# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

MATEMÁTICAS

**Propuesta didáctica para el cálculo de probabilidades de eventos compuestos por medio de diferentes registros de representación**

**T E S I S**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR, MATEMÁTICAS**

**P R E S E N T A:**

**Héctor Gabriel Rivera Vargas**

**TUTOR**
**Dr. Miguel Mercado Martínez**
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

MÉXICO, D. F.  Octubre 2013

# DEDICATORIAS

Dios me ha dado todo, nunca dejaré de agradecerle y dedicarle mi vida.

A mis padres: Rafael y Reynalda.

A mis hermanos: José, Angélica, Luis y Fernando.

A mis sobrinos: Daniel y Bruno.

A mis sobrinas: Karen, Kenia y Karina.

A mis cuñados: Paty y Ernesto.

A mi Director de Tesis: Dr. Miguel Mercado Martínez.

A la Mtra. Gabriela Saraith Ramírez Granados.

A mis amigos: Beatriz A., Manuel R., Carlos A., Alfredo P., Oscar L. y Reyes T.

A mis compañeros de maestría: Adán, Alberto, Carolina, Daniel, Gamaliel, Octavio, Oscar y Tania.

A mis profesores de maestría: Dra. Leilani Valdés, Mtro. Alejandro Reyes, Dr. Sergio Cruz, Mtro. Juan Recio, Mtra. Esperanza Valdés, Mtra. Nora Trejo, Mtra. Guadalupe García, Dra. Asela Carlon, Dr. Mauricio Pilatowsky, Mtro. Víctor Palencia y Mtra. María Eugenia Canut.

A mis sinodales: Dra. Elena de Oteyza, Dr. Ignacio Pineda, Mtro. Juan Recio, Dr. Mauricio Pilatowsky y al Dr. Miguel Mercado.

**A todos ellos, agradezco y dedico este trabajo de tesis**

**Sinceramente, Héctor Gabriel Rivera Vargas**

# Índice

## Introducción

El trabajo de investigación que se presenta, es una propuesta didáctica para el cálculo de probabilidades de eventos compuestos utilizando diferentes registros de representación, como diagramas de Venn, tablas de doble entrada, diagramas de árbol, y entendiendo como eventos compuestos a los que se forman utilizando los conectores lógicos “y”, “o”, “no”; por ejemplo, considerando al experimento aleatorio que consiste en lanzar al aire un dado común y corriente, podemos definir al evento $A$ como el obtener un número par y al evento $B$ como el obtener un número mayor a 3; un evento compuesto podrá ser entonces, el evento $A$ o $B$, es decir, el obtener un número par o un número mayor a 3.

Dicha propuesta está constituida por ocho sesiones –de las cuales las primeras cinco contienen actividades relacionadas con la obtención de los aprendizajes previos señalados en el plan de estudios del programa de Estadística y Probabilidad del Colegio de Ciencias y Humanidades, dichos aprendizajes que se pretenden lograr en los alumnos son los siguientes: que diferencie entre fenómeno aleatorio y fenómeno determinista, que identifique la regularidad estadística como propiedad de los fenómenos aleatorios, que conozca los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo, para determinar la probabilidad de un evento, que relacione el concepto de frecuencia relativa con la idea intuitiva de probabilidad, que comprenda por qué la probabilidad tiene valores entre cero y uno, que construya y describa el espacio muestra, que represente eventos a partir de enunciados, que calcule probabilidades utilizando el enfoque frecuencial.

Las tres sesiones restantes –la seis, siete y ocho-, contienen actividades relacionadas con el tema de la propuesta, es decir, contienen un diseño para lograr que el alumno calcule probabilidades de eventos compuestos.

El presente trabajo tiene la siguiente estructura: en el Capítulo 1, Planteamiento del problema, se proporciona un panorama general de la justificación del tema de tesis, considerando los elementos estadísticos de la situación de aprovechamiento, es decir, el porcentaje de alumnos que no acredita la asignatura y en particular no logra asimilar el tema de probabilidad, señalando a su vez las repercusiones de los mismos. En este mismo capítulo se mencionan los elementos psicopedagógicos que intervienen con la problemática, como son los conceptos de: aleatoriedad, la intuición, la conjunción, la independencia, entre otros.

El Capítulo 2, Elementos considerados en la propuesta didáctica, se describe brevemente cada uno de ellos, dichos elementos son: Evaluación diagnóstica, Evaluación formativa, trabajo en equipo, el uso de diferentes registros de representación, logrando con ello capacidades cognitivas del alumno y representaciones mentales de lo realizado (Duval, 1999). La diversificación de las representaciones para calcular probabilidades de eventos compuestos, en esta propuesta didáctica se manifiesta, haciendo uso de los diagramas de Venn, tablas de doble entrada, diagramas de árbol y la simbología matemática. Otro elemento clave considerado en la propuesta didáctica, son las actividades didácticas sugeridas por la Dra. Carmen Batanero, profesora investigadora reconocida internacionalmente por sus trabajos, preocupada por la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad. También en este capítulo, se mencionan algunas propuestas de enseñanza-aprendizaje del National Council Teachears Mathematics (NCTM) publicados en el año 2000, los cuales fueron considerados como elemento en la propuesta didáctica, dichos principios son: la igualdad, la enseñanza y el aprendizaje.

El Capítulo 3, Desarrollo de las etapas del método de investigación, se detallan las características del grupo experimental, el método de investigación, el instrumento de evaluación diagnóstica aplicado, la encuesta aplicada, la descripción de lo sucedido durante la aplicación de las sesiones llevadas a cabo en el grupo experimental y el instrumento de evaluación aplicado para medir los aprendizajes alcanzados. En este mismo capítulo, se habla del análisis y resultados obtenidos de los instrumentos de evaluación aplicados.

El Capítulo 4, Conclusiones y consideraciones generales, se presentan las conclusiones obtenidas después de efectuada la investigación. En este mismo capítulo se mencionan las consideraciones generales suscitadas de la experiencia obtenida.

Por último, el lector encontrará una sección de anexos, conteniendo los instrumentos de evaluación, la encuesta aplicada y las ocho sesiones que conforman la propuesta didáctica.

# CAPÍTULO 1

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

# CAPÍTULO 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1 Situación del tema de Probabilidad en el Colegio de Ciencias y Humanidades

La asignatura de Estadística y Probabilidad I, pertenece al Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, se cursa en quinto semestre con carácter optativo (Colegio de Ciencias y Humanidades [CCH], s.f.), Es una asignatura con alto índice de reprobación y deserción (CCH, 2011); por ejemplo, en la generación 2010, el 71% correspondió a aprobados, el 15% a los no acreditados y el 14% correspondió a los alumnos que no acudieron a las clases de la asignatura (Ávila (Coord.), s.f.); es decir, el 29% de los alumnos de esa generación no aprobó la asignatura; a pesar de que Cálculo Diferencial e Integral cuenta con un mayor porcentaje de reprobación, Estadística y Probabilidad cuenta con un mayor número de alumnos reprobados, ya que, la selecciona un mayor número de alumnos, por el motivo de considerarla "más fácil" de acreditar (Muñoz y Ávila (Coords.), 2012). Lo anterior, origina un serio problema de egreso para el alumno, haciéndolo, sino lo era, un alumno irregular en el último año de su bachillerato,

> Se entenderá por alumno irregular o con rezago escolar, aquél que al término de sus tres años establecidos en el plan de estudios adeude entre una y 37 asignaturas, así como aquél que al término de cada semestre cursado en el lapso de esos tres años adeude una o más asignaturas. (CCH, 2009a, p. 18).

Un alumno que no haya acreditado la asignatura de Estadística y Probabilidad I, será un alumno irregular, por lo menos por esta asignatura, pero su situación se complica, debido a que para lograr su egreso en tres años, sólo contará con un semestre para acreditarla, junto con todas las asignaturas no acreditadas hasta ese momento.

El principal objetivo del Colegio de Ciencias y Humanidades es brindar a sus estudiantes una educación de calidad a lo largo de los tres años del bachillerato, para poder hacerlo, es necesario conocer la situación de aprovechamiento escolar de los alumnos y establecer suposiciones de las causas que pudieran originar los problemas de reprobación, lo anterior con el fin de tener un punto de partida en el análisis. (CCH, 2009b).

El Examen de Diagnóstico Académico (EDA), es un instrumento de evaluación, el cual brinda un diagnóstico en relación a la funcionalidad y pertinencia de los programas de estudio de las asignaturas del Plan de Estudio Actualizado del Colegio de Ciencias y Humanidades para los fines fijados (Aguilar y García, 2011). El EDA proporciona la siguiente información representada de manera grafica, vea la figura 1.1:

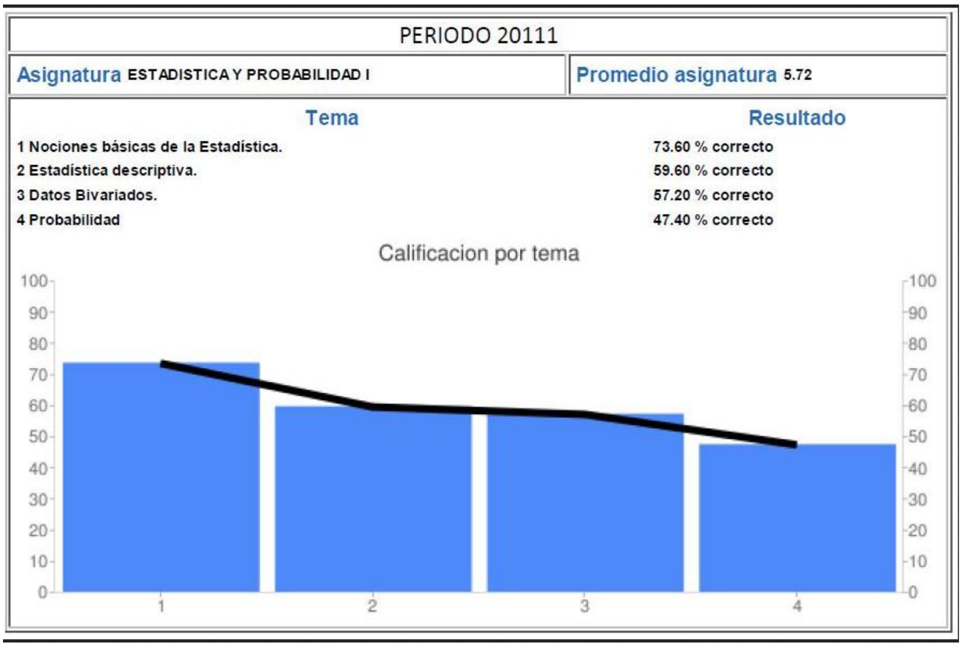



**Figura 1.1**

En ésta, podemos observar que en el periodo 2011-1, en la asignatura de Estadística y Probabilidad I, se obtuvo un promedio de 5.72 de respuestas correctas, existiendo un declive en los porcentajes de respuestas correctas en relación a cada uno de los temas que conforman la asignatura, finalizando con el tema de Probabilidad con un 47.40% de respuestas correctas.

Los porcentajes referentes a la acreditación en la asignatura de Estadística y Probabilidad I, y en particular en el tema de Probabilidad, nos indican que debemos analizar diversos aspectos relacionados con la enseñanza proporcionada a los alumnos, tal y como se menciona en CCH (2011)

> la información antes presentada sirve para reflexionar sobre las condiciones en las cuales se estudia, los materiales y las propuestas que se usan en las aulas y el desempeño de los profesores en sus clases, especialmente en aquellas asignaturas con un alto índice de reprobación. (p. 63).

Este trabajo está enfocado en brindar una propuesta didáctica para que el alumno logre los aprendizajes relacionados con el tema del Cálculo de probabilidades de eventos compuestos de la Unidad III de la asignatura de Estadística y Probabilidad I, impartida como optativa en el quinto semestre del plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH, s.f.), vigente desde el año 2001. Los aprendizajes que se pretenden logren los alumnos con este tema se enuncian de la siguiente manera en el Programa de Estudios de la asignatura,

> • Identifica y representa eventos en los que se involucren los términos y, o, no.
> • Identifica y representa eventos condicionados e independientes.
> • Calcula la probabilidad de los eventos descritos. (CCH, s.f., p. 17).

Estos, son indispensables para los aprendizajes subsecuentes, los cuales están relacionados con las tres unidades temáticas que conforman la asignatura de Estadística y Probabilidad II del plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, tales unidades son: Distribuciones de Probabilidad, Distribuciones Muestrales y para el tema de la Inferencia Estadística (CCH, s.f.). Un bajo nivel de conocimientos de los mismos, - es decir, los aprendizajes relacionados con el cálculo de probabilidades de eventos compuestos-, puede ocasionar en el alumno la no comprensión del concepto de variable aleatoria y sus distribuciones de probabilidad, siendo ésta – la variable aleatoria- la responsable de originar diversas aplicaciones del cálculo de probabilidades (Batanero, 2001), siendo entonces también medular. En general, el aprendizaje de la probabilidad –es decir, no únicamente el cálculo de probabilidades de eventos compuestos- es base para asimilar conocimientos más avanzados, como lo son: el muestreo y la significación estadística o inferencia estadística (Scheaffer, Watkins y Landwehr, 1998 citados en Gal, 2005).

## 1.2 La importancia de estudiar probabilidad

En CCH (s.f.) se menciona

> La Estadística y la Probabilidad se han vuelto requisito indispensable en la vida cotidiana para interpretar una gran variedad de información en diversos campos de estudio. En su entorno una persona encuentra reportes financieros, económicos, médicos y otros que se pueden entender y evaluar con una comprensión básica de estas disciplinas. (p. 4).

El tema de probabilidad en la actualidad está teniendo un crecimiento notable en sus aplicaciones en los diversos campos de la actividad humana (Inzunza, 2001); incluyendo a las ciencias sociales y en nuestras actividades cotidianas (Pratt, 2005); en muchas ocasiones, sin darnos cuenta de su enorme incidencia (Noss, 1997 citado en Pratt, 2005). La razón de su diversa aplicabilidad radica en que la incertidumbre es un elemento que se encuentra en una variedad de fenómenos que ocurren en la vida, y que son de particular interés para el ser humano (Inzunsa, 2001). De hecho, el lenguaje probabilístico se utiliza en los deportes, pronósticos de tiempo, salud (Noss, 1997, citado en Pratt, 2005); información sobre finanzas, función pública, comercialización, centros de investigación (Gal, 2005). Podemos mencionar ejemplos de acontecimientos más particulares en donde la probabilidad juega un papel importante, fenómenos los cuales ocurren o no: un ataque al corazón, que llueva mañana, ganar la lotería, la quiebra o una catástrofe natural. (Gal, 2005). Su diversa aplicabilidad hace fundamental el estudio de esta disciplina, la cual ayuda y prepara para la vida, debido a que los fenómenos de resultado impredecible y los casuales impregnan nuestras vidas y nuestro entorno. (Bennet, 1998, Beltrani, 1999, Everitt, 1999 citados en Gal, 2005).

La probabilidad está teniendo una influencia dominante en el curriculum escolar, ya que su estudio es un fenómeno generalizado en la que comienza en los primeros años de educación primaria y sigue en los años de la universidad (Jones (Ed.), 2005), debido a que tanto la Probabilidad como la Estadística son ciencias fundamentales para otras, puesto que son una herramienta para el diseño, control y la evaluación de experimentos; para Jones (Ed.) (2005), esa influencia dominante es oportuna, debido a que los niños de épocas actuales y futuras se encontrarán cada vez más con la posibilidad de variación y los fenómenos aleatorios no sólo en matemáticas sino en los medios de comunicación, meteorológicos, económicos y previsiones financieras, e inclusive en las actividades sociales tales como juegos y deportes. Por ello, es importante realizar investigación respecto a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad (Jones, 2005). Existen organizaciones y autores los cuales han tratado la necesidad de considerar las demandas funcionales del mundo real en el diseño de la enseñanza de las matemáticas, los cuales se manifiestan en currículos recientes (NCTM, 2000; Packer, 1997, Rychen y Salganic, 2003, y Stein, 2000 citados en Gal, 2005).

**1.3 Aspectos y problemas de la enseñanza y el aprendizaje relacionados con el cálculo de probabilidades de los eventos compuestos en el nivel medio superior**

Por eventos compuestos entenderemos a los que Polaki (2005) considera al citar a Hogg y Tanis (1997) y son tales como ($A$ o $B$), ($A$ y $B$) y (no $A$); entonces entenderemos como eventos compuestos a los que se forman utilizando los conectores lógicos *y*, *o*, *no*; por ejemplo, considerando al experimento aleatorio que consiste en lanzar al aire un dado común y corriente, podemos definir al evento $A$ como el obtener un número par, el cual a su vez podemos representar por

$$A = \{obtener\ un\ n\acute{u}mero\ par\}$$

y contiene los elementos

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Al evento $B$ como el obtener un número mayor a 3, el cual lo podemos representar por

$$B = \{obtener\ un\ n\acute{u}mero\ mayor\ a\ 3\}$$

y contiene los elementos

$$B = \{4,\ 5, 6\}$$

Un evento compuesto podrá ser entonces, el evento ($A$ o $B$), el cual podemos simbolizar por $A \cup B$, es decir, el obtener un número par o un número mayor a 3 y entonces dicho evento compuesto está conformado por los elementos

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

Otro ejemplo de este tipo de eventos es ($A$ y $B$), el cual podemos simbolizar por $A \cap B$, es decir, obtener un número par y mayor a 3, entonces dicho evento compuesto está conformado por los elementos

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

Utilizando el conector lógico *no*, podemos formar el evento compuesto (no $A$), el cual podemos simbolizar por $\bar{A}$, es decir, el obtener un número no par y entonces dicho evento compuesto está conformado por los elementos

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

Otra manera de formar eventos compuestos, es haciendo uso de dos o más conectores lógicos, como por ejemplo el evento (no $A$ y $B$), el cual podemos simbolizar por $\bar{A} \cap B$, es decir, el obtener un número no par y mayor a 3 y entonces dicho evento compuesto estará conformado por

$$\bar{A} \cap B = \{5\}$$

Proponiendo una situación no relacionada con los juegos de azar, para formar eventos compuestos, consideremos: “El Dr. Fuentes y la Dra. Lara son los dos únicos doctores que trabajan en el horario nocturno en un hospital en donde atienden emergencias médicas. La probabilidad de que el Dr. Fuentes y la Dra. Lara estén disponibles para atender una emergencia médica es de 0.85 y 0.94 respectivamente. La disponibilidad de cada uno de ellos es independiente del otro”.

Si definimos el evento

$$\mathrm{F} = \{\text{disponibilidad de atención de emergencia del Dr. Fuentes}\}$$

y al evento

$$\mathrm{L} = \{\text{disponibilidad de atención de emergencia del Dra. Lara}\};$$

Un evento compuesto podrá ser entonces, el evento ($F$ o $L$), el cual podemos simbolizar por $F \cup L$, es decir, el disponer del Dr. Fuentes o la Dra. Lara para atender una emergencia médica, aclarando que inclusive pueden ser los dos; debido a que el uso de este conector lógico es el incluyente.

Otro ejemplo de este tipo de eventos es ($F$ y $L$), el cual podemos simbolizar por $F \cap L$, es decir, el disponer del Dr. Fuentes y la Dra. Lara para atender una emergencia médica.

Utilizando el conector lógico *no*, podemos formar el evento compuesto (no $L$) el cual podemos simbolizar como $\bar{L}$, es decir, el no estar en disponibilidad de atender una emergencia médica la Dra. Lara.

Proponiendo un evento compuesto haciendo uso de dos o más conectores lógicos, tenemos al evento ($L$ y no $F$), el cual podemos simbolizar por $L \cap \bar{F}$, es decir, el tener disponible a la Dra. Lara y no tener disponible al Dr. Fuentes para una emergencia médica.

Ante estos eventos los alumnos se presentan con diversos elementos que pueden ser un obstáculo para el cálculo de probabilidades, dichos elementos son los siguientes:

### 1.3.1 Aleatoriedad

El cálculo de probabilidades se basa en las ideas básicas de aleatoriedad y otros conceptos que debemos identificar para enseñar a los alumnos de nivel bachillerato (Batanero, 2001), pero debemos tener cuidado, ya que, "los estudiantes tienen con frecuencia ideas incorrectas sobre la probabilidad y la aleatoriedad" (Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 1988, p.8); como ejemplo podemos mencionar lo que Alatorre (1991) afirma: "la gente espera que una secuencia de eventos generada por un proceso aleatorio represente las características del proceso, incluso si la secuencia es corta." (p. 49); para ejemplificar lo que Alatorre dice consideremos el experimento aleatorio de lanzar al aire una moneda común y corriente 5 veces, la gente en general esperaría una secuencia semejante a: $saasa$ por proponer algún ejemplo, ya que se cree que ésta refleja la característica de aleatoriedad, no sucede lo mismo con esta otra que se propone de ejemplo: $aaaaa$, para la cual –según para algunos- no refleja la característica de aleatoriedad.

Batanero (2001) cita a Batanero y Serrano (1999) para mencionar algunos de los significados de aleatoriedad de los alumnos:

- Aleatoriedad como la falta de causas conocidas.
- Aleatoriedad solo existente en los sucesos de idéntica probabilidad.
- Aleatoriedad como estabilidad de las frecuencias relativas.
- Aleatoriedad como impredecibilidad.

Batanero (2001) argumentan que cada una de las concepciones de los alumnos contiene propiedades o características del concepto de aleatoriedad y por esta razón no puede ser desechada o invalidada, ya que será totalmente válida en ciertas situaciones. Por ello, es importante que el profesor muestre ejemplos variados para ayudar a los estudiantes a construir progresivamente el concepto. (Batanero, 2001).

Por otro lado, la intuición es una adquisición cognitiva o creencia espontánea, global y evidente (Fishbein, 1975 citado en Jones y Thornton, 2005), la cual es muy importante en el campo de la probabilidad, ya que, una persona que en su niñez creó modelos "intuitivos erróneos" difícilmente podrá avanzar a un estadio más avanzado (Batanero, 2001), como lo es el tema del cálculo de probabilidades de eventos compuestos; sólo si la instrucción sistemática influye, podrá corregirlos, debido a que –la intuición- tiene la característica de adaptable (Fishbein, 1975 citado en Jones y Thonton, 2005). Por ejemplo, una intuición errónea, es la que se manifiesta en algunas personas -tanto niños como adultos- las cuales "creen en fuerzas ocultas que expliquen los fenómenos aleatorios"(Batanero, 2001, p.21); un ejemplo más de esto, es la idea errónea de imposibilidad de ocurrencia de ciertas secuencias con patrones bien definidos, por mencionar alguna, la combinación {1, 2, 3, 4, 5, 6} seleccionada aleatoriamente como la ganadora de las combinaciones posibles del popular juego del "Melate" que consiste en seleccionar seis números naturales del uno al cincuenta y seis.

Serrano y otros (1998) indican que los sujetos tienden a encontrar patrones deterministas en las situaciones aleatorias, es decir, tratan de encontrar asociaciones inexistentes, con objeto de reducir la incertidumbre. Por el contrario, hay también una tendencia a inferir aleatoriedad en situaciones de incertidumbre.

### 1.3.2 Conjunción

Watson (2005) basado en estudios realizados por Fishbein y Schnarch en 1997, Davidson en 1995 y Watson y Moritz en 2002, menciona que los principales problemas que los alumnos de bachillerato tienen con respecto a la conjunción de eventos o el uso de la "y" en eventos probabilísticos están relacionados con el lenguaje y con los problemas lógicos, estos al considerar escenarios sociales. Basado en los mismos estudios Watson (2005) menciona que si se utilizan en los salones de clase espacios muestra pequeños, los cuales se basen en objetos para demostrar la intersección de dos eventos, estos no podrán usarse en contextos sociales más complejos, como lo es la aplicación en el campo laboral.

### 1.3.3 Disyunción

Su uso se presenta en dos formas: algunas veces se utiliza en el sentido de p o q o ambos y otras veces p o q pero no ambos. (Arbones, 1988), lo cual puede originar grandes confusiones para el alumno, debemos aclarar lo anterior, ya que en Matemáticas y en particular en Probabilidad trabajamos con la lógica de la o incluyente, es decir que al referirnos a dos características o más, puede ocurrir que se satisfaga 1, 2 o más; al respecto Suppes y Hill (1999) mencionan "daremos un significado más amplio a la disjunción. Se denomina sentido incluyente. En el sentido inclusivo, cuando se utiliza la palabra ‹‹o››, se supone que por lo menos un miembro de la disjunción se presenta y quizá ambos." (p. 65). Por ejemplo, esto sucede cuando decimos, "estudiante o trabajador", y debemos entender que puede ocurrir una o inclusive las dos características. Sin embargo, habitualmente, se usa, la lógica del o exclusivo, es decir, es uno o el otro, pero no pueden ser los dos. Por ejemplo, cuando decimos es casado o soltero, queda claro que es imposible que puedan ser los dos sucesos.

### 1.3.4 Simbología

Enseñar un concepto, por medio de símbolos no muy utilizados por los alumnos –o inclusive nuevo-, puede ser un obstáculo didáctico, ya que puede dificultar su comprensión (Batanero, 2001), tal es el caso de la simbología utilizada para la probabilidad condicional: $P(A\backslash B)$, en adición a esto es el utilizar únicamente los símbolos matemáticos para calcular probabilidades de eventos compuestos; lo cual manifiesta una tendencia natural hacia la salida fácil de la enseñanza, como lo es una lista de fórmulas y aplicaciones de rutina de las mismas (Greer y Mukhopadhyay, 2005). Refiriéndose a los diferentes tópicos de probabilidad importantes por enseñar, Márquez (2009) afirma que es importante que los profesores tengan formas de enseñar, esto es, no solamente tenga una forma de hacerlo; por ejemplo, Mercado (2004) afirma que el gran desarrollo tecnológico ha influido de manera significativa en la enseñanza, por lo tanto, podemos hacer uso de ésta como forma de enseñanza y también aprovechar el hecho de que "Los adolescentes progresan rápidamente en el cálculo de probabilidades, incluso cuando las fracciones al comparar tienen diferente denominador"(Batanero, 2001, p. 61).

1.3.5 Independencia y probabilidad condicional

El concepto de independencia está relacionado con la comprensión de aleatoriedad. (Batanero, 2001), por lo tanto, los profesores deben trabajar en ello para lograr que el alumno la adquiera. Algunos de los problemas, relacionados con la independencia y la probabilidad condicional son los siguientes: Confundir eventos independientes con los mutuamente excluyentes (Batanero, 2001), lo cual se puede manifestar por medio de adjudicar la $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ cuando los eventos $A$ y $B$ son mutuamente excluyentes, o en caso contrario adjudicar la $P(A \cap B) = 0$ cuando los eventos $A$ y $B$ son independientes, sabiendo de antemano que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ cuando los eventos $A$ y $B$ son independientes, y $P(A \cap B) = 0$ cuando los eventos $A$ y $B$ son mutuamente exclusivos. Confundir la $P(A \backslash B)$ y la $P(B \backslash A)$ (Batanero, 2001), dicha confusión llamada Falacia de la condicional transpuesta (Diaconis y Friedman, 1981 citados en Batanero, 2005), por ejemplo: considerando los eventos $A = \{sea\ hombre\}$ y $B = \{sea\ trabajador\}$, el alumno confunde la probabilidad de que sea hombre dado que es trabajador con la probabilidad de que sea trabajador dado que es hombre. Maury (1986) citado en Batanero (2011) afirma que una razón de los problemas de probabilidad condicional es causado por la incapacidad de los estudiantes de identificar y restringir el espacio muestral, por ejemplo: considerando el siguiente caso: "Se lanza un dado, si el número es par, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor a 4?" La condición es "el número es par", definimos a los eventos

$$A = \{número\ par\} = \{2,4,6\}$$
$$B = \{número\ mayor\ a\ 4\} = \{5,6\}$$

Por lo tanto el problema del alumno se centra en no restringir adecuadamente el espacio muestral de $\{1,2,3,4,5,6\}$ a los elementos $\{2,4,6\}$ para obtener que la probabilidad solicitada tiene un valor de $1/3$.

1.3.6 Tablas de contingencia, en particular de doble entrada

En ocasiones hay profesores que consideran que la elaboración de tablas es sencilla y por lo tanto los alumnos no deben emplear mucho tiempo para aprenderla (Batanero, 2001), lo cual, puede ser una consideración errónea. De hecho, como lo argumenta Castro (1993) “la formación de conceptos de probabilidad y la cabal comprensión de algunos teoremas son procesos laboriosos y de lenta gestación” (p.10), por lo que el docente debe considerar que ciertos tópicos requieren de más tiempo (NCTM, 2000). Batanero y Díaz (2011) afirman que el análisis de una tabla de contingencia no es una actividad sencilla debido a que en cada frecuencia absoluta pueden deducirse varias frecuencias relativas: frecuencia relativa doble respecto al total de datos, frecuencia relativa condicional respecto a su fila, frecuencia relativa condicional respecto a su columna, frecuencias relativas marginales. A pesar de que la interpretación correcta de las tablas de contingencia son consideradas como parte de la cultura estadística (Schield, 2006 citado en Díaz, Cañadas y Batanero, 2011), se les dedica poca atención en la enseñanza universitaria debido a la suposición de que su lectura e interpretación ya fueron adquiridas en los niveles anteriores. (Díaz y otros, 2011). Con el uso de una tabla de doble entrada, Díaz, Batanero y Gea (2011) afirman que la dificultad estriba en la naturaleza secuencial de ciertos problemas, debido a que lo más visible es la intersección de los eventos y puede ocasionar en los alumnos confusión entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional, por ejemplo, considerando el siguiente contexto: el grupo está compuesto por 50 alumnos, de los cuales 25 de ellos utilizan el metro para llegar a la escuela, 28 combi y 15 ambos, se han definido los eventos M = {Utilice metro}, C = {Utilice combi}, la figura 1.2 muestra la tabla que representa la información proporcionada y la que se deduce de esta:

| | M | $\overline{M}$ | total |
|---|---|---|---|
| C | 15 | 13 | 28 |
| $\overline{C}$ | 10 | 12 | 22 |
| total | 25 | 25 | 50 |

**Figura 1.2**

De acuerdo a estas autoras, la confusión radica en que las probabilidades de las intersecciones son las que se visualizan en una tabla de doble entrada, con lo que puede existir confusión entre la probabilidad conjunta y la condicional.

1.3.7 Diagrama de árbol

Estos son un registro de representación útiles en el cálculo de probabilidades de eventos compuestos, sin embargo, Díaz y de la Fuente (2007) citados en Díaz (2011) con base a un estudio de resolución de problemas bayesianos por parte de estudiantes de Psicología, manifiestan mediante el análisis de errores de su investigación que uno de los obstáculos es la realización incorrecta del diagrama de árbol, lo que repercute en el cálculo de dichas probabilidades.

Aunado a los problemas mencionados anteriormente, está el hecho de que la probabilidad ha sido introducida a los programas de matemáticas con relativa escasez de tiempo (Ahigren y Garfield, 1991; Shaughnessy, 1992 citados en Greer y Mukhopadhyay, 2005), en donde de manera desafortunada esto se ha hecho con la insufiente atención en  la preparación de los docentes (Stohl, 2005 citado en Greer y Mukhopadhyay, 2005).

## 1.4 ¿En qué consiste la propuesta?

La propuesta consiste en lograr que los alumnos adquieran los  aprendizajes ya antes mencionados mediante el trabajo en equipo y los diferentes registros de representación semiótica, los cuales Duval (1999) define como "los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor." (p. 29), ejemplo de estos son: los diagramas de Venn, los diagramas de árbol,  las tablas de doble entrada, el lenguaje y el lenguaje de los conjuntos, los cuales pueden ayudar a que el alumno comprenda y obtenga probabilidades de manera visual, y no únicamente haciendo uso de "fórmulas" para su obtención, tal y como lo sugiere Totohasina (1992) citado en Batanero (2011). Por ejemplo, en el siguiente contexto se solicita la probabilidad de un evento compuesto, el cual podrá ser proporcionado por diversos registros de representación: "Dos ambulancias ($A$ y $B$) se mantienen listas para emergencias. Debido a la demanda y a la posibilidad de fallas mecánicas, la probabilidad de que una ambulancia específica esté disponible cuando se necesite es 0.9. La disponibilidad de una ambulancia es independiente de la otra. En caso de emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que al menos haya una disponible?, ¿cuál es la probabilidad de que haya solamente una disponible?". La figura 1.3 muestra la información representada por medio de una tabla de doble entrada:

| | $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|---|
| $B$ | **0.81** | **0.09** |
| $\overline{B}$ | **0.09** | **0.01** |

**Figura 1.3**

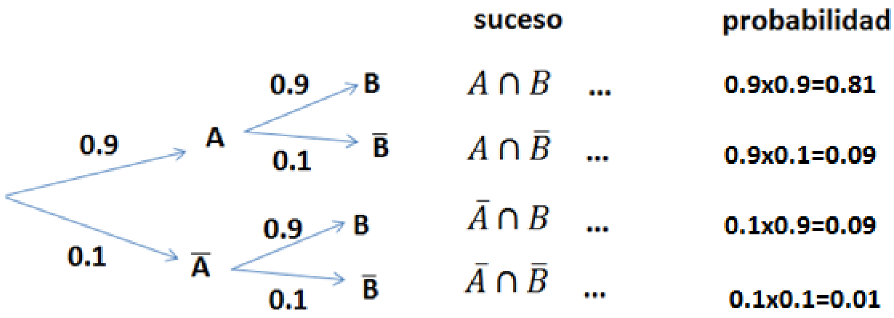
En ella podemos visualizar que la probabilidad de que al menos haya una disponible es 0.81+0.09+0.09=0.99, ya que, el primer sumando es la probabilidad de que las dos estén disponibles, el segundo sumando es la probabilidad de que la ambulancia $A$ esté disponible y la ambulancia $B$ no, y el último sumando la probabilidad de que la ambulancia $B$ esté disponible y la ambulancia $A$ no. Observe la figura 1.4, la cual contiene la tabla de doble entrada mencionando lo que representa cada una de las casillas.

| | $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|---|
| $B$ | $A \cap B$ (los 2) | $\overline{A} \cap B$ (sólo 1) |
| $\overline{B}$ | $A \cap \overline{B}$ (sólo 1) | $\overline{A} \cap \overline{B}$ (ninguno) |

**Figura 1.4**

Para obtener la probabilidad de que solamente una esté disponible sumamos 0.09 +0.09=0.18, debido a que estas dos probabilidades pertenecen a los casos en donde solamente una ambulancia esté disponible.

Por medio de un diagrama de árbol




De la misma forma visualizamos que la probabilidad de que al menos haya una ambulancia disponible es 0.81+0.09+0.09=0.99.

Y también visualizamos que la probabilidad de que haya solamente una disponible es 0.09+0.09=0.18.

La figura 1.5 contiene una representación por medio de un diagrama de Venn.

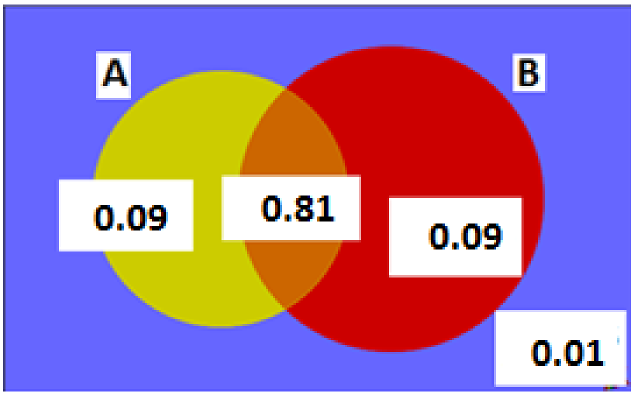



**Figura 1.5**

En donde también, al igual que en las anteriores representaciones podemos observar que la suma de todas esas probabilidades debe ser uno, puesto que el rectángulo representa el espacio muestral, es decir, todas las posibilidades. Visualizamos que la probabilidad de que al menos haya una ambulancia disponible es 0.81+0.09+0.09=0.99 y la probabilidad de que haya solamente una disponible es 0.09+0.09=0.18.

Por símbolos matemáticos y uso de fórmulas la solución es la siguiente:

Al ser eventos independientes, la probabilidad de que las dos estén disponibles es

$$P(A \cap B) = (0.9)(0.9) = 0.81$$

La probabilidad de que al menos haya una disponible está representada por

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B) = 0.9 + 0.9 - 0.81 = 0.99$$

Para dar respuesta a la de cuál es la probabilidad de que haya solamente una disponible tenemos:

$$P\left(\left(A \cap B'\right) \cup \left(A' \cap B\right)\right) = P\left(A \cap B'\right) + P\left(A' \cap B\right) - P\left(\left(A \cap B'\right) \cap \left(A' \cap B\right)\right)$$

Sabemos que

$$P(A) = 0.9, P\left(A'\right) = 0.1, P(B) = 0.9, P\left(B'\right) = 0.1$$

entonces

$$P\left(\left(A \cap B'\right) \cup \left(A' \cap B\right)\right) = (0.9)(0.1) + (0.1)(0.9) - 0 = 0.18$$

Cabe señalar que, la propuesta no está encaminada hacia la descalificación o la erradicación de dichas “fórmulas” o expresiones matemáticas, sino al contrario, la propuesta será la vía para que el alumno las comprenda y las utilice mediante la conversión y tratamiento de la información por medio de otros registros de representación, ya que cualquier enfoque, como lo puede ser el de razonamiento, explicación, descripción, cálculo, etc., puede implicar que las representaciones semióticas sean convertidas para tratarlas (Duval, 1999). Al mismo tiempo se pretende hacer agradable la clase, interesar a los estudiantes al comprender temas de matemáticas –como la probabilidad- los cuales consideran difíciles, hacerlos capaces de resolver problemas de aplicación y con contextos afines a sus intereses y conocimientos.

### 1.5 Pregunta de investigación

En esta investigación se plantea una propuesta didáctica basada en el uso de diferentes registros de representación para calcular probabilidades de eventos compuestos. Duval (1999) señala que de esta manera –al usar diferentes registros de representación- se logran capacidades cognitivas del alumno y representaciones mentales de lo realizado. Por lo tanto, se formula la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué tanto incide el uso de diferentes registros de representación para que el alumno pueda calcular probabilidades de eventos compuestos?

# CAPÍTULO 2

# ELEMENTOS CONSIDERADOS EN LA PROPUESTA DIDÁCTICA

# CAPÍTULO 2 ELEMENTOS CONSIDERADOS EN LA PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo se presentan los elementos considerados para realizar la propuesta didáctica: Orientación y sentido del área de matemáticas en el Colegio de Ciencias y Humanidades, Evaluación diagnóstica, propuestas de enseñanza-aprendizaje del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), evaluación formativa, trabajo en equipo, importancia del uso de diferentes registros de representación y actividades didácticas de Carmen Batanero.

## 2.1 Orientación y sentido del área de matemáticas en el Colegio de Ciencias y Humanidades

Se pretende crear una propuesta útil al profesor para que propicie un ambiente en donde impere el interés por la comprensión y no únicamente la memorización de conceptos y procedimientos que ocasionan que el alumno no sepa cuándo o cómo utilizar determinados conocimientos, de igual manera la propuesta está enfocada a no únicamente repetir los conceptos matemáticos, sino que también el alumno sea capaz de usar el lenguaje para entender y ser capaz de resolver problemas. En el documento Orientación y sentido de las áreas del Plan de Estudios Actualizado se menciona que:

> Este bachillerato propone dotar al alumno de los conocimientos y habilidades que le permitan acceder por sí mismo a las fuentes de información y, más en general, de la cultura; es decir, a la lectura de texto de todo tipo, a la experimentación y a la investigación de campo. Por ello, pone el acento en el trabajo intelectual del alumno y excluye concebirlo como repetidor del saber del profesor, con quien comparte, en cierta igualdad radical, la posibilidad de conocer, juzgar, opinar y fundamentar intelectualmente. (CCH, 2006, p. 17).

El CCH, a través del mismo documento menciona su objetivo, el cual es buscar que sus egresados sepan pensar por sí mismos, expresarse y hacer cálculos, y además, sepan para qué les sirven esos conocimientos y cómo pueden relacionarlos con las situaciones que se les presentan en la vida,

> el Colegio concibe al alumno como sujeto de la cultura y no su mero receptor ni destinatario, por lo que éste no solo debe comprender los conocimientos sino también juzgarlos, relacionarlos con su propia experiencia y realidad, asimilarlos crítica y personalmente y, si fuera el caso, trascenderlos, reelaborarlos o sustituirlos por otros mejor fundados (CCH, 2006, p. 25).

Aunque el CCH y su modelo educativo conciban la enseñanza desde esa perspectiva, algunos profesores, alumnos y sociedad en general, tienen una idea de matemática relacionada con los algoritmos, métodos y repetición de ejercicios para hacer por hacer, en ocasiones sin ningún contexto. Es decir, la idea, es practicar y llegar a memorizar algo sin reflexionar lo que se hace o lo que se obtiene; y esto sin contar el tipo de “evaluación” que realizamos al alumno para conocer si “sabe matemáticas o no”, pidiéndole la realización de ejercicios que fomentan únicamente la repetición, “la talacha” y la memorización; Bishop (1999) afirma:

> El currículo dirigido al desarrollo de técnicas está formado por procedimientos, métodos, aptitudes, reglas y algoritmos que dan una imagen de las matemáticas como una materia basada en el “hacer”. Es decir, las matemáticas no se presentan como una materia de reflexión. No son una manera de conocer. Naturalmente, dentro de este currículo es necesario pensar, pero es un pensamiento limitado y constreñido, relacionado con la adopción del procedimiento adecuado, el empleo del método correcto de solución, el seguimiento de reglas y la obtención de la respuesta correcta. (p. 24).

Los problemas presentados sin contexto, proporcionan una idea más clara de lo afirmado por Bishop, por ello, me permito presentar el siguiente ejercicio. Considere el siguiente caso: “Sea $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $A$ y $B$ eventos independientes, obtenga la $P(A \cap B)\ y\ P(A \cup B)$”, en tal caso, se solicita a los alumnos el cálculo de probabilidades de eventos compuestos, por medio de los símbolos matemáticos y en ocasiones, inclusive, se obliga a tratarlos únicamente por medio de un método o registro de representación; para Mercado Martínez (comunicación personal, julio 20, 2013), esto, “transforma al ejercicio en algo puramente aritmético, o, en el mejor de los casos, algebraico, dejando de lado una interpretación probabilística”.

Así, se pretende no únicamente repetir los conceptos matemáticos sino que también el alumno sea capaz de usarlos para obtener probabilidades de eventos compuestos y con ello resolver problemas que requieran de la toma de decisiones, ya que

> Educar es redimir. Educar es desarrollar. Educar es potenciar. Educar es preparar para el futuro. Educar es transmitir cultura. Educar es crear. Educar es preparar para la vida. Educar es producir sabiduría. Educar es perfeccionar, acabar,… (Rugarcía, 1989, p. 3).

Entonces, de acuerdo a este autor, la propuesta didáctica, educa, por la razón de que los contextos utilizados tienen como finalidad el preparar a los alumnos con posibles situaciones futuras.

## 2.2 Evaluación diagnóstica

Antes de abordar este concepto, considero importante definir evaluación, para Lafourcade (1972) es "como una etapa del proceso educacional que tiene por fin comprobar de modo sistemático en qué medida se han logrado los resultados previstos en los objetivos que se hubieran especificado con antelación." (p. 21), dejando en claro que la evaluación no solamente sirve para proporcionar una calificación sino también para hacer un balance de los objetivos fijados y los logrados. Para Rugarcía "Evaluar es descubrir la coherencia entre objetivos y resultados" (1989, p. 5), es decir, se descubre si la enseñanza proporcionada sirvió para lograr los objetivos fijados o es necesario modificar ciertos elementos.

La evaluación diagnóstica o evaluación predictiva, se entiende como "aquella que se realiza previamente al desarrollo de un proceso educativo, cualquiera que este sea." (Díaz Barriga y Hernández 2002, p. 396), es decir, no solamente al comenzar un curso, también al comienzo de una unidad, tema, propósito u objetivo. Comenzando de esta manera, el profesor tendrá una idea de lo que los alumnos poseen de conocimientos (NCTM, 2000; Díaz Barriga y Hernández 2002; Santrock, 2006) y así saber quiénes necesitan más ayuda para obtener los aprendizajes fijados (NCTM, 2000). Con esta evaluación, el profesor conocerá si cada alumno posee los conocimientos necesarios, con el fin de promover un aprendizaje significativo, que de acuerdo a Ausubel (1961) es aquel que se inserta a esa estructura mental de conocimientos que el alumno ya posee, dicho de otra manera, el aprendizaje significativo es una construcción de conocimiento basado en los ya conocidos con el fin de tener cierto sentido para el alumno, textualmente afirma:

> La esencia del proceso del aprendizaje significado reside en que las ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria queremos decir que las ideas se relacionan con algún *aspecto existente específicamente relevante* de la estructura cognoscitiva del

> alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición.
> (p. 48).

El aprendizaje del alumno no será significativo, si la intención de este es memorizar, pero aunque este tenga la mejor disposición de aprender significativamente, si las propuestas didácticas carecen de relación con su estructura cognoscitiva, no podrá obtener más que un aprendizaje carente de significado y mecánico, muy a pesar de su intención. (Ausubel, 1961).

## 2.3 Propuestas de enseñanza-aprendizaje del National Council of Teachers of Mathematics

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) es “una organización profesional internacional comprometida con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para todos los estudiantes.” (NCTM, 2000, p. xii), por esta razón la publicación de “Principios y Estándares Curriculares del año 2000 de esta organización es considerada para esta propuesta.

El NCTM (2000) afirma que todos los alumnos deben de tener oportunidades y el apoyo necesario para que puedan aprender matemáticas. Sin importar las características y situaciones particulares de cada uno de ellos, el profesor debe de contribuir en proporcionar dicho apoyo mediante tareas que los hagan sentir considerados y tratados por igual (NCTM, 2000), por lo tanto, la interpretación de la afirmación de este organismo es la de no hacer distinción entre los alumnos del CCH, los de Colegio de Bachilleres u otras escuelas, para decidir si pueden o no aprender matemáticas; o hacer distinción entre los alumnos del turno matutino y vespertino, etiquetando a estos últimos como los irresponsables o flojos.

El tema de Cálculo de probabilidades de eventos compuestos es parte de un currículo, que de acuerdo al NCTM (2000) debe ser capaz de brindar la oportunidad a los alumnos de seguir aprendiendo matemáticas y para que con los conocimientos adquiridos se encuentre preparado para resolver los problemas que se les presenten. También, el NCTM (2000) expresa: el currículo debe ser coherente para que las ideas de matemáticas estén ligadas y se vayan construyendo unas basadas en otras, tal y como sucede con los aprendizajes fijados en la Unidad II del Programa de estudios de la asignatura de Estadística y Probabilidad I (CCH, s.f.).

En algunas partes de la propuesta se solicita a los alumnos resolver problemas mediante el razonamiento y el debate, un ejemplo de ello, es cuando se pregunta a los alumnos razonar el por qué la probabilidad de un evento está entre cero y uno, o, preguntar por la razón de la fórmula para la obtención del número de combinaciones. El NCTM (2000) menciona que el uso de estos dos -el razonamiento y el debate- trae consigo la fluidez en los procedimientos y la comprensión conceptual.

Las actividades que conformaron la propuesta están diseñadas de acuerdo a lo que el NCTM (2000) propone: motivar a los estudiantes a comprender temas de matemáticas. Con base en las mismas actividades, el profesor debe fomentar en los alumnos que trabajen con ahínco para resolver los problemas sugeridos, con el fin de que ellos se sientan exitosos y deseen continuar aprendiendo. (NCTM, 2000).

Antes de usar los ejercicios y ejemplos que se proponen, el profesor debe de conocerlos y entenderlos con profundidad (NCTM, 2000); es decir, debe comprender profunda y flexiblemente los conocimientos que trate de trasmitir para garantizar una enseñanza efectiva (Santrock, 2006); de no ser así, el profesor es vulnerable a cometer errores que pudieran traer consecuencias graves, como el proporcionar conceptos o procedimientos incorrectos, llamados *misconcepciones*, "Una misconcepción es un concepto errado y por tanto constituye genéricamente un evento de evitar" (D'amore, 2005, pp. 47-48); o el solicitar ejercicios imposibles de culminar por el descomunal número de procedimientos u operaciones para concluirlo, como sucedería si solicitáramos a los alumnos el construir el diagrama de árbol que representa las permutaciones de 9 elementos tomando 3 y solicitar probabilidades que sean obtenidas de ese diagrama de árbol; o la no existencia de solución, como por ejemplo el tratar de representar por medio de un diagrama de Venn la siguiente información: $P(A) = 0.3,\ P(B) = 0.1$ y $P(A \cap B) = 0.5$, la cual no satisface las reglas de probabilidad -la de adición por mencionar una-, vea la figura 2.1:

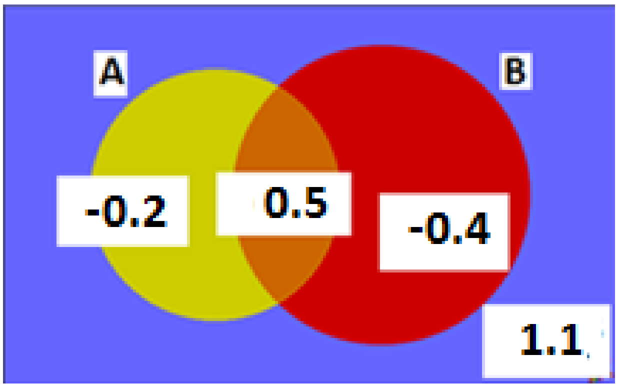



**Figura 2.1**

En la figura 2.1 podemos observar que

$$P(A) = 0.3,\ P(B) = 0.1 \text{ y } P(A \cap B) = 0.5$$

lo que puede acarrear confusiones en el alumno.

Esto también puede suceder al proporcionar información incorrecta por medio de una tabla de doble entrada, vea la figura 2.2 que funge como ejemplo.

| | M | $\overline{M}$ | total |
|---|---|---|---|
| C | 15 | | 28 |
| $\overline{C}$ | | 10 | 22 |
| total | 25 | | |

**Figura 2.2**

Con esto, el alumno tratará de resolverlo correctamente, en caso contrario podrá ser razón de desmotivación por sentirse frustrado al no poder resolverlo.

## 2.4 Evaluación formativa

Cuando los alumnos realicen las actividades propuestas se recomienda que el profesor continuamente recabe información mediante la observación y preguntas, información que le será útil para tomar decisiones apropiadas relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos (NCTM, 2000; Allal, 1979, Jorba y Sanmartí, 1993, Jorba y Casellas, 1997 citados en Díaz Barriga y Hernández, 2002). Considero que las preguntas que el profesor puede realizar son: Tomando en cuenta la fórmula para obtener probabilidades condicionales, ¿por qué consideras que la probabilidad de que sucedan al mismo tiempo dos eventos independientes es igual a multiplicar sus probabilidades?, ¿para qué crees te puede servir aprender probabilidad?, ¿cuál es la razón por la que la probabilidad no puede ser menor a cero?, ¿o mayor a uno? Este proceso se recomienda que se realice, sin importar que la tarea sea individual o colectiva. Con la información recabada también el profesor podrá garantizar que cada uno de los alumnos este aprendiendo de manera correcta (Díaz Barriga y Hernández, 2002).

Mientras se desarrollan las actividades, es necesario que el profesor esté escuchando respuestas de los alumnos, observando sus actitudes que le indiquen entendimiento o confusión, dar un encuadre a las siguientes preguntas y detectar conductas que no colaboren con el proceso de enseñanza-aprendizaje (Doyle, 1986 citado en Santrock, 2006).

La planeación de dicha propuesta considera que el alumno debe de tener una actitud reflexiva, de duda, de cuestionamientos, de preguntas, cuyas respuestas no deben de ser proporcionadas por el docente, ya que, este, debe de actuar como “un guía y un facilitador del aprendizaje de los alumnos (Criterios de Eficiencia en la Labor de los Maestros del Colegio de Ciencias y Humanidades)” (Christlieb, 2004, p. 32), debe ser un propulsor de esos cuestionamientos, por lo tanto, no debe coartar, ni debe de mantener una postura o conducta que frene las inquietudes de los alumnos, tal y como podría ocasionarlo resolviéndole o trasmitiéndole directamente las respuestas; al contrario, debe de tener una actitud que permita la confianza para preguntar, de dudar y no únicamente de aceptar lo que se le proporcione. Esta función -la de guía-, es una labor que implica conocer las características y necesidades de los alumnos. (NCTM, 2000; Christlieb, 2004).

## 2.5 Trabajo en equipo

El trabajo en equipo es una forma de conseguir en los alumnos la capacidad de conjeturar, obtener diversos enfoques para resolver problemas, construir argumentos matemáticos y lograr que estos sean capaces de entender y refutar argumentos matemáticos de los mismos compañeros e incluso del profesor. (NCTM, 2000), dado que con el trabajo compartido es posible potenciar el pensamiento.

Díaz Barriga y Hernández (2002) expresan la importancia del trabajo en equipo por parte de los alumnos:

> se ha demostrado que los estudiantes aprenden más, les agrada más la escuela, establecen mejores relaciones con los demás, aumenta su autoestima y aprenden tanto valores como habilidades sociales más efectivas cuando trabajan en grupos cooperativos, que al hacerlo de manera individualista y competitiva. (p. 101).

Trabajar entre iguales trae consigo ciertas ventajas como: la socialización, la tolerancia, la relativización de los puntos de vista, entre otras (Coll y Colomina, 1990 citados en Díaz Barriga y Hernández, 2002). Estos mismos autores dicen que la efectividad del trabajo depende del número de alumnos que lo conforman, disminuyendo cuando éste aumenta, recomendando que el número de alumnos que conforman los equipos –los cuales llaman grupos de aprendizaje cooperativo- no exceda a seis.

Díaz Barriga y Hernández (2002) expresan que al considerar la importancia de cuando se trabaje en equipos o de manera grupal, los alumnos se acomoden, de tal forma que puedan verse unos a otros, logrando así, un conjunto de actividades cognitivas y dinámicas entre los integrantes del equipo al interactuar con los materiales; actividades como: explicaciones de cómo resolver algún problema determinado, discusión acerca de los conceptos, explicación de algún concepto o procedimiento de un compañero más capaz a otros compañeros; con esta última Vigotsky argumenta que se logra pasar de la capacidad que tiene una persona de resolver independiente un problema, a la Zona de Desarrollo Potencial (ZDP), la cual representa la capacidad de resolver un problema o realizar una actividad de manera exitosa, con la ayuda o guía de un adulto o de otro compañero más capaz, y, que en otro momento podrá resolver de manera independiente y autónoma (Chaves, 2001); con lo que se logra una nueva ZDP. La teoría de Vigotsky se basa en "ofrecer actividades significativas para promover el desarrollo individual y colectivo con el propósito de formar personas críticas y creativas que propicien transformaciones que requiere nuestra sociedad" (Chaves, 2001, p. 63); por ello, en la propuesta didáctica, se promueve el trabajo en equipo para que los alumnos tengan la oportunidad a la crítica, a la reflexión y a la cooperación.

## 2.6 La importancia de usar diferentes registros de representación

El cálculo de probabilidades de eventos compuestos es un objeto matemático, debido a que su funcionamiento y control depende de expresiones lógicas, relacionales y aritméticas. Duval (1999) dice que las confusiones entre el objeto matemático y su representación provoca una pérdida en la comprensión, debido a que dicho objeto al estar fuera de su contexto de aprendizaje no sugiere ningún otro tratamiento. Tal es el caso de utilizar únicamente las expresiones matemáticas para explicarla. Al utilizar varias representaciones - dos o más- el profesor podrá saber si el alumno comprende o no el elemento matemático en estudio y saber el concepto que posee respecto a algún elemento matemático. Duval (1999) define *semiosis* como la aprehensión y la capacidad de producir una representación semiótica y define *noesis* a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto. Sin representaciones semióticas no podríamos comunicar los elementos matemáticos y no habría desarrollo de la actividad matemática (Duval, 1999), con esto, el docente debe considerar que el alumno comprenda que la representación es tan sólo un instrumento para llegar a la comprensión de algún elemento matemático; relacionando lo anterior con el tema de probabilidad, el docente no debe utilizar las representaciones sin que con estos se trate de comprender algún elemento matemático.

### 2.6.1 Pluralidad

El cálculo de probabilidades de eventos compuestos, puede realizarse por medio de la pluralidad de sistemas semióticos, la cual permite la diversificación de la representación del contexto del cual se pretende obtener dichas probabilidades, logrando con ello capacidades cognitivas del alumno y representaciones mentales de lo realizado. (Duval, 1999).

La diversificación de las representaciones en probabilidad puede estar dada por los diagramas de Venn, tablas de doble entrada, diagramas de árbol y la simbología matemática; siendo esta última, la que se privilegia en varios libros de probabilidad, ejemplo de esto, Christensen (1983) y Chao (1989), y en algunos casos, la única forma de cálculo de dichas probabilidades, como por ejemplo Maisel (1973). Para la obtención de probabilidades de eventos compuestos, utilizar diagramas de Venn, tablas de doble entrada y otros registros de representación ocasionaría el cumplimiento de las dos condiciones que se deben de satisfacer para que el objeto y su representación no se confundan, y estás son: la disposición de al menos dos sistemas semióticos y la utilización de dichos sistemas semióticos. (Duval, 1999).

### 2.6.2 Tratamiento y conversión

De acuerdo a Duval (1999) el tratamiento y la conversión son actividades cognitivas fundamentales de la representación ligada a la semiosis. El *tratamiento* es la transformación que produce otra representación en el mismo registro (Duval, 1999), tal es el caso, de las equivalencias que obtenemos al utilizar o manipular el sistema semiótico correspondiente a los símbolos matemáticos. El uso de axiomas de probabilidad representados por símbolos matemáticos, son un claro ejemplo de ello. La *conversión* es la transformación que produce una representación en otro registro de representación (Duval, 1999). Ejemplo de ello es el representar la información de un contexto en símbolos matemáticos a un diagrama de Venn.

Debemos considerar que "la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos." (Duval, 1999, p. 46), como por ejemplo, al representar las probabilidades proporcionadas en un problema probabilístico a un diagrama de Venn, y, la misma dificultad se puede manifestar con el proceso inverso, es decir, al tratar de usar información de un diagrama de Venn para obtener probabilidades y representarla de manera simbólica, esto, debido a que las reglas de conversión no son las mismas y estas varían de acuerdo al sentido en el que se realiza el cambio de registro. (Duval, 1999).

La importancia de los cambios de registros es bien conocida y realizada en algunas disciplinas. (Duval, 1999). En matemáticas, es una actividad manifestada por "los incesantes vaivenes entre frases en lengua natural, fórmulas literales, expresiones en lenguaje formal, figuras geométricas o gráficos cartesianos." (Duval, 1999, p. 47), ejemplo de ello, es el estudio de la función matemática, recurriendo para enseñarla a gráficas, tablas y expresiones matemáticas.

### 2.6.3 Cálculo

Con respecto al término Cálculo, Duval (1999) lo define de la siguiente manera:

> El cálculo es un tratamiento interno al registro de una escritura simbólica de cifras o de letras: sustituye, en el mismo registro de escritura de los números, expresiones nuevas por expresiones dadas. Sin embargo, el término "cálculo" en matemáticas, es tomado en una acepción más amplia: se llama cálculo a todo proceso de transformación de escritura de los números, combinando actividad de tratamiento y actividad de conversión. (Duval, 1999, pp. 42-43).

El tema de la propuesta didáctica involucra el término *cálculo*, y, en algunos registros de representación utilizados para obtener probabilidades de eventos compuestos, podrá ser más "sencillo" dicho cálculo, tal es el caso de los diagramas de Venn y las tablas de doble entrada; Duval (1999) argumenta que cuando se trabaja con diferentes registros bidimensionales –estos incluyen las tablas de doble entrada- existe una facilidad al admitir suficiencia con "ver" los números organizados en las cuatro casillas que la conforman. No obstante, las tablas de doble entrada, los diagramas de Venn, de árbol u otro registro de representación, al ser utilizados para el cálculo de probabilidades de eventos compuestos, pueden ocasionar la disminución de operaciones aritméticas, tal y como lo menciona él mismo, afirmando que "un registro de representación puede permitir efectuar ciertos tratamientos de una manera mucho más económica y más potente que en otro registro."(Duval, 1999, p. 59), por ejemplo, considere la siguiente situación: "Se debe examinar un grupo de personas respecto a dos sistemas comunes de cierta enfermedad. Se considera que 20% de las personas presentan el síntoma A, 30% tiene el síntoma B, 10% tiene ambos síntomas y el resto no tiene síntoma alguno. Para una persona escogida al azar de este grupo, obtenga la probabilidad de que la persona presente exactamente un síntoma". Resolviendo por medio de símbolos matemáticos,

$$P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.3,\ P(A \cap B) = 0.1$$

entonces

$$P\left((A \cap B') \cup (A' \cap B)\right)$$

cuya expresión matemática representa lo solicitado –la probabilidad de que la persona presente exactamente un síntoma, obteniendo su valor por medio de

$$P\left((A \cap B') \cup (A' \cap B)\right) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) - P(A \cap B' \cap A' \cap B)$$

Verificando con ello, la necesidad de hacer uso de otras fórmulas. En cambio, vea la figura 2.3 la cual muestra la representación de la información proporcionada por medio de una tabla de doble entrada:

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0.1 | | 0.3 |
| $\bar{B}$ | | | |
| | 0.2 | | |

**Figura 2.3**

La información proporcionada es la suficiente para completar la tabla, observe la figura 2.4:

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
| $\bar{B}$ | 0.1 | 0.6 | 0.7 |
| | 0.2 | 0.8 | 1 |

**Figura 2.4**

Entonces, el cálculo para obtener la probabilidad de que la persona presente exactamente un síntoma es igual $0.1 + 0.2 = 0.3$, en donde el primer sumando representa la probabilidad de que presente el síntoma $A$ y no $B$, y el segundo sumando representa la probabilidad de que presente el síntoma $B$ y no $A$.

Los distintos registros de representación tienen reglas de transformación distintas, por lo que el lector podrá realizar un juicio comparativo, entre el uso de la simbología matemática y el uso de la tabla de doble entrada para el cálculo de probabilidades.

## 2.7 Actividades propuestas para la enseñanza de la probabilidad por Carmen Batanero

Varias de las actividades didácticas consideradas en la propuesta didáctica fueron retomadas del libro Azar y Probabilidad elaborado por Díaz, Batanero y Cañizares (1987). En particular, la doctora Carmen Batanero, ha dedicado gran parte de sus trabajos de investigación, al estudio de la Probabilidad y la Estadística, consciente de que la teoría matemática de la probabilidad es proporcionada de manera casi igual tanto a nivel bachillerato como en nivel universitario (Díaz, Batanero, Cañizares, 1987), por lo tanto, las actividades propuestas por Carmen Batanero son adecuadas para cada nivel educativo para las que fueron pensadas. Mercado Martínez (comunicación personal, abril 23, 2013) argumenta "Carmen Batanero es una de las investigadoras en educación matemática más importante de la época, la cual ha estado interesada en el campo de la enseñanza de la Estadística y Probabilidad, por lo tanto, es importante considerarla en trabajos de investigación relacionados con estas dos ciencias".

Las características que destacan del método de enseñanza que propone la Dra. Carmen Batanero son: el diseñar actividades que consideren la resolución de problemas, actividades para la construcción del conocimiento, el razonamiento de las ideas matemáticas y el uso del lenguaje matemático, estas características obedecen a la siguiente afirmación realizada por ella: "El profesor no es un transmisor del conocimiento, sino un gestor de este conocimiento y del medio (instrumentos, situaciones) que permita al alumno progresar en su aprendizaje."(Batanero, s.f., p. 9).

Respecto a los materiales manipulativos Batanero (s.f.) menciona "el material manipulativo debe desempeñar un papel básico en los primeros niveles de enseñanza, por la necesidad que tienen los niños de contar con referentes concretos de los conceptos abstractos que tratamos de enseñarles." (p. 9); sin embargo, aunque Batanero hace alusión a la importancia de los materiales manipulativos en los niños para fomentar su aprendizaje, también ha propuesto diversas actividades dirigidas a estudiantes de nivel medio superior que involucran dichos materiales. En particular, en la presente propuesta didáctica, se hace uso de los siguientes materiales manipulativos: bolas de unicel, papelitos de colores, ruletas, entre otros.

Otro elemento que Batanero considera importante dentro de la enseñanza de la probabilidad es la simulación ya que

> "permite condensar el experimento en el tiempo y en el espacio y operar con el experimento simulado para obtener conclusiones válidas para el experimento original. Además proporciona un método [']universal['] para obtener una estimación de la solución de los problemas probabilísticos." (Batanero, s.f., p. 11).

Por ello, en la presente didáctica, se proponen actividades para el alumno que involucran a la simulación. El lector se percatará más adelante que se realiza la simulación en algunas actividades.

# CAPÍTULO 3

# DESARROLLO DE LAS ETAPAS DEL MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

# CAPÍTULO 3 DESARROLLO DE LAS ETAPAS DEL MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

La contribución esperada al realizar la propuesta didáctica, la cual recurre a usar diferentes registros de representación es lograr que el alumno sea capaz de calcular probabilidades de eventos compuestos.

Otro de los elementos considerados en la propuesta didáctica es el trabajo en equipo, con el que se pretende: hacer agradable la clase, interesar a los estudiantes al comprender temas de matemáticas –como la probabilidad- los cuales consideran difíciles. Con el trabajo en equipo, también se pretende hacerlos capaces de desarrollar esta habilidad.

La propuesta está constituida por 8 sesiones, con una duración de aproximadamente 120 minutos, de las cuales las primeras 5, están diseñadas con el fin de que los alumnos tengan los conocimientos previos, siendo estos un elemento indispensable para la obtención de un aprendizaje significativo (Ausubel, 1961).

Las sesiones 6, 7 y 8 contienen actividades directamente relacionadas con el cálculo de probabilidades de eventos compuestos.

## 3.1 Características del grupo experimental

El grupo experimental fue un grupo de Estadística y Probabilidad I del Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Naucalpan, turno matutino, en condiciones normales, es decir, en un grupo de evaluación ordinaria y conformado por 38 alumnos inscritos regularmente, de los cuales 30 asistieron a todas las sesiones que conformaron la propuesta didáctica; la cual estuvo diseñada considerando los elementos que se mencionaron en el Capítulo 2. Los aprendizajes, temática y organización de la misma están basados en el Programa de Estudios de la asignatura de Estadística y Probabilidad I, CCH (s.f), vigente desde el año 2001.

Las características generales de los alumnos del grupo son:

- Edad entre los 16 y 18 años.

- Promedio general del grupo de 8.7.
- 87% de alumnos consideran a las matemáticas difíciles.
- 75% de los alumnos no están acostumbrados a trabajar en equipo.
- 90% considera que los profesores no utilizan varios métodos de enseñanza para explicar algún tema.
- 95% considera que los profesores obligan a utilizar cierto método de solución.

La información fue obtenida por medio de un cuestionario, el cual se aplicó a 34 de los 38 alumnos inscritos antes de comenzar con el método de investigación.

Dicho cuestionario se encuentra en la sección de anexos y corresponde al anexo 1.

### 3.2 Etapas del método de investigación

El Método de investigación se llevó a cabo en cinco etapas:

1. Evaluación diagnóstica y análisis de los resultados.
2. Diseño de la propuesta didáctica.
3. Aplicación de la propuesta didáctica.
4. Aplicación del instrumento de evaluación para medir los aprendizajes alcanzados.
5. Aplicación del instrumento de evaluación para medir la actitud de los alumnos al utilizar algunos elementos de la propuesta didáctica.

### 3.3 Evaluación diagnóstica y análisis de los resultados

De acuerdo a los Programas de Matemáticas de los semestres I a IV, vigentes en el Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, no existe un tema donde el alumno estudie el cálculo de probabilidades de eventos compuestos.

Los alumnos de quinto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades, no tuvieron ningún acercamiento a los temas de probabilidad durante los primeros cuatro semestres; aunado a esto y al hecho de que la propuesta didáctica considera temas previos al cálculo de probabilidades de eventos compuestos, la evaluación diagnóstica que se aplicó estuvo en relación a la idea intuitiva de aleatoriedad, siendo esta, un elemento importante en el cuál se apoya cualquier cálculo de probabilidades. (Batanero, 2001).

### 3.3.1 Instrumento de evaluación diagnóstica

El instrumento de evaluación diagnóstica utilizado fue un cuestionario conformado por un conjunto de afirmaciones sobre la idea intuitiva de aleatoriedad; en cada una de ellas el estudiante decidirá si es verdadera o falsa. Este tipo de instrumento aplicado al grupo experimental, es el sugerido por Cubero (1985) citado en Guzmán (2008).

Las ideas intuitivas son “unidades representacionales complejas que incluyen multitud de proposiciones organizadas en torno a un dominio concreto del mundo social (Rodrigo, 1985)” (Guzmán, 2008, p. 104) y en el campo de la probabilidad juegan un papel muy importante (Batanero, 2001); entonces, el objetivo de este instrumento de evaluación diagnóstica, fue el proporcionar información en relación a la idea intuitiva de aleatoriedad, ya que es necesario “construir un puente que relacione lo que el alumno sabe con aquello que va a aprender” (Guzmán, 2008, p. 104).

El cuestionario aplicado se muestra en la sección de anexos y corresponde al anexo 2.

### 3.3.2 Aplicación del instrumento de evaluación diagnóstica

La aplicación del instrumento de evaluación diagnóstica –el cuestionario- fue aplicado a 34 alumnos de los 38 que conforman el grupo. Antes de comenzar con la aplicación, los alumnos se mostraron interesados y escucharon con atención las instrucciones del profesor, inmediatamente después y por aproximadamente 20 minutos contestaron el cuestionario. Después de ese lapso de tiempo ya habían sido entregados todos los cuestionarios y el profesor comenzó a hablar de las preguntas para proporcionar las respuestas correctas. El grupo mostró asombro por las respuestas y el profesor comentó que las ideas erróneas, no debían ocasionar un sentimiento de incomodidad o de frustración, ya que la aplicación del cuestionario tenía como objetivo el conocerlos mejor y saber sus necesidades.

3.3.3 Resultados y conclusiones obtenidos de la evaluación diagnóstica aplicada

Los resultados de la evaluación diagnóstica se presentan a continuación.

Con respecto al reactivo:

| |
|---|
| **Se lanza 6 veces una moneda al aire y los resultados obtenidos fueron "a s a s a s".** |
| **Afirmación: La secuencia anterior es aleatoria** $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ |

El 79.41% (27 de 34) contestó V y algunas de las justificaciones de la respuesta que proporcionaron se mencionan a continuación de manera textual:

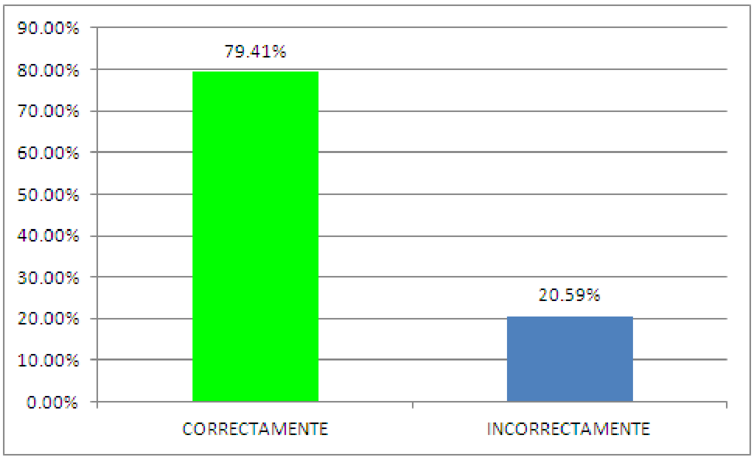
- "por que los resultados se obtuvieron aleatoriamente".
- "porque no estaban predispuestos los lanzamientos".
- "Porque no se sabe cual será el resultado".
- "no se pueden planear los resultados al lanzar una moneda".
- "No sabes previamente de que lado caerá la moneda".
- "el lanzamiento de una moneda es al azar".
- "se lanza sin saber en si el resultado".

Por otro lado el 20.59% (7 de 34) contestó F y algunas de sus justificaciones de la respuesta que proporcionaron se mencionan a continuación de manera textual:

- "No es aleatoria porque lleva un orden".
- "no por que hay una constancia".
- "Si fuera aleatoria no llevaría orden, sería difícil obtener esa secuencia".
- "por que ningún resultado se repite uno es águila otro sol, sucesivamente".
- "es poco probable que tengan ese orden".

La respuesta correcta es V y de acuerdo a la justificación que proporcionan podemos concluir que un alto porcentaje no considera que los patrones de secuencia sean un factor para pensar en la no aleatoriedad. Vea la gráfica 3.1

la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:




**Gráfica 3.1**

Con respecto al reactivo:

| |
|---|
| **Se lanza 4 veces una moneda y los resultados han sido "a a a a".**<br><br>**Afirmación: Dada la secuencia de resultados anterior, sabemos que si lanzamos de nuevo la moneda, el resultado será "a"** V F<br><br>**Justifica tu respuesta:** |

El 8.82% (3 de 34) contestó V y las justificaciones de la respuesta que proporcionaron se mencionan a continuación de manera textual:

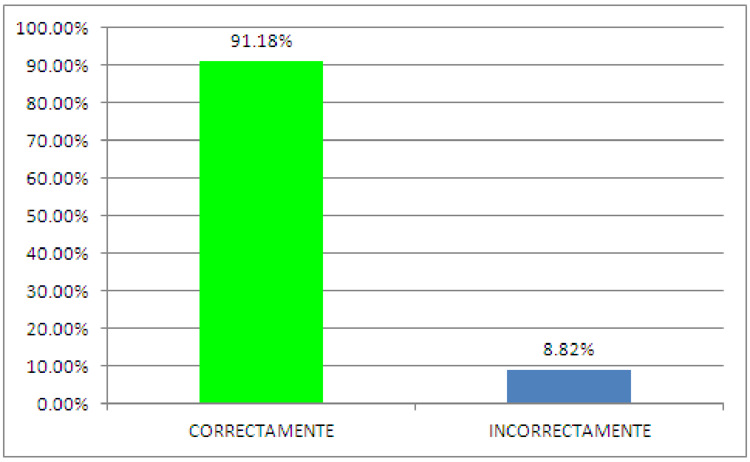
- "debido al muestreo nunca se considera (s), así que el resultado será (a)".
- "La probabilidad de que vuelva a salir aguila es de 1. osea el 100%".
- "por la serie de secuencia es consecutiva".

Por otro lado, el 91.18% (31 de 34) contestó F y algunas de sus justificaciones de la respuesta que proporcionaron se mencionan a continuación de manera textual:

- "es al azar no se sabe"
- "No pues la probabilidad es la misma, podemos obtener aguila o sol"
- "no lo savemos y es probable que pase"
- "No, porque es probabilidad y así como puede caer 'a' también 's'"
- "por la serie de secuencia es consecutiva"

- “debido al muestreo nunca se considera (s), así que el resultado será (a).

La respuesta correcta es F, podemos concluir que un alto porcentaje respondió correctamente y de acuerdo a su justificación considera la independencia de cada lanzamiento. Cabe señalar que ninguno de los alumnos escribió algo relacionado con el término independencia. Vea la gráfica 3.2 la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:




**Gráfica 3.2**

Con respecto al reactivo:

> **Se lanza 6 veces una moneda.**
>
> **Afirmación: La secuencia “a s a s s s” es más probable que haya sucedido que la secuencia “s s s s s s”** V F
>
> **Justifica tu respuesta:**

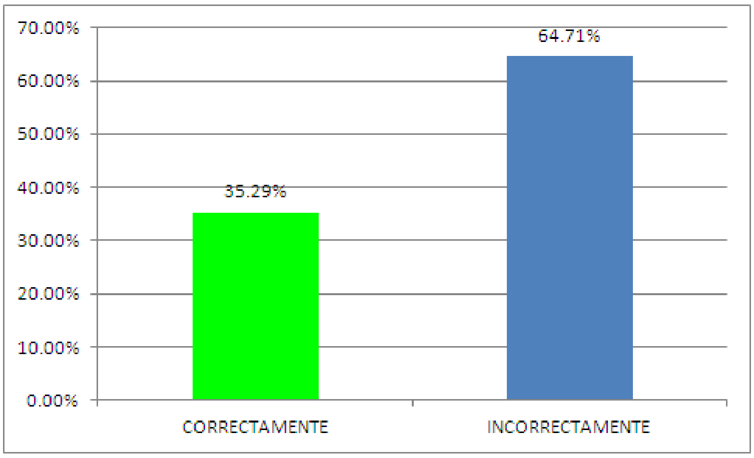
El 64.71% (22 de 34) contestó V y algunas justificaciones de la respuesta que proporcionaron se mencionan a continuación de manera textual:

- “Si porque en la secuencia ‘ssssss’ no se toma en cuenta la probabilidad de que salga ‘a’”.
- “Por lo general, siempre salen aleatorias las combinaciones”.
- “Porque sería mas complicado que caigan 6 soles seguidos”.
- “de forma comparativa es menos probable un lanzamiento perfecto en (s)”.

Por otro lado, el 35.29% (12 de 34) contestó F y algunas justificaciones proporcionadas se mencionan a continuación de manera textual:

- “si la moneda es lanzada aleatoriamente los dos casos tienen el mismo porcentaje de probabilidad”.
- “es tan probable como la segunda, ambas pueden ocurrir”.
- “porque es una secuencia aleatoria”.
- “Tienen la misma probabilidad porque es algo azaroso”.

La respuesta correcta es F, podemos concluir que un alto porcentaje respondió incorrectamente y considera el hecho de encontrar cierto patrón dentro de la segunda secuencia como menos probable. Vea la gráfica 3.3 la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:




**Gráfica 3.3**

Con respecto al reactivo:

| |
|---|
| **Considera el juego del “melate”, donde en cada sorteo hay una combinación ganadora de 6 números:** |
| **Afirmación: Es más probable que la combinación ganadora sea 4, 5, 18, 12, 15, 33 que la combinación 1, 2, 3, 4, 5, 6** V F |
| **Justifica tu respuesta:** |

El 67.65% (23 de 34) contestó V y algunas justificaciones proporcionadas se mencionan a continuación de manera textual:

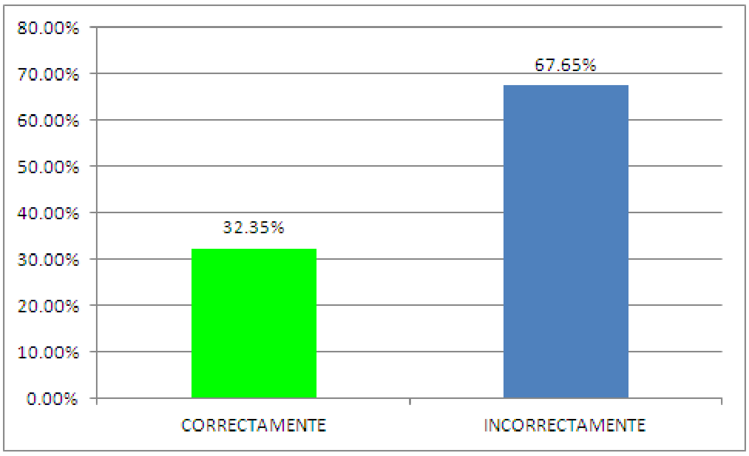
- “Por que no son números consecutivos”.

- “es poco probable que sean números consecutivos”.
- “los valores son más diferentes y mas probables”.
- “por que es mas aleatorio y variable la posibilidad”.
- “Como son consecutivos tienen menos probabilidad”.

El 32.35% (11 de 34) contestó F y algunas justificaciones proporcionadas de su respuesta se mencionan a continuación de manera textual:

- “cualquiera puede salir”.
- “No podemos preveer la combinación que saldrá”.
- “no se sabe lo que puede salir”.
- “Son números al azar”.
- “como son un gran numero de numeros la primera combinación es aleatoria por lo cual es más probable”.

La respuesta correcta es F, de acuerdo a la justificación proporcionada podemos concluir que un alto porcentaje respondió incorrectamente y considera el hecho de encontrar cierto patrón dentro de la segunda secuencia como menos probable. Vea la gráfica 3.4 la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:




**Gráfica 3.4**

Con respecto al reactivo:

> **Considera el juego del "melate", donde en cada sorteo hay una combinación ganadora de 6 números:**
>
> **La combinación 12, 17, 24, 29, 32, 36 nunca ha salido como ganadora y todas las demás combinaciones ya lo han sido.**
>
> **Afirmación: Dicho lo anterior, la combinación tiene mayor probabilidad de ser la ganadora que todas las demás** $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
>
> **Justifica tu respuesta:**

El 23.53% (8 de 34) contestó V y algunas justificaciones proporcionadas se mencionan a continuación de manera textual:

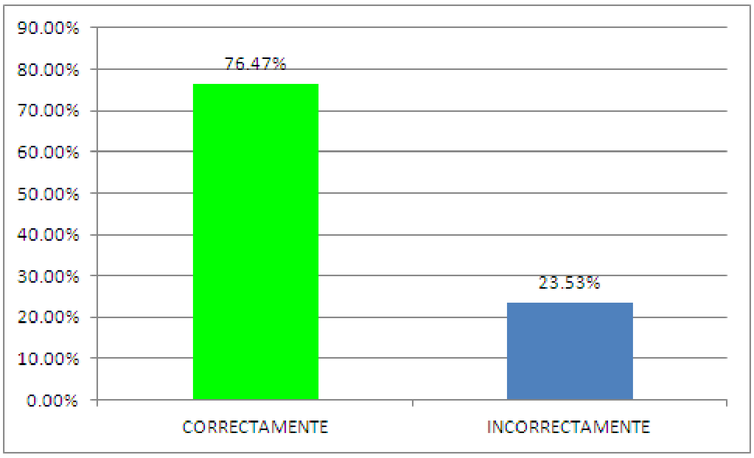
- "porque es muy probable porque las demás ya salieron y esta aún tiene su oportunidad".
- "lleva una serie consecutiva".
- "por que nunca ha salido la combinación".
- "Si porque es la única que faltaría".

Por otro lado, el 76.47% (26 de 34) contestó F y algunas justificaciones proporcionadas se mencionan a continuación de manera textual:

- "por que el sorteo es aleatorio siempre".
- "No hay nada seguro".
- "todos tienen la misma posibilidad".
- "Tienen la misma probabilidad".
- "No influye en que solo falte por salir esa, puede salir cualquiera".

La respuesta correcta es F, podemos concluir que un alto porcentaje respondió correctamente y considera a cada resultado de los sorteos, independiente.

Cabe señalar que ningún alumno mencionó la palabra independiente. Observe la gráfica 3.5, la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:




**Gráfica 3.5**

Con esto, podemos concluir que en general los alumnos no tienen ideas erróneas respecto al concepto de aleatoriedad y de independencia, pero sí considero que hace falta proporcionar el concepto para que lo usen en sus justificaciones posteriores.

El cuestionario de evaluación diagnóstica aplicado podrá consultarlo en la sección de anexos, correspondiendo al número 2.

### 3.4 Diseño de las sesiones

Para el diseño de las sesiones, se consideró:

- Los elementos didácticos mencionados en el capítulo II.
- La conclusión y consideración obtenidas del instrumento de evaluación diagnóstica.

El ambiente de enseñanza-aprendizaje propiciado durante la implementación de la propuesta didáctica fue el sugerido por el NCTM (2000); el cual señala: “La excelencia en la educación matemática requiere igualdad: grandes expectativas y sólido apoyo para todos los estudiantes” (p.12).

El éxito de la propuesta didáctica dependía de considerar todos y cada uno de los elementos expuestos en el capítulo II, por esa razón, se realizó en cada momento una evaluación formativa, la cual consistió básicamente en la observación y en cuestionamientos hacia los alumnos, respetando a cada momento, sus respuestas, ideas y ejemplos que proporcionaban para explicar algo.

En cada sesión se propuso un tiempo estimado para la realización de la misma, se mencionaron los aprendizajes que se pretenden obtener y las instrucciones para que el alumno las lleve a cabo.

Las sesiones estuvieron diseñadas para utilizar los conocimientos de las anteriores, es decir, la sesión dos, requería de los conocimientos adquiridos en la uno, y así, en la sesión ocho, los alumnos ya requerían de los conocimientos adquiridos en las siete anteriores.

### 3.4.1 Aprendizajes abordados por sesión

A continuación se muestran el o los aprendizajes que se pretendieron alcanzar en cada una de las sesiones. Vea la tabla 3.1:

| Número de sesión | Aprendizajes que se pretenden alcanzar, que el alumno: |
|---|---|
| **1** | Diferencie entre fenómeno aleatorio y fenómeno deterministas y comprende porque la probabilidad tiene valores entre cero y uno. |
| **2** | Conozca los enfoques de probabilidad para determinar la probabilidad de un evento. |
| **3** | Construya y describa el espacio muestral; que el alumno represente eventos a partir de enunciados. |
| **4** | Calcule probabilidades utilizando el enfoque clásico y que perciba que la probabilidad obtenida con el enfoque frecuencial se aproxima cada vez más al valor teórico conforme el número de ejecuciones del experimento aumenta. |

| | |
|---|---|
| **5** | Calcule probabilidades utilizando técnicas de conteo. |
| **6** | **Represente y obtenga probabilidades de eventos compuestos, utilizando diagramas de Venn y tablas de doble entrada.** |
| **7** | **Calcule probabilidades condicionales y de eventos independientes, utilizando diagramas de Venn, tablas de doble entrada, expresiones matemáticas y diagramas de árbol.** |
| **8** | **Refuerce el Cálculo de probabilidades condicionales y de eventos independientes, utilizando diagramas de Venn, tablas de doble entrada, expresiones matemáticas y diagramas de árbol.** |

**Tabla 3.1**

Los aprendizajes de las sesiones 6, 7 y 8 están impresos con letra más "negrita" debido a que con en ellas se espera obtener los aprendizajes que conciernen en la presente tesis. En las sesiones anteriores –de la uno a la seis- se abordan temas con los cuales se obtendrán aprendizajes y conocimientos necesarios para lograr que los alumnos calculen probabilidades de eventos compuestos por medio de distintos registros de representación.

### 3.5 Aplicación de la propuesta didáctica

En esta etapa de la investigación: la aplicación de la propuesta didáctica, se utilizó el grupo experimental antes señalado habiendo una gran disposición para llevarla a cabo; en general, los alumnos mostraron un gran interés y curiosidad por la forma en la cual se iba a proceder.

A continuación menciono lo sucedido en cada una de las sesiones en las que se aplicó la propuesta didáctica:

3.5.1 Descripción de lo sucedido durante la aplicación de la Sesión 1

Antes de comenzar con la propuesta didáctica, el profesor se presentó ante el grupo experimental, comentó sobre la idea de trabajar con ellos el tema de Probabilidad, que conforma la Unidad 3 de la asignatura de Estadística y Probabilidad, con lo que no manifestaron molestia alguna; también comentó sobre la idea de “romper” con el esquema de la enseñanza tradicional y empezar a diseñar sesiones que involucran el trabajo en equipo. El profesor empezó a repartir a cada uno de los alumnos las hojas impresas, las cuales conformaban las actividades a realizar (Sesión 1). La Sesión 1 se conformó en tres partes, las cuales se trabajaron en equipo de dos personas. Durante la sesión, el profesor constantemente realizó la evaluación formativa, observando a cada uno de los alumnos y escuchando sus argumentos; para esta actividad no hubo necesidad de intervenir con cuestionamientos, ya que, los alumnos no tuvieron problema para desarrollarla. La primera parte de la sesión fue una actividad diseñada para abordar los conceptos de fenómenos deterministas y aleatorios, fue una actividad de trabajo en equipo. Se proporcionaron los conceptos de fenómeno aleatorio y determinista, algunos ejemplos y se propuso un listado de fenómenos para que el alumno identifique a qué tipo de fenómeno correspondían cada uno de ellos. Ejemplo de enunciados que conformaron dicho listado son: Valor del peso en la bolsa mexicana de valores para el día de mañana, cuya respuesta correcta es: aleatorio; el lado de encima al dejar caer una moneda en donde ambos lados son águilas, cuya respuesta correcta es: determinista; cabe mencionar, que un porcentaje considerable de alumnos en este último enunciado que se propone de ejemplo, contestó Aleatorio, siendo una respuesta incorrecta, posiblemente la razón de ello, es en no leer cuidadosamente el enunciado y basarse únicamente en la idea de la moneda común (un sol, un águila). Para reafirmar dichos conceptos, se solicitó a los alumnos proporcionar dos fenómenos aleatorios y dos deterministas, con lo que manifestaron no tener problemas. En la parte II, se explicó lo relacionado con los fenómenos deterministas a los cuales se les adjudica la probabilidad de ocurrencia de uno y también se les denomina eventos seguros, se proporcionó un ejemplo de este tipo de eventos y se solicitó que proporcionaran otro ejemplo. Se explicó que a los eventos se les llama imposibles mencionando que son aquellos en donde tenemos la seguridad de no ocurrencia y a los cuales les adjudicamos la probabilidad de cero. Se proporcionó un ejemplo y se solicitó proporcionaran otro.

En la parte 3 de la sesión se mostró la escala de probabilidad de los eventos probabilísticos, la cual presenta Larson (1996), dicha escala se utilizó para que los alumnos adjudicaran probabilidades a frases como: “es poco probable”, “imposible”, “seguro”; de manera inversa también, es decir, se les solicitó adjudicaran la frase adecuada a la probabilidad del evento propuesto. Otro tipo de ejercicios propuestos en esta parte, fueron los relacionados a la identificación de valores apropiados o inapropiados para la probabilidad de ciertos eventos; por ejemplo, se presentaron los siguientes enunciados: Ya que no hay nubes. La probabilidad de que hoy llueva más tarde es de $-0.90$, a lo que la mayoría de los alumnos respondieron con algo semejante a: es un valor inapropiado de probabilidad debido a que la escala de probabilidad es de $0$ a $1$. Otro ejemplo de este tipo de ejercicios es: La probabilidad de que un abogado gane un caso es de $0.30$ y la probabilidad de que lo pierda es cinco veces más alta, a lo que la mayoría de los alumnos respondieron correctamente con algo semejante a: La suma de las probabilidades de ganar y perder excede a uno, por lo tanto son valores inapropiados de probabilidad. Ante esta situación, los alumnos se mostraron interesados y mostraron estar cómodos trabajando en equipo; algunos de ellos le comentaron al profesor sentirse satisfechos con el tipo de ejercicios propuestos, ya que, hablaban de contextos que se relacionan con su vida cotidiana.

Después de que las hojas impresas que conforman la Sesión 1 fueron entregadas al profesor, se realizó una actividad grupal, para comentar respuestas, dudas y sugerencias. Las respuestas fueron comentadas con la participación de todos los alumnos.

La sesión 1 se presenta en la sección de anexos y corresponde al anexo número 3.

3.5.2 Descripción de lo sucedido durante la aplicación de la sesión 2

La sesión 2 fue diseñada para que los alumnos conozcan y comprendan los tres enfoques de probabilidad. Consistió en un conjunto de actividades de trabajo en equipo, las cuales se proporcionaron en hojas impresas a cada uno de los equipos conformados por dos alumnos. En esta sesión, el aprendizaje que se pretendió obtuvieran los alumnos es que: Conozca los enfoques de probabilidad para determinar la probabilidad de un evento.

En primer lugar se recurrió a la información que utiliza Larson (1996) para explicar el enfoque clásico de probabilidad, considerando lo que Laplace (1988) menciona como Primer Principio del cálculo de probabilidades “El primero de estos principios es la definición misma de probabilidad, que, como hemos visto, es la razón entre el número de casos favorables y el de todos los casos posibles” (p.31), en donde proporciona la forma de obtener la probabilidad más que la definición. Se explicó, por medio de preguntas inducidas, la razón por la que la probabilidad de un evento, mínimo puede tomar el valor de cero y máximo el valor de uno. Se preguntó, respecto al nombre de este tipo de eventos.

El enfoque de probabilidad como frecuencia relativa fue tomado de Díaz y otros (1987) y al proporcionarlo se preguntó al alumno sobre la manera de obtener la frecuencia relativa, ya que en la primera unidad del curso ya se había calculado. Se pidió a los alumnos realizar una actividad propuesta por Díaz y otros (1987), la cual consistió en lanzar una moneda cien veces y registrar los soles en un dibujo de una pista de carreras y las águilas en otra. Previamente se les preguntó ¿Cuántos soles esperarías?, a lo que la mayoría de los alumnos respondieron: 50. Después de efectuado el experimento, se preguntó sobre el número de cuatros que esperarían obtener al lanzar un dado común y corriente trescientas veces, a lo cual un alto porcentaje respondió acertadamente. La siguiente actividad de la sesión se tituló “Extracción de bolas”, en la que se colocaron dentro de una bolsa una bola roja y una verde. Antes de realizar cualquier manipulación con el material se preguntó ¿Piensas que es más fácil obtener el color verde que el rojo? A lo que la mayoría respondió con algo semejante a “No, tienen la misma probabilidad”. Se les solicitó dentro de la actividad, realizaran 20 extracciones –con reemplazo- y anotarán el resultado de cada extracción- hubo necesidad de explicar en qué consiste la extracción con reemplazo. Los alumnos desarrollaron sin ningún problema el experimento y se preguntó ¿Qué color había resultado más? A lo que todos los equipos contestaron: rojo. Y también se preguntó ¿Podrán adivinar el color que saldrá en la próxima extracción? Esto con la finalidad de encontrar posibles confusiones con respecto a los resultados obtenidos, pero, sorprendentemente, el 100% de los alumnos contestó "no" a la segunda pregunta. En la siguiente parte de la actividad se solicitó introducir en una bolsa –previamente proporcionada por el profesor junto con algunas bolas de color-, 2 bolas rojas y 1 verde, y se preguntó ¿Crees que ahora sea más fácil obtener rojo, o por el contrario, crees que es más fácil obtener verde? A esta pregunta todos respondieron "rojo". Se solicitó efectuar 30 extracciones y registrar los resultados. Una vez realizado el experimento, se mostró un esquema que representaba una bolsa que contenía una bola verde y una bola roja, otro representaba una bolsa que contenía una bola verde y 2 rojas, otro representaba una bolsa que contenía una bola roja y dos verdes y un último esquema que representaba una bolsa con 2 bolas rojas y 2 verdes; con ellos, se formularon 5 enunciados para que contestaran F (falso) o V (verdadero) a los enunciados siguientes: "Es más fácil obtener una bola roja en la primera bolsa descrita que en la última descrita"."Es más fácil obtener una bola roja en el inciso b que en el d", (los incisos se refieren a los esquemas descritos anteriormente). En general, los alumnos contestaron acertadamente esta serie de preguntas, que en estos dos casos, las respuestas correctas son: F y V, respectivamente.

Una vez terminada esta actividad, se definió el enfoque de probabilidad subjetiva propuesta por Canavos (1984). Se brindaron ejemplos de cuando hacemos uso de ella y se solicitó a los alumnos brindaran otro. Después los alumnos comenzaron a realizar una actividad titulada: ¿Qué creen que vaya a ocurrir?, la cual consistió en relacionar expresiones como imposible, casi imposible, entre otras; situaciones azarosas y valores que representan probabilidades; después de esto, los alumnos completaron un informe y redactaron un informe completo sobre su calificación y la de sus compañeros, volvieron a usar las frases anteriormente utilizadas, valores que representaron probabilidad y enunciados que involucraban calificaciones.

Al concluir la sesión y con la finalidad de evaluar el conocimiento adquirido se realizó un cuestionario relacionado con estos tres enfoques de probabilidad, se utilizó una ilustración de personajes conocidos por ellos: “Los Simpsons”, en donde se mostró una situación en la que se hizo uso de los tres enfoques. Los alumnos contestaron preguntas formuladas de acuerdo a la ilustración y las actividades realizadas en las sesiones 1 y 2. En general, los alumnos contestaron satisfactoriamente el cuestionario y mostraron comprensión y diferenciación de los tres enfoques de probabilidad. Tanto la sesión 2 como el instrumento de evaluación de esta sesión, se presentan en la sección de anexos, correspondiendo respectivamente al anexo número 4 y 5.

3.5.3 Descripción de lo sucedido durante la aplicación de la sesión 3.

Esta sesión consistió en un conjunto de actividades de trabajo en equipo, las cuales se proporcionaron en hojas impresas a cada uno de los equipos conformados por dos alumnos. Esta sesión constó de cinco partes y fue diseñada para que el alumno aprenda a describir y construir el espacio muestral; así como para que represente eventos a partir de enunciados.

En la primera parte se propusieron experimentos como lo son, el lanzamiento de dados y monedas, y a partir de ellos se construyó el espacio muestral, representándolo por medio de símbolos, tablas de doble entrada y diagrama de árbol, siendo esta la primera ocasión en la que se hace uso de ellos. En la parte II de la sesión se definió un espacio muestral, algunos eventos, el alumno obtuvo probabilidades y definió algunos eventos dados los elementos que lo conformaban.

En la parte 3, titulada “Bolas enumeradas”, se utilizó una actividad propuesta por Díaz y otros (1987), en la que se utilizó: una bolsa y bolas enumeradas del 1 al 5, para lo cual el alumno realizó el siguiente experimento: Agitó las bolas dentro de la bolsa y tomó una sin mirar, inmediatamente después anotó el número obtenido; repitió diez veces la prueba volviendo cada vez a introducir la bola a la bolsa. Se le solicitó los elementos del espacio muestral del experimento descrito.

En la parte IV, se utilizó otra actividad sugerida por Díaz y otros (1987), en la cual se usaron ruletas hechas con cartulina con secciones denominadas R, H, A, entre otras, un clip al que se hizo girar y se solicitó al alumno experimentará haciendo girar la ruleta y calculará algunas probabilidades de eventos compuestos utilizando el enfoque clásico, en donde debemos aclarar, no se hizo uso de la simbología correspondiente para denotar eventos compuestos, esto correspondió al primer acercamiento a dichos eventos.

En la parte V -la última-, se utilizó una actividad sugerida por Mercado Martínez (comunicación personal, septiembre 12, 2012) titulada “Chicos y Grandes”, en la cual se explicaron las reglas y el proceder del juego. Después se realizaron algunas preguntas relacionadas con el juego y a los conceptos hasta ese momento vistos, por ejemplo se preguntó: ¿a qué número en particular le apostarías? Y ¿Por qué?, ¿Cuál es el espacio muestral del juego?, ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número chico?, etc. Los alumnos en general, no tuvieron problema alguno en responder a las preguntas formuladas.

El lector podrá consultar la sesión 3 en la sección de anexos correspondiendo al anexo número 6.

<u>3.5.4 Descripción de lo sucedido durante la aplicación de la sesión 4.</u>

Para esta sesión se proporcionaron hojas impresas que contenían las actividades a realizar para conformar la sesión, la cual tuvo como finalidad que el alumno calcule probabilidades utilizando el enfoque clásico y percibir que la probabilidad obtenida con el enfoque frecuencial se aproxima cada vez más al valor teórico conforme el número de ejecuciones del experimento aumenta. Constó de dos partes, en donde la primera parte de la sesión, se retomaron algunos ejercicios anteriormente resueltos y principalmente el alumno calculó probabilidades de eventos simples, como por ejemplo: la probabilidad de obtener exactamente un águila, obtener a lo más 2 soles, etc. Se aprovechó la descripción del experimento para preguntar la probabilidad de un evento imposible, con lo que en general, los alumnos respondieron satisfactoriamente, respondiendo cero como probabilidad de los eventos imposibles.

En la segunda parte de la sesión, titulada “Bolas enumeradas” los alumnos trabajaron con tres bolas enumeradas, con las cuales experimentaron, obtuvieron espacios muestrales, calcularon probabilidades bajo el enfoque teórico y frecuencial. En general, los alumnos se mostraron interesados y comprendieron la práctica, para este momento los alumnos ya estaban más acostumbrados a trabajar en equipo y esperaban menos del profesor y más de sus compañeros. El profesor, les manifestó su satisfacción por el trabajo desarrollado durante la sesión, aunque hubo necesidad de que el profesor interviniera para explicar el llenado de tablas relacionadas con llevar el registro de las frecuencias relativas, pero eso se debió a la escasa especificación o explicación de su llenado.

De nuevo, para esta sesión se recurrió a las propuestas de Díaz y otros (1987).

La sesión 4 se presenta en la sección de anexos y corresponde al anexo número 7.

<u>3.5.5 Descripción de lo sucedido durante la aplicación de la sesión 5.</u>

Constó de cinco partes y se diseñó para que el alumno calcule probabilidades utilizando técnicas de conteo. Se realizó mediante trabajo en equipo (dos personas conformaron cada uno de los equipos).

En la primera parte de la sesión, titulada “El estacionamiento”, se utilizó una actividad de Batanero (2001), en la cual se presenta una situación en las que se debe de recurrir a las técnicas de conteo. Se utilizó un esquema que representaba cinco cajones para estacionar autos y se proporcionó parcialmente un diagrama de árbol para que el alumno represente todas las formas posibles de utilizar dos cajones de los cinco disponibles. Este correspondería al primer acercamiento con este registro de representación. Después de esta situación, se solicitó al estudiante representar por medio de un diagrama de árbol, todas las formas posibles de utilizar tres cajones de los cinco disponibles.

En la parte II de la sesión, titulada “Los paraguas” se utilizó un contexto, también recuperado de Batanero (2001), en la cual se sugiere al alumno utilizar un diagrama de árbol para obtener ciertas probabilidades. La situación presentada en esta sesión se describe a continuación:

“Una señora ha invitado a tres amigas a tomar el té. Como llovía bastante, cada una de las tres invitadas trajo un paraguas que colocaron en la entrada de la casa. Terminada la merienda, la dueña de la casa ha dado un paraguas, al azar, a cada una de sus amigas. De los siguientes eventos, ¿Cuál crees que sea el más fácil que ocurra?

- Cada una de las señoras recibió el paraguas correcto.
- Todas recibieron un paraguas cambiado.
- Sólo una de las visitantes recibió su propio paraguas”.

Se sugirió utilizar un diagrama de árbol para contestar a la pregunta. Los alumnos pudieron contestar acertadamente.

Después se solicitó simular el reparto de los paraguas, estos, representados por tres hojas iguales dobladas, en donde una hoja tenía escrito la letra A, otra la B y otra la C. Cada alumno tuvo asignada una letra, es decir, uno de los tres alumnos fue dueño del paraguas A, otro del B y otro del C. Revolvieron bien las hojas, de tal forma que nadie supo que letra tenía cada una de las hojas, repartieron una a cada quien y observaron si les “tocó” su letra asignada. Realizaron el experimento 30 veces y registraron los resultados y la frecuencia relativa.

En la parte 3 de la sesión, se solicitó realizar una serie de ejercicios relacionados con el uso de técnicas de conteo –como el diagrama de árbol- para obtener el número de elementos que reúnen ciertas características. Algunas de las preguntas hechas en esta serie de ejercicios son las siguientes:

- ¿De cuántas formas se pueden colocar en una estantería 3 libros?
- Sin repetir dígitos, ¿Cuántos números se pueden formar con los dígitos 2, 3, 4, 5?

En la parte IV de la sesión se utilizó una actividad de Batanero (2001) para introducir el concepto de combinación, la actividad se tituló ¿Cuántas rectas se pueden trazar?, la cual consistió en que el alumno indicará cuántas rectas pasan por 2 puntos de 5 que se habían colocado, los alumnos trabajaron entretenidos y contestaron sin ningún problema algunas preguntas relacionadas con las combinaciones.

La parte V de la sesión, consistió en una serie de ejercicios que los alumnos contestaron sin ningún problema. Ejemplos de estos ejercicios son:

Ana tiene que realizar un examen sobre 10 temas, pero solo ha estudiado 8. El examen consta de 2 temas.

- ¿Qué probabilidad de aprobar tiene si ha de contestar bien a los 2? ______
- ¿Y si basta con responder 1?_______

En una reunión de 5 presidentes, cada uno de ellos saludo de mano a los demás, ¿Cuántos saludos de mano se realizaron? _______

La sesión 5 se presenta en la sección de anexos y corresponde al anexo número 8.

3.5.6 Descripción de lo sucedido durante la aplicación de la sesión 6.

Constó de siete partes y se diseñó para que el alumno represente y obtenga probabilidades de eventos compuestos utilizando diagramas de Venn y tablas de doble entrada, es decir, por medio de por lo menos dos registros de representación. Las actividades se propusieron bajo trabajo en equipo (tres personas conformaron cada uno de los equipos).

Los alumnos se mostraron interesados y comprendieron la práctica. Aunque en la sesión 4, se explicó el llenado de unas tablas relacionadas con probabilidades bajo un enfoque frecuencial, de nuevo, hubo necesidad de intervenir para explicar su llenado, no obstante, el profesor se sintió satisfecho con el trabajo desarrollado por los alumnos. La práctica se realizó en aproximadamente 125 minutos.

Las actividades de esta sesión, se basaron en la premisa de que al hacer uso de dos representaciones o más para la obtención de probabilidades de eventos compuestos, el alumno tendrá una mayor argumentación del por qué realiza ciertos procedimientos para la obtención de los mismos (Duval, 1999).

En la primera parte se explicó la lógica de la *o incluyente* y se ejemplificó para ello, la información proporcionada a los alumnos fue de manera escrita:

**Parte I.** Antes de comenzar, debemos aclarar que en matemáticas y en particular en probabilidad trabajamos con la lógica de la o incluyente, es decir que al referirnos a dos características o más, puede ocurrir que se satisfaga 1, 2 ó más. Por ejemplo, esto sucede cuando decimos, "debe ser estudiante o trabajador", y debemos entender que puede reunir 1 o inclusive las dos características.

Debe de quedar claro lo anterior, ya que habitualmente, se usa, la lógica del o exclusivo, es decir, es uno o el otro, pero no pueden ser los dos. Por ejemplo, cuando decimos es de primero o de segundo, queda claro que es imposible que puedan ser las dos.

Antes de la obtención de probabilidades de eventos compuestos, se mostró a los alumnos la simbología utilizada para representarlos, para ello, se diseñó una actividad, la cual consistió en hacer uso de "papelitos" de colores enumerados; con ellos, se trabajó para familiarizarse con la simbología de *y*, *o* y *no*; y la analogía existente para los símbolos de intersección, unión y complemento de la teoría de conjuntos. Se definieron algunos eventos como por ejemplo:

$$A = \{papelito\ amarillo\}$$

$$M = \{papelito\ con\ número\ escrito\ mayor\ a\ 7\}$$

$$I = \{papelito\ con\ número\ escrito\ impar\}$$

$$R = \{papelito\ rojo\}$$

La actividad consistió en tomar los papelitos de color rojo y también los papelitos con número impar. Se les preguntó cuántos habían tomado. Se mostró un esquema que representaba un diagrama de Venn, el cual contenía un círculo que representaba el evento I y otro que representaba en evento R. Se pidió a los alumnos observaran que en el diagrama de Venn se estaba representando a los eventos y a la urna. Después se les solicitó escribieran en el lugar correspondiente dentro del diagrama, el nombre de cada uno de los papelitos que tomaron (por ejemplo, el papelito rojo con el número 11 se llama r11). Se les preguntó en qué lugar habían escrito el nombre de los papelitos que son rojos y tienen escrito un número impar, a lo que la mayoría respondió algo semejante a “en medio de los dos círculos”. También se les solicitó escribieran el nombre de los papelitos que ni eran rojos ni tenían escrito un número impar, es decir, a los que no tenían ninguna de estas dos características, a lo cual también se les preguntó, en que región del diagrama habían escrito su nombre, a lo que cada uno de los alumnos respondió algo semejante a “afuera de los círculos”. Por último, y con la finalidad de tener una idea de lo que los alumnos habían aprendido sobre las regiones en un diagrama de Venn, se les solicitó observaran que efectivamente hayan dejado fuera del círculo que representaba el evento papelito rojo siete nombres de papelito, dado que ese número de papelitos eran los no rojos.

Se dio a conocer la relación de la simbología, la operación lógica y las palabras que se usan para formar a los eventos compuestos. En general, se trabajó para dar a conocer lo indicado en la tabla 3.2.

| Nombre | Símbolo lógico | Conectivo lógico |
|---|---|---|
| **Unión** | $\cup$ | O |
| **Intersección** | $\cap$ | Y |
| **Complemento** | $\bar{R}$ | no ocurre R |

**Tabla 3.2**

Se solicitó a los alumnos representaran ciertos eventos utilizando la simbología de los conectores lógicos y por último se solicitó realizaran el experimento aleatorio que consistía en revolver los papelitos dentro de una bolsa y tomarán sin ver un papelito, anotaran el nombre del papelito obtenido y lo regresaran a la bolsa para efectuar una siguiente extracción. Dicho experimento se efectuó

25 veces, con el fin de percibir que la probabilidad obtenida con el enfoque frecuencial se aproxima cada vez más al valor teórico conforme el número de ejecuciones aumenta. A continuación se muestra la parte II proporcionada a los alumnos:

**Parte II.** Utilicen una bolsa que funcione como una urna para contener:

- Un papelito amarillo que tenga escrito el número 13→(a13)
- Un papelito amarillo que tenga escrito el número 2→ (a2)
- Un papelito verde que tenga escrito el número 19→ (v19)
- Un papelito verde que tenga escrito el número 5→ (v5)
- Un papelito blanco que tenga escrito el número 9→ (b9)
- Un papelito blanco que tenga escrito el número 10→ (b10)
- Un papelito blanco que tenga escrito el número 4→ (b4)
- Un papelito rojo que tenga escrito el número 6→ (r6)
- Un papelito rojo que tenga escrito el número 5→ (r5)
- Un papelito rojo que tenga escrito el número 11→ (r11)
- Un papelito rojo que tenga escrito el número 12→ (r12)
- Un papelito rojo que tenga escrito el número 10→ (r10)

¿Cuántos papelitos tienen en el recipiente? ______ Recuerden que es importante saberlo para obtener probabilidades de eventos.

Vamos a definir también, los siguientes eventos:

A= {papelito amarillo} = { },

B = {papelito blanco}= { },

V = {papelito verde} = { },

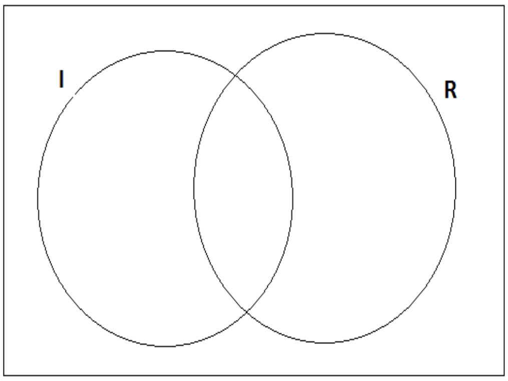
R = {papelito rojo} = { },

M = {papelito con número escrito mayor a 7} = { }

I = {papelito con número escrito impar} = { }

**Tomen** los papelitos de color rojo y también **tomen** los papelitos con número impar. ¿Cuántos son? ______

El siguiente diagrama es llamado diagrama de Venn:




Observen que en él se está representando a:

- El evento R
- El evento I
- A la urna

¿Qué está representando a la urna? _________

Escriban en el lugar que le corresponde dentro del diagrama, el nombre de cada uno de los papelitos que tomaron (por ejemplo, el papelito rojo con el número 11 se llama r11)
¿En dónde escribieron el nombre de los papelitos que son rojos y tienen escrito un número impar?___________________________________________________________________

Ahora escriban el nombre de los demás papelitos, es decir a los que ni son rojos ni tampoco tienen un número impar escrito, dicho de otra manera a los que no tienen ninguna de estas dos características ¿En qué región del diagrama escribieron su nombre?___________________

¿Cuántos papelitos no son rojos? ______ Entonces, observen que efectivamente hayan escrito ese número de nombres de papelitos fuera del círculo que representa al evento R.

El evento “papelito rojo **o** con número impar” está conformado por los papelitos que tienen por lo menos una de las dos características, es decir, o es rojo, o tiene escrito un número impar o inclusive es rojo con número impar, es decir tiene las dos características. Dicho evento está representado por la unión de los dos eventos y lo simbolizamos como: $R \cup I$ ¿Cuántos son los elementos de este evento compuesto? _______. Si elegimos al azar de la urna a un papelito, ¿Cuál es la probabilidad de que este sea rojo o con número impar? _________. Con símbolos, ¿Cómo podríamos representar esta probabilidad? ________________.
El evento “papelito rojo **y** con número impar” está conformado por los papelitos que estrictamente reúnen las dos características. Dicho evento está representado por la intersección de los dos eventos y lo simbolizamos como: $R \cap I$ ¿Cuántos son los elementos de este evento compuesto? _______. Si elegimos al azar de la urna a un papelito, ¿Cuál es la probabilidad de que este sea rojo y con número impar? _________ Con símbolos, ¿Cómo podríamos representar esta probabilidad? ________

El evento "papelito que **no** es rojo" está conformado por los papelitos que tengan la característica de no ser rojos. Dicho evento está representado por el complemento del evento R y lo simbolizamos como: $\bar{R}$ ¿Cuántos son los elementos de este evento compuesto? _______. Si elegimos al azar de la urna a un papelito, ¿Cuál es la probabilidad de que este no sea rojo? _________ Con símbolos, ¿Cómo podríamos representar esta probabilidad? ________

En conclusión, podemos decir que la palabra "o" la podemos simbolizar por ____, que en la lógica de conjuntos representa la unión. La "y" la podemos simbolizar por ____, que en la lógica de conjuntos representa la intersección. Y, la palabra "no", la podemos simbolizar por ____, que en la lógica de conjuntos representa el complemento.

Considerando de nuevo el evento $R \cup I$, toma en tus manos los papelitos de este evento, es decir, los que reúnan **por lo menos** 1 de las dos características, ¿Cuántos papelitos son? _____Y si seleccionamos un papelito al azar, ¿Cuál es la probabilidad de $R \cup I$?_______. La probabilidad de la unión de dos eventos puede obtenerse por medio de la siguiente expresión:

$$P(R \cup I) = P(R) + P(I) - P(R \cap I)$$
$$= \_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_$$
$$= \_\_\_\_$$

¿Cuál crees que sea la razón por la que se resta la $P(R \cap I)$? ___________________________
_____________________________________________________________________

Consideren al evento $R \cup I$ y realicen el experimento 25 veces y perciban que la probabilidad obtenida con el enfoque frecuencial se aproxima cada vez más al valor teórico conforme el número de ejecuciones aumenta. La probabilidad teórica es $P(R \cup I) =$ _____

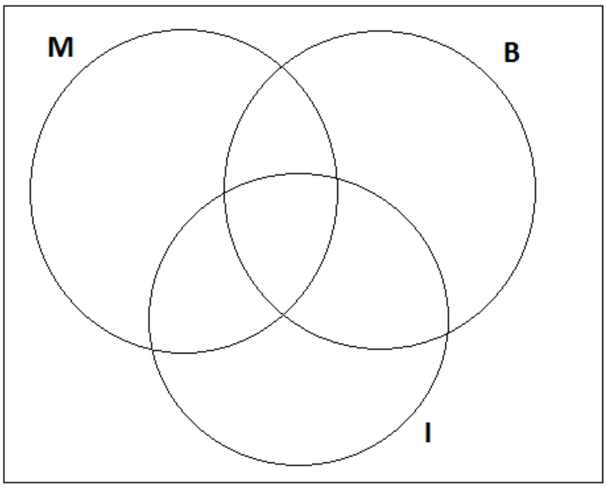
| No. de experimento | No. de veces en que ha ocurrido el evento $R \cup I$ | $P(R \cup I)$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 19 | | |
| 20 | | |
| 21 | | |
| 22 | | |
| 23 | | |
| 24 | | |
| 25 | | |

En la siguiente parte, se trabajó con un diagrama de Venn, el cual contenía representando tres de los eventos definidos. Para ejercitar las regiones dentro de un diagrama de Venn, se les solicitó ubicar el nombre de cada uno de los papelitos en el lugar correspondiente. Después y con la misma finalidad anterior, se les solicitó iluminar de color rosa la región que correspondía a los "papelitos que contengan un número mayor a 7 y que sea número impar y que sean blanco". A su vez, se les solicitó representar por medio de símbolos. Vea la parte 3 proporcionada a los alumnos:

**Parte 3.**

Ahora consideremos los eventos M, B e I, representados en el siguiente diagrama de Venn.




Escriban el nombre de cada uno de los papelitos en el lugar que le corresponda dentro del diagrama de Venn.

Iluminen de color rosa la región que corresponde a los “papelitos que contengan un número mayor a 7 **y** que sea número impar **y** que sean blanco”. Representen lo anterior por medio de símbolos: _____________

Iluminen de color café la región que corresponde a los “papelitos que **no** tengan escrito un número mayor a 7 **y** que **no** tengan un número impar **y** que **no** sean blanco”. Representen lo anterior por medio de símbolos: _______________

Iluminen de color azul la región que corresponde a los “papelitos que sean blancos y que **no** tengan un número impar **y** que **no** sean blanco”. Representen lo anterior por medio de símbolos: ______________

En la siguiente parte, se definió a los eventos mutuamente excluyentes y su representación por medio de un diagrama de Venn. Se solicitó a los alumnos representar, no solo 2 eventos simples, sino hasta 4 de ellos. A continuación se muestra la parte IV trabajada por los alumnos:

**Parte IV.** Ahora consideren los eventos V y A.
¿Cómo simbolizan al evento compuesto V y A? _________ ¿Existen papelitos que reúnan las características de ser verdes y amarillos al mismo tiempo? ______ Si los eventos no comparten elementos, podrán dibujarlos separados dentro del diagrama de Venn. Utilicen el siguiente rectángulo para tal fin.

Cuando los eventos no tienen elementos en común se les llama **eventos mutuamente excluyentes**, y la probabilidad de dicho evento compuesto es ________.
Es decir que $P(V \cap A) = 0$, siendo $V$ y $A$ eventos mutuamente excluyentes.
Representen en un diagrama de Venn a los eventos $R, B, V$ y $M$. Iluminen cada región de diferente color y escriban en cada una de las regiones que se formen dentro del diagrama de Venn lo que representa:

Representen en un diagrama de Venn a los eventos $B, V, M$ e $I$. Iluminen cada región de diferente color y escriban en cada una de las regiones que se formen dentro del diagrama de Venn lo que representa utilizando la simbología:

Para calcular probabilidades de eventos compuestos, es necesario entender la simbología lógica utilizada, realizar la conversión respectiva al lenguaje natural y realizar el proceso inverso, es decir del lenguaje natural a la simbología lógica. La siguiente parte tuvo como finalidad realizar ejercicios relacionados con ello:

**Parte V.** En una evaluación estudiantil del personal docente, $V$ es el evento que un profesor es muy capaz en su área, $D$ es el evento de que aplica pruebas difíciles y $R$ es el evento de que califica en forma estricta, enuncia con palabras las probabilidades que se expresan como:

a) $P(\bar{D})$

______________________________________________________

b) $P(D \cup R)$

______________________________________________________

c) $P(\bar{V} \cap \bar{R})$

______________________________________________________

d) $P(V \cap R)$

______________________________________________________

¿Cómo representarías los siguientes enunciados?

a) No califique en forma estricta.

________________________________

b) No aplique pruebas difíciles pero califique en forma estricta.

________________________________

c) No sea muy capaz en su área y/o no aplique pruebas difíciles.

_______________________________

La parte VI de la sesión, conjunta el uso de distintos registros de representación, el lenguaje natural, el simbólico y los diagramas de Venn:

**Parte VI.** Un profesor realizó una encuesta a todos sus alumnos del CCH Naucalpan para obtener la siguiente información referente al tipo de persona que dicen ser (tranquilo, estudioso o inteligente):

- 20 dicen ser tranquilos únicamente, es decir solo esa característica.
- 15 dicen ser tranquilos y estudiosos pero no inteligentes.
- 5 dicen ser tranquilos, estudiosos e inteligentes.
- 20 dicen ser estudiosos e inteligentes pero no tranquilos.
- 10 dicen no tener ninguna de esas características.
- 55 dicen tener la característica de ser estudioso (no se especifica que tengan esta característica únicamente).
- 38 dicen tener la característica de ser inteligentes (no se especifica que tengan esta característica únicamente).
- 15 dicen ser tranquilos e inteligentes (no se especifica que tengan esas dos características nada más).

Vamos a representar a los siguientes eventos como:

I = {alumno inteligente}

T = {alumno tranquilo}

E = {alumno estudioso}

Para indicar el evento "el alumno es inteligente y estudioso" escribimos $I \cap E$, usando el símbolo de la intersección de conjuntos. Entonces, ¿Cómo indicarías que el alumno tiene las tres características? __________ ¿Sabrías indicar que significan los eventos siguientes?

a) $I \cap \bar{E}$ _________________________________________________________

b) $\bar{T} \cap E$ ____________________________________________________

c) $\bar{E} \cap \bar{I}$ ____________________________________________________

Para simbolizar el evento "el alumno tiene al menos una de las tres características la tiene" escribimos $I \cup T \cup E$, usando el símbolo de la unión de conjuntos.

¿Cómo simbolizas que "el alumno al menos tiene una de estas dos características: Inteligente o Estudioso"? _________

¿Sabrías simbolizar que significan los eventos siguientes?

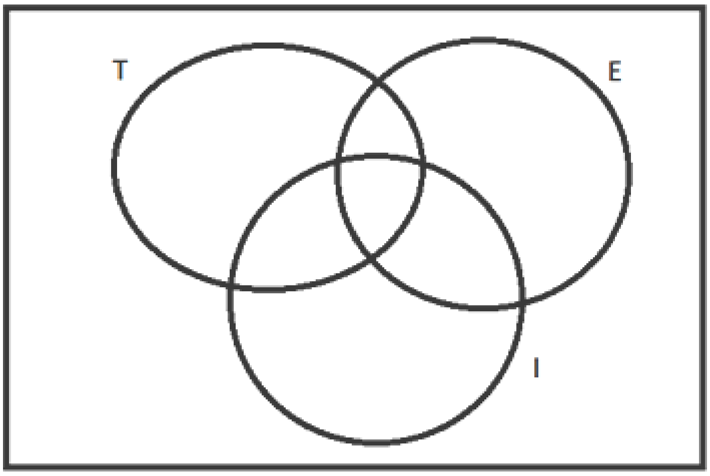
a) $I \cup \bar{E}$ ____________________________________________________

b) $\bar{T} \cup E$ ____________________________________________________

¿Cómo podríamos indicar el evento "no ocurre que el alumno tenga al menos una característica"? ___________

Retomemos la información que se proporciona, si el profesor consideró a todos sus alumnos, ¿Cuántos tiene? ________

Para responder a la pregunta anterior, debemos pensar que algunos alumnos fueron considerados dos o inclusive tres veces, lo cual podría dificultar dar una respuesta. Para ello podemos recurrir a un diagrama de Venn, dicho esquema servirá para representar la información:




Observa en el esquema que un círculo representa al evento $T$, otro al evento $I$ y otro al evento $E$. ¿Qué representa que no estén separados los círculos? ______________________________

¿En qué región del rectángulo, representarías a los 10 alumnos que no tienen ninguna característica?_______________________________________________________________

Uno de los datos que se nos proporcionan como información, es que 55 dicen tener la característica de ser estudioso (nota que no se especifica que tengan esta característica únicamente), lo cual quiere decir que dentro del círculo que representa al evento E, se debe representar en total a 55 alumnos.

Con tus compañeros de equipo, discutan y llenen todas las regiones del diagrama de Venn con el número de alumnos correcto, para contestar de manera acertada a la pregunta: ¿Cuántos alumnos tiene el profesor? ____________

Ilumina de color verde la región $\bar{T} \cap E$

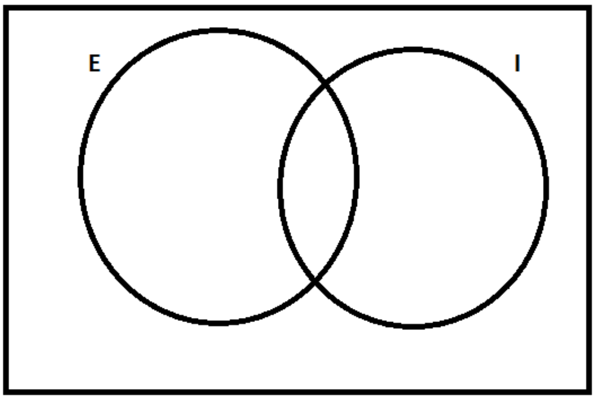
Ilumina de amarillo la región $\bar{T} \cap \bar{E} \cap I$

En la última parte de esta sesión, se introdujo el uso de otro registro de representación, la tabla de doble entrada:

**Parte VII.** Utilizando el diagrama de Venn, él cual fue de gran ayuda para saber el TOTAL de alumnos del profesor, obtén las siguientes probabilidades al seleccionar al azar a un alumno:

a) la probabilidad de que sea tranquilo ____________
b) la probabilidad de que no sea estudioso ___________
c) la probabilidad de que sea inteligente y estudioso ___________
d) la probabilidad de que al menos tenga una de las tres características __________
e) la probabilidad de que no tenga ninguna de esas tres características __________
f) $P(T \cup E)$= ____________
g) $P(\bar{T} \cap E)$=____________
h) $P(\bar{I} \cap \bar{E})$=_____________

Ya sabemos cuántos alumnos tiene el profesor, y consideremos que la característica de ser tranquilo no importa, ¿Cómo quedaría representada la información por medio de un diagrama de Venn?




La información del diagrama anterior, la puedes representar por medio de una tabla de contingencia, llena los espacios correspondientes:

| | I | $\overline{I}$ |
|---|---|---|
| E | | |
| $\overline{E}$ | | |

Si sumamos los alumnos estudiosos y los no estudiosos, ¿Cuántos alumnos debe de haber? _

Elabora una tabla de doble entrada para representar I y T

| | |
|---|---|
| | |
| | |

Elabora una tabla de doble entrada para representar T y E

| | |
|---|---|
| | |
| | |

¿Cuál es $P(T \cap E)$? _________

¿Cuál es $P(T \cup E)$? __________

La sesión 6 se presenta en la sección de anexos y corresponde al anexo número 9.

3.5.7 Descripción de lo sucedido durante la aplicación de la sesión 7.

Actividad diseñada para que el alumno calcule probabilidades condicionales y de eventos independientes, utilizando diagramas de Venn, tablas de doble entrada, expresiones matemáticas y diagramas de árbol.

Esta sesión constó de cinco partes y el aprendizaje que se pretendió alcanzar fue que el alumno: Calcule probabilidades condicionales y de eventos independientes, utilizando diagramas de Venn, tablas de doble entrada, expresiones matemáticas y diagramas de árbol.

En la primera parte de la sesión, se les planteó una posible situación de acuerdo a su edad, con la finalidad de que relacionaran la idea de condición y restricción, y con ello, abordar el hecho de que las condiciones pueden restringir las posibilidades de cualquier situación. Con la misma idea se planteó otra situación hipotética relacionada con sus intereses -como es la calificación de sus asignaturas- para llegar a una mejor comprensión de los eventos condicionales y con ello argumentar el cómo se obtienen probabilidades condicionales. Después, se proporcionó otra situación relacionada con su posible vida cotidiana. –el transporte utilizado para llegar a la escuela-, con ella, se solicitó el cálculo de probabilidades de eventos compuestos y realizando algunas condiciones, el cálculo se solicitó que lo realizaran por medio de diagramas de Venn y tablas de doble entrada. A continuación se muestra lo proporcionado a los alumnos:

**Parte I.**

¿Has sentido que te restringen? ¿Qué te condicionan? Una o inclusive varias condiciones hacen que tus actividades o posibilidades para hacer cosas se limiten; por ejemplo, cuando pides permiso para ir a una fiesta que empezará a las 8 pm y terminará a las 12 pm, en tu casa te lo conceden diciéndote "¡claro puedes ir hijo (a)! Entonces te alegras porque piensas que posiblemente vas a poder hacer varias cosas:

- Bailar hasta 4 horas seguidas.
- Tomar con tus amigos.
- Fumar.
- Ir a tomar un cafecito después de la fiesta.
- Comer botanas hasta reventar.
- Llevar a tu casa a tu amigo(a) después de la fiesta para que se duerma ahí.

Y de manera repentina y haciéndote despertar de tus sueños, quien te da el permiso añade: "… ¡pero te quiero antes de las 11 y sin aliento alcohólico!" Y entonces lo único que posiblemente puedas hacer es:

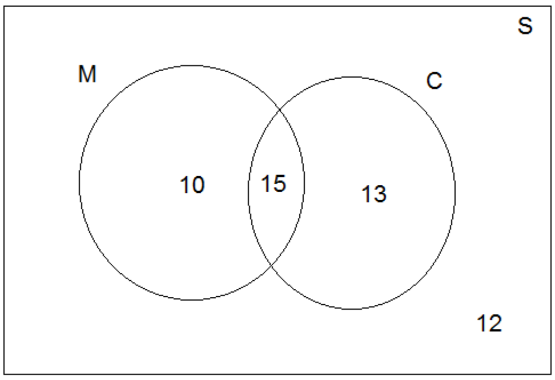
- Bailar, pero ya no 4 horas seguidas y
- Comer botanas hasta reventar.

Tu conjunto de posibilidades se redujo enormemente, ¡No te preocupes, esto les pasa a todos! ¡Inclusive a los espacios muestrales!

Considera la siguiente situación hipotética:
"La calificación de cada uno de los 50 estudiantes (35 son mujeres), será reprobatoria excepto 1. La persona acreedora de esa calificación aprobatoria será seleccionada al azar"

Ana Gabriela es una integrante de ese grupo, ¿Cuál es la probabilidad de que sea la acreedora de la calificación aprobatoria? _____. Pero, si la persona que apruebe tiene que ser mujer ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe Ana Gabriela **dada** esta condición? _____ Bueno, te percataste que al igual que con la situación de la fiesta, hubo una reducción del número de elementos del espacio muestral, que en esta otra situación a un inicio estaba constituido, por ¿Cuántos elementos? _______ y con la condición a ¿cuántos se redujo?_______ .

Ahora consideremos otra situación:
El grupo está compuesto por 50 alumnos, de los cuales 25 de ellos utilizan el metro para llegar a la escuela, 28 combi y 15 ambos. Si seleccionamos a un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que no utilice ninguno de estos dos transportes para llegar a la escuela? Vamos a representar la información por medio de un diagrama de Venn, pero antes, definamos a los eventos M = {Utilice metro}, C = {Utilice combi}. Recuerda que $C \cap M$ simboliza a ¿Qué enunciado? ___________________________________
Y la probabilidad es igual a $P(C \cap M) =$ _____
Entonces, el diagrama de Venn:




a) ¿Cuántos alumnos no utilizan ni metro ni combi para llegar a la escuela? ___
b) ¿Cuántos alumnos utilizan metro o combi para llegar a la escuela? ____

c) ¿Cuántos no toman metro para llegar a la escuela? _____

Simboliza y calcula sus probabilidades:

Podemos también representar la información por medio de una tabla de doble entrada, llena los espacios correspondientes:

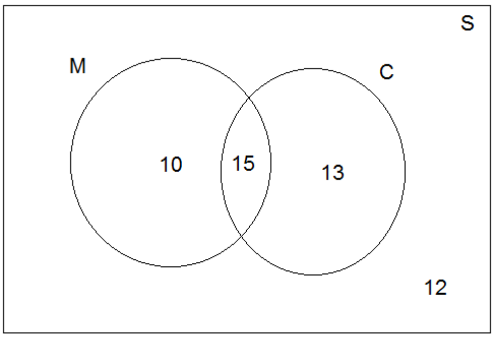
| | $M$ | $\overline{M}$ |
|---|---|---|
| $C$ | | |
| $\overline{C}$ | | |

Puedes observar, que la tabla de doble entrada también es muy útil para calcular probabilidades, ¿podrías calcular las probabilidades anteriores haciendo uso de ella? ____Si seleccionamos a un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice el metro para llegar a la escuela? _________

Con símbolos: _______________

Vamos a condicionar la situación, por ejemplo: si el evento C ocurre, es decir, ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado utilice metro **dado** que utiliza combi para llegar a la escuela? Con la condición dada, el espacio muestral que estaba constituido de 50 alumnos se redujo a ¿cuántos alumnos?____, pues efectivamente, ya que solo ellos son los que reúnen la característica de utilizar combi para ir a la escuela.

Colorea de azul la región del diagrama de Venn que paso la condición, es decir, el círculo que representa al evento C




Realiza lo mismo en la tabla de contingencia, colorea de azul los cuadros que pasaron la condición:

| | M | $\overline{M}$ |
|---|---|---|
| C | | |
| $\overline{C}$ | | |

Con esa condición, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra M, dado C? _______. La anterior probabilidad la podemos simbolizar como $P(M\backslash C)$ y se lee “probabilidad de M dado C” y de acuerdo al contexto de la situación significa “probabilidad de que el alumno seleccionado utilice metro dado que utiliza combi para llegar a la escuela”

¿Cuál será la probabilidad de que **no** ocurra el evento M, dado que C ocurrió?

Es decir, $P(\overline{M}\backslash C)$=________

Observa el diagrama de Venn o la tabla de doble entrada y date cuenta que para obtener este tipo de probabilidades, podemos hacer uso de la siguiente expresión: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Haciendo uso de la expresión corrobora tu resultado:

$$P(\overline{M}|C) = \frac{\boxed{\phantom{xxxx}}}{\boxed{\phantom{xxxx}}}$$

También podemos condicionar la situación por medio del evento M, es decir, el evento M ocurrirá o suponemos que ocurrirá, ¿cuál es la probabilidad de que C dado M? Es decir, $P(C|M) =$_________

**Parte II.**

Vamos a realizar otro ejemplo utilizando el siguiente experimento:

Se lanza un dado, **si** el número es par, ¿cuál es la probabilidad de que sea primo?

La condición es “el número es par”, definimos al evento $A = \{número\ par\} = \{2, 4, \_\}$ y a $B = \{número\ primo\} = \{2, \_\_, 5\}$, por lo tanto $A \cap B = \{2\}$ es decir únicamente el 2 tiene ambas características.

Entonces, utilizando la expresión:

$$P(B \backslash A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Y con diagrama de Venn, ¿cómo representas los posibles resultados?

¿Y con la tabla de doble entrada?

| | |
|---|---|
| | |

Después, se les planteó otros contextos de la vida cotidiana para que con ello obtuvieran probabilidades condicionales, haciendo uso no solo de un registro de representación sino por lo menos de dos de ellos. Se les solicitó, la obtención de probabilidades de eventos compuestos, cuyo contexto fue proporcionado por el lenguaje escrito o natural. Los alumnos obtuvieron dichas probabilidades por medio de diagramas de Venn, tablas de doble entrada e inclusive por medio de las fórmulas matemáticas:

**Parte 3.**

Realiza los siguientes ejercicios:

1. Un vendedor de autos caros tiene 23 clientes de los cuales 17 son millonarios, 8 jubilados, incluidos 4 que también son millonarios. Si seleccionamos al azar a uno de sus clientes, ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente sea millonario dado que es jubilado?

Utiliza la tabla de doble entrada, el diagrama de Venn y en ambos casos coloreen. También utilicen la expresión matemática para obtener el resultado

2. De un grupo de 48 personas que asisten a una fiesta, 30 fuman, 25 consumen bebidas alcohólicas y 10 ni fuman ni consumen bebidas alcohólicas. Al seleccionar a una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que ingiera bebidas alcohólicas **dado** que esta persona sabemos o suponemos que **no** fuma?

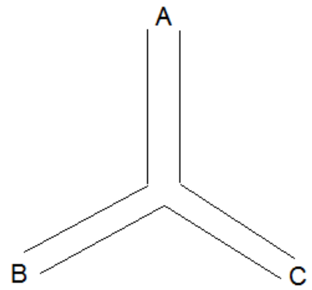
Utiliza la tabla de doble entrada, el diagrama de Venn y en ambos casos coloreen. También utilicen la expresión matemática para obtener el resultado

Por medio, de una actividad diseñada por Batanero (2001) se proporcionó la noción de independencia de eventos:

**Parte IV.**

Bifurcación por canales y laberintos

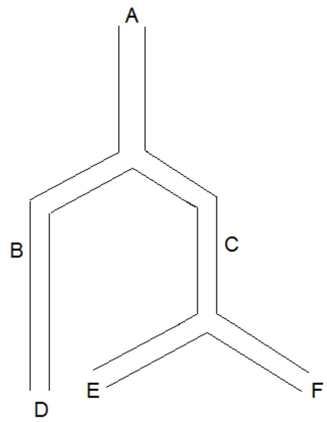
1) Fíjate en la máquina siguiente: Si dejamos caer una bola por la abertura $A$, ésta puede deslizarse hasta caer en $B$ o bien seguir por la derecha hasta ir a $C$.




Si echamos 100 bolas por la abertura: ¿cuántas crees que pasarán, aproximadamente, por cada uno de los orificios $B$ y $C$? _________

¿Cuál será la probabilidad de que, al echar la bola por la abertura, caiga por el canal $B$?

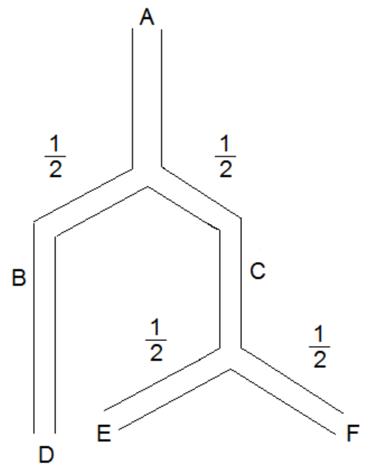
2) Fíjate ahora en la máquina siguiente: Si lanzamos 100 bolas por el orificio $A$, ¿Cuántas irán, aproximadamente, por cada canal?_____




3) Para calcular la probabilidad de que una bola pase por cada uno de los canales lo hacemos por pasos:

En primer lugar observamos que al soltar la bola por $A$, tiene igual posibilidad de ir por $B$ o por $C$.

Así, podemos decir: $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(C) = \frac{1}{2}$




Todas las bolas que pasan por el punto $B$ caen en $D$.

Por tanto, $P(D) = P(B) = \frac{1}{2}$

Las bolas que pasan por el canal $C$ tienen igual posibilidad de ir hacia $E$ que hacia $F$. La probabilidad de ir a $E$ es, por tanto, la mitad de la probabilidad de llegar a $C$:

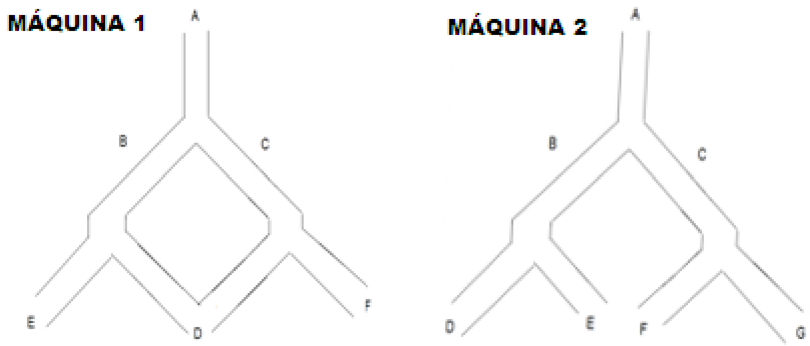
$$P(E) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Por la misma razón, la probabilidad de que la bola termine en $F$ es:

$$P(F) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Observa que $P(D) + P(E) + P(F) = 1$

4) Juan e Isabel van a la feria. Encuentran una atracción con dos máquinas:




Se gana un premio si la bola cae en $D$.

¿En qué máquina jugarías?_____

¿Podrías calcular la probabilidad de que la bola caiga en $D$ en cada caso?______

Observa la máquina 1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al echar una bola por el orificio $A$ termine en $F$? _______

b) Si sabemos que la bola ha caído por el canal $B$, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a $F$? _______

c) Si sabemos que la bola ha caído por el canal $C$, ¿cuál es la probabilidad de que acabe en $F$? _______

De las respuestas a) y b) puedes ver que la probabilidad del evento $\{la\ bola\ llega\ a\ F\}$ cambia si la bola cayó por el canal $B$. Se dice que estos dos eventos son **dependientes: la probabilidad de que ocurra uno es distinta si sabemos que el otro ha ocurrido.**

También, de las respuestas a) y c) puedes ver que la probabilidad del evento $\{la\ bola\ llega\ a\ F\}$ varía si sabemos que la bola pasó por el canal $C$. Luego los eventos $\{caer\ en\ C\}$ y $\{caer\ en\ F\}$ son dependientes.

6) Ahora, contesta

¿Cuál es la probabilidad de que la bola vaya a $D$? ______

Y si sabemos que ha pasado con seguridad por el canal $C$, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a $D$? ______

En este caso, la probabilidad de $\{caer\ en\ D\}$ no cambia aunque conozcamos que la bola "ha pasado por $C$". Los eventos $\{caer\ en\ D\}$ y $\{pasar\ por\ C\}$ son **independientes.**

Esto no ocurre en la máquina 2, fíjate en ella:

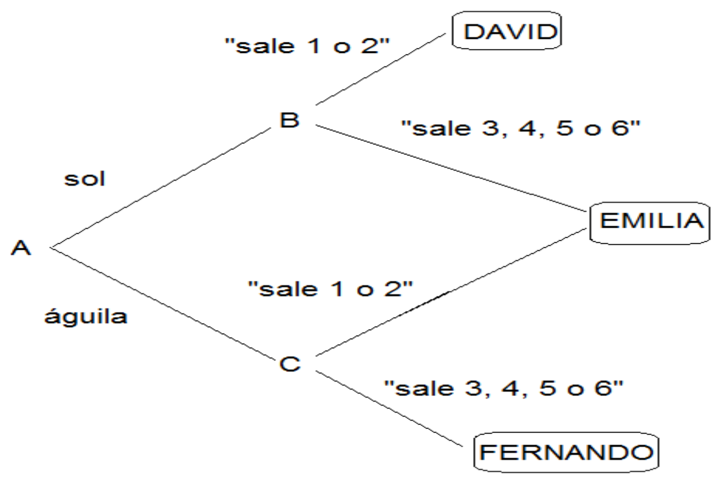
¿Cuál es la probabilidad de que la bola vaya a $D$? ______

Y si sabemos que ha pasado con seguridad por el canal $C$, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a $D$? ______

En este caso, la probabilidad de $\{caer\ en\ D\}$ cambia conociendo que la bola "ha pasado por $C$". Los eventos $\{caer\ en\ D\}$ y $\{pasar\ por\ C\}$ son **dependientes.**

**Parte V.**

David, Emilia y Fernando han inventado un juego con las siguientes reglas:




Realicen el juego:

- Coloquen en $A$ 60 frijoles

- Lancen una moneda. Si sale sol mueven un frijol a $B$; si sale águila lo trasladan a $C$. Repitan este experimento hasta que no queden frijoles en $A$.
- Los frijoles de $B$ entre David y Emilia del siguiente modo: Lancen un dado; si resulta 1 o 2 se da un frijol a David; si sale 3, 4, 5 o 6 el frijol corresponde a Emilia. Repitan este experimento hasta que no queden más frijoles en $B$.
- Trasladen los frijoles de $C$ a Emilia o Fernando de la forma siguiente:
  Arrojar un dado; si se obtiene 1 o 2, dan un frijol a Emilia; si sale 3, 4, 5 o 6, el frijol es para Fernando. Continúen lanzando el dado hasta que no queden frijoles en $C$.
- Gana la partida quien consiga más frijoles.

¿Quién ganó? ______

Con las reglas del juego anterior, ¿Cuál es la probabilidad de que un frijol que sale de A llegue a David?______ ¿Y de que sea para Emilia? _____

Si sabemos que un frijol ha pasado a $B$, ¿Cuál es la probabilidad de que ese frijol termine en David? _____

¿Piensas que los eventos $\{llegar\ el\ frijol\ a\ David\}$ y $\{llegar\ a\ B\}$ son dependientes?______

La sesión 7 se presenta en la sección de anexos y corresponde al anexo número 10.

### 3.5.8 Descripción de lo sucedido durante la aplicación de la sesión 8

Sesión diseñada para que el alumno refuerce los conocimientos que ha adquirido el alumno en la sesión 7, es decir, refuerce el aprendizaje sobre el cálculo de probabilidades condicionales y de eventos independientes, utilizando diagramas de Venn, tablas de doble entrada, expresiones matemáticas y diagramas de árbol.

Se planteó la independencia del buen o mal estado que existe entre las dos llantas de una bicicleta, en dicho planteamiento se simbolizaron eventos, se obtuvieron probabilidades bajo un enfoque clásico, se representaron las posibles situaciones entre las dos llantas, y se hizo por medio de una tabla de doble entrada, de un diagrama de árbol y de un diagrama de Venn.

**Parte I.**

En muchas ocasiones nos encontraremos con eventos independientes, eventos que no influyen la probabilidad de otro si ocurren o no. Si un evento A y un evento B son independientes, entonces la probabilidad de que sucedan simultáneamente se obtendrá multiplicando la $P(A)$

por la $P(B)$. Esta probabilidad se simboliza por $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y se lee "probabilidad de que sucedan $A$ y $B$ al mismo tiempo es igual a la probabilidad de $A$ por la probabilidad de $B$".

**Parte II.** Consideremos las ruedas de una bicicleta

Para que la bicicleta pueda servir, tanto la llanta $A$ y $B$ deben estar en perfectas condiciones, o de menos no deben de estar ponchadas, por lo que si falla una, o las dos, la bicicleta estará defectuosa.

Si una llanta no tiene ningún defecto, diremos que es buena; de lo contrario, que es defectuosa. Para representar escribiremos:

$$A = \{la\ llanta\ A\ está\ buena\}$$

$$B = \{la\ llanta\ B\ está\ buena\}$$

$$\bar{A} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$\bar{B} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

Supongamos que el 10 por 100 de las llantas utilizadas para cierta marca de bicicletas son defectuosas. Es decir, que 90 por 100 son buenas.

a) Calcula las probabilidades:

$P(A) =$ $\qquad$ $P(B) =$ $\qquad$ $P(\bar{A}) =$ $\qquad$ $P(\bar{B}) =$

b) Calcula también las siguientes expresiones:

$P(A) + P(\bar{A}) =$ $\qquad$ $P(B) + P(\bar{B}) =$

c) Para indicar el evento $\{las\ llantas\ A\ y\ B\ son\ buenas\}$ escribimos $A \cap B$, usando el símbolo de la intersección de conjuntos. ¿Sabrías indicar que significan los eventos siguientes?

$A \cap \bar{B}$ ________________________________________________________

$\bar{B} \cap A$ ________________________________________________________

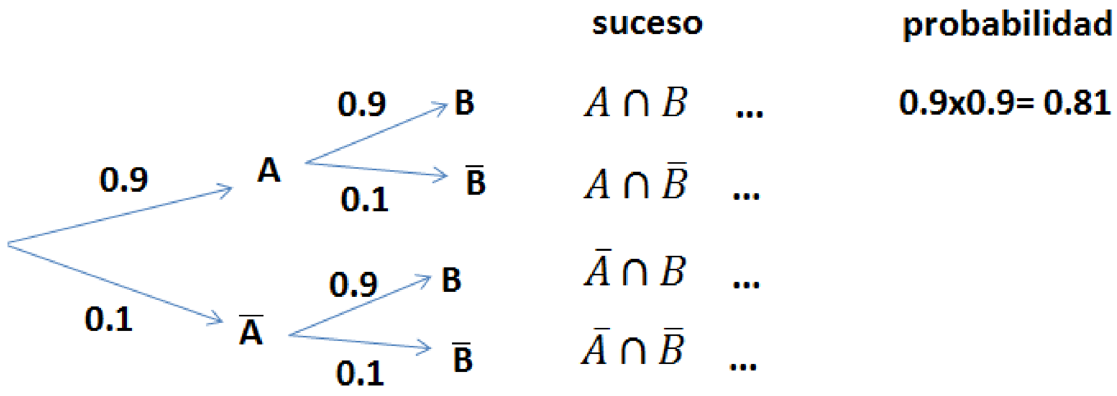
$\bar{B} \cap \bar{A}$ ________________________________________________________

d) Para indicar el evento "al menos una de las llantas $A$ o $B$ son buenas" escribimos $A \cup B$, usando el símbolo de la unión de conjuntos. Observa el siguiente diagrama en el que representamos como conjuntos los eventos $A, \bar{A}, B$ y $\bar{B}$.

| | $A$ | $\bar{A}$ |
|---|---|---|
| $B$ | $A \cap B$ | $\bar{A} \cap B$ |
| $\bar{B}$ | $A \cap \bar{B}$ | $\bar{A} \cap \bar{B}$ |

e) Colorea los rectángulos que representan el evento $A \cup B$

Mediante el siguiente diagrama en árbol vamos a representar todas las situaciones que pueden producirse:




Calcula las probabilidades de los siguientes eventos:

a) Sólo $A$ sirva.

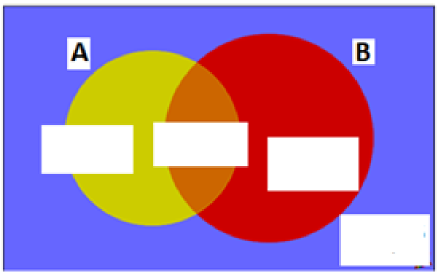
b) Tanto $A$ como $B$ son llantas buenas.

c) Al menos una de las llantas es buena.

Calcula la probabilidad del evento $A \cup B$ y compárala con cada una de las sumas siguientes:

$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ = ______________________

f) Llena los espacios del siguiente diagrama de Venn, con la respectiva probabilidad de cada región, recuerda que la suma de todas esas probabilidades debe ser 1, puesto que el rectángulo representa el espacio muestral, es decir, todas las posibilidades:



**Parte III.**

$$A = \{Alberto\ llegue\ temprano\}$$

$$B = \{Beatriz\ llegue\ temprano\}$$

$$C = \{Carolina\ llegue\ temprano\}.$$

¿Crees que podamos considerar que los tres eventos son independientes entre sí? ___. ¿Por qué? ______________________________________________________________________

De acuerdo a las estadísticas la $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y $P(C) = 0.5$. Encuentre la probabilidad de que:

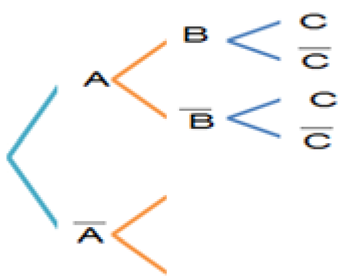
a) Los tres lleguen temprano

b) Ocurra exactamente uno de esos eventos, es decir, A llegue temprano y los otros 2 no, B llegue temprano y los otros 2 no, o, C llegue temprano y los otros 2 no.

Completa lo siguiente:

$$P(A) = 0.3;\ P(B) = 0.4;\ P(C) = \_\_;\ P(\bar{A}) = \_\_;\ P(\bar{B}) = \_\_\ y\ P(\bar{C}) = 0.5$$

Con un diagrama de árbol también podemos representar la información, con la ayuda de tus compañeros de equipo, lo pueden lograr, utilicen el siguiente esquema y complétenlo:




**Parte IV.** A continuación se presenta una situación para que obtengas algunas probabilidades, obtenlas por medio de un diagrama de árbol, diagrama de Venn, tabla de doble entrada y por expresión matemática.

Dos ambulancias se mantienen listas para emergencias. Debido a la demanda y a la posibilidad de fallas mecánicas, la probabilidad de que una ambulancia específica esté disponible cuando se necesite es .8. La disponibilidad de una ambulancia es independiente de la otra.

a) En caso de catástrofe, ¿cuál es la probabilidad de que ambas ambulancias estén disponibles?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna esté disponible?
c) Si se necesita una ambulancia en una emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que al menos haya una disponible?
d) Si se necesita una ambulancia en una emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que haya solamente una disponible?

Espacio para tus diagramas y tu tabla.

La sesión 8 se presenta en la sección de anexos y corresponde al anexo número 11.

### 3.6 Características generales de la aplicación de la propuesta didáctica

Se propusieron ejercicios en donde se planteaban situaciones de la vida cotidiana, con la finalidad de que el alumno obtuviera probabilidades de eventos compuestos.

En cada una de estas sesiones los alumnos trabajaron en equipo, en algunas ocasiones conformados por dos personas y en otras por tres. Después de terminadas las actividades de cada una de las sesiones, hubo una discusión grupal, para consensar los resultados y los conceptos.

Cabe señalar que la actitud del profesor, quedo restringida a únicamente guiar las actividades o para realizar cuestionamientos en los equipos cuando existían dudas con el fin de que ellos reflexionaran; lo anterior formó parte de la evaluación formativa que se realizó en todas las sesiones.

Las imágenes 3.1, 3,2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19 y 3.20 muestran fotos del trabajo desarrollado con el grupo experimental durante la aplicación de las sesiones 1 a la 8. En ellas podrá observar, parte del material utilizado, algunos de los alumnos con los que se trabajo, la disposición de los lugares donde los alumnos desarrollaron las sesiones, entre otros aspectos.

Imagen 3.1

Imagen 3.2

Imagen 3.3

Imagen 3.4

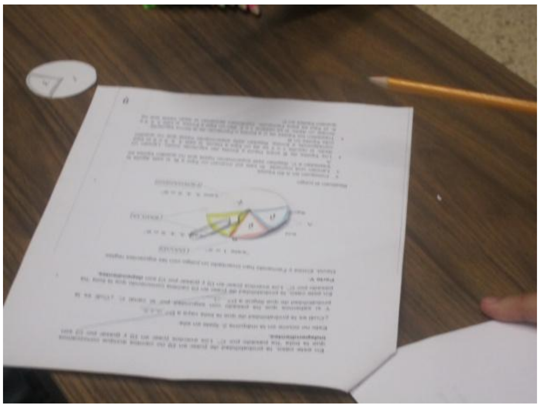


Imagen 3.5

Imagen 3.6

Imagen 3.7

Imagen 3.8

Imagen 3.9

Imagen 3.10

Imagen 3.11

Imagen 3.12


Imagen 3.13

Imagen 3.14


Imagen 3.15

Imagen 3.16


Imagen 3.17

Imagen 3.18


**Imagen 3.19** **Imagen 3.20**

### 3.7 Aplicación del instrumento de evaluación y resultados obtenidos

La evaluación es una actividad que proporciona al docente información para saber qué objetivos fueron cumplidos (Lafourcade, 1972). El instrumento de evaluación utilizado estuvo diseñado con el fin de evaluar si el alumno avanzó en la comprensión para Calcular probabilidades de eventos compuestos, lo cual a su vez se traduce en dar respuesta a la pregunta de investigación formulada en el Capítulo I. Lafourcade (1972) menciona que la evaluación intenta analizar las causas que pudieron haber motivado deficiencias en el logro de las metas propuestas. Con el instrumento de evaluación, el docente buscará dar explicación a las deficiencias observadas en la propuesta didáctica, como por ejemplo: ¿los alumnos fueron motivados suficientemente como para mantener un ritmo de interés uniforme a lo largo de la etapa de las sesiones que conformaron la propuesta didáctica?, ¿se abusó de la exposición verbal?, ¿se distribuyó racionalmente el tiempo?, entre otras.

El papel del alumno en cada una de las sesiones consistió en realizar las actividades encomendadas en cada una de las sesiones y el papel del profesor consistió en realizar la evaluación formativa. El instrumento de evaluación aplicado se muestra en la sección de anexos.

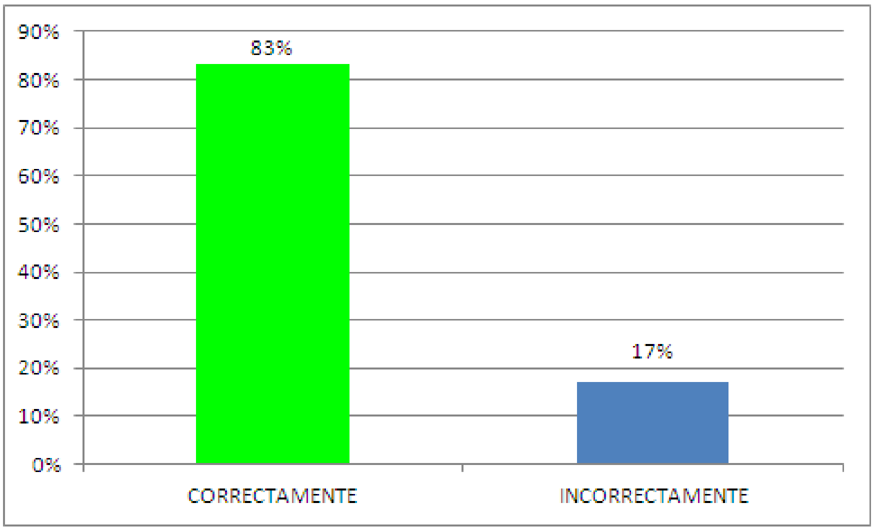
Los reactivos y resultados obtenidos son los siguientes:

Reactivo 1. ¿Qué característica tienen los eventos mutuamente excluyentes?

Resultados:

- El 83% (25 de 30) contestó correctamente, de los cuales:
  - 12 contestaron "son eventos que no tienen elementos en común".
  - 7 contestaron "no pueden ocurrir al mismo tiempo".
  - 6 contestaron "son aquellos que la probabilidad de que ocurran al mismo tiempo es cero", 3 de estos 6, utilizó símbolos matemáticos para dar su respuesta.
- El 17% (5 de 30) podemos considerar que contestó incorrectamente y los 5 alumnos mencionaron como respuesta: "ninguno de los dos está relacionado".

Vea la gráfica 3.6, la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:




**Gráfica 3.6**

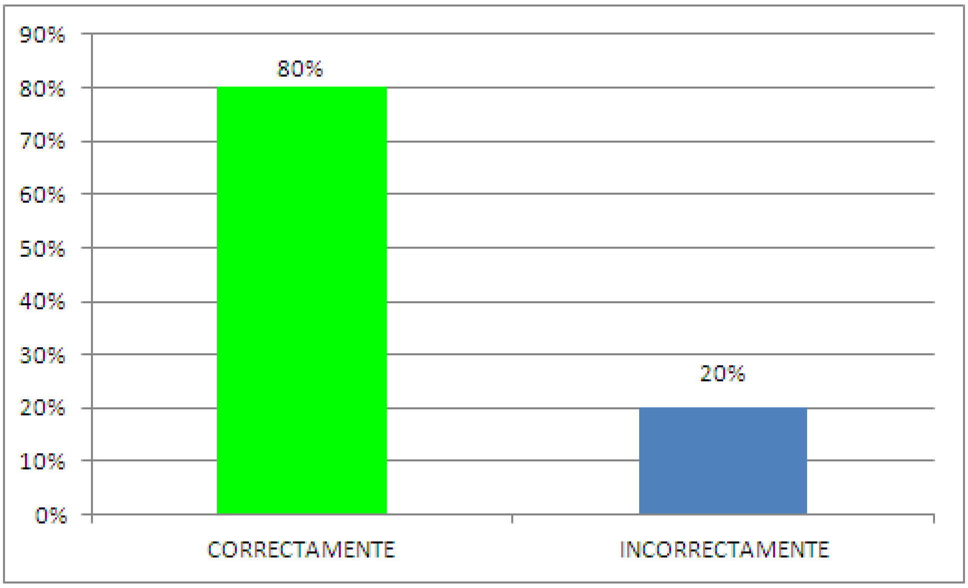
Reactivo 2. ¿Cuál es la probabilidad de que sucedan al mismo tiempo dos eventos mutuamente excluyentes?

Resultados:

- El 80% (24 de 30) contestó correctamente, de los cuales:
  - 20 contestaron "cero".
  - 4 contestaron "$P(A \cap B) = 0$".

- El 20% (6 de 30) contestó incorrectamente, ya que respondieron “es el resultado de que tengan las dos características”.

Vea la gráfica 3.7, la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:



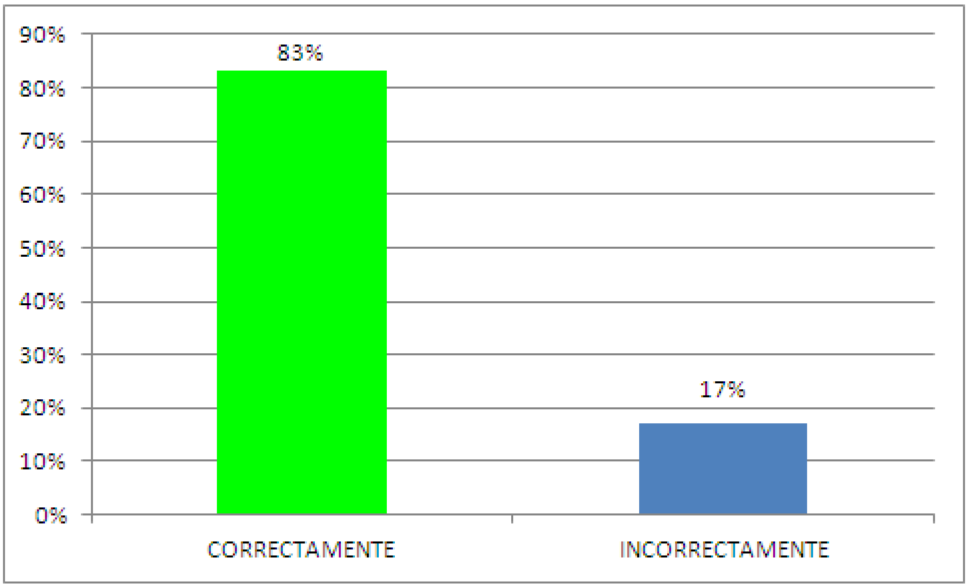

**Gráfica 3.7**

| |
|---|
| Reactivo 3. ¿Cómo se observan los círculos que representan dos eventos mutuamente excluyentes en un diagrama de Venn? |

Resultados:

- El 83% (25 de 30) contestó correctamente, de los cuales:
  - 15 contestaron “separados”.
  - 5 contestaron “no están unidos porque no hay elemento que los una”
  - 5 dibujaron un diagrama de Venn con dos círculos dentro separados entre sí.
- El 17% (5 de 30) podemos considerar que contestó incorrectamente y los 5 dibujaron un diagrama de Venn con dos círculos dentro entrelazados.

Vea la gráfica 3.8, la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:



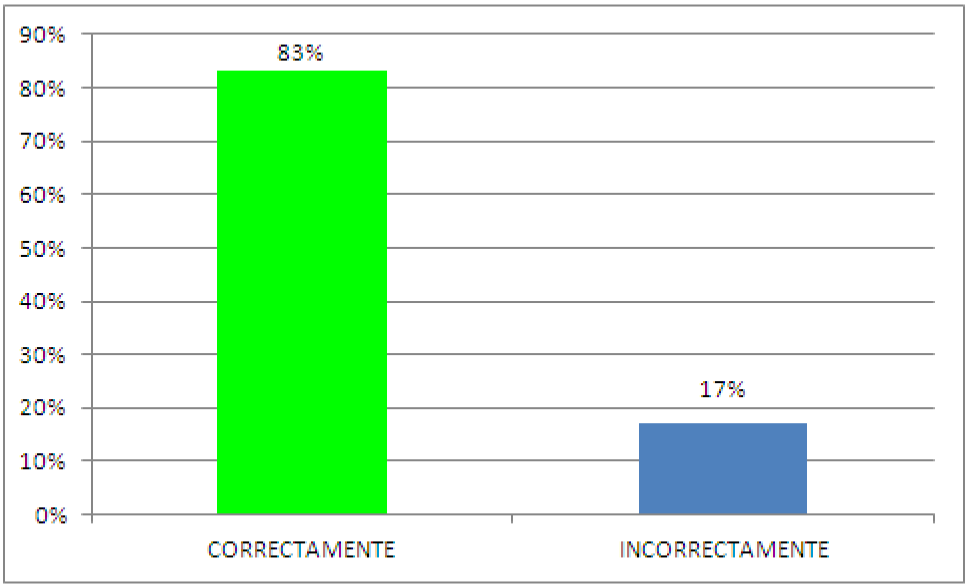

**Gráfica 3.8**

| |
|---|
| Reactivo 4. ¿Cómo obtienes y cómo simbolizas la probabilidad de que sucedan A o B? |

Resultados:

- El 83% (25 de 30) contestó correctamente, de los cuales:
    - 15 contestaron "separados".
    - 5 contestaron "no están unidos porque no hay elemento que los una".
    - 5 dibujaron un diagrama de Venn con dos círculos dentro separados entre sí.
- El 17% (5 de 30) podemos considerar que contestó incorrectamente y los 5 dibujaron un diagrama de Venn con dos círculos dentro entrelazados.

Vea la gráfica 3.9, la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:



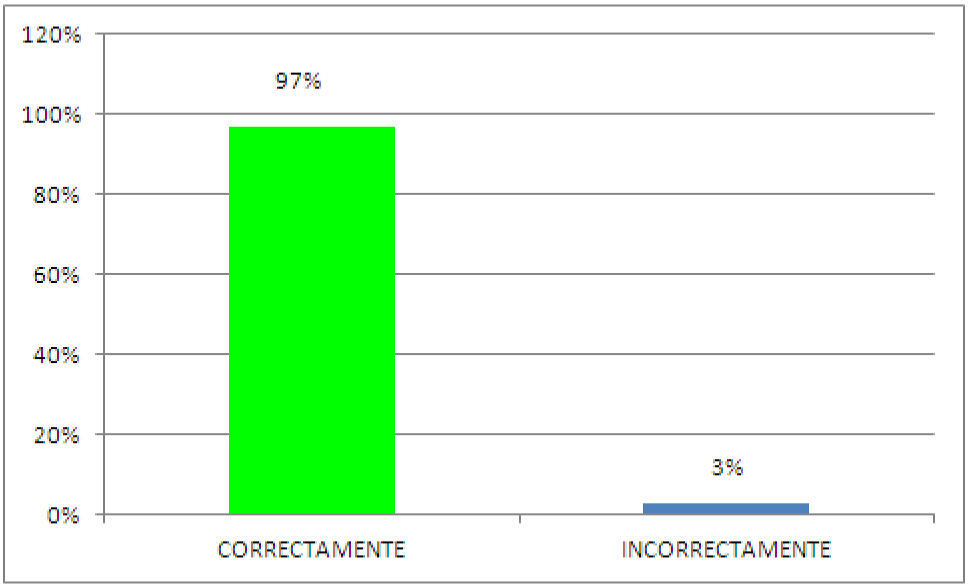

**Gráfica 3.9**

Reactivo 5. ¿Qué significa que dos eventos sean independientes?

Resultados:

- El 97% (29 de 30) contestó correctamente, de los cuales:
  - 24 contestaron con algo semejante a "la ocurrencia de uno no altera la probabilidad de ocurrencia del otro".
  - 5 contestaron con símbolos "$P(A\backslash B) = P(A)$".
- El 3% (1 de 30) no contestó

Vea la gráfica 3.10, la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:



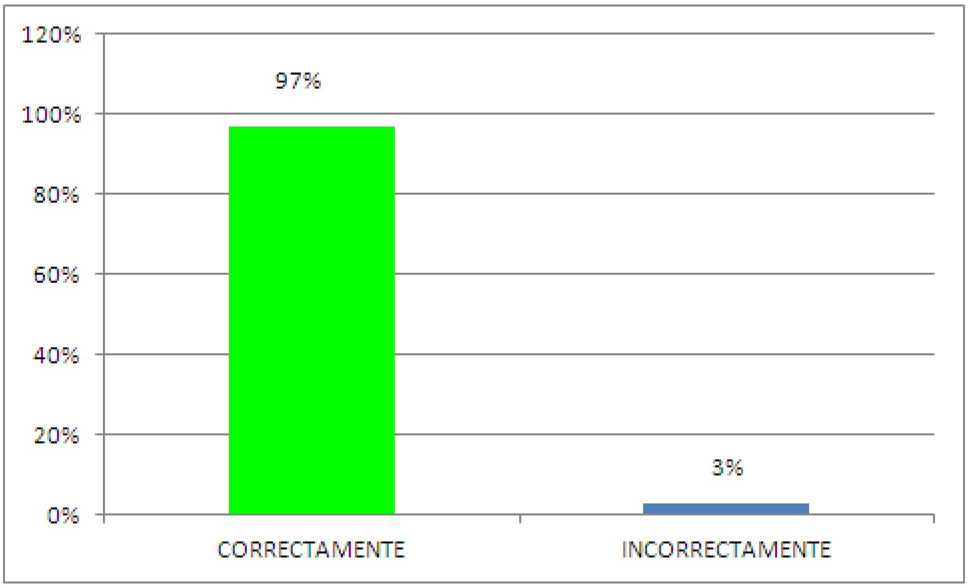

**Gráfica 3.10**

Reactivo 6. ¿Cómo obtienes probabilidades condicionales?

Resultados:

- El 97% (29 de 30) contestó correctamente, de los cuales:
    - 12 contestaron algo semejante a: "por medio de una tabla y descartar los elementos que no reunieron la condición dada, contar los elementos que reúnen la característica y dividir entre los elementos que sobraron".
    - 10 contestaron "$P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$".
    - 7 contestaron por medio de un diagrama de Venn.
    - 1 contestó por medio de un diagrama de árbol.
- El 3% (1 de 30) no contestó.

Vea la gráfica 3.11, la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:



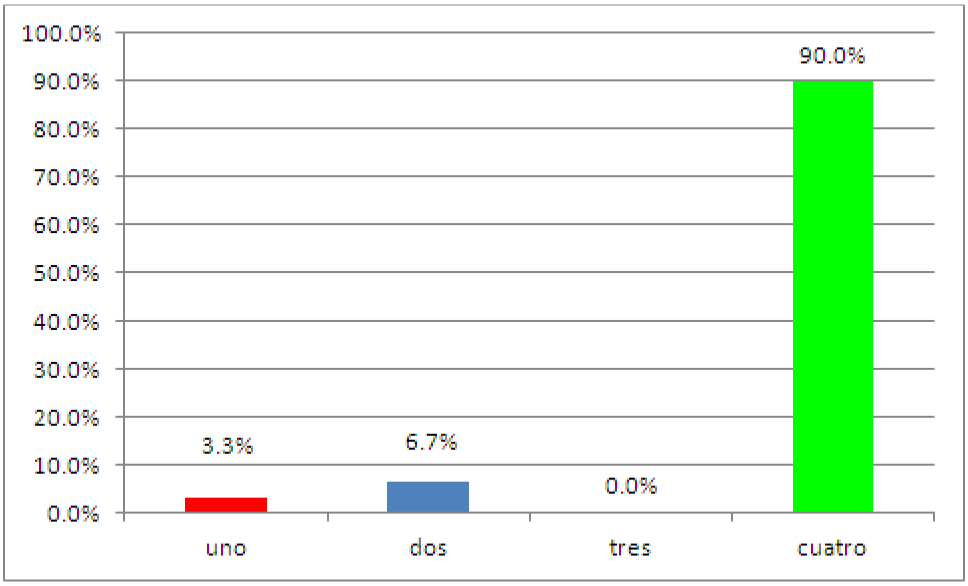

**Gráfica 3.11**

| |
|---|
| Reactivo 7. La probabilidad de que Karina pase su examen de aritmética es de 0.7 y de que Carlos pase ese mismo examen de 0.6. Consideremos que estos dos eventos son independientes. Por medio de una tabla de doble entrada, un diagrama de Venn y un diagrama de árbol, encuentra la probabilidad de que...<br>a) ninguno pase el examen<br>b) los dos pasen el examen<br>c) al menos uno pase el examen<br>d) solamente uno pase el examen |

Resultados:

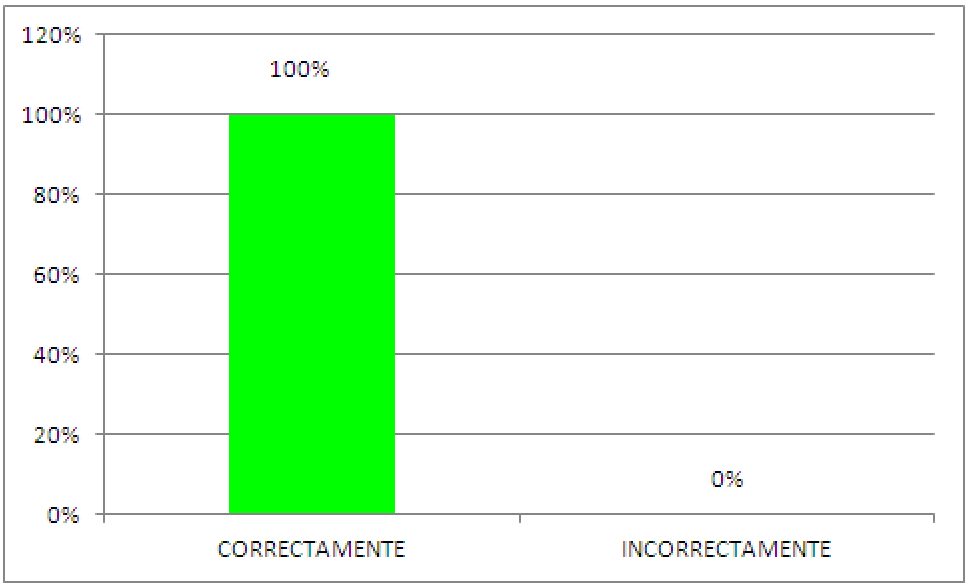
- El 100% (30 de 30) contestó correctamente, de los cuales:
  - 27 de los 30 representó por una tabla, por símbolos, por un diagrama de Venn y por un diagrama de árbol, es importante señalar no todos en ese orden, es decir, algunos comenzaron por medio de un diagrama de árbol, otros por símbolos y otros por un diagrama de Venn.
  - 2 de los 30, contestaron usando diagrama de árbol y símbolos.
  - 1 de los 30 contestó usando únicamente una tabla de doble entrada.

De lo anterior, podemos decir que 90% (27 de 30) usó cuatro registros de representación para dar respuesta, 0% usó tres, 6.7% (2 de 30) usó dos y solo el 3.3% (1 de 30) usó solo un registro de representación. Vea la gráfica 3.12:




**Gráfica 3.12**

La gráfica 3.13 corresponde al porcentaje de alumnos que respondieron correctamente. Vea la gráfica 3.13:




**Gráfica 3.13**

Reactivo 8. En una urna colocaron una bola azul con el número 3, una bola roja con el número 4, otra roja con el número 5 y una roja más con el número 7. Se definen los eventos

$R = \{bola\ roja\}$,

$A = \{bola\ azul\}$

$I = \{bola\ con\ número\ impar\}$.

Si selecciona al azar a una bola de la urna, simboliza y obtén la probabilidad de que…

a) la bola sea roja

b) la bola tenga un número impar

c) la bola sea roja y tenga un número impar

d) de que sea roja y azul

e) los eventos $R$ y $A$, ¿son mutuamente excluyentes?

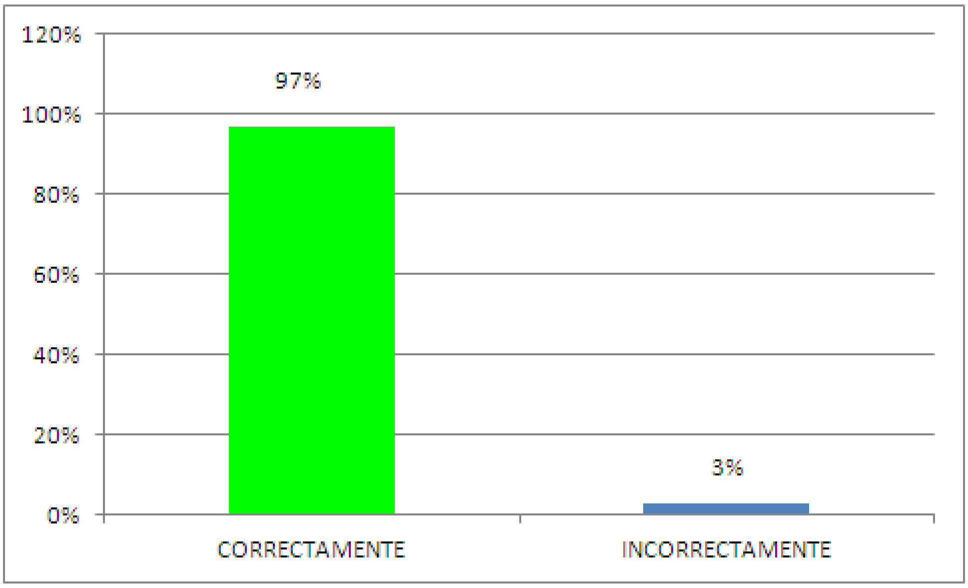
f) si la bola es roja, ¿cuál es la probabilidad de que tenga número impar?

g) si la bola tiene un número impar, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

Resultados:

- El 97% (29 de 30) contestó correctamente, de los cuales:
  - 20 de los 30 representó por una tabla, por símbolos, por un diagrama de Venn y por un diagrama de árbol, es importante señalar no todos en ese orden, es decir, algunos comenzaron por medio de un diagrama de árbol, otros por símbolos y otros por un diagrama de Venn.
  - 2 de los 27, contestaron usando diagrama de árbol y símbolos.
  - 1 contestó usando una tabla de doble entrada.
- El 3% (1 de 30) no contestó correctamente, trató de usar la tabla de doble entrada y no representó los datos correctamente.

Vea la gráfica 3.14, la cual representa los porcentajes de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente:




**Gráfica 3.14**

El instrumento de evaluación se presenta en la sección de anexos y corresponde al anexo número 3.

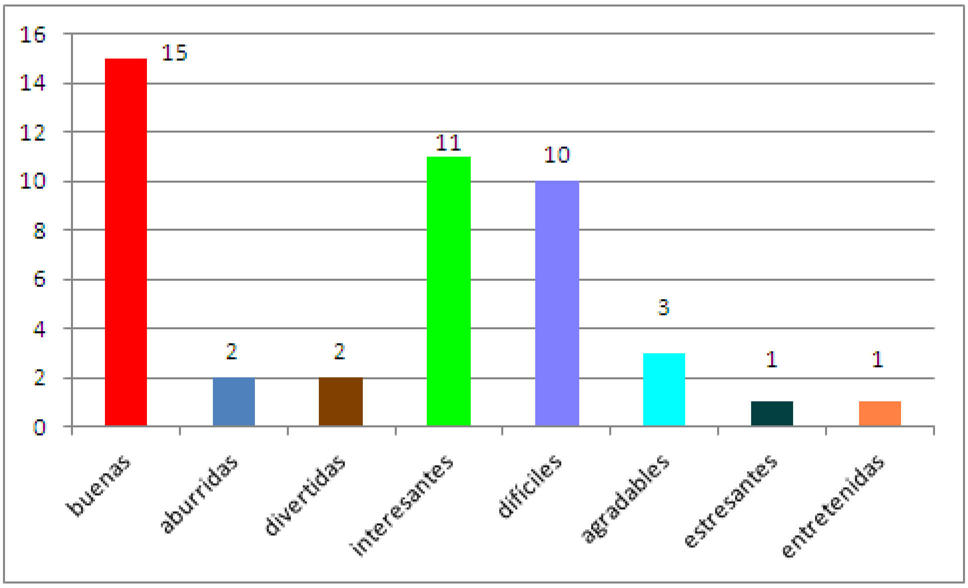
### 3.8 Aplicación del cuestionario de evaluación de las sesiones

Una vez concluida la etapa de evaluación de los aprendizajes relacionados con el cálculo de probabilidades de eventos compuestos, se procedió a realizar la etapa de aplicación del cuestionario de evaluación de las sesiones.

El cuestionario aplicado a los alumnos para conocer qué les pareció las sesiones, cómo se sintieron durante la aplicación de la propuesta didáctica, entre otras cuestiones, se muestra en los anexos.

Las preguntas y respuestas más comunes a las mismas se muestran a continuación:

<u>Pregunta:</u> ¿Qué te parecieron las sesiones?
<u>Algunas respuestas proporcionadas por los alumnos se citan de manera textual a continuación:</u> "Me parecieron entretenidas", "Buenas solo que las ultimas algo complicadas", "Muy bien", "Me gustó la dinámica de trabajar en equipo, ya que así nos apoyamos y es más sencillo", "interesantes, complicadas", "bien más interesantes y divertidas que una clase convencional", "Me gustaron mucho, muy buenas", "muy bien, me agradaron", "Al principio muy buenas, pero a partir de la 4 se me hizo un poco aburrido", "fueron muy buenas", "Buenas por que son muy interactivas y fomentan las relaciones en grupo", entre otras. Las características mencionadas para las sesiones y el número de alumnos que recurrió a cada una de ellas se representan por medio de la siguiente gráfica de barras. Vea la gráfica 3.15:



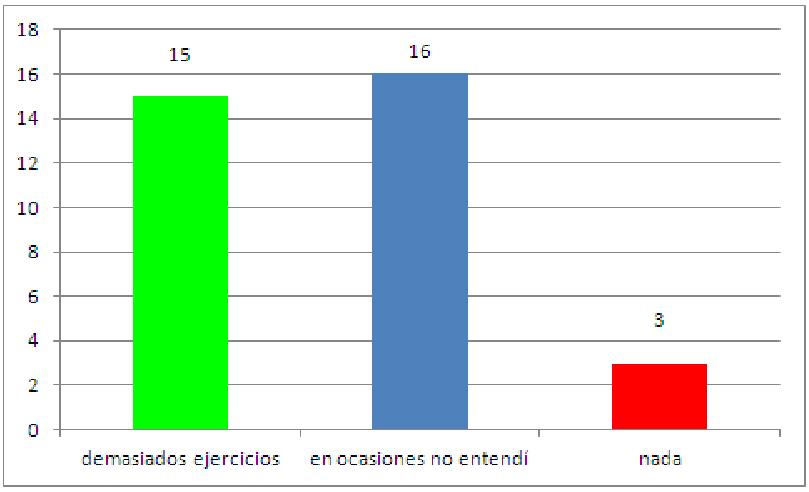

**Gráfica 3.15**

Pregunta: ¿Qué te gustó?

Algunas respuestas proporcionadas por los alumnos se citan de manera textual a continuación: "los ejercicios que hicimos con los papelitos, esferas de unicel, etc", "Que se podía trabajar en equipo", "que fueron cómodas y en equipo relajadas y sin presiones", "Trabajar en equipo y algunas actividades, como la de las bolitas", "Que fue en equipo y fáciles de entender", "Que siempre era muy didáctico", entre otras. Las características más recurridas en las respuestas proporcionadas son: Sesiones cómodas, Trabajar en equipo, Relajadas, El material didáctico utilizado. La figura 3.1 muestra la gráfica que representa por medio de barras las frecuencias relativas relacionadas a estas características.

Pregunta: ¿Qué no te gustó?

Algunas respuestas proporcionadas por los alumnos se citan de manera textual a continuación: "que las sesiones algunas fueran largas", "que algunas cosas no están bien explicadas", "Demasiadas hojas", "la tarea", "que algunas venian muy largas", "que las últimas actividades son largas", "todo me gustó", entre otras. Los elementos mencionados que los alumnos mencionaron como no gustados son: Demasiadas hojas, pocas explicaciones, la poca intervención del profesor. La gráfica 3.16 muestra las frecuencias relativas relacionadas a estas características.




**Gráfica 3.16**

Cada uno de los 34 alumnos que contestó la encuesta, mencionó solo una de las tres.

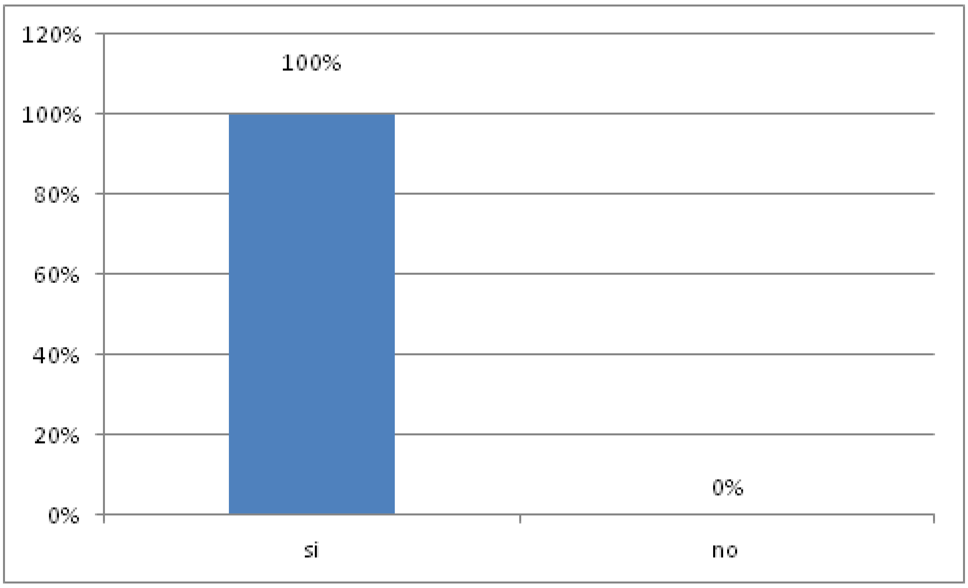
Pregunta: ¿Qué cambiarías?

Algunas respuestas proporcionadas por los alumnos se citan de manera textual a continuación: "Que las sesiones fueran de menos hojas y el profesor explicara más", "que no fueran tan largas", "Que ubiera un poco más de práctica", "nada, menos ejercicios", "Nada", "La forma de trabajar, tal ves si con sesiones pero también la clase normal", entre otras respuestas. Esta pregunta, esta muy ligada a la anterior, por lo que no fue necesario realizar un análisis de las respuestas de la misma.

Pregunta: ¿Aprendiste?

Ante esta pregunta, la mayoría de los alumnos no se concreto a únicamente contestar con un si o un no, de tal forma que proporcionó una justificación de su respuesta.

Algunas respuestas proporcionadas por los alumnos se citan de manera textual a continuación: "Si, aunque me costaba trabajo, me esforzé", "Si muchas cosas aunque al final me revolví un poco pero ya se aclararon mis dudas", "Si, aprendí muchas cosas que creo son importantes", "Siento que en el momento si, pero no muy bien, la verdad prefiero la clase tradicional", "claro, me ayudaron más estas sesiones que las clases cotidianas", "si y mucho", entre otras. El porcentaje de alumnos que contestó SI fue del 100%, por lo tanto, ninguno de los alumnos contestó NO. Vea la gráfica 3.17:




**Gráfica 3.17**

Pregunta: ¿Cómo te sentiste con este tipo de sesiones?

Algunas respuestas proporcionadas por los alumnos se citan de manera textual a continuación: "Bien… cómoda", "relajada tranquila", "Muy bien una que otra tediosa pero bien", "Mas relajado", "un poco inseguro", "bien es una muy buena forma de aprender", "Muy bien, buenas explicaciones", "bien complementando con ideas de los demás", entre otras respuestas. El porcentaje de alumnos que proporcionó características positivas en relación a como se sintió en las sesiones fue del 100%.

Pregunta: ¿Te gustó trabajar en equipo? ¿Por qué?

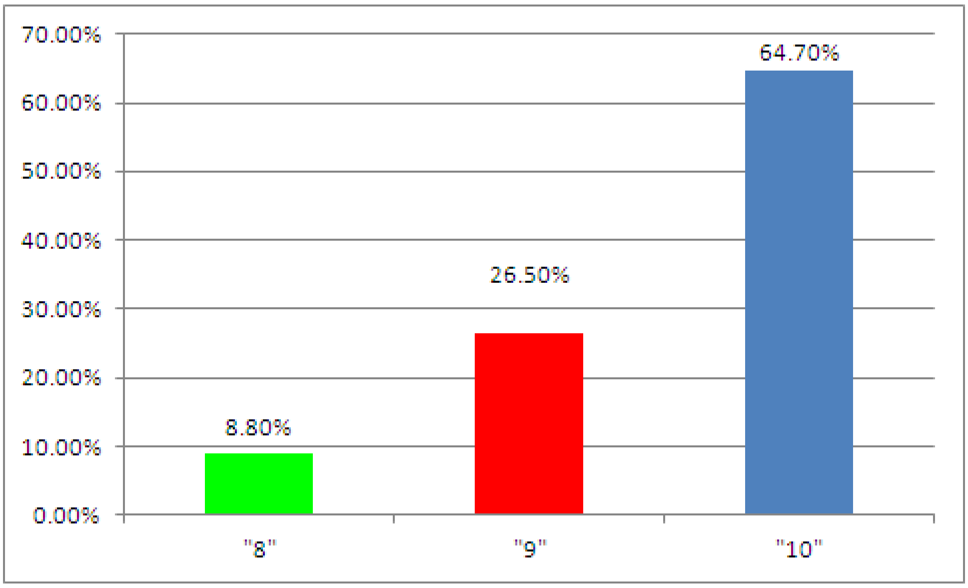
Algunas respuestas proporcionadas por los alumnos del por qué les gustó trabajar en equipo se citan de manera textual a continuación: "complementamos nuestros conocimientos", "porque nos apoyabamos", "Nos apoyamos mutuamente", "hay cosas que no entiendo y otros sí y viseversa", "hay más ideas y un apoyo mutuo", entre otras. El porcentaje de alumnos que contestó SI fue del 100%, por lo tanto, ninguno de los alumnos contestó NO.

Pregunta: De la actitud del profesor, ¿Qué te gustó o qué no te gustó?

Algunas respuestas proporcionadas: "Me gustó que el profesor es muy pacífico y explica muy bien", "me gustó que era relajado", "Tenia paciencia con nosotros, pero no habla mucho", "Me gustó que cuando teniamos duda, el nos asesoraba y explicaba bien", "Me gustó su paciencia con los alumnos", "Me gusto que siempre venía con la mejor actitud para trabajar y que cualquier duda la resolvía bien", entre otras.

Pregunta: Del 0 al 10, evalúa al profesor.

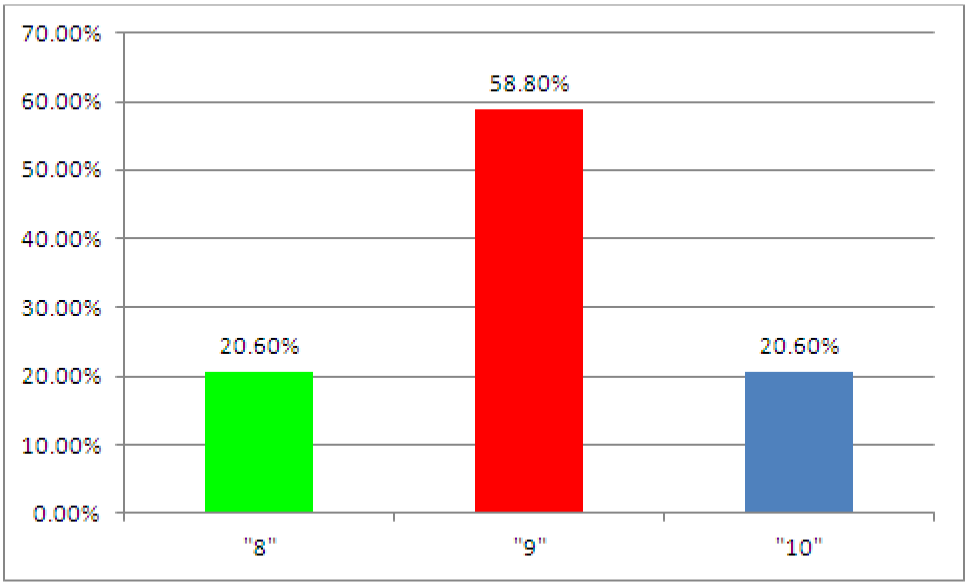
La gráfica 3.18 muestra por medio de barras los porcentajes de cada calificación que proporcionaron los alumnos:




**Gráfica 3.18**

Pregunta: Del 0 al 10, ponte una calificación en estas sesiones

La gráfica 3.19 muestra por medio de barras los porcentajes de cada calificación que proporcionaron los alumnos:




**Gráfica 3.19**

Este cuestionario de evaluación de las sesiones corresponde al anexo número 13 de la sección de anexos.

Con esto, finalizamos la última etapa del método de investigación, tenemos información suficiente para realizar conclusiones, dar respuesta a la pregunta de investigación planteada y dar consideraciones generales.

# CAPÍTULO 4

# CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES GENERALES

# CAPÍTULO 4 CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES GENERALES

En el capítulo 1 del presente trabajo, se proporcionó un panorama general del nivel de aprendizaje de los alumnos, respecto a la Unidad III llamada Probabilidad del Programa de Estadística y Probabilidad I del CCH (s.f), la cual contiene el tema del cálculo de probabilidades de eventos compuestos. Se dio a conocer, por medio de los resultados de la Evaluación Diagnóstica (EDA) que el porcentaje de respuestas correctas referente a los conocimientos concernientes a ese tema es del 47.40%.

También, en este trabajo se planteó una propuesta didáctica basada en un conjunto de elementos didácticos que se presentaron en el capítulo II, entre los cuales destaca la teoría de Duval -la cual señala la importancia de usar distintos registros de representación- y el trabajo en equipo. Con ello se planteó la siguiente pregunta de investigación:

| |
|---|
| ¿Qué tanto incide el uso de diferentes registros de representación para que el alumno pueda calcular probabilidades de eventos compuestos? |

Para dar respuesta a esta pregunta, se llevó a cabo un método de investigación que consistió en realizar una evaluación diagnóstica para conocer deficiencias de los alumnos que pudieran repercutir en el aprendizaje de estos, diseñar y aplicar la propuesta didáctica utilizando diferentes registros de representación y el trabajo en equipo –entre otros elementos didácticos considerados-, diseñar y aplicar el instrumento de evaluación, de este se extrajo la información que da respuesta a la pregunta de investigación. También se diseño y aplicó un cuestionario al grupo experimental, con la finalidad de conocer su opinión y sentir en relación a la propuesta didáctica implementada.

## 4.1 Conclusión como respuesta a la pregunta de investigación

Concluyo y presento como respuesta a la pregunta de investigación que, la incidencia de hacer uso de diferentes registros de representación para el cálculo de probabilidades de eventos compuestos es muy alta, ya que, los alumnos obtuvieron un promedio de 97% de respuestas correctas.

A través del instrumento de evaluación y la evaluación formativa realizada durante la aplicación de la propuesta didáctica, se concluye que para calcular probabilidades de eventos compuestos:

- Los alumnos utilizan diagramas de Venn, tablas de doble entrada, símbolos matemáticos y diagramas de árbol, es decir, no se limitan al uso de la simbología.
- Los alumnos demuestran habilidad de convertir la información proporcionada a otro registro de representación, por ejemplo, pueden representar símbolos matemáticos a otro registro de representación y viceversa.
- Los alumnos optan por utilizar el registro de representación que economice la obtención de la probabilidad.
- Los alumnos comprenden conceptos considerados importantes -como los son la independencia de eventos y los eventos mutuamente excluyentes- los cuales por lo regular se representan únicamente por medio de símbolos matemáticos.
- Los alumnos utilizan por lo menos dos registros de representación con el fin de validar resultados: con uno obtienen probabilidades y con el otro validan los resultados obtenidos.

El instrumento de evaluación nos hace afirmar que la propuesta didáctica logra: Hacerlos capaces de calcular probabilidades de eventos compuestos, afín a sus intereses y conocimientos.

### 4.2 Conclusiones y consideraciones de la evaluación diagnóstica aplicada

Concluyo que, antes de comenzar con el tema de probabilidad debemos de realizar una evaluación diagnóstica, con el fin de percibir, ideas erróneas de los conceptos de aleatoriedad e independencia, ya que, aunque los alumnos manifestaron tener en claro que los patrones de secuencia no son un factor para pensar en la no aleatoriedad y manifestar que la independencia, es un elemento existente entre algunos experimentos, como lo son, los lanzamientos de una moneda; también manifestaron tener una idea errónea al pensar que secuencias con ciertos patrones son menos probables que otras que no cuentan con ellos. Considero que hace falta proporcionar el concepto de independencia con el fin de que el alumno lo haga asequible para justificaciones posteriores.

### 4.3 Conclusiones obtenidas de los resultados de la encuesta aplicada

Los resultados obtenidos de las encuestas aplicadas, traen consigo las siguientes conclusiones: Los alumnos mediante la aplicación de la propuesta didáctica mencionaron y manifestaron estar interesados, satisfechos y cómodos con los elementos didácticos utilizados para trabajar las sesiones; mencionaron estar aprendiendo y también estar satisfechos con la actitud del profesor, el cual realizó únicamente la evaluación formativa, y no la cátedra a la cual de manera muy probable están acostumbrados. En general, podemos concluir que:

- Los alumnos consideraron las sesiones buenas, divertidas e interesantes.
- Les agrado trabajar con materiales manipulativos –bolas de unicel, papelitos, entre otros-, los cuales son una de las herramientas del método de enseñanza de la Dra. Batanero.
- La simulación de experimentos probabilísticos, reforzó la idea del enfoque frecuencial de probabilidad, siendo ésta –la simulación- otra de las herramientas del método de la Dra. Batanero.
- Les agrado el trabajo en equipo.
- Los alumnos no comprendieron totalmente las instrucciones.
- No les agrado que las sesiones fueran largas, debido a que ocuparon aproximadamente 120 minutos por sesión.
- Les hubiera gustado que el profesor explicara más.
- Con la propuesta didáctica, los alumnos sintieron aprender, debido a que ellos construyeron su propio conocimiento, ya que, las actividades propuestas, se diseñaron considerando el método de enseñanza de la Dra. Batanero.

## 4. 4 Consideraciones generales

Las consideraciones generales después de presentadas las conclusiones de este trabajo son:

- Diseñar propuestas didácticas, no únicamente de probabilidad, sino extenderlos hacia todas las matemáticas que se imparten en el bachillerato.
- Hacer uso de la manipulación de objetos, ya que, es un elemento clave para asimilar los conceptos.
- Diseñar propuestas didácticas que involucren el trabajo en equipo.
- Diseñar propuestas didácticas que involucren el uso de diferentes registros de representación.
- Realizar la evaluación diagnóstica, con el fin de que el docente conozca mejor a los alumnos, conozca sus deficiencias y sus debilidades.
- Realizar la evaluación formativa, para percatarnos de lo que el alumno va asimilando, que sea de la manera correcta y no esté asimilando *misconcepciones* que pudieran perjudicar a sus aprendizajes posteriores.
- Diseñar evaluaciones que realmente permitan al docente hacer un análisis de los objetivos fijados y los aprendizajes obtenidos.

Como se expuso, la propuesta didáctica presentada está basada en varios elementos didácticos: evaluación didáctica, evaluación formativa, uso de varios registros de representación, uso de materiales manipulativos, trabajo en equipo, por mencionar algunos; éstos enriquecen la propuesta y la hacen relevante, debido a que dichos elementos están sustentados por una investigación científica. Con la investigación realizada en el presente trabajo, se pudo observar, la contundencia de los resultados obtenidos de la evaluación realizada, por ello, es oportuno incluir elementos didácticos previamente investigados para presentar propuestas, no únicamente de probabilidad, sino de cualquier tema de matemáticas.

De acuerdo a lo obtenido, es oportuno señalar, la importancia manifiesta en realizar investigación en la docencia.

# REFERENCIAS

# Referencias

Aguilar, D., y García, I. A. M. (2011). *¿Qué es el examen diagnóstico académico (EDA)?*. Recuperado de http://www.cch.unam.mx/planeacion/queeseleda.

Alatorre, S. (1991, abril). *Los contextos, las creencias y las intuiciones: Acerca de Cobb, Tversky y Kahneman.* Educación Matemática. *3*(1), 40-57.

Arbones, E. A. (1988). Conceptos de matemáticas aplicados a la informática. Barcelona: Fausí.

Ávila, J. (Coord). (s.f.). *Prontuario de acreditación,deserción, reprobación. Matemáticas.* México: Colegio de Ciencias y Humanidades.

Ausubel, D. (1961). *Psicología Educativa.* México: Trillas.

Batanero, C. (s.f.). *¿Hacia dónde va la educación estadística?.* Recuperado de http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/BLAIX.pdf

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. España: Facultad de Ciencias Universidad de Granada.

Batanero, C. (2011). Las matemáticas de la catadora de té. En Batanero, C., y Díaz, C. (Eds.). *Estadística con proyectos* (Cap. 6, pp. 149-174). Granada: Reprodigital.

Batanero, C., y Díaz, C. (2011). ¿Cómo son los alumnos de la clase?. En Batanero, C., y Díaz, C. (Eds.). *Estadística con proyectos* (Cap. 3, pp. 73-95). Granada: Reprodigital.

Batanero, C., Díaz, C., y Gea, M. M. (2011). Estadísticas de la pobreza y desigualdad. En Batanero, C., y Díaz, C. (Eds.). *Estadística con proyectos* (Cap. 4, pp. 97-124). Granada: Reprodigital.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. España: Paidós.

Canavos, G. (1984). *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. EU: McGraw-Hill Interamericana.

Castro, G. F. (1993, abril). *Conflictos Cognitivos en la Adquisición de Conceptos de Probabilidad*. Educación Matemática. *5*(1), 7-10.

Chao, L. L. (1989). *Introducción a la estadística*. México: Continental.

Chaves, A. L. (2001, septiembre). *Implicaciones educativas de la teoría sociocultural de Vigotsky*. Educación. *25*(2), 59-65.

Christensen, H. B. (1983). *Estadística paso a paso.* México: Trillas.

Christlieb, C. (2004, Julio-Septiembre). *El profesor, persona clave en el futuro de los bachilleres*. Eutopía. *1*(3), 32-51.

Colegio de Ciencias y Humanidades (s.f). *Programa de Estudios de Estadística y Probabilidad I y II.* México: Colegio Ciencias y Humanidades.

Colegio de Ciencias y Humanidades (2006). *Orientación y Sentido de las Áreas del Plan de Estudios Actualizado*. México: Colegio Ciencias y Humanidades.

Colegio de Ciencias y Humanidades. (2009a). *Proyecto Académico para la revisión curricular. Perfil del alumno del CCH y su comportamiento escolar. Diagnóstico Académico.* Cuadernillo No. 2. México: Colegio de Ciencias y Humanidades.

Colegio de Ciencias y Humanidades. (2009b). *Proyecto Académico para la Revisión Curricular. Desempeño escolar y egreso de la población estudiantil.* Diagnóstico Académico. Cuadernillo No. 3. México: Colegio de Ciencias y Humanidades.

Colegio de Ciencias y Humanidades. (2011). *Diagnóstico Institucional para la revisión curricular.* México: Colegio de Ciencias y Humanidades.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* México: Reverté.

Díaz Barrriga, F., y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* México:Mc-Graw-Hill.

Díaz, C. (2011). Pruebas médicas. En Batanero, C., y Díaz, C. (Eds.). *Estadística con proyectos* (Cap. 5, pp. 125-148). Granada: Reprodigital.

Díaz, C., Cañadas, G. R., Batanero, C. (2011). Supervivencia en el Titanic. En Batanero, C., y Díaz, C. (Eds.). *Estadística con proyectos* (Cap. 9, pp. 219-246). Granada: Reprodigital.

Díaz, J., Batanero, M. C., y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad.* España: Síntesis.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía: Peter Lang, S. A., Editions scientifiques européennes.

Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for All Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas. En Jones, G. A. (Ed.). *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (Cap. 2, pp. 39-63). USA: Mathematics Education Library.

Greer, B., y Mukhopadhyay, S. (2005). Teaching and Learning the Mathematization of Uncertainty: Historical, Cultural, Social and Political Contexts. En Jones, G. A. (Ed.). *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (Cap. 12, pp. 297-324). USA: Mathematics Education Library.

Guzmán, J.C. (2008). Determinación de ideas intuitivas. En Quesada, R. *Cómo planear la enseñanza estratégica* (Cap. V, pp. 101-128). México: Limusa.

Inzunza, S. (2001). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad en el bachillerato, basada en el enfoque frecuencial y simulación computacional* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México D.F.

Jones, G. A. (Ed.). (2005). *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning.* USA: Mathematics Education Library.

Jones, G. A., y Thornton, C. A. (2005). An Overview of Research into the Theaching and Learning of Probability. En Jones, G. A. (Ed.). *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (Cap. 3, pp. 65- 92). USA: Mathematics Education Library.

Lafourcade, P. F. (1972). *Evaluación de los aprendizajes.* España: Cincel.

Laplace, P. S. (1988). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades.* (Trad. P. Castillo) México: Alianza Editorial Mexicana. (Trabajo original publicado en 1814) .

Larson, R. E. (1996). Heath *passport to algebra and Geometry and integrated approach*. USA: Editorial McDougal.

Maisel, L. (1973). Probabilidad y estadística. USA: Fondo educativo interamericano.

Marquez, A. (2009). *Dificultades y comprensión de la noción de probabilidad de eventos compuestos en estudiantes de secundaria.* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México D.F.

Mercado, M. (2004). *Del descubrimiento de resultados geométricos en un ambiente de geometría dinámica a la formulación de conjeturas y su prueba: Un estudio con alumnos de bachillerato.* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México D.F.

Muñoz, L.L., y Ávila, J. (Coords.).(2012). Población Estudiantil del CCH ingreso, tránsito y egreso. Trayectoria escolar: generaciones 2006-2012. México:Colegio de Ciencias y Humanidades.

National Council of Teachears of Mathematics. (2000) *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Polaki, M. V. (2005). Dealing with Compound Events. En Jones, G. A. (Ed.). *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (Cap. 8, pp. 191-214). USA: Mathematics Education Library.

Pratt, D. (2005). How Do Teachers Foster Students'Understanding of Probability?. En Jones, G. A. (Ed.). *Exploring Probability in School.Challenges for Teaching and Learning* (Cap. 7, pp. 171-189). USA: Mathematics Education Library.

Rugarcía, A. (1989). *El eslabón perdido en la educación universitaria.* Revista Didac. Semestral. *1*(otoño).

Santrock, J. (2006). *Psicología de la educación.* México: McGraw-Hill Interamericana.

Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J. J., y Cañizares, M.J. (1998, abril). *Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria.* Educación Matemática. *10*(1), 7-25.

Suppes, P., y Hill, S. (1999). *Introducción a la lógica matemática.* Barcelona: Reverté.

Watson, J. (2005). The Probabilistic Reasoning of Middle School Students. En Jones, G. A. (Ed.). *Exploring Probability in School.Challenges for Teaching and Learning* (Cap. 6, pp. 145-169). USA: Mathematics Education Library.

# ANEXOS

# Cuestionario

¿Cuántos años cumplidos tienes?_______

¿Cuál es tu promedio? _______ ¿Cuántas materias adeudas?_____

¿Qué piensas de las matemáticas?

______________________________________________________________

______________________________________________________________

¿Cuál es la forma de trabajo de los profesores que hasta ahora has tenido?

______________________________________________________________

______________________________________________________________

¿Estás acostumbrado a trabajar en equipo? ____________

¿Tus profesores de matemáticas te han enseñado con varios métodos o formas? _____

¿Tus profesores te permiten usar varios métodos para resolver problemas de matemáticas? ______

# Cuestionario

**Consideraciones:** En las tres primeras afirmaciones del cuestionario, se habla de lanzamientos de una moneda, considérala común y corriente. La letra “a” representa obtener águila en un lanzamiento determinado y la letra “s” representa obtener sol. Observa, la secuencia se conforma por el número de veces que se lanza la moneda, por ejemplo la secuencia “a s a”, representa una secuencia de resultados al lanzarse 3 veces una moneda y haber obtenido águila en el primero y tercer lanzamientos, y sol en el segundo lanzamiento.

**Instrucciones.** Lee cada una de las siguientes afirmaciones, toma tu tiempo para pensar y tacha la V si consideras la afirmación como verdadera o tacha la F si la consideras falsa:

a) Se lanza 6 veces una moneda al aire y los resultados obtenidos fueron “a s a s a s”.

Afirmación: La secuencia anterior es aleatoria V F

Justifica tu respuesta:

______________________________________________

b) Se lanza 4 veces una moneda y los resultados han sido “a a a a”.

Afirmación: Dada la secuencia de resultados anterior, sabemos que si lanzamos de nuevo la moneda, el resultado será “a” V F

Justifica tu respuesta:

______________________________________________

c) Se lanza 6 veces una moneda.

Afirmación: La secuencia “a s a s s s” es más probable que haya sucedido que la secuencia “s s s s s s” V F

Justifica tu respuesta:

______________________________________________

Por último, considera el juego del “melate”, donde en cada sorteo hay una combinación ganadora de 6 números:

a) Afirmación: Es más probable que la combinación ganadora sea 4, 5, 18, 12, 15, 33 que la combinación 1, 2, 3, 4, 5, 6 V F

Justifica tu respuesta:

______________________________________________

b) La combinación 12, 17, 24, 29, 32, 36 nunca ha salido como ganadora y todas las demás combinaciones ya lo han sido.

Afirmación: Dicho lo anterior, la combinación tiene mayor probabilidad de ser la ganadora que todas las demás V F

Justifica tu respuesta:

______________________________________________

# SESIÓN 1

**Asignatura: Estadística y Probabilidad I**

**Unidad III. Probabilidad**

**Tema: Fenómenos deterministas y aleatorios**

**Aprendizajes:** DIFERENCIA ENTRE FENÓMENO ALEATORIO Y FENÓMENO DETERMINÍSTAS Y COMPRENDE POR QUÉ LA PROBABILIDAD TIENE VALORES ENTRE CERO Y UNO.

**Alumnos**: ___________________________________________

___________________________________________

**Grupo:** _________ **Fecha:** __________ **Tiempo Estimado:** 90 min.

**Instrucciones:** Con otro compañero, realiza la siguiente práctica:

**Parte I. Fenómenos deterministas y aleatorios**

Existen fenómenos, en donde existe con certeza lo que va a ocurrir al efectuarse o llevarlos a cabo, por ejemplo: caída libre, la duración del movimiento de rotación de la Tierra, etc. A este tipo de fenómenos se les llama deterministas.

Pero la incertidumbre se encuentra en una gran variedad de fenómenos, unos ocurren en el trabajo, casa, escuela, e inclusive en las empresas y en el gobierno a los cuales les llamamos fenómenos aleatorios. Por esta razón, en la actualidad la probabilidad está teniendo un crecimiento notable en sus aplicaciones dentro de los diversos campos de la actividad humana, ya que ésta es un valor que le adjudicamos a los fenómenos y que nos indica que tan posible es que ocurra.

Otros grandes campos, en donde interviene el azar, es en los fenómenos atmosféricos y en los juegos, como por ejemplo: lanzamiento de dados, monedas, urnas, ruletas, loterías, etc.

A continuación, se enlista una serie de fenómenos, escriban en la línea, si corresponde a un fenómeno determinista o aleatorio.

a) Valor del peso en la bolsa mexicana de valores para el día de mañana ______________

b) El día exacto en el que se registrará el siguiente sismo en la Cd. de México _____________
c) Tiempo en el que tardará en caer un gis con un peso de 3 gramos a una altura de 3 metros _________
d) El lado de encima al dejar caer una moneda en donde ambos lados son águilas _____________

Piensen en dos fenómenos deterministas, en dos aleatorios y escríbanlos a continuación:

Fenómeno determinista es ________________________________________
____________________________________________________________

Fenómeno determinista es ________________________________________
____________________________________________________________

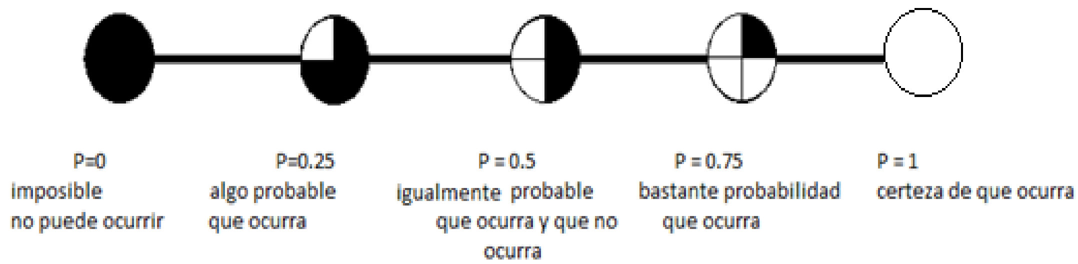
Fenómeno aleatorio es ___________________________________________
____________________________________________________________

Fenómeno aleatorio es ___________________________________________
____________________________________________________________

**Parte II.** A los fenómenos deterministas se les adjudica una probabilidad de ocurrencia de 1, y también se les denomina eventos seguros, ya que, tenemos la seguridad de lo que ocurrirá al efectuarse. Por ejemplo, sabemos que desde hace millones de años, después de que pasa la noche, amanece; entonces, seguro que mañana después de que haya pasado la noche, amanecerá; o también, al lanzar un dado común y corriente, es seguro que al lanzarlo, obtengamos un número menor a 10. ¿Qué otro ejemplo se les ocurre?
____________________________________________________________

Por el contrario, cuando el evento no ocurrirá o es imposible que suceda, le adjudicamos la probabilidad de ocurrencia de 0, y se les denomina eventos imposibles. Por ejemplo, la probabilidad de que gané la lotería sin tener ningún número; o también, esperar a obtener tres águilas al lanzar dos monedas. ¿Qué otro ejemplo se les ocurre? ____________________________________
____________________________________________________________

**Parte III.** Pero, ¿a todos los eventos se les adjudica la probabilidad de 0 o 1? ¡Claro que no!, ¡imagínense la situación con respecto a su calificación!, ¡pensar que es imposible que aprueben!, o por el contrario, ¡Pensar que es seguro que aprueben!, es decir, que la probabilidad de aprobar sea 0 o 1. ¡Que padre! Si tienen la seguridad de aprobar, o, ¡Que desgracia! Si es imposible aprobar. Por lo tanto, debemos pensar que la probabilidad de los eventos debe fluctuar entre 0 y 1, como lo indica el siguiente esquema:




Sabemos que, la probabilidad de que llueva el día de hoy o que no llueva el día de hoy es 1, ya que, estamos seguros que una de estas dos situaciones tiene que ocurrir. Por lo tanto, si se ha informado que la probabilidad de que llueva es 0.6, de que no llueva debe ser 0.4, para que la probabilidad de que suceda cualquiera de estas dos situaciones sea 1.

De la misma forma, si consideramos el evento aprobar el curso y le adjudicamos la probabilidad de 0.8, la probabilidad del evento no aprobar será de _______, ya que estamos seguros de que una de estas dos ocurrirá.

Consideren, ahora los siguientes enunciados:

a) Ya que no hay nubes. La probabilidad de que hoy llueva más tarde es de -0.90

b) La probabilidad de que una muestra mineral contenga cobre es de 0.28 y la probabilidad de que no contenga cobre es de 0.25
c) La probabilidad de que un abogado gane un caso es de 0.30 y la probabilidad de que lo pierda es cinco veces más alta.

¿Cuáles no manejan un valor apropiado para la probabilidad y por qué? ____________________________________________________________
____________________________________________________________
____________________________________________________________

La probabilidad de que cierto equipo de futbol gane su próximo partido es 0.2 y la podemos representar por $P(G) = 0.2$, de que empate es de 0.5 y la podemos representar por $P(E) = 0.5$. ¿Cuál es la probabilidad de que pierda? ____________________________________________________________

Un amigo me dijo que era <u>imposible</u>, que su novia esté embarazada, de hecho dice que la probabilidad de que lo esté es de 0.1. De acuerdo a lo que el amigo dice, ¿es apropiado el valor que se le asigna a la probabilidad de que esté embarazada?_________ ¿Por qué? ______________________________________
____________________________________________________________

Es igualmente probable que apruebe o repruebe el curso, de hecho cada una de ellas tiene una probabilidad de que suceda de 0.6. ¿Es válido lo anterior? __ ¿por qué? ____________________________________________________

La probabilidad de que salga en tres años es casi imposible, de hecho, la probabilidad de que eso suceda es 0.5. ¿Es correcto el valor que se maneja? ___ ¿por qué? _________________________________________________

# SESIÓN 2

**Asignatura: Estadística y Probabilidad I**

**Unidad III. Probabilidad**

**Tema: Enfoques de probabilidad**

**Aprendizajes:** QUE EL ALUMNO CONOZCA LOS ENFOQUES DE PROBABILIDAD PARA DETERMINAR LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO

**Alumnos**: ___________________________________________

___________________________________________

**Grupo:** _________ **Fecha:** __________ **Tiempo estimado:** 90 min.

**Instrucciones:** Con otro compañero, realiza la siguiente práctica.

**El enfoque clásico de probabilidad.** Laplace en 1812 dio la definición que se conoce como clásica de probabilidad**:** "La teoría del azar consiste en reducir todos los acontecimientos del mismo tipo a un cierto número de casos favorables al acontecimiento cuya probabilidad se busca. La proporción entre este número y el de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad, que no es, pues, más que una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el de todos los posibles."

Con la definición de Laplace, la probabilidad de un evento es una medida de la posibilidad que el evento pueda ocurrir. La probabilidad es una medida en una escala de 0 a 1. Entonces, de acuerdo a Laplace, para hallar la probabilidad de que un evento pueda ser "favorable", dividimos el número de maneras que puede ocurrir favorablemente entre el total de maneras que puede ocurrir el evento, es decir

$$P(evento) = \frac{número\ de\ maneras\ que\ puede\ ocurrir\ favorablemente}{total\ de\ maneras\ que\ puede\ ocurrir\ el\ evento}$$

Si contamos los favorables a cierto evento, ¿desde qué valor empezamos a contar? __________. Entonces, si no hay elementos favorables a un evento o suceso, su probabilidad será de _________. Y le llamamos evento ________. Si contamos los favorables a cierto evento, ¿podrá ser que haya más favorables de los que pueden ocurrir? _______ En general, el número máximo de elementos favorables a cierto evento o suceso será igual al número de elementos de _______. Por lo tanto, la probabilidad de este evento será igual a _____. A este evento le llamamos evento ________.

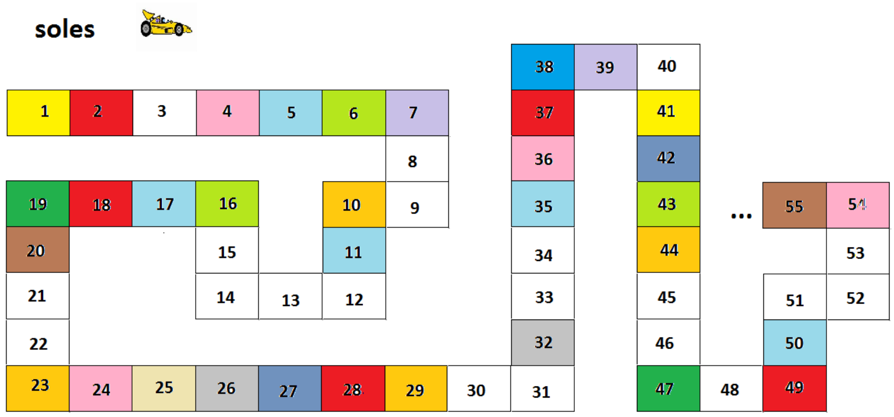
**El enfoque de probabilidad como frecuencia relativa.** La probabilidad como frecuencia relativa se calcula a partir de las frecuencias relativas observadas de los resultados de los experimentos o pruebas repetidas. Anteriormente, ya habías estudiado este concepto, ¿Cómo obtenías estas frecuencias? ______________________________________________________________

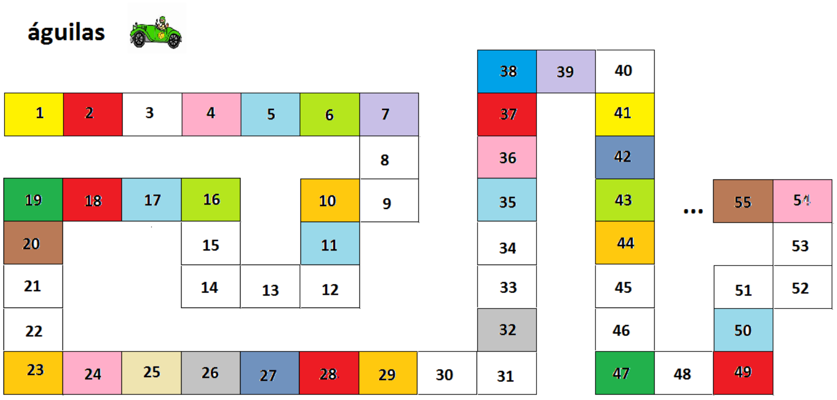
Por ejemplo, para obtener la probabilidad de obtener un sol al lanzar una moneda, podemos efectuar el experimento en varias ocasiones y anotar los resultados que vayamos obteniendo. ¡Qué les parece que lancemos una moneda 100 veces y registremos los resultados en la siguiente tabla! ¿Cuántos soles esperarías? ______

Utilicen la siguiente tabla para llevar el registro de soles y lanzamientos que llevan, sugiero que escriban una rayita por cada lanzamiento o sol:

| | |
|---|---|
| Lanzamientos | |
| Soles | |

Si desean pueden utilizar la hoja que contiene la pista de carreras, que es semejante a lo siguiente:






Por cada sol obtenido avancen una casilla, en caso contrario avancen una casilla en la pista de las águilas.

¿Quién creen que gané (soles o águilas)? ______________

Ninguna de las dos pistas llega hasta el 100, ¿cuál creen ustedes que es la razón?______________________________________________________________

De hecho cada pista llega hasta el 55, ¿por qué crees que se haya escogido ese número? _______________________________________________________

¿Cuál es la probabilidad de obtener sol siguiendo el enfoque de probabilidad como frecuencia relativa? ____________________________________________

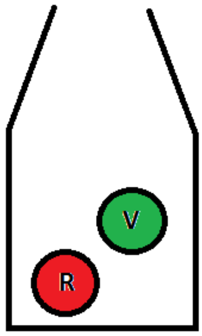
Y, ¿cuál es la probabilidad de obtener sol siguiendo el enfoque clásico de probabilidad? _______________________________________________________

Si efectuamos el experimento de lanzar un dado común y corriente 300 veces, ¿Cuántos cuatros esperaríamos? _______________


Otros experimentos aleatorios de los cuales podamos generar resultados aleatorios, podrán ser los siguientes: observar el género de 200 alumnos, el semestre escolar de 150 alumnos, los aciertos y fallos de tiros libres de un jugador de basquetbol, ¿Qué otro se te ocurre? ___________________

¿Crees que la tabla y las pistas de carreras te sirvan para llevar el registro? ________. ¿Cómo utilizarías las pistas, para contabilizar el género al observar a 100 alumnos? ________________________________________________________

Extracción de bolas




Pablo y María introdujeron dos bolas en una bolsa, de las cuales una era roja y otra verde. Después de remover las bolas, extrajeron una sin mirar, y resultó ser roja. Introdujeron la bola otra vez en la bolsa, la remueven y hacen otra extracción. ¿De qué color crees que será esta vez la bola? ____

Haz este experimento varias veces y comprueba si aciertas. ¿Piensas que es más fácil obtener el color rojo que el verde? ______.

Pablo y María han repetido 10 veces el experimento anterior y han anotado en su cuaderno los resultados. Cuando obtienen una bola roja escriben una R y si sale verde escriben una V. Estos son sus resultados:

**R V V R V R V V R V**

En total han sacado 4 veces la bola roja y 6 la verde. Como han hecho 10 extracciones, podemos expresar el resultado en fracciones:

Fracción de rojas: $\frac{4}{10}$; fracción de verdes :$\frac{6}{10}$

Realicen el experimento descrito 20 veces. Pero antes de hacerlo, ¿podrás decir, aproximadamente el número de rojas y verdes que van a salir? En tu cuaderno, anota el resultado de cada extracción. Por ejemplo, escribe R si sale roja y V si sale verde. El siguiente cuadro te servirá para anotar los resultados:

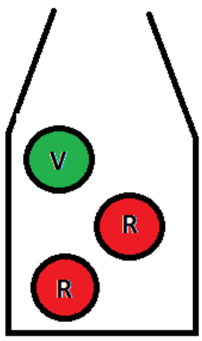
| | | |
|---|---|---|
| **estimación:** **rojos =** $\frac{\quad}{20}$ | | **verdes =** $\frac{\quad}{20}$ |
| **Resultados de 20 extracciones** | | |
| | **número de veces** | **Fracción** |
| **rojo** | | |
| **verde** | | |

Estudia los resultados obtenidos por los otros compañeros de la clase y discute con tus compañeros las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué color ha resultado más? _________

b) ¿Podrán adivinar el color que saldrá en la próxima extracción que hagas? __

c) Comparen los resultados obtenidos con la estimación hecha antes de realizar el experimento.



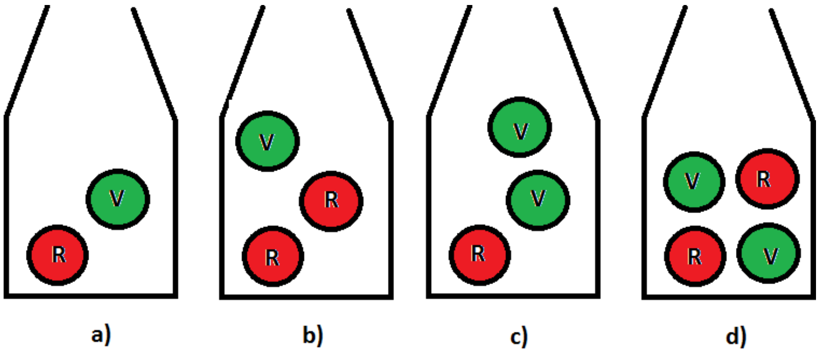

Repitan el experimento anterior, pero ahora introduce en la bolsa 3 bolas: 2 rojas y 1 verde.

¿Crees que ahora sea más fácil obtener rojo, o por el contrario, crees que es más fácil obtener verde? _______

Saca ahora 30 bolas y anota los resultados:

| | | |
|---|---|---|
| **estimación:** **rojos =** $\frac{\quad}{30}$ | | **verdes =** $\frac{\quad}{30}$ |
| **Resultados de 30 extracciones** | | |
| | **número de veces** | **Fracción** |
| **rojo** | | |
| **verde** | | |

Observa la siguiente figura, que representan 4 bolsas que contienen bolas de color rojo (R) y verde (V):




Contesta V (verdadero) o F (falso) a las siguientes preguntas:

a) Es más fácil obtener R en el inciso (a) que en el inciso (b) ______

b) Es más fácil obtener R en el inciso (b) que en el inciso (d) ______

c) Es más fácil obtener R en el inciso (a) que en el inciso (d) ______

d) Es más fácil obtener R en el inciso (a) que en el inciso (c) ______

e) Es más fácil obtener R en el inciso (b) que en el inciso (c) ______

Andrés tomó una de las bolsas para hacer extracciones de bolas y obtuvo el siguiente resultado: **R R V R R R V R**

¿Con qué bolsa piensas que estaba jugando? _______ ¿Por qué? __________

____________________________________________________________

**El enfoque de probabilidad Subjetiva.** La probabilidad subjetiva es un grado de creencia o percepción personal, este concepto no se basa en la repetitividad del evento, sino más bien en la experiencia personal de quien adjudica la probabilidad, de esta manera, la probabilidad representa un juicio personal de un fenómeno impredecible. Por ejemplo, ¿quién crees que va a ganar el Super Bowl?, al jugar el melate, sabemos que la probabilidad de que cada uno de los seis números sea seleccionado es la misma, pero nosotros creemos que los que van a ser seleccionados como el conjunto ganador son los míos. ¿Qué otro ejemplo puedes proporcionar? _____________________________________

____________________________________________________________

Realiza la siguiente actividad, titulada: <u>¿Qué creen que vaya a ocurrir?</u>

Daniel y Ana son dos estudiantes del CCH Naucalpan, muy buenos por cierto. Su profesor les ha pedido que preparen una previsión del tiempo para el día 7 de diciembre, fecha en que comenzarán sus vacaciones.

Puesto que están aún en el mes de octubre, Daniel y Ana no pueden predecir exactamente lo que ocurrirá. Por ello, han buscado una lista de expresiones para utilizar la descripción de un periódico. He aquí algunas de ellas: cierto, posible, bastante probable, hay alguna posibilidad, seguro, es imposible, casi imposible, se espera que, incierto, hay igual probabilidad, puede ser, sin duda.

En primer lugar, empiezan a ordenar las palabras según la confianza que expresan en que suceda algo y apoyados con el esquema que muestra entre qué valores fluctúa la probabilidad de los eventos. Este es el comienzo de su ordenación:

Imposible, casi imposible,….

¿Cuál es la ordenación completa de esas frases? ______________________

___________________________________________________________

He aquí algunas de las cosas que pueden suceder en Naucalpan el 7 de diciembre:

- Lloverá.
- Nevará y la nieve alcanzará un metro de altura.
- El día será cálido y soleado.
- Habrá un ligero viento.
- La temperatura máxima sobrepasará los 90 grados.
- La temperatura mínima será 10 grados bajo 0.
- El cielo estará despejado.
- La temperatura oscilará entre 25 y 35 grados.

Ana y Daniel han comenzado de la siguiente manera:

Previsión meteorológica para el día 7 de diciembre en Naucalpan:

- Puede ser que llueva.
- Es casi imposible que nieve y se alcance un metro de altura de nieve

  …

No estando satisfechos, han decidido asignar una probabilidad ha cada una de las frases y comienzan de la siguiente manera:

Previsión meteorológica para el día 7 de diciembre en Naucalpan:

Puede ser que llueva, ya que existe una probabilidad de 0.6. Es casi imposible que nieve y se alcance un metro de altura de nieve, de hecho la probabilidad de que esto suceda es de 0.01…

Completen el informe.

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

Ahora realicen un informe con respecto a su calificación y la de sus compañeros. Utilicen las siguientes frases y las que anteriormente ordenaste:

- Obtenga 10
- Apruebe
- Repruebe
- Obtenga 6
- No aprenda nada y obtenga 10
- Aprenda y repruebe
- Apruebe y obtenga 5
- Aprueben todos
- Reprueben pocos
- Apruebe y repruebe

Informe:

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

**Instrucciones:** Observa la siguiente ilustración para tener una idea del contexto y lee lo que tres de los personajes de la ilustración piensan.

**Contesta las siguientes preguntas de acuerdo a la ilustración y las actividades realizadas en las sesiones 1 y 2**

1. ¿Cuál es la diferencia entre un fenómeno determinista y aleatorio? ___________________________________________________________
2. ¿Cuál es la escala de probabilidad? ______________________________
3. Dibuja la escala de probabilidad

4. ¿A qué enfoque de probabilidad recurre Homero, el clásico, frecuencial o subjetivo? ________________________ ¿Por qué?________________ ___________________________________________________________
5. Kent piensa que perderá, ya que Homero ha perdido 8 de los 10 juegos que ha jugado, ¿qué enfoque de probabilidad ha utilizado para pensar o creer eso? __________________________________________________
6. Carlson piensa que casi es imposible que salga un as, ¿qué enfoque de probabilidad ha utilizado para pensar eso?________________________
7. Carlson, pensó algo utilizando la frase "casi imposible", ¿qué hubiera hecho que considerara que fuera "imposible" y no "casi imposible"? ___________________________________________________________ ___________________________________________________________
8. Si sale el as ganará Homero, ¿crees que sea imposible que gané Homero?_______ ¿Por qué?____________________________________ ___________________________________________________________ ___________________________________________________________
9. Kent piensa que Homero perderá, ¿qué probabilidad asigna a este evento? ________________________
10. Kent afirma "perderá Homero", es decir está seguro que así será, ¿qué probabilidad se le asigna a los eventos seguros? __________

# SESIÓN 3

**Asignatura: Estadística y Probabilidad I**

**Unidad III. Probabilidad**

**Tema: Descripción y Construcción del Espacio muestral, Representación de eventos a partir de enunciados.**

**Aprendizajes:** QUE EL ALUMNO CONSTRUYA Y DESCRIBA EL ESPACIO MUESTRAL; QUE EL ALUMNO REPRESENTE EVENTOS A PARTIR DE ENUNCIADOS

**Alumnos**: ___________________________________________

___________________________________________

**Grupo:** _________ **Fecha:** __________ **Tiempo estimado:** 90 min.

**Instrucciones:** Con otro compañero, realiza la siguiente práctica.

**Parte I.** Para el enfoque clásico y para el enfoque de probabilidad como frecuencia relativa, es necesario contabilizar el total de posibilidades o el número total de experimentos observados o realizados. Al **conjunto total de posibilidades** le llamamos **Espacio Muestral** y la denotaremos por $S$.

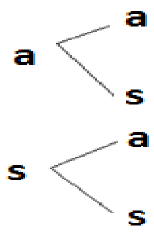
Por ejemplo, al lanzar una moneda al aire, ¿qué resultados podemos obtener? ____________. Y entonces el espacio muestral podrá escribirse de la siguiente manera: $S = \{a, s\}$ Y al lanzar dos monedas al aire, ¿qué resultados podemos obtener? ______________ .

Para representar los posibles resultados, podemos utilizar la siguiente tabla de doble entrada, complétala:

| | a | s |
|---|---|---|
| a | aa | |
| s | | |

Entonces $S = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

O también los podemos representar por medio de un diagrama de árbol, observen la siguiente figura:




Si lanzamos 3 monedas al aire, ¿cuáles son los posibles resultados del experimento? ____________________________________________________

Utiliza el siguiente espacio y lo que creas conveniente para obtenerlos.

Entonces $S = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

Y si lanzamos 4 monedas, <u>¿cuántos</u> son los posibles resultados del experimento? ________

Si lanzamos al aire una moneda y un dado común y corriente, ¿qué resultados podemos obtener? ___________. Si lo crees conveniente utiliza el siguiente espacio para crear tu diagrama de árbol y puedas obtener los resultados posibles del experimento aleatorio:

Entonces $S = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$

**Parte II.** Como el espacio muestral es un conjunto podemos formar subconjuntos suyos, a los que le llamamos **eventos**. Por ejemplo, al lanzar un dado, obtenemos el siguiente espacio muestral:

$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

Podemos formar eventos, como por ejemplo:

$$A = \{obtener\ par\} = \{2, 4, 6\}$$

Escribe los elementos de los siguientes subconjuntos de $S$:

$B \ = \{obtener\ número\ impar\} \ = \{ \qquad \qquad \}$

$C \ = \{número\ primo\} \ = \{2,3,5\}$

$D \ = \{múltiplo\ de\ 3\} \ = \{ \qquad \}$

$E \ = \{número\ mayor\ a\ 5\}$

$F \ = \{número\ menor\ o\ igual\ a\ 5\}$

$G \ = \{ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \} \ = \{5,6\}$

$H \ = \{múltiplos\ de\ 7\} \ = $ ______________

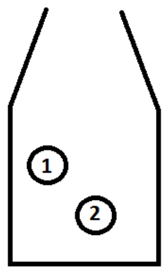
La probabilidad de $A$ es $P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$

¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los demás eventos?

**Parte III.** Bolas enumeradas.

Vas a utilizar bolas enumeradas de 1 a 5 y una bolsa.

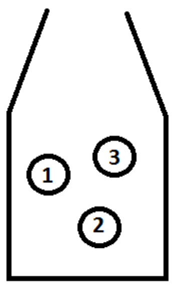
Introduce en la bolsa las bolas con los números 1 y 2.




Agita las bolas dentro de la bolsa y toma una sin mirar. Anota el número obtenido. Repite 10 veces la prueba, volviendo cada vez a introducir la bola a la bolsa. Puedes observar que, cuando sacas la bola, unas veces obtienes 1 y otras 2. No sabes con certeza cuál es el próximo resultado: sacar una bola en estas condiciones es un experimento aleatorio. Ya conoces la escala de probabilidad. Cuando realizamos un experimento aleatorio podemos asignar a cada suceso un número de esta escala, comprendido entre 0 y 1. Dicho número expresa la confianza que tenemos en que ocurra el suceso.

---

Introduce ahora en la bolsa la bola numerada con 3, además de la 1 y 2. Extrae una bola con los ojos cerrados.



a) ¿Cuáles son los posibles resultados? __________

b) Entonces

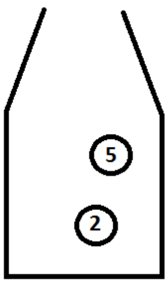
$S = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

c) ¿Cuál de estos resultados es más probable? __________

d) Asigna un número a la probabilidad de obtener la bola numero 3: ____________________

e) Da un valor a la probabilidad de sacar la bola número 1: _________

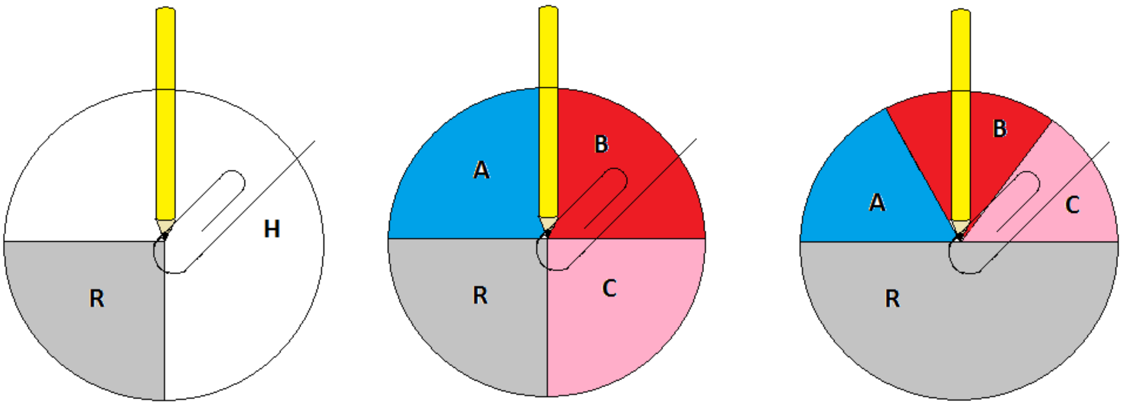
f) Asigna un número a la probabilidad de extraer la bola número 2: ____________________




Ahora, vacía la bolsa y coloca sólo las bolas 2 y 5. ¿Cuáles son los posibles resultados de tu experimento? ______.Asigna una probabilidad a cada uno de los resultados posibles: ____________ _____________________________

**Parte IV.** Ruletas

Utiliza ruletas, como la que se presentamos a continuación:




RULETA DE ANA　RULETA DE BETO　RULETA DE CARMEN

<u>a) Con respecto a la ruleta de Ana:</u>

Si diéramos un empujón al clip y observamos en que zona se detiene, ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en la zona R? _____ ¿Cuál es la probabilidad de que no se detenga en la zona R?_______ ¿Cuál es la probabilidad de que detenga en la zona H? _____ ¿Cuál es el espacio muestral? ___________________

Obtén las siguientes probabilidades

$P(R) =$ ____

$P(H) =$ ____

$P(R) + P(H) =$ ____

Gira 20 veces tu ruleta A y registra tus resultados,

| Región | Conteo |
|---|---|
| R | |
| H | |

¿Qué fracción de veces se detuvo en R? $P(R) =$ ____

¿Qué fracción de veces se detuvo en H? $P(H) =$ ____

---------------------------------------------------------------------------------------------------

<u>b) Con respecto a la ruleta de Beto:</u>

Si diéramos un empujón al clip y observamos en que zona se detiene, ¿cuál es la probabilidad de que se detenga en la zona R? _____ ¿Cuál es la probabilidad de que no se detenga en la zona R?_______ ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en la zona H? _____ ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en la zona B? ____ ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en la zona A o la zona R? ______ ¿Cuál es el espacio muestral? _______________

Obtén las siguientes probabilidades

$P(R) =$ ____

$P(H) =$ ____

$P(A) + P(B) + P(C) =$ ____

Gira 20 veces tu ruleta B y registra tus resultados

| Región | Conteo |
|---|---|
| A | |
| B | |
| C | |
| R | |

¿Qué fracción de veces se detuvo en R? $P(R) =$ ____

¿Qué fracción de veces se detuvo en H? $P(H) =$ ____

¿Qué fracción de veces se detuvo en A, B o en C?

$$P(A) + P(B) + P(C) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

------------------------------------------------------------------------------------------------------

<u>c) Con respecto a la ruleta de Carmen:</u>

Si diéramos un empujón al clip y observamos en que zona se detiene, ¿cuál es la probabilidad de que se detenga en la zona R? _____ ¿Cuál es la probabilidad de que no se detenga en la zona R?_______ ¿Cuál es la probabilidad de que detenga en la zona C? _____ ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en la zona B? ____ ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en la zona A o la zona R? ______ ¿Cuál es el espacio muestral? ______________

Obtén las siguientes probabilidades

$P(R) =$ ____

$P(H) =$ ____

$P(A) + P(B) + P(C) =$ ____

$P(R) + P(A) + P(B) + P(C) =$ ____

Gira 20 veces tu ruleta C y registra tus resultados:

| Región | Conteo |
|---|---|
| A | |
| B | |
| C | |
| R | |

¿Qué fracción de veces se detuvo en R? $P(R) =$ ____

¿Qué fracción de veces se detuvo en H? $P(H) =$ ____

¿Qué fracción de veces se detuvo en A, B o en C?

$$P\,(\,R\,) + \; P(\,A\,) + P\,(\,B\,) + P\,(\,C\,) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

d) Con respecto a la ruleta de Ana, Beto y Carmen:

¿En qué ruleta hay más probabilidad de que el clip se detenga en la zona R? ______

¿En qué ruletas hay idéntica probabilidad de que el clip se detenga en la zona R? _______

**Partes V. Chicos y grandes**. Hace algunas décadas, en las ferias, era común encontrar un juego llamado “Chicos y Grandes”, el juego consistía en colocar la apuesta en un tablero con casillas que contenían cada una de ellas un número; este número era uno de los posibles al lanzar dos dados comunes y corrientes, y sumar los puntos obtenidos; estos dados eran lanzados por una persona que jugaba “la banca”, siendo ésta, la encargada de dirigir el juego. El jugador apostaba en la sección de los “chicos” o apostaba en la sección de los “grandes”, ganando o perdiendo lo colocado en la apuesta. El jugador inclusive podía apostarle a algún número en particular, obteniendo en caso de ganar, lo doble de su apuesta. El número al que no podía apostar era al 7, ya que este no era considerado ni como “chico” ni como “grande”, y por lo tanto le pertenecía a “la banca”.

Sin tener una imagen del tablero, podemos generar varias preguntas:

¿Cuáles son los números posibles al lanzar dos dados y sumar los puntos obtenidos? ____________________________________________________

¿Cuáles eran considerados como “chicos”? ____________________________

¿Cuáles eran considerados como “grandes”? ___________________________

¿Por qué crees que “la banca” lo considere como de su propiedad en el juego? _______________________________________________________________

Al jugar, ¿A qué sección le apostarías (chicos o grandes)? ________________

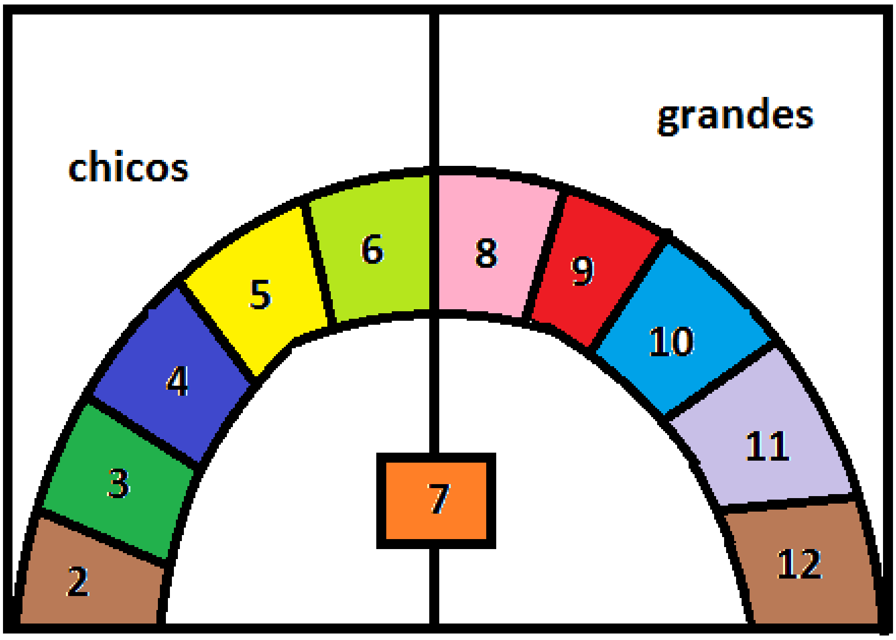
Y, ¿a qué número en particular le apostarías? ________________ ¿Por qué? _______________________________________________________________

Puedes utilizar la siguiente tabla de doble entrada para obtenerlos, sólo que te la proporcionamos de manera incompleta:

| + | 1 | | | | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

¿Cuál es el espacio muestral del juego? _________________________________

Observa la siguiente figura:




¿Así te imaginaste el tablero? ____

¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 en el juego? ______

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número chico? ______

¿Y uno grande? _________

¿Y cuánto vale P (12)?______

# SESIÓN 4

**Asignatura: Estadística y Probabilidad I**

**Unidad III. Probabilidad**

**Tema: Probabilidad de eventos simples**

**Aprendizajes:** QUE EL ALUMNO CALCULE PROBABILIDADES UTILIZANDO EL ENFOQUE CLÁSICO Y QUE PERCIBA QUE LA PROBABILIDAD OBTENIDA CON EL ENFOQUE FRECUENCIAL SE APROXIMA CADA VEZ MÁS AL VALOR TEÓRICO CONFORME EL NÚMERO DE EJECUCIONES DEL EXPERIMENTO AUMENTA.

**Alumnos**: ____________________________________________

____________________________________________

**Grupo:** _________ **Fecha:** __________ **Tiempo estimado:** 60 min.

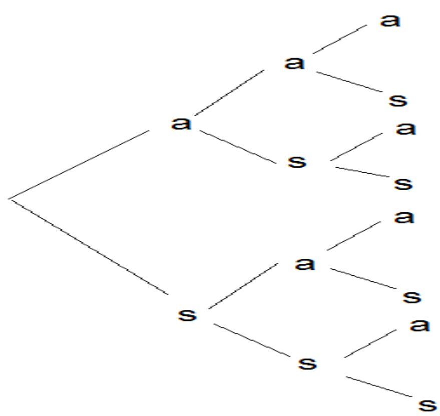
**Instrucciones:** Con otro compañero, realiza la siguiente práctica

**Parte I.**

Retomando el lanzamiento de 3 monedas, el conjunto que conformaba el espacio muestral es

$$S = \{aaa, aas, asa, ass, saa, sas, ssa, sss\}$$

El diagrama de árbol muestra sus elementos:




Entonces si lanzamos 3 monedas al aire, la probabilidad de obtener por lo menos 1 sol es $7/8$ y podemos representar al evento y su respectiva probabilidad como:

$$A = \{obtener\ por\ lo\ menos\ 1\ sol\}$$

y está constituido por los elementos

$$A = \{aas, asa, ass, saa, sas, ssa, sss\}$$

Y la probabilidad del evento $A$ la podemos representar por $P(A) = \frac{7}{8}$ y se lee "probabilidad de $A$ igual a siete octavos"

Aprovechemos el ejemplo para obtener las siguientes probabilidades:

Consideremos los siguientes eventos:

$$B = \{obtener\ tres\ resultados\ iguales\} = \{ \qquad \}$$

$$P(B) = \_\_\_\_\_$$

$$C = \{obtener\ exactamente\ 1\ águila\} = \{ \qquad \}$$

$$P(C) = \_\_\_\_\_$$

$$D = \{obtener\ a\ lo\ más\ 2\ soles\} = \{ \qquad \}$$

$$P(D) = \_\_\_\_\_$$

$$E = \{ \qquad \} = \{aaa, aas, asa, ass\}$$

$$P(E) = \_\_\_\_\_$$

$$F = \{ \qquad \} = \{\}$$

$P(F) = 0$; $F$ es un evento imposible

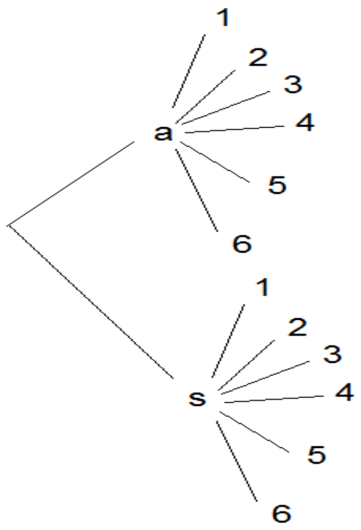
$$G = \{obtener\ un\ águila\ o\ un\ sol\ por\ lo\ menos\} = \{ \qquad \}$$

$P(G) = 1$ ; $G$ es un evento seguro

También analizamos los posibles resultados al lanzar un dado común y corriente y una moneda, obtuvimos que

$$S = \{a1, a2, a3, a4, a5, a6, s1, s2, s3, s4, s5, s6\}$$

El diagrama de árbol muestra sus elementos:




Consideremos los siguientes eventos:

Recuerda que los eventos son subconjuntos del espacio muestral,

$$A = \{obtener\ un\ número\ par\} = \{ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \}$$

$$P(A) = 6/12$$

$$B = \{obtener\ \ águila\} = \{ \qquad \qquad \qquad \}$$

$$P(B) = \_\_\_\_$$

$$C = \{obtener\ 2\ soles\} = \{\ \}$$

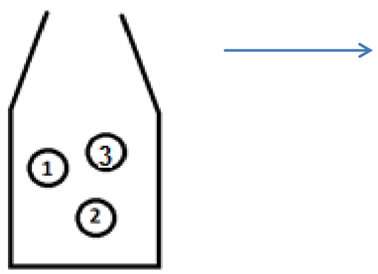
$P(C) = 0$; $C$ es un evento imposible

$$D = \{obtener\ un\ número\ menor\ a\ 10\} = \{ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \}$$

$P(D) = 1$; $D$ es un evento seguro

**Parte II. <u>Bolas enumeradas.</u>**

a) Consideremos una bolsa con una bola con el número 1, otra con el 2 y otra con el 3.




Y consideremos el experimento de tomar una bola sin mirar, anotar el número obtenido, regresar la bola a la bolsa, agitar la bolsa, volver a tomar una bola sin mirar, anotar el número obtenido y observar el número de dos dígitos que formamos. Es decir, tomar dos bolas con remplazo.

¿Cuál es tu espacio muestral? $S = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$

¿Cómo quedarían representados los posibles resultados por medio de un diagrama de árbol?

Vamos a definir algunos eventos y obtengamos algunas probabilidades:

$$A = \{formar\ un\ número\ de\ dos\ dígitos\ que\ sea\ par\} = \{ \qquad\qquad\qquad \}$$

$$P(A) = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

$$B = \{que\ la\ suma\ de\ los\ dos\ dígitos\ sea\ mayor\ a\ 3\ \} = \{ \qquad\qquad \}$$

$$P\ (B) = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$$

$$C = \{formar\ un\ número\ de\ dos\ dígitos\ que\ sea\ mayor\ a\ 30\} = \{ \qquad\qquad \}$$

$$P\ (C) = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

$$D = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \} = \{11, 22, 33\ \}$$

$$P(D) = 3/9 = \_\_\_\_\_\_$$

$$E = \{formar\ un\ número\ de\ dos\ dígitos\ que\ sea\ menor\ a\ 100\}$$

$$= \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$P(E) = 9\,/9 =$ 1; el evento $E$ es un evento ____________

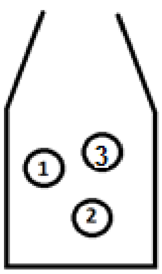
Consideren al evento $A$ y realicen el experimento 25 veces y perciban que la probabilidad obtenida con el enfoque frecuencial se aproxima cada vez más al valor teórico conforme el número de ejecuciones aumenta:

La probabilidad teórica de $A$ es $P(A) =$ ____

| **No. de experimento** | **No. de veces en que ha ocurrido el evento $A$** | $\boldsymbol{P(A)}$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 19 | | |
| 20 | | |
| 21 | | |
| 22 | | |
| 23 | | |
| 24 | | |
| 25 | | |

b) De nuevo, consideremos una bolsa con una bola con el número 1, otra con el 2, y otra con el 3.




El experimento consiste en tomar una bola sin mirar, anotar el número obtenido, no regresar la bola a la bolsa, agitar la bolsa, volver a tomar una bola sin mirar, anotar el número obtenido y observar el número de dos dígitos que formamos. Es decir, tomar dos bolas sin remplazo.

¿Cuál es tu espacio muestral? $S = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

¿Cómo quedarían representados los posibles resultados por medio de un diagrama de árbol?

Vamos a definir algunos eventos y obtengamos algunas probabilidades:

$$A = \{formar\ un\ número\ de\ dos\ dígitos\ que\ sea\ par\} = \{\qquad\qquad\qquad\}$$

$$P(A) = \_\_\_\_\_$$

$$B = \{que\ la\ suma\ de\ los\ dos\ dígitos\ sea\ mayor\ a\ 3\ \} = \{\qquad\qquad\}$$

$$P(B) = \_\_\_\_\_$$

$$C = \{formar\ un\ número\ de\ dos\ dígitos\ que\ sea\ mayor\ a\ 30\} = \{\qquad\qquad\}$$

$$P(C) = \_\_\_\_\_$$

$$D = \{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\} = \{\ 13, 23\}$$

$$P(D) = \_\_\_\_\_$$

$$E = \{formar\ un\ número\ de\ dos\ dígitos\ que\ sea\ menor\ a\ 100\} = \{\quad\}$$

$P(E) = 1.$ El evento $E$ es un evento ____________________

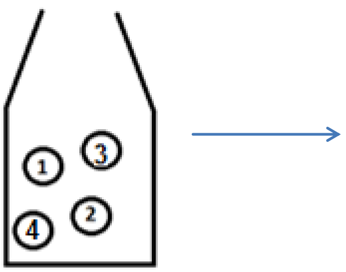
Consideren al evento $D$ y realicen el experimento 25 veces y perciban que la probabilidad obtenida con el enfoque frecuencial se aproxima cada vez más al valor teórico conforme el número de ejecuciones aumenta:

La probabilidad teórica de $D$ es $P(D) = $ ____

| **No. de experimento** | **No. de veces en que ha ocurrido el evento D** | **P(D)** |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 19 | | |
| 20 | | |
| 21 | | |
| 22 | | |
| 23 | | |
| 24 | | |
| 25 | | |

d) Consideremos una bolsa con una bola con el número 1, otra con el 2, otra con el 3 y otra con el 4.




Y consideremos el experimento de tomar una bola sin mirar, anotar el número obtenido, no regresar la bola a la bolsa, agitar la bolsa, volver a tomar una bola sin mirar, anotar el número obtenido y observar el número de dos dígitos que formamos. Es decir, tomar dos bolas sin remplazo.

¿Cuál es tu espacio muestral? $S = \{ \qquad \}$

¿Cómo quedarían representados los posibles resultados por medio de un diagrama de árbol?

Vamos a definir algunos eventos y obtengamos algunas probabilidades:

$A = \{formar\ un\ número\ de\ dos\ dígitos\ que\ sea\ par\} = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

$P(A) =$ ______

$B = \{que\ la\ suma\ de\ los\ dos\ dígitos\ sea\ mayor\ a\ 3\} = \{ \qquad\qquad \}$

$P(B) =$ _____

$C = \{formar\ un\ número\ de\ dos\ dígitos\ que\ sea\ mayor\ a\ 30\} = \{ \qquad\qquad \}$

$P(C) =$ _____

$D = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \} = \{14, 24, 34\}$

$P(D) = 3/12$

$E = \{formar\ un\ número\ de\ dos\ dígitos\ que\ sea\ menor\ a\ 100\}$

$= \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$

$P(E) = 1$; el evento $E$ es un evento ___________

$F = \{formar\ un\ número\ de\ dos\ dígitos\ múltiplos\ de\ 11\}$

$= \{ \}$

$P(F) = 0$; el evento F es un evento ____________

Consideren al evento $B$ y realicen el experimento 25 veces y perciban que la probabilidad obtenida con el enfoque frecuencial se aproxima cada vez más al valor teórico conforme el número de ejecuciones aumenta:

La probabilidad teórica de $B$ es $P(B) =$ _______

| **No. de experimento** | **No. de veces en que ha ocurrido el evento B** | **P(B)** |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 19 | | |
| 20 | | |
| 21 | | |
| 22 | | |
| 23 | | |
| 24 | | |
| 25 | | |

# SESIÓN 5

**Asignatura: Estadística y Probabilidad I**

**Unidad III. Probabilidad**

**Tema: Probabilidad de eventos simples**

**Aprendizajes:** QUE EL ALUMNO CALCULE PROBABILIDADES UTILIZANDO TÉCNICAS DE CONTEO

**Alumnos**: ____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

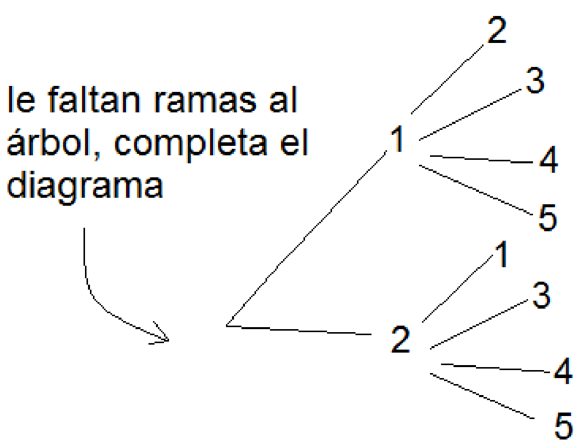
**Grupo:** __________ **Fecha:** ___________ **Tiempo estimado:** 90 min.

**Instrucciones:** Con otros dos compañeros, realiza la siguiente práctica

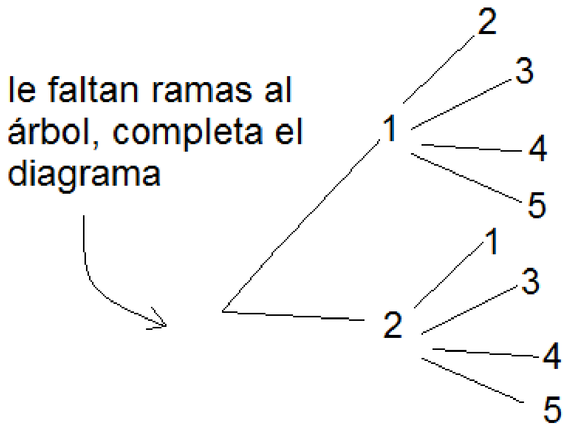
**Parte I. El estacionamiento.** El garaje de Ángel tiene 5 plazas, en el cual estacionan dos coches; el de Ángel y el de Benito, que pueden colocar cada coche en el lugar que prefiera, si no está ocupado. Este es un esquema de la cochera:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Como puedes ver, las plazas están enumeradas. Escribe una tabla con todas las formas posibles en que pueden estacionar Ángel y Benito sus coches. Para ayudarte puedes completar el siguiente diagrama llamado diagrama de ___________.



Esta semana ha venido otro vecino llamado Carlos, ¿serías capaz de escribir todas las formas en que Ángel, Benito y Carlos pueden colocar los coches en la cochera? Utiliza el diagrama de árbol:




¿Cuántas resultan? __________

¿Cuál es la probabilidad de que esta noche ángel ocupe la plaza número 1? ____________

¿Cuál es la probabilidad de que los tres coches queden estacionados en plazas consecutivas? __________

**Parte II.**

Los paraguas. Una señora ha invitado a tres amigas a tomar el té. Como llovía bastante, cada una de las tres invitadas trajo un paraguas que colocaron en la entrada de la casa. Terminada la merienda, la dueña de la casa ha dado un paraguas, al azar, a cada una de sus amigas. De los siguientes eventos, ¿Cuál crees que sea el más fácil que ocurra?:

- Cada una de las señoras recibió el paraguas correcto.
- Todas recibieron un paraguas cambiado.
- Sólo una de las visitantes recibió su propio paraguas.

Realiza el diagrama de árbol para darte una idea de lo anterior:

¿Cuál es la probabilidad de que cada una de las señoras reciba el paraguas correcto? ______

¿Cuál es la probabilidad de que todas reciban un paraguas que no sea el suyo? _______

¿Cuál es la probabilidad de que sólo una de las visitantes reciba su propio paraguas? ________

Trabajando en grupos de TRES alumnos, vamos a simular el reparto de los paraguas. Deben tener 3 hojas iguales dobladas, cada una de ellas representará a uno de los tres paraguas, por lo tanto, una hoja tendrá escrito la letra A, otra la B y la restante la C. Cada alumno tendrá asignada una letra, es decir un alumno será dueño del "paraguas A", otro del B y el otro del C. Revuélvanlas bien de tal forma que no sepan que letra tiene cada una de las hojas. Repártanse una cada quien y observen si les tocó su hoja.

Llenen la siguiente tabla y realicen el experimento 30 veces:

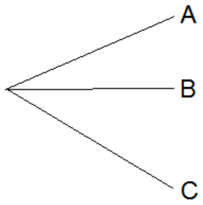
| **Experimento número** | **Paraguas que recibe el alumno:** | | | **No. de alumnos que reciben el paraguas correcto** |
|---|---|---|---|---|
| | **A** | **B** | **C** | |
| **1** | | | | |
| **2** | | | | |
| **3** | | | | |
| **4** | | | | |
| **5** | | | | |
| **6** | | | | |
| **7** | | | | |
| **8** | | | | |
| **9** | | | | |
| **10** | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **11** | | | | |
| **12** | | | | |
| **13** | | | | |
| **14** | | | | |
| **15** | | | | |
| **16** | | | | |
| **17** | | | | |
| **18** | | | | |
| **19** | | | | |
| **20** | | | | |
| **21** | | | | |
| **22** | | | | |
| **23** | | | | |
| **24** | | | | |
| **25** | | | | |
| **26** | | | | |
| **27** | | | | |
| **28** | | | | |
| **29** | | | | |
| **30** | | | | |

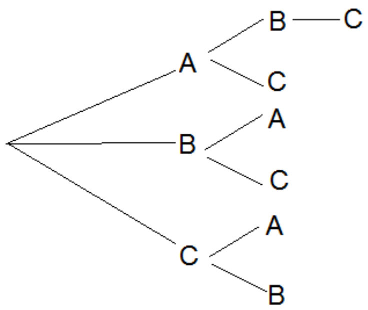
Escribe todas las ordenaciones distintas en que las letras A, B, C han resultado: ____________________________________________________________

¿Crees que existan otras? ____________________

Para estar seguros vamos a utilizar un diagrama en árbol. En primer lugar escribimos la primera letra posible en cada ordenación:




Después, escribimos la segunda letra posible para cada una de la primera elegida:

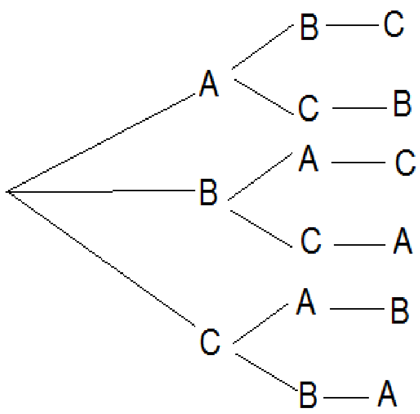



La tercera letra ya no puede elegirse, por lo que obtenemos todas las posibles ordenaciones de las tres letras.

Completa el árbol.

¿Cuántas ordenaciones diferentes han resultado? ________

El experimento aleatorio descrito puede considerarse como de tres extracciones sucesivas de los paraguas, que se hacen sin reemplazamiento. Los resultados posibles se pueden esquematizar en el siguiente diagrama de árbol:

| **1ra. Extracción** **2da. Extracción** **3ra. Extracción** | **Orden final** | **No. de paraguas correctos** | **Probabilidad** |
|---|---|---|---|
|  | ABC | 3 | 1/6 |
| | ACB | 1 | 1/6 |
| | BAC | 1 | 1/6 |
| | BCA | 0 | 1/6 |
| | CAB | 0 | 1/6 |
| | CBA | 1 | 1/6 |

En la primera extracción tenemos 3 resultados. Para cada uno de ellos, en la segunda tenemos 2. Para cada uno, en la tercera tenemos 1. Luego el número de ordenaciones distintas de 3 objetos es: $P_3 = (3)(2)(1) = 6$.
Puesto que hay 6 resultados posibles podemos esperar que cada resultado ocurra 1 de cada 6 veces cuando el experimento se repite muchas veces. Este hecho se expresa con la notación: $P(ABC) = \frac{1}{6}$ y se lee "probabilidad de obtener $ABC$ es igual a $1/6$".

Supongamos que el domingo siguiente la señora invita a cuatro amigas $A$, $B$, $C$ y $D$ a tomar el té. Escribe todas las formas posibles de entregar al azar los abrigos a las invitadas. Para ello realiza un diagrama de árbol:

a) ¿De cuántas formas diferentes pueden entregarse al azar 4 abrigos a 4 señoras? _________

b) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las 4 letras $A$, $B$, $C$ y $D$? ______

Llamaremos a este número las permutaciones de 4 objetos. Se representa por $P_4$.

c) Deduce una expresión para el cálculo de $P_n$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la señora $A$ reciba su abrigo? ______

e) ¿Cuál es la probabilidad de que todas reciban su abrigo? _______

**Parte III. Ejercicios.** Retomando las ideas anteriores, contesten lo siguiente:

a) En un examen con preguntas de opciones múltiples sobre historia se pide que el alumno ordene por fechas de menor a mayor tres acontecimientos históricos. Un alumno que no ha estudiado este tema decide responder al azar para tratar de acertar por casualidad. ¿Cuál es la probabilidad de que ordene todos los acontecimientos correctamente?_______

¿Cuál es la probabilidad de acertar una sola fecha por casualidad? _____

b) ¿De cuántas formas se pueden colocar en una estantería 3 libros? ____ ¿Y cuatro? ____

c) ¿Cuántas palabras distintas, aunque carezcan de significado, se pueden formar con todas las letras de la palabra AMOR sin que ninguna letra se repita? __________

d) Sin repetir dígitos ¿cuántos números se pueden formar con los dígitos 2, 3, 4, 5? _______

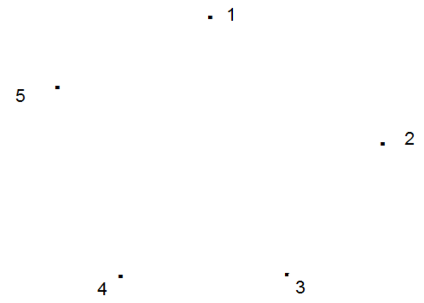
e) Una persona olvidó los 3 últimos dígitos de un número telefónico de 8 dígitos, esta persona recuerda que ninguno de esos 8 dígitos se repite. De hecho el recuerda que el número comienza con 53789_ _ _.Marcó todos los números que podían ser, atinándole hasta el último posible. ¿Cuántos números tuvo que marcar? ______ Puedes ayudarte con un diagrama de árbol.

f) Marcos y Enrique intervienen en un torneo de tenis. La primera persona que gane 2 juegos seguidos o que complete 3 gana el torneo. Con ayuda de un diagrama de árbol, obtengan cuales son los posibles resultados ______________________________________________________________

**Parte IV.**

<u>¿Cuántas rectas se pueden trazar?</u>

Como sabes por dos puntos pasa una sola recta. ¿Podrías indicar cuántas rectas pasan 5 puntos entre los cuales no hay 3 alineados? En el esquema adjunto hemos numerado los puntos de 1 a 5, dibuja todas las rectas que puedas:




¿Cuántas has dibujado? ________

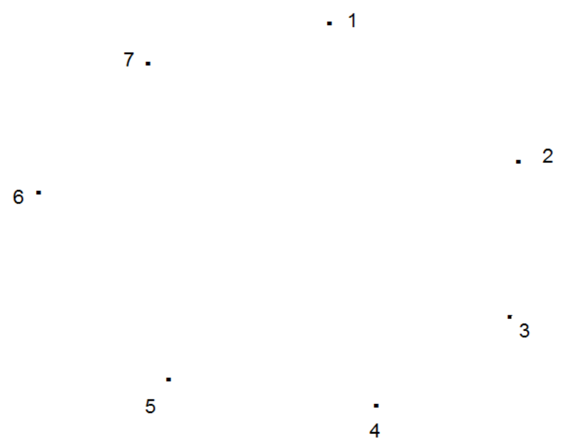
En el siguiente cuadro hemos anotado todas las rectas posibles:

| 1er punto | 2do punto: 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | + | + | + | + |
| 2 | 0 | + | + | + |
| 3 | 0 | 0 | + | + |
| 4 | 0 | 0 | 0 | + |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Fíjate en las casillas. Si es posible trazar desde el primer punto al segundo una recta que no se haya dibujado anteriormente se anotó una cruz; en caso contrario se anotó un 0.

Como ves el número de cruces dibujadas toma forma de triangulo. ¿Cuántas cruces aparecen dibujadas? _____ ¿Cuántos 0? _____

Añadimos 2 puntos más a los 5 que teníamos. Dibuja todas las rectas que puedas.



Construye una tabla como la anterior para determinar el número de rectas que se pueden trazar uniendo los puntos.

Responde las siguientes preguntas:

¿Cuántas casillas tiene la tabla? _____

¿Cuántas cruces aparecen? ______

¿Cuántos ceros? ______

¿Cuántas rectas aparecen por 7 puntos, de los cuales no hay 3 alineados? _____

¿Podrías saber, sin hacer la tabla, cuántas rectas diferentes pasan por 10 puntos no alineados? _____

¿Y por 20? ______

¿Y por 100? _______

Asignaturas optativas. Alejandra ha acudido a la ventanilla de servicios estudiantiles a inscribirse al siguiente semestre. Su semestre consta de tres asignaturas, 1 obligatoria (Filosofía) y dos optativas. Las asignaturas entre las que puede elegir las optativas son las asignaturas:

- Cálculo (C)
- Estadística (E)
- Biología (B)
- Física (F)
- Química (Q)
- Religión (R)

Realicen un diagrama de árbol para escribir todas las posibles elecciones:

Tomen en cuenta que, por ejemplo, sería lo mismo CE que EC

¿Cuántas combinaciones distintas puede hacer? ______

Como Alejandra es un poco indecisa decide echarlo a la suerte. Para hacer la elección escribe en un papel cada uno de los nombres de las asignaturas y toma 2 sin mirar. Calculen las probabilidades de los siguientes eventos:

a) Dos de las asignaturas hayan sido F y Q.

b) Una de las asignaturas haya sido B.

c) Tres de las asignaturas hayan sido R y Q.

**Parte V. Ejercicios.** Retomando las ideas anteriores, resuelvan los siguientes ejercicios:

a) Ana tiene que realizar un examen sobre 10 temas, pero sólo ha estudiado 8. El examen consta de 2 temas.

- ¿Qué probabilidad de aprobar tiene si ha de contestar bien a los 2? ____
- ¿Y si basta con responder 1?______

b) En una reunión de 5 presidentes, cada uno de ellos saludo de mano a los demás, ¿cuántos saludos de mano se realizaron?_______

# SESIÓN 6

**Asignatura: Estadística y Probabilidad I**

**Unidad III. Probabilidad**

**Tema: Probabilidad de eventos compuestos**

**Aprendizajes:** QUE EL ALUMNO REPRESENTE Y OBTENGA PROBABILIDADES DE EVENTOS COMPUESTOS, UTILIZANDO DIAGRAMAS DE VENN Y TABLAS DE DOBLE ENTRADA.

**Alumnos**: ___________________________________________

___________________________________________

___________________________________________

**Grupo:** _________ **Fecha:** __________ **Tiempo estimado:** 120 min.

**Instrucciones:** Con otros dos compañeros, realiza la siguiente práctica:

**Parte I.** Antes de comenzar, debemos aclarar que en matemáticas y en particular en probabilidad trabajamos con la lógica de la O incluyente, es decir que al referirnos a dos características o más, puede ocurrir que se satisfagan 1, 2 o más. Por ejemplo, esto sucede cuando decimos, “debe ser estudiante o trabajador”, y debemos entender que puede reunir 1 o inclusive las dos características.

Debe de quedar claro lo anterior, debido a que habitualmente, se usa, la lógica del O exclusivo, es decir, es uno o el otro, pero no pueden ser los dos. Por ejemplo, cuando decimos es de primero o de segundo, queda claro que es imposible que puedan ser las dos.

**Parte II.** Utilicen una bolsa que funcione como una urna para contener:

- Un papelito amarillo que tenga escrito el número 13→(a13)
- Un papelito amarillo que tenga escrito el número 2→ (a2)
- Un papelito verde que tenga escrito el número 19→ (v19)
- Un papelito verde que tenga escrito el número 5→ (v5)
- Un papelito blanco que tenga escrito el número 9→ (b9)

- Un papelito blanco que tenga escrito el número 10→ (b10)
- Un papelito blanco que tenga escrito el número 4→ (b4)
- Un papelito rojo que tenga escrito el número 6→ (r6)
- Un papelito rojo que tenga escrito el número 5→ (r5)
- Un papelito rojo que tenga escrito el número 11→ (r11)
- Un papelito rojo que tenga escrito el número 12→ (r12)
- Un papelito rojo que tenga escrito el número 10→ (r10)

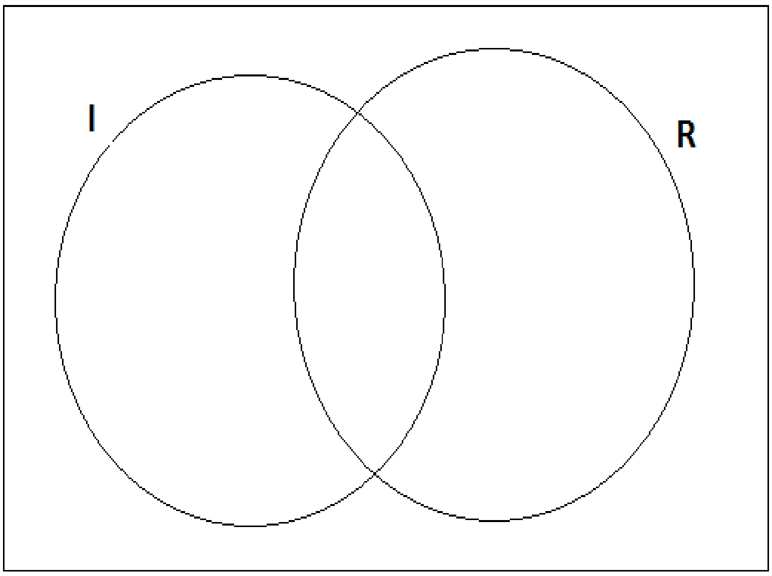
¿Cuántos papelitos tienen en el recipiente? ______ Recuerden que es importante saberlo para obtener probabilidades de eventos.

Vamos a definir también, los siguientes eventos:

$$A = \{papelito\ amarillo\} = \{\qquad\}$$
$$B = \{papelito\ blanco\} = \{\qquad\}$$
$$V = \{papelito\ verde\} = \{\qquad\qquad\}$$
$$R = \{papelito\ rojo\} = \{\qquad\qquad\qquad\qquad\}$$
$$M = \{papelito\ con\ número\ escrito\ mayor\ a\ 7\} = \{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\}$$
$$I = \{papelito\ con\ número\ escrito\ impar\} = \{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\}$$

**Tomen** los papelitos de color rojo y también **tomen** los papelitos con número impar. ¿Cuántos son? ______

El siguiente diagrama es llamado diagrama de Venn:



Observen que en él se está representando a:

- El evento $R$
- El evento $I$
- A la urna

¿Qué está representando a la urna? _________

Escriban en el lugar que le corresponde dentro del diagrama, el nombre de cada uno de los papelitos que tomaron (por ejemplo, el papelito rojo con el número 11 se llama r11)

¿En dónde escribieron el nombre de los papelitos que son rojos y tienen escrito un número impar?_________________________________________________

Ahora escriban el nombre de los demás papelitos, es decir a los que ni son rojos ni tampoco tienen un número impar escrito, dicho de otra manera a los que no tienen ninguna de estas dos características. ¿En qué región del diagrama escribieron su nombre? ____________________________________
______________________________________________________________

¿Cuántos papelitos no son rojos? ______ Entonces, observen que efectivamente hayan escrito ese número de nombres de papelitos fuera del círculo que representa al evento $R$.

El evento “papelito rojo **o** con número impar” está conformado por los papelitos que tienen por lo menos una de las dos características, es decir, o es rojo, o tiene escrito un número impar o inclusive es rojo con número impar, es decir tiene las dos características. Dicho evento está representado por la unión de los dos eventos y lo simbolizamos como: $R \cup I$. ¿Cuántos son los elementos de este evento compuesto? _______. Si elegimos al azar de la urna a un papelito, ¿cuál es la probabilidad de que este sea rojo o con número impar? _________. Con símbolos, ¿cómo podríamos representar esta probabilidad? ___________.

El evento “papelito rojo **y** con número impar” está conformado por los papelitos que estrictamente reúnen las dos características. Dicho evento está representado por la intersección de los dos eventos y lo simbolizamos como: $R \cap I$. ¿Cuántos son los elementos de este evento compuesto? _______. Si elegimos al azar de la urna a un papelito, ¿cuál es la probabilidad de que este sea rojo y con número impar? _________ Con símbolos, ¿cómo podríamos representar esta probabilidad? ________

El evento “papelito que **no** es rojo” está conformado por los papelitos que tengan la característica de no ser rojos. Dicho evento está representado por el complemento del evento $R$ y lo simbolizamos como: $\overline{R}$. ¿Cuántos son los elementos de este evento compuesto? _______. Si elegimos al azar de la urna a un papelito, ¿cuál es la probabilidad de que este no sea rojo? _________ Con símbolos, ¿cómo podríamos representar esta probabilidad? ________

En conclusión, podemos decir que la palabra “o” la podemos simbolizar por ____, que en la lógica de conjuntos representa la unión. La “y” la podemos simbolizar por ____, que en la lógica de conjuntos representa la intersección. Y, la palabra “no”, la podemos simbolizar por ____, que en la lógica de conjuntos representa el complemento.

Considerando de nuevo el evento $R \cup I$, toma en tus manos los papelitos de este evento, es decir, los que reúnan **por lo menos** 1 de las dos características, ¿Cuántos papelitos son? _____Y si seleccionamos una papelito al azar, ¿cuál es la probabilidad de $R \cup I$?_______. La probabilidad de la unión de dos eventos puede obtenerse por medio de la siguiente expresión:

$$P(R \cup I) = \quad P(R) + P(I) - P(R \cap I)$$
$$= \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

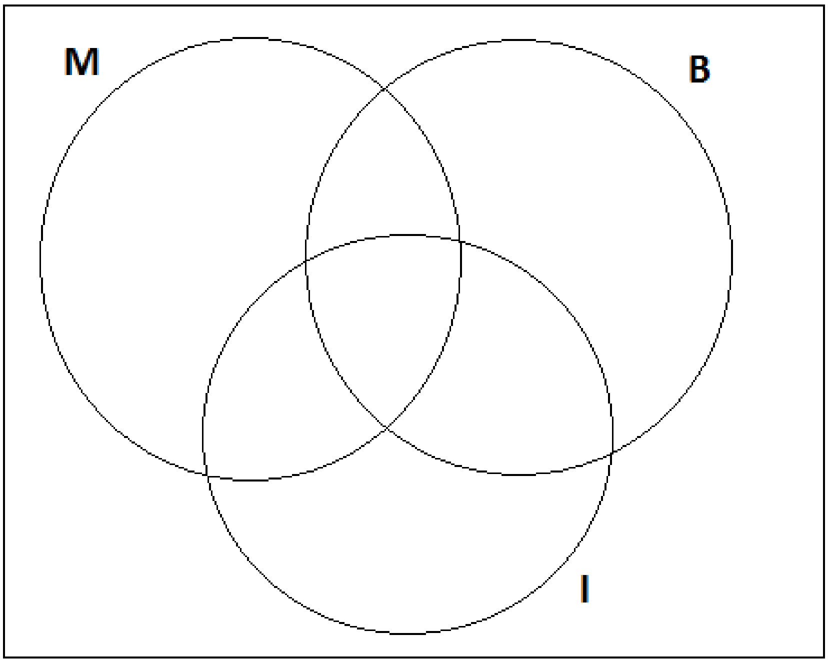
¿Cuál crees que sea la razón por la que se resta la $P(R \cap I)$? ______________
______________________________________________________________

Consideren al evento $R \cup I$ y realicen el experimento 25 veces y perciban que la probabilidad obtenida con el enfoque frecuencial se aproxima cada vez más al valor teórico conforme el número de ejecuciones aumenta. La probabilidad teórica es $P(R \cup I) =$ ______

| **No. de experimento** | **No. de veces en que ha ocurrido el evento $\boldsymbol{R \cup I}$** | $\boldsymbol{P(R \cup I)}$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 19 | | |
| 20 | | |
| 21 | | |
| 22 | | |
| 23 | | |
| 24 | | |
| 25 | | |

**Parte III.**

Ahora consideremos los eventos $M$, $B$ e $I$, representados en el siguiente diagrama de Venn.




Escriban el nombre de cada uno de los papelitos en el lugar que le corresponda dentro del diagrama de Venn.

Iluminen de color rosa la región que corresponde a los "papelitos que contengan un número mayor a 7 **y** que sea número impar **y** que sean blanco". Representen lo anterior por medio de símbolos: ______________

Iluminen de color café la región que corresponde a los "papelitos que **no** tengan escrito un número mayor a 7 **y** que **no** tengan un número impar **y** que **no** sean blanco". Representen lo anterior por medio de símbolos: ________________

Iluminen de color azul la región que corresponde a los "papelitos que sean blancos y que **no** tengan un número impar **y** que **no** sean blanco". Representen lo anterior por medio de símbolos: _______________

**Parte IV.** Ahora consideren los eventos $V$ y $A$.

¿Cómo simbolizan al evento compuesto $V$ y $A$? __________ ¿Existen papelitos que reúnan las características de ser verdes y amarillos al mismo tiempo? ______ Si los eventos no comparten elementos, podrán dibujarlos separados dentro del diagrama de Venn. Utilicen el siguiente rectángulo para tal fin.

Cuando los eventos no tienen elementos en común se les llama **eventos mutuamente excluyentes**, y la probabilidad de dicho evento compuesto es _________.

Es decir que $P(V \cap A) = 0$, siendo $V$ y $A$ eventos mutuamente excluyentes.

Representen en un diagrama de Venn a los eventos $R$, $B$, $V$ y $M$. Iluminen cada región de diferente color y escriban en cada una de las regiones que se formen dentro del diagrama de Venn lo que representa:

Representen en un diagrama de Venn a los eventos $B, V, M$ e $I$. Iluminen cada región de diferente color y escriban en cada una de las regiones que se formen dentro del diagrama de Venn lo que representa utilizando la simbología:

**Parte V.** En una evaluación estudiantil del personal docente, $V$ es el evento que un profesor es muy capaz en su área, $D$ es el evento de que aplica pruebas difíciles y $R$ es el evento de que califica en forma estricta, enuncia con palabras las probabilidades que se expresan como:

e) $P(\overline{D})$

______________________________________________

f) $P(D \cup R)$

______________________________________________________________

g) $P(\bar{V} \cap \bar{R})$

______________________________________________________________

h) $P(V \cap R)$

______________________________________________________________

¿Cómo representarías los siguientes enunciados?

d) No califique en forma estricta.

____________________________________

e) No aplique pruebas difíciles pero califique en forma estricta.

____________________________________

f) No sea muy capaz en su área y/o no aplique pruebas difíciles.

____________________________________

**Parte VI.** Un profesor realizó una encuesta a todos sus alumnos del CCH Naucalpan para obtener la siguiente información referente al tipo de persona que dicen ser (tranquilo, estudioso o inteligente):

- 20 dicen ser tranquilos únicamente, es decir solo esa característica.
- 15 dicen ser tranquilos y estudiosos pero no inteligentes.
- 5 dicen ser tranquilos, estudiosos e inteligentes.
- 20 dicen ser estudiosos e inteligentes pero no tranquilos.
- 10 dicen no tener ninguna de esas características.
- 55 dicen tener la característica de ser estudioso (no se especifica que tengan esta característica únicamente).
- 38 dicen tener la característica de ser inteligentes (no se especifica que tengan esta característica únicamente).
- 15 dicen ser tranquilos e inteligentes (no se especifica que tengan esas dos características nada más).

Vamos a representar a los siguientes eventos como:

$$I = \{alumno\ inteligente\}$$

$$T = \{alumno\ tranquilo\}$$

$$E = \{alumno\ estudioso\}$$

Para indicar el evento “el alumno es inteligente y estudioso” escribimos $I \cap E$, usando el símbolo de la intersección de conjuntos. Entonces, ¿cómo indicarías que el alumno tiene las tres características? __________ ¿Sabrías indicar que significan los eventos siguientes?

a) $I \cap \bar{E}$ ________________________________________________________

b) $\bar{T} \cap E$ ________________________________________________________

c) $\bar{E} \cap \bar{I}$ ________________________________________________________

Para simbolizar el evento “el alumno al menos una de las tres características la tiene” escribimos $I \cup T \cup E$, usando el símbolo de la unión de conjuntos.

¿Cómo simbolizas que “el alumno al menos tiene una de estas dos características: Inteligente o Estudioso”? _________

¿Sabrías simbolizar que significan los eventos siguientes?

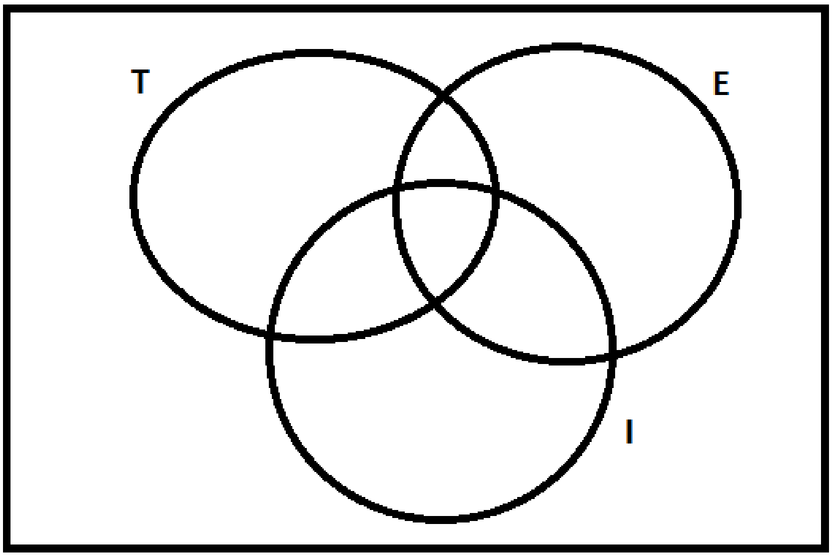
a) $I \cup \bar{E}$ ________________________________________________________

b) $\bar{T} \cup E$ ________________________________________________________

¿Cómo podríamos indicar el evento “no ocurre que el alumno al menos tenga una característica”? ___________

Retomemos la información que se proporciona, si el profesor consideró a todos sus alumnos, ¿cuántos tiene? ________

Para responder a la pregunta anterior, debemos pensar que algunos alumnos fueron considerados dos o inclusive tres veces, lo cual podría dificultar dar una respuesta. Para ello podemos recurrir a un diagrama de Venn, dicho esquema servirá para representar la información:




Observa en el esquema que un círculo representa al evento $T$, otro al evento $I$ y otro al evento $E$. ¿Qué representa que no estén separados los círculos? ____________________________________________________________

¿En qué región del rectángulo, representarías a los 10 alumnos que no tienen ninguna característica? ___________________________________________

Uno de los datos que se nos proporcionan como información, es que 55 dicen tener la característica de ser estudioso (nota que no se especifica que tengan esta característica únicamente), lo cual quiere decir que dentro del círculo que representa al evento $E$, debe de representar en total a 55 alumnos.

Con tus compañeros de equipo, discutan y llenen todas las regiones del diagrama de Venn con el número de alumnos correcto, para contestar de manera acertada a la pregunta: ¿Cuántos alumnos tiene el profesor? ____________

Ilumina de color verde la región $\bar{T} \cap E$

Ilumina de amarillo la región $\bar{T} \cap \bar{E} \cap I$

**Parte VII.** Utilizando el diagrama de Venn, el cual fue de gran ayuda para saber el TOTAL de alumnos del profesor, obtén las siguientes probabilidades al seleccionar al azar a un alumno:

a) La probabilidad de que sea tranquilo ____________

b) La probabilidad de que no sea estudioso ___________

c) La probabilidad de que sea inteligente y estudioso ___________

d) La probabilidad de que al menos tenga una de las tres características __________

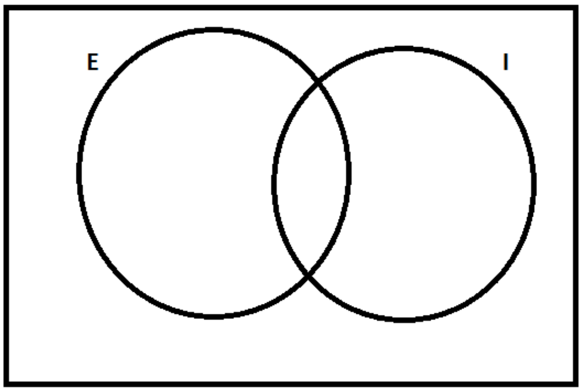
e) La probabilidad de que no tenga ninguna de esas tres características __________

f) $P(T \cup E)$= ____________

g) $P(\overline{T} \cap E)$=____________

h) $P(\overline{T} \cap \overline{E})$=_____________

Ya sabemos cuántos alumnos tiene el profesor, y consideremos que la característica de ser tranquilo no importa, ¿cómo quedaría representada la información por medio de un diagrama de Venn?




La información del diagrama anterior, la puedes representar por medio de una tabla de contingencia, llena los espacios correspondientes:

| | $I$ | $\overline{I}$ |
|---|---|---|
| $E$ | | |
| $\overline{E}$ | | |

Si sumamos los alumnos estudiosos y los no estudiosos, ¿cuántos alumnos debe de haber? _______

Elabora una tabla de doble entrada para representar $I$ y $T$

| | |
|---|---|
| | |

Elabora una tabla de doble entrada para representar $T$ y $E$

| | |
|---|---|
| | |

¿Cuál es $P(T \cap E)$? __________

¿Cuál es $P(T \cup E)$? ___________

# SESIÓN 7

**Asignatura: Estadística y Probabilidad I**

**Unidad III. Probabilidad**

**Tema: Probabilidad de eventos compuestos**

**Aprendizajes:** QUE EL ALUMNO CALCULE PROBABILIDADES CONDICIONALES Y DE EVENTOS INDEPENDIENTES, UTILIZANDO DIAGRAMAS DE VENN, TABLAS DE DOBLE ENTRADA, EXPRESIONES MATEMÁTICAS Y DIAGRAMAS DE ÁRBOL.

**Alumnos**: ___________________________________________

___________________________________________

___________________________________________

**Grupo:** _________ **Fecha:** __________ **Tiempo estimado:** 120 min.

**Instrucciones:** Con otros dos compañeros, realiza la siguiente práctica:

**Parte I.**

¿Has sentido que te restringen? ¿Qué te condicionan? Una o inclusive varias condiciones hacen que tus actividades o posibilidades para hacer cosas se limiten; por ejemplo, cuando pides permiso para ir a una fiesta que empezará a las 8 pm y terminará a las 12 pm, en tu casa te lo conceden diciéndote "¡claro puedes ir hijo (a)! Entonces te alegras porque piensas que posiblemente vas a poder hacer varias cosas:

- Bailar hasta 4 horas seguidas.
- Tomar con tus amigos.
- Fumar.
- Ir a tomar un cafecito después de la fiesta.
- Comer botanas hasta reventar.
- Llevar a tu casa a tu amigo(a) después de la fiesta para que se duerma ahí.

Y de manera repentina y haciéndote despertar de tus sueños, quien te da el permiso añade: "… ¡pero te quiero antes de las 11 y sin aliento alcohólico!" Y entonces lo único que posiblemente puedas hacer es:

- Bailar, pero ya no 4 horas seguidas y
- Comer botanas hasta reventar.

Tu conjunto de posibilidades se redujo enormemente, ¡No te preocupes, esto les pasa a todos! ¡Inclusive a los espacios muestrales!

Considera la siguiente situación hipotética:

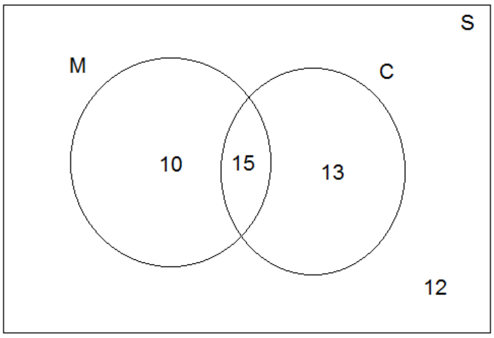
"La calificación de cada uno de los 50 estudiantes (35 son mujeres), será reprobatoria excepto 1. La persona acreedora de esa calificación aprobatoria será seleccionada al azar"

Ana Gabriela es una integrante de ese grupo, ¿cuál es la probabilidad de que sea la acreedora de la calificación aprobatoria? _____. Pero, si la persona que apruebe tiene que ser mujer ¿cuál es la probabilidad de que apruebe Ana Gabriela **dada** esta condición? _____ Bueno, te percataste que al igual que con la situación de la fiesta, hubo una reducción del número de elementos del espacio muestral, que en esta otra situación a un inicio estaba constituido, por ¿cuántos elementos? _______. Y con la condición a ¿cuántos se redujo?_______.

Ahora consideremos otra situación:

El grupo está compuesto por 50 alumnos, de los cuales 25 de ellos utilizan el metro para llegar a la escuela, 28 combi y 15 ambos. Si seleccionamos a un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no utilice ninguno de estos dos transportes para llegar a la escuela? Vamos a representar la información por medio de un diagrama de Venn, pero antes, definamos a los eventos $M = \{Utilice\ metro\}$, $C = \{Utilice\ combi\}$. Recuerda que $C \cap M$ simboliza a, ¿qué enunciado? ________________________________. Y la probabilidad es igual a $P(C \cap M) =$ ______.

Entonces, el diagrama de Venn:




a) ¿Cuántos alumnos no utilizan ni metro ni combi para llegar a la escuela? ___

b) ¿Cuántos alumnos utilizan metro o combi para llegar a la escuela? ____

c) ¿Cuántos no toman metro para llegar a la escuela? _____

Simboliza y calcula sus probabilidades:

Podemos también representar la información por medio de una tabla de doble entrada, llena los espacios correspondientes:

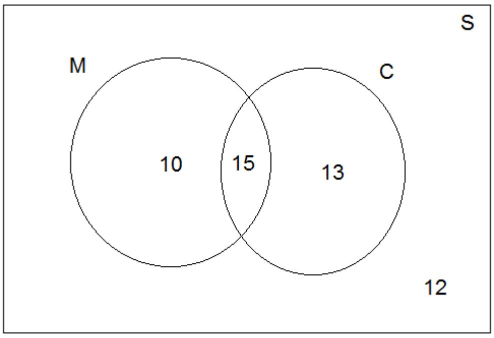
| | $M$ | $\overline{M}$ |
|---|---|---|
| $C$ | | |
| $\overline{C}$ | | |

Puedes observar, que la tabla de doble entrada también es muy útil para calcular probabilidades, ¿podrías calcular las probabilidades anteriores haciendo uso de ella? ____Si seleccionamos a un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice el metro para llegar a la escuela? _________

Con símbolos: _______________

Vamos a condicionar la situación, por ejemplo: si el evento $C$ ocurre, es decir, ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado utilice metro **dado** que utiliza combi para llegar a la escuela? Con la condición dada, el espacio muestral que estaba constituido de 50 alumnos se redujo a, ¿cuántos alumnos?____, pues efectivamente, ya que sólo ellos son los que reúnen la característica de utilizar combi para ir a la escuela.

Colorea de azul la región del diagrama de Venn que paso la condición, es decir, el círculo que representa al evento $C$.




Realiza lo mismo en la tabla de contingencia, colorea de azul los cuadros que pasaron la condición:

| | $M$ | $\overline{M}$ |
|---|---|---|
| $C$ | | |
| $\overline{C}$ | | |

Con esa condición, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra $M$, dado $C$? __________

La anterior probabilidad la podemos simbolizar como $P(M\backslash C)$ y se lee "probabilidad de $M$ dado $C$" y de acuerdo al contexto de la situación significa "probabilidad de que el alumno seleccionado utilice metro dado que utiliza combi para llegar a la escuela".

¿Cuál será la probabilidad de que **no** ocurra el evento $M$, dado que $C$ ocurrió? Es decir, $P(\overline{M}\backslash C)$=________

Observa el diagrama de Venn o la tabla de doble entrada y date cuenta que para obtener este tipo de probabilidades, podemos hacer uso de la siguiente expresión: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Haciendo uso de la expresión corrobora tu resultado:

$$P(\overline{M}|C) = \frac{\boxed{\phantom{xx}}}{\boxed{\phantom{xx}}}$$

También podemos condicionar la situación por medio del evento $M$, es decir, el evento $M$ ocurrirá o suponemos que ocurrirá, ¿cuál es la probabilidad de que $C$ dado $M$? Es decir, $P(C|M) =$__________

**Parte II.**

Vamos a realizar otro ejemplo utilizando el siguiente experimento:

Se lanza un dado, **si** el número es par, ¿cuál es la probabilidad de que sea primo?

La condición es "el número es par", definimos a los eventos:

$$A = \{número\ par\} = \{2,4,\_\}$$

$$B = \{número\ primo\} = \{2,\_\_,5\}$$

Por lo tanto $A \cap B = \{2\}$, es decir únicamente el 2 tiene ambas características.

Entonces, utilizando la expresión:

$$P(B \setminus A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Y con diagrama de Venn, ¿cómo representas los posibles resultados?

¿Y con la tabla de doble entrada?

| | |
|---|---|
| | |

Simboliza y obtén las siguientes probabilidades:

1. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener número primo si ya sabemos se obtuvo número par?
2. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener número par si ya sabemos se obtuvo número impar?
3. ¿Cuál es la probabilidad de obtener número primo si ya sabemos se obtuvo número impar?

**Parte III.**

Realiza los siguientes ejercicios:

1. Un vendedor de autos caros tiene 23 clientes de los cuales 17 son millonarios, 8 jubilados, incluidos 4 que también son millonarios. Si seleccionamos al azar a uno de sus clientes, ¿cuál es la probabilidad de que el cliente sea millonario dado que es jubilado?
   Utiliza la tabla de doble entrada, el diagrama de Venn y en ambos casos coloreen. También utilicen la expresión matemática para obtener el resultado.

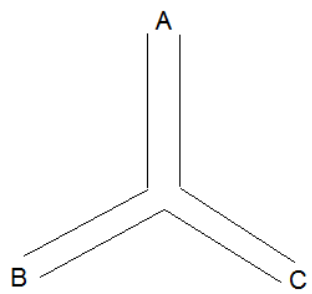
2. De un grupo de 48 personas que asisten a una fiesta, 30 fuman, 25 consumen bebidas alcohólicas y 10 ni fuman ni consumen bebidas alcohólicas. Al seleccionar a una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que ingiera bebidas alcohólicas **dado** que esta persona sabemos o suponemos que **no** fuma?

   Utiliza la tabla de doble entrada, el diagrama de Venn y en ambos casos coloreen. También utilicen la expresión matemática para obtener el resultado.

**Parte IV.**

<u>Bifurcación por canales y laberintos</u>

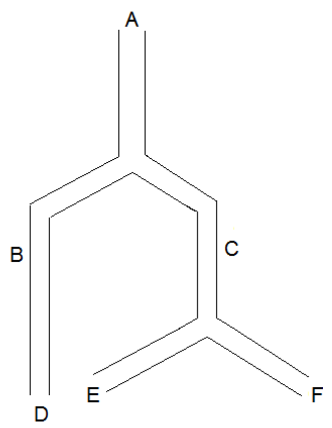
1) Fíjate en la máquina siguiente: Si dejamos caer una bola por la abertura $A$, ésta puede deslizarse hasta caer en $B$ o bien seguir por la derecha hasta ir a $C$.




Si echamos 100 bolas por la abertura: ¿cuántas crees que pasarán, aproximadamente, por cada uno de los orificios $B$ y $C$? __________

¿Cuál será la probabilidad de que, al echar la bola por la abertura, caiga por el canal $B$?

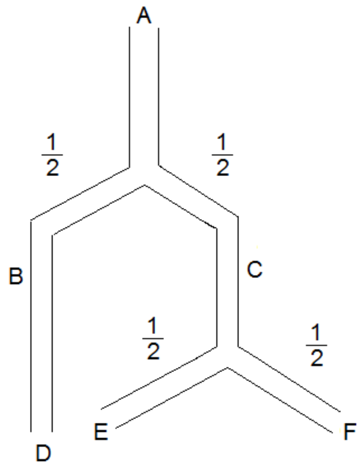
2) Fíjate ahora en la máquina siguiente: Si lanzamos 100 bolas por el orificio $A$, ¿Cuántas irán, aproximadamente, por cada canal?_____



3) Para calcular la probabilidad de que una bola pase por cada uno de los canales lo hacemos por pasos:

En primer lugar observamos que al soltar la bola por $A$, tiene igual posibilidad de ir por $B$ o por $C$.

Así, podemos decir: $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(C) = \frac{1}{2}$




Todas las bolas que pasan por el punto $B$ caen en $D$.

Por tanto, $P(D) = P(B) = \frac{1}{2}$

Las bolas que pasan por el canal $C$ tienen igual posibilidad de ir hacia $E$ que hacia $F$. La probabilidad de ir a $E$ es, por tanto, la mitad de la probabilidad de llegar a $C$:

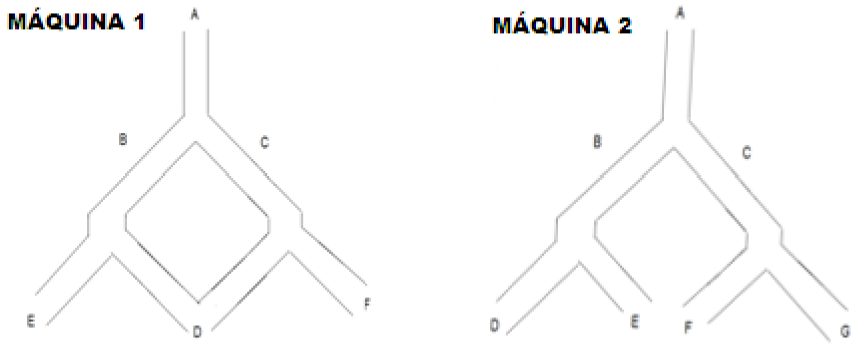
$$P(E) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Por la misma razón, la probabilidad de que la bola termine en $F$ es:

$$P(F) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Observa que $P(D) + P(E) + P(F) = 1$

4) Juan e Isabel van a la feria. Encuentran una atracción con dos máquinas:




Se gana un premio si la bola cae en $D$.

¿En qué máquina jugarías?_____

¿Podrías calcular la probabilidad de que la bola caiga en $D$ en cada caso?______

Observa la máquina 1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al echar una bola por el orificio $A$ termine en $F$? _______

b) Si sabemos que la bola ha caído por el canal $B$, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a $F$? _______

c) Si sabemos que la bola ha caído por el canal $C$, ¿cuál es la probabilidad de que acabe en $F$? _______

De las respuestas a) y b) puedes ver que la probabilidad del evento $\{la\ bola\ llega\ a\ F\}$ cambia si la bola cayó por el canal $B$. Se dice que estos dos eventos son **dependientes: la probabilidad de que ocurra uno es distinta si sabemos que el otro ha ocurrido.**

También, de las respuestas a) y c) puedes ver que la probabilidad del evento $\{la\ bola\ llega\ a\ F\}$ varía si sabemos que la bola pasó por el canal $C$. Luego los eventos $\{caer\ en\ C\}$ y $\{caer\ en\ F\}$ son dependientes.

6) Ahora, contesta

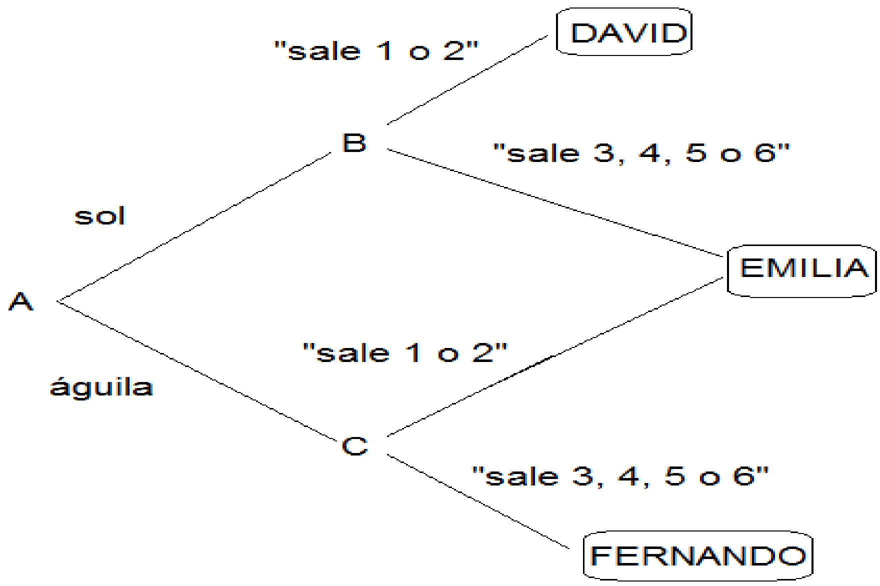
¿Cuál es la probabilidad de que la bola vaya a $D$? ______

Y si sabemos que ha pasado con seguridad por el canal $C$, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a $D$? ______

En este caso, la probabilidad de $\{caer\ en\ D\}$ no cambia aunque conozcamos que la bola "ha pasado por $C$". Los eventos $\{caer\ en\ D\}$ y $\{pasar\ por\ C\}$ son **independientes.**

Esto no ocurre en la máquina 2, fíjate en ella:
¿Cuál es la probabilidad de que la bola vaya a $D$? ______
Y si sabemos que ha pasado con seguridad por el canal $C$, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a $D$? ______

En este caso, la probabilidad de $\{caer\ en\ D\}$ cambia conociendo que la bola "ha pasado por $C$". Los eventos $\{caer\ en\ D\}$ y $\{pasar\ por\ C\}$ son **dependientes.**
**Parte V.**
David, Emilia y Fernando han inventado un juego con las siguientes reglas:




Realicen el juego:

- Coloquen en $A$ 60 frijoles
- Lancen una moneda. Si sale sol mueven un frijol a $B$; si sale águila lo trasladan a $C$. Repitan este experimento hasta que no queden frijoles en $A$.
- Los frijoles de $B$ entre David y Emilia del siguiente modo: Lancen un dado; si resulta 1 o 2 se da un frijol a David; si sale 3, 4, 5 o 6 el frijol

corresponde a Emilia. Repitan este experimento hasta que no queden más frijoles en $B$.

- Trasladen los frijoles de $C$ a Emilia o Fernando de la forma siguiente: Arrojar un dado; si se obtiene 1 o 2, dan un frijol a Emilia; si sale 3, 4, 5 o 6, el frijol es para Fernando. Continúen lanzando el dado hasta que no queden frijoles en $C$.
- Gana la partida quien consiga más frijoles.

¿Quién ganó? ______

Con las reglas del juego anterior, ¿Cuál es la probabilidad de que un frijol que sale de A llegue a David?______ ¿Y de que sea para Emilia? _____

Si sabemos que un frijol ha pasado a $B$, ¿Cuál es la probabilidad de que ese frijol termine en David? _____

¿Piensas que los eventos $\{llegar\ el\ frijol\ a\ David\}$ y $\{llegar\ a\ B\}$ son dependientes?______

# SESIÓN 8

**Asignatura: Estadística y Probabilidad I**

**Unidad III. Probabilidad**

**Tema: Probabilidad de eventos compuestos**

**Aprendizajes:** QUE EL ALUMNO REFORCE LOS APRENDIZAJES CORRESPONDIENTES AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES CONDICIONALES Y DE EVENTOS INDEPENDIENTES, UTILIZANDO DIAGRAMAS DE VENN, TABLAS DE DOBLE ENTRADA, EXPRESIONES MATEMÁTICAS Y DIAGRAMAS DE ÁRBOL.

**Alumnos**: ________________________________________

________________________________________

________________________________________

**Grupo:** _________ **Fecha:** __________ **Tiempo estimado:** 120 min.

**Instrucciones:** Con otros dos compañeros, realiza la siguiente práctica:

**Parte I.**

En muchas ocasiones nos encontraremos con eventos independientes, eventos que no influyen la probabilidad de otro si ocurren o no. Si un evento A y un evento B son independientes, entonces la probabilidad de que sucedan simultáneamente se obtendrá multiplicando la $P(A)$ por la $P(B)$. Esta probabilidad se simboliza por $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y se lee "probabilidad de que sucedan $A$ y $B$ al mismo tiempo es igual a la probabilidad de $A$ por la probabilidad de $B$".

**Parte II.** Consideremos las ruedas de una bicicleta

Para que la bicicleta pueda servir, tanto la llanta $A$ y $B$ deben estar en perfectas condiciones, o de menos no deben de estar ponchadas, por

lo que si falla una, o las dos, la bicicleta estará defectuosa.
Si una llanta no tiene ningún defecto, diremos que es buena; de lo contrario, que es defectuosa. Para representar escribiremos:

$$A = \{la\ llanta\ A\ está\ buena\}$$

$$B = \{la\ llanta\ B\ está\ buena\}$$

$$\bar{A} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$\bar{B} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

Supongamos que el 10 por 100 de las llantas utilizadas para cierta marca de bicicletas son defectuosas. Es decir, que 90 por 100 son buenas.
a) Calcula las probabilidades:

$P(A) =$ $\qquad$ $P(B) =$ $\qquad$ $P(\bar{A}) =$ $\qquad$ $P(\bar{B}) =$

b) Calcula también las siguientes expresiones:
$P(A) + P(\bar{A}) =$ $\qquad$ $P(B) + P(\bar{B}) =$

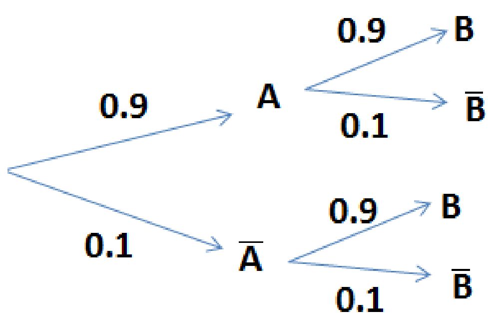
c) Para indicar el evento $\{las\ llantas\ A\ y\ B\ son\ buenas\}$ escribimos $A \cap B$, usando el símbolo de la intersección de conjuntos. ¿Sabrías indicar que significan los eventos siguientes?
$A \cap \bar{B}$ ____________________________________________________________
$\bar{B} \cap A$ ____________________________________________________________
$\bar{B} \cap \bar{A}$ ____________________________________________________________

d) Para indicar el evento "al menos una de las llantas $A$ o $B$ son buenas" escribimos $A \cup B$, usando el símbolo de la unión de conjuntos. Observa el siguiente diagrama en el que representamos como conjuntos los eventos $A, \bar{A}, B$ y $\bar{B}$.

| | $A$ | $\bar{A}$ |
|---|---|---|
| $B$ | $A \cap B$ | $\bar{A} \cap B$ |
| $\bar{B}$ | $A \cap \bar{B}$ | $\bar{A} \cap \bar{B}$ |

e) Colorea los rectángulos que representan el evento $A \cup B$

Mediante el siguiente diagrama en árbol vamos a representar todas las situaciones que pueden producirse:



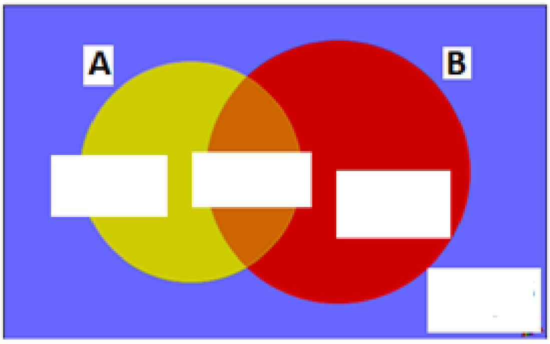

| suceso | | probabilidad |
|---|---|---|
| $A \cap B$ | ... | 0.9x0.9= 0.81 |
| $A \cap \bar{B}$ | ... | |
| $\bar{A} \cap B$ | ... | |
| $\bar{A} \cap \bar{B}$ | ... | |

Calcula las probabilidades de los siguientes eventos:

- Sólo $A$ sirva.
- Tanto $A$ como $B$ son llantas buenas.
- Al menos una de las llantas es buena.

Calcula la probabilidad del evento $A \cup B$ y compárala con cada una de las sumas siguientes: $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ = ______________________

f) Llena los espacios del siguiente diagrama de Venn, con la respectiva probabilidad de cada región, recuerda que la suma de todas esas probabilidades debe ser 1, puesto que el rectángulo representa el espacio muestral, es decir, todas las posibilidades:




**Parte III.**

$$A \ = \ \{Alberto\ llegue\ temprano\}$$

$$B = \ \{Beatriz\ llegue\ temprano\}$$

$$C \ = \ \{Carolina\ llegue\ temprano\}.$$

¿Crees que podamos considerar que los tres eventos son independientes entre sí? ____. ¿Por qué? ______________________________________________

_______________________________________________________________

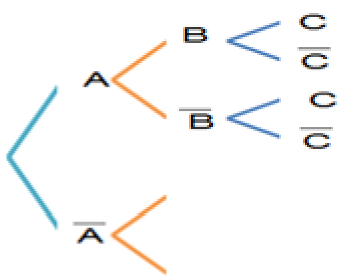
De acuerdo a las estadísticas la $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y $P(C) = 0.5$. Encuentre la probabilidad de que:

a) Los tres lleguen temprano
b) Ocurra exactamente uno de esos eventos, es decir, A llegue temprano y los otros 2 no, B llegue temprano y los otros 2 no, o, C llegue temprano y los otros 2 no.

Completa lo siguiente:

$$P(A) = 0.3;\ P(B) = 0.4;\ P(C) = \_\_;\ P(\bar{A}) = \_\_;\ P(\bar{B}) = \_\_\ y\ P(\bar{C}) = 0.5$$

Con un diagrama de árbol también podemos representar la información, con la ayuda de tus compañeros de equipo, lo pueden lograr, utilicen el siguiente esquema y complétenlo:



**Parte IV.** A continuación se presenta una situación para que obtengas algunas probabilidades, obtenlas por medio de un diagrama de árbol, diagrama de Venn, tabla de doble entrada y por expresión matemática.

Dos ambulancias se mantienen listas para emergencias. Debido a la demanda y a la posibilidad de fallas mecánicas, la probabilidad de que una ambulancia específica esté disponible cuando se necesite es .8. La disponibilidad de una ambulancia es independiente de la otra.

a) En caso de catástrofe, ¿cuál es la probabilidad de que ambas ambulancias estén disponibles?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna esté disponible?
c) Si se necesita una ambulancia en una emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que al menos haya una disponible?
d) Si se necesita una ambulancia en una emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que haya solamente una disponible?

Espacio para tus diagramas y tu tabla.

## Instrumento de evaluación

1. ¿Qué característica tienen los eventos mutuamente excluyentes? ________

_________________________________________________________________

2. ¿Cuál es la probabilidad de que sucedan al mismo tiempo dos eventos mutuamente excluyentes? ___________________________________________

3. ¿Cómo se observan los círculos que representan dos eventos mutuamente excluyentes en un diagrama de Venn? ________________________________

4. ¿Cómo obtienes y cómo simbolizas la probabilidad de que sucedan $A$ o $B$?

_________________________________________________________________

5. ¿Qué significa que dos eventos sean independientes? _________________

_________________________________________________________________

6. ¿Cómo obtienes probabilidades condicionales? _______________________

7. La probabilidad de que Karina pase su examen de aritmética es de 0.7 y de que Carlos pase ese mismo examen de 0.6. Consideremos que estos dos eventos son independientes. Por medio de una tabla de doble entrada, un diagrama de Venn y un diagrama de árbol, encuentra la probabilidad de que...

a) Ninguno pase el examen.
b) Los dos pasen el examen.
c) De menos uno pase el examen.
d) Solamente uno pase el examen.

8. En una urna colocaron una bola azul con el número 3, una bola roja con el número 4, otra roja con el número 5 y una roja más con el número 7. Se definen los eventos:

$$R = \{bola\, roja\}$$

$$A = \{bola\, azul\}$$

$$I = \{bola\, con\, número\, impar\}$$

Si selecciona al azar a una bola de la urna, simboliza y obtén la probabilidad de que…

a) La bola sea roja.
b) La bola tenga un número impar.
c) La bola sea roja y tenga un número impar.
d) De que sea roja y azul.
e) Los eventos $R$ y $A$, son mutuamente excluyentes.
f) Si la bola es roja, ¿cuál es la probabilidad de que tenga número impar?
g) Si la bola tiene un número impar, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

Sugerencia: Utiliza diagrama de Venn y coloca cada bola en el lugar correspondiente.

**Cuestionario de evaluación de las sesiones**

¿Qué te parecieron las sesiones? ____________________________________

¿Qué te gustó? ____________________________________________________

¿Qué no te gustó? __________________________________________________

¿Qué cambiarías? ___________________________________________________

¿Aprendiste? _______________________________________________________

¿Cómo te sentiste con este tipo de sesiones? ____________________________

¿Te gustó trabajar en equipo? ___ ¿Por qué?

___________________________________________________________________

De la actitud del profesor, ¿qué te gustó o qué no te gustó? ________________

___________________________________________________________________

Del 0 al 10, evalúa al profesor ______

Del 0 al 10, ponte una calificación en estas sesiones _______