al modelo sin desplazar.

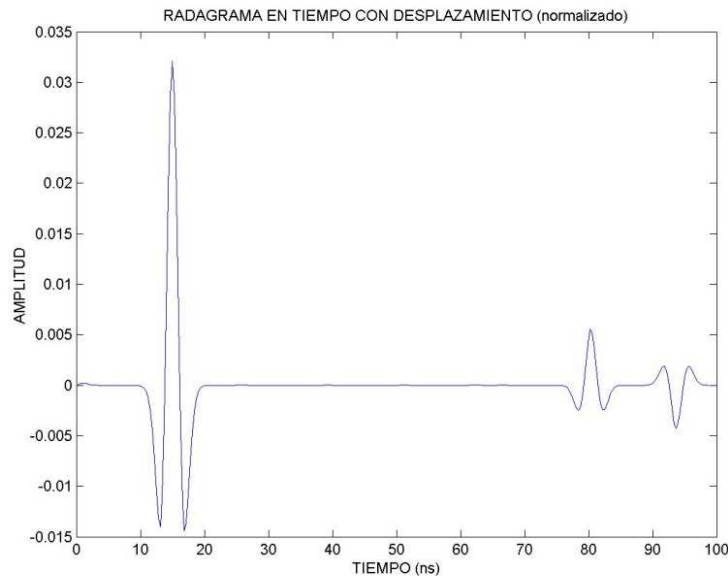


Figura 4. 17.- Traza del radagrama sintético con desplazamiento de 15 (ns).

## MODELO CON CONTRASTES DE PERMITIVIDAD ELÉCTRICA.

Según Davis y Annan (1989), la permitividad eléctrica es suficiente para caracterizar eléctricamente a los materiales en altas frecuencias, esto es deducido dado que las propiedades de polarización dominan a las propiedades conductivas para la mayoría de los materiales geológicos. Sin embargo, en algunas ocasiones las secciones típicas de radar muestran reflejos múltiples de los reflejos relacionados únicamente a permitividad eléctrica y existe la posibilidad como se discutió en el Capítulo I, que alguna de estas reflexiones se relacione con la conductividad eléctrica.

Por esta razón, se analizó el comportamiento del método ante variaciones de permitividad. El escenario consiste en dos modelos M1 y M2, como en el modelo anterior las características son mostradas en la Tabla 2:

Las características de los modelos son: el tipo de material, la profundidad de las capas, la permeabilidad magnética, la conductividad eléctrica y la permitividad eléctrica de cada uno de los modelos, M1 y M2, propiedades que varían entre capa y capa del subsuelo.

Tabla 2.- Modelos M1 y M2 con diferente contraste de permitividad, en M1 cambia la permitividad de mayor a menor y en M2 cambia de menor a mayor en las capas.

CAPA	MATERIAL	PROFUNDIDAD (M)	PERMEABILIDAD MAGNÉTICA (H/M)	CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA (S/M)	PERMITIVIDAD ELÉCTRICA (F/M) - M1	PERMITIVIDAD ELÉCTRICA (F/M) - M2
1	Caliza	0	$\mu_0$	0.002	$10\epsilon_0$	$5\epsilon_0$
2	Aire	4	$\mu_0$	0	$5E_0$	$10E_0$
3	Caliza	6	$\mu_0$	0.002	$10\epsilon_0$	$5\epsilon_0$

Los resultados de las trazas de los radagramas sintéticos se muestran en la Figura No. 4.18, en gráfica superior se compara la forma de la reflexión, se ve que la reflexión se invierte al pasar de una capa de mayor permitividad a otra de menor permitividad, conforme al modelo M1, lo anterior es claro si tenemos en cuenta la expresión para el cálculo del coeficiente de reflexión (R), donde R es negativo si  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , esto se puede ver en el capítulo I, de aquí la inversión de la forma del pulso. Además la amplitud de reflejo en la segunda capa disminuye.

Se puede ver también en la Figura No.4.18, en la gráfica inferior que cuando la reflexión pasa de una capa de menor permitividad a otra de mayor permitividad, de acuerdo a las características del modelo M2 donde la aparición del reflejo de la primera capa cambia de forma y al pasar al segundo reflejo regresa a la forma normal del reflejo y este reflejo toma más tiempo en aparecer, como se muestra al comparar las gráficas superior e inferior de la figura, esto es debido a que la energía adquiere mayor velocidad en presencia de materiales con menor permitividad dieléctrica.

Esto permite visualizar en una traza real, que la aparición del reflejo en el radagrama puede variar en tiempo o el reflejo puede estar invertido, esto es dependiendo del contraste de permitividad que se tiene en el medio.

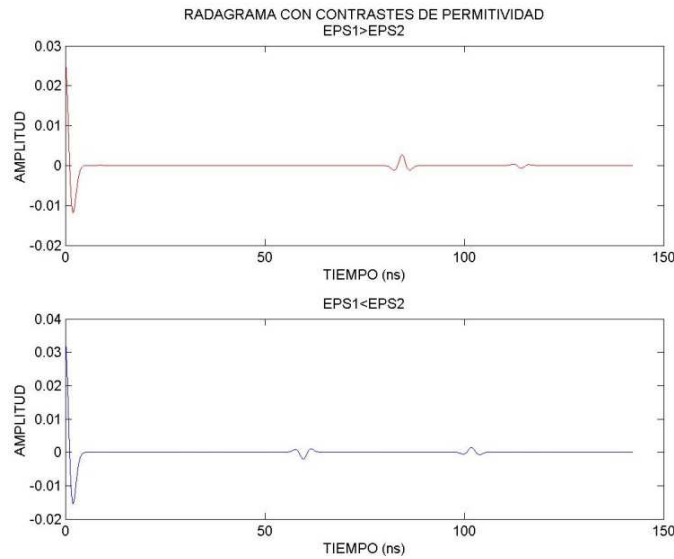


Figura 4.18.- Trazas de los radagramas sintéticos con contrastes de permitividad, en ellas se distingue como, la reflexión se invierte al pasar de una capa de mayor permitividad a otra de menor permitividad, también la aparición del reflejo toma más tiempo en el modelo, cuando la reflexión pasa de una capa de menor permitividad a otra de mayor permitividad, como se muestra al comparar las gráficas superior e inferior.

### MODELO CON CONTRASTE DE RESISTIVIDAD.

A continuación veremos los resultados del método ante variaciones de resistividad. Para esto se empleo otra vez dos modelos, M1 y M2, en los que cambiamos la entrada de conductividad eléctrica la cual es el inverso de la resistividad, mostrados en la Tabla 3:

Tabla 3.- Modelos M1 y M2 con contraste de resistividad. El modelo M1 cambia la conductividad eléctrica de menor a mayor y en el modelo cambia la conductividad de mayor a menor en las capas.

CAPA	MATERIAL	PROFUNDIDAD (M)	PERMEABILIDAD MAGNÉTICA (H/M)	CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA (S/M)-M1	CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA (S/M)-M2	PERMITIVIDAD ELÉCTRICA (F/M) -
1	Caliza	0	$\mu_0$	0.0001	0.002	$6\epsilon_0$
2	Aire	2	$\mu_0$	0.002	0.0001	$E_0$
3	Caliza	4	$\mu_0$	0.0001	0.002	$6\epsilon_0$

Los radagramas resultantes son mostrados en la Figura No. 4.19, se puede visualizar los reflejos de los modelos anteriores, comparando la amplitud de las reflexiones al pasar de un medio de menor conductividad a otro de mayor conductividad (M1) y cuando se pasa de uno de mayor conductividad a otro de menor conductividad (M2). Este comportamiento es reproducido por el método adecuadamente, recordando que a mayor resistividad corresponde un factor de atenuación menor y consecuentemente una menor amplitud de onda.

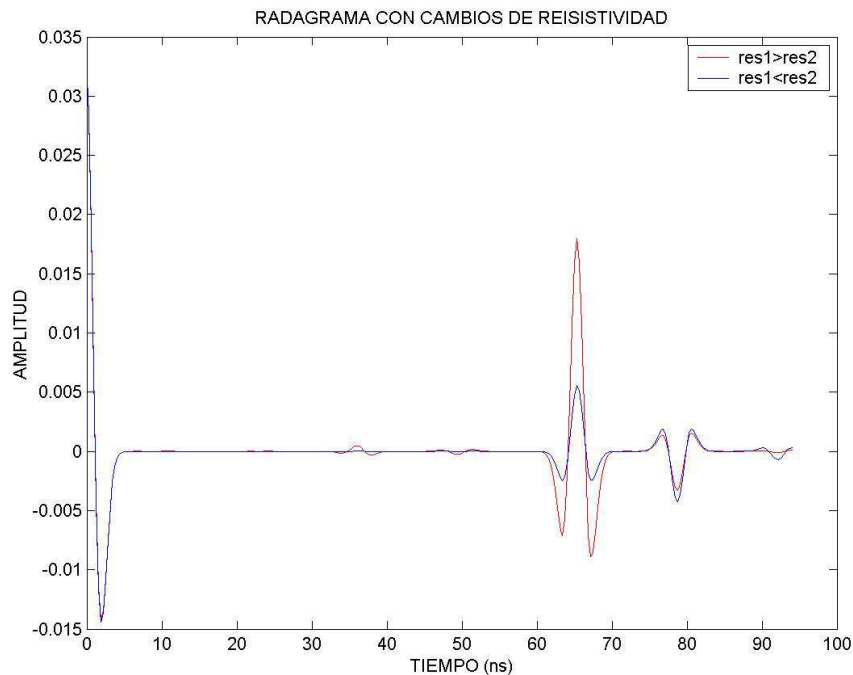


Figura 4.19.- Trazas de los Radagramas sintéticos de los modelos M1 y M2, con cambios de resistividad, donde se puede ver la diferencia de amplitud en las reflexiones.

Esto nos permite ver el tiempo y la forma de aparición de los reflejos con el modelo, lo que nos permite reconocer en un estudio real lo que podríamos estar esperando en la señal real de GPR.

### MODELO VARIANDO EL ESPESOR DE LAS CAPAS.

Se obtuvieron 7 trazas, con una diferente variación en profundidad entre las capas representadas en los modelos (M1, M2, M3, M4, M5, M6 y M7) de la Tabla 5, todos ellos con las mismas características de tipo de material, permeabilidad magnética, conductividad eléctrica y permitividad eléctrica, representadas en la Tabla 4.

Esto hizo variar el tiempo de aparición de los reflejos en cada una de las 7 trazas, los cuales representan las capas y sus espesores en profundidad.

Tabla 4.- Características de las capas del modelo para formar las 7 trazas del radagrama sintético con la variación en profundidad.

CAPA	MATERIAL	PERMEABILIDAD MAGNÉTICA (H/M)	CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA (S/M)	PERMITIVIDAD ELÉCTRICA (F/M)
1	Caliza	$\mu_0$	0.002	$6\epsilon_0$
2	Aire	$\mu_0$	0	$\epsilon_0$
3	Caliza	$\mu_0$	0.002	$6\epsilon_0$

Tabla 5.- Variación de profundidad de las capas en los diferentes modelos para las trazas 7 del radagrama sintético.

CAPA	MODELO (M1)	MODELO (M2)	MODELO (M3)	MODELO (M4)	MODELO (M5)	MODELO (M6)	MODELO (M7)
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
3	7.0	6.0	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0

Para visualizar con mayor claridad la variación de la profundidad en las trazas, se tomaron las 7 trazas obtenidas en los modelos anteriores y se repitieron para representar un pequeño radagrama sintético de 13 trazas, iniciando en la traza M7 a la M1 y a partir de esta se repitieron de la M2 a la M7, como se muestra en la Figura No. 4.20.

La variación a la profundidad en las características del modelo es importante, porque pueden definir las geometrías que podrían ser identificadas más claramente en el radagrama, las cuales se forman con los reflejos, al juntar varias trazas de GPR.

Las 13 trazas del radagrama sintético, forman parte de un modelo en una dimensión, lo cual nos permitió ver la forma en que los reflejos definen una geometría al ir variando la profundidad de las capas, con esto se empezó a visualizar la forma de una parábola, que es una forma característica de la representación del GPR, la cual muestra cambios en las características de cada una de las capas en el medio.

## MODELO EN 1- DIMENSIÓN.

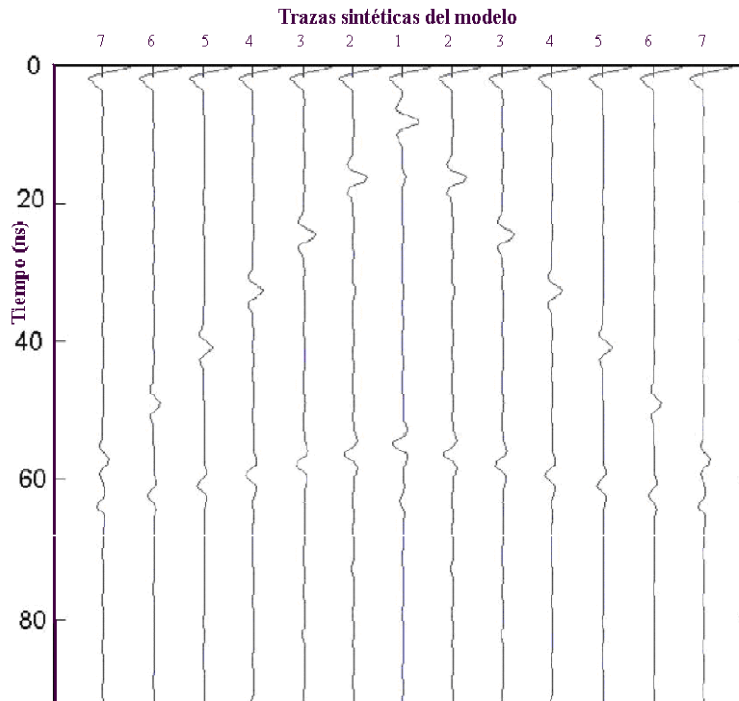


Figura 4.20.- Modelo en una dimensión del radagrama sintético, conformado por 13 trazas sintéticas de los 7 modelos de la Tabla 5, en los que se hizo variar la profundidad de las capas y representadas iniciando en la traza M7 a la M1 y a partir de esta se repitieron de la M2 a la M7

## TRANSFORMADA DE WIGNER-VILLE.

Una vez formado el modelo en una dimensión, se hace el análisis tiempo-frecuencia por traza del modelo para un medio estratificado, isótropo y homogéneo en 1-dimensión similar al de Annan y Chua, (1992); Díaz (2003). Utilizando las características de la Tabla 1 y las condiciones de frontera.

Se obtiene la transformada de Wigner-Ville de la señal original del modelo, recordando cómo se explicó en el capítulo II, que esta transformación no es suavizada, ni se ha tomado un tramo específico de la señal y su kernel es la unidad, por lo que únicamente se debe especificar la longitud del segmento temporal.

Por regla general y mientras no se indique lo contrario, se tomaran matrices de  $N \times N$ , donde  $N$  es el número de muestras del segmento temporal analizado, de esta forma, se mantiene el equilibrio del producto de la resolución espectral por la resolución temporal, debido al principio de incertidumbre de Heisenberg.

Se utiliza el algoritmo de proceso de la Transformada de tiempo-frecuencia de Wigner-Ville, desarrollado por Auger, *et.al.* (1996), en los cuales se usa la función de densidad de

energía para la descripción de señales en tiempo y en frecuencia simultáneamente, cuyo interés principal es ver el contenido de los cambios de frecuencia en el tiempo.

### **MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE UTILIZANDO UNA FRECUENCIA CENTRAL DE 200 MHz.**

Para este modelo, se utiliza la traza del radagrama sintético obtenida anteriormente, utilizando su segmento temporal y aplicando el algoritmo de proceso para la transformación de Wigner-Ville.

En la Figura No. 4. 21 se muestra los resultados en diferentes gráficas:

En la gráfica superior se representa, la traza del radagrama sintético para el modelo utilizando la frecuencia central de 200 MHz. en el que se observa el tiempo de aparición de los reflejos entre 65 y 78 ns.

La siguiente gráfica corresponde al plano tiempo-frecuencia de la transformación de Wigner-Ville, manteniendo un tamaño de 512 muestras en la ventana temporal completa, la cual corre de manera horizontal mostrando la resolución temporal y donde nuevamente se ve el tiempo de aparición de los reflejos en entre 65 y 78 ns., además la frecuencia corre verticalmente y muestra la resolución frecuencial, donde se ve la frecuencia y la forma de los armónicos en amplitud y fase, los colores muestran el nivel de energía de la transformación.

La tercer gráfica muestra una grafica en 3D de la misma traza, donde los ejes X, Y y Z representan respectivamente el tiempo, la frecuencia y el nivel de energía de la transformación de Wigner-Ville.

Finalmente, la cuarta y última gráfica representa el espectro de potencia de la transformada de Fourier, en donde podemos ver la frecuencia central de 200 MHz, en la parte central de la envolvente. Si se analiza la información podemos ver que el espectro de poder de Fourier corresponde con la información obtenida en el espectro tiempo-frecuencia, dado por la transformación de Wigner-Ville.

Esta versión discreta de la señal, puede ser afectada por aliasing, en particular si la señal es valuada y a la velocidad de Nyquist, a causa de la naturaleza cuadrática de la transformación de Wigner-Ville. Si muestreamos  $s$  con un periodo  $T$ , escrita  $x[n] = x[nT]$  y evaluamos la transformación en los puntos  $nT$  en tiempo, se obtiene una expresión discreta de tiempo continuo-frecuencia en la cual el periodo es  $1/2T$  (diferente al periodo  $1/T$  obtenido por Fourier de una señal muestreada a la velocidad de Nyquist).

Recordando que si se considera la transformación de Wigner-Ville de la misma señal pero en su forma analítica el efecto aliasing desaparecerá, tal como los términos de interferencia entre componentes de frecuencia negativa y positivas (Cassande-Mottin, (2005). Por lo que se muestra la ventana correspondiente a la información útil de la señal analizada.



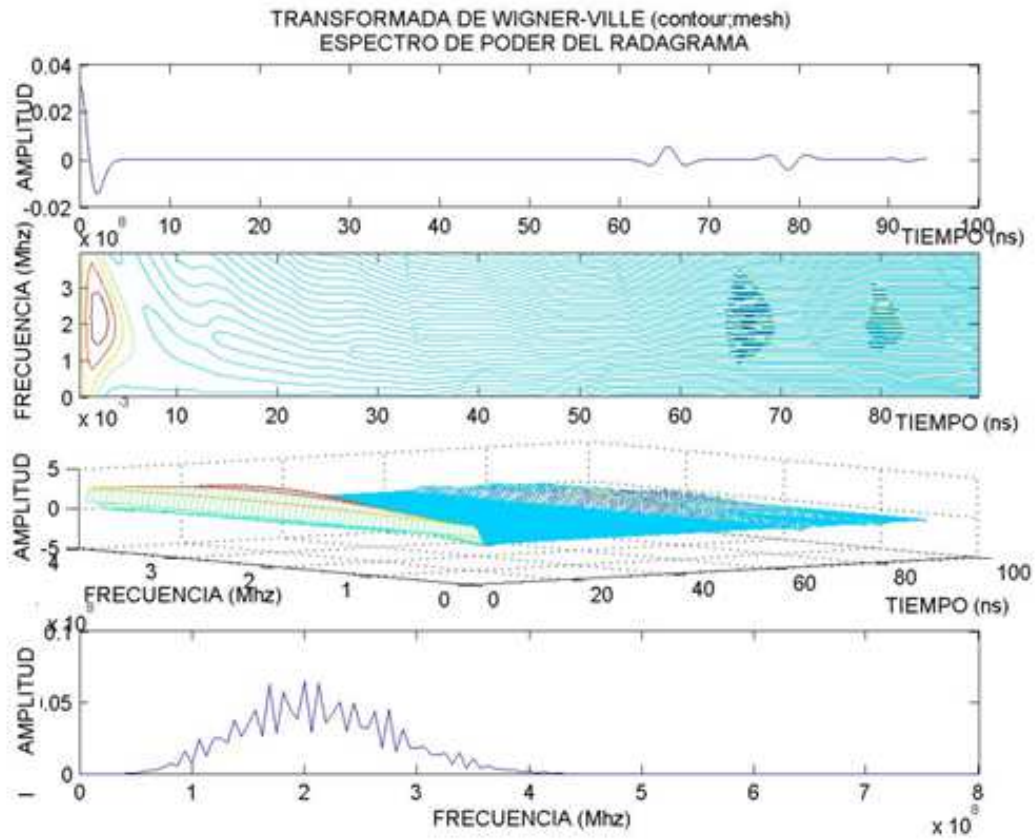


Figura 4.21.- La primer grafica muestra la traza del radagrama sintético con una frecuencia de 200 MHz., la segunda gráfica muestra el plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville, la tercera gráfica muestra la transformda tiempo-frecuencia de Wigner-Ville en 3D, la cuarta gráfica muestra el espectro de potencia de la transformada de Fourier.

Para tener una visualización más clara de la segunda y de la tercer gráfica de la figura No.4. 21, se muestra a continuación una ampliación de ellas en la Figura No. 4.22.

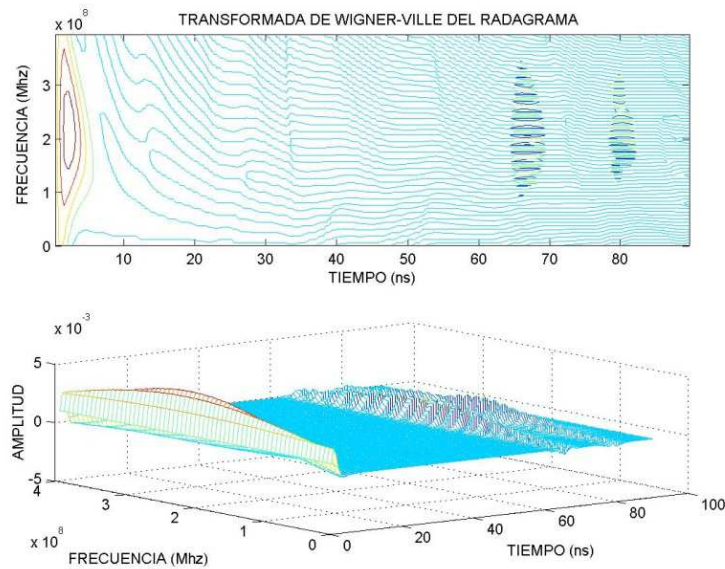


Figura 4.22.- La Gráfica superior muestra el plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville y la grafica inferior muestra la transformación tiempo-frecuencia de Wigner-Ville en 3D.

### MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE UTILIZANDO UNA FRECUENCIA CENTRAL DE 100 Mhz.

Utilizando el segmento temporal de la traza del radagrama sintético obtenida con una frecuencia central de 100 MHz., en el cual se calcula mediante el algoritmo de proceso, la transformación de Wigner-Ville.

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura No. 4.23 donde se presentan cuatro graficas.

En la grafica superior se ve la aparición de los reflejos de la señal, los cuales se presentan entre 65 y 78 ns., se aprecia como los valores de longitud de la onda aumentan, así como la relación de la longitud de onda del reflejo en la capa y el espesor entre capas, con respecto a la grafica superior de la Figura No. 4.21, por lo que es todavía posible diferenciar los reflejos entre la primera y la segunda capa.

El plano tiempo-frecuencia obtenido mediante la transformación de Wigner-Ville, se muestra en la segunda gráfica, en el se puede ver la ventana temporal en eje horizontal, definiendo la resolución temporal y mostrando la aparición de los reflejos entre 65 y 78 ns. En los reflejos se observa el aumento de los valores de longitud de la onda, así como la relación que guardan la longitud de onda y el espesor entre capas. En el eje vertical, se ve la frecuencia definiendo la resolución frecuencial, donde cambia la frecuencia y la forma de los armónicos en amplitud y fase, se nota que la longitud de onda es mayor. El nivel de energía de la transformación se muestra en colores.

En la tercer gráfica se muestra una gráfica en 3D de la transformada de Wigner-Ville, de la misma traza del radagrama sintético, donde el tiempo, la frecuencia y el nivel de energía de la transformación son representados en los ejes X, Y y Z respectivamente.

Finalmente se muestra en la cuarta grafica el espectro de potencia de Fourier, de la traza del radagrama sintético, en donde se puede ver la frecuencia central de 100 MHz.,en la parte central de la envolvente. Donde la forma del armónico es mayor que en el de la Figura No. 4.21. Si analizamos la información podemos ver que el espectro de poder de Fourier corresponde con la información obtenida en el espectro tiempo-frecuencia de Wigner-Ville.

En la Figura No.4.24 se muestran la segunda y terceras gráficas de la Figura No. 4.23, con el fin de tener una mayor visualización de los cambios que aparecen en el plano tiempo-frecuencia, entre el modelo de la traza de radagrama sintético con una frecuencia de 200 MHz de la Figura No .4.21 y el modelo de la traza de radagrama sintético con una frecuencia de 100 MHz. de la Figura No. 4.23.

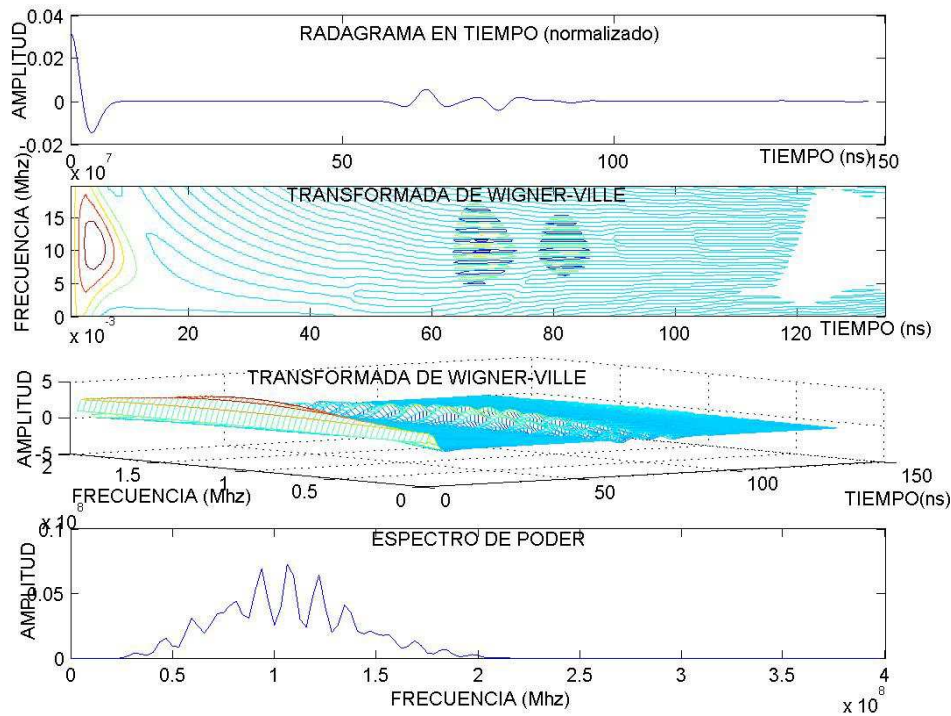


Figura 4.23.- La primer grafica muestra la traza del radagrama sintético con una frecuencia de 100 MHz., la segunda gráfica muestra el plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville, la tercera gráfica muestra la transformada en tiempo-frecuencia de la tranformación de Wigner-Ville en 3D, la cuarta gráfica muestra el espectro de potencia de la transformada de Fourier.

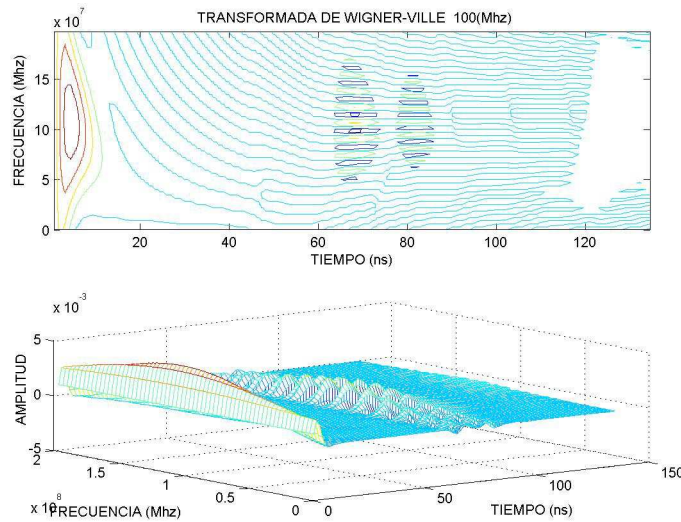


Figura 24.- La grafica superior muestra, el plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville de la traza del radagrama sintético obtenido con una frecuencia central 100 MHz. La grafica inferior muestra la transformación tiempo-frecuencia de Wigner-Ville en 3D

### MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE UTILIZANDO UNA FRECUENCIA CENTRAL DE 40 MHz.

En este modelo, nuevamente utilizamos la traza de radagrama sintético pero ahora obtenido con una frecuencia central de 40 MHz., en el cual se calcula nuevamente mediante el algoritmo de proceso, la transformación de Wigner-Ville.

Los resultados se muestran en cuatro gráficas en la Figura No. 4.25.

En la primera gráfica de la Figura No.4.25, se muestra la traza del radagrama sintético obtenido para una frecuencia central de 40 MHz., donde se puede apreciar que el valor de la longitud de onda aumenta así como la relación entre la longitud de onda y el espesor de la capa, con respecto a las Figuras No.4.21 y 4.23, en este radagrama sintético calculado con una frecuencia central de 40 MHz, no se visualiza la segunda capa.

En la segunda gráfica se muestra el plano tiempo-frecuencia obtenido mediante la transformación de Wigner-Ville, en el se puede ver la ventana temporal en eje horizontal, donde se pierde un poco la resolución temporal y mostrando la aparición de un solo reflejo que abarca desde 65 y 85 ns. En los reflejos se observa el aumento de los valores de longitud de la onda, donde se pierde la relación que guardan la longitud de onda y el espesor entre capas, por lo que en el plano no se diferencian las dos capas. En el eje vertical, se ve la frecuencia definiendo la resolución frecuencial, donde cambia la frecuencia y la forma de los armónicos en amplitud y fase, se nota que la longitud de onda es mayor que con respecto a las figuras números 4.21 y 4.23. El nivel de energía de la transformación se muestra en colores.

En la tercer gráfica se muestra una gráfica en 3D de la misma traza del radagrama sintético, en la que se calculo la transformada de Wigner-Ville, donde el tiempo, la frecuencia y el nivel de energía de la transformación son representados en los ejes X, Y y Z respectivamente.

Finalmente se muestra en la cuarta gráfica el espectro de potencia de Fourier, en donde se puede ver la frecuencia central de 40 MHz, en la parte central de la envolvente, si analizamos la información podemos ver que el espectro de poder de Fourier corresponde con la información obtenida en el espectro tiempo-frecuencia de Wigner-Ville, donde la forma de los armónicos es más amplia que en las figuras números 4.21 y 4.23.

En la Figura No. 4.26, se muestran la segunda y tercera gráfica de la Figura No. 4.25, con el fin de tener una mayor visualización de los cambios que aparecen en el plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville, entre los modelos de la traza con una frecuencia de 200 MHz de la Figura No. 4.21, el modelo de la traza con una frecuencia de 100 MHz. de la Figura No. 4.23 y el modelo de la traza de la Figura No. 4.25.

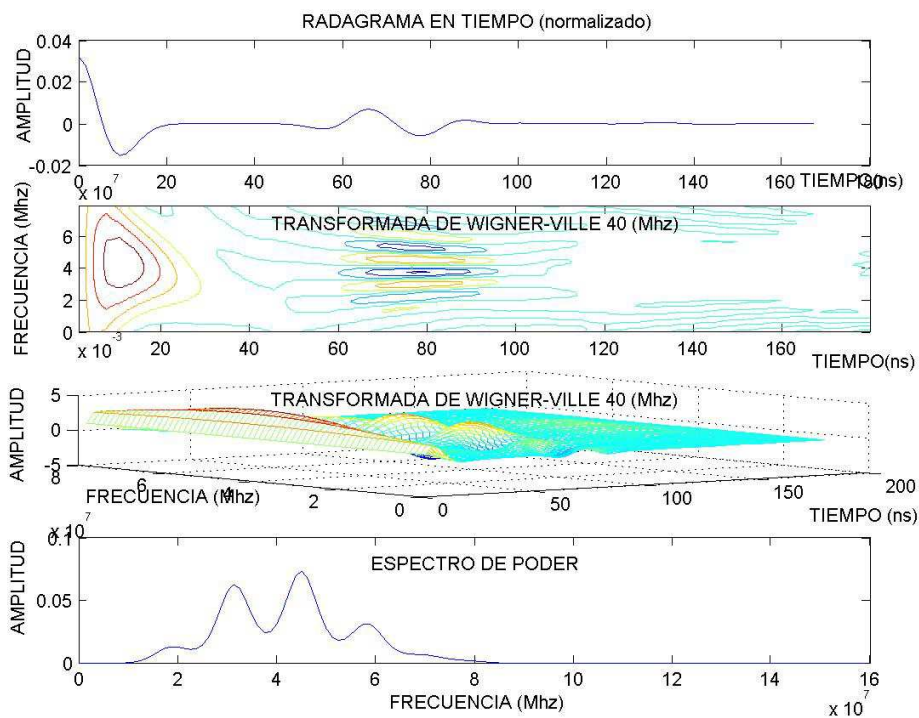


Figura 4.25.- La primer grafica muestra la traza del radagrama sintético con una frecuencia de 40 MHz., la segunda gráfica muestra el plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville, en la que se pierde resolución temporal y no se visualiza la diferencia entre la primera y segunda capa, la tercera gráfica muestra la transformada en tiempo-frecuencia de la tranformación de Wigner-Ville en 3D, donde se ve la mayor longitud de onda, la cuarta gráfica muestra el espectro de potencia de la transformada de Fourier.

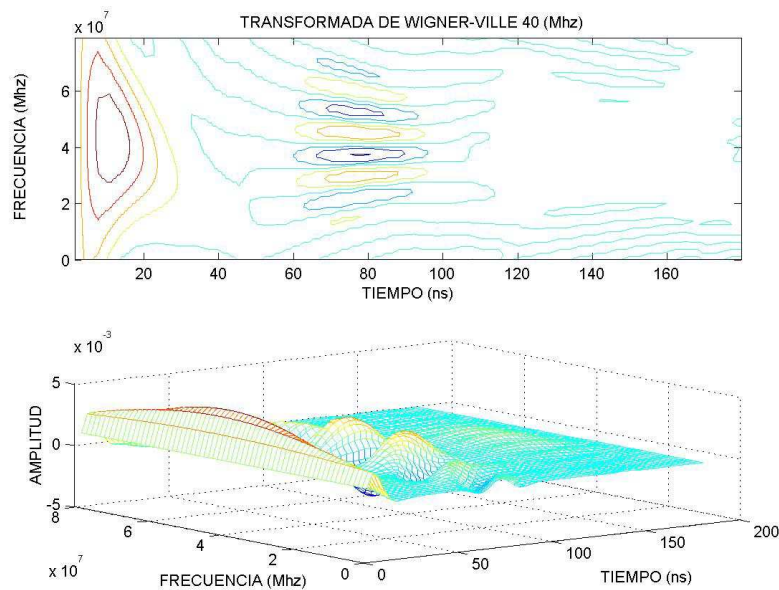


Figura 4.26.- La gráfica superior muestra, el plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville, de la traza del radagrama sintético obtenido con una frecuencia central 40 Mhz. La gráfica inferior muestra la transformación tiempo-frecuencia de Wigner-Ville en 3D.

### MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN DE WIGNER-VILLE INTRODUCIENDO UN DESPLAZAMIENTO.

A la traza del radagrama sintético obtenida con una frecuencia central de 100 MHz., se le introduce un desplazamiento de 25 ns, se obtiene el plano tiempo-frecuencia mediante la transformada de Wigner-Ville, los resultados se muestran en la Figura No. 4.27, en donde se muestra en la gráfica superior, el plano tiempo-frecuencia obtenido mediante la transformada de Wigner-Ville, la ondícula del pulso de Ricker se ve desplazada y reflejada completamente, los reflejos de la primera y segunda capas también se ven desplazados y reflejados.

En la gráfica inferior de la Figura No.4.27 se ven la transformada de Wigner-Ville en 3D, el desplazamiento y el reflejo de la ondícula del pulso de Ricker de forma completa y los desplazamientos y los reflejos de la primera y segunda capa.

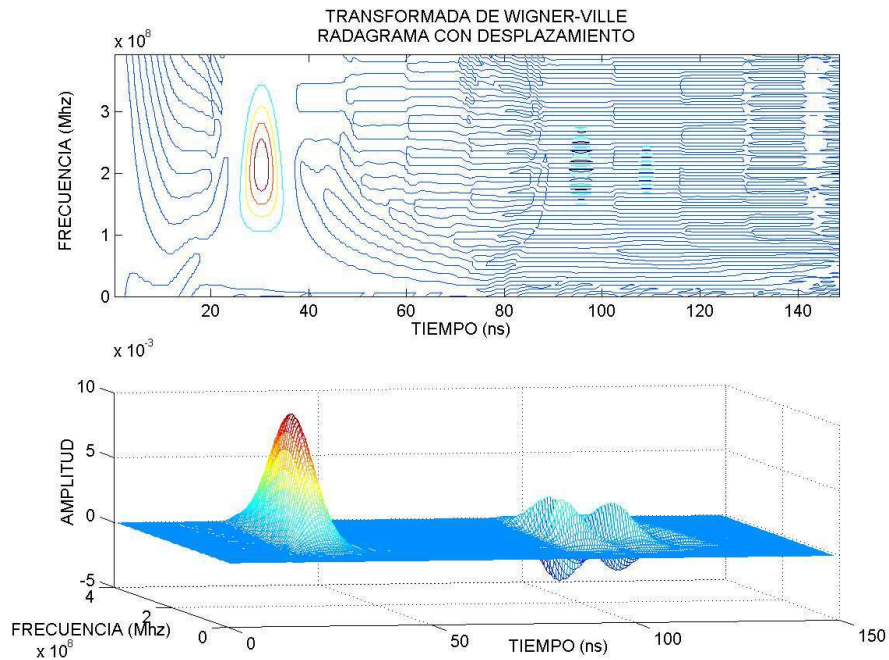


Figura 4.27.- La gráfica superior muestra el plano tiempo-frecuencia de la Transformada de Wigner-Ville de la traza del radagrama sintético obtenida con un desplazamiento de 25 ns. La gráfica inferior muestra la transformada de Wigner-Ville de la traza del radagrama sintético.

### MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMADA DE WIGNER-VILLE CON CONTRASTES DE PERMITIVIDAD.

Para mostrar este modelo se utilizarán los resultados del método ante variaciones de permitividad, en el que se emplearon dos modelos, M1 y M2, en los que se cambia la entrada de permitividad eléctrica, mostrada en la Tabla 2.

A las trazas de los modelos M1 y M2, en las cuales se obtuvo la transformada de Wigner-Ville, los resultados son mostrados en las figura números 4.28 y 4.29.

En la gráfica superior de la Figura No. 4.28, se muestran los resultados de la traza del modelo (M1), donde se pasa de una capa de mayor permitividad a una capa de menor permitividad. El plano tiempo-frecuencia obtenido mediante la transformada de Wigner-Ville, muestra que el reflejo de la primera capa se presenta a los 65 ns, y absorbe la mayor parte de energía de la señal, el reflejo de la segunda capa tarda en presentarse y lo hace en los 87 ns, donde la energía en la señal se debilita.

En la gráfica inferior de Figura No. 28, se muestra el resultado de la traza del modelo (M2), donde se pasa de una capa de menor permitividad a otra capa de mayor permitividad. El plano tiempo-frecuencia obtenido mediante la transformada de Wigner-Ville, muestra que

los reflejos con este comportamiento son reproducidos por el método adecuadamente, recordando que a mayor permitividad corresponde un factor de atenuación menor y consecuentemente una mayor amplitud de onda.

En la Figura No.4.29, se muestran dos gráficas que muestra la transformada de Wigner-Ville en 3D, con los resultados del método con las variaciones de permitividad, donde en la gráfica superior muestra los resultados de modelos M1 y en la gráfica inferior se muestran los resultados del modelo M2

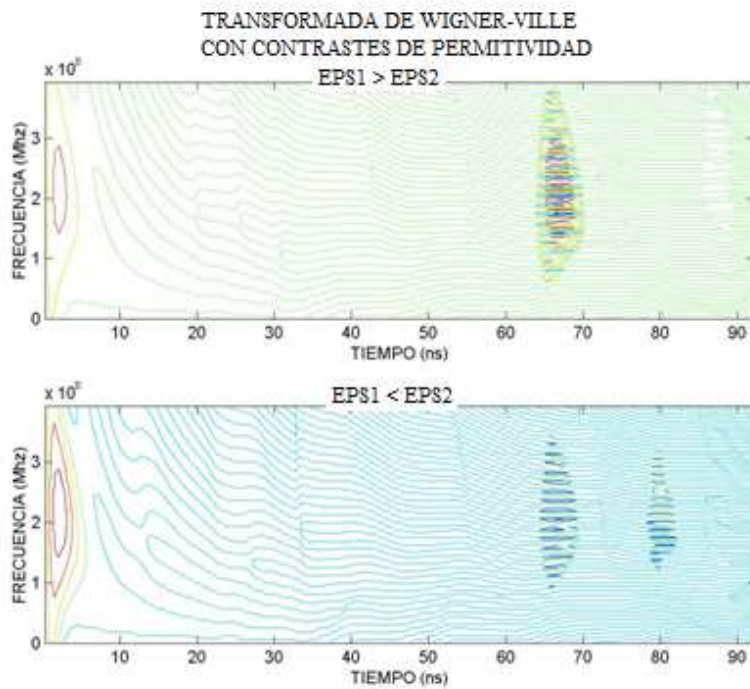


Figura 4.28.- Se muestran los planos tiempo-frecuencia obtenidos mediante la transformada de Wigner-Ville, en la gráfica superior se ven los cambios de permitividad del modelo (M1) y en la gráfica inferior se muestra los cambios de permitividad del modelo (M2).



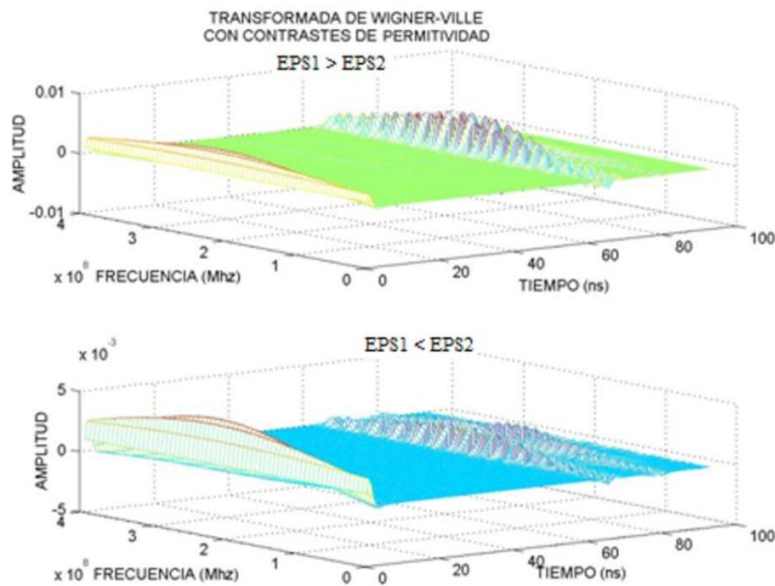


Figura 4.29.- Se muestra la transformada de Wigner-Ville de las trazas de los modelos M1 y M2 en 3D, obtenidos con diferentes contrastes de resistividad.

### MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMADA WIGNER-VILLE CON CONTRASTES DE RESISTIVIDAD.

Para mostrar este modelo, se analizan las trazas de los modelos obtenidos anteriormente ante variaciones de resistividad, donde se emplearon los dos modelos M1 y M2 mostrados en la Tabla 3, con los cambios en la entrada de conductividad eléctrica la cual es el inverso de la resistividad.

La transformada de Wigner-Ville es aplicada a las trazas de los modelos M1 y M2, los resultados son mostrados en las figuras números 4.30 y 4.31.

En la Figura No.4.30, se representa el plano tiempo-frecuencia obtenido mediante la transformación de Wigner-Ville, en la gráfica superior, en el plano se visualiza la amplitud de la reflexión al pasar de un medio de mayor resistividad a uno de menor resistividad, en este caso sólo uno de los reflejos, el que representa la primera capa del modelo se puede ver, esto es porque en esta capa se absorbe la energía de la señal.

En la gráfica inferior, en el plano tiempo-frecuencia se observa como la amplitud de la reflexión pasa de medio de menor resistividad a uno de mayor resistividad, en este caso el factor de atenuación es mayor porque la primera capa representa una resistividad menor y consecuentemente se produce una menor amplitud de la onda y el reflejo casi se pierde a la vista.

En la Figura No. 4.31 se ve la representación de transformada de Wigner-Ville, en dos gráficas en 3D, la grafica superior muestra los resultados para el modelo M1 y la gráfica inferior se visualizan los resultados para el modelo M2.

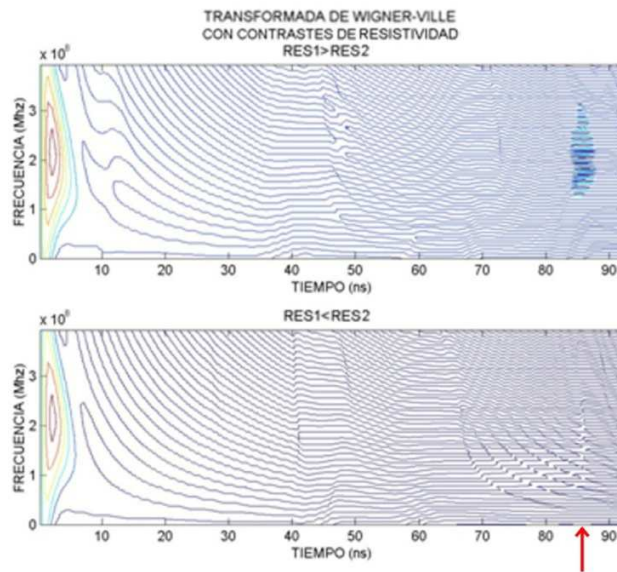


Figura 4.30.- El plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville es representado y en la gráfica superior se ven los contrastes de resistividad para el modelo M1, en el sólo se percibe el reflejo de la primera capa y en la gráfica inferior se ven los contrastes de resistividad para el modelo M2, el reflejo de la primera capa es casi imperceptible.

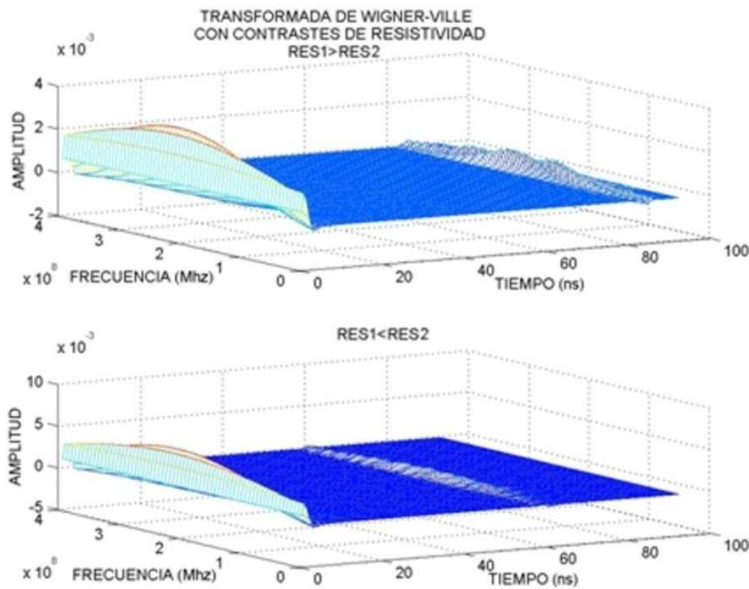


Figura 4.31.- La transformada de Wigner-Ville es representada en 3D, obtenida mediante las trazas con contrastes de resistividad, en la gráfica superior se muestra la traza del modelo M1 y en la gráfica inferior se muestra la traza del modelo M2.

## **MODELO TIEMPO-FRECUENCIA DE LA TRANSFORMADA DE WIGNER-VILLE VARIANDO EL ESPESOR DE LAS CAPAS.**

Las 7 trazas obtenidas, con una diferente variación en profundidad entre las capas representadas en los modelos (M1, M2, M3, M4, M5, M6 y M7) de la Tabla 5 y utilizando la características de la Tabla 4, que hicieron variar el tiempo de aparición de los reflejos, se obtuvieron las transformadas de Wigner-Ville, para obtener los planos de tiempo-frecuencia de cada una de las trazas.

Los planos tiempo-frecuencia de la transformación de Wigner-Ville, mantienen el tamaño de la ventana temporal completa en cada una de las trazas, la cual corre de manera horizontal mostrando la resolución temporal y donde nuevamente se ve el tiempo de aparición de los reflejos con la variación en profundidad de cada una de las trazas. Además la frecuencia corre verticalmente y muestra la resolución frecuencial, donde se ve la frecuencia y la forma de los armónicos en amplitud y fase, los colores muestran el nivel de energía de la transformación.

Para visualizar con mayor claridad la variación de la profundidad en las trazas en la transformada de Wigner-Ville, se tomaron las 7 trazas obtenidas en los modelos y se repitieron para representar los planos tiempo-frecuencia de 13 trazas, iniciando en la traza M7 a la M1 y a partir de esta se repitieron de la M2 a la M7, como se muestra en la Figura No. 4.32.

Las 13 trazas de los planos tiempo-frecuencia, forman parte de un modelo en una dimension, las trazas van definiendo también la forma característica de la representación de la señal de GPR,

**MODELO EN 2- DIMENSIÓN.**

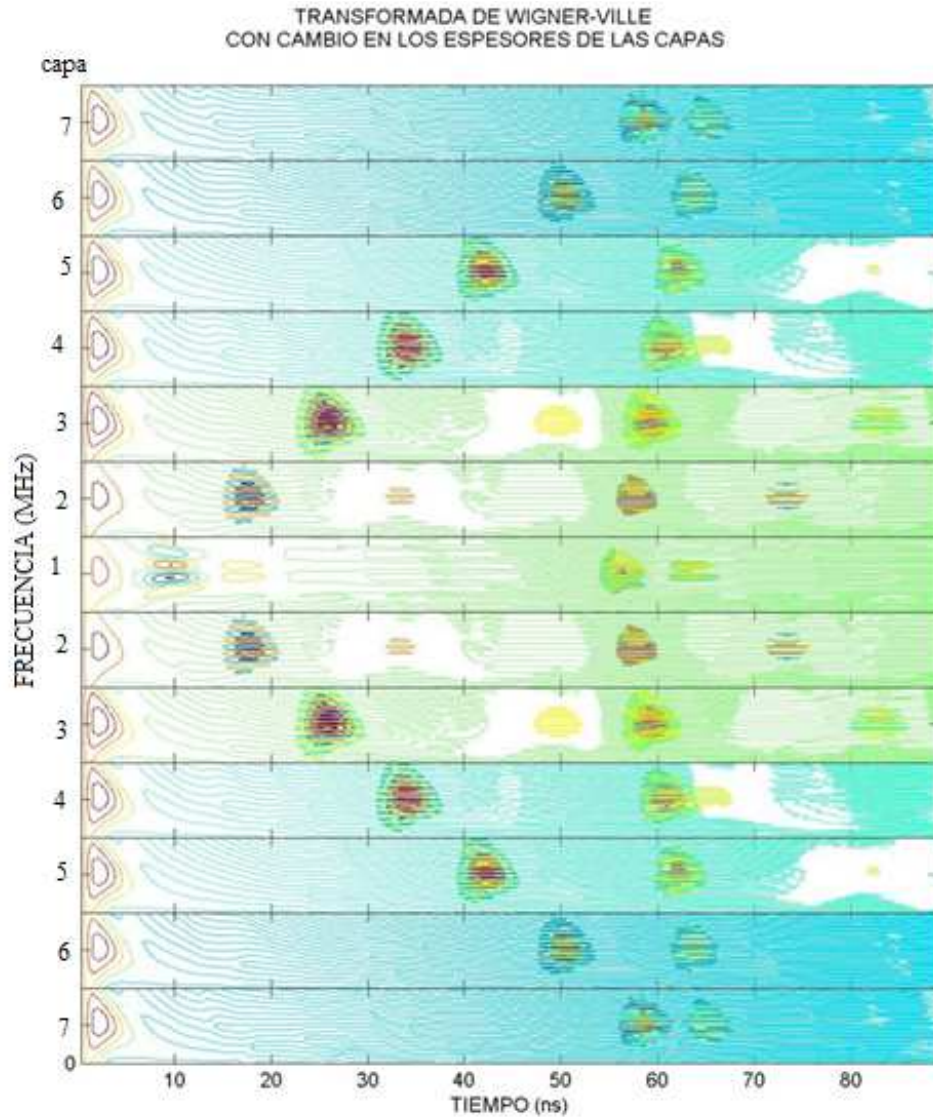


Figura 4.32.- Los planos tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville de 13 trazas, iniciando en la traza M7 a la M1 y a partir de esta se repitieron de la M2 a la M7

En la Figuran No.4.33 podemos ver, los planos tiempo-frecuencias de la transformada de Wigner-Ville de las trazas obtenidas con los modelos del M1 al M7, en graficas 3D y en orden descendente.

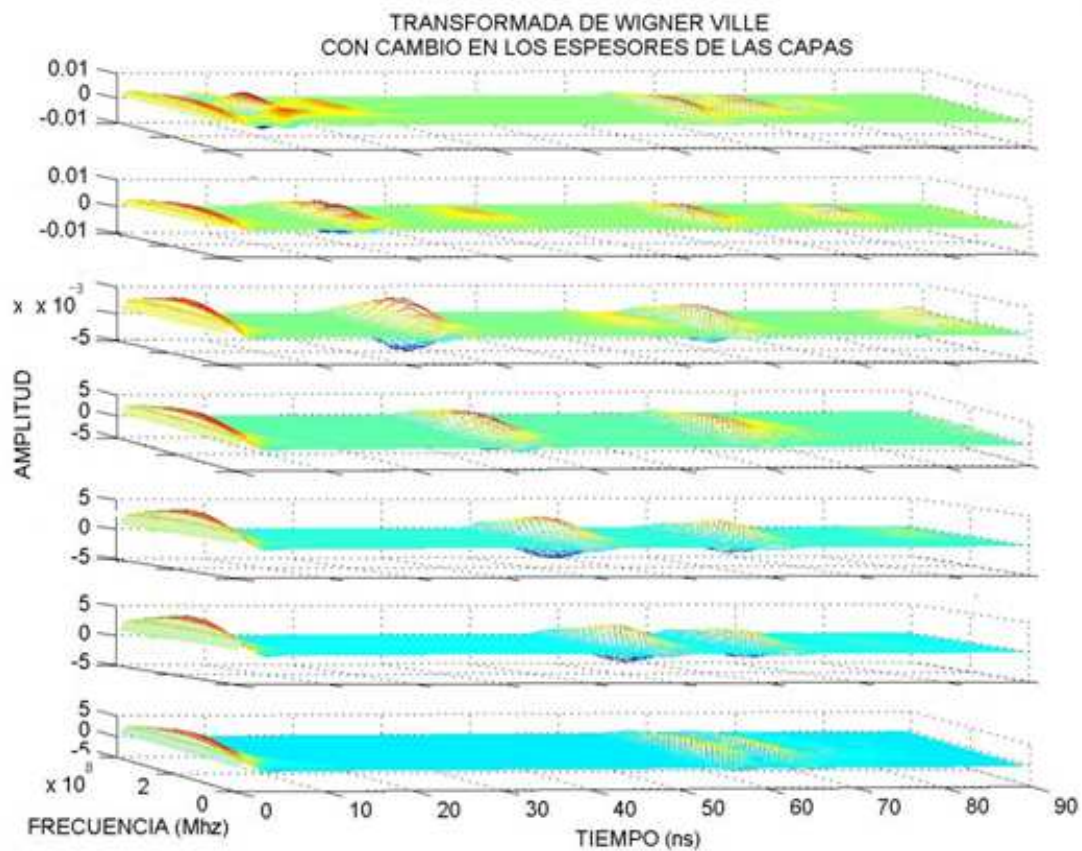


Figura 4.33.-Planos tiempo-frecuencias de la transformada de Wigner-Ville de las trazas obtenidas con los modelos del M1 al M7, representados en graficas 3D en orden descendente.

### MODELO 3 - DIMENSIONES.

Con las 13 trazas representadas en el modelo en 2-Dimensión, se genera el modelo en 3-Dimensiones que se muestra en la Figura No. 4.34, con lo que podemos visualizar lo que en un radagrama real podría representar una anomalía en forma de parábola.

En el eje X mantienen el tamaño de la ventana temporal completa en cada una de las trazas, la cual corre de manera horizontal mostrando la resolución temporal y donde nuevamente se ve el tiempo de aparición de los reflejos con la variación en profundidad de cada una de las trazas. Además, en el eje Y, se ve la frecuencia que corre verticalmente y muestra la resolución frecuencial, donde se ve la frecuencia y la forma de los armónicos en amplitud y fase, en el eje Z se representan las trazas y los colores muestran el nivel de energía de la transformación.

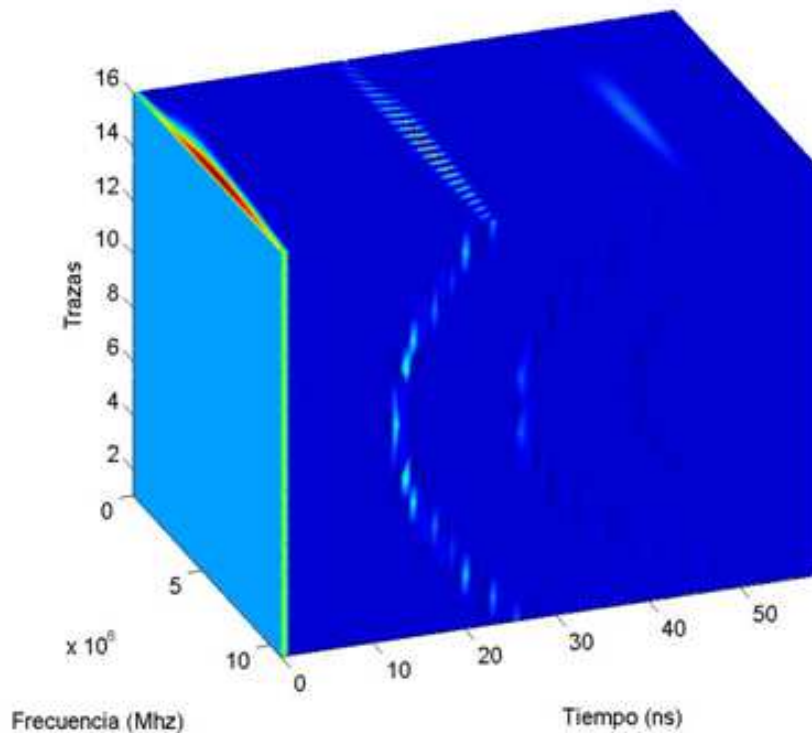


Figura 4.34.- Las 13 trazas representadas en un modelo 3-Dimensiones, con lo que podemos visualizar lo que en un radagrama real podría representar una anomalía en forma de parábola.

### **MODELO DE FRECUENCIA INSTANTÁNEA DE TRAZA COMPLEJA EN EL PLANO TIEMPO FRECUENCIA.**

Para revelar las propiedades de variación espectral de la información en tiempo y poder ayudar en la búsqueda de frecuencias ocultas o bajas, se utiliza la frecuencia instantánea, que es un atributo de frecuencia que está representada en tiempo, proporcionando una mejor precisión de la ubicación de los reflectores, como no necesita conversiones que pudieran arrastrar errores, implica una mayor exactitud en los resultados, ver capítulo III.

Utilizando el algoritmo de proceso, desarrollo para obtener de cada una de las 13 trazas a partir del espectro de tiempo-frecuencia de Wigner-Ville, se obtuvo el atributo de traza compleja de frecuencia instantánea, con el que se construye un modelo.

La frecuencia instantánea de traza compleja la podemos ver en el modelo de la Figura No.4.35, el cual es construido con las 13 trazas, en las que se obtuvo desde el espectro de Wigner-Ville anteriormente.

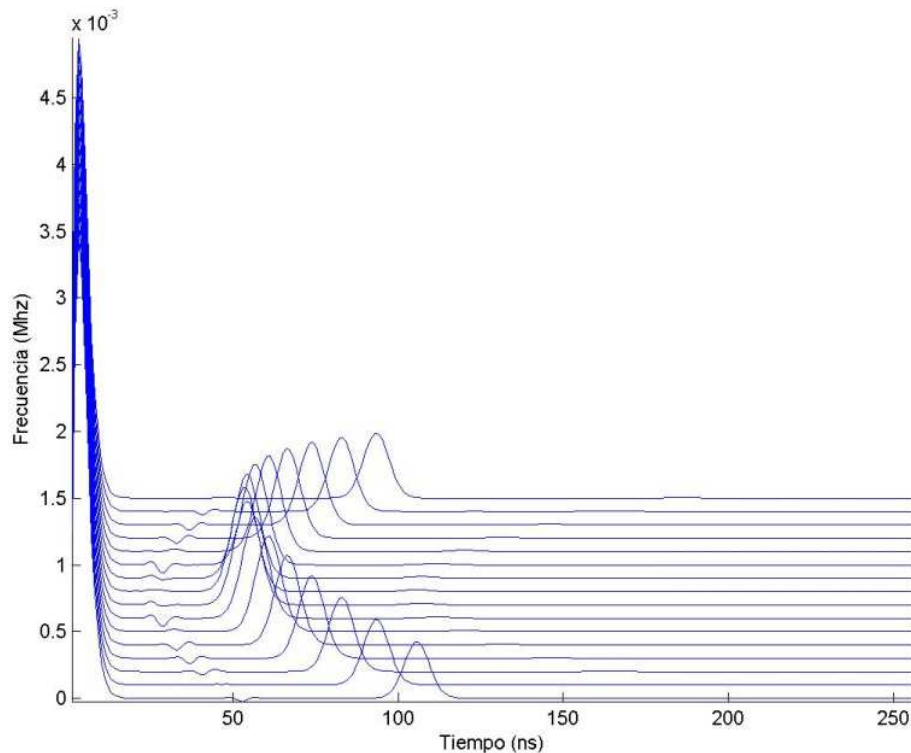


Figura 4.35.- Modelo del atributo de frecuencia instantánea de traza compleja, construido con las 13 trazas en las que anteriormente se había obtenido el plano tiempo-frecuencia de Wigner-Ville.

Con este proceso mostrado, podemos implementar una metodología, que nos permita obtener para cada una de las zonas que se desea estudiar, un modelo con las características que nosotros esperamos de esa zona, utilizando un conocimiento geotécnico y geológico previo que nosotros visualizamos de la zona y compararlo con un radagrama real obtenido en el lugar el procedimiento se muestra con un ejemplo práctico a continuación.

### **EJEMPLO PRÁCTICO.**

Para este estudio, en el que se deseaba controlar de una mejor manera las características del subsuelo, se requirió de un lugar para hacerlo. El área de estudio se localizó en una zona de transición, de la Cuenca del Valle de México, cerca de la laguna de Zumpango, región que pertenece al periodo cuaternario, ver la Figura No 40.

Esta zona es una de las mayores concentraciones de personas, con alrededor de 22 millones de personas, el área de estudio se encuentra en el municipio de Teoloyucan en el Estado de México, a unos 40 km aproximadamente del centro de la Ciudad de México, ver Figura No 4.36.

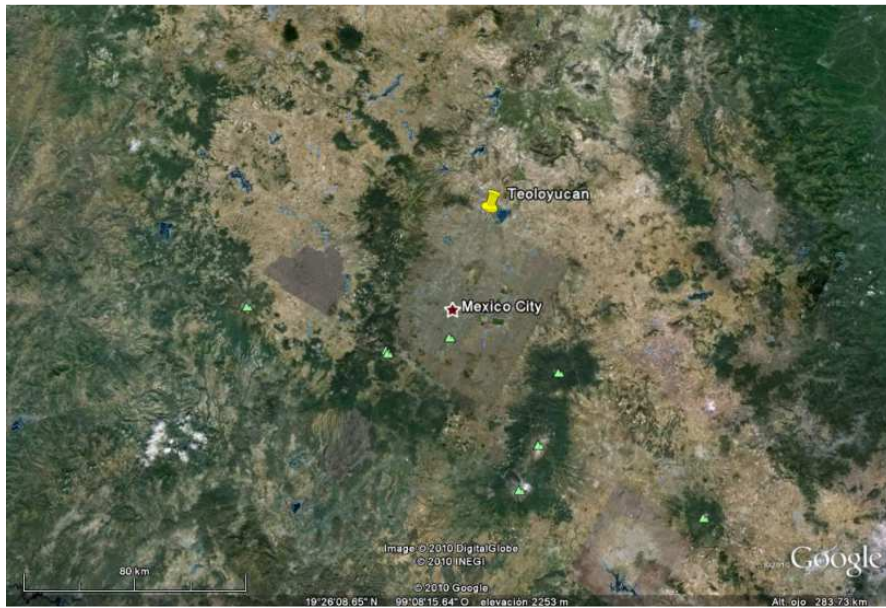


Figura 4.36.- El Valle de México o Valle de Anahuac, el pin representa el municipio de Teoloyucan en Estado de México, zona en la que se hizo el estudio.

En el municipio de Teoloyucan, en el predio en el que se ubica el Observatorio Magnético de la Universidad Nacional Autónoma de México, es lugar en el cual se pretende mostrar el método de análisis descrito anteriormente, ver la Figura No, 4.37.

En este predio, primero se definieron las características controladas para la obtención de un radagrama sintético, posteriormente, la obtención de datos para definir un radagrama real y después comparar los dos radagramas con la finalidad de ver la efectividad del método.



Figura 4.37.- Muestra el municipio de Teoloyucan en el Estado de México y el predio del Observatorio Magnético de la Universidad Nacional Autónoma de México, lugar donde se realiza el estudio.



### Modelo Propuesto.

Para definir las características del modelo propuesto para obtener el radagrama sintético, se supone lo siguiente:

Se describe un modelo en el cual la señal que se quiere obtener, atraviesa un estrato de suelo poco consolidado y un tambor metálico de 0.60 m de diámetro enterrado a una profundidad de 1.60 m, como se muestra en la Figura No.4.38.

En la Figura No. 4.38, también se muestra el lugar donde la traza del radagrama sintético es calculada, con el método de radgramas sintéticos y a través de un modelo directo para un medio estratificado, isótropo y homogéneo cuyas características se suponen previamente y son mostradas en la Tabla 6.

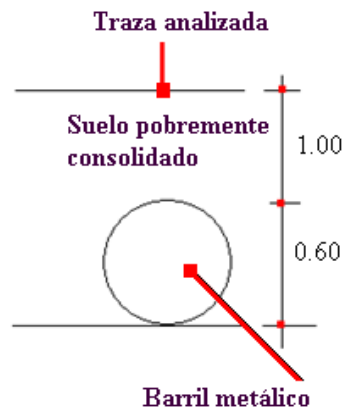


Figura 4.38.- Muestra el modelo propuesto, la señal que se quiere obtener atraviesa un suelo poco consolidado y un tambor metálico enterrado a 1.60 m de profundidad, se muestra también donde se obtiene la traza del radagrama sintético.

Tabla 6.- Características del modelo directo propuesto.

CAPA	MATERIAL	PROFUNDIDAD (M)	PERMEABILIDAD MAGNÉTICA (H/M)	CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA (S/M)	PERMITIVIDAD ELÉCTRICA (F/M)
1	Suelo pobremente consolidado	0.00	$\mu_0$	15	$6\epsilon_0$
2	Aire	1.00	$\mu_0$	0	$\epsilon_0$
3	Suelo pobremente consolidado	0.60	$\mu_0$	15	$6\epsilon_0$

Para obtener la traza del radagrama sintético, se le asigna al modelo un valor de frecuencia central de 270 MHz, empleando la ecuación para calcular el campo eléctrico, desarrollada en el capítulo I y con la información del modelo representado en las características de la Tabla 6.

Los resultados del campo eléctrico en la superficie de la Tierra, se muestran en la Figura No. 4.39, en una serie de tiempo, a la cual le aplicamos el análisis de Fourier para ver su parte real y su parte imaginaria en el dominio de la frecuencia, se aprecia también la frecuencia y la forma de los armónicos, que cambian en amplitud y fase.

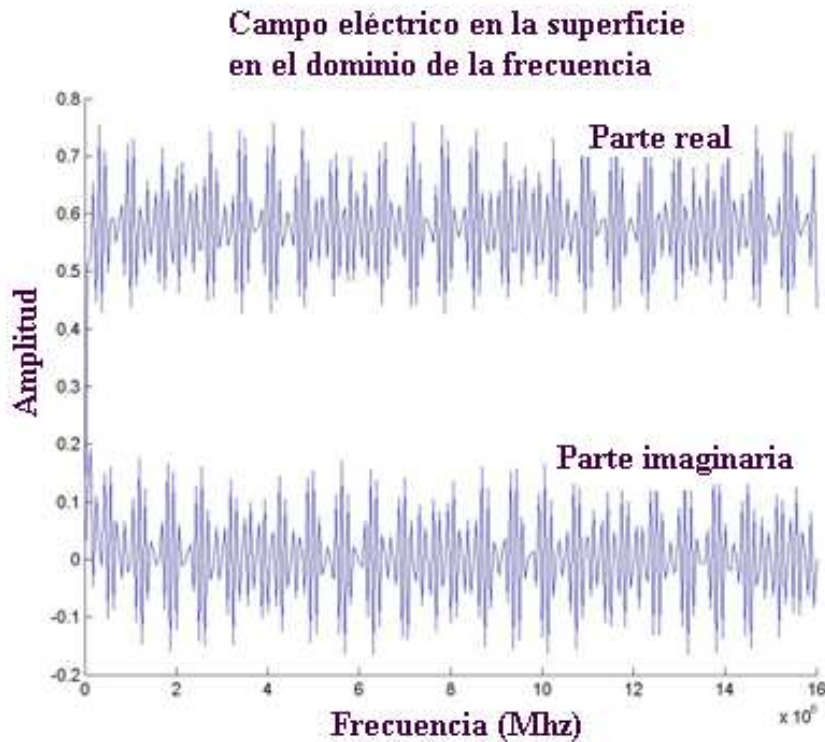


Figura 4.39.-El campo eléctrico en el dominio de la frecuencia, mostrando su parte real y su parte imaginaria, donde se aprecia la frecuencia y la forma en que cambian en amplitud y fase los armónicos.

Para acoplar un pulso eléctrico a la señal del campo eléctrico obtenido, para obtener la traza de radagrama sintético, se escogió el pulso de Ricker, se calcula el pulso resolviéndose su ecuación, descrita también en el capítulo I, con una frecuencia central de oscilación de 270 MHz., es representado en los dominios de tiempo y frecuencia en la Figura No.4.40. En la cual se puede ver las características de frecuencia, amplitud y longitud de onda específicas para el pulso.

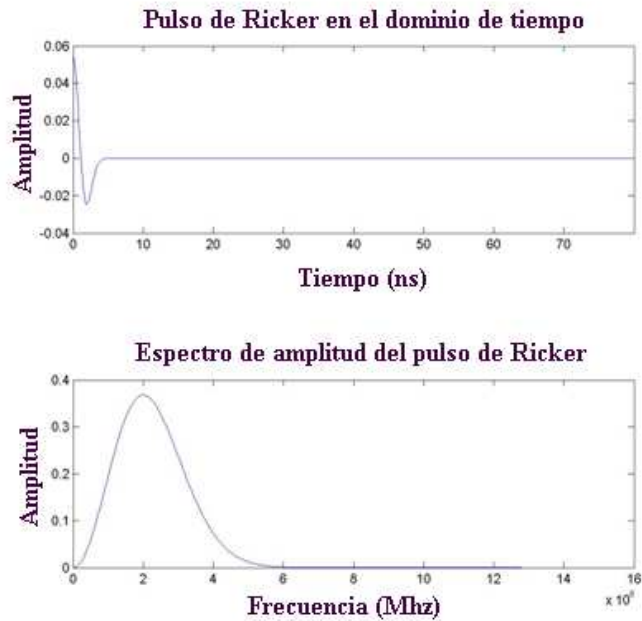


Figura 4.40.- Características de frecuencia, amplitud y longitud de onda específicas para el Pulso de Ricker, con una frecuencia central de 270 MHz., representado en la gráfica superior en el dominio del tiempo y en la gráfica inferior en el dominio de la frecuencia.

La traza del radagrama sintético en el dominio de la frecuencia es el resultado de convolucionar la señal del campo eléctrico con la ondulica de Ricker, mediante el Teorema de Convolución, en la Figura No.4.41 se aprecia, su representación en el dominio de la frecuencia y podemos ver su parte real y su parte imaginaria.



Figura 4.41.- La traza del radagrama sintético en el dominio de la frecuencia, se representa en el dominio de la frecuencia su parte real y su parte imaginaria.

Mediante la transformada de Fourier, podemos obtener el espectro potencia en el dominio de la frecuencia de la señal del modelo propuesto, el espectro de potencia de la traza de radagrama sintético y se muestra en la Figura No. 4.42 En el cual en la parte central de su envolvente se puede apreciar la frecuencia central de 270 MHz.

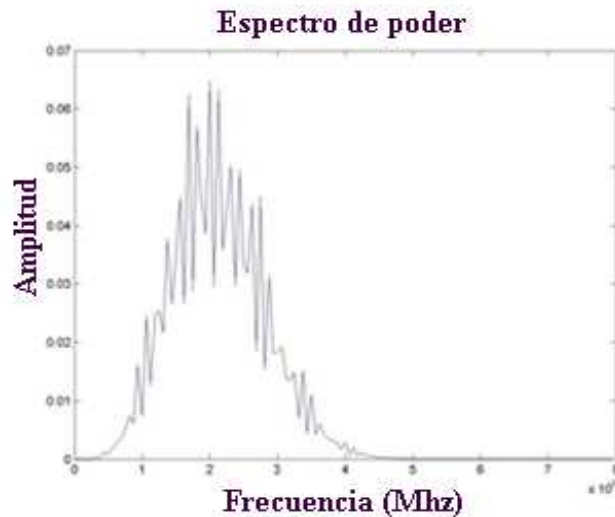


Figura 4.42.- Espectro de potencia de la señal del modelo propuesto, donde se puede ver la frecuencia central de 270 MHz, en la parte central de la envolvente.

El radagrama sintético obtenido en el dominio de la frecuencia, se pasa al dominio del tiempo mediante la transformada inversa de Fourier, la traza del radagrama sintético del modelo propuesto en el dominio del tiempo se representa en la Figura No.4.43. Los reflejos aparecen a los 18 ns. Y 39 ns., los cuales representan la posición del tambo enterrado.

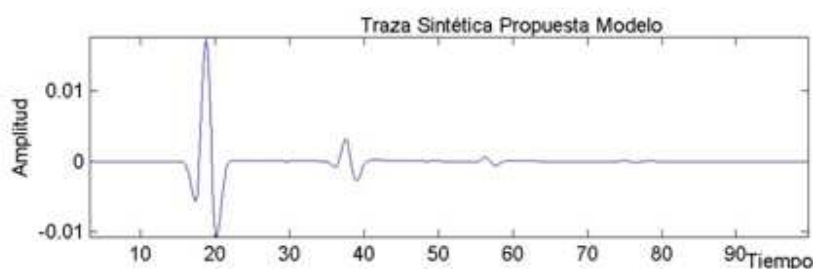


Figura 4.43.- Traza del radagrama sintético del modelo propuesto, representado en el dominio del tiempo, donde se ven los reflejos a 18 y 39 ns., que representan entre ellos el lugar donde se encuentra el tambo enterrado.

Una vez obtenida la traza de radagrama sintético, para poder compararla con la traza real es necesario obtener el radagrama real, en el lugar donde se decidió obtener los datos. Para obtener el radagrama real se utilizó un equipo de GPR, modelo SIR-2003 fabricado por la

empresa GSSI, la antena que se emplea es de 270 Mhz., la cual trabaja de modo mono estático, es decir, la misma antena transmite y recibe la señal.

La profundidad de penetración del GPR, depende del desempeño del sistema de radar, la atenuación de la onda electromagnética depende de las características de los diferentes medios. Las reflexiones se presentan en los cambios de las características en las interfaces eléctricas. Su rango de operación, de este aparato es de onda corta de muy alta frecuencia y cuya resolución se presenta en una gráfica llamada radagrama, de manera horizontal y vertical, como se vio en el capítulo I.

En el predio, se ubicó un área de 8.00 m de longitud y 1.20 m de ancho, en donde se hizo una excavación para enterrar el tambo metálico, se definió un Perfil A-A' del que se obtuvo un radagrama real. Figura No. 4.44.



Figura 4.44.- Ubicación de la excavación donde se enterró el tambo metálico, en el predio, en donde se pasó el equipo de GPR y en el cual se obtuvo el perfil A-A' del radagrama real.

Se presenta un croquis, en el cual se ve la forma en que se toman las características de cambio de las capas, para generar la traza de radagrama sintético del modelo propuesto en el lugar y tomar un perfil A-A' que genere un pequeño radagrama real. Este lo podemos ver en la Figura No. 4.45.

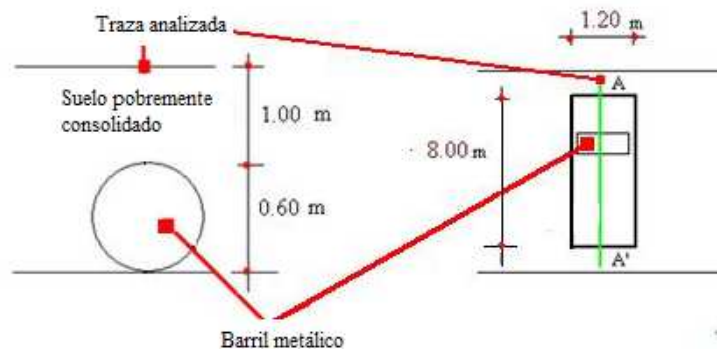


Figura 4.45.- Croquis de las características de cambio de las capas, para generar la traza de radagrama sintético del modelo propuesto en el lugar y tomar un perfil A-A' que genere un pequeño radagrama real

El GPR generó un radagrama real, en el perfil A-A' con 1024 muestras por traza, 100 trazas por metro, en una ventana de 120 ns., fueron analizadas todas las trazas y se seleccionaron 20 trazas, de las 800 trazas obtenidas, en el tramo comprendido de la traza número 275 a la número 294. De las 20 trazas seleccionadas, una, la 285, fue con la cual se ejemplificó el proceso. En el perfil A-A', las trazas que fueron seleccionadas se consideraron que formaban parte de una zona anómala del radagrama, se puso atención y cuidado en esta zona, porque podría ser la señal generada por el tambo metálico enterrado en la zona. La frecuencia central de muestro de la antena es 270 MHz., ver la Figura No.4.46.

En la anomalía, se consideró que era la señal producida por el GPR de los cambios en las características del medio. Se define una figura en forma de parábola que se podía ver más o menos de los 15 ns. A los 20 ns., que podía ser el tambo metálico enterrado.

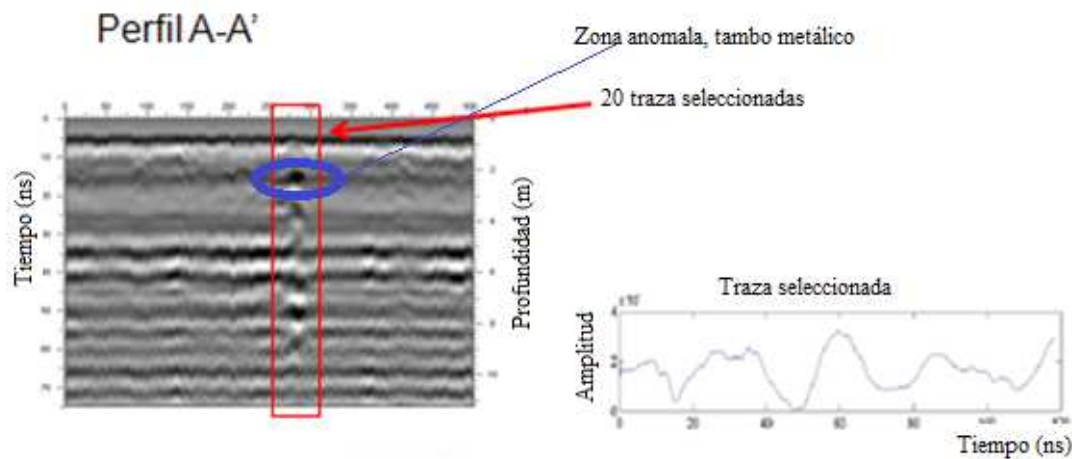


Figura 4.46.- Perfil A-A', la zona de las traza que fueron seleccionadas y donde se puede ver una anomalía en la señal de GPR que puede ser el tambo metálico, se presenta también la traza número 285 con la que se ejemplifica el proceso.

### Traza sintética.

Se analizó, la traza de radagrama sintético que se obtuvo mediante el modelo propuesto para el medio en donde se enterró el tambo metálico. Se calculó el plano tiempo- frecuencia de la transformada de Wigner-Ville, y se obtuvo el espectro de potencia de Fourier de la traza de radagrama sintética.

En la Figura No.4.47, en la primera gráfica se representa la traza del radagrama sintético, en donde podemos ver los reflejos de la señal producidos por el cambio de las características del modelo propuesto, estos aparecen a los 18 ns y a los 37 ns.

En la segunda gráfica vemos el plano tiempo frecuencia de la transformada de Wigner-Ville, donde se ve la ventana temporal completa, la cual corre de manera horizontal mostrando la resolución temporal y donde se ve el tiempo de aparición de los reflejos en

entre los 18 ns y los 37 ns., además la frecuencia corre verticalmente y muestra la resolución frecuencial, donde se ve la frecuencia y la forma de los armónicos en amplitud y fase, los colores muestran el nivel de energía de la transformación.

En la tercera gráfica se muestra la transformada de Wigner-Ville en 3D, de la misma traza, donde los ejes X, Y y Z representan respectivamente el tiempo, la frecuencia y el nivel de energía de la transformación de Wigner-Ville. Se ve el tiempo de aparición de los reflejos en entre los 18 ns y los 37 ns., se representan después de estos, múltiples.

En la cuarta gráfica, que aparece en el lado derecho de la Figura No.4.47, se representa el espectro de potencia de la transformada de Fourier, en donde se visualiza en la parte central de la envolvente la frecuencia central de 270 MHz.,

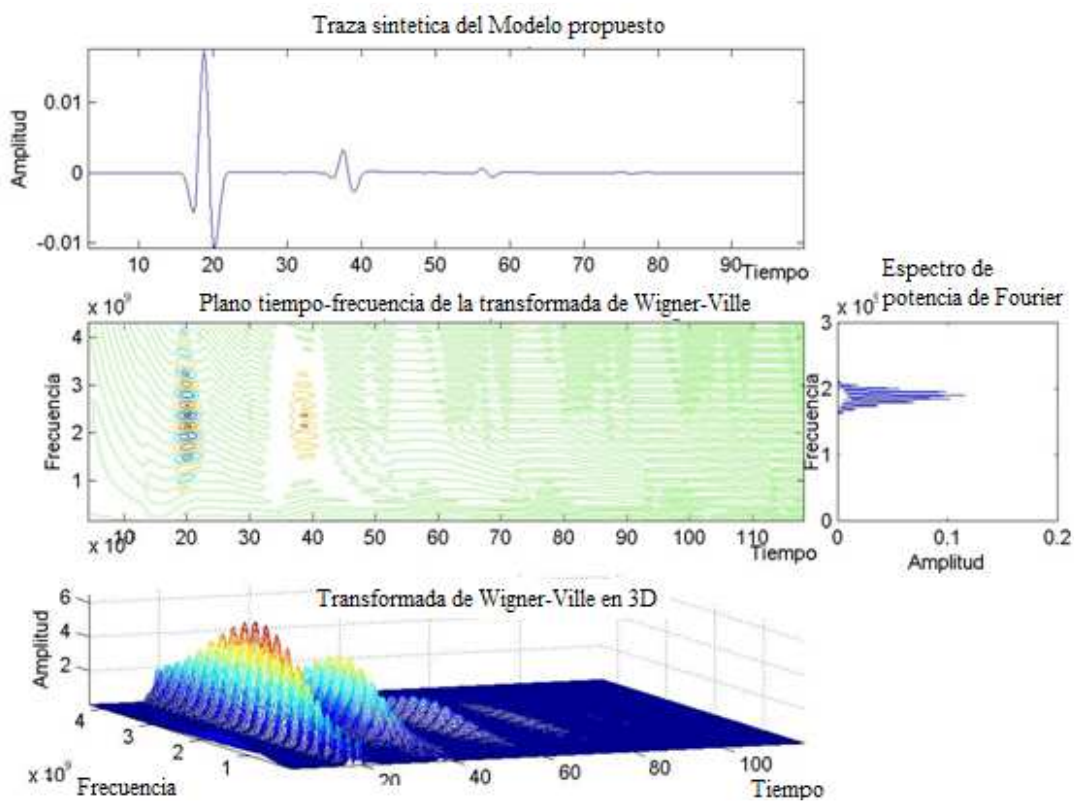


Figura 4.47.- En la gráfica superior se muestra la traza sintética obtenida con el modelo propuesto, en la segunda gráfica se presenta el plano tiempo-frecuencia de la transformada Wigner-Ville, en la tercera gráfica se presenta la transformada de Wigner-Ville en 3D y en la cuarta gráfica situada a la derecha se muestra espectro de potencia de la transformada de Fourier.

### **Traza real.**

Se analizó la señal generada por el GPR, sin embargo pequeños objetivos, tales como un cambio de capa o de estrato pueden ser oscurecidos por la onda directa y su reflexión superficial, por lo que la onda directa y su reflexión son removidos mediante la aplicación de un filtro (un simple promedio de autoregresivo movimiento), para quitar la parte de estos ecos no deseados, en el resultado solo vemos las componentes de reflexión de nuestro interés, (Lopera, 2007).

Se utilizaron las 800 trazas generadas por el GPR, a cada una de ellas se calculó la Transformada de Wigner-Ville, y para ejemplificar el procedimiento, se muestra la traza No. 285, de las 20 trazas seleccionadas en la zona de anomalías del radagrama.

En la Figura No.4.48, se puede ver en la gráfica superior, la traza real número 285, a la cual se removió la onda directa y su reflexión, pero en la cual no podemos definir la aparición de los reflejos que deberían ser representados de la parte superior e inferior del tambo enterrado.

En la segunda gráfica se representa, el plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville, donde se ve la ventana temporal completa, la cual corre de manera horizontal mostrando la resolución temporal y donde se ve el tiempo de aparición de los reflejos entre los 18 ns y los 37 ns., la forma de los armónicos es más amplia que en los reflejos obtenidos mediante este mismo proceso para la traza de radagrama sintético, sin embargo todavía se definen.

Además la frecuencia corre verticalmente y muestra la resolución frecuencial, donde se ve la frecuencia y la forma de los armónicos en amplitud y fase, los colores muestran el nivel de energía de la transformación.

En la tercera gráfica se muestra la transformada de Wigner-Ville en 3D, de la misma traza, donde los ejes X, Y y Z representan respectivamente el tiempo, la frecuencia y el nivel de energía de la transformación de Wigner-Ville. La resolución temporal se ve mejor definida que en la representación del plano tiempo-frecuencia, los reflejos que representa el cambio de las características de los estratos, por lo que suponemos se debe al tambo metálico previamente enterrado, con lo cual corroboramos que la traza sintética, nos genera una información similar a la traza real.

En la cuarta gráfica que se encuentra a la derecha de la Figura No.4.48, representa el espectro de potencia de la transformada de Fourier, en donde se visualiza la frecuencia central de 270 MHz., con lo que corrobora la información del plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville.



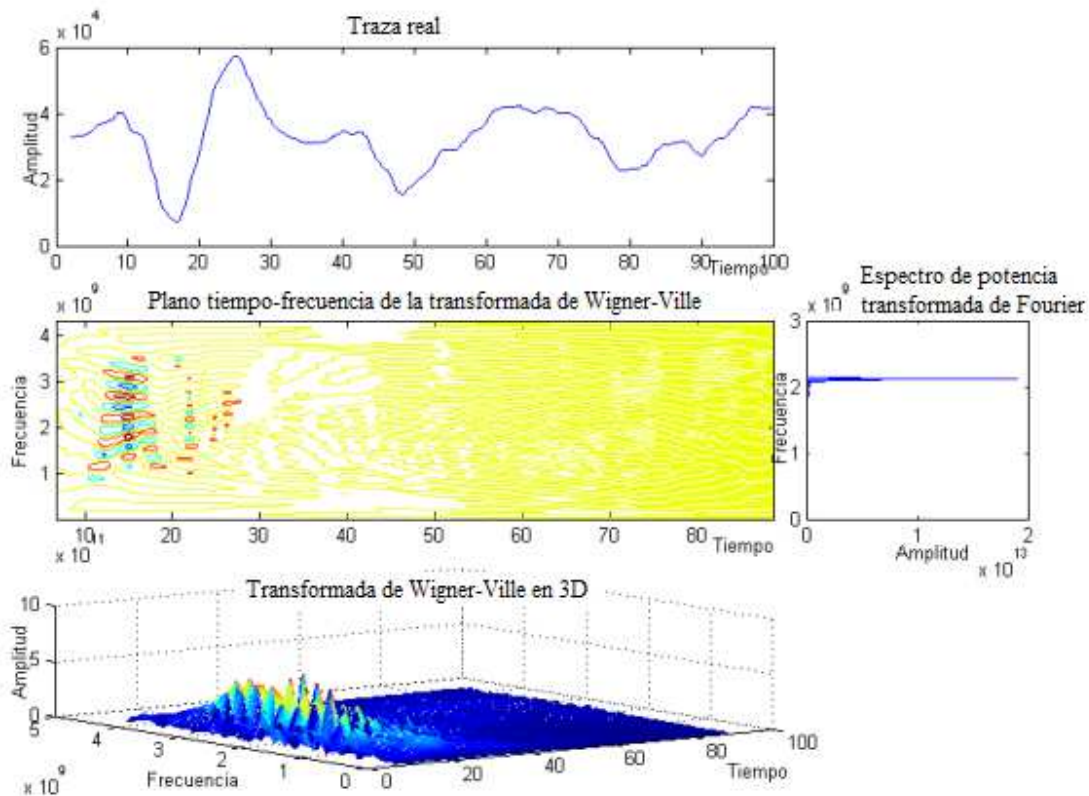


Figura 4.48.- Gráfica superior muestra la traza real obtenida con el GPR del radagrama sintético, a la cual se removió la onda directa y su reflexión, la segunda gráfica muestra el plano tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville, la tercera gráfica de la transformada de Wigner-Ville en 3D y la cuarta gráfica situada a la derecha de la figura muestra el espectro de potencia de la transformada de Fourier.

En estas representaciones graficas, denotamos claramente la zona de cambios en tiempo, frecuencia y densidad de energía, que representa el cambio de las características del medio, por lo que se supone que se debe tratar del tambo metálico previamente enterrado. En los reflejos se observa el aumento de los valores de longitud de la onda, donde casi se pierde la relación que guardan la longitud de onda y el espesor entre capas, por lo que en el plano todavía se diferencian las dos capas.

Al visualizar este fenómeno, nos permite diferenciar la forma en que los reflejos se muestran en la señal, se hace necesario conocer la forma que tiene la entrada del sistema de GPR. En el modelo se ve la forma del pulso producida por modelo, lo que permite analizar de mejor manera los resultados del estudio real.

La selección que se hizo de la antena del radar, según los requerimientos del objetivo de estudio que se realiza, nos permitió ver los rasgos o características del modelo propuesto, de manera que aún se permitían distinguir en el estudio, sin embargo la resolución en tiempo fue menor y se podría haber mejorado con otra frecuencia central.

### Modelo en 1-D sintético de la traza real.

Con la misma información y siguiendo el proceso de análisis, se tomaron los mismos parámetros de la traza sintética del modelo propuesto, se generaron nuevamente diferentes trazas sintéticas en las que se fue variando la profundidad conforme el perímetro del tambo metálico y de la misma manera que en los modelos M1 al M7 de la Tabla 5, obteniendo un modelo en una dimensión, que define una parábola que representa al tambo metálico, lo que se puede ver en la Figura No. 4.49.

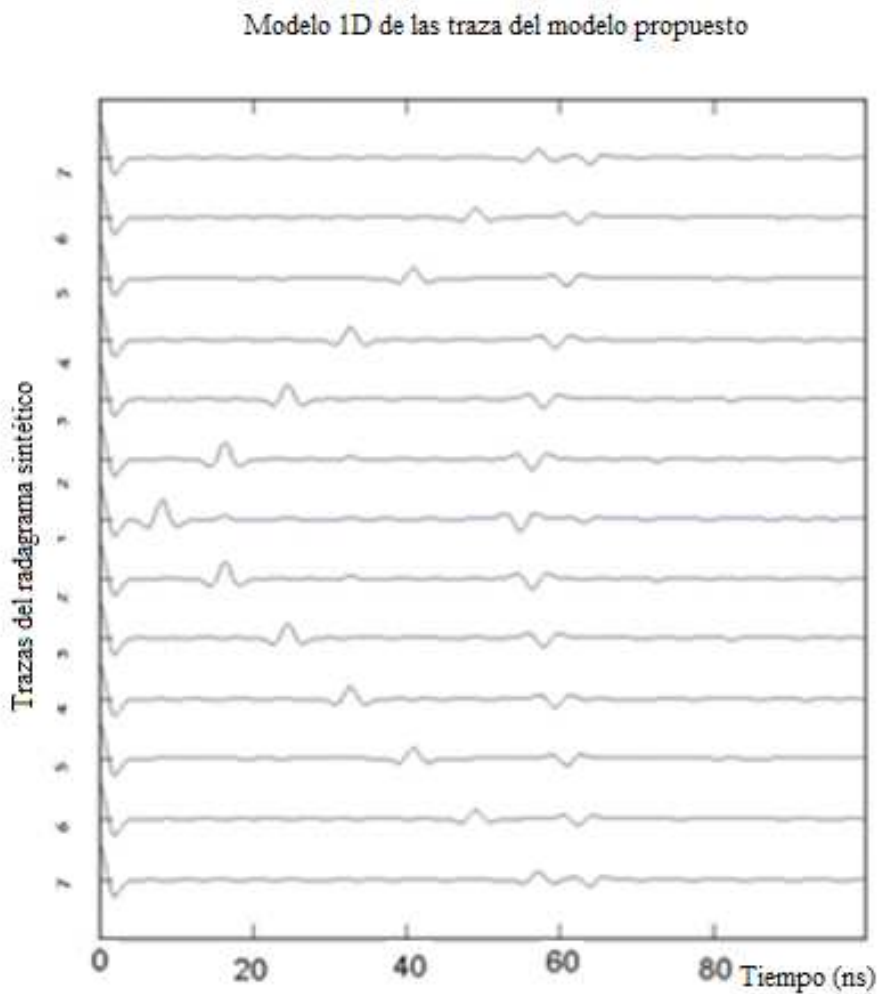


Figura 4.49.- Las 13 trazas sintéticas del modelo propuesto, en donde se varió la profundidad de las características del medio, conforme al perímetro del tambo metálico, iniciando en la traza M7 a la M1 y a partir de esta se repitieron de la M2 a la M7 y en las que se pueden ver los reflejos.

### Modelo en 2-D sintético de la traza real.

Posteriormente se representaron los planos tiempo-frecuencia obtenidos, para formar parte de un modelo en dos dimensiones, las cuales van definiendo también la forma característica de la representación de la señal de GPR.

En la Figura No. 4.50, podemos ver la representación de estos planos tiempo-frecuencia en los que se ve la forma característica de la representación parabólica de la señal de GPR, donde se ve la ventana temporal completa de cada una de las trazas, la cual corre de manera horizontal mostrando la resolución temporal y donde se ve el tiempo de aparición de los reflejos. Se puede ver también la frecuencia que corre verticalmente y muestra la resolución frecuencial, donde se ve la frecuencia y la forma de los armónicos en amplitud y fase y los colores muestran el nivel de energía de la transformación..

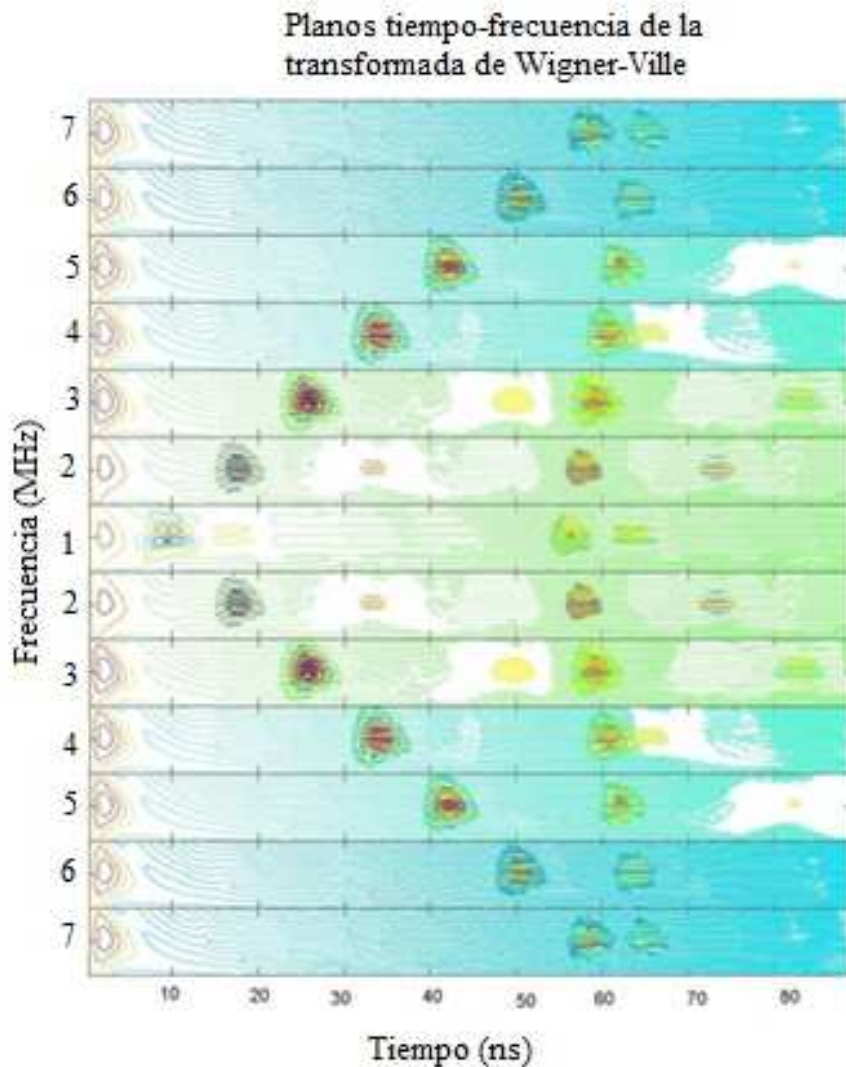


Figura 4.50.- Planos tiempo-frecuencia de la transformada de Wigner-Ville, con las características de la señal y la variación en profundidad de las 13 trazas del modelo propuesto.

### Modelo en 3-D sintético de la traza real.

Con estas trazas 16 trazas sintéticas del modelo propuesto, y aumentando tres traza más calculadas, se genera el modelo 3-dimensiones que se representa en la Figura No. 4.51, con lo que podemos visualizar lo que en un radagrama real podría representar una anomalía en forma de parábola.

En el eje X mantienen el tamaño de la ventana temporal completa en cada una de las trazas, el cual corre de manera horizontal mostrando la resolución temporal y donde nuevamente se ve el tiempo de aparición de los reflejos con la variación en profundidad de cada una de las trazas. Además, en el eje Y, se ve la frecuencia que corre verticalmente y muestra la resolución frecuencial, donde se ve la frecuencia y la forma de los armónicos en amplitud y fase, en el eje Z se representan las trazas y los colores muestran el nivel de energía de la transformación.

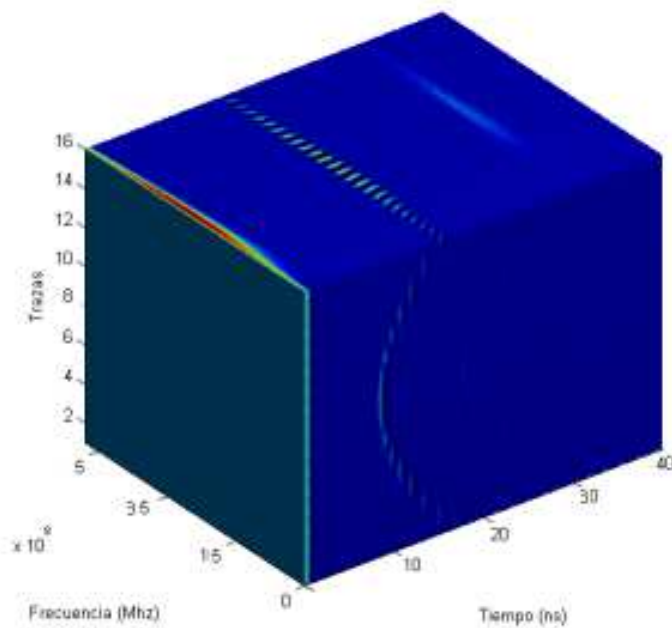


Figura No. 4.51.- Las 16 trazas del modelo propuesto representadas en un modelo 3-Dimensiones, con lo que podemos visualizar como se representarían en el radagrama real, y lo que sería una anomalía en forma de parábola.

Se hizo el proceso para todas las trazas del radagrama real,

Se tomaron 16 de las 20 trazas seleccionadas del radagrama real, con obtuvo un modelo en 3-D, donde se define la parábola que también representa el tanbo metálico. Esto lo podemos ver en la Figura No. 4.52.

### Modelo en 3-D de la traza real.

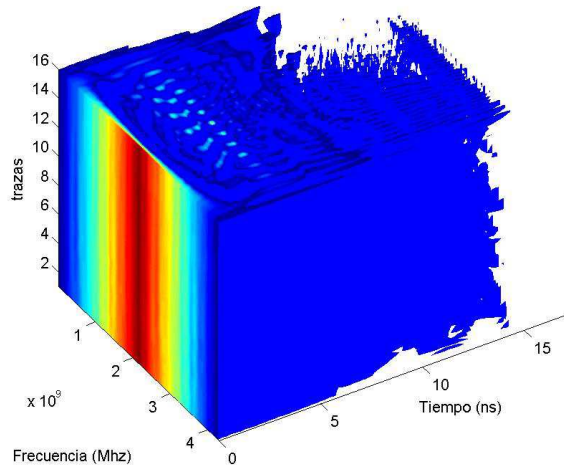


Figura No. 4.52.- Las 16 trazas del modelo real representadas en un modelo 3-Dimensiones, con lo que podemos visualizar la representación real del radagrama, y lo que sería la forma de la anomalía real.

### Modelo de frecuencia instantánea de las trazas complejas sintéticas del modelo real.

Y se genera el modelo de frecuencias instantáneas de las trazas sintéticas a partir del espectro de tiempo-frecuencia de Wigner-Ville. Ver figura No. 4.53.

Primero considerando la traza sintética y después eliminando la onda directa y su reflexión son removidos mediante la aplicación de un filtro (un simple promedio de autoregresivo movimiento), para quitar la parte de estos ecos no deseados

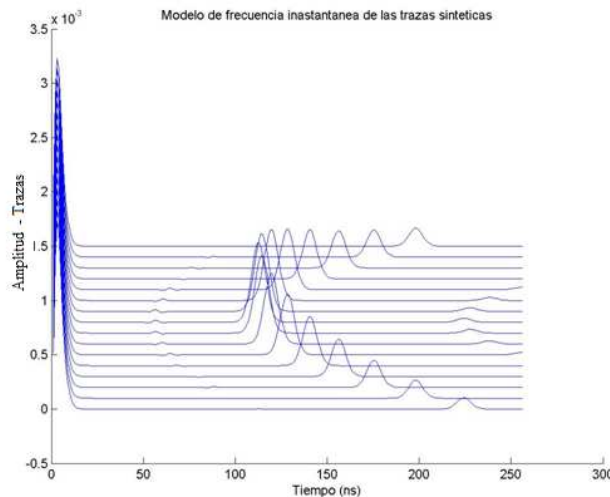


Figura No 4.53.- Las 16 trazas del modelo sintético representadas en un modelo 3-Dimensiones, con lo que podemos visualizar la representación del atributo de frecuencia instantánea en el radagrama sintético y lo que sería la forma de la anomalía.

### Modelo de frecuencia instantánea de las trazas complejas sintéticas de las trazas reales removiendo ecos no deseados.

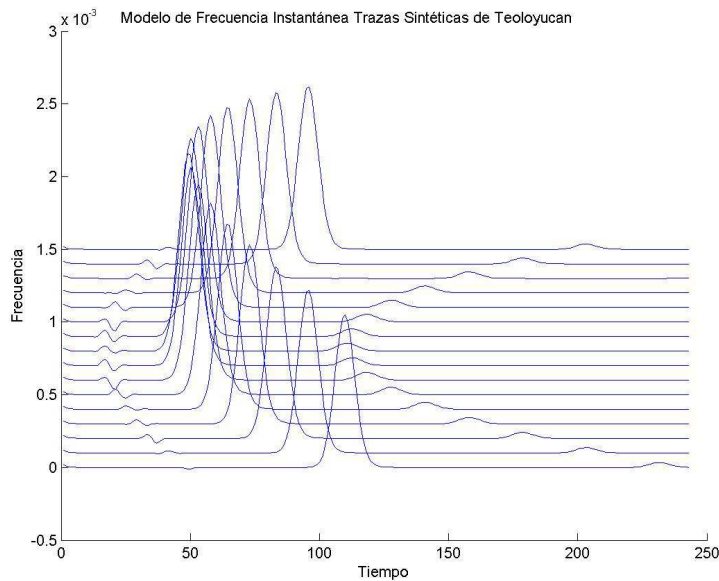


Figura No. 4.54.- Las 16 trazas del modelo sintético representadas en un modelo de 3-Dimensiones, con lo que podemos visualizar la representación del atributo de frecuencia instantánea en el radagrama sintético y lo que sería la forma de la anomalía, removiendo los ecos no deseados.

### Modelo de las trazas reales.

Ahora tomamos las trazas del radagrama real para obtener desde el espectro tiempo-frecuencia de Wigner-Ville el atributo de frecuencia instantánea y obtenemos. Figura 4.55.

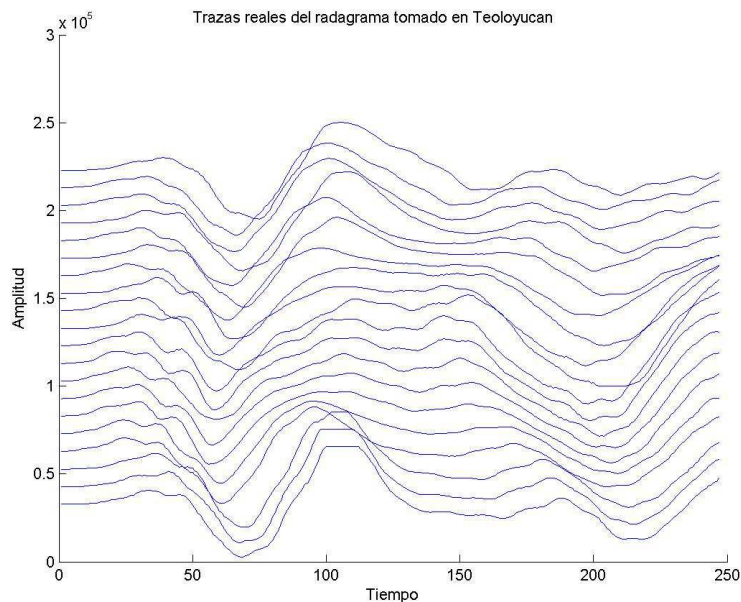


Figura No. 4.55.- Las 16 trazas del modelo real representadas en un modelo 3-Dimensiones, en las que no distinguimos una anomalía específica.

### Modelo de frecuencia instantánea de las trazas complejas del modelo real.

De genera el modelo de frecuencias instantáneas de las trazas complejas del modelo real ver figura No 4.56.

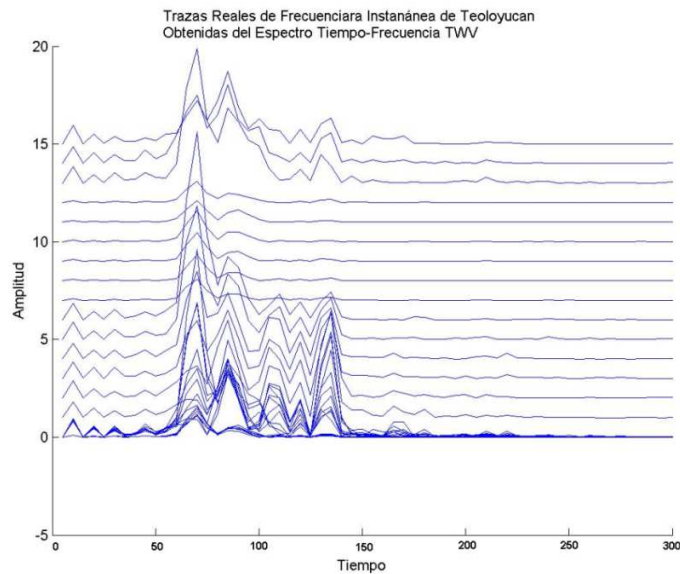


Figura No. 4.56.- Las 16 trazas del modelo real representadas en un modelo 3-Dimensiones, con lo que podemos visualizar la representación del atributo de frecuencia instantánea en el radagrama real y lo que sería la forma de la anomalía.

### REPRESENTACIÓN DEL RADAGRAMA REAL.

Se representa el modelo real en la figura no. 4.57.

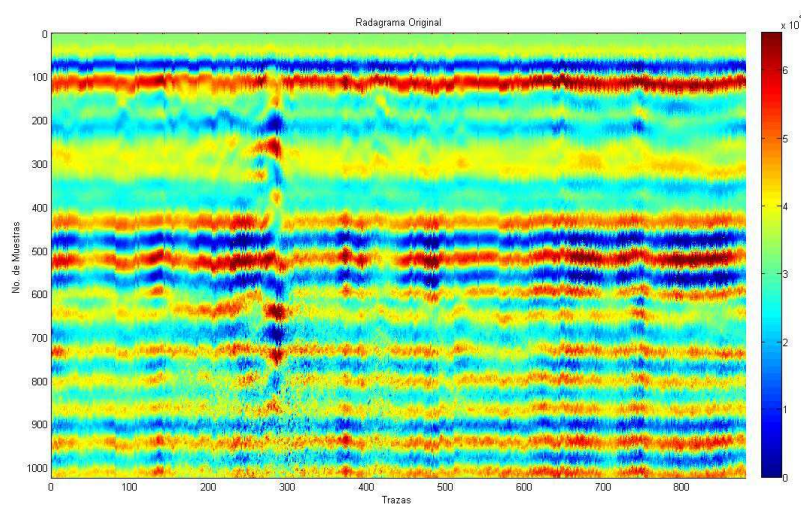


Figura 4.57.- Radagrama real.

## REPRESENTACIÓN DEL RADAGRAMA DE FRECUENCIAS INSTANTÁNEAS DEL RADAGRAMA REAL.

El análisis se realiza en todas las trazas, del radagrama real a continuación se presenta en la Figura 4.58 se presenta el radagrama analizado con el atributo de frecuencia instantánea obtenido finalmente en el análisis. En el podemos visualizar el tiempo de aparición de los reflejos entre los 18 ns., para lo que representaría el tambor que fue enterrado

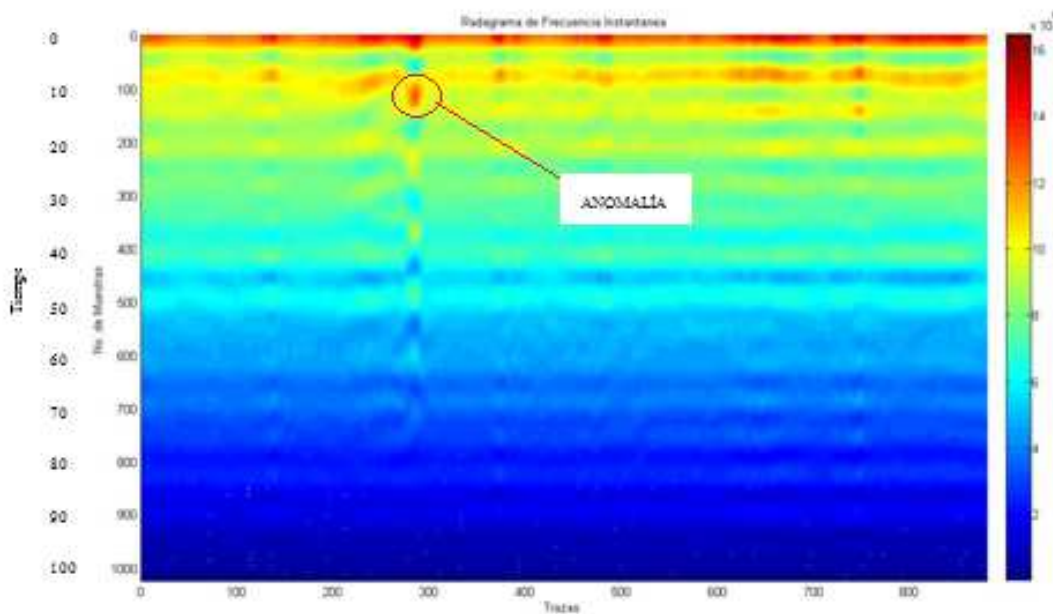


Figura 4.58.- Se presenta el radagrama de las frecuencias instantáneas donde podemos visualizar con más precisión el lugar de la anomalía que produce el tambor enterrado en el lugar de estudio



## CONCLUSIONES

Para analizar los datos de GPR y realzar eventos que no se encontraban claramente definidos en la señal, se presenta una secuencia de análisis, que permite interpretar de manera más adecuada las características del subsuelo y localizar anomalías en el cambio de características de la señal.

Se implementa el algoritmo en el proceso para la obtención del radagrama sintético, simulando el medio geológico en el que se realiza la prospección, usando las características de cada capa o estrato, como son; el tipo de material, la profundidad, la permeabilidad magnética, la conductividad eléctrica, etc., las cuales varían en cada capa del subsuelo.

Con los parámetros anteriores se obtiene una serie de tiempo continua, especificada en tiempo discreto, donde definimos una ventana de tiempo determinada, con un número fijo de muestras por registro, con lo que se resuelve el modelo directo, obteniendo el campo eléctrico en la superficie del terreno.

Mediante el Teorema de la Convolución en el dominio de la frecuencia, se opera el campo eléctrico obtenido con un pulso eléctrico, en este caso el pulso de Ricker, definiendo la traza del radagrama sintético y mediante la Transformada de Fourier se pasa al dominio del tiempo

Las características del radagrama sintético obtenido en el dominio del tiempo, se mejoran considerando la frecuencia de Nyquist, variando la frecuencia del sistema se logra ver la relación entre la longitud de onda y el espesor de la capa, además se visualiza la diferencia en la forma de los reflejos en cada capa.

Al visualizar el fenómeno anterior, también se ve que la longitud de la onda afecta la capacidad del GPR para identificar los estratos en un medio geológico. Las diferentes antenas del GPR, cuando transmiten frecuencias altas, obtienen una mejor resolución de las capas, pero la profundidad de penetración disminuye mientras que si las antenas transmiten frecuencias bajas, consiguen más penetración en los estratos del subsuelo pero menor resolución en las capas.

Es posible introducir un factor de desplazamiento para visualizar mejor las reflexiones de la onda directa al entrar al subsuelo y poder apreciar la incidencia de energía en la superficie del terreno.

En ocasiones las secciones típicas de radar muestran múltiples reflejos relacionados únicamente a permitividad eléctrica, algunas de estas reflexiones se relacionan con la conductividad eléctrica. Al analizar el comportamiento del radar, se observa que la reflexión se invierte al pasar de una capa de mayor permitividad a otra de menor permitividad y la amplitud del reflejo de la segunda capa disminuye.

Cuando la reflexión pasa de una capa de menor permitividad a otra de mayor permitividad la aparición del reflejo en la primera capa cambia de forma, al pasar a la siguiente capa el reflejo regresa a su forma original, además a este reflejo le toma más tiempo en aparecer. Lo que permite ver en una traza real, que la aparición del reflejo del radar en el radagrama

puede variar en tiempo o que el reflejo puede estar invertido, esto depende del contraste de permitividad en el medio.

Al variar el contraste de resistividad se logra ver que a mayor resistividad, corresponde un factor de atenuación menor y consecuentemente una menor amplitud de onda, por lo que se debe cuidar esta variación en un medio geológico.

Cuando se pasa de un medio de menor conductividad a otro de mayor conductividad o a la inversa, se debe cuidar el cambio debido a que el tiempo y la forma de aparición de los reflejos se presentan de manera diferente en la señal de GPR.

Cambiando la profundidad de las condiciones geológicas, la aparición de los reflejos es de tal manera que se pueden identificar geometrías características, uniendo varias trazas se forma un modelo en una dimensión, identificándose la forma de una parábola, además se observa el cambio de características en cada una de las capas o estratos, forma que comúnmente se presenta en los radagramas.

A la traza del radagrama sintético, obtenida del modelo para un medio estratificado isótropo y homogéneo en una dimensión, se analiza utilizando el algoritmo desarrollado por Auger, et. al. (1996) para la transformada de Wigner –Ville, especificando su segmento temporal, manteniendo el producto de la resolución espectral por la resolución temporal, debido al principio de incertidumbre de Heisenberg y se logran ver los cambios de frecuencia en el tiempo.

Los resultados se indican en cuatro gráficas, la primera muestra la traza de radar analizada, la segunda muestra el plano tiempo-frecuencia en dos dimensiones, el tiempo en el eje horizontal, la frecuencia en el eje vertical y en colores la energía de la transformación. La tercera es una gráfica en 3D que muestra un espacio tiempo- frecuencia y amplitud. En la cuarta gráfica se muestra el espectro de potencia de Fourier, el cual corrobora como la frecuencia central del sistema se está manejando.

Siguiendo la secuencia de análisis utilizada anteriormente, se hace variar la frecuencia central del sistema de radar y se ve como en cada uno de los casos se mantiene la ventana temporal completa que corre de manera horizontal, mostrando la resolución temporal, en donde los reflejos se presentan nuevamente al mismo tiempo. La frecuencia corre de manera vertical mostrando la resolución frecuencial, donde la forma de los armónicos se presenta de la misma manera en su amplitud y fase. Por último los colores indican el nivel de energía de la transformación.

Cuando varía la frecuencia en el plano tiempo frecuencia en la ventana temporal, los valores de la longitud de onda, así como la relación que guardan la longitud de onda y el espesor de la capa también varían. La frecuencia cambia así como la forma de los armónicos cambia en amplitud y fase, al disminuir la frecuencia de 200 MHz a 100 MHz y luego a 40 MHz, se nota como aumenta la longitud de la onda, en los 40 MHz se pierde la relación que guarda la longitud de onda y el espesor de la capa, por lo que no se pueden diferenciar las dos capas mostradas.

Al aplicar un desplazamiento se observa cómo la ondícula de Ricker se desplaza y se refleja completamente, así como, la primera y la segunda capa.

Al hacer los contrastes de permitividad en las capas, se muestra que el reflejo de la capa con mas permitividad absorbe la mayor parte de la energía de la señal, el reflejo de la segunda capa, de menor permitividad, tarda en presentarse y la energía se debilita.

Los contrastes de resistividad se muestran y se aprecian como de mayor a menor resistividad, en la primera capa se absorbe la energía de la señal por lo que se hace visible en el plano tiempo-frecuencia, al contrario si se pasa de uno de menor resistividad a otro de mayor, el factor de atenuación es mayor, porque la primera capa produce una menor amplitud de la onda y el reflejo casi se pierde.

Una vez revisado el procedimiento para cada traza, se forma un modelo en dos dimensiones con trece trazas obtenidas, posteriormente se construye un modelo en tres dimensiones que nos permite visualizar la señal no estacionaria en donde vemos como evoluciona la frecuencia en el tiempo y la geometría esperada de la parábola.

El atributo de frecuencia instantánea extraído del plano tiempo-frecuencia nos revela propiedades de variación espectral en el tiempo que pudieron ayudar en la búsqueda de frecuencias ocultas o bajas, pudiendo seguir eventos débiles que pueden ayudar a la interpretación de la señal, dándonos una reflexión más definida permitiendo ubicar mejor los reflectores, que en este caso fue producida por el tambo enterrado a una específica profundidad, permitiendo su localización de manera más precisa

Utilizando el atributo de frecuencia instantánea, obtenido mediante la traza compleja en el plano tiempo-frecuencia, se logra ver la anomalía, en nuestro caso el tambo metálico, con una mejor resolución en el radagrama reconstruido.

Todos estos procedimientos se aplican en el modelo, en el cual vemos que las consideraciones hechas aplican de manera correcta, ubicando el tambo metálico enterrado en el subsuelo con la ventaja de ser una metodología en tres dimensiones en las cuales no se pierde ni se distorsiona la llegada de los reflejos proporcionados por la reflexión de la señal de GPR.

Por lo que el empleo de la transformada de Wigner-Ville suministra otra visión de la señal de GPR, que complementa lo que otros mecanismos pueden lograr, proveyéndonos una representación más precisa de la evolución de la señal, facilitando su clasificación, modelado y determinación de las anomalías en la señal permitiendo interpretar de manera más exacta las características del subsuelo.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El sistema GPR es una técnica de exploración geofísica en donde se consideran diversos parámetros para su utilización, pues presenta limitaciones en términos de eficiencia y ganancia de las antenas que emplea. Su éxito depende de que el compromiso entre la resolución y la profundidad sea alcanzado, por lo que en el modelado de GPR hay que determinar las ecuaciones para el medio geológico en el que se realice la prospección.

Para que la antena que se elija no dé lugar a que rasgos importantes sean atenuados o perdidos por completo, estas deben ser cuidadosamente seleccionadas en función del objetivo de estudio.

Con el fin de cuantificar la proporción de las corrientes de conducción y de desplazamiento de la onda electromagnética y poderlas comparar con el rango de frecuencias del GPR, es necesario conocer la proporción que guardan, tanto la permitividad, como la conductividad eléctrica de los materiales en el medio geológico, considerando que la permeabilidad magnética tiene una contribución al campo eléctrico.

El método directo obtiene radagramas por variaciones verticales de cualquiera de las propiedades eléctricas y magnéticas, este método se realiza en el dominio de la frecuencia, que de manera rápida calcula las amplitudes del campo eléctrico de cada capa, dando información sobre la forma en que la onda electromagnética se propaga en el medio y así modelar y definir los parámetros del radagrama.

Para ver la incidencia de las componentes de la señal de GPR en la modificación de los parámetros electromagnéticos, se construyen los radagramas sintéticos y se aplica la transformación tiempo-frecuencia para visualizar sus características.

Al recordar las representaciones en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia, se observa claramente que la transformada de Fourier no es apta para el análisis de señales no estacionarias. Esto debido a que en esta transformación de la señal en ondas infinitas sinusoidales, las señales no estacionarias no son localizadas en el tiempo.

Se introduce el concepto de localización tiempo-frecuencia y el producto tiempo-banda ancha, asociado al principio de incertidumbre de Heisenberg. Es ahí donde los operadores de las variables no conmutan, es decir, se trata de dos variables relacionadas entre sí, donde existe alguna propiedad que no se puede cumplir al mismo tiempo para ambas. Lo que nos puede dar un efecto de mejora en la primera variable, implica forzosamente la pérdida de resolución en la segunda, de tal forma, que en una transformada tiempo-frecuencia se llega a un punto límite, en el cual la duración para frecuencia y tiempo respectivamente, no puede ser mejorada simultáneamente.

En la representación tiempo-frecuencia se aprecia cómo van evolucionando las componentes de frecuencia a lo largo del tiempo analizado y el valor de la amplitud es cada par dado por las coordenadas (tiempo, frecuencia). En los últimos años, diferentes

representaciones tiempo-frecuencia se han desarrollado dependiendo de su aplicación, resulta conveniente que satisfagan diferentes propiedades, que tengan sus características de resolución y que sus términos de interferencia sean concretos.

Frente a una aproximación clásica, podemos decir que mediante una representación tiempo-frecuencia, normalmente se tiene una prueba de decisión más sencilla a la hora de resolver problemas de clasificación o detección. Cuando en la teoría de decisión no existe un criterio totalmente establecido, es posible formular soluciones basadas en una mejor comprensión de la señal y así modificar el algoritmo de detección para mejorarlo.

En la interpretación de la señal de radar, la unión en el dominio tiempo-frecuencia provee una nueva herramienta para el análisis y proceso de la señal. Las propiedades no estacionarias de la señal de GPR permiten la aplicación de la transformada de Wigner-Ville, con la cual, se obtiene un plano tiempo-frecuencia que determina el rango de frecuencia que contribuye a la señal en una escala de tiempo estudiado. El análisis espectral es llevado al dominio de Wigner-Ville y este proceso permitió observar cambios en la señal en forma de reflectores en tiempo, para un rango de frecuencias.

Al usar las definiciones de atributos espectrales desde el plano tiempo-frecuencia, en la distribución de Wigner-Ville, cuyo kernel es 1, se obtiene el atributo de frecuencia instantánea en la traza compleja de la distribución, ayudando a seguir eventos débiles en la señal de radar. Esto se puede emplear en la interpretación estratigráfica o para definir geometrías internas de estratos, como fallas o fracturas, o bien objetos como tuberías, acero de refuerzo en concreto, etc. También se puede revelar patrones relacionados con ambientes de sedimentación y/o contaminación, entre otros.

Es posible determinar cualitativamente la profundidad de los reflectores ocurridos, con la ayuda de la información estratigráfica obtenida en pozos.

El método de solución resuelve la ecuación de onda para el campo eléctrico, los radagramas obtenidos son consistentes con la física del problema ante diferentes situaciones de contrastes de las propiedades electromagnéticas, como la resistividad, la permitividad, y también la variación en el espesor de capa.

Actualmente el desarrollo de las técnicas de procesamiento en tiempo-frecuencia, es motivo de profundas investigaciones que tienen por finalidad el poder enfrentar con una mayor certidumbre los problemas de identificación de características de la señal, para así poder comprender mejor la evolución de señales en el subsuelo.

La técnica desarrollada puede ser empleada para predecir o corroborar la respuesta de diferentes modelos, los que se relacionan a trabajos de campo y también apoyan la definición de los parámetros de ganancia en los equipos utilizados.

El método determina correctamente los pulsos primarios en cuanto a su forma y al tiempo de aparición y es eficiente en términos de recursos de cómputo.

El empleo del modelo directo permite obtener para un modelo estratificado unidimensional, variando las propiedades electromagnéticas de cada estrato mediante una relación de recurrencia, la traza de radar sintética, simulando el comportamiento del subsuelo. Con esta metodología se determinan diferentes trazas sintéticas al establecer las características del medio para diferentes sistemas.

La transformada de tiempo-frecuencia de Wigner-Ville mejora las técnicas de análisis de señales, mostrándonos otra visión de la señal de GPR al ser más precisa en la evolución de la señal, facilitando su clasificación, modelado y determinación de características que presentan las señales.

Basado en la amplitud de la traza compleja, el atributo de frecuencia instantánea, nos ayuda a interpretar y seguir los eventos de las señales más débiles, porque nos da una medida específica de las características geométricas y /o estadísticas de la información contenida en la señal.

Este atributo también establece la información de frecuencia característica de los eventos, esto lo hace mediante una reflexión individual que se produce por un solo efecto. A través de la reflexión compuesta se produce un modelo que cambia su carácter de la misma forma que cambian los efectos de la señal.

Como se ha visto que se pueden combinar los atributos de la señal a través de la estadística, las redes neuronales o las manipulaciones matemáticas, los atributos de traza compleja se siguen investigando con la finalidad de obtener más y mejores características de la señal.

Con lo desarrollado en el trabajo anterior, podemos concluir que se presenta uno de los primeros trabajos que se hacen de GPR, con un análisis espectral en tiempo- frecuencia mediante la transformación de Wigner-Ville, mejorando y complementando lo que otros métodos han hecho. Por ser una transformación con un operador bi-lineal, abre nuevos y más campos de investigación que permiten mayor exactitud en la interpretación de la señal.

Continuando con el modelo inverso, se pretende conocer desde la representación del modelo directo, las características de la señal con la que fue construido o registrado, de tal manera que es necesario implementar en estudios posteriores el algoritmo para la transformación inversa de Wigner-Ville, investigando también otras transformaciones en tiempo-frecuencia bi-lineales que tengan propiedades y kernels diferentes, con el fin de conocer características determinadas de la señal.

Se pretende continuar el trabajo con el atributo de banda ancha compleja, con lo que se complementaría el análisis general de las trazas complejas de una señal de GPR.

## BIBLIOGRAFÍA

### Capítulo I

- ◆ Acebal J.B., 1999. Tratamiento Digital de la Señal. Alfa Omega, Ediciones UPC. 256. pp.
- ◆ Anguiano R.R.A. 1996. Introducción al Análisis de Fourier. México UNAM. Facultad de Ingeniería. 263. pp.
- ◆ Annan A.P., 1992. Ground Penetrating Radar, Workshop Notes. Sensor and Software. Ontario Canada. 125. pp.
- ◆ Annan A.P., and Chua L. T., 1992. Ground Penetrating Radar Performance prediction. Ground Penetrating Radar. Geological Survey of Canada. Canada 5-13. pp.
- ◆ Argote E. D. L., 2002. Caracterización geofísica de sitios arqueológicos: Medio rural y urbano. Tesis de maestría, UNAM.
- ◆ Balanis, C. A., 1989. Advanced engineering electromagnetic. John Wiley & Sons.
- ◆ Bhattacharyya B. K. 1963. Electromagnetic field of vertical magnetic dipole placed above the earth's surface. Geophysics 28. pp. 408-426.
- ◆ Blancas V. J. E., 2000. Principios y aplicaciones del método de radar de penetración terrestre (GPR). Tesis de licenciatura, UNAM.
- ◆ Davis, J. L., Roberts, R. and Vendl, M. 1995. Ground penetrating radar for the detection of liquid contaminants. Journal of applied geophysics 33 p 195-207.
- ◆ Davis, J. L. and Annan, A. P., 1989. Ground penetrating radar for high resolution mapping off soil and rock stratigraphy. Geophysical prospecting, v 37, p. 531-551.
- ◆ Diaz M. O., 2003. Modelación en 1D directa e inversa de datos de radar de penetración terrestre. Tesis de maestría, UNAM.
- ◆ Chen-To-Tai; 1971. Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory. Electrical Engineering Monograph Series. Intext Educational Publishers Scranton-London 246. pp.
- ◆ Escobar-Salguero L. H. y Cortes-Soto F. D., 2000. Fundamentos de Teoría Electromagnética. Facultad de Ingeniería. UNAM. México. 243. pp.
- ◆ Freschknicht F. C. 1967. Field about and oscillating magnetic dipole over two-layer Herat, and application to ground and airborne electromagnetic survey. Quart Colorado Sch Mines. Vol. 62, 326. pp.
- ◆ Hsu, H. P., (1973). Análisis de Fourier. Colombia. Colección del Fondo Educativo Interamericano. 274. pp.
- ◆ Keller, George V., and Freschknicht F. C. 1966. Electrical Methods in Geophysical Prospecting, Pergamon Press Oxford. 519. pp.
- ◆ King Ronold W. P. 1963. Fundamental Electromagnetic Theory. Dover Publications. Nueva York. 580. pp.
- ◆ Lázaro-Mancillas O. and Gómez Treviño E. 1996. Synthetic Radiograms from Electrical Conductivity and Magnetic Permeability Variations. Journal of Applied Geophysics 34. pp. 283-290.
- ◆ Lines, L.R and Treitel, S. 1984. Tutorial: A Review of least-Squares Inversion and its Application to Geophysical Problems. Geophysical Prospecting. Vol.32.2. 159-186 pp.

- ◆ Lui, C. L. y J. W. S. 1975. Linear System Analysis. Japón. International Student Edition, McGraw-Hill, 467. pp.
- ◆ Nathan Ida, 1995. Numerical Modeling for Electromagnetic Non- Destructive Evaluation. Chapman & Hall Great Britain. 511. pp.
- ◆ Orellana E. 1974. Prospección Geoeléctrica, por Campos Variables. Paraninfo. Madrid. 571. pp.
- ◆ Peniche E. J. F. 2008. Modelado de la respuesta de GPR de una tierra estratificada empleando el metodo WKBJ. Tesis Licenciatura. UNAM.
- ◆ Peterson A. F., Ray S. L. and Mitra R., 1998. Computational Methods for Electromagnetics. IEEE Press & Oxford University Press. New York. 278. pp.
- ◆ Sadiku, M. N. 2001. Numerical Techniques in Electromagnetics CRC Press Florida. 743. pp.
- ◆ Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D. y Freedman, R. A. 1999. Física Universitaria. Prentice Hall. 1480. pp.
- ◆ Stratton J. A. 1954. Electromagnetic Theory. McGraw Hill. New York. 307. pp.
- ◆ Taflove Allen. 1998. Advances in Computational Electrodynamics the Finite Difference Time-Domain Method. Artech House. Boston-London. 724. pp.
- ◆ Van'Yan, 1967. Electromagnetic depth sounding (Traducción del Ruso por G. V. Keller) Consultas Bureau Nueva Cork. 312. pp.
- ◆ Wait J. R. 1953. Propagations de Radiowaves over a stratified ground Geophysics. 18 pp. 416-422.
- ◆ Wait J. R. 1953. The fields of line source of current over a stratified conductor. Appl. Sc. Research B.3. pp 279-292.
- ◆ Wait J. R. 1962. Introduction to the theory of VLF propagation. Proc IRE, 50. pp. 1624.
- ◆ Ward, S. H., 1967. Electromagnetic theory for Geophysical Applications. En Mining Geophysics. Vol.II, pp.9-196 SEG Tulsa.
- ◆ Weng Cho C., 1995. Waves and fields in inhomogeneous media. University of Illinois Urbana-Champaign. IEEE PRESS Series Editor. New York. pp 608.
- ◆ Wolf A. 1946. Electric field of an oscilating dipole over the surface of a two layer earth. Geophysics. 11 pp. 518-534.
- ◆ Zavorovsky, A. I. 1963 Electrorazvedka Gostoptehizdat. Moscu.

## Capítulo II

- ◆ Allen, J. B., 1982. Application of Shor-time Fourier transforma to speech processing and spectral analysis. IEEE. Int. Acoust., Speech, Sig. Proc., pp1012-1015, Mayo.
- ◆ Auger, F. 1991. Representations temps-frequence des signaux non-stationarires: synthese et contributions. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, France.
- ◆ Auger, F.; Flandrin, P.; Gonçalvès, P. 1995-1996. Time-frequency Toolbox for use with MATLAB. CNRS. Francia.



- ◆ Bastiaans, M. J. 1995. Gabor's expansion and the Zak transform for continuous-time and discrete-time signal: critical sampling and rational oversampling. Eindhoven University of Technology Research Report. EUT. Report 95-E-95. NETHERLANDS. ISBN; 90-6144-295-8.
- ◆ Boudreaux- Bartels, G.F.; Murray, R. 1995. Time-frequency signal representation for biomedical signal. Biomedical Engineering Handbook. Bronzino. J. D. IEEE Press. CRC Press. USA.
- ◆ Callahan, M. J. 1976. Acoustic signal processing based on the short-time spectrum. University of Utah. Report CSC-76-209. Marzo.
- ◆ Claasen, T. A. C. M.; Meckenbrauker, W. F. G. 1980. The Wigner distribution – tool for time frequency signal analysis. Part I: continuous time signals. Philips J. Res., pp 217-250 vol. 35 (a).
- ◆ Claasen, T. A. C. M.; Meckenbrauker, W. F. G. 1980. The Wigner distribution – tool for time frequency signal analysis. Part II: discrete time signals. Philips J. Res., pp 276-300 vol. 35 (b).
- ◆ Claasen, T. A. C. M.; Meckenbrauker, W. F. G. 1980. The Wigner distribution – tool for time frequency signal analysis. Part III: relations with other time-frequency signals transformations. Philips J. Res., pp 372-389 vol. 35 (c).
- ◆ Cohen, L., 1966. Generalized phase-space distribution function. J. Math. Phys. Pp.781-786. vol 7.
- ◆ Cohen, L. 1989. Time –Frequency Distributions. A Review. Proceedings of the IEEE, 77(7) pp 941-980.
- ◆ Cohen, L., 1995. Time Frequency Analysis. Prentice Hall Signal Processing Serie. USA. ISBN: 013-59452-1.
- ◆ Flandrin, P.; Escudiè, B. 1984. An interpretation of the pseudo-Wigner-Ville distribution. Signal Processing. pp. 27-36 vol. 6.
- ◆ Gabor. D. 1946. Theory of communication. Journal IEE (London), pp. 429-457, vol. 93.
- ◆ Hlawatsch, F. 1991. Time- frequency methods for signal processing. Technical Report 1291-0001. Dpt. Of Electrical Engineering University of Rhode Island.
- ◆ Hlawatsch, F.; Boudreaux- Bartels, G.F. 1992. Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations. IEEE. Signal Processing Magazine. pp. 21 – 67.
- ◆ Kay, S. M. 1993. Fundamentals of Statistical Signal Processing. Estimation Theory. PTR Prentice Hall Inc. USA. ISBN: 0- 13- 345711-7.
- ◆ Lieb, E. H. 1990. Integral bound for radar ambiguity function and Wigner distributions. J. Math. Phys., pp 594- 599, vol. 31, n. 3.
- ◆ Moyal, J. E. 1949. Quantum mechanics as a statistical theory. Proc. Cambridge Phil. Soc., pp 99-124, vol. 45.
- ◆ Peebles, P. Z. Jr. 1987. Probability Random variables and Random Signal Principles. McGraw-Hill International Editions. USA. ISBN: 0-07-100234-0.
- ◆ Porat, B. 1994. Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods. Prentice Hall Information and System Sciences Series. USA. ISBN: 0-13-063751-3.
- ◆ Portnoff, M. R. 1981. Short-time Fourier analysis of sampled speech. IEEE Trans, Acoust. Speech.Sig. Proc., pp 364-373, vol. 29, Jun.
- ◆ Proakis, J. G.; Manolakis, D. G. 1997. tratamiento digital de señales. Principios, algoritmos y aplicaciones. 3ª edición. Prentice-Hall.

- ◆ Quian, S.; Chen, D. 1996. Joint time-frequency análisis: methods and applications. Prentice Hall PTR. USA. ISBN: 0-3-254384-2.
- ◆ Rihaczec, W. 1969. Principles of High-resolution Radar. McGraw-Hill. New York.
- ◆ Rioul, O.; Vatterli, M. 1991. Wavelets and signal processing. IEEE Signal Magazine. pp. 14-38. October.
- ◆ Rioul, O.; Flandrin, P. 1992. Time-Scale energy distributions: a general class extending wavelet transform. IEEE. Transactions on Signal Processing. pp. 1746-1757, vol. 40, n .7.
- ◆ Rivera, D.; 2005. Atributos sísmicos mediante transformada ondicular discreta. Tesis doctoral . UNAM
- ◆ Rosado, A.; Bataller, M., Vicente, J. M.; Guerrero, J.; Chorro, J.; Francès, J. V. 2000. Detection methods based on a fast real time algorithm. Chicago. July.
- ◆ Rosado, A.; Marinez, M.; Serrano, A. J.; Soria, E.; Magdalna, J. R.; Francès, J. V. 1998. Anàlisis tiempo-frecuencia para fibrilacion ventricular. XVI. Congreso de la Sociedad Española de Ingeniría Biomedica (CASETB'98). Valencia. Septiembre.
- ◆ Steiner, S. 1981. Algorithms for ambiguity function processing. Speech. Sig. Proc., pp.588-599., vol ASSP-29.
- ◆ VanTress, H. L. 1971. Detection. Estimation and Modulation Theory. Part III. J. Wiley and Sons Publishing. New York.
- ◆ Ville. J. 1948. Theorie et applications de la notion de signales analytique. Cables et Transmission, pp 61-74., vol. 2A.
- ◆ Wigner, E. P. 1932. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. Physics. Review., pp 749-759, vol. 40.
- ◆ Woodward, P. M. 1953. probalbility and information theory with application to radar. Pergamon Press. London.
- ◆ Zeevi, J. 1995. Signal and image Representation in combined spaces. Academic Press Inc. Coifman, R.

### Capítulo III

- ◆ Anstey, N. A., 1977. Seismic interpretation: The physical aspect. Internat. Human Res. Develop Corp.
- ◆ Barnes, A. E., 1990. Analysis of temporal variations in average frequency and amplitude of COCORP deep seismic reflection data: 60<sup>th</sup> Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1553-1556.
- ◆ Barnes, A. E., 1992. Instantaneous frequency and amplitude at the envelope peak of a constant-phase wavelet. Geophysics, 56 1058-1060.
- ◆ Berkhout, A. J., 1984. Seismic Resolution: Resolving power of acoustical echo techniques: Geophysical Press.
- ◆ Cohen, J. K. 1990. Mathematic - a tool for scientists, in Project review, May 16, 1990, Consortium Project on Seismic Inverse Methods for Complex Structures: CWP-097.

- ◆ Cohen, J. K. 1990. Thomsen operators and Thomsen matrices, in Project review, May 9, 1995, Consortium Project on Seismic Inverse Methods for Complex Structures: CWP-185.
- ◆ Cohen, L. 1989., Time frequency distributions – A review: Proc. IEE, 77, 941 – 981.
- ◆ Cohen, L. 1995., Time-Frequency Analysis, Prentice Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs, New Jersey
- ◆ Cohen, L., and Lee, C., 1988. Instantaneous frequency, its standard deviation and multicomponent signals: Proc. SPIE, 975, 186-288
- ◆ Cohen, L. and Posch, T. E., 1985, Positive Time-Frequency Distribution Functions. IEEETrans. On Acoustics, Speech and Signals Processing, vol. 33, 31-37.
- ◆ McCarleyr, L. A., 1985. An autoregressive filter model for constant Q attenuation: Geophysics, 50, 748-758.
- ◆ Steeghs, T. P. H., 1997. Local power spectra and seismic interpretation: Ph.D.diss., Delf Univ. of Technology.
- ◆ Taner, M. T., Kohler, F., and Sheriff, R. E., 1979. Complex seismic trace analysis. Geophysics, 44, 1041-1063.
- ◆ Taner M. T., Schulke, J. S., Doherty, R. O., and Baysal E., 1995, Seismic attributes revisited, expanded abstracts, SEG Meeting, 1104-1106.
- ◆ Taner, T. H., and Sheriff, R.E., 1977, Applications of amplitude, frequency and other attributes to stratigraphic and hidrocarbon determination, in Payton, C, E. Ed., Seismic stratigraphy-Applications to hydrocarbon exploration: Am. Assn. Petr. Geol. Memoir 26, 301-328.
- ◆ Tobback, M. T., Steeghs, P., Fokkema, J., and Drijkoningen, G., 1996, Descomposition of seismic signals via time-frequency representations: Procced., 66<sup>th</sup> SEG Meeting Denver Colorado.
- ◆ Ville, J., 1948. Theorie et application de la notion de signal analytique, Cables et Transmissions, vol. 2A, 61-74.
- ◆ White, R. E., 1991. Properties of instantaneous seismic attributes, Geophysics: The Leading Edge of Exploration, July 1991, 26-32.
- ◆ Widess, W. B., 1982 Quantifyng resolving power of seismic system: Geophysics, 47, 1160-1173.