UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Doctorado en Ciencias Matemáticas

Problemas de Rango: Inescindibilidad en Dominios de Ore y Extensiones Triviales

Tesis
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
Doctor en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:
Juan Orendain Almada

Dr. José Ríos Montes
Instituto de Matemáticas, UNAM

Dr. Hugo Rincón Mejía – Facultad de Ciencias
Dra. Bertha Thomé Arreola – Facultad de Ciencias
Dr. Sergio López Permouth - Doctorado en Ciencias Matemáticas
Dr. Carlos Signoret Poillon - Doctorado en Ciencias Matemáticas

MÉXICO, D. F. 30 de Octubre, 2013.

Problemas de Rango: Inescindibilidad en Dominios de Ore y Extensiones Triviales

Juan Orendain

.

Índice

Introducción

El problema de existencia de grupos abelianos libres de torsión, inescindibles, de rango arbitrariamente grande es uno de los problemas centrales en la teoría de grupos abelianos infinitos. En [13] se demuestra la existencia de grupos abelianos, libres de torsión, inescindibles, de rango $2^{\aleph_0}$. Más aún, en [14] se demuestra la existencia de grupos abelianos, libres de torsión, inescindibles, de rango el primer cardinal débilmente inaccesible. En este trabajo introducimos un marco de trabajo en el cuál problemas similares pueden ser tratados. Con este fin introduciremos los conceptos de función de rango, y de problema de rango asociado a la pareja formada por una función de rango y un cardinal. Será claro que el concepto de problema de rango provee un marco formal bajo el cual los resultados antes mencionados tienen formulaciones naturales. Abordaremos problemas de rango asociados al anillo de cocientes de dominios de Ore y problemas de rango asociados a cogeneradores inyectivos mínimos en extensiones triviales.
A continuación presentamos el contenido de cada una de las secciones que componen este trabajo.

Sección 1: En esta primera pequeña sección estableceremos el marco formal bajo el cual trataremos los resultados centrales que componen este trabajo. Introduciremos tanto el concepto de función de rango como el concepto de problema de rango asociado a la pareja formada por una función de rango y un cardinal. Presentaremos ejemplos relevantes relativos a estos conceptos.

Sección 2: En esta sección estudiamos problemas de rango asociados al anillo de cocientes de dominios de Ore. Haremos esto mediante el cálculo de clases de equivalencia unital de elementos irreducibles centrales. Enlistaremos ejemplos en los que nuestros resultados sean aplicables. Dividiremos los ejemplos relevantes en dos clases, ejemplos conmutativos y ejemplos no conmutativos. Los ejemplos no conmutativos presentados en esta sección estarán definidos mediante extensiones de Ore de dominios conmutativos neterianos. Los resultados de esta primera sección serán independientes de las secciones restantes.

Sección 3: En esta sección introducimos el concepto de gráfica de módulos cíclicos. Haciendo uso de esta construcción introduciremos los conceptos de dimensión combinatoria y de dimensión fundamental combinatoria de un módulo. Demostraremos que ambas cantidades, cuando existen y son finitas, acotan superiormente a la longitud de Krull-Schmidt. Finalmente, presentaremos, haciendo uso de esto, criterios puramente combinatorios, tanto de inescindibilidad como de existencia de descomposiciones inescindibles finitas.

Sección 4: En esta sección presentaremos ejemplos y aplicaciones de conceptos introducidos en la sección 3. Presentaremos soluciones a problemas de rango finito asociados a cogeneradores mínimos en extensiones triviales de dimensión finita.

Sección 5: En esta sección generalizamos construcciones hechas en la sección 4. Presentaremos, involucrando estas construcciones, conjeturas que impliquen la existencia de soluciones, en rangos arbitrariamente grandes, a problemas de rango asociados a cogeneradores mínimos en extensiones triviales de dimensión finita,

Sección 6: En esta sección presentaremos una reformulación categórica del concepto de gráfica de módulos cíclicos. Haremos esto definiendo familias de funtores concretos entre categorías concretas adecuadas, de forma que estas construcciones generalicen las construcciones hechas en la sección 2. Estudiaremos propiedades de las categorías involucrados y estudiaremos cuales de estas propiedades son preservadas por los funtores mencionados.

Sección 7: En esta sección presentamos aplicaciones de conceptos introducidos en la sección 6. Introduciremos criterios que garanticen la existencia, bajo ciertas condiciones, de soluciones a problemas de rango en rangos arbitrariamente grandes y en rangos infinitos. Probaremos que estos criterios, junto con conjeturas relacionadas, implican la existencia de soluciones, en rango infinito, a problemas de rango asociados a cogeneradores inyectivos mínimos en extensiones triviales de dimensión finita

Sección 8: En esta pequeña sección presentaremos dos resultados de aproximación en el cálculo de gráficas de módulos cíclicos. Los resultados de esta sección son versiones de resultados presentados en secciones anteriores, que sin embargo no tienen aplicaciones directas en el resto del trabajo.

Sección 9: En esta última sección presentamos un estudio de la longitud de Krull-Schmidt como posible función de rango. Estudiaremos los casos en los cuales esta función es una función de rango finita. Caracterizaremos a aquellos módulos que definen, mediante sus conjuntos de sumandos directos, dominios bajo los cuales la longitud de Krull-Schmidt es una función de rango finita. Esta sección es independiente del resto del trabajo.

Asumiremos que el lector está familiarizado con conceptos de la teoría de módulos sobre anillos no conmutativos, incluyendo conceptos relacionados a dimensiones en categorías de módulos, conceptos básicos relacionados a descomposiciones de módulos, y conceptos relacionados a dominios de Ore y sus anillos de cocientes. Referiremos al lector a [1], [23], [11], y a [21] en lo que respecta a definiciones y notación relacionada a estos conceptos. Asumiremos también que el lector está familiarizado con lo más básico de la teoría de categorías concretas y con lo más básico de la teoría de gráficas. Referimos al lector a [2] y a [5] respectivamente en lo que respecta a definiciones y notación relacionadas a estos conceptos.

Agradecimientos

El autor quisiera agradecer a las siguientes personas

Familia: A Juan, Fatima ”Factima” y Rita Orendain, Consuelo ”la Maria Consuelo” Almada, y Cristina ”Chaparra” Villanueva por su apoyo, compañía, y cariño.

Comité de Evaluación: A Bertha Thomé, Sergio López, y Carlos Signoret por su atención, por sus comentarios y por revisiones de versiones preeliminares de este trabajo. A José Ríos y a Húgo Rincón por su ayuda, su apoyo, sus palabras, y sobre todo por su amistad.

Amigos: A toda la gente que considera al autor como su amigo, por su amistad.

In Memoriam: Finalmente el autor quisiera dedicar este trabajo a la memoria de Francisco Raggi. Sin su apoyo, sin su atención, pero sobre todo sin su amistad, este trabajo no hubiera sido posible.

1. Problemas de rango

En esta sección introducimos el concepto de problema de rango asociado a la pareja formada por una función de rango y un cardinal. Este concepto será fundamental en secciones subsecuentes. El concepto de problema de rango proveerá el marco formal bajo el cual serán tratados los resultados de el resto de este trabajo.
A lo largo de esta sección la letra R denotará un anillo asociativo con 1. La palabra *módulo* significará R-módulo izquierdo, y la palabra *morfismo* significará morfismo en la categoría de R-módulos izquierdos R-Mod.
Dada una clase de módulos Ω, diremos que una función ρ, con dominio Ω, y codominio la clase de todos los cardinales, es una función de rango si:

1. $\rho(N) \leq \rho(M)$ para todo $N, M \in \Omega$ tales que N es isomorfo a algún submódulo de M.

2. $\rho(M \oplus N) \leq \rho(M) + \rho(N)$ para todo $M, N \in \Omega$ tales que $M \oplus N \in \Omega$

En este caso, para cada $M \in \Omega$, llamaremos al cardinal $\rho(M)$, el rango de M, con respecto a la función de rango ρ.
Funciones de rango, así definidas, definen invariantes salvo por isomorfismos en sus dominios de definición, es decir, si ρ es una función de rango con dominio Ω y $M, N \in \Omega$ son isomorfos, entonces $\rho(M) = \rho(N)$. Funciones de rango, en general, sirven propósitos de organización y estratificación en sus dominios de definición. En general, se considera que mientras más grande sea el rango de un módulo, más "dimensiones de complejidad" tiene éste.

Las funciones $Gdim$ y $dGdim$, que a cada módulo M, le asocian su dimensión de Goldie, $GdimM$, y su dimensión dual de Goldie, $dGdimM$, respectivamente, son funciones de rango con dominio R-Mod. Más generalmente, si ρ es una función aditiva (i.e. $\rho(M \oplus N) = \rho(M) + \rho(N)$) tal que $\rho(N) \leq \rho(M)$ para todo N, M tales que N es isomorfo a algún submódulo de M, entonces ρ es una función de rango. En particular, la función ℓ, que a cada módulo M le asocia su longitud, $\ell(M)$, es una función de rango con dominio R-Mod. Las funciones $|Kdim|$ y $|dKdim|$, que a cada módulo M, con dimensión de Krull, le asocian la cardinalidad de su dimensión de Krull, $|KdimM|$, y la cardinalidad de su dimensión dual de Krull, $|dKdimM|$, respectivamente, son funciones de rango, no aditivas, con dominio la clase de todos los módulos con dimensión de Krull.

Dado un módulo E, denotaremos por Ω_E la clase de todos aquellos módulos que son isomorfos a submódulos de sumas directas de copias de E. Definimos la función rk_E, con dominio Ω_E como sigue: Si $M \in \Omega_E$, $rk_E(M)$ será el mínimo cardinal κ tal que M es isomorfo a algún submódulo de la suma directa de κ copias de E. La función rk_E así definida es una función de rango, no necesariamente aditiva, con dominio Ω_E. Obsérvese que en el caso en el que $R = \mathbb{Z}$ y $E = \mathbb{Q}$, la clase $\Omega_{\mathbb{Q}}$ es igual a la clase de todos los grupos abelianos libres de torsión, y para cada grupo abeliano libre de torsión G, el cardinal $rk_{\mathbb{Q}}(G)$ es igual al rango de G.

Dados, una función de rango ρ, con dominio Ω, y κ un cardinal, diremos que un módulo M es solución al problema de rango asociado a la terna (Ω, ρ, κ), si $M \in \Omega$, M es inescindible, y $\rho(M) = \kappa$. Si ρ es igual a la función de rango rk_E, asociada a un módulo E, diremos simplemente que el módulo M es solución al problema de rango asociado a la pareja (E, κ) cuando M sea solución al problema de rango asociado a la terna (Ω_E, rk_E, κ). En este caso, el enunciado: *El problema de rango asociado a la pareja* (E, κ) *tiene solución*, deberá traducirse como: *Existe un módulo inescindible* M *tal que* M *es isomorfo a algún submódulo de* $E^{(\kappa)}$*, y* κ *es el mínimo cardinal con esta propiedad.* Así, si E es un módulo semisimple, entonces el problema de rango asociado a la pareja (E, κ) tiene solución si y sólo si $\kappa = 1$. Más generalmente, si R es igual al anillo de enteros p-ádicos, $\mathbb{Z}_p$, entonces el problema de rango asociado a la pareja $(\mathbb{Q}_p, \kappa)$ tiene solución en $\mathbb{Z}_p$ si y sólo si $\kappa = 1$. Más aún, en [16] se demuestra que si R es un dominio de valuación, con campo de cocientes E, entonces el problema de rango asociado a la pareja (E, κ) tiene solución solamente en el caso en el que $\kappa = 1$ si y sólo si R es un dominio de valuación discreta máximo. En el caso en el que $R = \mathbb{Z}$ y $E = \mathbb{Q}$, los resultados de [13] pueden traducirse como: El problema de rango asociado a la pareja $(\mathbb{Q}, \kappa)$ tiene solución para todo cardinal κ tal que $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$. Más aún, los resultados de [14] pueden traducirse como: El problema de rango asociado a la pareja $(\mathbb{Q}, \kappa)$ tiene solución para todo cardinal κ tal que κ es menor que el primer cardinal débilmente inaccesible.

2. Problemas de rango sobre dominios de Ore

En esta sección presentamos, en ciertos casos, soluciones a problemas de rango asociados al anillo de cocientes izquierdo de dominios de Ore izquierdos. Utilizaremos técnicas similares a las usadas en [13] y [14], y así generalizaremos los resultados ahí obtenidos. Referimos al lector a [21] o [24] en todo lo referente a dominios de Ore y sus anillos de cocientes
A lo largo de esta sección la letra D denotará un dominio de Ore izquierdo. La palabra *módulo*, significará ahora, D-módulo izquierdo, y la palabra *morfismo* significará, morfismo en D-Mod. Denotaremos por E al anillo de cocientes izquierdos de D. Así, E es un D-módulo izquierdo y derecho, E, como D-módulo izquierdo, es igual a la cápsula inyectiva, $E(D)$, de D como D-módulo izquierdo, y para cualquier módulo M, $E \otimes_D M$ es un E-espacio vectorial. Obsérvese que en este caso la clase Ω_E definida en la sección anterior coincide con la clase de todos los módulos libres de torsión.
Diremos que $a \in D \setminus \{0\}$ es irreducible si la ecuación $a = bc$ con $b, c \in D$, implica que b es una unidad en D o que c es una unidad en D. Dados $a, b \in D$, irreducibles y centrales, diremos que a y b son unitalmente equivalentes, o equivalentes salvo por unidades, si existe una unidad u en D tal que $a = ub$. Obsérvese que esta es una relación de equivalencia. El siguiente teorema será el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.1. *Sean $\kappa_1, \kappa_2 \geq 1$ cardinales. Supóngase que D admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ ireducibles centrales no unitalmente equivalentes dos a dos. Entonces el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\kappa_1})$ admite al menos $2^{\kappa_2} - 1$ soluciones salvo por isomorfismos.*

A continuación reducimos la demostración de (2.1) a la demostración de una serie de lemas. El primero de éstos caracteriza a la función de rango rk_E en Ω_E en términos de propiedades de E en D-Mod.

Lema 2.2. *Sean $M \in \Omega_E$ y κ un cardinal. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $rk_E(M) = \kappa$.
2. *M es isomorfo a algún submódulo escencial de $E^{(\kappa)}$.*
3. $dim_E E \otimes_D M = \kappa$.

Demostración. Sea $M \in \Omega_E$. Obsérvese que $M = D \otimes_D M$ es submódulo escencial de $E \otimes_D M$. De esta observación se sigue 3⇔2. Se sigue también, de esta observación, el hecho de que M es isomorfo a algún submódulo escencial de $E^{(dim_E E \otimes_D M)}$, es decir, $rk_E(M) \leq dim_E E \otimes_D M$. Obsérvese también, que si M es isomorfo a algún submódulo de $E^{(\kappa)}$, entonces $E \otimes_D M$ es isomorfo a algún submódulo de $E^{(\kappa)}$. De esto se sigue que $dim_E E \otimes_D M \leq rk_E(M)$. Esto demuestra 1⇔3. Esto concluye la demostración. ■

Se sigue de (2.2) que un módulo M es solución al problema de rango asociado a la pareja (E, κ) para algún cardinal κ si y sólo si M es isomorfo a algún submódulo esencial de $E^{(\kappa)}$. Es decir, en este caso, el enunciado: *El problema de rango asociado a la pareja* (E, κ) *tiene solución*, deberá traducirse como: $E^{(\kappa)}$ *admite submódulos inescindibles y esenciales.*

Lema 2.3. *Sea* $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *una colección de módulos. Sea* $\lambda_0 \in \Lambda$ *y para cada* $\lambda \in \Lambda$ *tal que* $\lambda \neq \lambda_0$*, sean* $a_\lambda \in M_\lambda$*,* $b_\lambda \in M_{\lambda_0}$*, y* $\xi_\lambda \in D \setminus \{0\}$*. Supóngase que*

1. M_λ *es inescindible para todo* $\lambda \in \Lambda$*.*
2. $Hom(M_\lambda, M_\mu) = \{0\}$ *para todo* $\lambda, \mu \in \Lambda$ *con* $\lambda \neq \mu$*.*
3. *Para cada* $\lambda \in \Lambda$*,* ξ_λ *no divide a* a_λ *en* M_λ*.*
4. *Para cada* $\lambda \in \Lambda$*,* ξ_λ *no divide a* b_λ *en* M_{λ_0}*.*

Entonces el D*-submódulo*

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}} D\xi_\lambda^{-1}(a_\lambda + b_\lambda)$$

de $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda}(E \otimes_D M_\lambda)$ *es inescindible. Más aún, si* $M_\lambda \in \Omega_E$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$*, entonces* $M \in \Omega_E$ *y*

$$rk_E(M) = |\Lambda| \sum_{\lambda \in \Lambda} rk_E(M_\lambda)$$

Demostración. Sea $M = N \oplus L$ una descomposición de M. Es fácil ver, de la definición de M, que $M \cap (E \otimes_D M_\lambda) = M_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. De esta observación y de 2 se sigue que M_λ es fuertemente invariante en M para cada $\lambda \in \Lambda$. Se sigue que $M_\lambda = (M_\lambda \cap N) \oplus (M_\lambda \cap L)$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Así, ya que por la condición 1 cada M_λ es inescindible, se sigue que M_λ está contenido en N o L para cada $\lambda \in \Lambda$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $M_{\lambda_0} \leq N$. Supongamos ahora que existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $M_\lambda \leq L$. La ecuación

$$\xi_\lambda^{-1}(a_\lambda + b_\lambda) = x + y$$

con $x \in N$ y $y \in L$ implica que ξ_λ divide a a_λ en N y a b_λ en L lo cual implica a su vez que ξ_λ divide tanto a a_λ como a b_λ en M, una contradicción, ya que por las condiciones 3 y 4, ni a_λ ni b_λ son divisibles por ξ_λ en $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$. De esto y de la definición de M se sigue que ni a_λ ni b_λ son divisibles por ξ_λ en M. Se sigue que $M_\lambda \leq N$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Ahora, ya que $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ es claramente escencial en M, concluimos que M es inescindible. La conclusión sobre el rango de M se sigue del hecho de que si todos los M_λ's están cogenerados por E, M claramente es escencial en $E^{(|\Lambda| \sum_{\lambda \in \Lambda} rk(M_\lambda))}$. ■

Lema 2.4. *Sean* $\kappa_1, \kappa_2 \geq 1$ *cardinales. Supóngase que* D *admite conjuntos formados por* $2\kappa_1 + \kappa_2$ *irreducibles centrales no unitalmente equivalentes dos a dos. Entonces existen, una colección de módulos* $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$*, de cardinalidad* 2^{κ_1}*, un elemento* $\lambda_0 \in \Lambda$*, y elementos* $a_\lambda \in M_\lambda$*,* $b_\lambda \in M_{\lambda_0}$*, y* $\xi_\lambda \in D \setminus \{0\}$*,* $\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}$*, tales que satisfacen las condiciones de (2.3).*

Demostración. Sean $\{a_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, $\{b_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, y $\{c_\delta : \delta \in \Delta\}$ tres conjuntos ajenos, formados por irreducibles centrales en D, no unitalmente equivalentes dos a dos. Supóngase que $|\Gamma| = \kappa_1$ y que $|\Delta| = \kappa_2$. Sea Θ la colección de todos los conjuntos de la forma $\{d_\gamma : d_\gamma \in \{a_\gamma, b_\gamma\} \, \forall \gamma \in \Gamma\}$. Claramente $|\Theta| = 2^{\kappa_1}$. Ahora, para cada $\theta \in \Theta$, sea M_θ el siguiente submódulo de E

$$\sum_{d_\gamma \in \theta} D d_\gamma^{-1}$$

Entonces, para cada $\theta \in \Theta$, M_θ, por ser submódulo del módulo uniforme E, es a su vez uniforme, y entonces inescindible, es decir, la colección $\{M_\theta : \theta \in \Theta\}$ satisface la condición 1 de (2.3). Ahora, sean $\theta, \theta' \in \Theta$ tales que $\theta \neq \theta'$. Demostramos que $Hom(M_\theta, M_{\theta'}) = \{0\}$. De la definición de Θ es claro que ni θ está contenido en θ', ni θ' está contenido en θ. Así, sea $d_\gamma \in \theta \setminus \theta'$. Sea $\Phi \in Hom(M_\theta, M_{\theta'})$. Del hecho de que los a_γ's y los b_γ's son centrales, irreducibles, y dos de ellos no son equivalentes salvo por unidades, se sigue fácilmente que ningún elemento de $M_{\theta'} \setminus \{0\}$ es divisible por d_γ. De esto y del hecho de que 1_D es divisible por d_γ en M_θ se sigue que $\Phi(1_D) = 0$. De esto concluimos, ya que D es escencial en M_θ, que $\Phi = 0$. Así, la colección $\{M_\theta : \theta \in \Theta\}$ satisface la condición 2 de (2.3). Finalmente, hágase Θ igual a Λ, cualquier $\theta_0 \in \Theta$ igual a λ_0, y cualquier sucesión formada por elementos del conjunto $\{c_\delta : \delta \in \Delta\}$ igual a la sucesión ξ_λ, $\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}$ en (2.3). Es inmediato que en este caso la colección $\{M_\theta : \theta \in \Theta\}$, junto con la correspondiente sucesión de elementos de $\{c_\delta : \delta \in \Delta\}$, θ y θ_0 satisfacen las condiciones de (3.2). Esto concluye la demostración. ■

Demostración de 1.1 Sean $\{a_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, $\{b_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, y Θ como en la demostración de (2.4). Se sigue, de (2.3) y de la demostración de (2.4), que toda sucesión, con indices en Θ, formada por elementos de cualquier subconjunto no vacío de cualquier conjunto $\{c_\delta : \delta \in \Delta\}$ como en la demostración de (2.4), define un módulo inescindible de rango 2^{κ_1}. Sean S, T subconjuntos no vacíos de $\{c_\delta : \delta \in \Delta\}$. Supóngase que $S \neq T$. Sean s y t dos sucesiones, con indices en Θ, formadas por elementos de S y T respectivamente. Finalmente, sean M_s y M_t módulos inescindibles de rango 2^{κ_1} definidos como en la demostración de (2.4) por las sucesiones s y t respectivamente. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $S \setminus T \neq \emptyset$. Sea $a \in S \setminus T$. Entonces, por la forma en que fueron construidos, M_s admite elementos distintos de 0, divisibles por a, mientras que ningún elemento de M_t, distinto de 0, es divisible por a. Se sigue que en este caso M_s y M_t no son isomorfos. Concluimos, de esto, de (2.3) y (2.4), que existen al menos $2^{\kappa_2} - 1$ módulos inescindibles no isomorfos de rango 2^{κ_1}. Esto concluye la demostración. ■

Así, en el caso en el que D admita conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles centrales no unitalmente equivalentes dos a dos, se puede asegurar que el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^\kappa)$ admite al menos $2^{\kappa_2} - 1$ soluciones salvo por isomorfismos sobre D, para todo cardinal κ tal que $\kappa \leq \kappa_1$. Es decir, en este caso se puede asegurar que $E^{(2^\kappa)}$, la suma directa de 2^κ copias de E

admite al menos $2^{\kappa_2}-1$ submódulos inescindibles escenciales no isomorfos dos a dos para todo cardinal κ tal que $\kappa \leq \kappa_1$.
Dominios conmutativos, dominios neterianos izquierdos, y por lo tanto dominios artinianos izquierdos y dominios de ideales principales por la izquierda son ejemplos de dominios de Ore izquierdos. Dominios de Bezout izquierdos también son dominios de Ore izquierdos. Los siguientes son ejemplos de dominios conmutativos que satisfacen las condiciones de (2.1).

1. $D=\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ admite conjuntos de $\aleph_0$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos, a saber, cualquier conjunto infinito de números primos. Así, el problema de rango asociado a la pareja $(\mathbb{Q}, 2^{\aleph_0})$ admite al menos $2^{\aleph_0}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $\mathbb{Z}$. Más generalmente. Sea $a \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. La extensión cuadrática, $D=\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$, de $\mathbb{Z}$ admite conjuntos de $\aleph_0$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos, a saber, cualquier conjunto de divisores primos, en D, de enteros primos. Así, para cada a libre de cuadrados, el problema de rango asociado a la pareja $(\mathbb{Q}(\sqrt{a}), 2^{\aleph_0})$ tiene al menos $2^{\aleph_0}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$. En particular, en el caso en el que $a=-1$, el problema de rango asociado a $(\mathbb{Q}(i), 2^{\aleph_0})$ admite al menos $2^{\aleph_0}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre el anillo de enteros Gaussianos, $\mathbb{Z}[i]$. Esto demuestra en particular, que $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ no es un anillo de valuación máximo para ningún a libre de cuadrados. Más aún, si denotamos por ω a $e^{2\pi i/3}$, la extensión $\mathbb{Z}[\omega]$, de $\mathbb{Z}$, es el anillo de enteros de Eisenstein. En este caso $\mathbb{Z}[\omega]$ también admite conjuntos de $\aleph_0$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos, a saber cualquier conjunto infinito de primos racionales congruentes con -1 mod 3. Así, el problema de rango asociado a la pareja $(\mathbb{Q}(\omega), 2^{\aleph_0})$ admite al menos $2^{\aleph_0}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $\mathbb{Z}[\omega]$.

2. $D=\mathbb{Z}_{(m)}$. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Sea k el número de divisores primos distintos de m. La localización, $\mathbb{Z}_{(m)}$ de $\mathbb{Z}$ en el ideal $m\mathbb{Z}$ es un dominio conmutativo con exactamente m irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos, a saber, divisores primos de m. Así, en este caso, el problema de rango asociado a la pareja $(\mathbb{Q}, 2^n)$ admite solución, sobre $\mathbb{Z}_{(m)}$, para todo $n \leq \lfloor k/2 \rfloor - 1$. En particular, ya que 2310 es igual al producto de los primeros 5 primos racionales, el problema de rango asociado a la pareja $(\mathbb{Q}, 4)$ admite solución sobre $\mathbb{Z}_{(2310)}$. Más generalmente, sean R un dominio de factorización única, y $a \in R$. Sea k el número de divisores primos distintos de a en R. La localización $R_{(a)}$ de R en el ideal Ra nuevamente es un dominio conmutativo, con exactamente k irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos, a saber, los divisores primos distintos de a en R. Así, nuevamente, en este caso, si E denota al campo de cocientes de R, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^n)$ admite solución sobre $R_{(a)}$, para todo $n \leq \lfloor k/2 \rfloor - 1$. En particular, en el caso en el que R es igual a $\mathbb{Z}[i]$ o $\mathbb{Z}[\omega]$ y a es igual a 100947 en el primer caso y a 43010 en el segundo caso, ya que a es, en ambos casos, el producto de los primeros 5 primos racionales positivos en R, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 4)$ admite

solución sobre $\mathbb{Z}[i]_{(100947)}$ y sobre $\mathbb{Z}[\omega]_{(4310)}$ donde E denota a $\mathbb{Q}(i)$ en el primer caso y a $\mathbb{Q}(\omega)$ en el segundo caso.

3. $D = R[X]$: Sean R un dominio conmutativo y X un conjunto algebraicamente independiente sobre R. El anillo de polinomios $R[X]$ es un dominio conmutativo. Afirmamos que $R[X]$ admite conjuntos de al menos $\aleph_0 |R| |X|$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos. Supóngase primero que R es un dominio finito. En este caso $R = \mathbb{F}_q$ para alguna potencia de primo q. En este caso, para cada $x \in X$, $R[x]$ admite $\aleph_0$ polinomios irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos. Cada uno de estos polinomios es irreducible como polinomio en $R[X]$, y dos de estos polinomios son unitalmente equivalentes en $R[x]$ si y sólo si son unitalmente equivalentes en $R[X]$. Así, en el caso en el que R es un dominio finito, $R[X]$ admite conjuntos de al menos $\aleph_0 |X| = \aleph_0 |R| |X|$ irreducibles salvo por unidades. En el caso en el que R sea infinito, para cada $x \in X$, el conjunto de todos los polinomios mónicos de grado 1 es un conjunto de irreducibles en $R[x]$, no unitalmente equivalentes dos a dos. Nuevamente, estos polinomios son irreducibles y no unitalmente equivalentes dos a dos en $R[X]$. Así, nuevamente en este caso $R[X]$ admite conjuntos de irreducibles no unitalmente equivalentes, de cardinalidad $|R| |X| = \aleph_0 |R| |X|$. Concluimos que, si E denota al campo de cocientes de R, el problema de rango asociado a la pareja $(E(X), 2^{\kappa})$ admite al menos $2^{\aleph_0 |R| |X|}$ soluciones salvo por isomorfismos para todo $\kappa \leq \aleph_0 |R| |X|$. En particular, si R es igual a $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\omega]$, $\mathbb{Z}$, o $\mathbb{Q}$, y $X = \{x\}$, el problema de rango asociado a la pareja $(E(x), 2^{\aleph_0})$ admite al menos $2^{\aleph_0}$ soluciones salvo por isomorfismos, sobre $R[x]$, donde E denota a $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Q}(i)$, y $\mathbb{Q}(\omega)$ en los primeros tres casos respectivamente, y a $\mathbb{Q}$ en los dos casos restantes. Más aún, en el caso en el que R es igual a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el problema de rango asociado a la pareja $(E(x), 2^{\kappa})$ admite al menos $2^{\mathfrak{c}}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[X]$ para todo $\kappa \leq \mathfrak{c}$, donde E denota a $\mathbb{R}$ en el primer caso y a $\mathbb{C}$ en el segundo caso.

4. $D = R + XS[X]$: Sean R y S dominios conmutativos. Sea X un conjunto algebraicamente independiente sobre S. Supóngase que R es subanillo de S. Entonces el subanillo, $R + XS[X]$, de $S[X]$, admite conjuntos de al menos $\aleph_0 |R| |X|$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos. Efectivamente, todo polinomio irreducible en $R[X]$ es a su vez irreducible como polinomio en $R + XS[X]$, y dos de estos polinomios son unitalmente equivalentes en $R[X]$ si y sólo si son unitalmente equivalentes en $R + XS[X]$. Así, si E denota al campo de cocientes de R y F denota al campo de cocientes de S, entonces el problema de rango asociado a la pareja $(E + XF(X), 2^{\kappa})$ admite al menos $2^{\aleph_0 |R| |X|}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R + XS[X]$ para todo $\kappa \leq \aleph_0 |R| |X|$. En particular, si R es igual a $\mathbb{Z}$, $X = \{x\}$ y S es igual $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\omega]$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$, entonces el problema de rango asociado a la pareja $(\mathbb{Q} + xF[x], 2^{\aleph_0})$ admite al menos $2^{\aleph_0}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $\mathbb{Z} + xS[x]$ en todos los casos.

5. $D = R[[X]]$. Sea R un dominio conmutativo. Sea X un conjunto finito, algebraicamente independiente sobre R. El anillo de series formales de potencias $R[[X]]$ es un dominio conmutativo. Afirmamos que si R admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos, entonces $R[[X]]$ admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos. Sean $x \in X$ y $f \in R[[x]]$. Obsérvese que f es una unidad en $R[[x]]$ si y sólo si $f(0)$ es una unidad en R. Más aún, si $f(0)$ es irreducible en R, entonces f es irreducible en $R[[x]]$. La afirmación se sigue de esto y del hecho de que toda serie formal de potencias irreducible en $R[[x]]$ es irreducible como serie formal de potencias en $R[[X]]$, junto con el hecho de que dos de estas series formales de potencias son unitalmente equivalentes en $R[[x]]$ si y sólo si estas son unitalmente equivalentes como series formales de potencias en $R[[X]]$. Así, si se supone que el dominio R admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos, y denotamos por E al campo de cocientes de $R[[X]]$, entonces el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\kappa})$ admite al menos $2^{\kappa_2} - 1$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[[X]]$ para todo $\kappa \leq \kappa_1$. En particular, si R es igual a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, o $\mathbb{Z}[\omega]$ y $X = \{x\}$, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\aleph_0})$ admite al menos $2^{\aleph_0}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[[x]]$, donde E denota al campo de cocientes de $\mathbb{Z}[[x]]$, $\mathbb{Z}[i][[x]]$, y $\mathbb{Z}[\omega][[x]]$ respectivamente. Más aún, si R es igual a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\kappa})$ admite al menos $2^{\mathfrak{c}}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[[x]]$ para todo $\kappa \leq \mathfrak{c}$, donde E denota al campo de cocientes de $\mathbb{R}[[x]]$ y $\mathbb{C}[[x]]$ respectivamente. Finalmente, supóngase que R es un dominio de factorización única, y que $a \in R$ admite k divisores primos distintos. En este caso el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^n)$ admite solución sobre $R_{(a)}[[x]]$ para todo $n \leq \lfloor k/2 \rfloor - 1$. Así, si hacemos R igual a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, o $\mathbb{Z}[\omega]$, y hacemos a igual a 2310, 100947, o 43010 respectivamente, entonces el problema de rango asociado a la pareja $(E, 4)$ admite solución sobre $R[[x]]$, donde E denota el campo de cocientes de $\mathbb{Z}_{(2310)}[[x]]$, $\mathbb{Z}[i]_{(100947)}[[x]]$, o $\mathbb{Z}[\omega]_{(43010)}[[x]]$ respectivamente.

6. $D = E(U)$: Sea U una región en $\mathbb{C}$. El anillo de funciones holomorfas en U, $E(U)$, es un dominio conmutativo. Afirmamos que $E(U)$ admite conjuntos de al menos $\mathfrak{c}$ irreducibles no equivalentes salvo por unidades dos a dos. Para cada $a \in U$ sea $f_a \in E(U)$ la función polinomial, en U, definida por el polinomio $z - a$. f_a así definida es un elemento irreducible de $E(U)$. Más aún, si $b \in U$, entonces f_a y f_b son unitalmente equivalentes en $E(U)$ si y sólo si $a = b$. Esto demuestra la afirmación. Así, si E denota al campo de cocientes de $E(U)$, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\kappa})$ admite al menos $2^{\mathfrak{c}}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $E(U)$ para todo $\kappa \leq \mathfrak{c}$. En particular, en el caso en el que U es igual a $\mathbb{C}$, $\mathring{\mathbb{D}}^2$, $\mathring{\mathbb{H}}_+$, $\mathring{\mathbb{H}}_-$, o cualquiera de estas regiones menos algún subespacio discreto, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\kappa})$ admite al menos $2^{\mathfrak{c}}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $E(U)$ para todo cardinal $\kappa \leq \mathfrak{c}$.

7. $D = \mathcal{O}_{V,a}$. Sea V una variedad algebráica irreducible. Sea $a \in V$. Supóngase que V es suave en a. En este caso el anillo de gérmenes de funciones de V en a, $\mathcal{O}_{V,a}$, es un dominio local regular. Se sigue, del teorema de Auslander-Buchsbaum [3], que $\mathcal{O}_{V,a}$ es un dominio de factorización única. Supóngase ahora que existen $2\kappa_1 + \kappa_2$ subvariedades irreducibles de V, que contienen a a. Se sigue, en este caso, que $\mathcal{O}_{V,a}$ admite conjuntos de $2\kappa_1 + \kappa_2$ ideales primos. Concluimos que $\mathcal{O}_{V,a}$ admite conjuntos de $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos. Así, si E denota al campo de cocientes de $\mathcal{O}_{V,a}$, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^\kappa)$ admite al menos $2^{\kappa_2} - 1$ soluciones salvo por isomorfismos, sobre $\mathcal{O}_{V,a}$, para todo cardinal $\kappa \leq \kappa_1$.

Finalizamos esta sección presentando ejemplos de dominios no conmutativos que satisfacen las condiciones de (2.1). Sean R un anillo conmutativo y $\sigma \in Aut(R)$. Diremos que $\delta \in End_{\mathbb{Z}}(R)$ es una σ-derivación en R si

$$\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$$

para todo $a, b \in R$. Dados, un automorfismo $\sigma \in Aut(R)$ y δ una σ-derivación en R, definimos la extensión de Ore de R, por σ y δ, $R[y, \sigma, \delta]$, como sigue: Como grupo abeliano, $R[y, \sigma, \delta]$ será $R[y]$, con coeficientes escritos por la izquierda, es decir, $R[y, \sigma, \delta]$ será el conjunto de expresiones formales de la forma $\sum_{i=0}^{n} a_i y^i$ donde $n \geq 0$ y $a_i \in R$ para todo i. Definimos ahora el producto en $R[y, \sigma, \delta]$ mediante la expresión

$$ya = \sigma(a)y + \delta(a)$$

para todo $a \in R$, junto con sus consecuencias. Es fácil ver que con esta estructura $R[y, \sigma, \delta]$ es un anillo, no conmutativo en el caso en el que $\sigma \neq id_R$ o $\delta \neq 0$. Más aún, si R es dominio entero entonces $R[y, \sigma, \delta]$ es un dominio entero, y si R es neteriano, $R[y, \sigma, \delta]$ también es neteriano (véase [21]). En el caso en el que $\sigma = id_R$, δ es una derivación y $R[y, \sigma, \delta]$ es el anillo de polinomios diferenciales en el anillo diferencial (R, δ). En el caso en el que $\delta = 0$, $R[y, \sigma, \delta]$ es simplemente el anillo de polinomios torcidos en R con respecto a σ (véase [8] en los dos casos). Obsérvese que todo elemento irreducible en R es a su vez irreducible como polinomio de grado 0 en $R[y, \sigma, \delta]$. Obsérvese también que un elemento $a \in R$, es central en $R[y, \sigma, \delta]$, como polinomio de grado 0 si y sólo si se satisfacen las igualdades

$$\delta(a) = 0 \text{ y } \sigma(a) = a$$

Finalmente, obsérvese que dos irreducibles centrales en R son equivalentes salvo por unidades en R si y sólo si estos son equivalentes salvo por unidades en $R[y, \sigma, \delta]$. Así, si R es un dominio neteriano conmutativo, $\sigma \in Aut(R)$, δ es una σ-derivación, y R admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos satisfaciendo las igualdades antes mencionadas, entonces $R[y, \sigma, \delta]$ será un dominio de Ore izquierdo y derecho admitiendo conjuntos de al menos $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles centrales no unitalmente equivalentes dos a dos. Los siguientes son ejemplos de extensiones de Ore no conmutativas que satisfacen las condiciones de (2.1).

1. $D = R[X][y, \delta_{d,\Phi}]$: Sean R un dominio neteriano conmutativo y X un conjunto finito y algebraicamente independiente sobre R. Sean d una derivación en R y $\Phi : X \to R[X]$ una función. Existe una única derivación $\delta_{d,\Phi}$ en $R[X]$ tal que $\delta_{d,\Phi}(a) = d(a)$ para todo $a \in R$ y tal que $\delta_{d,\Phi}(x) = \Phi(x)$ para todo $x \in X$ (véase [18]). Si $d \neq 0$ o $\Phi \neq 0$, el anillo de polinomios diferenciales sobre el anillo diferencial $(R[X], \delta_{d,\Phi})$, $R[X][y, \delta_{d,\Phi}]$, es un dominio de Ore no conmutativo. Sea R_d el anillo de constantes de R con respecto a d. Todo elemento irreducible en R_d es constante con respecto a $\delta_{d,\Phi}$ e irreducible en $R[X]$ como polinomio de grado 0, y dos elementos de R_d son unitalmente equivalentes en R si y sólo si estos son unitalmente equivalentes en $R[X]$. Así, si se supone que R_d admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles no unitalmente equivalentes en R dos a dos, entonces $R[X]$ admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles centrales, constantes con respecto a $\delta_{d,\Phi}$, no equivalentes dos a dos. Se sigue que en este caso, si denotamos por E al anillo de cocientes izquierdo de $R[X][y, \delta_{d,\Phi}]$, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\kappa})$ admite al menos $2^{\kappa_2} - 1$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[X][y, \delta_{d,\Phi}]$ para todo $\kappa \leq \kappa_1$. En particular, si $X = \{x_1, ..., x_n\}$, $d = 0$, y existe $1 \leq i \leq n$ tal que $\Phi(x_j) = \delta_{i,j}$ para todo $1 \leq i \leq n$, donde $\delta_{i,j}$ denota la función delta de Kronecker, entonces $\Phi_{d,\Phi}$ coincide con la i-ésima derivada parcial formal, $\partial/\partial x_i$ en $R[x_1, ..., x_n]$. En particular, si $n = 1$, $\delta_{d,\Phi}$ coincide con la derivada formal en $R[x]$. Así, si R es igual a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, o $\mathbb{Z}[\omega]$, entonces el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\aleph_0})$ admite al menos $2^{\aleph_0}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[x_1, ..., x_n][y, \partial/\partial x_i]$, donde E denota al anillo de cocientes izquierdo de $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n][y, \partial/\partial x_i]$, $\mathbb{Z}[i][x_1, ..., x_n][y, \partial/\partial x_i]$, o $\mathbb{Z}[\omega][x_1, ..., x_n][y, \partial/\partial x_i]$ respectivamente. Supóngase ahora que existe $x \in X$ tal que $\Phi(x) = 0$. En este caso, todo polinomio irreducible en $R_d[x]$ es constante con respecto a $\delta_{d,\Phi}$, e irreducible en $R[X]$. Más aún, dos polinomios en $R_d[x]$ son unitalente equivalentes en $R[x]$ si y sólo si, estos son unitalmente equivalentes en $R[X]$. Así, si $R_d[x]$ admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos en $R[x]$, entonces $R[X]$ admite conjuntos formados por al menos $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos, constantes con respecto a $\delta_{d,\Phi}$. Se sigue, que en este caso, si E denota al anillo de cocientes izquierdo de $R[X][y, \delta_{d,\Phi}]$, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\kappa})$ admite al menos $2^{\kappa_2} - 1$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[X][y, \delta_{d,\Phi}]$ para todo $\kappa \leq \kappa_1$. En particular, supóngase nuevamente que $\delta_{d,\Phi} = \partial/\partial x_i$ para algún i, y que $n \geq 2$. En este caso, si R es igual a $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{F}_q$, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\aleph_0})$ admite al menos $2^{\aleph_0}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[X][y, \partial/\partial x_i]$, donde E denota al anillo izquierdo de cocientes de $\mathbb{Q}[X][y, \partial/\partial x_i]$ y $\mathbb{F}_q[X][y, \partial/\partial x_i]$ respecivamente. Más aún, si R es igual a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\kappa})$ admite al me-

nos $2^{\mathfrak{c}}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[X][y, \partial/\partial x_i]$ para todo $\kappa \leq \mathfrak{c}$, donde E denota al anillo izquierdo de cocientes de $\mathbb{R}[X][y, \partial/\partial x_i]$ y $\mathbb{C}[X][y, \partial/\partial x_i]$ respectivamente.

2. $D = R\,[X]\,[y, \tilde{\sigma}]$: Sean R un dominio neteriano conmutativo y X un conjunto finito y algebraicamente independiente sobre R. Sea $\sigma \in Aut(R) \setminus \{id_R\}$. Extendemos σ a $\tilde{\sigma} : R\,[X] \to R\,[X]$ de la siguiente forma: $\tilde{\sigma}(a) = \sigma(a)$ para todo $a \in R$ y $\tilde{\sigma}(x) = x$ para todo $x \in X$. Es fácil ver que $\tilde{\sigma}$ así definido es un automorfismo de $R\,[X]$. El anillo de polinomios torcidos en $R\,[X]$, con respecto a $\tilde{\sigma}$, $R\,[X]\,[y, \tilde{\sigma}]$, es un dominio de Ore no conmutativo. Sea R_σ el subanillo de R formado por aquellos elementos de R fijados por σ. Todo polinomio irreducible en $R_\sigma[X]$ es irreducible como polinomio en $R[X]$, y ya que σ es un automorfismo, dos de estos polinomios son unitalmente equivalentes en $R_\sigma[X]$ si y sólo si son unitalmente equivalentes en $R[X]$. Se sigue que si $R_\sigma[X]$ admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles no unitalmente equivalentes dos a dos, entonces $R[X]$ admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles, fijados por σ, no unitalmente equivalentes dos a dos. Concluimos que en este caso, el anillo de pilinomios en $R[X]$, torcidos con respecto a $\tilde{\sigma}$, $R[X][y, \tilde{\sigma}]$, admite conjuntos formados por $2\kappa_1 + \kappa_2$ irreducibles centrales no unitalmente equivalentes dos a dos. Así, en este caso, si denotamos por E al anillo izquierdo de cocientes de $R[X][y, \tilde{\sigma}]$, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^\kappa)$ admite al menos $2^{\kappa_2} - 1$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[X][y, \tilde{\sigma}]$, para todo $\kappa \leq \kappa_1$. En particular, en el caso en el que R es igual a $\mathbb{C}$ y σ es la conjugación compleja, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^\kappa)$ admite al menos $2^{\mathfrak{c}}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $\mathbb{C}[X][y, \tilde{\sigma}]$ para todo $\kappa \leq \mathfrak{c}$, donde E denota al anillo izquierdo de cocientes de $\mathbb{C}[X][y, \tilde{\sigma}]$. Finalmente, supóngase que R es igual a $\mathbb{F}_{p^m}$ para algún m o igual a la cerradura algeraica $\bar{\mathbb{F}}_p$, de $\mathbb{F}_p$. Sea σ el automorfismo de Frobenius. Sea k tal que k y m son primos relativos. En ambos casos, si E denota al anillo izquierdo de cocientes de $R[X][y, \tilde{\sigma}^k]$, el problema de rango asociado a la pareja $(E, 2^{\aleph_0})$ admite al menos $2^{\aleph_0}$ soluciones salvo por isomorfismos sobre $R[X][y, \tilde{\sigma}^k]$.

.

3. Dimensiones combinatorias

En esta sección introducimos los conceptos de dimensión combinatoria y dimensión fundamental combinatoria de un módulo. Presentamos, usando estos conceptos, en ciertos casos, criterios de inescindibilidad, puramente combinatorios. En secciones posteriores presentaremos ejemplos y aplicaciones de estos conceptos.

A lo largo de esta y las siguientes secciones, la letra R denotará nuevamente un anillo asociativo con 1, que no necesariamente es un dominio de Ore izquierdo. La palabra *ideal* significará ideal bilateral en R, la palabra *módulo* significará nuevamente, R-módulo izquierdo, y la palabra *morfismo* significará morfismo en la categoría de R-módulos izquierdos, R-Mod.

Definición 3.1. Sean I un ideal, M un módulo, y $\Sigma \subseteq M \setminus \{0\}$. Definimos la I-gráfica de módulos cíclicos de Σ en M, $\Gamma_I(M, \Sigma)$, como sigue:

1. El conjunto de vértices, $|\Gamma_I(M, \Sigma)|$ de $\Gamma_I(M, \Sigma)$ será el conjunto de todos los submódulo cíclicos, Rx, de M, generados por elementos de Σ.

2. Si Rx y Ry son vértices de $\Gamma_I(M, \Sigma)$, entonces diremos que Rx y Ry son adyacentes en $\Gamma_I(M, \Sigma)$ si $Ix \cap Iy \neq \{0\}$.

Más aún, si $\Sigma = M \setminus IM$, escribiremos $\Gamma_I(M)$ en lugar de $\Gamma_I(M, \Sigma)$, y en este caso diremos que $\Gamma_I(M)$ es la I-gráfica de módulos cíclicos de M

Así, en el caso en el que $I = \{0\}$, la I-gráfica de módulos cíclicos de Σ en M, $\Gamma_I(M, \Sigma)$, es la gráfica discreta generada por el conjunto de todos los submódulos cíclicos Rx de M, generados por elementos de Σ. Si M es semisimple, $\Gamma_I(M, \Sigma)$ será, para cualquier ideal I, nuevamente la gráfica discreta generada por el conjunto de todos los submódulos cíclicos Rx de M, generados por elementos de Σ. Si $I = R$ y M es ahora un módulo uniforme, entonces $\Gamma_I(M, \Sigma)$ será la gráfica completa generada por todos los submódulos cíclicos Rx, de M, generados por elementos de Σ. En particular, las gráficas

$$\Gamma_{\{0\}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \setminus \{0\}),\ \Gamma_{\mathbb{Z}}(\mathbb{F}_2^2, \mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\}),\ \Gamma_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

son, la gráfica discreta generada por un conjunto numerable de vértices, la gráfica discreta generada por tres vértices, y la gráfica completa generada por un conjunto numerable de vértices respectivamente.
Dados un ideal I y un módulo M, denotaremos por $ann_I M$ al conjunto anulado por I en M, es decir, $ann_I M$ denotará al conjunto de todos los elementos $a \in M$ tales que $Ia = \{0\}$. Denotamos también por $ann_I^* M$ al conjunto anulado por I, puntualmente en M, es decir, $ann_I^* M$ denotará al conjunto de todos los elementos $a \in M$ tales que existe $r \in I \setminus \{0\}$ tal que $ra = 0$. Es claro que, en general, $ann_I M \subseteq ann_I^* M$, y que $I^2 M = \{0\}$ si y sólo si $IM \subseteq ann_I M$. Diremos que el ideal I es ideal de descomposición de M si estas últimas dos contenciones son igualdades, es decir, diremos que I es ideal de descomposición de M si se cumplen las igualdades

$$IM = ann_I M = ann_I^* M$$

Denotaremos por $\mathfrak{D}(I)$ al dominio de descomposición del ideal I, es decir, $\mathfrak{D}(I)$ denotará a la clase de todos los módulos M tales que I es ideal de descomposición de M. Asimismo, denotaremos por $\mathfrak{D}^{-1}(M)$ al codominio de descomposición del módulo M, es decir, $\mathfrak{D}^{-1}(M)$ denotará al conjunto de ideales I tales que $M \in \mathfrak{D}(I)$. Si $I \in \mathfrak{D}^{-1}(M)$, definimos la I-dimensión combinatoria de M ($cdim_I M$) como el número de componentes de la I-gráfica de módulos cíclicos, $\Gamma_I(M)$, de M. Si $\mathfrak{D}^{-1}(M) \neq \emptyset$, definimos entonces la dimensión combinatoria de M ($cdimM$) como el mínimo del conjunto de I-dimensiones combinatorias de M, con $I \in \mathfrak{D}^{-1}(M)$. Presentaremos ejemplos de estos conceptos en secciones posteriores.
Definimos la longitud de Krull-Schmidt de un módulo M, $KS\ell(M)$, como el supremo del conjunto de cardinalidades de descomposiciones de M (véase [23]). Así, $KS\ell(M)$ es un cardinal, acotado superiormente por la cardinalidad de M, y que a su vez acota superiormente a la cardinalidad de cualquier descomposición de M. Obsérvese que si M tiene longitud de Krull-Schmidt finita, entonces M admite descomposiciones inescindibles finitas, y que $KS\ell(M) = 1$ si y sólo si M es inescindible. El siguiente será el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.2. *Sea M un módulo. Si $cdimM$ existe y es finita, entonces*

$$KS\ell(M) \leq cdimM$$

.

A continuación reduciremos la demostración de (3.2) a la demostración de una serie de lemas. Antes el siguiente corolario.

Corolario 3.3. *Sea M un módulo.*

1. *Si $cdimM$ existe y es finita entonces M admite descomposiciones inescindibles finitas.*

2. *Si $cdimM = 1$ entonces M es inescindible.*

Dados un ideal I, un módulo M, y un submódulo N de M, diremos que N es submódulo I-puro de M ($N \leq_I M$) si se cumple la igualdad

$$IN = IM \cap N$$

Si N es submódulo I-puro de M para todo ideal I, entonces diremos simplemente que N es un submódulo puro de M. Sumandos directos son ejemplos de submódulos puros.

Lema 3.4. *Sea I un ideal. Sean M y N dos módulos. Si $N \leq_I M$, entonces*

1. *Si $M \in \mathfrak{D}(I)$, entonces $N \in \mathfrak{D}(I)$.*

2. *$\Gamma_I(N)$ es subgráfica completa de $\Gamma_I(M)$*

Demostración. Supóngase que $M \in \mathfrak{D}(I)$. Del hecho de que $IM \subseteq ann_I M$ se sigue que $IN \subseteq ann_I N$. Ahora, $ann_I^* N = ann_I^* M \cap N$, y esto, ya que $M \in \mathfrak{D}(I)$, es igual a $IM \cap N$, que a su vez, ya que $N \leq_I M$, es igual a IN. Claramente se sigue que $IN = ann_I N = ann_I^* N$. Concluimos que $N \in \mathfrak{D}(I)$. Ahora, del hecho de que $N \leq_I M$ claramente se sigue que $N \setminus IN \subseteq M \setminus IM$, de lo que se sigue que $|\Gamma_I(N)| \subseteq |\Gamma_I(M)|$. Es claro que la relación de adyacencia en $\Gamma_I(N)$ es la restricción de la relación de adyacencia en $\Gamma_I(M)$. Esto concluye la demostración. ■

Lema 3.5. *Sean M un módulo y $M = A \oplus B$ una descomposición de M. Sean $I \in \mathfrak{D}^{-1}(M)$ y Rx un vértice de $\Gamma_I(M)$. Si existe Ra vértice de $\Gamma_I(A)$ tal que Rx y Ra son adyacentes en $\Gamma_I(M)$, entonces $x \in A \oplus IB$.*

Demostración. Supóngase que Rx y Ra son adyacentes en $\Gamma_I(M)$. Entonces existen $r, r' \in I$, con $r, r' \neq 0$ tales que $rx = r'a$. Si hacemos $x = \alpha + \beta$, con $\alpha \in A$ y $\beta \in B$, entonces $rx = r\alpha + r\beta = r'a$. Se sigue que $r\beta = r'a - r\alpha$, por lo que $r\beta \in A \cap B = \{0\}$. Así, $\beta \in ann_I^* M$, de lo que se sigue que $\beta \in IB$. Esto concluye la demostración. ■

Lema 3.6. *Sea M un módulo. Sea $M = A \oplus B$ una descomposición de M. Sea $I \in \mathfrak{D}^{-1}(M)$. Si $Rx_1, ..., Rx_n$ es una trayectoria en $\Gamma_I(M)$ tal que $x_1 \in A$, entonces existe una trayectoria $Ra_1, ..., Ra_n$ en $\Gamma_I(A)$ tal que $x_1 = a_1$ y tal que $Ix_i = Ia_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Hacemos inducción sobre n. El caso en el que $n = 1$ es trivial. Supongamos ahora que el resultado es cierto para n, y sea $Rx_1, ..., Rx_{n+1}$ una trayectoria en $\Gamma_I(M)$ tal que $x_1 \in A$. Por la hipótesis de inducción existe una trayectoria $Ra_1, ..., Ra_n$ en $\Gamma_I(A)$ tal que $x_1 = a_1$ y tal que $Ix_i = Ia_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Del hecho de que $Ia_n = Ix_n$ se sigue, ya que Rx_n y Rx_{n+1} son adyacentes en $\Gamma_I(M)$, que Ra_n y Rx_{n+1} son adyacentes en $\Gamma_I(M)$. Se sigue, de (3.5), que $x_{n+1} \in A \oplus IB$. Así, si $x_{n+1} = \alpha + \beta$, con $\alpha \in A$ y $\beta \in B$, entonces $\beta \in IB = ann_I^* B$, de lo que se sigue que $Ix_{n+1} = I(\alpha + \beta) = I\alpha$. De esto se sigue que si hacemos $a_{n+1} = \alpha$, entonces $Ia_{n+1} = Ix_{n+1}$, y Ra_n y Ra_{n+1} son adyacentes en $\Gamma_I(A)$. Esto concluye la demostración ■

Corolario 3.7. *Sea M un módulo. Sea $M = A \oplus B$ una descomposición de M. Sean $I \in \mathfrak{D}^{-1}(M)$ y Rx vértice de $\Gamma_I(M)$. Si existe Ra, vértice de $\Gamma_I(A)$ tal que Rx y Ra están en la misma componente de $\Gamma_I(M)$, entonces $x \in A \oplus IB$*

Demostración. Supóngase que Rx y Ra están en la misma componente de $\Gamma_I(M)$. Entonces existe una trayectoria $Rx_1, ..., Rx_n$ tal que $x_1 = a$ y $x_n = x$. De (3.6) se sigue que existe una trayectoria $Ra_1, ..., Ra_n$ en $\Gamma_I(A)$ tal que $a_1 = a$ y tal que $Ix_i = Ia_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. En particular $Ix = Ia_n$. De esto, y de (3.5) se sigue que $x \in A \oplus IB$. Esto concluye la demostración ■

Corolario 3.8. *Sea M un módulo. Sea $M = A \oplus B$ una descomposición de M. Sea $I \in \mathfrak{D}^{-1}(M)$. Si Ra, Rb son vértices de $\Gamma_I(A)$, entonces Ra y Rb están en la misma componente de $\Gamma_I(M)$ si y sólo si Ra y Rb están en la misma componente de $\Gamma_I(A)$.*

Demostración. Supóngase que Ra y Rb están en la misma componente de $\Gamma_I(M)$. Entonces existe una trayectoria $Rx_1, ..., Rx_n$ en $\Gamma_I(M)$ tal que $x_1 = a$ y $x_n = b$. De (3.6) se sigue que existe una trayectoria $Ra_1, ..., Ra_n$ en $\Gamma_I(A)$ tal que $a_1 = x_1 = a$ y tal que $Ia_i = Ix_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. En particular $Ia_n = Ib$. Así, la trayectoria $Ra_1, ..., Ra_{n-1}, Rb$ es una trayectoria en $\Gamma_I(A)$ entre Ra y Rb, de lo que se sigue que Ra y Rb están en la misma componente de $\Gamma_I(A)$. La implicación contraria es trivial. ■

Lema 3.9. *Sea M un módulo. Sea $I \in \mathfrak{D}^{-1}(M)$. Si $\Gamma_I(M)$ es conexa, entonces M es inescindible.*

Demostración. Supóngase que $I \in \mathfrak{D}^{-1}(M)$ y que $\Gamma_I(M)$ es conexa. Sea $M = A \oplus B$ una descomposición de M. Supongamos que $A \neq \{0\}$. $|\Gamma_I(A)| \neq \emptyset$ ya que si A fuera igual a IA, entonces A sería superfluo en M. Sea $x \in M \setminus \{0\}$. Del hecho de que la gráfica $\Gamma_I(M)$ es conexa, y del hecho de que $|\Gamma_I(A)| \neq \emptyset$, se sigue, de (3.5), que $x \in A \oplus IB$. De esto concluimos que $M = A \oplus IB$, de lo que se sigue que $B = IB$. Concluimos, ya que $I^2B = \{0\}$, que $B = \{0\}$. Esto concluye la demostración. ■

Demostración de 3.2 Supóngase que $cdim_I M$ existe y es finita. Hacemos inducción sobre $cdim_I M$. La base de la inducción es (3.9). Supóngase que la proposición es cierta para $n \geq 1$. Supóngase que $cdim_I M = n+1$. Sea $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ una descomposición de M tal que $M_\alpha \neq \{0\}$ para todo $\alpha \in A$. Sea $\alpha_0 \in A$. Por (3.8) cada componente tanto de $\Gamma_I(M_{\alpha_0})$ como de $\Gamma_I(\bigoplus_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}} M_\alpha)$ está contenida en exactamente una componente de $\Gamma_I(M)$. Se sigue, ya que $\Gamma_I(M_{\alpha_0})$ tiene al menos una componente, que

$$cdim_I \bigoplus_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}} M_\alpha \leq n$$

De la hipótesis de inducción se sigue que $|A \setminus \{\alpha_0\}| \leq n$, es decir, que $|A| \leq n+1$. Esto concluye la demostración.■

Así, la I-dimensión combinatoria, $cdim_I M$ de un módulo M con respecto a algún ideal $I \in \mathfrak{D}^{-1}(M)$, cuando es finita, es cota superior para la longitud de Krull-Schmidt, $KS\ell(M)$, de M. A continuación mejoramos esta cota en los casos en los que la I-gráfica de módulos cíclicos, $\Gamma_I(M)$, de M satisface ciertas condiciones. Dados un ideal I, un módulo M, y $x \in M \setminus IM$, denotaremos por C_x^I a la componente generada por Rx en $\Gamma_I(M)$. Diremos que un subconjunto Σ de $M \setminus IM$ es un subconjunto fundamental de M, con respecto a I si Σ genera a M pero la suma de $|\Gamma_I(M)| \setminus C_x^I$ es submódulo propio de M para todo $x \in \Sigma$. Denotaremos por $\mathfrak{F}(I)$ al dominio fundamental de descomposición del ideal I, es decir, $\mathfrak{F}(I)$ denotará a la clase de todos los módulos $M \in \mathfrak{D}(I)$ tales que M tiene subconjuntos fundamentales con respecto a I. Asímismo, denotaremos por $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ al codominio fundamental de descomposición del módulo M, es decir, $\mathfrak{F}^{-1}(M)$ denotará al conjunto de todos los ideales I tales que $M \in \mathfrak{F}(I)$. El siguiente lema dice que el conjunto de componentes de $\Gamma_I(M)$ generadas por un conjunto fundamental de M, con respecto a I, no depende de la elección de éste.

Lema 3.10. *Sean I un ideal y M un módulo. Sean Σ, Σ' subconjuntos fundamentales de M con respecto a I. Entonces*

$$\left\{C_x^I : x \in \Sigma\right\} = \left\{C_y^I : y \in \Sigma'\right\}$$

Demostración. Supongase que $x \in \Sigma$ es tal que no existe $x' \in \Sigma'$ tal que $C_x^I = C_{x'}^I$. Entonces $\sum_{x' \in \Sigma'} Rx' \leq \sum_{Ry \in |\Gamma_I(M)| \setminus C_x^I} Ry$. El lado izquierdo de esta desigualdad es igual a M, mientras que el lado derecho es submódulo propio de M, una contradicción. Esto concluye la demostración. ■

Así, dados un ideal I y un módulo M, si $I \in \mathfrak{F}^{-1}(M)$, definimos la I-dimensión fundamental combinatoria de M ($fcdim_I M$) como la cardinalidad del conjunto de componentes de $\Gamma_I(M)$ generadas por los elementos de cualquier subconjunto de M, fundamental con respecto a I. Si $\mathfrak{F}^{-1}(M) \neq \emptyset$, definimos entonces la dimensión fundamental combinatoria de M ($fcdimM$) como el mínimo del conjunto de I-dimensiones fundamentales combinatorias de M, con $I \in \mathfrak{F}^{-1}(M)$.

Teorema 3.11. *Sean I un ideal y M un módulo. Si $fcdim_I M$ existe y es finita, entonces*

$$KS\ell(M) \leq fcdim_I M \leq cdim_I M$$

Demostración. Sea $\Sigma \subseteq M \setminus IM$ fundamental con respecto a I. Sean $Y_1, ..., Y_n$ las componentes de $\Gamma_I(M)$ definidas por Σ. Sea $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ una descomposición de M tal que $M_\alpha \neq \{0\}$ para todo $\alpha \in A$. Del hecho de que $\sum \bigcup_{\alpha \in A} |\Gamma_I(M_\alpha)| = M$ se sigue que existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in A$, no necesariamente distintos, tales que $Y_i \cap |\Gamma_I(M_{\alpha_i})| \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq n$. De (3.10) se sigue que $Y_i \subseteq |\Gamma_I(M_{\alpha_i})|$ para todo $1 \leq i \leq n$. Así, $\sum_{x \in \Sigma} Rx \leq \bigoplus_{i=1}^n M_{\alpha_i}$. Del hecho de que el lado izquierdo de esta desigualdad es igual a M se sigue que $|A| \leq n$. Concluimos que $KS\ell(M) \leq fcdim_I M$. La parte derecha de esta desigualdad es claramente menor o igual que $cdim_I M$. ■

Corolario 3.12. *Sea M un módulo. Si $fcdimM$ existe y es finita, entonces*

$$KS\ell(M) \leq fcdimM$$

Corolario 3.13. *Sea M un módulo.*

1. *Si $fcdimM$ existe y es finita, entonces M admite descomposiciones inescindibles finitas.*

2. *Si $fcdimM = 1$, entonces M es inescindible.*

4. Problemas de rango sobre extensiones triviales

En esta sección aplicaremos los conceptos introducidos en la sección anterior a la solución de problemas de rango finito asociados a cogeneradores inyectivos mínimos en extensiones triviales de dimensión finita.
Dados un campo k y un k-espacio vectorial V, definimos la extensión trivial de k por V, $k \ltimes V$, como sigue: Como k-espacio vectorial $k \ltimes V$ será $k \times V$. Dados $(a, v), (b, w) \in k \ltimes V$, definimos $(a, v)(b, w)$ como $(ab, bv + aw)$. Es claro que con esta estructura $k \ltimes V$ es una k-álgebra conmutativa y unital, con $(1_k, 0)$ como 1. La dimensión de $k \ltimes V$ como k-álgebra es $dim_k V + 1$. El grúpo de unidades, $U(k \ltimes V)$, de $k \ltimes V$ es el conjunto $k^\times \times V$. Se sigue que $k \ltimes V$ es un anillo local, con radical de Jacobson $\{0\} \times V$. Así, salvo por isomorfismos $S = k \ltimes V / J(k \ltimes V)$ es el único $k \ltimes V$-módulo simple, y un $k \ltimes V$-módulo M es simple si y sólo si $dim_k M = 1$. Más aún, ya que $J(k \ltimes V)$ es claramente semisimple, se tiene la igualdad

$$J(k \ltimes V) = Soc(k \ltimes V)$$

de lo que se sigue que $k \ltimes V$ es semiartiniano con $Gdim(k \ltimes V) = dim_k V$. De esto último se sigue que si $E_0 = E(S)$ es el cogenerador inyectivo mínimo en $k \ltimes V$-Mod, entonces $E(M) = E_0^{(dim_k Soc(M))}$ para todo $k \ltimes V$-módulo M.
El siguiente será el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.1. *Sea k un campo. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita.*

1. *Si k tiene caracteristica $\neq 2$, entonces el problema de rango asociado a la pareja (E_0, m) tiene solución para todo $1 \leq m \leq 3dim_k V - 2$.*

2. *Si k tiene caracteristica 2, entonces el problema de rango asociado a la pareja (E_0, m) tiene solución para todo m tal que $1 \leq m \leq dim_k V$, $dim_k V + \lfloor dim_k V/2 \rfloor < i \leq 2dim_k V - 1$ o $2dim_k V + \lfloor dim_k V/2 \rfloor - 1 < i \leq 3dim_k V - 2$.*

A continuación reducimos la demostración de (4.1) a la demostración de una serie de lemas.

Lema 4.2. *Supóngase que R es un anillo neteriano. Sea E un módulo inyectivo e inescindible. Sean $M \in \Omega_E$ y κ un cardinal. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *$rk_E(M) = \kappa$.*

2. *M es isomorfo a algún submódulo esencial de $E^{(\kappa)}$.*

3. *$E(M) = E^{(\kappa)}$.*

Demostración. Supongamos que R es neteriano. Sea E un módulo inyectivo e inescindible. Sea $M \in \Omega_E$. Ya que R es neteriano y E inyectivo, $E^{(\aleph)}$ es inyectivo para todo cardinal $\aleph$. De esto se sigue claramente que 2 y 3 son equivalentes. Supongamos ahora que $rk_E(M) = \kappa$. Ya que M es isomorfo a algún submódulo de $E^{(\kappa)}$ se sigue que $E(M)$ es sumando directo de $E^{(\kappa)}$. De esto, y del hecho de que E es inyectivo e inescindible, se sigue que $E(M) = E^{(\aleph)}$ para algún cardinal $\aleph \leq \kappa$. De esto claramente se concluye que $E(M) = E^{(\kappa)}$. Supongamos ahora que $E(M) = E^{(\kappa)}$. Sea $\aleph$ un cardinal tal que M es isomorfo a algún submódulo de $E^{(\aleph)}$. Se sigue que $E(M) = E^{(\kappa)}$ es sumando directo de $E^{(\aleph)}$ de lo que claramente se sigue que $\kappa \leq \aleph$. Esto concluye la demostración. ■

Así, en el caso en el que R sea un anillo neteriano y E sea un módulo inyectivo e inescindible, el enunciado: *El problema de rango asociado a la pareja* (E, κ) *tiene solución*, nuevamente deberá traducirse como: *Existen submódulos esenciales e inescindibles de* $E^{(\kappa)}$. En particular, si V es un k-espacio vectorial de dimensión finita, el anillo $k \ltimes V$ es neteriano. En este caso, el cogenerador inyectivo mínimo $E_0 = E(S)$, es el único $k \ltimes V$-módulo inyectivo e inescindible. Se sigue que la función de rango rk_{E_0} es igual a la función $Gdim$, y el enunciado: *El problema de rango asociado a la pareja* (E_0, κ) *tiene solución*, es ahora equivalente al enunciado: *El problema de rango asociado a la terna* $(\Omega_{E_0}, Gdim, \kappa)$ *tiene solución*, y este enunciado es a su vez equivalente al enunciado: *Existen* $k \ltimes V$*-módulos inescindibles* M*, tales que* $dim_k Soc(M) = \kappa$.
Dados un ideal I y un módulo M, en el siguiente lema, denotaremos por $I * M$ al conjunto $\bigcup_{a \in M} Ia$.

Lema 4.3. *Sea* I *un ideal.*

1. *Sea* $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ *una colección de módulos. Si* $M_\alpha \in \mathfrak{D}(I)$ *para todo* $\alpha \in A$*, entonces* $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \in \mathfrak{D}(I)$.

2. *Sea* M *un módulo. Sea* N *un submódulo de* M*. Supóngase que*

$$(I * M) \cap N = \{0\}$$

   Si $M \in \mathfrak{D}(I)$ *entonces* $M/N \in \mathfrak{D}(I)$.

Demostración. Sea $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ una colección de módulos tales que $M_\alpha \in \mathfrak{D}(I)$ para todo $\alpha \in A$. Es claro, ya que $I^2 M_\alpha = \{0\}$ para todo $\alpha \in A$, que $I^2 \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha = \{0\}$. Sea $a \in ann_I^* \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$. Sea $r \in I \setminus \{0\}$ tal que $ra = 0$. Para cada $\alpha \in A$ sea π_α la proyección de $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ en M_α. Entonces $r\pi_\alpha(a) = 0$ para todo $\alpha \in A$. Es decir, $\pi_\alpha(a) \in ann_I^* M_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Se sigue que $\pi_\alpha(a) \in IM_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, es decir, $a \in I \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$. Esto concluye la demostración de 1.

Ahora, sean $M \in \mathfrak{D}(I)$ y N un submódulo de M tal que $(I * M) \cap N = \{0\}$. Es claro, ya que $I^2 M = \{0\}$, que $I^2 M + N/N = N$. Sea $a + N \in ann_I^* M/N$. Sea $r \in I \setminus \{0\}$ tal que $ra \in N$. Ya que $ra \in (I * M) \cap N$, se tiene que $ra = 0$, es decir, $a \in ann_I^* M$. Se sigue que $a \in IM$, es decir $a + N \in IM + N/N$. Esto concluye la demostración de 2. ■

Así, dado un ideal I, el dominio de descomposición de I, $\mathfrak{D}(I)$, es cerrado bajo sumas directas, bajo cocientes que satisfacen la condición 2 de (4.3), y por (3.4), bajo submódulos I-puros. Se sigue que si R está en el dominio de descomposición de I, entonces todo módulo M que se pueda expresar como un cociente que satisfaga la condición 2 de (4.3) de algún submódulo I-puro de algún módulo libre, está también en el dominio de descomposición de I. En particular, en este caso, I es ideal de descomposición de P para todo módulo proyectivo P. El siguiente lema establece un criterio bajo el cual I es ideal de descomposición de R.

Lema 4.4. *Supóngase que R es un anillo local. Entonces $J(R) \in \mathfrak{D}^{-1}(R)$ si y sólo si $J(R)^2 = \{0\}$.*

Demostración. Es claro que si $J(R) \in \mathfrak{D}^{-1}(R)$, entonces $J(R)^2 = \{0\}$. Ahora, si $a \in R \setminus J(R)$, entonces $a \in U(R)$. Se sigue fácilmente de esto que $ann^*_{J(R)} R \subseteq J(R)$. Así, si suponemos que $J(R)^2 = \{0\}$, claramente $J(R) \in \mathfrak{D}^{-1}(R)$. ∎

Dado V, un k-espacio vectorial, es inmediato que

$$J(k \ltimes V)^2 = Soc(k \ltimes V)^2 = \{0\}$$

Es decir, por (4.4), $J(k \ltimes V) = Soc(k \ltimes V)$ es ideal de descomposición de $k \ltimes V$. Se sigue que, en este caso, $Soc(k \ltimes V)$ es ideal de descomposición de P para todo módulo proyectivo P. En particular, en el caso en el que $k = \mathbb{F}_2$ y $V = \mathbb{F}_2^2$, $Soc(\mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{F}_2^2)$ es ideal de descomposición tanto de $\mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{F}_2^2$ como de $(\mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{F}_2^2)^2$. Ahora, es fácil ver que

$$\Gamma_{Soc(\mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{F}_2^2)}(\mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{F}_2^2)$$

tiene un único vértice, mientras que la gráfica

$$\Gamma_{Soc(\mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{F}_2^2)}((\mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{F}_2^2)^2)$$

tiene tres componentes. Así, mientras que $cdim(\mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{F}_2^2) = 1$, se tiene que $cdim((\mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{F}_2^2)^2) = 3$. Concluimos que la función $cdim$ que a cada módulo M, tal que $\mathfrak{D}^{-1}(M) \neq \emptyset$, le asocia su dimensión combinatoria, $cdimM$, no es, en general, una función de rango.

Demostración de 4.1 A lo largo de la demostración denotaremos por n a $dim_k V$ e identificaremos a todo k-espacio vectorial W con $k^{(dim_k W)}$. Sea $m \leq n$. Sea W un subespacio de V tal que $dim_k W = n - m$. Del teorema de la correspondencia se sigue que $k \ltimes V / \{0\} \oplus W$ es un módulo local con dimensión de Goldie m. Así, el problema de rango asociado a la pareja (E_0, m) tiene solución para todo $1 \leq m \leq n$.

Ahora, supóngase que W es un k-espacio vectorial tal que $n \leq dim_k W$. Sea i tal que $1 \leq i \leq n-1$. Denotaremos por $W(i)$ al subespacio de $W \oplus V$ generado por todos los vectores de la forma

$$(0_{dim_k W-n+i}, v, -v, 0_i)$$

con $v \in k^{n-i}$, y donde 0_m denotará el vector 0 en k^m para cualquier m. Para cada i tal que $1 \leq i \leq n-1$, denotaremos por M_i al módulo

$$(k \ltimes V)^2 / Soc(k \ltimes V)(i)$$

Es fácil ver que $dim_k Soc(M_i) = n+i$, de lo que se sigue que $GdimM_i = n+i$, es decir, $rk_{E_0}(M_i) = n+i$. Ahora, $Soc(k \ltimes V) * (k \ltimes V)^2$ es igual al conjunto de todos los vectores de la forma (v,v), $(v,0)$, o $(0,v)$, con $v \in V$, mientras que $Soc(k \ltimes V)(i)$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $(0_i, v, -v, 0_i)$, con $v \in k^{n-i}$. Obsérvese que la intersección de estos dos conjuntos es igual a $\{0\}$ en el caso en el que k tiene característica $\neq 2$, o en el caso en el que k tiene característica 2 e $i > \lfloor n/2 \rfloor$. Se sigue que si k tiene característica $\neq 2$, o k tiene caracteristica 2 e $i > \lfloor n/2 \rfloor$, se tiene la igualdad

$$Soc(k \ltimes V) * (k \ltimes V)^2 \cap Soc(k \ltimes V)(i) = \{0\}$$

De esto, de (4.3), de (4.4), y de las igualdades

$$Soc(k \ltimes V)^2 = \{0\} \text{ y } Soc(k \ltimes V) = J(k \ltimes V)$$

se sigue que, en los casos mencionados, $M_i \in \mathfrak{D}(Soc(k \ltimes V))$. Ahora, sea $j \in \{0,1\}$. Si α_j^i es un elemento de E_0^{n+i} tal que $ann_{k \ltimes V}\alpha_j^i = \{0\}$ y tal que para todo $v \in V$

$$v\alpha_j^i = \begin{cases} (v, 0_i) & \text{si} j = 0 \\ (0_i, v) & \text{si} j = 1 \end{cases}$$

entonces, M_i y el submódulo

$$(k \ltimes V)\alpha_0^i + (k \ltimes V)\alpha_1^i$$

de E_0^{n+i} tienen presentaciones iguales. Se sigue que son módulos isomorfos. Identificamos a M_i con este módulo. Ahora, si identificamos submódulos cíclicos de M_i con soclos iguales, los submódulos cíclicos de M_i, generados por elementos de $M_i \setminus Soc(k \ltimes V)M_i$ son precisamente $(k \ltimes V)\alpha_0^i$, $(k \ltimes V)\alpha_1^i$, y $(k \ltimes V)\alpha_0^i + \alpha_1^i$, con soclos $V \oplus 0_i$, $0_i \oplus V$, y el conjunto $\{(v, 0_i) + (0_i, v) : v \in V\}$ respectivamente.

Ahora, de la definición de α_0^i y α_1^i se sigue que la existencia de elementos distintos de 0 en

$$Soc(k \ltimes V)\alpha_0^i \cap Soc(k \ltimes V)\alpha_1^i, \text{ en } Soc(k \ltimes V)\alpha_0^i \cap Soc(k \ltimes V)\alpha_0^i + \alpha_1^i$$

y en

$$Soc(k \ltimes V)\alpha_1^i \cap Soc(k \ltimes V)\alpha_0^i + \alpha_1^i$$

es equivalente a la existencia de soluciones no triviales, en k, de los sistemas de ecuaciones homogéneos

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & = & 0 \\ x_{i+1} - y_1 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - y_{n-i} & = & 0 \\ -y_{n-i+1} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_n & = & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{lcl} x_1 - y_1 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i - y_i & = & 0 \\ x_{i+1} - y_{i+1} - y_1 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - y_n - y_{n-i} & = & 0 \\ -y_{n-i+1} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_n & = & 0 \end{array} \text{ y } \begin{array}{lcl} -y_1 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_i & = & 0 \\ x_1 - y_1 - y_{i+1} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-i} - y_{n-i} - y_n & = & 0 \\ x_{n_i+1} - y_{n-i+1} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - y_n & = & 0 \end{array}$$

respectivamente. Es fácil ver que cada uno de estos sistemas tiene soluciones no triviales en k. Se sigue que la gráfica $\Gamma_{Soc(k \ltimes V)}(M_i)$ es completa para todo i. Es decir $cdimM_i = 1$. Concluimos que el problema de rango asociado a la pareja (E_0, m) tiene solución para todo $n \leq m \leq 2n-1$ en el caso en el que k tiene caracteristica $\neq 2$, y para todo $n + \lfloor n/2 \rfloor < i \leq 2n-1$ en el caso en el que k tiene caracteristica 2.

Ahora, para cada i tal que $1 \leq i \leq n-1$, denotamos por $M_{n-1,i}$ al módulo

$$(M_{n-1} \oplus k \ltimes V)/soc(M_{n-1}(i))$$

Es fácil ver, nuevamente, que $dim_k Soc(M_{n-1,i}) = 2n+i-1$, de lo que se sigue que $GdimM_{n-1,i} = 2n+i-1$. Nuevamente, en este caso, si k tiene característica $\neq 2$, o k tiene característica 2 e $i > \lfloor n/2 \rfloor$, se tiene que

$$Soc(k \ltimes V) * (M_{n-1} \oplus k \ltimes V) \cap Soc(M_{n-1})(i) = \{0\}$$

de lo que nuevamente se sigue que $M_{n-1,i} \in \mathfrak{D}(Soc(k \ltimes V))$ en los casos antes mencionados. Se sigue también que, la proyección canónica de $M_{n-1} \oplus k \ltimes V$ en $M_{n-1,i}$, restringida a M_{n-1}, es un isomorfísmo. Identificamos así a M_{n-1} con su imágen bajo esta proyección. M_{n-1} es así, bajo esta identificación, un submódulo $Soc(k \ltimes V)$-puro de $M_{n-1,i}$, y por (3.4), $\Gamma_{Soc(k \ltimes V)}(M_{n-1})$ es subgráfica completa de $\Gamma_{Soc(k \ltimes V)}(M_{n-1,i})$.

Sea $\alpha_{n-1,i} \in E_0^{2n+i-1}$ tal que $ann_{k \ltimes V}\alpha_{n-1,i} = \{0\}$ y tal que

$$v\alpha_{n-1,i} = (0_{n+i-1}, v)$$

para todo $v \in V$. Identificando $\alpha_j^{n-1} \in M_{n-1}$ con $\alpha_j^{n-1} \oplus 0_i$ en $E_0^{2dim_k V + i_1}$ para todo $j \in \{0,1\}$, es fácil ver, ya que tienen presentaciones iguales, que $M_{n-1,i}$ es isomorfo al submódulo

$$(k \ltimes V)\alpha_0^{n-1} + (k \ltimes V)\alpha_1^{n-1} + (k \ltimes V)\alpha_{n-1,i}$$

de E_0^{2n+i-1}. Nuevamente identificando módulos cíclicos con el mismo soclo, es fácil ver que los submódulos cíclicos de $M_{n-1,i}$, generados por elementos de $M_{n-1,i} \setminus soc(k \ltimes V)M_{n-1,i}$, son entonces los módulos cíclicos generados por las sumas dos a dos de α_0^{n-1}, α_1^{n-1}, y $\alpha_0^{n-1} + \alpha_1^{n-1}$, con $\alpha_{n-1,i}$, junto con $(k \ltimes V)\alpha_{n-1,i}$. Es decir, los vértices de $\Gamma_{Soc(k\ltimes V)}(M_{n-1,i})$, identificando vértices con el mismo soclo, son los vértices de $\Gamma_{Soc(k\ltimes V)}(M_{n-1})$, junto con $(k \ltimes V)\alpha_{n-1,i}$ y los módulos cíclicos generados por sumas de $\alpha_{n-1,i}$ y los generadores de vértices en $\Gamma_{Soc(k\ltimes V)}(M_{n-1})$.

Ahora, la existencia de elementos distintos de 0 en

$$(k \ltimes V)\alpha_1^{n-1} \cap (k \ltimes V)\alpha_{n-1,i}, \text{ y } (k \ltimes V)\alpha_1^{n-1} \cap (k \ltimes V)\alpha_1^{n-1} + \alpha_{n-1,i}$$

es equivalente a la existencia de soluciones no triviales, en k, de los sistemas homogéneos

$$\begin{array}{lcccl cc}
x_1 & = & 0 & & x_1 - y_1 & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_i & = & 0 & & x_i - y_i & = & 0 \\
x_{i+1} - y_1 & = & 0 & & x_{i+1} - y_{i+1} - y_1 & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \text{y} & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_n - y_{n-i} & = & 0 & & x_n - y_n - y_{n-i} & = & 0 \\
-y_{n-i+1} & = & 0 & & -y_{n-i+1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
-y_n & = & 0 & & -y_n & = & 0
\end{array}$$

respectivamente. Es inmediato que estos dos sistemas tienen soluciones no triviales en k. De esto y del hecho de que $\Gamma_{Soc(k\ltimes V)}(M_{n-1})$ es completa, se sigue que $\Gamma_{Soc(k\ltimes V)}(M_{n-1,i})$ tiene a lo más tres componentes, a saber, la componente generada por $(k \ltimes V)\alpha_0^{n-1}$, posiblemente la componente generada por $(k\ltimes V)\alpha_0^{n-1}+\alpha_{n-1,i}$, y posiblemente la componente generada por $(k\ltimes V)\alpha_1^{n-1}+\alpha_0^{n-1} + \alpha_{n-1,i}$.

Así, ya que todos los vértices en la componente de $\Gamma_{Soc(k\ltimes V)}(M_{n-1,i})$, generada por $(k \ltimes V)\alpha_0^{n-1} + \alpha_{n-1,i}$, tienen el mismo soclo, y todos los vértices en la componente generada por $(k \ltimes V)\alpha_1^{n-1} + \alpha_0^{n-1} + \alpha_{n-1,i}$ tienen el mismo soclo, el submódulo generado por la unión de estas dos componentes tiene dimensión de Goldie $2n$. Se sigue que si $i \geq 1$, es decir, si $Gdim(M_{n-1,i}) > 2n$, entonces el conjunto $\{\alpha_0^{n-1}, \alpha_{n-1,i}\}$, es un conjunto fundamental en $M_{n-1,i}$, con respecto a $Soc(k \ltimes V)$, de lo que se sigue que, en este caso, que $fcdim(M_{n-1,i}) = 1$. De esto y de (3.13) concluimos que el problema de rango asociado a la pareja (E_0, m) tiene solución para todo $2n < m \leq 3n-2$ en el caso en el que k tenga caracteristica $\neq 2$, y para todo m tal que $2n + \lfloor n/2 \rfloor - 1 < m \leq 3n-2$ en el caso en el que k tenga característica 2 y $n > 2$.

Finalmente, la existencia de elementos distintos de 0 en

$$(k \ltimes V)\alpha_0^{n-1} + \alpha_{n-1,i} \cap (k \ltimes V)\alpha_1^{n-1} + \alpha_{n-1,i}$$

es equivalente a la existencia de soluciones no triviales, en k, del sistema de ecuaciones homogeneas

$$\begin{array}{lcl}
x_1 & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_{n-1} & = & 0 \\
x_n - y_1 & = & 0 \\
-y_2 & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
-y_i & = & 0 \\
x_1 - y_{i+1} - y_1 & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_{n-i} - y_n - y_{n-i} & = & 0 \\
x_{n-i+1} - y_{n-i+1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_n - y_n & = & 0
\end{array}$$

que en el caso en el que $i = 1$, tiene soluciones no triviales. Se sigue que, en este caso, la gráfica $\Gamma_{Soc(k\ltimes V)}(M_{n-1,i})$ tiene a lo más dos componentes, a saber, la componente generada por $(k \ltimes V)\alpha_0^{n-1}$, que en este caso contiene al vértice $(k \ltimes V)\alpha_0^{n-1} + \alpha_{n-1,i}$, y posiblemente la componente generada por $(k \ltimes V)\alpha_0^{n-1} + \alpha_1^{n-1} + \alpha_{n-1,i}$. Nuevamente, ya que todos los vértices en la componente generada por $(k \ltimes V)\alpha_0^{n-1} + \alpha_1^{n-1} + \alpha_{n-1,i}$ tienen el mismo soclo, el submódulo generado por esta componente, tiene dimensión de Goldie n. Se sigue, nuevamente, que el conjunto $\{\alpha_0^{n-1}, \alpha_{n-1,i}\}$, es fundamental en $M_{n-1,i}$, con respecto a $Soc(k \ltimes V)$, de lo que se concluye que $fcdim(M_{n-1,i}) = 1$. De (3.12) se concluye, finalmente, que, en el caso en el que k tiene característica $\neq 2$, el problema de rango asociado a la pareja $(E_0, 2n)$ tiene solución en $k \ltimes V$. Esto concluye la demostración.$\blacksquare$

Desafortunadamente el autor no sabe aún si en el caso en el que k tiene caracteristica 2, el problema de rango asociado a la pareja (E_0, m), tiene solución, para m dentro los intervalos $dim_k V \leq m \leq \dim_k V + \lfloor dim_k V/2 \rfloor$ y $2dim_k V + \lfloor dim_k V/2 \rfloor - 1 \leq m \leq 3dim_k V - 2$. Existen casos en los que el problema de rango asociado a la pareja (E_0, m) tiene solución para algún $m > 3dim_k V - 2$, sin embargo, el autor no sabe aún en que casos exactamente es que esto ocurre.

5. Problemas de rango en rangos arbitrariamente grandes

En esta sección generalizamos las construcciones hechas en la demostración de (4.1). Presentaremos conjeturas relacionadas a estas construcciones y probaremos que estas conjeturas implican una versión generalizada de (4.1). Generalizamos las construcciones hechas en la demostración de (4.1) como sigue:
Sean k un campo y V un k-espacio vectorial de dimensión finita. Diremos que una sucesión finita, posiblemente vacía, de enteros no negativos, $s = \{i_1, ..., i_m\}$, es admisible, si $i_j \leq dim_k V - 1$ y si $i_j \leq i_{j-1}$ para todo $1 \leq j \leq m$ en el caso en el que k tiene caracteristica $\neq 2$. En el caso en el que k tiene característica 2, asumiremos además que todos los términos de una sucesión admisible $s = \{i_1, ..., i_m\}$ satisfacen la desigualdad $\lfloor dim_k V/2 \rfloor < i_j$.
Para cada sucesión admisible s, definimos el $k \ltimes V$-módulo M_s, recursivamente, como sigue:

1. Hacemos $M_\emptyset$ igual a $k \ltimes V$.

2. Supóngase que el módulo M_s ha sido definido. Sea i_{m+1} tal que la sucesión $s \cup \{i_{m+1}\}$ es admisible. Hacemos entonces $M_{s \cup \{i_{m+1}\}}$ igual a

$$(M_s \oplus k \ltimes V)/Soc(M_s)(i_{m+1})$$

Haciendo inducción sobre la longitud m de $s = \{i_1, ..., i_m\}$ se sigue que:

1. $dim_k Soc(M_s) = dim_k V + \sum_{j=1}^{m} i_j$

2. $Soc(k \ltimes V) * M \oplus V \cap soc(M_s)(i_{m+1}) = \{0\}$ para todo i_{m+1} tal que la sucesión $s \cup \{i_{m+1}\}$ es admisible.

Obsérvese que para cada $1 \leq i \leq dim_k V - 1$, $M_{\{i\}}$ es igual a M_i y $M_{\{n-1,i\}}$ es igual a $M_{n-1,i}$, como fueron definidos en la demostración de (4.1). De 1 se sigue la igualdad

$$GdimM_s = dim_k V + \sum_{j=1}^{m} i_j$$

De 2, junto con (4.3) y (4.4), se sigue que $M_s \in \mathfrak{D}(soc(k \ltimes V))$ para toda sucesión admisible s.
Dada una sucesión admisible s, de longitud m, y $n \leq m$, denotaremos por s_n a la n-ésima truncación de s, es decir, si $s = \{i_1, ..., i_m\}$, entonces s_n denotará a la sucesión $\{i_1, ..., i_n\}$. Se sigue, nuevamente de 2 arriba, que para cada sucesión admisible s, de longitud m, y para cada $n \leq m$, el módulo M_{s_n} se puede identificar, salvo por isomofismos con un submódulo $Soc(k \ltimes V)$-puro de M_s. Asumiremos siempre que esta identificación ha sido realizada.
Ahora, para cada sucesión admisible $s = \{i_1, ..., i_m\}$, sea $\alpha_s \in E_0^{(dim_k V + \sum_{j=1}^{m} i_j)}$ tal que

$$v\alpha_s = (0_{\sum_{j=1}^{m} i_j}, v)$$

para todo $v \in V$. Definimos ahora, recursivamente, para cada sucesión admisible $s = \{i_1, ..., i_m\}$, el subconjunto Σ_s, de $E_0^{(dim_k V + \sum_{j=1}^{m} i_j)}$ como sigue:

1. Haremos $\Sigma_\emptyset$ igual a $\{\alpha_\emptyset\}$
2. Supóngase que el conjunto Σ_s ha sido definido. Sea i_{m+1} tal que la sucesión $s \cup \{i_{m+1}\}$ es admisible. Hacemos $\Sigma_{s\cup\{i_{m+1}\}}$ igual al conjunto

$$\Sigma_s \times \left\{0_{i_{m+1}}\right\} + \left\{\alpha_{s\cup\{i_{m+1}\}}\right\}$$

Es fácil ver que M_s y el submódulo de $E_0^{(dim_k V + \sum_{j=1}^{m} i_j)}$, generado por Σ_s tienen presentaciones iguales. Se sigue que estos dos módulos son isomorfos. Obsérvese que el conjunto Σ_s asociado a la sucesión $s = \{i\}$ es igual al conjunto de generadores de M_i definidos durante la demostración de (4.1), y que el conjunto Σ_s asociado a la sucesión $s = \{n-1, i\}$ es igual al conjunto de generadores de $M_{n-1,i}$ definidos durante la demostración de (4.1).
El conjunto de vértices, $\left|\Gamma_{Soc(k\ltimes V)}(M_s)\right|$, de la $Soc(k \ltimes V)$-gráfica de módulos cíclicos, $\Gamma_{Soc(k\ltimes V)}(M_s)$, de M_s, es igual al conjunto $\tilde{\Sigma_s}$ de sumas de diferentes elementos de Σ_s. Esta observación, junto con la construcción recursiva de Σ_s, establece, después del cálculo de soluciones de todos los sistemas de ecuaciones homogeneos de la forma

$$va = vb, v \in V \setminus \{0\}$$

con $a, b \in \tilde{\Sigma_s}$, una descripción recursiva de la $Soc(k \ltimes V)$-gráfica de módulos cíclicos de M_s.
Dada una sucesión infinita de enteros no negativos s, diremos que s es admisible si todas sus truncaciones son admisibles. Conjeturamos lo siguiente:

Conjectura 5.1. Sea k un campo. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita. Si $dim_k V$ es suficientemente grande, entonces existen, un entero κ_V, una sucesión admisible infinita s, y una subsucesión infinita t de s tales que $cdimM_{t_m} \leq \kappa_V$ para todo m.

Conjectura 5.2. Sea k un campo. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita. Si $dim_k V$ es suficientemente grande, entonces existen, un entero ϕ_V, una sucesión admisible infinita s, y una subsucesión infinita t de s tales que $M_{t_m} \in \mathfrak{F}(Soc(k \ltimes V))$ y $fcdimM_{t_m} \leq \phi_V$ para todo m.

Finalmente, la siguiente proposición dice que ambas conjeturas, (5.1) y (5.2), implican la existencia de $k \ltimes V$-módulos inescindibles con dimensión de Goldie arbitrariamente grande, es decir, la siguiente proposición dice que tanto la conjetura (5.1) como la conjetura (5.2) implican que el problema de rango asociado a la pareja (E_0, m) tiene solución para m arbitrariamente grande. Consideraremos a este resultado como una versión generalizada de (4.1).

Proposición 5.3. *Sea k un campo. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita. Ambas conjeturas, (5.1) y (5.2), implican que si $dim_k V$ es suficientemente grande, entonces, para cada $n \geq 1$ existe $m \geq n$ tal que el problema de rango asociado a la pareja (E_0, m) tiene solución en $k \ltimes V$.*

Demostración. Supóngase cierta la conjetura (5.1) para V, con constante κ_V, sucesión admisible infinita s y subsucesión infinita t de s. Sea $n \geq 1$. Sea u tal que

$$n\kappa_V \leq \sum_{j=1}^{u} i_j$$

De las observaciones hechas anteriormente se sigue que $n\kappa_V \leq GdimM_{t_u}$. Del hecho de que $cdimM_{t_u} \leq \kappa_V$, junto con (3.2) se sigue que $KS\ell(M_{t_u}) \leq \kappa_V$. Sea $M_{t_u} = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ una descomposición inescindible de M_{t_u}. Entonces $r \leq \kappa_V$, y ya que

$$n\kappa_V \leq GdimM_{t_u} = \sum_{i=1}^{r} GdimM_i$$

se sigue que existe $1 \leq j \leq r$ tal que $GdimM_j \geq n$. Así, M_j es un $k \ltimes V$-módulo inescindible tal que $GdimM_j \geq n$. Concluimos que existe $m \geq n$ tal que el problema de rango asociado a la pareja (E_0, m) tiene solución en $k \ltimes V$. La demostración de que (5.2) implica la proposición, es análoga. ■

6. Categorificación

En esta sección presentamos una reformulación categórica del concepto de gráfica de módulos cíclicos. Haremos esto definiendo familias de funtores concretos entre ciertas categorías concretas, de forma que esta construcción generalice las construcciones hechas en la sección 2. Referimos al lector a [2] en todo lo referente a la teoría de categorías concretas. A continuación definimos el dominio y el codominio de nuestra construcción.
Definimos la categoría $\mathcal{C}$ como sigue:

1. La clase de objetos $Ob_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ será la clase de todas las ternas (M, Σ, Σ') tales que M es un módulo, $\Sigma \subseteq M \setminus \{0\}$ y $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

2. Dados dos objetos (M, Σ, Σ') y (N, Λ, Λ') en $\mathcal{C}$, el conjunto de $\mathcal{C}$-morfismos $Hom_{\mathcal{C}}((M, \Sigma, \Sigma'), (N, \Lambda, \Lambda'))$ será el conjunto de todos los $f \in Hom(M, N)$ tales que $f(\Sigma) \subseteq \Lambda$, $f(\Sigma') \subseteq \Lambda'$.

Hacemos que $\mathcal{C}$, así definida, sea una categoría concreta sobre R-Mod. La categoría $\mathcal{C}$ será el dominio de nuestra construcción.
En lo que resta de esta y las siguientes secciones, denotaremos por Gr a la categoría de gráficas con exactamente un lazo en cáda vértice, y sus morfismos. Obsérvese que Gr es una categoría concreta sobre la categoría de conjuntos y sus funciones. Dado un ideal I, un módulo M y un subconjunto Σ de $M \setminus \{0\}$, consideraremos, en el resto de esta y las siguientes secciones, que la I-gráfica de módulos cíclicos, $\Gamma_I(M, \Sigma)$, de Σ, en M, es un objeto de Gr. Obsérvese que bajo esta consideración, los resultados de las secciones 2, 3, y 4 siguen siendo ciertos.
Denotaremos por $\mathcal{G}$ a la siguiente categoría:

1. La clase de objetos, $Ob_{\mathcal{G}}$, de $\mathcal{G}$ será la clase de todas las parejas (Γ, Δ) donde Γ es un objeto en Gr y Δ es un conjunto, posiblemente vacío, de vértices de Γ.

2. Dados dos objetos, (Γ, Δ) y (Γ', Δ'), en $\mathcal{G}$, el conjunto de $\mathcal{G}$-morfísmos $Hom_{\mathcal{G}}((\Gamma, \Delta), (\Gamma', \Delta'))$ será el conjunto de todos los morfismos, en Gr, $f \in Hom_{Gr}(\Gamma, \Gamma')$, tales que $f(\Delta) \subseteq \Delta'$.

Hacemos que $\mathcal{G}$ así definida, sea una categoría concreta sobre Gr. La categoría $\mathcal{G}$ será el codominio de nuestra construcción.
Finalmente, dado un ideal I, definimos el funtor $\Gamma_I : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ como sigue:

1. Sea (M, Σ, Σ') un objeto en $\mathcal{C}$. Hacemos $\Gamma_I(M, \Sigma, \Sigma')$ igual a la pareja

$$(\Gamma_I(M, \Sigma), \bigcup_{x \in \Sigma'} C_x^I)$$

2. Dados dos objetos (M, Σ, Σ') y (N, Λ, Λ') en $\mathcal{C}$, y un $\mathcal{C}$-morfísmo $f \in Hom_{\mathcal{C}}((M, \Sigma, \Sigma'), (N, \Lambda, \Lambda'))$, hacemos

$$\Gamma_I(f) : |\Gamma_I(M, \Sigma)| \to |\Gamma_I(N, \Lambda)|$$

de forma que $\Gamma_I(f)(Rx) = Rf(x)$ para todo $x \in \Sigma$, y extendemos $\Gamma_I(f)$ a un morfismo en $\mathcal{G}$.

Obsérvese que Γ_I así definido, es un funtor concreto, bien definido, entre las categorías concretas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{G}$. Obsérvese también que la imágen de una terna de la forma $(M, \Sigma, \emptyset)$ bajo el funtor Γ_I es igual a la I-gráfica de módulos cíclicos $\Gamma_I(M, \Sigma)$, de Σ en M, estudiada en las secciones 2 y 3. Así, consideraremos a la familia de funtores de la forma Γ_I como una categorificación del concepto de gráfica de módulos cíclicos.
A continuación procedemos al estudio de las categorías concretas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{G}$. El siguiente lema dice que $\mathcal{C}$ es una categoría concretamente completa, que además admite coproductos concretos y límites directos concretos.

Lema 6.1. *$\mathcal{C}$ es una categoría concretamente completa, admite coproductos concretos, y admite límites directos concretos.*

Demostración. Demostramos primero que $\mathcal{C}$ es concretamente completa. Demostramos que $\mathcal{C}$ admite productos concretos. Sea $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$ una colección no vacía de objetos en $\mathcal{C}$. Demostraremos que la terna

$$(\prod_{\alpha \in A} M_\alpha, \prod_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha, \prod_{\alpha \in A} \Sigma'_\alpha)$$

junto con las proyecciones canónicas π_α, $\alpha \in A$, de $\prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ en M_α, es producto, en $\mathcal{C}$, de $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$. Obsérvese primero que para cada $\alpha \in A$, la proyección π_α es un morfismo en $\mathcal{C}$. Ahora, sea (N, Λ, Λ') un objeto en $\mathcal{C}$, y sean $\mu_\alpha : (N, \Lambda, \Lambda') \to (M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha)$, $\alpha \in A$, morfismos en $\mathcal{C}$. Exíste un único morfismo $\mu : N \to \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ tal que $\pi_\alpha \mu = \mu_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. De estas identidades, junto con el hecho de que $\mu_\alpha(\Lambda) \subseteq \Sigma_\alpha$ y $\mu_\alpha(\Lambda') \subseteq \Sigma'_\alpha$ para todo $\alpha \in A$ se sigue que $\mu(\Lambda) \subseteq \prod_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha$, y que $\mu(\Lambda') \subseteq \prod_{\alpha \in A} \Sigma'_\alpha$, es decir, se sigue que μ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Concluimos que $\mathcal{C}$ admite productos concretos.

Demostramos ahora que $\mathcal{C}$ admite igualadores concretos. Sean (M, Σ, Σ') y (N, Λ, Λ') dos objetos en $\mathcal{C}$, y sean $f, g : (M, \Sigma, \Sigma') \to (N, \Lambda, \Lambda')$ dos morfismos en $\mathcal{C}$. El módulo $K = ker(f-g)$, junto con la inclusión ι de K en M es igualador, en R-Mod de la pareja f, g. Demostramos que la terna

$$(K, K \cap \Sigma, K \cap \Sigma')$$

junto con ι, es igualador de la pareja f, g en $\mathcal{C}$. Obsérvese que ι claramente es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $f\iota = g\iota$. Ahora, sea (L, Δ, Δ') un objeto en $\mathcal{C}$, y sea $\mu : (L, \Delta, \Delta') \to (M, \Sigma, \Sigma')$ un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $f\mu = g\mu$. Ya que K, junto con ι es igualador, en R-Mod, de la pareja f, g, existe un único morfismo $\nu : L \to K$ tal que $\iota\nu = \mu$. De esta ecuación, junto con el hecho de que $\mu(\Delta) \subseteq \Sigma$

y $\mu(\Delta') \subseteq \Sigma'$, se sigue que $\nu(\Delta) \subseteq K \cap \Sigma$ y $\nu(\Delta') \subseteq K \cap \Sigma'$, es decir, se sigue que ν es un morfismo en $\mathcal{C}$. Concluimos que $\mathcal{C}$ admite igualadores concretos. De esto y de [2,12.3] se sigue que $\mathcal{C}$ es concretamente completa.

Demostramos ahora que la categoría $\mathcal{C}$ admite coproductos concretos. Sea $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$ una colección no vacía de objetos en $\mathcal{C}$. Para cada $\alpha \in A$, denotaremos por ι_α a la inclusión canónica de M_α en $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$. Demostramos que la terna

$$(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma_\alpha), \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma'_\alpha))$$

junto con morfismos ι_α, $\alpha \in A$, es coproducto, en $\mathcal{C}$, de $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$. Obsérvese que para cada $\alpha \in A$, ι_α es un morfismo en $\mathcal{C}$. Ahora, sea (N, Λ, Λ') un objeto en $\mathcal{C}$, y sean $\mu_\alpha : (M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) \to (N, \Lambda, \Lambda')$, $\alpha \in A$, morfismos en $\mathcal{C}$. Exíste un único morfismo $\mu : \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \to N$, en R-Mod tal que $\mu\iota_\alpha = \mu_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. De estas ecuaciones, junto con el hecho de que $\mu_\alpha(\Sigma_\alpha) \subseteq \Lambda$ y $\mu_\alpha(\Sigma'_\alpha) \subseteq \Lambda'$ para todo $\alpha \in A$, se sigue que $\mu(\bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma_\alpha)) \subseteq \Lambda$ y que $\mu(\bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma'_\alpha)) \subseteq \Lambda'$, es decir, se sigue que μ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Concluimos que $\mathcal{C}$ admite coproductos concretos.

Finalmente, demostramos que en $\mathcal{C}$ todo sistema dirigido admite límite directo concreto. Sea $\left\{((M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ un sistema dirigido en $\mathcal{C}$. Para cada $\alpha \in A$, denotaremos por φ_α^∞ al morfismo canónico, de M_α en $\varinjlim M_\alpha$, en R-Mod. Demostraremos que la terna

$$(\varinjlim M_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma_\alpha), \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma'_\alpha))$$

junto con φ_α^∞, $\alpha \in A$, es límite directo, en $\mathcal{C}$, de $\left\{((M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha \in A\right\}$. Obsérvese que para cada $\alpha \in A$, φ_α^∞ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Sea (N, Λ, Λ') un objeto en $\mathcal{C}$, y sean $\mu_\alpha : (M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) \to (N, \Lambda, \Lambda')$, $\alpha \in A$, morfismos en $\mathcal{C}$, tales que $\mu_\beta \varphi_\alpha^\beta = \mu_\alpha$ para todo $\alpha, \beta \in A$ tales que $\alpha \leq \beta$. Existe un único morfismo $\mu : \varinjlim M_\alpha \to N$ en R-Mod tal que $\mu\varphi_\alpha^\infty = \mu_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. De estas ecuaciones, junto con el hecho de que $\mu_\alpha(\Sigma_\alpha) \subseteq \Lambda$ y $\mu_\alpha(\Sigma'_\alpha) \subseteq \Lambda'$ para todo $\alpha \in A$, se sigue que $\mu(\bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma_\alpha)) \subseteq \Lambda$ y que $\mu(\bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma'_\alpha)) \subseteq \Lambda'$, es decir, se sigue que μ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Concluimos que $\mathcal{C}$ admite límites directos concretos sobre R-Mod. Esto concluye la demostración.

■

Dada una colección no vacía de objetos, $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$, en $\mathcal{C}$, denotaremos por

$$\prod_{\alpha \in A} (M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) \text{ y por } \coprod_{\alpha \in A} (M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha)$$

al producto y al coproducto respectivamente, en $\mathcal{C}$, de $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$. Dado un sistema dirigido $\left\{((M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha \in A\right\}$ en $\mathcal{C}$, denotaremos por

$$\varinjlim (M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha)$$

al límite directo, en $\mathcal{C}$, de $\{((M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha \in A\}$.
Obsérvese que en general, no todo par de morfismos en $\mathcal{C}$ admite coigualador concreto en $\mathcal{C}$. Para ver esto obsérvese que si k es un campo de característica $\neq 2$, entonces $\{0\}$ es coigualador, en k-Mod, de la pareja $id_k, -id_k$. Así, en $\mathcal{C}$, la pareja de endomorfismos de $(k, k \setminus \{0\}, \emptyset)$, $id_k, -id_k$, no admite coigualador concreto en $\mathcal{C}$.
El siguiente lema dice que la categoría $\mathcal{G}$ es concretamente completa y concretamente cocompleta sobre Gr.

Lema 6.2. *$\mathcal{G}$ es una categoría concretamente completa y concretamente cocompleta.*

Demostración. Demostramos primero que $\mathcal{G}$ es concretamente completa.
Demostramos que $\mathcal{G}$ admite productos concretos. Sea $\{(\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha) : \alpha \in A\}$ una colección no vacía de objetos en $\mathcal{G}$. Definimos la gráfica $\prod_{\alpha\in A} \Gamma_\alpha$ como sigue:

1. $\left|\prod_{\alpha\in A} \Gamma_\alpha\right| = \prod_{\alpha\in A} |\Gamma_\alpha|$
2. Si $a, b \in \prod_{\alpha\in A} |\Gamma_\alpha|$, entonces a y b son adyacentes en $\prod_{\alpha\in A} \Gamma_\alpha$ si $\pi_\alpha(a)$ y $\pi_\alpha(b)$ son adyacentes en Γ_α para todo $\alpha \in A$, donde π_α denota la proyección canónica de $\prod_{\alpha\in A} |\Gamma_\alpha|$ en $|\Gamma_\alpha|$ para cada $\alpha \in A$

Es fácil ver que la gráfica $\prod_{\alpha\in A} \Gamma_\alpha$, junto con las proyecciones canónicas π_α, $\alpha \in A$, es producto, en Gr, de la familia $\{\Gamma_\alpha : \alpha \in A\}$. Demostramos que la pareja

$$(\prod_{\alpha\in A} \Gamma_\alpha, \prod_{\alpha\in A} \Delta_\alpha)$$

junto con los morfismos π_α, $\alpha \in A$, son producto, en $\mathcal{G}$, de $\{(\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha) : \alpha \in A\}$.
Obsérvese primero que π_α es morfismo, en $\mathcal{G}$ para todo $\alpha \in A$. Ahora, sea (Γ, Δ) un objeto en $\mathcal{G}$, y sean $\mu_\alpha : (\Gamma, \Delta) \to (\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha)$, $\alpha \in A$, morfismos en $\mathcal{G}$. Existe un único morfismo $\mu : \Gamma \to \prod_{\alpha\in A} \Gamma_\alpha$, en Gr tal que $\pi_\alpha \mu = \mu_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. De estas ecuaciones, junto con el hecho de que $\mu_\alpha(\Delta) \subseteq \Delta_\alpha$ para todo $\alpha \in A$ se sigue que $\mu(\Delta) \subseteq \prod_{\alpha\in A} \Delta_\alpha$, es decir, se sigue que μ es un morfismo en $\mathcal{G}$. Concluimos que $\mathcal{G}$ admite productos concretos sobre Gr.

Demostramos ahora que $\mathcal{G}$ admite igualadores concretos. Sean (Γ, Δ) y (Γ', Δ') dos objetos en $\mathcal{G}$. Sean $f, g : (\Gamma, \Delta) \to (\Gamma', \Delta')$ dos morfismos en $\mathcal{G}$. Definimos la gráfica $\Gamma_{f,g}$ como sigue:

1. $|\Gamma_{f,g}| = \{a \in |\Gamma| : f(a) = g(a)\}$.
2. Sean $a, b \in |\Gamma_{f,g}|$. Diremos que a y b son adyacentes en $\Gamma_{f,g}$ si a y b son adyacentes en Γ.

Es decir, $\Gamma_{f,g}$ es la subgráfica completa de Γ, generada por el igualador, en la categoría de conjuntos y funciones, de la pareja f, g. Denotaremos por ι a la inclusión canónica, en Gr, de $\Gamma_{f,g}$ en Γ. Demostramos que la pareja

$$(\Gamma_{f,g}, |\Gamma_{f,g}| \cap \Delta)$$

junto con ι, es igualador, en $\mathcal{G}$, de la pareja f, g. Es fácil ver que ι es un morfismo en $\mathcal{G}$. Sea (Γ'', Δ'') un objeto en $\mathcal{G}$, y sea $\mu : (\Gamma'', \Delta'') \to (\Gamma, \Delta)$, un morfismo, en $\mathcal{G}$, tal que $f\mu = g\mu$. Existe un único morfismo $\nu : \Gamma'' \to \Gamma_{f,g}$, en Gr, tal que $\iota\nu = \mu$. De esta ecuación, junto con el hecho de que $\mu(\Delta'') \subseteq \Delta$ se sigue que $\nu(\Delta'') \subseteq |\Gamma_{f,g}| \cap \Delta$, es decir, se sigue que ν es un morfismo en $\mathcal{G}$. Concluimos que $\mathcal{G}$ admite igualadores concretos. De esto y de [2,12.3] se sigue que la categoría $\mathcal{G}$ es concretamente completa.
Demostramos ahora que $\mathcal{G}$ es una categoría concretamente cocompleta.
Demostramos que $\mathcal{G}$ admite coproductos concretos. Sea $\{(\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha) : \alpha \in A\}$ una colección no vacía de objetos en $\mathcal{G}$. Definimos la gráfica $\coprod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$ como sigue:

1. $\left|\coprod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha\right| = \coprod_{\alpha \in A} |\Gamma_\alpha|$
2. Sean $a, b \in \coprod_{\alpha \in A} |\Gamma_\alpha|$. a y b serán adyacentes en $\coprod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$ si existe $\alpha \in A$ tal que $a, b \in |\Gamma_\alpha|$ y tal que a y b son adyacentes en Γ_α.

Es decir, $\coprod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$ es la gráfica definida por la unión ajena tanto de los conjuntos de vértices, como de las relaciones de adyacencias de los elementos de la familia $\{\Gamma_\alpha : \alpha \in A\}$. Denotaremos por ι_α a la inclusión canónica de $|\Gamma_\alpha|$ en $\coprod_{\alpha \in A} |\Gamma_\alpha|$ para todo $\alpha \in A$. Es fácil ver que ι_α se extiende a un morfismo en Gr para todo $\alpha \in A$, y que la gráfica $\coprod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$, junto con los morfismos ι_α, $\alpha \in A$, es coproducto, en Gr, de la colección $\{\Gamma_\alpha : \alpha \in A\}$. Demostramos que la pareja

$$(\coprod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Delta_\alpha))$$

junto con ι_α, $\alpha \in A$, es coproducto, en $\mathcal{G}$, de $\{(\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha) : \alpha \in A\}$. Es fácil ver que ι_α es un morfismo en $\mathcal{G}$ para cada $\alpha \in A$. Ahora, sea (Γ, Δ) un objeto en $\mathcal{G}$, y sean $\mu_\alpha : (\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha) \to (\Gamma, \Delta)$, morfismos en $\mathcal{G}$. Existe un único morfismo $\mu : \coprod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha \to \Gamma$, en Gr, tal que $\mu\iota_\alpha = \mu_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. De estas ecuaciones, junto con el hecho de que $\mu_\alpha(\Delta_\alpha) \subseteq \Delta$ para todo $\alpha \in A$, se sigue que $\mu(\bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Delta_\alpha)) \subseteq \Delta$, es decir, se sigue que μ es morfismo en $\mathcal{G}$. Concluimos que $\mathcal{G}$ admite coproductos concretos.
Finalmente, demostramos que $\mathcal{G}$ admite coigualadores concretos. Sean (Γ, Δ) y (Γ', Δ') dos objetos en $\mathcal{G}$. Sean $f, g : (\Gamma, \Delta) \to (\Gamma', \Delta')$ dos morfismos en $\mathcal{G}$. Definimos la gráfica $\Gamma^{f,g}$ como sigue:

1. El conjunto de vértices, $\left|\Gamma^{f,g}\right|$, de $\Gamma^{f,g}$, será el conjunto de clases de equivalencia de elementos de $|\Gamma'|$ bajo la mínima relación de equivalencia que identifica a $f(a)$ con $g(a)$ para todo $a \in |\Gamma|$.
2. Sean $a, b \in \left|\Gamma^{f,g}\right|$. a y b serán adyacentes en $\Gamma^{f,g}$ si existen representantes x, y de a y b, respectivamente, en Γ', tales que x y y sean adyacentes en Γ'.

Es decir $\Gamma^{f,g}$ será la gráfica coinducida por la relación de equivalencia que define al conjunto $\left|\Gamma^{f,g}\right|$. Denotaremos por π a la proyección canónica de $|\Gamma'|$ en $\left|\Gamma^{f,g}\right|$. Es fácil ver que π es un morfismo en Gr, que $\pi f = \pi g$, y que $\Gamma^{f,g}$, junto con π, es coigualador, en Gr, de la pareja f, g. Demostramos que la pareja

$$(\Gamma^{f,g}, \pi(\Delta'))$$

junto con π, es coigualador, en $\mathcal{G}$, de la pareja f, g. Obsérvese que π es un morfísmo en $\mathcal{G}$. Ahora, sean (Γ'', Δ'') un objeto en $\mathcal{G}$, y $\mu : (\Gamma', \Delta') \to (\Gamma'', \Delta'')$ tal que $\mu f = \mu g$. Existe un único morfismo $\nu : \Gamma^{f,g} \to \Gamma'$ tal que $\nu\pi = \mu$. De esta ecuación, junto con el hecho de que $\mu(\Delta') \subseteq \Delta''$ se sigue que $\nu(\pi(\Delta')) \subseteq \Delta''$, es decir, se sigue que ν es morfismo en $\mathcal{G}$. Concluimos que $\mathcal{G}$ admite coigualadores concretos sobre Gr. De esto y de [2,12.3] se concluye que $\mathcal{G}$ es una categoría cocompleta. Esto concluye la demostración.

$\blacksquare$

Dada una colección no vacía de objetos $\{(\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha) : \alpha \in A\}$ en $\mathcal{G}$, denotaremos por

$$\prod_{\alpha \in A} (\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha) \text{ y por } \coprod_{\alpha \in A} (\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha)$$

al producto y al coproducto respectivamente, en $\mathcal{G}$, de $\{(\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha) : \alpha \in A\}$. Obsérvese que de (6.2) se sigue que todo conjunto dirigido en $\mathcal{G}$ admite límite directo concreto en $\mathcal{G}$. Si $\left\{((\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ es un sistema dirigido en $\mathcal{G}$, denotaremos por

$$\varinjlim (\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha)$$

al límite directo, en $\mathcal{G}$, de $\left\{((\Gamma_\alpha, \Delta_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$. Procedemos ahora al estudio de funtores de la forma Γ_I. El siguiente lema dice que funtores de esta forma preservan límites directos. Recuérdese antes que la unión, $\bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$, de una colección de gráficas $\{\Gamma_\alpha : \alpha \in A\}$, se define de la siguiente manera:

1. $\left|\bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha\right| = \bigcup_{\alpha \in A} |\Gamma_\alpha|$.
2. Si $a, b \in \bigcup_{\alpha \in A} |\Gamma_\alpha|$, entonces a y b son adyacentes en $\bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$ si existe $\alpha \in A$ tal que $a, b \in |\Gamma_\alpha|$ y a y b son adyacentes en Γ_α.

Obsérvese que para cada $\alpha \in A$, la gráfica Γ_α está contenida, como subgráfica, en la gráfica $\bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$. Más aún, obsérvese que $\bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$ es mínima con respecto a esta propiedad.

Lema 6.3. *Sean I un ideal y M un módulo. Sea $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ una colección de submódulos de M. Sea $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in A\}$ una colección de conjuntos tales que $\Sigma_\alpha \subseteq M_\alpha \setminus \{0\}$ para todo $\alpha \in A$. Si tanto $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ como $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in A\}$ son conjuntos dirigidos con el orden dado por la contención en M, entonces*

$$\Gamma_I(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

Demostración. Sea $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ una colección de submódulos de M y sea $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in A\}$ una colección de conjuntos tales que $\Sigma_\alpha \subseteq M_\alpha \setminus \{0\}$ para todo $\alpha \in A$. Supóngase que tanto $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ como $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in A\}$ son conjuntos dirigidos con el orden dado por la contención en M. Claramente

$$\left|\Gamma_I(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha)\right| = \left|\bigcup_{\alpha\in A} \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha)\right|$$

Así, basta con demostrar que las relaciones de adyacencia correspondientes son iguales. Ahora, ya que, para cada $\alpha \in A$, $\Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha)$ es subgráfica de $\Gamma_I(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha)$, la relación de adyacencia en $\bigcup_{\alpha\in A} \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha)$, está contenida en la relación de adyacencia de $\Gamma_I(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha)$. Ahora, sean $x, y \in \bigcup_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha$ tales que los vértices Rx y Ry son adyacentes en $\Gamma_I(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha)$. Supóngase que $x \in \Sigma_\alpha$ y que $y \in \Sigma_\beta$. Sea $\gamma \in A$ tal que $M_\alpha, M_\beta \leq M_\gamma$ y $\Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta \subseteq \Sigma_\gamma$. Ya que $Rx, Ry \in |\Gamma_I(M_\gamma, \Sigma_\gamma)|$, y ya que Rx y Ry son adyacentes en $\Gamma_I(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha)$, se sigue que Rx y Ry son adyacentes en $\Gamma_I(M_\gamma, \Sigma_\gamma)$, de lo que se sigue que Rx y Ry son adyacentes en $\bigcup_{\alpha\in A} \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha)$. Esto concluye la demostración. ■

Lema 6.4. *Sea I un ideal. Si $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ es un sistema dirigido en $\mathcal{C}$, entonces*

$$\Gamma_I(\varinjlim(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha)) = \varinjlim \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha)$$

Demostración. Sean I un ideal y $\{((M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ un sistema dirigido en $\mathcal{C}$. Demostramos que $\Gamma_I(\varinjlim(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha))$, junto con morfismos $\Gamma_I(\varphi_\alpha^\infty)$, $\alpha \in A$, es límite directo del sistema $\{(\Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \Gamma_I(\varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ Del hecho de que $\varphi_\beta^\infty \varphi_\alpha^\beta = \varphi_\alpha^\infty$ para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \leq \beta$ se sigue que $\Gamma_I(\varphi_\beta^\infty)\Gamma_I(\varphi_\alpha^\beta) = \Gamma_I(\varphi_\alpha^\infty)$ para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \leq \beta$.
Ahora, sea (Γ, Δ) un objeto en $\mathcal{G}$, y sean $\mu_\alpha : \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha) \to (\Gamma, \Delta)$, $\alpha \in A$, morfismos en $\mathcal{G}$, tales que $\mu_\beta \Gamma_I(\varphi_\alpha^\beta) = \mu_\alpha$ para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \leq \beta$. De la demostración de (6.1) se tiene que

$$\varinjlim(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) = (\bigcup_{\alpha\in A} \varphi_\alpha^\infty(M_\alpha), \bigcup_{\alpha\in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma_\alpha), \bigcup_{\alpha\in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma'_\alpha))$$

De esto, del hecho de que el conjunto de componentes definidas por el conjunto $\bigcup_{\alpha\in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma'_\alpha)$ en $\Gamma_I(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha)$ es claramente igual al conjunto de componentes de $\bigcup_{\alpha\in A} \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha)$ definidas por $\bigcup_{\alpha\in A} \Gamma_I(\varphi_\alpha^\infty)(\Sigma'_\alpha)$, y de (6.3) se sigue que

$$\Gamma_I(\varinjlim(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha)) = \bigcup_{\alpha\in A} \Gamma_I(\varphi_\alpha^\infty)(\Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha))$$

El lado derecho de esta igualdad es igual a

$$\bigcup_{\alpha\in A} \Gamma_I(\varphi_\alpha^\infty(M_\alpha), \varphi_\alpha^\infty(\Sigma_\alpha), \varphi_\alpha^\infty(\Sigma'_\alpha))$$

Así, definimos $\mu : \varinjlim \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) \to (\Gamma, \Delta)$ como sigue: Si $R\varphi_\alpha^\infty(x) \in \left|\varinjlim \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha)\right|$, con $x \in \Sigma_\alpha$, hacemos $\mu(R\varphi_\alpha^\infty(x)) = \mu_\alpha(Rx)$ y extendemos a μ a un morfismo en Gr. Es claro que definido así μ es un morfismo en $\mathcal{G}$, es claro también que $\mu\Gamma_I(\varphi_\alpha^\infty) = \mu_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, y que μ es único con respecto a esta propiedad. Esto concluye la demostración. ■

La siguiente proposición dice que funtores de la forma Γ_I preservan además coproductos.

Proposición 6.5. *Sea I un ideal. Si $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$ es una colección no vacía de objetos de $\mathcal{C}$, entonces*

$$\Gamma_I(\coprod_{\alpha \in A}(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha)) = \coprod_{\alpha \in A} \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha)$$

Demostración. Sea $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$ una colección no vacía de objetos en $\mathcal{C}$. Por (6.1) el coproducto, en $\mathcal{C}$, de $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$ está dado por la terna

$$(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma_\alpha), \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma'_\alpha))$$

Donde ι_α denota la inclusión canónica de M_α en $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Demostramos que

$$\Gamma_I(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma_\alpha), \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma'_\alpha))$$

junto con los morfismos $\Gamma_I(\iota_\alpha)$, $\alpha \in A$, es coproducto, en $\mathcal{C}$, de la colección de objetos $\{\Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$ en $\mathcal{G}$. Sea (Γ, Δ), un objeto en $\mathcal{G}$. Sean $\mu_\alpha : \Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) \to (\Gamma, \Delta)$, $\alpha \in A$, morfismos en $\mathcal{G}$. Definimos

$$\mu : \Gamma_I(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma_\alpha), \bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma'_\alpha)) \to (\Gamma, \Delta)$$

como sigue: Si $x \in \Sigma_\alpha$, hacemos $\mu(R\iota_\alpha(x)) = \mu_\alpha(Rx)$. Así, ya que la unión $\bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(\Sigma_\alpha)$ es ajena, μ se extiende a

$$\mu : \left|\Gamma_I(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha)\right| \to |\Gamma|$$

Extendemos ahora μ a un morfismo en Gr. Claramente, μ, así definido, es un morfismo en $\mathcal{G}$, y satisface la igualdad $\mu\Gamma_I(\iota_\alpha) = \mu_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Es fácil ver que μ es único con respecto a esta propiedad. Esto concluye la demostración. ■

Finalmente, obsérvese que funtores de la forma Γ_I, en general, no preservan productos. Para ver esto obsérvese que mientras la gráfica

$$(\Gamma_{\mathbb{F}_3}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}, \emptyset))^2$$

tiene un sólo vértice, la gráfica

$$\Gamma_{\mathbb{F}_3}(\mathbb{F}_3^2, (\mathbb{F}_3 \setminus \{0\})^2, \emptyset)$$

tiene dos vértices, a saber, los subespacios de $\mathbb{F}_3^2$ generados por $(1,1)$ y $(1,-1)$ respectivamente.
Obsérvese también que en general, funtores de la forma Γ_I, tampoco preservan igualadores. Para ver esto obsérvese que mientras el igualador de la pareja de morfísmos en $\mathcal{C}$

$$id_{\mathbb{F}_3}, -id_{\mathbb{F}_3}$$

como endomorfismos de $(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}, \emptyset)$, es igual a la terna $(\{0\}, \emptyset, \emptyset)$, la pareja de morfismos en $\mathcal{C}$

$$\Gamma_{\mathbb{F}_3}(id_{\mathbb{F}_3}), \Gamma_{\mathbb{F}_3}(-id_{\mathbb{F}_3})$$

como endomorfismos de $\Gamma_{\mathbb{F}_3}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}, \emptyset)$ es igual a la pareja

$$id_{\Gamma_{\mathbb{F}_3}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}, \emptyset)}, id_{\Gamma_{\mathbb{F}_3}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}, \emptyset)}$$

cuyo igualador, en $\mathcal{G}$, es igual a $\Gamma_{\mathbb{F}_3}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}, \emptyset)$.

7. Problemas de rango en rango infinito

En esta sección aplicamos lo hecho en la sección anterior a la generalización y extensión de los resultados obtenidos en la sección 4. En los resultados principales de esta sección presentamos criterios para la solución de problemas de rango asociados a enteros arbitrariamente grandes y a cardinales infinitos.

A lo largo de esta sección consideraremos solamente funciones de rango con codominio el conjunto de todos los cardinales $\leq \aleph_0$. A continuación estableceremos condiciones que garanticen soluciones a problemas de rango en rangos arbitrariamente grandes y en rango infinito.

Diremos que un sistema dirigido $\left\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ en R-Mod es numerable si el conjunto A es numerable. Diremos que una clase de módulos Ω es una clase completa si Ω es cerrada bajo sumas directas finitas, bajo sumandos directos, y bajo límites directos de sistemas dirigidos numerables. Tanto R-Mod como la clase de todos los módulos con dimensión de Krull son ejemplos de clases completas. Dada una clase de módulos, no necesariamente completa, Ω, es fácil ver que la clase de todas las clases completas que contienen a Ω es cerrada bajo intersecciones. Definimos así la cerradura completa $\tilde{\Omega}$ de la clase Ω como la intersección de todas las clases completas que contienen a Ω. La clase $\tilde{\Omega}$, así definida, es una clase completa, y es la mínima clase completa que contiene a Ω. La clase de todos los módulos numerablemente generados es una clase completa, y esta clase es igual a la cerradura completa de la clase de todos los módulos finitamente generados.

Ahora, dados, un ideal I y módulos M y N, diremos que un morfismo $f : M \to N$ es I-puro si $f(M)$ es submódulo I-puro de N. Más aún, diremos que un sistema dirigido $\left\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$, en R-Mod, es I-puro si φ_α^β es un monomorfismo I-puro para todo $\alpha, \beta \in A$ tales que $\alpha \leq \beta$. El siguiente es un ejemplo de un sistema dirigido numerable I-puro: Sea $M_1 \leq M_2 \leq ...$ una cadena de módulos tales que M_n es submódulo I-puro de M_{n+1} para todo $n \geq 1$. Si para cada n, m tales que $n \leq m$ denotamos por φ_n^m a la inclusión de M_n en M_m, entonces el sistema $\{(M_n, \varphi_n^m) : n, m \geq 1\}$ es un sistema dirigido numerable I-puro. Recuérdese que en la sección 4 se definió una cadena $M_{s_1} \leq M_{s_2} \leq ...$ para cada sucesión infinita admisible s. Bajo estas condiciones se observó que M_{s_n} es submódulo $Soc(k \ltimes V)$-puro de $M_{s_{n+1}}$ para todo $n \geq 1$. Así, en este caso, el sistema $\{(M_{s_n}, \varphi_n^m) : n, m \geq 1\}$ es un sistema numerable $Soc(k \ltimes V)$-puro en $k \ltimes V$. Más aún, para cada subsucesión infinita t de s, el sistema $\{(M_{t_n}, \varphi_n^m) : n, m \geq 1\}$ es también un sistema dirigido numerable $Soc(k \ltimes V)$-puro en $k \ltimes V$-Mod. El siguiente será el resultado principal de esta sección.

Teorema 7.1. *Sea Ω una clase de módulos. Sea ρ una función de rango con dominio Ω. Si Ω es una clase completa y existen, un ideal I, y un sistema dirigido numerable I-puro $\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ en R-Mod tal que:*

1. *$M_\alpha \in \Omega \cap \mathfrak{D}(I)$ para todo $\alpha \in A$.*
2. *Existen $\alpha_1, \alpha_2, ... \in A$ tales que $\rho(M_{\alpha_i}) < \rho(M_{\alpha_{i+1}})$ para todo i.*
3. *Existe un entero $\kappa \geq 1$ tal que $cdim_I M_\alpha \leq \kappa$ para todo $\alpha \in A$*

Entonces

1. *Para todo $n \geq 1$ existe $m \geq n$ tal que el problema de rango asociado a la terna (Ω, ρ, m) tiene solución.*
2. *El problema de rango asociado a la terna $(\Omega, \rho, \aleph_0)$ tiene solución.*

Obsérvese que las observaciones hechas antes de (7.1) implican que (7.1), junto con una respuesta positiva a (5.1), implican, en el caso en el que $dim_k V$ sea suficientemente grande, la existencia de soluciones a problemas de rango, en $k \ltimes V$, asociados a parejas $(E_0, \aleph_0)$ y (E_0, m) con m arbitrariamente grande. A continuación reducimos la demostración de (7.1) a la demostración de una serie de lemas.

Lema 7.2. *Sea I un ideal. Sea $\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ un sistema dirigido en R-Mod. Supóngase que φ_α^β es monomorfismo para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \leq \beta$. Si $M_\alpha \in \mathfrak{D}(I)$ para todo $\alpha \in A$, entonces $\varinjlim M_\alpha \in \mathfrak{D}(I)$*

Demostración. Del hecho de que para todo $\alpha \in A$, $I^2\varphi_\alpha^\infty(M_\alpha) = \varphi_\alpha^\infty(I^2 M_\alpha)$, e $I^2 M = \{0\}$ se sigue que $I^2 \varinjlim M_\alpha = \{0\}$. Ahora, si $x \in M_\alpha$ es tal que $\varphi_\alpha^\infty(x) \in ann_I^* \varinjlim M_\alpha$, entonces, ya que del hecho de que φ_α^β es monomorfismo para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \leq \beta$ se sigue que φ_α^∞ es monomorfismo para todo $\alpha \in A$, concluimos que $x \in ann_I^* M_\alpha$, de lo que se sigue que $x \in IM_\alpha$, y por lo tanto que $\varphi_\alpha^\infty(x) \in I\varphi_\alpha^\infty(M_\alpha)$. Concluimos que $ann_I^* \varinjlim M_\alpha \subseteq I \varinjlim M_\alpha$. Esto concluye la demostración. ■

Lema 7.3. *Sea $\{(\Gamma_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ un sistema dirigido en Gr. Sea $n \geq 1$. Si el número de componentes de Γ_α es menor o igual que n para todo $\alpha \in A$, entonces el número de componentes de $\varinjlim \Gamma_\alpha$ es menor o igual que n.*

Demostración. Del hecho de que φ_α^∞ es morfismo en Gr para todo $\alpha \in A$ se sigue, claramente, que el número de componentes de la subgráfica $\varphi_\alpha^\infty(\Gamma_\alpha)$ de $\varinjlim \Gamma_\alpha$ es menor o igual que n para todo $\alpha \in A$. Sean $X_1, ..., X_k$ componentes de $\varinjlim \Gamma_\alpha$. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_k \in A$ tales que $X_i \cap \left|\varphi_{\alpha_i}^\infty(\Gamma_{\alpha_i})\right| \neq \emptyset$. Sea $\gamma \in A$ tal que $\alpha_i \leq \gamma$ para todo $1 \leq i \leq k$. Entonces $X_i \cap \left|\varphi_\gamma^\infty(\Gamma_\gamma)\right| \neq \emptyset$. Es claro que los conjuntos $X_i \cap \left|\varphi_\gamma^\infty(\Gamma_\gamma)\right|$ están en componentes distintas de $\varphi_\gamma^\infty(\Gamma_\gamma)$. Se sigue que $k \leq n$. Esto concluye la demostración ■

Lema 7.4. *Sea I un ideal. Sea $\left\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ un sistema dirigido en R-Mod. Supóngase que $\left\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ es I-puro. Sea $n \geq 1$. Si $cdim_I M_\alpha$ existe y es menor o igual que n para todo $\alpha \in A$, entonces $cdim_I \varinjlim M_\alpha$ existe y es menor o igual que n.*

Demostración. Del hecho de que φ_α^β es monomorfismo para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \leq \beta$ se sigue, por (7.2) que $cdim_I \varinjlim M_\alpha$ existe. Ahora, del hecho de que $\varphi_\alpha^\beta(M_\alpha) \leq_I M_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \leq \beta$ se sigue que φ_α^β es un morfismo en

$$Hom_{\mathcal{C}}((M_\alpha, M_\alpha \setminus IM_\alpha, \emptyset), (M_\beta, M_\beta \setminus IM_\beta, \emptyset))$$

para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \leq \beta$. Así

$$\left\{((M_\alpha, M_\alpha \setminus IM_\alpha, \emptyset), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$$

es un sistema dirigido en $\mathcal{C}$. El límite directo de este sistema es

$$(\varinjlim M_\alpha, \varinjlim M_\alpha \setminus I \varinjlim M_\alpha, \emptyset)$$

ya que $\bigcup_{\alpha \in A} I\varphi_\alpha^\infty(M_\alpha) = I \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(M_\alpha)$. De esto y de (7.3) se sigue que el número de componentes de $\Gamma_I(\varinjlim M_\alpha, \varinjlim M_\alpha \setminus \varinjlim M_\alpha)$ es menor o igual que n, es decir, que $cdim_I \varinjlim M_\alpha \leq n$. ■

Demostración de 5.1 Sea I un ideal. Sea $\left\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ un sistema dirigido I-puro tal que $M_\alpha \in \Omega$ para todo $\alpha \in A$. La demostración de 1 es análoga a la demostración de (5.3). Demostramos 2. Del hecho de que la clase Ω es completa se sigue que $\varinjlim M_\alpha \in \Omega$. De 1 y de (7.2) se sigue que $\varinjlim M_\alpha \in \mathfrak{D}(I)$. De esto, de 2, y de (7.4) se sigue que $cdim_I \varinjlim M_\alpha \leq \kappa$. De esto, de (3.2) y de (3.3) se sigue que $\varinjlim M_\alpha$ admite descomposiciones inescindibles finitas y que toda descomposición inescindible de $\varinjlim M_\alpha$ tiene cardinalidad menor o igual que κ. Sea $\varinjlim M_\alpha = \bigoplus_{i=1}^n N_i$ una descomposición inescindible de $\varinjlim M_\alpha$. De 3 se sigue que $\rho(\varinjlim M_\alpha) = \aleph_0$. El lado izquierdo de esta igualdad es menor o igual que $\sum_{i=1}^n \rho(N_i)$. Se sigue que existe $1 \leq t \leq n$ tal que $\rho(N_t) = \aleph_0$. Se sigue, ya que la clase Ω es completa, que $N_t \in \Omega$. Así, $N_t \in \Omega$, N_t es inescindible, y $\rho(N_t) = \infty$, es decir, el problema de rango asociado a la terna $(\Omega, \rho, \aleph_0)$ tiene solución. Esto demuestra 2. ■

A continuación demostramos una versión de (7.1) en la que, bajo ciertas hipótesis, se sustituye la I-dimensión combinatoria por la I-dimensión fundamental combinatoria. Antes demostramos versiones, en dimensión fundamental combinatoria, de (7.2) y (7.4). En lo que resta de esta sección diremos que un sistema dirigido $\left\{((M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ en $\mathcal{C}$, es fundamental con respecto a un ideal I, si:

1. El sistema $\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ es I-puro.

2. $\Sigma_\alpha = M_\alpha \setminus IM_\alpha$ para todo $\alpha \in A$

3. Σ'_α es fundamental en M_α para todo $\alpha \in A$

4. Para todo $\varphi_\alpha^\infty(x) \in \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma'_\alpha)$ existen $\beta \in A$ y $u \in M_\beta$ tales que, para todo $\gamma \in A$ con $\gamma \geq \alpha, \beta$, se tiene que

$$\varphi_\beta^\gamma(u) \notin \sum_{|G_I(M_\gamma)| \setminus C^I_{\varphi_\alpha^\gamma(x)}} Ry$$

Lema 7.5. *Sea I un ideal. Sea $\{((M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ un sistema dirigido en $\mathcal{C}$. Si $\{((M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ es fundamental con respecto a I, entonces $\varinjlim M_\alpha \in \mathfrak{F}(I)$ y $\bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma'_\alpha)$ es fundamental en $\varinjlim M_\alpha$, con respecto a I.*

Demostración. Del hecho de que φ_α^β sea monomorfismo para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \leq \beta$, de (7.2), y del hecho de que $M_\alpha \in \mathfrak{F}(I)$ para todo $\alpha \in A$, se sigue que $\varinjlim M_\alpha \in \mathfrak{D}(I)$. Demostramos ahora que $\bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma'_\alpha)$ es fundamental en $\varinjlim M_\alpha$ con respecto a I. Es claro, ya que Σ'_α genera a M_α para todo $\alpha \in A$, y ya que $\varinjlim M_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(M_\alpha)$, que $\bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma'_\alpha)$ genera a $\varinjlim M_\alpha$. Basta entonces demostrar que para todo $\varphi_\alpha^\infty(x) \in \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma'_\alpha)$ se tiene que

$$\sum_{\left|\Gamma_I(\varinjlim M_\alpha)\right| \setminus C^I_{\varphi_\alpha^\infty(x)}} Ry \neq \varinjlim M_\alpha$$

Esto se sigue del hecho de que $\{((M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ es fundamental con respecto a I, junto con la identidad $C^I_{\varphi_\alpha^\infty(x)} = \bigcup_{\beta \leq \alpha} \Gamma_I(C^I_{\varphi_\alpha^\beta(x)})$, que se sigue fácilmente de (6.4). Esto concluye la demostración. ∎

Lema 7.6. *Sea I un ideal. Sea $\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ un sistema dirigido en R-Mod tal que $\varphi_\alpha^\beta(M_\alpha \setminus IM_\alpha) \subseteq M_\beta \setminus IM_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in A$ tales que $\alpha \leq \beta$. Supóngase que existe una colección de conjuntos $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in A\}$ tal que*

1. *$\Sigma_\alpha \subseteq M_\alpha \setminus IM_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.*

2. *$\varphi_\alpha^\beta(\Sigma_\alpha) \subseteq \Sigma_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in A$ tales que $\alpha \leq \beta$.*

3. *El sistema $\{((M_\alpha, M_\alpha \setminus IM_\alpha, \Sigma_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\}$ es fundamental con respecto a I.*

Sea $n \geq 1$. Si $fcdim_I M_\alpha \leq n$ para todo $\alpha \in A$, entonces $fcdim_I \varinjlim M \leq n$.

Demostración. De (7.5) se sigue que $\varinjlim M_\alpha \in \mathfrak{F}(I)$ y que $\bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma_\alpha)$ es fundamental en $\varinjlim M_\alpha$. Ahora, si para cada $\alpha \in A$ hacemos que Γ_α sea la subgráfica de $\Gamma_I(\varinjlim M_\alpha)$, generada por $\bigcup_{x \in \Sigma_\alpha} C_x^I$, entonces, ya que φ_α^β es morfismo en Gr y $\varphi_\alpha^\beta(\Sigma_\alpha) \subseteq \Sigma_\beta$ para todo $\alpha \leq \beta$, se tiene que $\left\{(\Gamma_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ es un sistema dirigido en Gr. Ya que, para cada $\alpha \in A$, $fcdim_I M_\alpha$ es el número de componentes de Γ_α, por (7.3), el número de componentes de $\varinjlim \Gamma_\alpha$ es menor o igual que n. El resultado se sigue de esto y del hecho de que $\varinjlim \Gamma_\alpha$ es la subgráfica de $\Gamma_I(\varinjlim M_\alpha)$ generada por $\bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha^\infty(\Sigma_\alpha)$. ■

El siguiente resultado es una versión de (7.1) en el que se sustituye la I-dimensión combinatoria por la I-dimensión fundamental combinatoria.

Teorema 7.7. *Sea Ω una clase de módulos. Sea ρ una función de rango con dominio Ω. Si Ω es una clase completa, y existen, un ideal I, y un sistema dirigido numerable I-puro $\left\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ en R-Mod tales que:*

1. *$\left\{(M_\alpha, \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ satisface las condiciones de (7.6).*
2. *Existen $\alpha_1, \alpha_2, ... \in A$ tales que $\rho(M_{\alpha_i}) < \rho(M_{\alpha_{i+1}})$ para todo i*
3. *Existe $\phi \geq 1$ tal que $fcdim_I M_\alpha \leq \phi$ para todo $\alpha \in A$*

Entonces

1. *Para todo $n \geq 1$ existe $m \geq n$ tal que el problema de rango asociado a la terna (Ω, ρ, m) tiene solución.*
2. *El problema de rango asociado a la terna $(\Omega, \rho, \aleph_0)$ tiene solución.*

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de (7.1) sustituyendo (7.2) y (7.4) por (7.5) y (7.6). ■

Obsérvese que los sistemas dirigidos definidos en las observaciones hechas antes de (7.1) satisfacen la primera parte de las condiciones de (7.6). Más aún, si asumimos que la sucesión infinita t satisface las condiciones de (5.2) con respecto al k-espacio vectorial V, entonces el sistema $\{(M_{t_n}, \varphi_n^m) : n, m \geq 1\}$ satisface además las condiciones 2 y 3 de (7.1). No asumimos sin embargo, que el sistema $\{(M_{t_n}, \varphi_n^m) : n, m \geq 1\}$ satisfaga las condiciones de (7.6) con respecto a ninguna colección $\{\Sigma_{t_n} : n \geq 1\}$. Conjeturamos lo siguiente:

Conjectura 7.8. Sea k un campo. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita. Si $dim_k V$ es suficientemente grande, entonces existen, un entero ϕ_V, una sucesión admisible infinita s, una subsucesión infinita t de s, y una colección de conjuntos $\{\Sigma_{t_n} : n \geq 1\}$ tales que $M_{t_n} \leq \phi_V$ para todo n, y tal que el sistema $\{(M_{t_n}, \varphi_n^m) : n, m \geq\}$, junto con la colección $\{\Sigma_{t_n} : n \geq 1\}$ satisfacen las condiciones de (7.6).

Obsérvese que (7.7) junto con una respuesta positiva a (7.8), implican, en el caso en el que $dim_k V$ sea suficientemente grande, la existencia de soluciones a problemas de rango, en $k \ltimes V$, asociados a parejas $(E_0, \aleph_0)$ y (E_0, m), con m arbitrariamente grande.

.

8. Cálculos finales

En esta sección presentaremos dos resultados de aproximación en el cálculo de gráficas de módulos cíclicos. Los resultados de esta sección se pueden considerar como resultados del mismo tipo de (6.3), (6.4), y (6.5). Consideramos a (6.3), (6.4), y a (6.5) como resultados de aproximación en el cálculo de gráficas de módulos cíclicos en el siguiente sentido: (6.3) establece que si una pareja (M, Σ) se puede aproximar como la unión, $(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha, \bigcup_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha)$, de una colección dirigida de parejas $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha) : \alpha \in A\}$, entonces, para cualquier ideal I, el cálculo de la I-gráfica de módulos cíclicos, $\Gamma_I(M, \Sigma)$, se reduce al cálculo de cada una de las I-gráficas de módulos cíclicos, $\Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha)$, $\alpha \in A$, junto con el cálculo de su unión. Más aún, (6.4) y (6.5) establecen que si un objeto (M, Σ, Σ') en $\mathcal{C}$ se puede aproximar como el límite directo de un sistema dirigido $\left\{((M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha), \varphi_\alpha^\beta) : \alpha, \beta \in A\right\}$ en $\mathcal{C}$, o como el coproducto de una colección no vacía de objetos $\{(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha) : \alpha \in A\}$ en $\mathcal{C}$, entonces, para cualquier ideal I, el cálculo de la I-gráfica de módulo cíclicos, $\Gamma_I(M, \Sigma, \Sigma')$, del objeto (M, Σ, Σ'), se reduce al cálculo de cada una de las I-gráficas de módulo cíclicos, $\Gamma_I(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha)$, $\alpha \in A$, junto con el cálculo de su limite directo en el primer caso, y junto con el cálculo de su coproducto en el segundo caso. Obsérvese que el primero de estos dos últimos casos implica que el cálculo de la I-gráfica de módulos cíclicos, $\Gamma_I(M, \Sigma, \Sigma')$, de un objeto (M, Σ, Σ') en $\mathcal{C}$, se reduce al cálculo de I-gráficas de módulos cíclicos de objetos, en $\mathcal{C}$, de la forma $(M_\alpha, \Sigma_\alpha, \Sigma'_\alpha)$, donde M_α es submódulo finitamente generado de M, y Σ_α es subconjunto finito de Σ, y donde Σ'_α es subconjunto finito de Σ'.
Consideraremos al siguiente resultado como una versión de (6.3) y (6.4) en donde las aproximaciones se llevan a cabo ahora en ideales en lugar de en objetos en $\mathcal{C}$.

Proposición 8.1. *Sea (M, Σ, Σ') un objeto en $\mathcal{C}$. Sea $\{I_\alpha : \alpha \in A\}$ una colección de ideales. Si $\{I_\alpha : \alpha \in A\}$, con el orden dado por la contención, es un conjunto dirigido, entonces*

$$\Gamma_{\sum_{\alpha\in A} I_\alpha}(M, \Sigma, \Sigma') = \Gamma_{\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha}(M, \Sigma, \Sigma') = \bigcup_{\alpha\in A} \Gamma_{I_\alpha}(M, \Sigma, \Sigma')$$

Demostración. Supóngase que la colección de ideales $\{I_\alpha : \alpha \in A\}$, con el orden dado por la contención, es un conjunto dirigido. Es trivial que en este caso $\sum_{\alpha\in A} I_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$. De esto se sigue la parte izquierda de la igualdad. Ahora, es inmediato que

$$\left|\Gamma_{\sum_{\alpha\in A} I_\alpha}(M, \Sigma, \Sigma')\right| = \left|\bigcup_{\alpha\in A} \Gamma_{I_\alpha}(M, \Sigma, \Sigma')\right|$$

Por lo que basta con demostrar que las relaciones de adyacencia correspondientes son iguales. Es fácil ver que la relación de adyacencia de la gráfica $\bigcup_{\alpha\in A} \Gamma_{I_\alpha}(M, \Sigma, \Sigma')$ está contenida en la relación de adyacencia de la gráfica

$\Gamma_{\sum_{\alpha\in A} I_\alpha}(M,\Sigma,\Sigma')$. Ahora, sean $x, y \in \Sigma$. Supóngase que Rx y Ry son adyacentes en $\Gamma_{\sum_{\alpha\in A} I_\alpha}(M,\Sigma,\Sigma')$. Existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in A$ tales que

$$(\sum_{i=1}^{n} I_{\alpha_i})x \cap (\sum_{i=1}^{n} I_{\alpha_i})y \neq \{0\}$$

Ahora, si $\alpha_0 \in A$ es tal que $\sum_{i=1}^{n} I_{\alpha_i} \leq I_{\alpha_0}$, entonces $I_{\alpha_0}x \cap I_{\alpha_0}y \neq \{0\}$. Así, en este caso, Rx y Ry son adyacentes en $\Gamma_{I_{\alpha_0}}(M,\Sigma,\Sigma')$. Se sigue que Rx y Ry son adyacentes en $\bigcup_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha(M,\Sigma,\Sigma')$. Esto concluye la demostración. ■

Consideraremos al siguiente resultado como una versión de (8.1) en el que las aproximaciones se llevan acabo por productos e intersecciones en lugar de por sumas y uniones. Recuérdese antes que la intersección, $\bigcap_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha$, de una familia de gráficas $\{\Gamma_\alpha : \alpha \in A\}$ se define como sigue:

1. $\left|\bigcap_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha\right| = \bigcap_{\alpha\in A}|\Gamma_\alpha|$.
2. Sean $a, b \in \left|\bigcap_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha\right|$, entonces a y b son adyacentes en $\bigcap_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha$ si a y b son adyacentes en Γ_α para todo $\alpha \in A$.

Obsérvese que, para cada $\alpha \in A$, la gráfica $\bigcap_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha$ es subgráfica de Γ_α, y que $\bigcap_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha$ es máxima con respecto a esta propiedad.

Proposición 8.2. *Supóngase que R es un dominio conmutativo. Sea (M,Σ,Σ') un objeto en $\mathcal{C}$. Sea $\{I_1, ..., I_n\}$ una colección finita de ideales. Si M es libre de torsión, entonces*

$$\Gamma_{\prod_{i=1}^{n} I_i}(M,\Sigma,\Sigma') = \Gamma_{\bigcap_{i=1}^{n} I_i}(M,\Sigma,\Sigma') = \bigcap_{i=1}^{n}\Gamma_{I_i}(M,\Sigma,\Sigma')$$

Demostración. Supóngase que R es un dominio conmutativo. Supóngase también que M es un módulo libre de torsión. Nuevamente es fácil ver que

$$\left|\Gamma_{\prod_{i=1}^{n} I_i}(M,\Sigma,\Sigma')\right| = \left|\Gamma_{\bigcap_{i=1}^{n} I_i}(M,\Sigma,\Sigma')\right| = \left|\bigcap_{i=1}^{n}\Gamma_{I_i}(M,\Sigma,\Sigma')\right|$$

Por lo que nuevamente basta con demostrar que las relaciones de adyacencia correspondientes son iguales. Sean $x, y \in \Sigma$. Es claro que si Rx y Ry son adyacentes en $\Gamma_{\prod_{i=1}^{n} I_i}(M,\Sigma,\Sigma')$, entonces Rx y Ry son adyacentes en $\Gamma_{\bigcap_{i=1}^{n} I_i}(M,\Sigma,\Sigma')$, y que si Rx y Ry son adyacentes en $\Gamma_{\bigcap_{i=1}^{n} I_i}(M,\Sigma,\Sigma')$ entonces Rx y Ry son adyacentes en $\bigcap_{i=1}^{n}\Gamma_{I_i}(M,\Sigma,\Sigma')$. Supóngase ahora que Rx y Ry son adyacentes en $\bigcap_{i=1}^{n}\Gamma_{I_i}(M,\Sigma,\Sigma')$. Para cada $1 \leq i \leq n$ sea $a_i \in I_i \setminus \{0\}$ tal que $a_i x = a_i y$. Sea $a = a_1 \cdots a_n$. Entonces $a \in \prod_{i=1}^{n} I_i \setminus \{0\}$, $ax = ay$, y $ax \neq 0$. Es decir Rx y Ry son adyacentes en $\Gamma_{\prod_{i=1}^{n} I_i}(M,\Sigma,\Sigma')$. Esto concluye la demostración. ■

Así, en el caso en el que R sea un dominio conmutativo, si el ideal I se puede aproximar ahora como la intersección de una colección finita de ideales $\{I_1, ..., I_n\}$, entonces, para cualquier objeto, (M,Σ,Σ'), en $\mathcal{C}$, tal que M es libre de torsión, el cálculo de la I-gráfica de módulos cíclicos, $\Gamma_I(M,\Sigma,\Sigma')$, de (M,Σ,Σ'), se reduce al cálculo de cada una de las gráficas $\Gamma_{I_i}(M,\Sigma,\Sigma')$, $1 \leq i \leq n$, junto con el cálculo de su intersección. En particular, si R es un dominio de Lasker (eg. R es un dominio neteriano), el cálculo de gráficas de módulos cíclicos sobre módulos libres de torsión se reduce al cálculo de un número finito de gráficas de módulos cíclicos con respecto a ideales primarios, junto con el cálculo de su intersección.

9. Apéndice: Longitud de Krull-Schmidt

En esta última sección estudiamos los casos en los cuales la función $KS\ell$, que a cada módulo M le asocia su longitud de Krull-Schmidt, $KS\ell(M)$, es una función de rango finita.
Dada una clase de módulos Ω, diremos que una función ρ, con dominio Ω, es finita (en Ω), si $\rho(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$. Diremos que la clase de módulos Ω, escinde, si para cualesquiera $N, M \in \Omega$, tales que N es submódulo de M, N es sumando directo de M. Ejemplos de clases de módulos que escinden son, la clase de todos los módulos semisimples, la clase de todos los módulos inyectivos, y el conjunto de sumandos directos, $\mathcal{S}(M)$, de un módulo M. Si la clase Ω, escinde, la función $KS\ell$, con dominio Ω, satisface la condición 1 en la definición de función de rango, es decir, satisface la condición de que $KS\ell(N) \leq KS\ell(M)$ siempre que $N, M \in \Omega$ y N es isomorfo a algún submódulo de M. En el caso en el que Ω sea la clase de todos los módulos semisimples o la clase de todos los módulos inyectivos, la función $KS\ell$ es una función de rango aditiva. Más aún, en el caso en el que Ω sea la clase de todos los módulos semisimples, la función $KS\ell$ coincide tanto con la función $Gdim$, que a cada módulo M le asocia su dimensión de Goldie, $GdimM$, como con la función $dGdim$, que a cada módulo M le asocia su dimensión dual de Goldie, $dGdimM$. Más aún, si Ω es la clase de todos los módulos semisimples artinianos, entonces $KS\ell$ coincide también con la función ℓ, que a cada módulo M le asocia su longitud $\ell(M)$, y en este caso, $KS\ell$ es una función de rango finita y aditiva.

Existen módulos M tales que la función $KS\ell$, con dominio el conjunto de sumandos directos, $\mathcal{S}(M)$, de M, no es una función de rango. Para ver esto usamos el siguiente teorema. Una demostración de este resultado se puede encontrar en [4]. Antes, recuérdese que todo monoide conmutativo A es, de forma natural, un conjunto preordenado, con el orden definido por la siguiente relación: $a \leq b$ con $a, b \in A$ si existe $c \in A$ tal que $b = a + c$. Diremos que un monoide conmutativo A es reducido, si para todo $a, b \in A$, la ecuación $a + b = 0$ implica que $a = b = 0$. Diremos también que $u \in A$ es una unidad de orden en A si para todo $a \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq nu$. Dado un módulo M, denotaremos por $add(M)$ a la colección de todas las clases de isomorfismos de sumandos directos de sumas directas finitas de copias de M. Es fácil ver que $add(M)$ junto con la operación $[N] + [L] = [N \oplus L]$ es un monoide conmutativo y reducido y que la clase $[M]$ es una unidad de orden para $add(M)$.

Teorema 9.1. *Sea A un monoide conmutativo y reducido. Sea $u \in A$ una unidad de orden en A. Entonces existen un anillo R y un isomorfismo de monoides Ψ del monoide $add(_RR)$ en A tal que $\Psi([_RR]) = u$.*

De (9.1) se sigue que existen módulos M tales que la función $KS\ell$, con dominio el conjunto de sumandos directos, $\mathcal{S}(M)$, de M no es una función de rango. Efectivamente, sea A el submonoide aditivo de $\mathbb{N}$ generado por 2 y 3, con 6 como unidad de orden. Por (7.1) existen un anillo R y un isomorfismo de monoides Ψ de $add(_RR)$ en A tal que $\Psi([_RR]) = 6$. Así, salvo por isomorfismos $\Psi^{-1}(2)$ y $\Psi^{-1}(3)$ son sumandos directos inescindibles de R. Más aún, $R = \Psi^{-1}(2)^3$ y $R =$

$\Psi^{-1}(3)^2$ son dos descomposiciones inescindibles de R. Se sigue que $KS\ell(R) \geq 3$, pero que $KS\ell(\Psi^{-1}(3)) + KS\ell(\Psi^{-1}(3)) = 2$. Así, la función $KS\ell$ no es una función de rango en $\mathcal{S}({}_RR)$.
Dedicaremos el resto de esta sección a la caracterización de módulos M, tales que la función $KS\ell$ es una función de rango finita en $\mathcal{S}(M)$. El siguiente es el resultado principal de esta sección

Teorema 9.2. *Sea M un módulo. Supóngase que M tiene longitud de Krull-Schmidt finita. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *$KS\ell$, con dominio $\mathcal{S}(M)$, es una función de rango.*

2. *$KS\ell$, con dominio $\mathcal{S}(M)$, es una función aditiva.*

3. *Cualesquiera dos descomposiciones inescindibles de M tienen la misma cardinalidad.*

Más aún, si M satisface las condiciones anteriores, entonces para todo $N \in \mathcal{S}(M)$, $KS\ell(N)$ es la cardinalidad de cualquier decomposición inescindible de N.

A continuación reducimos la demostración de (9.2) a la demostración de un par de lemas. Recuérdese que si un módulo M tiene longitud de Krull-Schmidt finita, entonces M admite descomposiciones inescindibles finitas. El siguiente lema dice que en este caso M satisface una condición, en general, estrictamente más fuerte. Si $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ y $M = \bigoplus_{\beta \in B} N_\beta$ son dos descomposicones de M, diremos que la descomposición $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ de M se refina en la descomposición $M = \bigoplus_{\beta \in B} N_\beta$ de M si para todo $\alpha \in A$ existe una descomposición $M_\alpha = \bigoplus_{\alpha_\gamma \in C_\alpha} N_{\alpha_\gamma}$ de M_α tal que las descomposiciones $M = \bigoplus_{\alpha \in A}(\bigoplus_{\alpha_\gamma \in C_\alpha} N_{\alpha_\gamma})$ y $M = \bigoplus_{\beta \in B} N_\beta$ de M son iguales.

Lema 9.3. *Sea M un módulo. Si M tiene longitud de Krull-Schmidt finita, entonces todas las descomposiciones de M se refinan en descomposiciones inescindibles finitas.*

Demostración. Sea M un módulo con longitud de Krull-Schmidt finita. Sea $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ una descomposición de M. Es claro que la descomposición $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ de M se refina en alguna descomposición inescindible finita de M si y sólo si el conjunto A es finito y M_α tiene descomposiciones inescindibles finitas para todo $\alpha \in A$. El conjunto A es finito ya que M tiene longitud de Krull-Schmidt finita, y del hecho de que M_α tiene longitud de Krull-Schmidt finita para todo $\alpha \in A$, se sigue que M_α tiene descomposiciones inescindibles finitas para todo $\alpha \in A$. Esto concluye la demostración. ■

La condición de que todas las descomposiciones de un módulo M se refinen en descomposiciones inescindibles finitas es estrictamente más fuerte que la condición de que M solamente admita descomposiciones inescindibles finitas. Para ver esto necesitamos el siguiente teorema. Una demostración de este resultado se puede encontrar en [12]

Teorema 9.4. *Para todo A submonoide aditivo de $\mathbb{N}$, existen, un anillo R y un R-módulo M tal que el R-módulo M^n tiene descomposiciones inescindibles finitas si y sólo si $n \in A$*

De (9.4) se sigue que existen módulos con descomposiciones inescindibles finitas, tales que no todas sus descomposiciones se refinan en descomposiciones inescindibles finitas. Efecivamente, si hacemos $A = 2\mathbb{N}$, entonces por (9.4), existen un anillo R y un R-módulo M tal que el R-módulo M^2 tiene descomposiciones inescindibles finitas, mientras que M no tiene descomposiciones inescindibles finitas. Así, M^2 es un módulo con descomposiciones inescindibles finitas, pero tal que la desocmposición $M = M \oplus M$ de M^2 no se refina en ninguna descomposición inescindible finita. Esto prueba también que, en general, ni la clase de todos los módulos con longitud de Krull-Schmidt finita, ni la clase de todos los módulos que cumplen con la condición de que todas sus descomposiciones se refinan en descomposiciones inescindibles finitas, aun siendo claramente cerradas bajo sumandos directos, son cerradas bajo sumas directas finitas.

Lema 9.5. *Sea M un módulo. Sea N sumando directo de M. Supóngase que M tiene longitud de Krull-Schmidt finita. Si todas las descomposiciones inescindibles de M tienen la misma cardinalidad, entonces todas las descomposiciones inescindibles de N tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Sea M un módulo con longitud de Krull-Schmidt finita tal que todas sus descomposiciones inescindibles tienen la misma cardinalidad. Sea $N \in \mathcal{S}(M)$. Sean $N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$, y $N = \bigoplus_{j=1}^{m} N'_j$ dos descomposiciones inescindibles de N. Sea $L \in \mathcal{S}(M)$ tal que $M = N \oplus L$. Sea $L = \bigoplus_{k=1}^{l} L_k$ una descomposición inescindible de L. Las descomposiciones inescindibles $M = (\bigoplus_{i=1}^{n} N_i) \oplus (\bigoplus_{k=1}^{l} L_k)$, y $M = (\bigoplus_{j=1}^{m} N'_j) \oplus (\bigoplus_{k=1}^{l} L_k)$ de M tienen cardinalidad $n + l$ y $m + l$ respectivamente, de lo que se sigue que $n + l = m + l$, es decir $n = m$. Esto concluye la demostración. ∎

Demostración de 2.4 Obsérvese primero que el último enunciado del teorema, junto con (9.5) implican 2. Supóngase ahora que $KS\ell$ es una función de rango en $\mathcal{S}(M)$. Demostramos, haciendo inducción sobre k, que si $N_1, ..., N_k \in \mathcal{S}(M)$ son inescindibles y tales que $\bigoplus_{i=1}^{k} N_i \in \mathcal{S}(M)$, entonces $KS\ell(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i) = k$. La base es trivial. Supóngase ahora que la afirmación es cierta para k. Sean $N_1, ..., N_{k+1} \in \mathcal{S}(M)$, inescindibles, tales que $\bigoplus_{i=1}^{k+1} N_i \in \mathcal{S}(M)$. De la hipótesis de inducción se sigue que $KS\ell(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i) = k$. De esto y del hecho de que $KS\ell(N_{k+1}) = 1$ y $k < KS\ell(\bigoplus_{i=1}^{k+1} N_i) \leq k + 1$, se sigue que $KS\ell(\bigoplus_{i=1}^{k+1} N_i) = k+1$. Esto demuestra la afirmación. De esto y de (9.5) se concluye que 1 implica el último enunciado del teorema. Es fácil ver que 3, nuevamente, junto con (9.5), implica también el último enunciado del teorema. De esto se siguen las implicaciones $1 \Rightarrow 2$ y $3 \Rightarrow 2$. Las implicaciones $2 \Rightarrow 1$ y $2 \Rightarrow 3$ son triviales. Esto concluye la demostración. ∎

Dedicaremos el resto de esta sección a la caracterización de aquellos módulos M, tales que la longitud de Krull-Schmidt de M, $KS\ell(M)$, es finita. Es fácil ver que si M tiene longitud de Krull-Schmidt finita, entonces N tiene longitud de Krull-Schmidt finita para todo $N \in \mathcal{S}(M)$. Así, el siguiente teorema caracteriza a los módulos M tales que la función $KS\ell$, con dominio $\mathcal{S}(M)$ es una función finita. Recuérdese antes que una colección de submódulos $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ de un módulo M se dice que es independiente si $M_\alpha \neq \{0\}$ y $M_\alpha \cap (\bigoplus_{\beta \in A\setminus\{\alpha\}} M_\beta) = \{0\}$ para todo $\alpha \in A$, y obsérvese que el conjunto de sumandos directos $\mathcal{S}(M)$ es un conjunto parcialmente ordenado con el orden dado por la contención.

Teorema 9.6. *Sea M un módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *M tiene longitud de Krull-Schmidt finita.*
2. *Existe $n \geq 1$ tal que todo subconjunto independiente de $\mathcal{S}(M)$ tiene cardinalidad menor o igual que n.*
3. *Existe $n \geq 1$ tal que toda cadena estrictamente ascendente en $\mathcal{S}(M)$ tiene longitúd menor o igual que n.*
4. *Existe $n \geq 1$ tal que toda cadena estrictamente descendente en $\mathcal{S}(M)$ tiene longitúd menor o igual que n.*
5. *Existen funciones estrictamente crecientes de $\mathcal{S}(M)$ en $\mathbb{N}$.*

Más aún, si M satisface las condiciones anteriores, entonces $KS\ell(M)$ es la mayor de las cardinalidades de subconjuntos independientes de $\mathcal{S}(M)$, es la mayor de las longitudes de cadenas estrictamente ascendentes en $\mathcal{S}(M)$, y es la mayor de las longitudes de cadenas estrictamente descendentes en $\mathcal{S}(M)$, y si denotamos por X al conjunto de todas las funciones estrictamente crecientes de $\mathcal{S}(M)$ en $\mathbb{N}$, ordenado en términos de las imágenes de sus elementos (e.d. $\alpha \leq \beta$ si $\alpha(N) \leq \beta(N)$ para todo $N \in \mathcal{S}(M)$, con $\alpha, \beta \in X$), entonces X tiene mínimo, y este es igual a la función $KS\ell$ con dominio $\mathcal{S}(M)$.

Demostración. Las equivalencias $1 \Leftrightarrow 2$ y $3 \Leftrightarrow 4$ son triviales.

$1 \Leftrightarrow 4$: Supóngase primero que M tiene longitud de Krull-Schmidt finita. Sea $M_1 > ... > M_m$ una cadena estrictamente descendente en $\mathcal{S}(M)$. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $M_1 = M$. Si para cada $1 \leq i \leq m-1$, M_i' es tal que $M_i = M_i' \oplus M_{i+1}$, y hacemos $M_m' = M_m$, entonces $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i'$ es una descomposición de M, de cardinalidad m. Se sigue que $m \leq KS\ell(M)$. Supóngase ahora que toda cadena estrictamente descendente en $\mathcal{S}(M)$ tiene longitud menor o igual que n. Demostramos que $KS\ell(M) \leq n$. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$ una descomposición de M, con $M_i \neq \{0\}$ para todo $1 \leq i \leq m$. Si hacemos $M_j' = \bigoplus_{i=1}^{n-j} M_i$ para todo $1 \leq j \leq m$, entonces $M_1' > ... > M_m'$ es una cadena estrictamente descendente en $\mathcal{S}(M)$, de longitud m. Se sigue que $m \leq n$. Concluimos que $KS\ell(M) \leq n$.

$1 \Leftrightarrow 5$: Supóngase que M tiene longitud de Krull-Schmidt finita. Se sigue claramente que todo sumando directo de M tiene longitud de Krull-Schmidt finita. Así, la función $KS\ell{:}\mathcal{S}(M) \to \mathbb{N}$ que a cada sumando directo de M le asocia su longitud de Krull-Schmidt, está bien definida. La función $KS\ell$ así definida es una función de $\mathcal{S}(M)$ en $\mathbb{N}$, estrictamente creciente. Supongamos ahora que existen funciones estrictamente crecientes de $\mathcal{S}(M)$ en $\mathbb{N}$. Sea $\eta : \mathcal{S}(M) \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Haremos inducción sobre $\eta(M)$ para demostrar que toda descomposición de M tiene cardinalidad menor o igual que $\eta(M)$. El caso en el que $\eta(M) = 0$ es trivial. Supongamos ahora que el resultado es cierto para todo $1 \leq k \leq \eta(M)$. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ una descomposición de M. Claramente $\eta(M) \geq \eta(\bigoplus_{i=1}^{m-1} M_i) + 1$, es decir $\eta(\bigoplus_{i=1}^{m-1} M_i) \leq \eta(M) - 1$. Se sigue, de la hipótesis de inducción, que toda descomposición de $\bigoplus_{i=1}^{m-1} M_i$ tiene cardinalidad menor que $\eta(M)$, en particular $m - 1 < \eta(M)$, es decir $m \leq \eta(M)$. Concluimos que M tiene longitud de Krull-Schmidt finita.

El último enunciado del teorema se sigue de $1 \Leftrightarrow 3, 2 \Rightarrow 4$ y $4 \Rightarrow 1$.

■

De (9.6) se sigue que si un módulo M es tal que existe una función de rango aditiva y finita ρ, con dominio $\mathcal{S}(M)$, tal que $\rho(N) \neq 0$ para todo $N \in \mathcal{S}(M)$, entonces M tiene longitud de Krull-Schmidt finita y la función $KS\ell$, con dominio $\mathcal{S}(M)$ es finita. Más aún, en este caso, para todo $N \in \mathcal{S}(M)$ se cumple la desigualdad

$$KS\ell(N) \leq \rho(N)$$

En particular, si un módulo M tiene longitud finita, es artiniano, neteriano, tiene dimensión de Krull, tiene dimensión de Goldie finita o tiene dimensión dual de Goldie finita, entonces M tiene longitud de Krull-Schmidt finita y la función $KS\ell$, con dominio $\mathcal{S}(M)$ es finita. Más aún, en cualquiera de estos casos, para todo $N \in \mathcal{S}(M)$, se cumple la desigualdad

$$KS\ell(N) \leq min\,\{GdimN, dGdimN, \ell(N)\}$$

La siguiente proposición caracteriza la condición de que un módulo M tenga longitud de Krull-Schmidt finita, en términos del anillo de endomorfismos, $End_R(M)$, de M. Antes, recuérdese que el conjunto de idempotentes de un anillo E es un conjunto parcialmente ordenado con el siguiente orden: Dados dos idempotentes e, e' en E, se dice que $e \leq e'$ si $ee' = e = e'e$, o equivalentemente, si ime es sumando directo de ime' en E-Mod. Definimos la longitud de Krull-Schmidt del anillo E, $KS\ell(E)$, como el supremo de las longitudes de cadenas estrictamente descendentes en el conjunto de idempotentes de E.

Proposición 9.7. *Sea M un módulo. Sea $E = End\,(M)$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *M tiene longitud de Krull-Schmidt finita.*
2. *${}_EE$ tiene longitud de Krull-Schmidt finita.*
3. *E_E tiene longitud de Krull-Schmidt finita.*
4. *E tiene longitud de Krull-Schmidt finita*
5. *Existe $n \geq 1$ tal que E no tiene cadenas estrictamente ascendentes de idempotentes, de longitud mayor que n.*
6. *Existe $n \geq 1$ tal que E no tiene subconjuntos de idempotentes ortogonales de cardinalidad mayor que n.*

Más aún, si M cumple con las condiciones anteriores, entonces

$$KS\ell(M) = KS\ell({}_EE) = KS\ell(E_E) = KS\ell(E)$$

y este número es tanto la mayor de las longitudes de cadenas estrictamente ascendentes de idempotentes en E como la mayor de las cardinalidades de subconjuntos de idempotentes ortogonales en E.

Demostración. Sean e, e' dos idempotentes en E. Entonces $e \leq e'$ si y sólo si para cualquier anillo S y cualquier S-módulo N tal que $E = End_S(N)$, el sumando directo $e(N)$ de N, es sumando directo del sumando directo $e'(N)$ de N. El resultado se sigue de esto y del hecho de que para cualquier anillo S y cualquier S-módulo N tal que $E = End_S(N)$, todo sumando directo de N es imágen $e(N)$ de algún idempotente $e \in E$. ■

De (9.7) se sigue que anillos con dimensión de Goldie izquierda (derecha) finita y anillos con dimensión dual de Goldie izquierda (derecha) finita tienen longitud de Krull-Schmidt finita. En particular, anillos Goldie izquierdos (derechos), anillos artinianos izquierdos (derechos), anillos neterianos izquierdos (derechos) y más generalmente anillos con dimensión de Krull izquierda (derecha) y dominios de Ore izquierdos (derechos), en particular, dominios conmutativos, tienen longitud de Krull-Schmidt finita. Más aún, cualquier módulo M con la propiedad de que el anillo de endomorfismos de M, $End(M)$, satisface cualquiera de estas condiciones, tiene longitud de Krull-Schmidt finita.

10. Referencias

[1] F. Anderson, K. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer, Verlag (1991).

[2] J. Adamek, H. Herrlich, G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*, John Wiley and Sons (1990).

[3] M. Auslander, D. A.Buchsbaum. *Unique Factorization in Regular Local Rings*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 45, (1959), 733-734.

[4] W. Bergman, W. Dicks, *Universal Derivations and Universal Ring Constructions*, Pacific J. Math **79** (1978), 293-337.

[5] B. Bollobas, *Modern Graph Theory*, Springer (1998).

[6] A. Bondy, U.S.R. Murty *Graph Theory*, Springer (2010).

[7] R. Camps, W. Dicks, *On Semilocal Rings*, Israel J. Math, **81**, (1993), 203-211.

[8] J. Cozzens, *Homological Properties of the Ring of Differential Polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc., **76**, number 1, (1970), 75-79.

[9] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer (2010).

[10] D. S. Dummit, R. M. Foote, *Abstract Algebra*, John Wiley and Sons (2004).

[11] A. Facchini, *Module Theory, Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules*, Birkhauser-Verlag (1998).

[12] A. Facchini, D. Herbera, *Modules With Only Finitely Direct Sum Decompositions up to Isomorphisms*, Irish Math. Soc. Bull. **50** (2003), 51-69.

[13] L.Fuchs, *Infinite Abelian Groups Vol. II*, Elsevier (1973).

[14] L.Fuchs, *The Existence of Indecomposable Abelian Groups of Arbitrary Power*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **10** (1959), 453-457.

[15] L. Fuchs, *On a Directly Indecomposable Abelian Group of Power Greater than Continuum*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957), 453-454.

[16] I. Kaplansky, *Infinite Abelian Groups*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, (1969).

[17] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag (1997).

[18] A. Nowicki, *Polynomial Derivations and their Rings of Constants*, N. Copernicus University, Torun, (1994).

[19] A. Nowicki, *Derivations of Ore Extensions of the Polynomial Ring in One Variable*, Communications in Algebra **32** number 9, (2004) 3651-3672.

[20] A. Nowicki, *Local Derivations of Ore Extensions of the Polynomial Ring in One Variable*, Communications in Algebra **32** number 12, (2004) 4559-4571.

[21] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer (1998).

[22] B. Osofsky, *A Remark on the Krull-Schmidt-Azumaya Theorem*, Canad. Math. Bull. **13** (1970), 501-505.

[23] L. H. Rowen *Ring Theory, Student Edition*, Academic Press, (1991).

[24] B. Stenstrom, *Rings and Modules of Quotients*, Springer (1970).

[25] P. Vamos, *The Holy Grail of Algebra: Seeking Complete Sets of Invariants*, Abelian Goups and Modules, A. Facchini, C. Menini, eds. Math and its Appl. 343, Kluwer Drordrecht, 1995, 475-483.

[26] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Reach (1991).