



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Bifurcaciones secundarias y la bifurcación
de Hopf-Turing**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO**

P R E S E N T A:

GUILLERMO OLICÓN MÉNDEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. FAUSTINO SÁNCHEZ GARDUÑO**

2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del Jurado

1. **Datos del alumno**

Olicón
Méndez
Guillermo
58 49 93 65
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
40801274-2

2. **Datos del tutor**

Dr.
Faustino
Sánchez Garduño

3. **Datos del sinodal 1**

Dr.
Arturo
Olvera Chávez

4. **Datos del sinodal 2**

Dr.
Pedro Eduardo
Miramontes Vidal

5. **Datos del sinodal 3**

Dr.
Antonio
Capella Kort

6. **Datos del sinodal 4**

Dra.
Clara Eugenia
Garza Hume

7. **Datos del trabajo escrito**

Bifurcaciones secundarias y la bifurcación de Hopf-Turing
187 p
2013

-... Esta fórmula, traducida al lenguaje vulgar,
diría poco más o menos así: *Algo se mueve*.
Estas tres palabras son la síntesis del pensamiento humano...

- ¿Le sorprende—añadió— la aparente sencillez
de este resultado supremo? ¿Millares de años de
investigaciones y de teorías para llegar a una conclusión
que parece un lugar común de la experiencia más vulgar?
Reconozco que no está del todo equivocado. Sin embargo,
el esfuerzo de síntesis de tantos genios de la ciencia
lleva a esto y nada más. *Algo se mueve*.
Al principio—dice San Juan— era el Verbo. Al
principio—contesta Goethe— era la Acción.
Al principio y al fin—digo yo— era el Movimiento.

Giovanni Papini, en *Gog*

Agradecimientos

A mi madre, por ser siempre mi mayor ejemplo de entusiasmo y de dedicación y por su infinito amor. Por inculcarme a ser siempre fuerte y nunca dejar de lado mis sueños. Aquí está el primero de ellos culminado, así como me enseñaste.

A mi padre, por ser mi más grande referente de voluntad y esfuerzo. Por apoyarme y por nunca dejar de confiar en mí. Por siempre expresarnos el amor que nos tenemos, y que es alimento para seguir avanzando día a día.

A mi hermano, el mayor de mis orgullos. Porque aunque menor que yo, lo admiro demasiado. Porque espero ser siempre un buen ejemplo a seguir, y que siga sus sueños así como intento yo hacerlo.

Al Dr. Faustino Sánchez Garduño, por la cuidadosa revisión de este texto. Sus enseñanzas no sólo se reflejan en la edición de esta tesis o en lo aprendido en sus clases, también están impresas las conversaciones que hemos mantenido y que han derivado también en perspectivas científicas y hasta sociales. Es de esta forma que ha sido un maestro para mí en toda la extensión de la palabra.

A mis sinodales, la Dra. Clara Garza, el Dr. Pedro Miramontes, el Dr. Antonio Capella y el Dr. Arturo Olvera, por el tiempo y la paciencia que dedicaron al revisar este texto. Sus observaciones y comentarios fueron importantes para la culminación de este trabajo.

A Laura Yaniz Estrada, por tomarme de la mano en este largo proceso, pero sobre todo porque nunca la soltaste. Por tu amor y tu comprensión, y por inspirarme a ser cada día mejor.

A Alfredo Lozano, porque emprendimos juntos un viaje de crecimiento intelectual. Por su amistad y su inigualable calidad humana. Porque seremos siempre viajeros.

A Sara Janí Murillo, por las pláticas e ir hombro a hombro en nuestro desarrollo académico. Porque nuestra amistad va más allá de nuestra pasión por las matemáticas, mucho más.

A la profesora Laura Pastrana, quien me mostró que no hay una barrera entre profesores y alumnos. Su amistad definió en gran parte la forma en que concibo la docencia.

A la Dra. Carolina Barriga, por incluirme en lo que sería mi primer grupo de investigación interdisciplinaria. Por atreverse a hacer las cosas de forma diferente, y por darme su confianza.

A los distintos profesores que tuve a lo largo de la carrera, en especial a la M. en C. Emma Lam, al M. en C. Rafael Alcaraz, al Dr. Ricardo Strausz, al M. en C. Ángel Manuel Carrillo, al Dr. Miguel Ángel García y al Dr. Alejandro Ricardo Garciadiego. Sus clases dejaron mucho en mí, por no limitarse sólo a demostrar a teoremas.

A SELIDER Ciudad de México, y a todo el equipo. En especial a Fabián García, David Federico, José Ramón Murillo, Mariana Mayo, Alin Zárate y Elizabeth Guerrero, por nunca *rajarse*.

A Benito Estrada, por darme la oportunidad de ser parte de la Khan Academy y así tratar que la educación libre sea cada vez más una realidad.

A mis familiares, pero sobre todo a mis primos Saúl, Iker, Grecia, Mariana, Martha y Jorge. A estos dos últimos les debo de mi infancia y mi adolescencia unos períodos muy creativos y felices. Espero haber sido recíproco en ese sentido.

A mis alumnos, que siempre han sido y seguirán siendo motor de mi entusiasmo en el aula. Todos ellos me han enseñado mucho. Espero saber siempre corresponder siempre a este aprendizaje mutuo. Para mí, ellos le dan un completo sentido a la palabra *mathema*.

Al profesor Moisés Solano Pareja, que un buen día decidió invitarme a participar en un concurso de matemáticas, y luego a otro, y a otro más. Por siempre apoyarme y luchar por conseguir que fuera a la ONMAS de 2005, donde definí que mi futuro se encontraba en la carrera de matemáticas.

Finalmente a la Universidad Nacional Autónoma de México, que en sus aulas, sus auditorios, sus teatros, sus jardines, sus comedores, sus pizarrones, sus bibliotecas, y en todos sus espacios, me formé no sólo como matemático. Porque por mi raza hablará el espíritu.

3 de octubre de 2013.

Índice general

Agradecimientos	3
Introducción	13
1. Antecedentes	19
1.1. Un poco de historia	19
1.1.1. Inicio del auge de las oscilaciones químicas	19
1.1.2. Osciladores, ondas y rollos en Occidente	21
1.1.3. El problema de la morfogénesis	24
1.1.4. El Grupo de Bruselas	26
1.2. Los preliminares teóricos	28
1.2.1. Deducción de las ecuaciones de tipo RD	28

1.2.2.	Bifurcaciones y las formas normales	30
1.2.3.	Análisis de retrato fase	32
2.	Una forma normal	35
2.1.	Introducción	35
2.2.	Análisis lineal	37
2.3.	Construcción de la forma normal	39
2.3.1.	Un caso particular: polinomios homogéneos cúbicos	44
2.3.2.	Otro caso particular: polinomios homogéneos cuadráticos	52
3.	Análisis de las formas normales	59
3.1.	Introducción	59
3.2.	Análisis local y restricciones a ciertas rectas	61
3.3.	Caso I: $\lambda, \mu > 0$	62
3.3.1.	$\delta_2 < 0, \Delta > 0$ y $\eta > 0$	63
3.3.2.	$\delta_2 < 0, \Delta > 0$ y $\eta < 0$	68
3.3.3.	$\delta_2 < 0, \Delta < 0$ y $\eta > 0$	68
3.3.4.	$\delta_2 < 0, \Delta < 0$ y $\eta < 0$	70

3.3.5.	$\delta_2 < 0, \Delta \equiv 0, \eta > 0$	73
3.3.6.	$\delta_2 < 0, \Delta \equiv 0, \eta < 0$	74
3.3.7.	Caso $\delta_2 > 0$	75
3.4.	Caso II: $\lambda > 0; \mu < 0$	76
3.4.1.	$\delta_2 > 0, \Delta > 0$ y $\eta > 0$	76
3.4.2.	$\delta_2 > 0, \Delta > 0$ y $\eta < 0$	84
3.4.3.	$\delta_2 > 0, \Delta < 0$ y $\eta < 0$	85
3.4.4.	$\delta_2 > 0, \Delta < 0$ y $\eta > 0$	87
3.4.5.	$\delta > 0, \Delta \equiv 0, \eta < 0$	87
3.4.6.	$\delta > 0, \Delta \equiv 0, \eta > 0$	88
3.4.7.	$\delta_2 < 0$	89
3.5.	Caso III: $\lambda < 0; \mu > 0$	90
3.6.	Caso IV: $\lambda < 0; \mu < 0$	92
3.7.	Análisis del sistema (2.50)	93
4.	El oscilador de Bruselas, un ejemplo	101
4.1.	Introducción	101
4.1.1.	Una breve historia de este oscilador químico	102

4.2. Planteamiento del problema	103
4.2.1. Deducción del modelo del <i>oscilador de Bruselas</i>	104
4.3. Existencia de una <i>bifurcación de Hopf</i>	105
4.4. Inestabilidad de Turing generalizada	110
4.5. Bifurcación de Hopf-Turing generalizada	116
4.6. Bifurcaciones secundarias	118
4.7. Simulaciones numéricas	121
4.7.1. El método	121
4.7.2. Los ejemplos	123
5. Perspectivas y conclusiones	127
5.1. La ecología, un salto de escala	128
5.1.1. De la cinética química de Lotka y las poblaciones de Volterra .	128
5.1.2. Una bifurcación Turing-Hopf y la presencia de una de Takens- Bogdanov	131
5.1.3. Discusión y problemas	138
5.2. Las ecuaciones de amplitud	139
5.2.1. Selección de patrones y análisis débil no lineal	139

5.2.2. Patrones bidimensionales	141
5.2.3. Ecuaciones de amplitud para la bifurcación de Hopf-Turing . .	143
5.2.4. Discusión	143
5.3. Teoría de Floquet y la bifurcación de Hopf-Turing	144
5.3.1. La bifurcación de Hopf bajo la lupa de las perturbaciones . . .	145
5.3.2. Clasificación de la bifurcación de Hopf-Turing y su teorema . .	148
5.3.3. Discusión	149
5.4. Discusión y conclusiones generales	150
5.4.1. De las aplicaciones a las ciencias de la vida	150
5.4.2. De la generalización matemática	153
A. Resultados de Análisis Matemático	155
A.1. Intercambio de derivada con límite	156
A.2. Intercambio de derivada con series de Fourier	158
A.3. Multiplicación de series de Fourier	159
B. La Bifurcación de Hopf	163
B.1. Introducción	164

B.2. Formas normales y el operador homológico	165
B.2.1. El caso particular: la matriz diagonal	167
B.3. Cambio de estabilidad y emergencia de ciclos límite	167
C. La Inestabilidad de Turing	173
C.1. Introducción	173
C.2. Planteamiento del problema	174
C.3. Emergencia de inestabilidad espacio-temporal	176

Introducción

Cuando uno se pasa horas leyendo números, comienza a pensar cosas que nunca se le habrían ocurrido. He empezado a ver en los números fórmulas mágicas, armonías simétricas, repeticiones, matrices, formas.

Orhan Pamuk, en *El libro negro*.

Para presentar este trabajo, he decidido comenzar exponiendo la motivación que me llevó a iniciar el estudio del atractivo mundo de las bifurcaciones. Sin embargo, tratar de enunciar todas y cada una de estas inspiraciones sólo me llevaría a algo parecido a la paradoja de Lewis Carroll del mapa completo¹.

En definitiva puedo afirmar que los cursos de Biología Matemática I y II, a cargo de Faustino Sánchez Garduño fueron la introducción ideal al estudio de la emergencia de patrones en sistemas vivos, así como sus cursos de ecuaciones diferenciales (II, III y parciales I) que proporcionaron a mi formación académica la teoría y el rigor necesarios para justificar la dinámica de los modelos matemáticos, en particular cuando éstos provienen de fenómenos de la materia viva.

¹En la obra *Sylvie and Bruno*, Carroll habla sobre lo inútil que es retratar la realidad en su totalidad. En palabras de su personaje Mein Herr: “We actually made a map of the country, on the scale of a mile to the mile!... It has never been spread out yet... The farmers objected: they said it would cover the whole country, and shut out the sunlight! so we now use the country itself, as its own map, and I assure you it does nearly as well.”

Esto, aunado a las charlas fuera del aula que he sostenido con muchos biomatemáticos, entre ellos el mismo Faustino Sánchez y con Pedro Miramontes, fomentaron mi curiosidad por la lectura de aquellos *clásicos* en el tema: D'Arcy W. Thompson, Alan M. Turing, Ludwig Von Bertalanffy, René Thom, Ilya Prigogine, entre otros. La lectura de algunos de sus textos me han dejado ver retos académicos, algunos de los cuales ya han sido resueltos y otros aún siguen siendo fuente de inspiración para generar nuevas matemáticas. Y a decir verdad, no conozco otra satisfacción mayor que el tener un problema abierto por delante...

Sin lugar a dudas, el espacio de mayor influencia en el área de la Biología Matemática en México ha sido, y apuesto a que seguirá siéndolo, la Escuela de Otoño en Biología Matemática (EOBM) y el Encuentro Nacional de Biología Matemática (ENBM); eventos que, desde 1999 y 2005 respectivamente, han servido como una invitación a jóvenes estudiantes de Matemáticas, Física, Biología y otras carreras afines, a involucrarse en la modelación de los fenómenos de la materia viva². Fue en la edición XI de la EOBM y en la V del ENBM cuando encontré la convicción. En la bella ciudad de Querétaro, quizás un tanto bajo sus arcos, quizás otro tanto entre sus calles coloniales y su evidente progreso, fue allí donde hice de la biomatemática mi amante.

El tema de la multidisciplina ha trascendido los corredores de la Facultad de Ciencias de la UNAM, en particular, y por influencia de la colaboración académica, ha empezado a brotar en otras universidades tanto de la Ciudad de México como en el resto del país. Sin embargo, parece inevitable que investigadores de diversas ciencias trabajen en conjunto para resolver los problemas del siglo XXI.

Ejemplo de ello es el Seminario de Investigación Interdisciplinaria en Biomedicina, llevada a cabo en la Facultad de Medicina de la UNAM y dirigida por el Dr. David Kershonobich Stalnikowitz, al cual asistí desde febrero de 2012 a principios de 2013. Este espacio ha sido de gran inspiración para mí, no sólo por los retos planteados en el área, sino también por los distintos enfoques que cada asistente aporta para

²Para una mejor reseña histórica de ambos eventos anuales el lector puede acceder a la página <http://eobm.mx/eobm2011/index.php/historia> (vigente el 1° de septiembre de 2013).

resolverlos. Es en este espacio donde como científicos, muchos hemos comenzado a tomar compromisos hacia uno de los aspectos que más habrían de importarnos a última instancia: la sociedad.

Una vez hecha esta suerte de confesión de las motivaciones que dieron origen a este trabajo, vamos ahora a describir el tema específico que se aborda en esta tesis.

La idea original de trabajar con bifurcaciones secundarias en sistemas de reacción-difusión nació al tratar de analizar la *bifurcación de Hopf-Turing*. Es bueno aclarar en este momento que estaremos hablando de ella como una *ruta* entre ambas bifurcaciones, ya que una de las condiciones para que se satisfaga la *Inestabilidad de Turing* es que $trJ < 0$, donde J es la matriz de Jacobi del sistema homogéneo asociado. Por otro lado, la parte que nos interesa es hallar un ciclo límite asintóticamente estable emergente de una *bifurcación de Hopf*, el cual sólo puede estar presente si $trJ > 0$ (véanse los Apéndices B y C).

El inicio de este trabajo fue la lectura del artículo *Interactions of Turing and Hopf bifurcations in chemical systems*, de Rovinsky y Menzinger ([19]), cuyo contenido en principio parecía poco claro. En los intentos por aclarar el contenido de esta referencia, acudí al propio Menzinger, a través de correo electrónico. En éste me confesó no poder ser de ayuda con “este artículo muy técnico”, pues no siguió la literatura del tema.

Entonces tuve mucha confusión, más aún cuando al leer el artículo de la autoría de De Wit *et al.*, [32], encontré una frase devastadora en donde afirman que: *This [su propio resultado] invalidates the conclusions of Rovinsky and Menzinger stating that the Mixed Mode³ is always unstable in the Brusselator*; mismo que encontraron estable en la forma normal que ellos obtuvieron.

Si bien era verdad que las conclusiones de Rovinsky no eran correctas, el error debía provenir del método empleado. El problema vino cuando intentamos trabajar en dicho método, el cual no era claro desde el mismo artículo de Rovinsky y Men-

³Se refiere al modo mixto entre el de Hopf y el de Turing.

zinger (se menciona la técnica empleada, pero no se dice cómo se hizo); sin embargo, el método referido caía en manos de J. P. Keener ([8]). Al acceder a este último, comencé a investigar el procedimiento de los métodos de multi-escala temporal⁴. Al reproducir los cálculos encontré errores, así como afirmaciones no justificadas. A pesar de ello, realizamos el análisis de las bifurcaciones secundarias planteado por Keener haciendo las correcciones necesarias.

Una vez descrito el escenario, ahora sí vayamos a la descripción del contenido de este trabajo.

En el Capítulo 2 comenzamos con un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de tipo reacción-difusión (RD), que describe la dinámica espacio-temporal de la interacción de dos morfógenos. Supondremos que éste presenta un cambio de estabilidad a través de una bifurcación secundaria, esto es que se cumplen para dos números naturales consecutivos la condición de bifurcación del sistema lineal asociado, al expresar a la solución del sistema como una serie de Fourier. El análisis nos condujo a la construcción de un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Usando el método de multi-escala temporal, podemos reducir el sistema no lineal a dos EDOs no lineales acopladas que involucran sólo los términos relevantes. Éstas son las formas normales de cada problema de bifurcaciones que trabajaremos (esto es cuando los términos reactivos están dados por polinomios homogéneos de segundo y tercer grado).

En el Capítulo 3 haremos el análisis cualitativo de las formas normales obtenidas en el Capítulo 2. Esto se realizó usando: el análisis local alrededor de los puntos de equilibrio, técnicas geométricas y, en varias ocasiones, el teorema de Poincaré-Bendixson. Los resultados se pueden verificar en los ejemplos de retratos fase, en los cuales se hizo un uso intensivo del *software* Pplane⁵. El análisis cualitativo del sistema es exhaustivo para las distintas combinaciones de valores que pueden tomar los parámetros.

⁴Traducción que hacemos del término en inglés *multi-time scale*.

⁵Este *software* fue desarrollado por John Polking y es accesible de forma gratuita en la red.

En el Capítulo 4 aterrizaremos los resultados en los dos capítulos anteriores en un sistema particular: *el Oscilador de Bruselas*. Aunque no es posible llegar a resultados contundentes para bifurcaciones secundarias, sí lo es para la *bifurcación de Hopf-Turing* de este sistema en especial.

En el último capítulo exponemos las conclusiones, principalmente desde el punto de vista matemático, sin dejar de lado las observaciones hechas hacia la interpretación del sistema de EDP's. Posterior a ello, el lector puede consultar los apéndices que incluyen, en primera instancia, resultados del análisis matemático relacionados con el intercambio de límites o series con derivadas o integrales; resultados útiles al usarlos con series de Fourier. También calculamos la serie de Fourier de un producto de funciones, en término de los coeficientes de Fourier de las funciones originales. En segunda instancia, se exponen las bifurcaciones de Hopf y Turing por separado.

Capítulo 1

Antecedentes

El descubrimiento de las ideas no puede programarse. Esta es la razón de que las revoluciones y otros cataclismos sociales tengan frecuentemente una influencia positiva en la ciencia.

David Ruelle, en *Casualidad y caos*.

1.1. Un poco de historia

1.1.1. Inicio del auge de las oscilaciones químicas

1893, la Rusia zarista y una familia que recibe el 19 de febrero a un nuevo integrante: Boris Pavlovich Belousov. Estudió química en Zürich, Suiza, debido a que su familia fue obligada a dejar el país después de la oleada de movimientos políticos y sociales que ocurrían en el Imperio Ruso en el año de 1905.



Figura 1.1: Boris Pavlóvich Belousov en su escritorio entre 1956 y 1958. Figura tomada de [29]

Interesado en la bioquímica, y estando de vuelta a la Unión Soviética como profesor de química antes de la Segunda Guerra Mundial, Belousov comenzó a modelar en el laboratorio el *ciclo de Krebs*. Éste, también conocido como el *ciclo del ácido cítrico*, es una sucesión de reacciones químicas que se realizan en todas las células aeróbicas. En las células eucariontes este proceso se da en la mitocondria. El proceso consta principalmente de la oxidación de carbohidratos, ácidos grasos y aminoácidos, con liberación de bióxido de carbono.

El modelo experimental realizado por Belousov en su laboratorio sustituía algunos iones metálicos, comúnmente encontradas en enzimas celulares, por iones metálicos de Cerio. Belousov no tenía del todo claro el mecanismo, y presentó tan sólo un esquema tentativo de esta reacción. Sin embargo, sus estudios están complementados con análisis de temperatura y acidez. Pero quizás Belousov vivió un tiempo que no le correspondía; enviando su manuscrito a revisión, los árbitros argumentaron que debía estar equivocado, que su mecanismo era imposible y que, de ser cierto, habría de venir acompañado de una demostración de que la teoría existente era defectuosa. De vuelta al laboratorio, a la investigación, y vuelta al rechazo por segunda ocasión, contando con 64 años, Belousov decide no volver a publicar.

Fue Simon Elerich Schnoll quien encargó a Anatoli Zhabotinsky, un alumno de posgrado con formación en bioquímica, la tarea de investigar experimentalmente una receta de ácido cítrico de origen desconocido. Al año siguiente (1962), Zhabotinsky compartió sus descubrimientos con su asesor e informó a Belousov sus resultados. Éste mostró satisfacción al saber de la continuidad de su trabajo, dio a conocer la existencia de su manuscrito a Zhabotinsky, pero jamás pudieron reunirse. Todavía más, Belousov murió sin haber recibido reconocimiento en vida, puesto que le fue entregado el Premio Lenin en 1980 de manera póstuma, mismo que fue compartido con Zhabotinsky y otro par de científicos. Esto hecho diez años después de su muerte.



Figura 1.2: Anatoli Zhabotinsky. Tomada de *Obituary: Anatol Zhabotinsky (1938 – 2008)*, en *Nature* **455**.

1.1.2. Osciladores, ondas y rollos en Occidente

Era verano de 1968, la ciudad de Praga recibía a investigadores de todo el mundo al *Simposio en osciladores biológicos y bioquímicos*. Zhabotinsky y sus colegas asistieron, dando a conocer a los presentes la, en ese entonces llamada, *reacción de Zhabotinsky*. Entre el público, Arthur Winfree.

Winfree, siendo ingeniero físico en su formación básica pero doctorado en biología, al inicio dedicaba su investigación al tema de la sincronización colectiva. ¿Cómo pueden estridular los grillos al unísono? ¿Cómo logran las luciérnagas emitir su luz al mismo tiempo? ¿Cómo es esto posible sin un líder que conduzca al grupo a llevarlo a cabo? Preguntas como las anteriores motivaron durante años a Winfree, y propuso algunos de los primeros ejemplos de un fenómeno conocido como *sincronización*.



Figura 1.3: Arthur Winfree. Fotografía tomada de <http://www.siam.org/news/news.php?id=617> (consultada el 1° de septiembre de 2013).

Pero después del Simposio de 1968, Winfree mostró interés por la reacción de Belousov-Zhabotinsky, siendo el principal promotor de dicha reacción en Occidente. Esto no es un hecho aislado, recordemos que los orígenes de Winfree se hallaban en los procesos de sincronización en sistemas biológicos, entre ellos podemos ubicar aquellos relacionados con la fisiología humana como los ritmos cardíacos y la propagación de ondas eléctricas a través de tejido nervioso. Estamos hablando de los *sistemas excitables*.

Llevando sus ideas al laboratorio, Winfree descubrió que la reacción anterior exhibía ondas que se propagan a través del medio con geometrías variadas, entre ellas las ondas en espiral. Y no sólo eso, sino que propuso un sistema de EDPs no lineales que simulaban numéricamente lo observado en la caja de Petri en la que se efectuaba la reacción. Lo anterior abrió las puertas a muchos matemáticos quienes tomaron como tarea la demostración de la existencia de soluciones de este tipo.

Fueron Cohen, Neu y Rosales quienes encontraron ([4]), bajo condiciones de suavidad en el origen donde suponen que se encuentra el polo de la espiral, soluciones regulares de tipo onda espiral rotatoria en sistemas de dos ecuaciones no lineales acopladas de tipo RD, en un dominio espacial de dimensión 2.

A raíz de ello hubo una explosión en las investigaciones sobre el tema. Tyson, Keener, Kuramoto, Kopell y Levine son sólo algunos de los que posteriormente indagaron más sobre el tema. El mismo Winfree continuó buscando este tipo de patrones emergentes, saltando a una dimensión mayor. Lo que posteriormente descubrió fue lo que llamó *ondas enrolladas*¹, que son el equivalente a ondas en espiral tridimensionales. A la fecha, estos fenómenos no son del todo comprendidos.

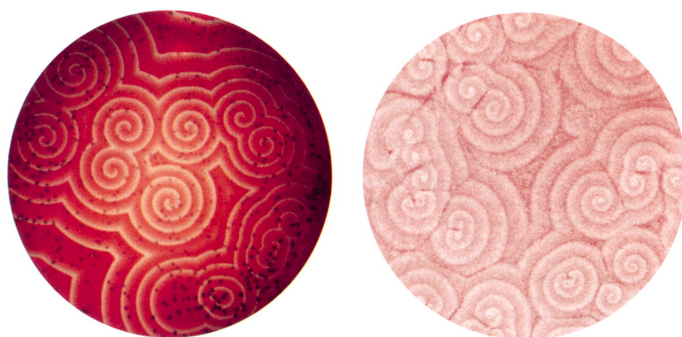


Figura 1.4: Ondas en espiral. A la izquierda una imagen de la reacción de la Belousov-Zhabotinsky. A la derecha, patrón en espiral que exhibe una colonia de bacterias *Dictyostelium Discoideum* cuando se presentan condiciones hostiles del medio. Tomado de <http://www.pnas.org/content/103/43/15727/F1.expansion.html> (consultada el 1° de septiembre de 2013).

¹Del inglés *scroll waves*

1.1.3. El problema de la morfogénesis

Del pensamiento más influyente en los estudios sobre el problema del origen de las formas vivas podemos mencionar a D'Arcy Wentworth Thompson quien, en su libro *On growth and form* ([23]), comenzó a discutir la necesidad de incluir el uso de matemáticas para entender los fenómenos biológicos: un Galileo para la biología. Su obra no sólo está llena de ejemplos, uno tras otro, donde se exhiben las propiedades geométricas del crecimiento y las relaciones de equivalencia inducidas por las transformaciones continuas entre especies, sino que plantea con absoluta claridad que la explicación de las formas vivas hay que buscarla en los procesos físicos que obedece toda la materia viva.

Si bien D'Arcy Thompson buscaba principalmente motivar a la comunidad científica de recurrir al uso de las matemáticas en los problemas de crecimiento y forma, no muchos se aventuraron a tomar esta línea de trabajo. No fue sino hasta 1952 cuando se publica *The chemical basis of morphogenesis* (véase [26]) donde se exponen las primeras teorías matemáticas de la morfogénesis. El autor: Alan Mathison Turing.

Nacido el 23 de junio de 1912, curioso desde edades tempranas, y amante eterno de las matemáticas, Alan Turing es considerado una “figura líder” de la ciencia del siglo XX (según P.N. Furbank, en el prefacio de [25]). Habilidadoso en el área de la probabilidad, la lógica matemática y la teoría de números, entre otras, no sólo fue uno de los fundadores de las ciencias de la computación y la inteligencia artificial, también fue el primero en proponer, motivado por la lectura de *On growth and form*, un mecanismo dinámico para el estudio del origen de las formas.

Aunque actualmente se incluya a la propuesta turingiana dentro del estudio de la *emergencia de patrones*, Turing pretendió proponer que los genes no eran los únicos elementos involucrados en el fenómeno de la morfogénesis. Física y química son la utilería de la escena. Su modelo incorpora dos sustancias (a las que llamó morfógenos) que son las actrices de la obra y, finalmente, la matemática es la directora del montaje. El nombre de la obra está contenido en el título de su ya clásico trabajo.

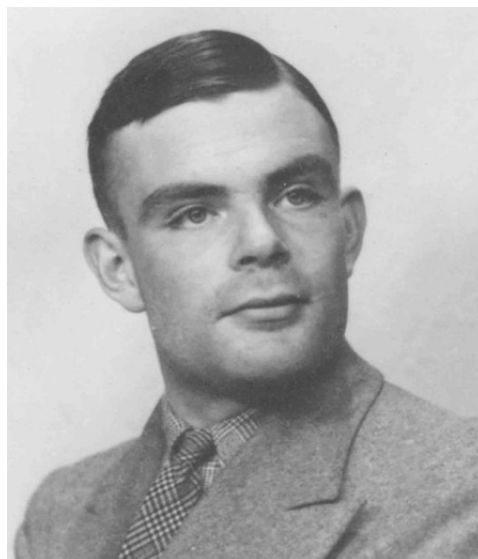


Figura 1.5: Alan Mathison Turing en fotografías pasaporte. No se encontró la edad que tenía al serle retratado. Imagen tomada de www.turingarchive.org/viewer/?id=526&title=10 (consultada el 1° de septiembre de 2013).

Lo que Turing halló fue, a partir del estudio de bifurcaciones de estos sistemas de tipo RD, la posibilidad de un cambio de estabilidad de la solución estacionaria y homogénea. Trabajando en dominios circulares y esféricos, lo que Turing encontró fue el rompimiento de estabilidad de este estado de equilibrio bajo perturbaciones espaciotemporales que conducen finalmente a un estado inestable en espacio pero estable en tiempo.

Los resultados que Turing encontró pudieron tener muchas más conclusiones y vertientes de investigación. Sin embargo, su repentina muerte nos arrebató años fructíferos de su trabajo. Bajo la influencia de la depresión, causada principalmente por la imposición de un tratamiento de estrógenos que el gobierno británico le impuso por ser homosexual, Turing se suicida² el 7 de junio de 1954, dos años después

²¿O no? Muchas teorías se han creado alrededor de su muerte. Su madre, Sara Turing, aseguraba que debió ser un accidente pues trabajaba en su laboratorio con cianuro. Existen otras hipótesis

de la publicación de su único artículo en el tema de la morfogénesis³.

Alguien, eventualmente, tomaría la batuta en esta línea de investigación, tal vez con otra perspectiva; de esto se encargó la *Escuela de Bruselas*, liderada por quien sería Premio Nobel de Química en 1977, y del que hablaremos en la siguiente sección.

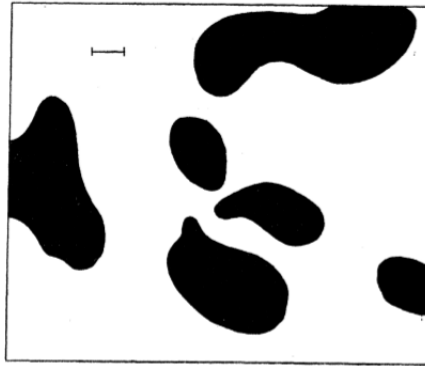


Figura 1.6: Dibujo que Turing emplea en [26] como ejemplo de patrones emergente de un sistema de morfógenos en interacción.

1.1.4. El Grupo de Bruselas

Interesado por textos filosóficos desde la adolescencia, Ilya Prigogine quedó, en sus propias palabras, hechizado por el texto *La evolución creadora*⁴ de Henri Bergson que dice

donde se cree que fue más bien asesinado por el gobierno inglés. Quizás no es una hipótesis aventurada, sobre todo si se considera el papel de Turing durante la Segunda Guerra Mundial y el tiempo de Guerra Fría en la que “tomó la decisión de suicidarse”.

³A pesar de ello, dejó dos trabajos sin publicar en el tema de filotaxia. Peter Saunders, en calidad de editor, se dio a la tarea de completar sus notas, junto con lo que los colaboradores de Turing podían sumar. Estos trabajos pueden revisarse en [25].

⁴*L'evolution créatrice*, por su nombre original en francés.

Mientras más profundo estudiamos la naturaleza del tiempo, entendemos mejor que la duración significa invención, creación de formas, continua elaboración de lo absolutamente nuevo.

Nacido el 25 de enero de 1917 en la ciudad de Moscú, migrante en Alemania por unos años desde 1921 hasta que finalmente se asentó su familia en Bruselas, Bélgica. Así como su padre y su hermano mayor, siguió la línea del estudio de la Química, obteniendo su primer grado doctoral en 1941.



Figura 1.7: Ilya Prigogine. Imagen tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/Ilya_Prigogine (consultada el 2 de septiembre de 2013)

Influenciado por Théophile De Donder, por su contribución a la termodinámica química al proponer una nueva formulación de la *segunda ley de la termodinámica* basada en la *afinidad* y el grado de evolución de una reacción, y también influenciado por Jean Timmermans, por dedicarse a los aspectos experimentales de la termodinámica aplicada a soluciones líquidas y sistemas complejos, sumó su interés particular sobre el concepto del tiempo. Como resultado de esta suma de influencias, Prigogine se interesó inmediatamente en la *segunda ley de la termodinámica* en sistemas químicos.

A través de sus estudios sobre los procesos irreversibles, se han podido encontrar muchas aplicaciones en distintas áreas. Una de ellas: la biología. La relación que Prigogine hizo es clara, y que en sus palabras dice⁵: “El hecho es que me pareció que los seres vivos nos proporcionaban ejemplos notables de sistemas que eran altamente organizados y donde los fenómenos irreversibles jugaban un papel esencial”. La interrelación de todas estas ideas condujo a Prigogine a estudiar la teoría de los sistemas fuera del equilibrio (termodinámico), y en consecuencia, de los sistemas no lineales.

El crecimiento en el grupo de trabajo del tema en la Universidad Libre de Bruselas, la creación del concepto de *estructura disipativa* y la formulación del modelo matemático llamado *oscilador de Bruselas* (estos dos últimos trataremos con mayor detalle en el Capítulo 4) son unos de los motivos que fueron conduciendo a la creación del famoso “Grupo de Bruselas”, liderado—como ya lo señalamos— por Prigogine.

Fueron sus convicciones humanísticas las que condujeron a Prigogine a estudiar problemas más complejos, con la esperanza de que se fueran revelando los requerimientos teóricos para poder saltar formalmente de los modelos físicos, y poder acceder a entender con suficiente rigor los fenómenos biológicos, e incluso los sociales.

1.2. Los preliminares teóricos

1.2.1. Deducción de las ecuaciones de tipo RD

En el presente trabajo estudiaremos principalmente un sistema de dos EDPs no lineales y acopladas. Este tipo de sistemas conocidas con el nombre de reacción-difusión (RD) son en esencia la famosa ecuación de calor, a la cual se le suman términos no lineales que están dados por interacciones autónomas entre las funciones

⁵Prigogine afirmó esto en la autobiografía que publicó en conmemoración de la entrega del premio Nobel. El texto completo se puede leer en www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/1977/prigogine-autobio.html, que es una lectura ampliamente recomendable.

desconocidas.

En cuanto a la modelación del problema, para poder emplear este tipo de ecuaciones, supondremos que en la reacción la temperatura y la presión son constantes, además la concentración de las sustancias (que serán nuestras funciones desconocidas) obedecen la *ley de Fick* la cual establece que

El flujo de la sustancia se da en dirección contraria al gradiente de la concentración.

Lo anterior en términos matemáticos dice que si denotamos por $\vec{j}(\vec{x}, t)$ al flujo de sustancia por unidad de volumen (o de área) y a la concentración de la sustancia en el punto \vec{x} y al tiempo t por $u(\vec{x}, t)$, si las sustancias se difunden en un medio isotrópico:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = -D\nabla u(\vec{x}, t), \quad (1.1)$$

donde $D > 0$ y es el coeficiente de difusión de la sustancia y ∇u es el operador gradiente, donde las derivadas parciales se toman sólo respecto a las variables espaciales.

Además de lo anterior, supondremos que las sustancias reaccionan obedeciendo la *ley de acción de masas*, esto es

La velocidad de una reacción química⁶ al tiempo t , es directamente proporcional al producto algebraico de potencias de la concentración de las sustancias reaccionantes en ese instante.

En términos matemáticos, si $[A_i(t)]$ denota a la concentración de la sustancia A_i al tiempo t , entonces

$$\frac{d[A_i(t)]}{dt} = k_i[A_1]^{\alpha_1}[A_2]^{\alpha_2} \cdots [A_k]^{\alpha_k},$$

⁶Estamos pensando sólo en un paso de la serie paralela de reacciones, es decir, esto pasará para cada sustancia involucrada en la serie acoplada de reacciones.

donde k_i es la constante de la velocidad de la reacción, y $k_i < 0$ cuando A_i es un reactivo, siendo $k_i > 0$ cuando es un producto. Además, α_j ($j = 1, 2, \dots, k$), son enteros no negativos, y representan el orden de la reacción de la sustancia correspondiente. Por otra parte, esto determina la cinética de una reacción; si se tiene una serie de reacciones paralelas, tendremos que sumar la relación correspondiente a cada reacción involucrada en el sistema.

Calculamos la cantidad total de sustancia en la región Ω al tiempo t , que está dada por la expresión $\int_{\Omega} u(\vec{x}, t) d\vec{x}$. Supondremos que la velocidad instantánea de cambio de la sustancia total en Ω de la sustancia depende sólo del flujo de la sustancia en la frontera y de lo que se produce de dicha sustancia en toda Ω al tiempo t . En términos matemáticos,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(\vec{x}, t) dV = - \int_{\partial\Omega} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} f(u, \vec{x}, t) dV, \quad (1.2)$$

donde $\vec{n} \equiv \vec{n}(\vec{x})$ es el vector normal exterior en cada punto de $\partial\Omega$ al tiempo t y f dicta el comportamiento cinético de la sustancia⁷.

Del lado izquierdo de la ecuación (1.2), supondremos que se puede intercambiar la derivada con la integral. Del lado derecho empleamos el teorema de la divergencia, por lo que 1.2 se escribe:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{j} dV + \int_{\Omega} f(u, \vec{x}, t) dV.$$

Debido a que esto es cierto para toda región Ω , la conclusión es que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} + f.$$

Finalmente, utilizando la *ley de Fick* expresada en (1.1), tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u + f, \quad (1.3)$$

⁷Si la cinética se rige por la interacción de varias sustancias, éstas deberán estar incluidas en f . Por simplicidad omitiremos este hecho, aunque posteriormente lo emplearemos.

donde $\nabla^2 u$ es el operador laplaciano, donde las derivadas parciales se toman sólo sobre las variables espaciales.

1.2.2. Bifurcaciones y las formas normales

Todos hemos conocido a personas que reciben apodos que perduran mucho tiempo. Quizás nosotros mismos hemos sido objetivo de dichos sobrenombres, incluso algunos habrán permanecido tanto en la memoria de los demás que ni siquiera recordemos el nombre original de aquel a quien le fue impuesto. Lo que hay que remarcar de los apodos es que no describen en la totalidad a la persona, sino que simplemente destacan una característica que nosotros queremos hacer notar.

El estudio de las *formas normales* de los sistemas dinámicos funcionan como el apodo de familias de sistemas. Lo que se busca es reducir al sistema a estudiar en uno más simple y que conserve (al menos localmente) las características importantes y que también refleje las propiedades del sistema físico o biológico a estudiar. En términos más técnicos: que el sistema a estudiar sea topológicamente equivalente localmente a un sistema más fácil de analizar.

Uno de los objetivos principales del desarrollo del método de las formas normales es entender las bifurcaciones de los sistemas dinámicos. A *grosso modo*, una bifurcación ocurre cuando hay un cambio cualitativo en la dinámica de un sistema al variar un parámetro de éste. En los sistemas bidimensionales de EDOs, estos parámetros son principalmente la traza y el determinante de su matriz de Jacobi. Al número total de parámetros de los que depende esencialmente una bifurcación es a lo que se le conoce como la *codimensión* de dicha bifurcación.

Para introducirse al tema, el lector puede consultar el Apéndice B de este trabajo, en donde se deduce un sistema más sencillo para estudiar los sistemas de dos EDO's que cumplen con la propiedad de que la traza de su matriz de Jacobi se anula.

El hecho de que las formas normales sean un “apodo” implica inmediatamente

que no hay una única forma normal para cada sistema. Para empezar, depende de la característica que estemos resaltando de él; en segunda instancia podemos elegir distintas formas de destacar dicha característica⁸, así que la “facilidad” de los sistemas dependerá de quién los trabaje.

En el siguiente capítulo, se buscará encontrar una forma normal para sistemas de tipo RD que presenten bifurcaciones secundarias, que es cuando se presentan dos valores críticos consecutivos de inestabilidad espacio-temporal. Un sistema de dos EDPs parabólicas acopladas las “apodaremos” como un par de EDOs acopladas. Eso es lo que nosotros entenderemos como “fácil de analizar” en este trabajo.

1.2.3. Análisis de retrato fase

En el Capítulo 3 haremos el análisis exhaustivo de una familia de sistemas de dos EDOs no lineales y acopladas, determinada por varios parámetros. Lo que haremos siempre en primera instancia será el análisis local del sistema alrededor de los puntos de equilibrio. Esto se reduce a analizar la matriz de Jacobi asociada al sistema en términos de su traza y determinante, es decir, si J denota dicha matriz, entonces los valores propios de J están dados por las raíces del polinomio característico

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}J\lambda + \det J. \quad (1.4)$$

Igualando a cero y resolviendo la ecuación se tiene que los valores propios están dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{tr}J \pm \sqrt{\text{tr}J^2 - 4 \det J}}{2}. \quad (1.5)$$

La ecuación anterior determina todos los casos posibles de los sistemas lineales de dos EDOs. Invitamos al lector a revisar [7], en donde se explica detalladamente cada caso.

Sin embargo, no nos gustaría quedarnos únicamente con el análisis local: haremos la investigación global del sistema. Aunque existen muchas técnicas para realizar esto,

⁸La relación *ser topológicamente equivalente a* es una relación de equivalencia.

en esta sección hablaremos brevemente de las que emplearemos con mayor frecuencia en este trabajo. Tomemos el sistema

$$\dot{\vec{X}} = \vec{F}(\vec{X}) \quad (1.6)$$

donde $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial tal que todo problema de condiciones iniciales asociado con (1.6) tenga una única solución $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$. Comencemos con algunas definiciones:

Definición 1.1 *Considere el flujo Φ_t asociado al sistema (1.6). Decimos que $\vec{Y} \in \mathbb{R}^2$ es un punto ω -límite a través de \vec{X} si existe una sucesión t_n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ y que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(\vec{X}) = \vec{Y}.$$

Por otro lado, decimos que \vec{Y} es un punto α -límite a través de \vec{X} si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{-t_n}(\vec{X}) = \vec{Y}.$$

Definición 1.2 *Sea \mathcal{A} un subconjunto de \mathbb{R}^2 , entonces \mathcal{A} es:*

1. ***invariante**, si para cada $\vec{X} \in \mathcal{A}$ y toda $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t(\vec{X}) \in \mathcal{A}$.*
2. ***positivamente invariante**, si para cada $\vec{X} \in \mathcal{A}$ y toda $t \geq 0$, $\Phi_t(\vec{X}) \in \mathcal{A}$.*
3. ***negativamente invariante**, si para cada $\vec{X} \in \mathcal{A}$ y toda $t \leq 0$, $\Phi_t(\vec{X}) \in \mathcal{A}$.*

El objetivo de estas definiciones es el de hablar de qué pasa a lo largo del tiempo con el sistema dinámico inducido por el sistema de EDOs (1.6). Uno de los objetivos principales de los sistemas planos es el de hallar órbitas periódicas, o bien, ciclos heteroclínicos u homoclínicos. El siguiente teorema, y que puede consultarse con detalle en [7], es uno de los más importantes en el estudio de este tipo de sistemas. Este teorema puede ser enunciado en varias formas equivalentes (nosotros presentamos una de ellas), y caracteriza la dinámica de sistemas de EDOs autónomos planos.

Teorema 1.1 (de Poincaré-Bendixson) *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto límite compacto y no vacío del sistema (1.6) y que no tiene puntos de equilibrio. Entonces Ω es una órbita cerrada.*

Como puede notar el lector, el teorema de Poincaré-Bendixson no deja muchas opciones para el comportamiento a tiempos grandes de las soluciones de (1.6)⁹. Esto lo revisaremos en los siguientes dos corolarios, que además emplearemos a menudo en el Capítulo 3.

Corolario 1.1 *Un conjunto compacto K que es positiva o negativamente invariante contiene un ciclo límite o un punto de equilibrio.*

Corolario 1.2 *Sea γ una órbita cerrada, y sea \mathcal{U} la región abierta constituida por el interior de γ . Entonces \mathcal{U} contiene un ciclo límite o un punto de equilibrio.*

Mucho de lo que haremos en adelante será buscar esas regiones positiva o negativamente invariantes para descubrir si existen o no ciclos límite en el retrato fase de (1.6). Las técnicas para hallarlas son más específicas, requiere de analizar las ceroclinas y otros conjuntos en donde ya conozcamos el comportamiento de (1.6). Sin embargo, no son técnicas generales por lo que se mencionará el procedimiento empleado en el momento de ocuparlo.

⁹En particular, excluye la posibilidad de comportamientos caóticos.

Capítulo 2

Una forma normal para bifurcaciones secundarias

La naturaleza posee una perfección propia sorprendente, que es el resultado de una suma de límites. La naturaleza es perfecta porque no es infinita. Si uno comprende los límites, comprende cómo funciona el mecanismo.

Alessandro Baricco, en *Océano mar*.

2.1. Introducción

En este capítulo consideramos un modelo matemático que describe la dinámica de dos sustancias químicas que se difunden y reaccionan en un dominio conexo y compacto. Éste es suficientemente angosto como para suponer que es subconjunto de la recta real. Como lo mencionamos en el Capítulo 1, el problema se traduce matemáticamente en un sistema de EDPs de tipo RD cuyo dominio, reescalándolo

adecuadamente, es el intervalo $[0, \pi]$; con condiciones iniciales positivas, suficientemente suaves y cercanas a la solución de equilibrio, y con condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas.

Si la concentración de cada sustancia en el punto x al tiempo t se denota por $u(x, t)$ y $v(x, t)$ respectivamente, estas variables satisfacen el par de EDPs:

$$\begin{aligned} u_t &= D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{f}(u, v) \\ v_t &= D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{g}(u, v). \end{aligned} \tag{2.1}$$

definido $\forall (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}_+$.

El problema matemático se completa con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) \equiv u_0(x) ; v(x, 0) \equiv v_0(x) \quad \forall x \in [0, \pi], \tag{2.2}$$

donde u_0 y v_0 son funciones dadas, y las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(\pi, t) = v(0, t) = v(\pi, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \tag{2.3}$$

Las funciones \tilde{f} y \tilde{g} que aparecen en (2.1) contienen la información de la cinética química entre las dos sustancias. Además de ser no lineales, en ellas aparecen parámetros cinéticos con importante interpretación química.

Una vez hecho el planteamiento, el estudio del problema (2.1)-(2.2)-(2.3) será el siguiente: haremos el análisis lineal del sistema para determinar las funciones propias asociadas al sistema (2.1) con las condiciones iniciales y de frontera (2.2) y (2.3). A partir de lo anterior, podremos identificar las condiciones para que se presente un cambio de estabilidad, es decir, una bifurcación. Teniendo la expresión de las soluciones del sistema en serie de funciones propias, construiremos un sistema infinito y acoplado de EDOs, el cual simplificaremos un poco a partir de transformaciones lineales. Finalmente, haremos uso del método de perturbaciones para determinar los términos relevantes en la dinámica del problema.

2.2. Análisis lineal

Supongamos que el sistema homogéneo asociado a (2.1) tiene como punto de equilibrio, es decir una solución estacionaria y homogénea, a¹ (0, 0). Suponiendo que \tilde{f} y \tilde{g} son suficientemente suaves en una vecindad del origen, entonces localmente el sistema (2.1) puede aproximarse por el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{11}u + a_{12}v + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_{21}u + a_{22}v + g(u, v),\end{aligned}\tag{2.4}$$

donde a_{ij} son las entradas de la matriz de Jacobi del campo vectorial que define al sistema homogéneo asociado a (2.1) evaluada en (0, 0). Las funciones f y g que aparecen en (2.4), contienen todos los términos no lineales, que provienen del desarrollo de Taylor de \tilde{f} y \tilde{g} alrededor del origen, a partir del término cuadrático en adelante, respectivamente. Por ello, f y g satisfacen

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{f(u, v)}{\|(u, v)\|} = \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{g(u, v)}{\|(u, v)\|} = 0.$$

Es importante mencionar que las bifurcaciones secundarias requieren de dos parámetros de degeneración, esto es que su *codimensión* es dos. Tomando en cuenta lo anterior, a continuación consideraremos el sistema particular de tipo RD, en su notación vectorial

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{pmatrix} + (A + \lambda B + \sigma C) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix},\tag{2.5}$$

donde $A, B, C \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ y la matriz $(A + \lambda B + \sigma C)$ indica que la matriz de Jacobi del sistema anterior se descompone de esta forma, dependiendo de los parámetros λ

¹Si fuera un punto de equilibrio distinto, digamos (u^*, v^*) , entonces se hace el cambio de variables $\hat{u} = u - u^*$ y $\hat{v} = v - v^*$, y con éste se garantiza que el origen sea el equilibrio garantiza que el punto de equilibrio sea el origen.

y σ . Este es un caso muy particular, y en muchos casos esto podría no ser así; sin embargo, si las entradas de la matriz de Jacobi, $a_{ij}(\lambda, \sigma)$, son funciones de dichos parámetros y éstas son suficientemente suaves, entonces alrededor de (λ^*, σ^*) se tiene que

$$a_{ij}(\lambda, \sigma) \approx a_{ij}(\lambda^*, \sigma^*) + \frac{\partial a_{ij}(\lambda^*, \sigma^*)}{\partial \lambda} \lambda + \frac{\partial a_{ij}(\lambda^*, \sigma^*)}{\partial \sigma} \sigma,$$

que, para valores de λ y σ cercanos a (λ^*, σ^*) , tiene la forma que planteamos.

Además de lo anterior, se satisfacen las condiciones iniciales y de frontera (2.2) y (2.3), donde las funciones f y g son polinomios homogéneos. Para los fines de este trabajo f y g serán polinomios de grado 2 y 3, respectivamente².

Enseguida haremos el análisis local lineal de (2.5) alrededor de la solución estacionaria y homogénea $u = v = 0$. Buscamos funciones propias adecuadas al problema provenientes del sistema lineal asociado a (2.5), por lo que proponemos por solución de (2.5) al par de funciones $u(x, t) = e^{\mu t} \phi(x)$ y $v(x, t) = e^{\mu t} \psi(x)$ con $\mu \in \mathbb{C}$. Sustituyendo estas expresiones en el sistema lineal que resulta de eliminar los términos f y g obtenemos que μ , ϕ y ψ satisfacen el par de EDOs

$$\begin{pmatrix} \mu \phi(x) \\ \mu \psi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \phi''(x) \\ D_2 \psi''(x) \end{pmatrix} + (A + \lambda B + \sigma C) \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

donde, como consecuencia de las condiciones de frontera (2.3), se tiene que ϕ y ψ deben, además, cumplir que

$$\phi(0) = \phi(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0. \quad (2.7)$$

Según la teoría de Sturm-Liouville, el problema de condiciones de frontera (2.6)-(2.7), las funciones propias de éste son las funciones trigonométricas

$$\phi_n(x) = \text{sen}(nx), \quad \psi_n(x) = \text{sen}(nx), \quad n \in \mathbb{N}$$

²Podemos considerar lo anterior sólo como ejemplos, sin embargo es posible también pensar que si integramos en un trabajo posterior ambos casos podríamos tratar de entender las bifurcaciones secundarias para funciones con aproximación en serie de Taylor hasta orden 3.

con valor propio μ_n , el cual satisface la igualdad

$$\det(A + \lambda B + \sigma C - \mu_n I - n^2 D) = 0, \quad (2.8)$$

donde $D = \text{diag}(D_1, D_2)$ e I es la matriz identidad de 2×2 .

Recordemos que la solución estacionaria y homogénea del sistema (2.5) es asintóticamente estable localmente (a.e.l.) si $\text{Re}(\mu_n) < 0$ para toda n . Suponiendo que una bifurcación se da justo en $\sigma = 0$ y que implique que $\lambda = 0$ es el mínimo número³ λ que haga que $\text{Re}(\mu_n) \geq 0$ para alguna n , entonces la estabilidad de dicha solución se romperá. Lo anterior nos motiva a obtener el polinomio característico en la variable μ_n para $\lambda = \sigma = 0$, sustituyendo estos valores en (2.8). Se obtiene la fórmula:

$$P(\mu_n) = \mu_n^2 + \mu_n [\text{tr}(n^2 D - A)] + \det(A - n^2 D), \quad (2.9)$$

cuyas raíces son:

$$\mu_n^\pm = \frac{\text{tr}(A - n^2 D) \pm \sqrt{\text{tr}(A - n^2 D)^2 - 4 \det(A - n^2 D)}}{2}. \quad (2.10)$$

2.3. Construcción de la forma normal

A fin de determinar la frontera (en la región de los parámetros) en la que se da la bifurcación, buscamos las raíces (2.10) que tengan parte real nula. Si la matriz de Jacobi, con entradas (a_{ij}) , no es la matriz nula, analizaremos el caso en que la bifurcación ocurra cuando⁴:

$$\text{tr}(A - n^2 D) < 0 \text{ y } \det(A - n^2 D) = 0 \quad (2.11)$$

³Si esto ocurriera en puntos σ_0 con λ_0 diferentes de cero, se hacen los cambios de variable $\sigma^* = \sigma - \sigma_0$ y $\lambda^* = \lambda - \lambda_0$.

⁴En [8] se mencionan otras formas en que pudiera ocurrir esta bifurcación. Para fines de este trabajo, sólo analizaremos las condiciones (2.11), aunque, como veremos más adelante, valdrá la pena revisar los otros casos ahí mencionados.

De lo anterior⁵ es de notar que si se cumple (2.11) entonces $\mu_n^- = 0$. Como queríamos destruir la estabilidad de la solución estacionaria y homogénea, pediremos que para toda n que no cumpla los casos anteriores, ésta satisfaga el par de condiciones

$$\text{tr}(A - n^2) < 0 \text{ y } \det(A - n^2D) > 0. \quad (2.12)$$

En [8], Keener menciona que hay cinco formas de volver inestable a la solución. Dos de ellas dan origen a bifurcaciones de codimensión uno. Para fines del presente trabajo, únicamente consideraremos el siguiente caso:

Las condiciones (2.11) se satisfacen para $n = m_1, m_2$ con $|m_1 - m_2| = 1$. Para todo $n \neq m_1, m_2$ se satisfacen las condiciones (2.12).

Ahora retomemos el sistema (2.5). Siendo el conjunto de funciones trigonométricas $\{\text{sen}(nx)\}$ completo en el intervalo $[0, \pi]$, entonces la solución general del sistema (2.5) se puede expresar como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \text{sen}(kx) \\ v(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \text{sen}(kx), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde las funciones u_k y v_k son desconocidas.

Si denotamos por $\bar{u} = (u_1(t), u_2(t), \dots)$ y $\bar{v} = (v_1(t), v_2(t), \dots)$ también podemos expresar a las funciones f y g de la siguiente manera⁶:

$$\begin{aligned} f(x, t) &\equiv f(u(x, t), v(x, t)) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\bar{u}, \bar{v}) \text{sen}(kx) \\ g(x, t) &\equiv g(u(x, t), v(x, t)) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\bar{u}, \bar{v}) \text{sen}(kx), \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde f_k y g_k son los coeficientes de Fourier de las funciones f y g , respectivamente.

⁵Nótese que se pide que $\text{tr}(A - n^2) < 0$ ya que si fuera positivo se tendría un valor propio con parte real positiva, y por tanto la solución sería inestable de antemano.

⁶Esto sería cierto si f y g fueran impares, sin embargo como están definidas en $[0, \pi]$ es posible hacer una extensión impar a $[-\pi, \pi]$ al definir $\bar{f}(x) = -f(-x)$ y $\bar{g}(x) = -g(-x)$ para $x \in [-\pi, 0]$

Sustituyendo (2.13) y (2.14) en (2.5), suponiendo que se pueden intercambiar las sumas con las derivadas parciales⁷, se tiene el siguiente sistema compuesto por un número infinito de EDOs para u_k y v_k :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \dot{u}_k \text{sen}(kx) \\ \dot{v}_k \text{sen}(kx) \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-k^2 \begin{pmatrix} D_1 u_k \text{sen}(kx) \\ D_2 v_k \text{sen}(kx) \end{pmatrix} + (A + \lambda B + \sigma C) \begin{pmatrix} u_k \text{sen}(kx) \\ v_k \text{sen}(kx) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_k \text{sen}(kx) \\ g_k \text{sen}(kx) \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

Por ser $\{\text{sen}(kx)\}_{k=1}^{\infty}$ un conjunto linealmente independiente en el intervalo $[0, \pi]$, entonces a fin de que la igualdad se dé para todo $x \in [0, \pi]$ los respectivos coeficientes de la izquierda deben ser los mismos que los correspondientes del lado derecho en (2.15). Esto conduce al sistema infinito de EDOs acopladas para u_k y v_k

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{v}_k \end{pmatrix} = (A - k^2 D + \lambda B + \sigma C) \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Como ya lo mencionamos anteriormente, supondremos que A y D son tales que para $m = m_1, m_2$ se cumple (2.11) y que, en otro caso, se satisface (2.12). Buscamos una transformación que diagonalice la matriz $(A - m^2 D)$ para $m = m_1, m_2$. Para ello consideremos la transformación definida por la matriz

$$T_m = \begin{bmatrix} a_{22} - m^2 D_2 & a_{11} - m^2 D_1 \\ -a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

cuya inversa es

$$T_m^{-1} = \frac{1}{a_{21} \text{tr}(A - m^2 D)} \begin{bmatrix} a_{21} & -a_{11} + m^2 D_1 \\ a_{21} & a_{22} - m^2 D_2 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

⁷Puede referirse a los teoremas A.1 y A.2 del Apéndice A del presente trabajo en el cual se dan condiciones bajo las cuales se puede realizar dicho intercambio.

de donde, al calcular $T_m^{-1}(A - m^2D)T_m$ considerando que por hipótesis $\det(A - m^2D) = 0$ y definiendo $z = \frac{1}{a_{21}tr(A - m^2D)}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
T_m^{-1}(A - m^2D)T_m &= zT_m^{-1} \begin{bmatrix} \det(A - m^2D) & (a_{11} - m^2D_1)^2 + a_{12}a_{21} \\ 0 & a_{21}(a_{11} - m^2D_1) + a_{21}(a_{22} - m^2D_2) \end{bmatrix} \\
&= z \begin{bmatrix} 0 & a_{21} \det(A - m^2D) \\ 0 & a_{21}tr^2(A - m^2D) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & tr(A - m^2D) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Para toda $n \neq m_1, m_2$ definamos⁸ $T_m = I$. Para cada ecuación diferencial del sistema infinito dado por (2.16) hagamos el cambio de variable:

$$\begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} = T_k^{-1} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

y el sistema (2.16) se convierte en el sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_k \\ \dot{V}_k \end{pmatrix} = (P_k + \lambda B_k + \sigma C_k) \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_k(\bar{U}, \bar{V}) \\ G_k(\bar{U}, \bar{V}) \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

donde

$$\begin{aligned}
P_k &= T_m^{-1}(A - m^2D)T_m ; B_k = T_m^{-1}BT_m ; C_k = T_m^{-1}CT_m \\
\begin{pmatrix} F_k(\bar{U}, \bar{V}) \\ G_k(\bar{U}, \bar{V}) \end{pmatrix} &= T_k^{-1} \begin{pmatrix} f_k(\bar{U}, \bar{V}) \\ g_k(\bar{U}, \bar{V}) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Haremos el análisis del sistema (2.21) para $\lambda = \sigma = 0$. Para ello, supondremos que en una vecindad de este punto $\lambda = \epsilon^2\mu$ y $\sigma = \epsilon^2\nu$, donde $0 < \epsilon \ll 1$. Aprovechando

⁸De esta forma estamos dando generalidad a lo que diremos más adelante, claramente no estamos haciendo cambio alguno en estos casos. Sin embargo, debido a que satisfacen las propiedades (2.12) sabemos lo necesario en estos casos.

la introducción del parámetro pequeño ϵ nos propondremos hallar un desarrollo de la solución de (2.21) por medio de una técnica de perturbación en multiescala (doble tiempo)⁹. Es decir, supondremos que la solución de (2.21) es una función de dos variables temporales independientes dadas por:

$$\tau = \epsilon^2 t \quad \text{y} \quad t^* = t. \quad (2.23)$$

De lo anterior, se tendrá que las soluciones de (2.21) se pueden expresar como serie de potencias del parámetro ϵ en la forma¹⁰

$$\begin{aligned} \bar{U}(t^*, \tau) &= \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon^{2p+1} \bar{U}^p(t^*, \tau) \\ \bar{V}(t^*, \tau) &= \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon^{2p+1} \bar{V}^p(t^*, \tau) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por (2.23) y usando la regla de la cadena, se tiene que

$$\frac{dX_k}{dt} = \frac{\partial X_k}{\partial t^*} + \epsilon^2 \frac{\partial X_k}{\partial \tau}; \quad X_k \in \{U_k, V_k\}, \quad (2.25)$$

que, al emplearlo en (2.21), tomando en cuenta que $U_k = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon^{2p+1} U_k^p$ y $V_k = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon^{2p+1} V_k^p$, para cada $k \in \mathbb{N}$ se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \begin{pmatrix} U_k^1 \\ V_k^1 \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} U_k^1 \\ V_k^1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \begin{pmatrix} U_k^2 \\ V_k^2 \end{pmatrix} - P_k \begin{pmatrix} U_k^2 \\ V_k^2 \end{pmatrix} = (\mu B_k + \nu C_k) \begin{pmatrix} U_k^1 \\ V_k^1 \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} U_k^1 \\ V_k^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_k(\bar{U}^1, \bar{V}^1) \\ G_k(\bar{U}^1, \bar{V}^1) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

De (2.26) podemos observar que para $k \neq m_1, m_2$, las soluciones U_k^1 y V_k^1 son asintóticamente estables localmente en la variable t^* ; esto se sigue al considerar la

⁹Esta es la traducción que hicimos del término en inglés *two-timing*.

¹⁰La notación usada aquí se ha de entender así: para el parámetro ϵ significa elevar a la potencia $2p + 1$; mientras que para \bar{U} es un superíndice, una etiqueta.

condición (2.12). Por otra parte, observemos que por (2.11) y por (2.26) para $m = m_1, m_2$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \begin{pmatrix} U_{m_i}^1 \\ V_{m_i}^1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{tr}(A - m_i^2 D) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{m_i}^1 \\ V_{m_i}^1 \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2. \quad (2.28)$$

De lo anterior concluimos que $U_{m_1}^1$ y $U_{m_2}^1$ son funciones que dependen únicamente de τ ; por ello, las denotaremos como $U_{m_1}^1 = a(\tau)$ y $U_{m_2}^1 = b(\tau)$ respectivamente. Por otra parte, $V_{m_1}^1$ y $V_{m_2}^1$ son asintóticamente estables en la variable t^* . De forma parecida también esto pasa con $V_{m_1}^2$ y $V_{m_2}^2$. Además, debido a que en las matrices P_{m_1} y P_{m_2} hay un cero en la diagonal (véase (2.19)), entonces $U_{m_1}^2$ y $U_{m_2}^2$ son no acotadas en la variable t^* .

Eliminando los términos de (2.27) que no dependen de t^* , pues ahí no se exhibe cambio en la estabilidad, obtenemos que a y b satisfacen la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu\beta_1 + \nu\gamma_1)a + \hat{f}_{m_1}(a, b) \\ (\mu\beta_2 + \nu\gamma_2)b + \hat{f}_{m_2}(a, b) \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (B_{m_1})_{11}, & \beta_2 &= (B_{m_2})_{11}, \\ \gamma_1 &= (C_{m_1})_{11}, & \gamma_2 &= (C_{m_2})_{11}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

y las funciones \hat{f}_{m_1} y \hat{f}_{m_2} son las partes de F_{m_1} y F_{m_2} que no dependen de t^* .

2.3.1. Un caso particular: polinomios homogéneos cúbicos

En seguida nos apartamos del análisis general realizado en las páginas anteriores y consideramos un campo vectorial particular. Para ello, consideraremos el correspondiente problema de condiciones iniciales y de frontera asociado al sistema (2.4) y calcularemos los términos de \hat{f}_{m_1} y \hat{f}_{m_2} , suponiendo que f y g son polinomios homogéneos cúbicos, es decir,

$$\begin{aligned} f(u, v) &= c_1 u^3 + c_2 u^2 v + c_3 u v^2 + c_4 v^3 \\ g(u, v) &= d_1 u^3 + d_2 u^2 v + d_3 u v^2 + d_4 v^3, \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde $c_i, d_j \in \mathbb{R}$ para $i, j = 1, \dots, 4$. Emplearemos la solución en serie (2.13) para determinar la expresión de f y g en términos de dicha solución. Para ello emplearemos el teorema del producto de dos series de Fourier (véase el Apéndice A). En efecto, según dicho teorema, si se tienen funciones arbitrarias $y(x, t)$ y $z(x, t)$ expresadas en términos de sus respectivas series de Fourier como $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \text{sen}(nx)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \text{sen}(nx)$, que en nuestro caso tomarán el papel de las funciones u y v . Entonces, al usar el teorema A.3, se tiene

$$y^2(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k (y_{k+m} + y_{k-m}) \right) \cos(mx) \quad (2.32)$$

y, en consecuencia¹¹

$$\begin{aligned} y^2 z &= \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k (y_{k+m} + y_{k-m}) \right) (z_{m+n} - z_{m-n}) \text{sen}(nx) \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{p,m,k=1}^{\infty} (y_k y_{k+m} z_{m+p} - y_k y_{k+m} z_{m-p} + y_k y_{k-m} z_{m-p} - y_k y_{k-m} z_{m-p}) \text{sen}(px). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Es conveniente detenernos aquí a fin de dar a conocer el guión que llevaremos a lo largo de esta subsección. En primera instancia, tomaremos la expresión (2.33) y la simplificaremos, pues haremos uso de ella para aplicarla con las funciones u y v . Ya en este segundo punto, tomaremos aquellos términos de esta misma serie que contengan únicamente subíndices m_1 y m_2 , y que agruparemos en los términos $f_{m_1}^*$, $f_{m_2}^*$, $g_{m_1}^*$ y $g_{m_2}^*$. Finalmente, obtendremos las expresiones de \hat{f}_{m_1} y \hat{f}_{m_2} con el cambio de variable que indicamos en (2.22).

Procederemos, como lo mencionamos, a simplificar la expresión anterior, primero suponiendo que $(m-p) > 0$ y $(k-m) > 0$. Del primer término, $y_k y_{k+m} z_{m+p}$, de la serie (2.33), observemos que si $m^* = k+m$ y $n = m+p$ entonces se tiene que $k - m^* + n = p$. De forma análoga para el segundo término, $y_k y_{k+m} z_{m-p}$, si $m^* = k+m$ y $n = m-p$ entonces $k - m^* + n = -p$. Si juntamos ambos casos se tiene que $|k - m^* + n| = p$. Por lo tanto, podemos agrupar todos estos términos en

¹¹Tomando $a_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k (y_{k+m} + y_{k-m})$, $A_m = b_m = 0$ y $B_m = z_m$.

la suma

$$\sum_{|k-m^*+n|=p} \operatorname{sgn}(k-m^*+n)y_k y_{m^*} z_n \operatorname{sen}(px). \quad (2.34)$$

Para el tercer término denotemos por $m^* = k - m$ y $n = m + p$, y para el cuarto término haremos $m^* = k - m$ y $n = m - p$. Luego, como lo hicimos anteriormente, tendremos que $|-k + m^* + n| = p$, por lo que agrupamos estos términos en

$$\sum_{|-k+m^*+n|=p} \operatorname{sgn}(-k+m^*+n)y_k y_{m^*} z_n \operatorname{sen}(px). \quad (2.35)$$

Ahora bien, si $(m-p) < 0$ y recordando que entonces $z_{m-p} = -z_{p-m}$, tendremos que, del segundo término de (2.33) si $m^* = k + m$ y $n = p - m$, entonces $-k + m + n = p$ y por lo tanto este caso pasa a formar parte de los sumandos de (2.35).

Por otro lado, cuando $(k-m) < 0$ obtenemos que del tercer término de (2.33), $y_{k-m} = -y_{m-k}$ y que si $m^* = m - k$ y $n = m + p$ entonces $k + m^* - n = -p$. Además, cuando $(m-p) < 0$ al mismo tiempo que $(k-m) > 0$ entonces del cuarto término de (2.33) haciendo $m^* = m - k$ y $n = m - p$ tenemos que $k + m^* - n = p$. Luego, ambos conjuntos de términos los agrupamos en el sumando:

$$\sum_{|k+m^*-n|=p} \operatorname{sgn}(k+m^*-n)y_k y_{m^*} z_n \operatorname{sen}(px). \quad (2.36)$$

Cuando $(m-p) < 0$ y $(k-m) > 0$, del cuarto término de (2.33) tenemos que si $m^* = k - m$ y $n = p - m$, entonces $k - m^* + n = p$, por lo que todos estos términos quedarían incluidos en (2.34).

Finalmente cuando $(m-p) < 0$ y $(k-m) < 0$, del cuarto término de (2.33) se tiene, haciendo $m^* = m - k$ y $n = p - m$, que $k + m^* + n = p$. Luego, todos estos términos se agrupan en

$$\sum_{k+m^*+n=p} y_k y_{m^*} z_n \operatorname{sen}(px). \quad (2.37)$$

Sumando (2.34), (2.35), (2.36) y (2.37) y quitando los asteriscos por comodidad en la notación, $y^2 z$ se escribe así

$$\begin{aligned}
y^2 z &= \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \sum_{|k-m+n|=p} \operatorname{sgn}(k-m+n) y_k y_m z_n + \right. \\
&\quad \sum_{|-k+m+n|=p} \operatorname{sgn}(-k+m+n) y_k y_m z_n + \sum_{|k+m-n|=p} \operatorname{sgn}(k+m-n) y_k y_m z_n + \\
&\quad \left. \sum_{k+m+n=p} y_k y_m z_n \right\}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Recordemos que u y v , para nuestros fines, tomarán el papel ya sea de y o de z , según sea el caso. Por ejemplo, de lo anterior podemos obtener que

$$\begin{aligned}
u^3 &= \sum_{|k-m+n|=p} \operatorname{sgn}(k-m+n) u_k u_m u_n + \sum_{|-k+m+n|=p} \operatorname{sgn}(-k+m+n) u_k u_m u_n + \\
&\quad + \sum_{|k+m-n|=p} \operatorname{sgn}(k+m-n) u_k u_m u_n + \sum_{k+m+n=p} u_k u_m u_n.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Para calcular los términos en f_{m_1} que sólo tienen términos u_{m_i} y v_{m_i} ($i = 1, 2$), se puede tomar los sumandos de (2.38) que corresponden a hacer $p = m_1$.

Así, para u^3 , del primer término de la serie, tomando en consideración lo anterior, tenemos $|k-m+n| = m_1$. Cuando $m = m_1$ entonces, si sólo queremos los subíndices con m_1 y m_2 , está forzado a que $k = n = m_1$. Cuando $m = m_2$, las posibilidades son que $k = m_1, n = m_2$, o que $k = m_2, n = m_1$. Por lo tanto, los términos correspondientes serán $u_{m_1}^3 + 2u_{m_1} u_{m_2}^2$.

Ahora para el segundo término, procedemos de forma análoga. Como $|-k+m+n| = m_1$, entonces si $k = m_1$, se tiene $m = n = m_1$. Si $k = m_2$, entonces $m = m_1, n = m_2$, o bien $m = m_2, n = m_1$; por lo que los términos correspondientes serán nuevamente $u_{m_1}^3 + 2u_{m_1} u_{m_2}^2$.

Haciendo los mismos cálculos para el tercer término de la serie, los términos correspondientes coinciden nuevamente siendo $u_{m_1}^3 + 2u_{m_1} u_{m_2}^2$. Obsérvese que para el

cuarto término de la serie, no hay combinación posible de números $k, m, n \in \{m_1, m_2\}$ tal que $k + m + n = m_1$, de allí que si sumamos los tres términos obtenidos, se tenga que para u^3 , los términos que sólo tienen a u_{m_i} y v_{m_i} ($i = 1, 2$) son $3u_{m_1}^3 + 6u_{m_1}u_{m_2}^2$.

Una vez hechos los cálculos detallados para expresar la parte relevante de u^3 , a partir de los términos correspondientes de la serie (2.33), podemos decir que, siguiendo un procedimiento análogo, se obtienen las expresiones para los términos u^2v , uv^2 y v^3 . Los resultados que se obtienen son:

$$\begin{aligned} \text{Para } u^2v: & \quad 3u_{m_1}^2 v_{m_1} + 4u_{m_1}u_{m_2}v_{m_1} + 2u_{m_2}^2 v_{m_1}. \\ \text{Para } uv^2: & \quad 3u_{m_1}v_{m_1}^2 + 4u_{m_1}v_{m_1}v_{m_2} + 2u_{m_1}v_{m_2}^2. \\ \text{Para } v^3: & \quad 3v_{m_1}^3 + 6v_{m_1}v_{m_2}^2. \end{aligned}$$

En conclusión, la parte de f_{m_1} que sólo contiene a u_{m_i} y v_{m_i} es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}c_1 (3u_{m_1}^3 + 6u_{m_1}u_{m_2}^2) + \frac{1}{4}c_2 (3u_{m_1}^2 v_{m_1} + 4u_{m_1}u_{m_2} + 2u_{m_2}^2 v_{m_1}) + \\ & + \frac{1}{4}c_3 (3u_{m_1}v_{m_1}^2 + 4u_{m_1}v_{m_1}v_{m_2} + 2u_{m_1}v_{m_2}^2) + \frac{1}{4}c_4 (3v_{m_1}^3 + 6v_{m_1}v_{m_2}^2) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Lo anterior es necesario para conocer las partes de F_{m_i} (véase (2.29)) que son constantes en t^* , es decir aquellas que sólo dependen de $a(\tau)$ y $b(\tau)$. Sustituyendo en los términos de (2.40) por las variables obtenidas en (2.20) se tiene:

$$\begin{aligned} 3u_{m_1}^3 &= 3[(a_{22} - m_1^2 D_2)a + (a_{11} - m_1^2 D_1)V_{m_1}]^3 \\ &= 3[(a_{22} - m_1^2 D_2)^3 a^3 + 3(a_{22} - m_1^2 D_2)^2 (a_{11} - m_1^2 D_1) a^2 V_{m_1} \\ & \quad + 3(a_{22} - m_1^2 D_2)(a_{11} - m_1^2 D_1) a V_{m_1}^2 + (a_{11} - m_1^2 D_1)^3 V_{m_1}^3]. \\ 6u_{m_1}u_{m_2}^2 &= 6[(a_{22} - m_1^2 D_2)(a_{22} - m_2^2 D_2)^2 ab^2 + \dots] \\ 3u_{m_1}^2 v_{m_1} &= 3a_{21}(a_{22} - m_1^2 D_2)^2 a^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
4u_{m_1}u_{m_2}v_{m_2} &= -4a_{21}(a_{22} - m_1^2D_2)(a_{22} - m_2^2D_2)ab^2 + \dots \\
2v_{m_1}u_{m_2}^2 &= -2a_{21}(a_{22} - m_2^2D_2)^2ab^2 + \dots \\
3v_{m_1}^2u_{m_1} &= 3a_{21}^2(a_{22} - m_1^2D_2)^2a^3 + \dots \\
4v_{m_1}u_{m_2}v_{m_2} &= 4a_{21}^2(a_{22} - m_2^2D_2)ab^2 + \dots \\
2u_{m_1}v_{m_2}^2 &= 2a_{21}^2(a_{22} - m_1^2D_2)ab^2 + \dots \\
3v_{m_1}^3 &= -3a_{21}^3a^3 + \dots \\
6v_{m_1}v_{m_2}^2 &= -6a_{21}^3ab^2 + \dots
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Se realizó el cálculo explícito para el primer término a manera de ejemplo, pero hay que recordar que sólo deseamos conocer los términos que dependen de $a(\tau)$ y $b(\tau)$. Por ello, en los términos posteriores sólo se escribió el sumando relevante. Finalmente los términos relevantes resultan ser:

$$\begin{aligned}
f_{m_1}^* &= \frac{3}{4}[c_1(a_{22} - m_1^2D_2)(a_{11} - m_1^2D_1)^2 - c_2a_{21}(a_{22} - m_1^2D_2)^2 \\
&\quad + c_3a_{21}^2(a - 22 - m_1^2D_2) - c_4a_{21}^3]a^3 + [\frac{3}{2}c_1(a_{22} - m_1^2D_2)^3 \\
&\quad - c_2a_{21}(a_{22} - m_1^2D_2)(a_{22} - m_2^2D_2) - \frac{1}{2}c_2a_{21}(a_{22} - m_2^2D_2)^2 + c_3a_{21}^2(a - 22 - m_2^2D_2) \\
&\quad + \frac{1}{2}c_3a_{21}^2(a - 22 - m_1^2D_2) - \frac{3}{4}c_4a_{21}^3]ab^2.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Análogamente obtenemos la ecuación para $f_{m_2}^*$, que resulta de intercambiar el papel de m_1 con m_2 , por lo que

$$\begin{aligned}
f_{m_2}^* &= \frac{3}{4}[c_1(a_{22} - m_2^2 D_2)(a_{11} - m_2^2 D_1)^2 - c_2 a_{21}(a_{22} - m_2^2 D_2)^2 \\
&\quad + c_3 a_{21}^2(a - 22 - m_2^2 D_2) - c_4 a_{21}^3]a^3 + [\frac{3}{2}c_1(a_{22} - m_2^2 D_2)^3 \\
&\quad - c_2 a_{21}(a_{22} - m_2^2 D_2)(a_{22} - m_1^2 D_2) - \frac{1}{2}c_2 a_{21}(a_{22} - m_1^2 D_2)^2 + c_3 a_{21}^2(a - 22 - m_1^2 D_2) \\
&\quad + \frac{1}{2}c_3 a_{21}^2(a - 22 - m_2^2 D_2) - \frac{3}{4}c_4 a_{21}^3]ab^2.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Finalmente obtenemos $g_{m_1}^*$ y $g_{m_2}^*$, simplemente cambiando c_i por d_i con $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
g_{m_1}^* &= \frac{3}{4}[d_1(a_{22} - m_1^2 D_2)(a_{11} - m_1^2 D_1)^2 - s_2 a_{21}(a_{22} - m_1^2 D_2)^2 \\
&\quad + d_3 a_{21}^2(a - 22 - m_1^2 D_2) - d_4 a_{21}^3]a^3 + [\frac{3}{2}c_1(a_{22} - m_1^2 D_2)^3 \\
&\quad - d_2 a_{21}(a_{22} - m_1^2 D_2)(a_{22} - m_2^2 D_2) - \frac{1}{2}d_2 a_{21}(a_{22} - m_2^2 D_2)^2 + d_3 a_{21}^2(a - 22 - m_2^2 D_2) \\
&\quad + \frac{1}{2}d_3 a_{21}^2(a - 22 - m_1^2 D_2) - \frac{3}{4}d_4 a_{21}^3]ab^2
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
g_{m_2}^* &= \frac{3}{4}[d_1(a_{22} - m_2^2 D_2)(a_{11} - m_2^2 D_1)^2 - d_2 a_{21}(a_{22} - m_2^2 D_2)^2 \\
&\quad + d_3 a_{21}^2(a - 22 - m_2^2 D_2) - d_4 a_{21}^3]a^3 + [\frac{3}{2}d_1(a_{22} - m_2^2 D_2)^3 \\
&\quad - d_2 a_{21}(a_{22} - m_2^2 D_2)(a_{22} - m_1^2 D_2) - \frac{1}{2}d_2 a_{21}(a_{22} - m_1^2 D_2)^2 + d_3 a_{21}^2(a - 22 - m_1^2 D_2) \\
&\quad + \frac{1}{2}d_3 a_{21}^2(a - 22 - m_2^2 D_2) - \frac{3}{4}d_4 a_{21}^3]ab^2
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Por último tenemos que por la transformación (2.22), las funciones \hat{f}_{m_1} y \hat{f}_{m_2} de

(2.29) son¹²

$$\begin{aligned}\hat{f}_{m_1}(a, b) &= \delta_1 a^3 + \eta_1 ab^2 \\ \hat{g}_{m_2}(a, b) &= \delta_2 a^2 b + \eta_2 b^3,\end{aligned}\tag{2.47}$$

donde

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{3}{4} [F_1(a_{22} - m_1^2 D_2)^3 - F_2 a_{21} (a_{22} - m_1^2 D_2)^2 + F_3 a_{21}^2 (a_{22} - m_1^2 D_2) - F_4 a_{21}^3], \\ \eta_1 &= \frac{3}{2} F_1 (a_{22} - m_1^2 D_2) (a_{22} - m_2^2 D_2)^2 \\ &\quad - F_2 a_{21} [(a_{22} - m_1^2 D_2) (a_{22} - m_2^2 D_2) + \frac{1}{2} (a_{22} - m_2^2 D_2)^2] \\ &\quad + F_3 a_{21}^2 [a_{22} - m_2^2 D_2 + \frac{1}{2} (a_{22} - m_1^2 D_2)] - \frac{3}{4} F_4 a_{21}^3, \\ \delta_2 &= \frac{3}{4} [G_1(a_{22} - m_2^2 D_2)^3 - G_2 a_{21} (a_{22} - m_2^2 D_2)^2 + G_3 a_{21}^2 (a_{22} - m_2^2 D_2) - G_4 a_{21}^3], \\ \eta_2 &= \frac{3}{2} G_1 (a_{22} - m_2^2 D_2) (a_{22} - m_1^2 D_2)^2 \\ &\quad - G_2 a_{21} [(a_{22} - m_2^2 D_2) (a_{22} - m_1^2 D_2) + \frac{1}{2} (a_{22} - m_1^2 D_2)^2] \\ &\quad + G_3 a_{21}^2 [a_{22} - m_1^2 D_2 + \frac{1}{2} (a_{22} - m_2^2 D_2)] - \frac{3}{4} G_4 a_{21}^3,\end{aligned}\tag{2.48}$$

y además,

$$\begin{aligned}F_j &= \frac{1}{a_{21} \text{tr}(A - m_1^2 D)} [a_{21} f_j - g_j (a_{11} - m_1^2 D_1)] \\ G_j &= \frac{1}{a_{21} \text{tr}(A - m_2^2 D)} [a_{21} f_j - g_j (a_{11} - m_2^2 D_1)].\end{aligned}\tag{2.49}$$

¹²Observe que δ_2 y η_2 resultan de intercambiar el papel de m_1 y m_2 .

Para concluir, de (2.29) y (2.47) se tiene que la forma normal a estudiar es:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= (\mu\beta_1 + \nu\gamma_1)a + \delta_1 a^3 + \eta_1 ab^2 \\ \dot{b} &= (\mu\beta_2 + \nu\gamma_2)b + \delta_2 a^2 b + \eta_2 b^3\end{aligned}\tag{2.50}$$

Dependiendo del valor de los parámetros que aparecen en (2.50) se presentarán dinámicas distintas. Parte del análisis cualitativo del sistema de EDOs (2.50) se presentará en el Capítulo 3.

2.3.2. Otro caso particular: polinomios homogéneos cuadráticos

Supongamos ahora que las funciones f y g de (2.5) son polinomios homogéneos de grado dos. Procediendo de forma idéntica a como lo hemos hecho hasta este momento (hasta (2.21)) propondremos que la solución del sistema anterior sea una función que dependa de dos variables independientes, dadas por

$$\begin{aligned}t^* &= t \\ \tau &= \epsilon t,\end{aligned}\tag{2.51}$$

donde $0 < \epsilon \ll 1$. De lo anterior, se tiene que las soluciones de (2.21) se pueden expresar como series de potencias en el parámetro ϵ en la forma

$$\begin{aligned}\bar{U}(t^*, \tau) &= \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p \bar{U}^p(t^*, \tau) \\ \bar{V}(t^*, \tau) &= \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p \bar{V}^p(t^*, \tau).\end{aligned}\tag{2.52}$$

Usando la regla de la cadena, tenemos que se vale la igualdad

$$\frac{dX_k}{dt} = \frac{\partial X_k}{\partial t^*} + \epsilon \frac{\partial X_k}{\partial \tau},$$

donde $X_k \in \{U_k, V_k\}$. Usando lo anterior y sutituyendo (2.52) en (2.21) obtenemos exactamente las ecuaciones (2.26) y (2.27). Más aún, podemos deducir exactamente de la misma forma que $V_{m_1}^1, V_{m_2}^1$ y U_k^1, V_k^1 (para $k \neq m_1, m_2$) son asintóticamente estables localmente en la variable t^* . Nuevamente, por el mismo argumento del caso anterior, $U_{m_1}^1$ y $U_{m_2}^1$ dependen únicamente de la variable τ , así como el hecho de que $U_{m_1}^2$ y $U_{m_2}^2$ son no acotados en t^* .

De nueva cuenta, buscaremos a las funciones \hat{f}_{m_1} y \hat{f}_{m_2} , que son las partes de F_{m_1} y F_{m_2} con la propiedad de ser constantes en t^* (o que dependen sólo de τ), que surgen de $U_{m_1}^1$ y $U_{m_2}^1$. Si se tiene que la expresión de f y g es

$$\begin{aligned} f(u, v) &= c_1 u^2 + c_2 uv + c_3 v^2 \\ g(u, v) &= d_1 u^2 + d_2 uv + d_3 v^2, \end{aligned} \quad (2.53)$$

entonces la expresión de estas funciones en su respectiva serie de Fourier se puede deducir del siguiente resultado.

Lema 2.1 *Supongamos que $y(x, t)$ y $z(x, t)$ son funciones reales, definidas en el dominio $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$, donde $y(0, t) = y(\pi, t) = z(0, t) = z(\pi, t) = 0 \forall t \geq 0$. Supongamos también que se expresan en serie de Fourier como*

$$y(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} y_p(t) \text{sen}(px); \quad z(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} z_p(t) \text{sen}(px),$$

entonces,

$$yz = \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p \text{sen}(px)$$

donde¹³

$$\gamma_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,k=1}^{\infty} y_j z_k \left[-\frac{1 - (-1)^{p-k+j}}{p-k+j} - \frac{1 - (-1)^{p-j+k}}{p-j+k} + \frac{1 - (-1)^{j-p+k}}{j-p+k} - \frac{1 - (-1)^{p+j+k}}{p+j+k} \right]$$

¹³Note que en [8], el único término de la serie obtenida con signo negativo es aquel con denominador $p+j+k$. En ese sentido estamos corrigiendo los resultados de ese trabajo en éste; sin embargo, el cambio no es sustancial pues se modifica únicamente por algunos signos y coeficientes. Al final del procedimiento, las formas normales obtenidas son las mismas.

Demostración. Partiendo de que la expresión para $y(x, t)$ y $z(x, t)$ es como lo expresa el enunciado, entonces

$$yz = \sum_{j,k=1}^{\infty} y_j z_k \operatorname{sen}(jx) \operatorname{sen}(kx), \quad (2.54)$$

donde y_j y z_k son los coeficientes de Fourier de $y(x, t)$ y $z(x, t)$ respectivamente.

Por otra parte, supongamos que el producto yz se expresa en serie de Fourier en senos como

$$yz = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \operatorname{sen}(nx). \quad (2.55)$$

De esta forma, multiplicando las expresiones (2.54) y (2.55) por $\operatorname{sen}(px)$, e integrando respecto de la variable espacial sobre el intervalo $[0, \pi]$ se tiene que

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(px) \, dx = \int_0^{\pi} \sum_{j,k=1}^{\infty} y_j z_k \operatorname{sen}(jx) \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(px) \, dx,$$

por lo que, intercambiando la suma con la integral en ambos lados de la igualdad,

$$\gamma_p \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(px) \, dx = \sum_{j,k=1}^{\infty} y_j z_k \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(jx) \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(px) \, dx.$$

Finalmente¹⁴,

$$\gamma_p = \frac{2}{\pi} \sum_{j,k=1}^{\infty} y_j z_k \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(jx) \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(px) \, dx \right).$$

Procederemos a calcular el valor de la integral del lado derecho. Para ello, el lector puede verificar que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(bx) \, dx &= \frac{\operatorname{sen}((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}((a+b)x)}{2(a+b)} + C_1 \\ \int \operatorname{sen}(ax) \operatorname{cos}(bx) \, dx &= -\frac{\operatorname{cos}((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{cos}((a+b)x)}{2(a+b)} + C_2, \end{aligned} \quad (2.56)$$

¹⁴Recordando que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2}$.

donde C_1 y C_2 son constantes.

Lo anterior ocurre siempre que $a \neq |b|$; entonces, el valor explícito de γ_p lo podemos encontrar de la siguiente forma:

$$\gamma_p = \frac{2}{\pi} \sum_{j \neq k} y_j z_k \int_0^\pi \text{sen}(jx) \text{sen}(kx) \text{sen}(px) dx + \frac{2}{\pi} \sum_{j=k} y_j z_k \int_0^\pi \text{sen}(jx) \text{sen}(kx) \text{sen}(px) dx,$$

donde las integrales que aquí aparecen serán calculadas por el método de integración por partes. En efecto, hagamos $u = \text{sen}(px)$ y $dv = \text{sen}(jx) \text{sen}(kx) dx$. Observemos que, de esta forma, la segunda serie se anula, por lo que sólo nos quedaremos con aquellos términos correspondientes a los subíndices j, k que sean distintos. De lo anterior obtenemos

$$\gamma_p = \frac{2}{\pi} \sum_{j \neq k} y_j z_k \left[\int_0^\pi p \frac{\cos(px) \text{sen}((j+k)x)}{2(j+k)} dx - \int_0^\pi p \frac{\cos(px) \text{sen}((j-k)x)}{2(j-k)} dx \right].$$

Nuevamente podemos separar la suma en dos, los términos de la suma cuyos subíndices satisfacen que $p = j \pm k$ y los que no. Uno puede convencerse de que en el primer caso, todos los términos se anulan, por lo que basta hacer el cálculo cuando $p \neq j \pm k$.¹⁵

Efectuando las integrales, obtenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_p = & \frac{2}{\pi} \sum y_j z_k \frac{p}{2(j+k)} \left(\frac{1-(-1)^{j+k-p}}{2(j+k-p)} + \frac{1-(-1)^{j+k+p}}{2(j+k+p)} \right) \\ & + y_j z_k \frac{p}{2(j-k)} \left(\frac{1-(-1)^{p+k-j}}{2(p+k-j)} - \frac{1-(-1)^{j-k+p}}{2(j-k+p)} \right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Notemos que la paridad de $(-k+p+j)$, $(k-p+j)$, $(k+p-j)$ y $(k+p+j)$ es la misma, por lo que podemos agrupar las sumas dentro de los paréntesis en (2.57),

¹⁵En adelante no haremos explícito esto en la serie, el lector deberá tenerlo presente, así como que $j \neq k$.

obteniéndose

$$\gamma_p = \frac{1}{\pi} \sum y_j z_k \left[\frac{p(1 - (-1)^{j+k-p})}{(j+k-p)(j+k+p)} - \frac{p(1 - (-1)^{p+k-j})}{(p+k-j)(p-k+j)} \right]$$

Agrupando el primer término con el segundo, así como el tercero con el cuarto, de esta expresión uno puede convencerse de que se obtiene justamente lo que el enunciado del lema indica.

$$\gamma_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,k=1}^{\infty} y_j z_k \left[-\frac{1 - (-1)^{p-k+j}}{p-k+j} - \frac{1 - (-1)^{p-j+k}}{p-j+k} + \frac{1 - (-1)^{j-p+k}}{j-p+k} - \frac{1 - (-1)^{p+j+k}}{p+j+k} \right].$$

Con esto concluimos la demostración. □

Nuevamente, así como en el caso en que f y g eran polinomios de tercer grado, buscamos aquellos términos no lineales que sólo incluyen a u_{m_i} y v_{m_i} ($i = 1, 2$). En general, suponiendo que m_1 es par, podemos calcular γ_{m_i} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \gamma_{m_1} &= -\frac{m_2}{2\pi m_1} c_{m_1} (y_{m_1} z_{m_2} + y_{m_2} z_{m_1}), \\ \gamma_{m_2} &= -\frac{1}{\pi} \left(c_{m_1} y_{m_1} z_{m_1} + \frac{8}{3m_2} y_{m_2} z_{m_2} \right), \end{aligned} \tag{2.58}$$

donde $c_{m_1} = \frac{8m_1^2}{m_2(4m_1^2 - m_2^2)}$.

Como $f(u, v) = c_1 u^2 + c_2 uv + c_3 v^2$ y $g(u, v) = d_1 u^2 + d_2 uv + d_3 v^2$, tenemos que por (2.58) $f_{m_i}^*$ y $g_{m_i}^*$, las partes de f_{m_i} y g_{m_i} que sólo incluyen a u_{m_i} y v_{m_i} ($i = 1, 2$), son

$$\begin{aligned} f_{m_1}^* &= -\frac{m_2}{\pi m_1} c_{m_1} (c_1 u_{m_1} u_{m_2} + \frac{1}{2} c_2 u_{m_1} v_{m_2} + \frac{1}{2} c_2 u_{m_2} v_{m_1} + c_3 v_{m_1} v_{m_2}), \\ f_{m_2}^* &= -\frac{c_{m_1}}{\pi} (c_1 u_{m_1}^2 + c_2 u_{m_1} v_{m_1} + c_3 v_{m_1}^2) - \frac{8}{3\pi m_2} (c_1 u_{m_2}^2 + c_2 u_{m_2} v_{m_2} + c_3 v_{m_2}^2), \end{aligned} \tag{2.59}$$

y $g_{m_i}^*$ se obtiene al intercambiar c_j por d_j ($j = 1, 2, 3$).

Recordemos que

$$\begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} - m^2 D_2 & a_{11} - m^2 D_1 \\ -a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m \\ V_m \end{bmatrix}; \quad m \in \{m_1, m_2\},$$

pero sólo nos interesan aquellos términos que tengan únicamente a $U_{m_1} = a(\tau)$ y $U_{m_2} = b(\tau)$, ya que los demás términos son exponencialmente decrecientes. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} u_{m_1}^2 &= (a_{22} - m_1^2 D_2)^2 a^2 + \dots, & u_{m_1} v_{m_1} &= -a_{21} (a_{22} - m_1^2 D_2) a^2 + \dots, \\ v_{m_1}^2 &= a_{21}^2 a^2 + \dots, & u_{m_1} u_{m_2} &= (a_{22} - m_1^2 D_2) (a_{22} - m_2^2 D_2) ab + \dots, \\ u_{m_2} v_{m_1} &= -a_{21} (a_{22} - m_2^2 D_2) ab + \dots, & v_{m_1} v_{m_2} &= a_{21}^2 ab + \dots, \\ u_{m_2}^2 &= (a_{22} - m_2^2 D_2)^2 b^2 + \dots, & u_{m_2} v_{m_2} &= -a_{21} (a_{22} - m_2^2 D_2) b^2 + \dots, \\ v_{m_2}^2 &= a_{21}^2 b^2 + \dots \end{aligned} \tag{2.60}$$

Además, ya que $F_m = \frac{1}{a_{21} \text{tr}(A - m^2 D)} [a_{21} f_m + (-a_{11} + m^2 D_1) g_m]$ ($m \in \{m_1, m_2\}$), sustituyendo (2.60) en (2.59), y posteriormente calculando F_{m_1} y F_{m_2} como se indica anteriormente, obtenemos \hat{f}_m al suprimir los términos exponencialmente decrecientes. Al final, tenemos las expresiones para ellas dadas por

$$\begin{aligned} \hat{f}_{m_1} &= \delta_1 ab \\ \hat{f}_{m_2} &= \eta a^2 + \delta_2 b^2, \end{aligned} \tag{2.61}$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{m_2 c_{m_1}}{\pi m_1} [C_1 (a_{22} - m_1^2 D_2) (a_{22} - m_2^2 D_2) - \frac{1}{2} C_2 a_{21} (2a_{22} - m_1^2 D_2 - m_2^2 D_2) + C_3 a_{21}^2] \\ \eta &= -\frac{c_{m_1}}{\pi} [H_1 (a_{22} - m_1^2 D_2)^2 - H_2 a_{21} (a_{22} - m_1^2 D_2) + H_3 a_{21}^2] \\ \delta_2 &= -\frac{8}{3\pi m_2} [H_1 (a_{22} - m_2^2 D_2)^2 - H_2 a_{21} (a_{22} - m_2^2 D_2) + H_3 a_{21}^2], \end{aligned} \tag{2.62}$$

y

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{1}{a_{21} \operatorname{tr}(A - m_1^2 D)} [a_{21} c_j - d_j (a_{11} - m_1^2 D_1)] \\ H_j &= \frac{1}{a_{21} \operatorname{tr}(A - m_2^2 D)} [a_{21} c_j - d_j (a_{11} - m_2^2 D_1)]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Por último, si sustituímos(2.61) en (2.29) obtenemos la forma normal

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= (\mu\beta_1 + \nu\gamma_1)a + \delta_1 ab \quad \equiv \quad \mu^* a + \delta_1 ab \\ \frac{db}{d\tau} &= (\mu\beta_2 + \nu\gamma_2)b + \eta a^2 + \delta_2 b^2 \quad \equiv \quad \lambda^* b + \eta a^2 + \delta_2 b^2. \end{aligned} \quad (2.64)$$

El análisis del sistema de EDOs (2.64) se hará de forma exhaustiva en el Capítulo 3. A diferencia del sistema (2.50), las ecuaciones (2.64) parecen no haber sido analizadas de forma detallada en algún otro trabajo, por lo que consideramos pertinente hacerlo parte de este trabajo. Por supuesto que no todas las combinaciones de valores de los parámetros tienen interpretación química (por ejemplo, no en cualquier caso las soluciones del sistema son acotadas); sin embargo, consideramos importante analizar todos los casos pues son útiles para la comprensión de toda la dinámica, en particular de los casos que químicamente son relevantes. Esto es lo que haremos en el Capítulo 3.

Capítulo 3

Análisis de las formas normales

En todo caso cambiaría “lacayo” por “vasallo”, que igual lo ubicaría pero sin afrontarlo. O inventaría otro apodo, a la medida del efecto buscado.

Xavier Velasco, en *Puedo explicarlo todo*.

3.1. Introducción

A continuación presentaremos el análisis cualitativo de las formas normales obtenidas en el capítulo anterior. Comenzaremos por la forma normal (2.64), cuyo análisis desarrollaremos con sumo cuidado y detalle. Por otro lado, analizaremos el sistema (2.50) en la última sección de este capítulo, para sólo algunas combinaciones de valores de los parámetros.

Así, consideremos entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (2.64):

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \lambda a + \delta_1 ab \equiv F_1(a, b) \\ \dot{b} &= \mu b + \eta a^2 + \delta_2 b^2 \equiv F_2(a, b)\end{aligned}\quad (3.1)$$

El análisis de este sistema lo empezamos obteniendo sus ceroclinas. La horizontal, $\mathcal{C}_h = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | \dot{a} = 0\}$, tiene dos ramas, a saber:

$$a = 0 \text{ y } b = -\frac{\lambda}{\delta_1}.\quad (3.2)$$

Análogamente obtenemos la ceroclina vertical $\mathcal{C}_v = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | \dot{b} = 0\}$, la cual es el conjunto de puntos que satisfacen:

$$\eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b = 0\quad (3.3)$$

Notemos que la ceroclina vertical, \mathcal{C}_v , es una elipse o una hipérbola dependiendo del signo de los parámetros η y δ_2 . De hecho, si $\eta\delta_2 > 0$ se tiene que \mathcal{C}_v es una elipse, mientras que si $\eta\delta_2 < 0$ entonces es una hipérbola. Habrá que tener en cuenta lo anterior para el análisis que realizamos posteriormente.

La intersección de las ceroclinas del sistema (3.1) nos da los puntos de equilibrio de éste, los cuales son:

$$P_0 = (0, 0); \quad P = \left(0, -\frac{\mu}{\delta_2}\right)\quad (3.4)$$

$$Q = \left(\sqrt{\frac{\lambda\Delta}{\eta\delta_1^2}}, -\frac{\lambda}{\delta_1}\right),\quad (3.5)$$

donde $\Delta \equiv \mu\delta_1 - \lambda\delta_2$.

Para simplificar el análisis notamos que (3.1) es simétrico con respecto al eje vertical en el siguiente sentido:

Observación 3.1 Para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $F_1(-a, b) = -F_1(a, b)$ y que $F_2(-a, b) = F_2(a, b)$

Por la Observación 1.1, bastará hacer el análisis considerando $a \geq 0$.

A continuación haremos un análisis exhaustivo de todas las posibilidades, según los valores de los parámetros, esto con la finalidad de obtener el retrato fase del sistema (3.1). Tomaremos a λ y μ como los parámetros de bifurcación y el resto los consideramos fijos.

3.2. Análisis local y restricciones a ciertas rectas

El análisis local lineal se basa en aproximar (3.1) por el sistema lineal que define la matriz de Jacobi del campo vectorial $\vec{F}(a, b) = (F_1(a, b), F_2(a, b))$ en cada punto de equilibrio. Para cualquier punto (a, b) del plano, la matriz de Jacobi asociada al sistema (3.1) es

$$J_{(a,b)} \equiv J[F_1, F_2]_{(a,b)} = \begin{bmatrix} \lambda + \delta_1 b & \delta_1 a \\ 2\eta a & \mu + 2\delta_2 b \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

de donde¹

$$\text{tr} J_{(a,b)} = (\lambda + \mu) + b(\delta_1 + 2\delta_2) \quad (3.7)$$

y

$$\det J_{(a,b)} = \lambda\mu + b(\delta_1\mu + 2\delta_2\lambda) + 2\delta_1\delta_2b^2 - 2\eta\delta_1a^2. \quad (3.8)$$

¹Notemos de la expresión (3.7) que no es fácilmente aplicable el criterio negativo de Bendixson, el cual dice que si $\text{tr} J_{(a,b)}$ no cambia de signo en una región conexa, entonces el sistema (3.1) no exhibe curvas cerradas en dicha región.

Restringiremos el campo vectorial que define al sistema (3.1) a algunos subconjuntos del plano a fin de tener una idea de cómo es.

$$\text{Si } a = 0, \text{ entonces } \dot{a} = 0, \dot{b} = \mu b + \delta_2 b^2; \quad (3.9)$$

$$\text{Si } b = 0, \text{ entonces } \dot{a} = \lambda a, \dot{b} = \eta a^2; \quad (3.10)$$

$$\text{Si } b = -\frac{\mu}{\delta_2}, \text{ entonces } \dot{a} = -\frac{a\Delta}{\delta_2}, \dot{b} = \eta a^2; \quad (3.11)$$

$$\text{si } a = -\frac{\lambda}{\delta_1} \text{ entonces } \dot{a} = 0, \dot{b} = \eta a^2 - \frac{\lambda\Delta}{\delta_1^2}. \quad (3.12)$$

En los apartados siguientes analizaremos la dinámica del sistema (3.1) correspondiente a los distintos signos que pueden tomar λ y μ , así como a todas las posibilidades de diferentes combinaciones de los demás parámetros involucrados en el sistema.

3.3. Caso I: $\lambda, \mu > 0$

De calcular $tr J_{P_0}$ y $\det J_{P_0}$ se tiene:

$$tr J_{P_0} = \lambda + \mu \quad (3.13)$$

$$\det J_{P_0} = \lambda\mu \quad (3.14)$$

En este caso $tr J_{P_0} > 0$ y $\det J_{P_0} > 0$, por lo que P_0 es inestable. Más aún, P_0 es nodo pues

$$\begin{aligned} (tr J_{P_0})^2 - 4 \det J_{P_0} &= (\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu = \lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2 = \\ &= (\lambda - \mu)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ahora, sabemos que el eje vertical del plano ab es una rama de la ceroclina horizontal y que P se encuentra sobre esta recta. De nuevo tenemos dos casos: P puede encontrarse arriba o abajo de P_0 , que corresponde a $\delta_2 < 0$ o $\delta_2 > 0$, respectivamente.

3.3.1. $\delta_2 < 0, \Delta > 0$ y $\eta > 0$

Aquí P se encuentra por arriba de P_0 . Veamos hacia dónde apunta el campo vectorial sobre la recta $a = 0$.

1. Si $0 < b < -\frac{\mu}{\delta_2}$, se tiene que $\mu + \delta_2 b > 0$ y por tanto $\dot{b} > 0$.
2. Si $b > -\frac{\mu}{\delta_2}$, entonces $\dot{b} < 0$.
3. Si $b < 0$, entonces $b < -\frac{\mu}{\delta_2}$ y, en consecuencia, $\dot{b} < 0$.

Ahora hagamos el análisis lineal local alrededor de P :

$$\text{tr} J_P = (\lambda + \mu) - \frac{\mu}{\delta_2}(\delta_1 + 2\delta_2) = \left(\lambda - \frac{\mu\delta_1}{\delta_2} \right) - \mu \quad (3.16)$$

$$\det J_P = \lambda\mu - \frac{\mu}{\delta_2}(\mu\delta_1 + 2\lambda\delta_2) + 2\delta_1\delta_2 \left(\frac{\mu^2}{\delta_2^2} \right) = -\lambda\mu + \frac{\delta_1}{\delta_2}\mu^2. \quad (3.17)$$

Observemos que, variando los parámetros λ, μ, δ_1 y δ_2 , el signo del determinante de J_P puede cambiar. De hecho

$$\det J_P < 0 \Leftrightarrow -\lambda + \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \mu < 0 \Leftrightarrow \Delta > 0.$$

Como supusimos que $\Delta > 0$, P es punto silla. Más aún, las ramas de la variedad estable de (3.1) en P , son verticales; mientras que las ramas inestables de (3.1) son tangentes a la recta $b = -\frac{\mu}{\delta_2}$. Lo anterior se debe a que un vector propio correspondiente al valor propio $-\mu$ de la matriz de Jacobi evaluada en P , J_P , es el vector $(1, 0)$.

Retomando de la condición (3.10), sobre la recta $b = 0$ el sistema (3.1) se reduce a

$$\dot{a} = \lambda a > 0$$

$$\dot{b} = \eta a^2,$$

mientras que sobre la recta $b = -\frac{\mu}{\delta_2}$, por la condición (3.11), se tiene que

$$\dot{a} = -\frac{a\Delta}{\delta_2} > 0$$

$$\dot{b} = \eta a^2.$$

En este caso, dado que $\eta > 0$, ambas componentes del campo vectorial sobre las rectas $b = 0$ y $b = -\frac{\mu}{\delta_2}$ son positivas, por lo que \vec{F} apunta hacia arriba y a la derecha. Además, como $Q = \left(\sqrt{\frac{\lambda\Delta}{\eta\delta_1^2}}, -\frac{\lambda}{\delta_1} \right)$ entonces Q existe. Hagamos ahora el análisis local lineal alrededor de Q . En este punto

$$\text{tr} J_Q = (\lambda + \mu) - \frac{\lambda}{\delta_1}(\delta_1 + 2\delta_2) = \mu - 2\lambda\frac{\delta_2}{\delta_1} \quad (3.18)$$

y

$$\det J_Q = \lambda\mu - \frac{\lambda}{\delta_1}(\delta_1\mu + 2\delta_2\lambda) + 2\delta_1\delta_2 \left(\frac{\lambda^2}{\delta_1^2} \right) - 2\eta\delta_1 \left(\frac{\lambda\Delta}{\eta\delta_1^2} \right) = -2\frac{\lambda\Delta}{\delta_1} \quad (3.19)$$

Para que lo anterior tenga sentido pedimos que ambos, δ_1 y η sean distintos de cero. Dependiendo del signo de δ_1 se tienen dos casos:

a) $\delta_1 > 0$

Notemos que se cumple también que $\Delta > 0$. Aquí tenemos que $\det J_Q < 0$, por lo que Q es punto silla. El campo vectorial sobre la ceroclina horizontal $b = -\frac{\lambda}{\delta_1}$ tiene las siguientes características:

1. Si $a < \sqrt{\frac{\lambda\Delta}{\eta\delta_1^2}}$, entonces

$$\dot{b} < -\frac{\lambda\mu}{\delta_1} + \frac{\lambda\mu\delta_1 - \lambda^2\delta_2}{\delta_1^2} + \lambda^2\frac{\delta_2}{\delta_1^2} = 0. \quad (3.20)$$

2. De forma análoga, si $a > \sqrt{\frac{\lambda\Delta}{\eta\delta_1^2}}$, entonces $\dot{b} > 0$.

Dado que $\eta > 0$ y $\delta_2 > 0$, entonces la ceroclina vertical (3.3) es una hipérbola con vértices en P_0 y en P ; haremos uso de ello para probar la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *El conjunto α -límite de la rama izquierda de la variedad estable de (3.1) en Q es P_0 .*

Demostración. Bastará con probar que la variedad estable de Q no puede entrar desde la región ubicada a la derecha de la hipérbola y por arriba de Q . Definamos las siguientes regiones:

$$1. \mathcal{A}_1 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \geq 0; b \in \left[0, -\frac{\lambda}{\delta_1} \right] \right\}$$

$$2. \mathcal{B}_1 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \leq 0; b \in \left[0, -\frac{\lambda}{\delta_1} \right] \right\}$$

$$3. \mathcal{C}_1 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \leq 0; b < -\frac{\lambda}{\delta_1} \right\}$$

$$4. \mathcal{D}_1 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \geq 0; b < -\frac{\lambda}{\delta_1} \right\}.$$

Éstas pueden verse en la figura 3.1.

En términos de las regiones definidas habrá que probar que las ramas de la variedad estable de (3.1) en Q permanecen (al aumentar el tiempo) en las regiones \mathcal{B}_1 y \mathcal{D}_1 . Demostraremos lo anterior por reducción al absurdo.

Supongamos que la variedad estable, W_Q^s , converge a Q desde algún punto condición inicial perteneciente a la región \mathcal{A}_1 . Como $b \in \left(0, -\frac{\lambda}{\delta_1} \right)$, entonces $\dot{a} > 0$. Para

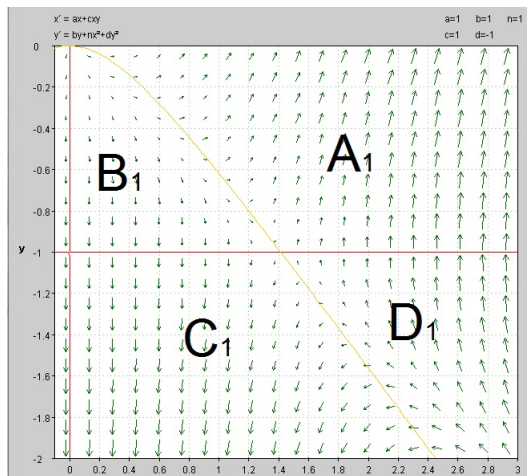


Figura 3.1: Regiones \mathcal{A}_1 , \mathcal{B}_1 , \mathcal{C}_1 y \mathcal{D}_1

$a = K$ con $K > \sqrt{\frac{\lambda\Delta}{\eta\delta_1^2}}$ la región definida por $\mathcal{A}_1 \cap H$, donde $H = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \leq K\}$, es decir, H es el semiespacio cerrado izquierdo definido por la recta $a = K$, satisface que no tiene puntos de equilibrio excepto por P_0 y Q , por lo que W_Q^s no genera una trayectoria homoclínica (de ser así habría un punto de equilibrio en el interior de dicha curva).

Ahora bien, por las propiedades del campo vectorial sobre la frontera de $\mathcal{A}_1 \cap H$, W_Q^s necesariamente intersecta a \mathcal{C}_v o a la recta $b = -\frac{\lambda}{\delta_1}$.

Si intersecta a \mathcal{C}_v en un punto R , consideremos la solución, $\vec{\varphi}(t)$, del sistema (3.1) que parte de una condición inicial sobre \mathcal{C}_v , situada entre Q y R . Por el Teorema de Poincaré-Bendixson, por ser la región delimitada por C y W_Q^s compacta y positivamente invariante, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\varphi}(t) = Q$$

lo cual contradice el hecho de que Q era punto silla, pues hallamos una solución distinta a W_Q^s que converge a Q . Usando los mismos argumentos se demuestra que W_Q^s no puede intersectar la recta $b = -\frac{\lambda}{\delta_1}$. Con esto terminamos la demostración.

□

Corolario 3.1 *El conjunto α -límite de la rama izquierda de la variedad estable de (3.1) en Q es P_0 .*

Análogamente, se prueba que la segunda rama de la variedad estable permanece en la región \mathcal{D}_1 . Un ejemplo de la dinámica en este caso se puede ver en la figura 3.2.

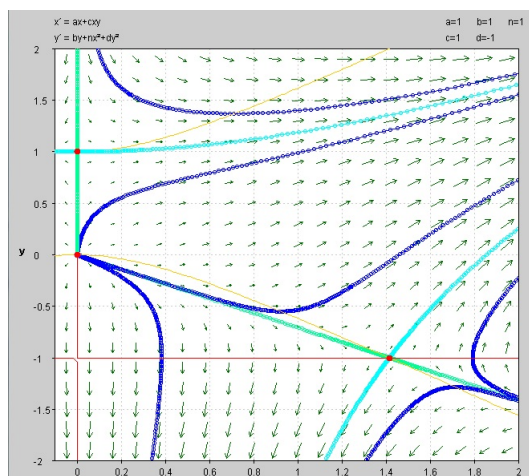


Figura 3.2: Retrato fase para $\lambda = \mu = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ y $\eta = 1$.

b) $\frac{\lambda\delta_2}{\mu} < \delta_1 < 0$.

De (3.19) se tiene que $\det J_Q > 0$. Ahora bien, de (3.18) observamos que $\text{tr} J_Q < 0$, pues

$$\text{tr} J_Q = \mu - 2\lambda \frac{\delta_2}{\delta_1} < \mu - 2\mu = -\mu < 0, \quad (3.21)$$

por lo que Q es asintóticamente estable localmente, pudiendo ser foco o nodo. Véase la figura 3.3.

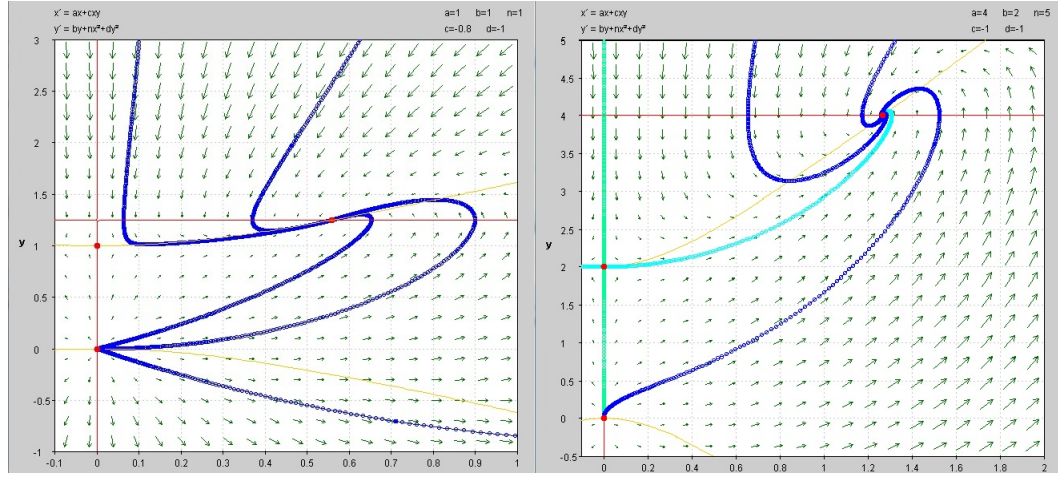


Figura 3.3: Retratos fase para: a) Del lado derecho $\lambda = \mu = 1$, $\delta_1 = -0.8$, $\delta_2 = -1$ y $\eta = 1$. b) Del lado izquierdo $\lambda = 4$, $\mu = 2$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = -1$ y $\eta = 5$.

3.3.2. $\delta_2 < 0$, $\Delta > 0$ y $\eta < 0$

En este caso el punto de equilibrio Q no existe, por lo que el retrato fase se obtiene, recordando que el campo vectorial sobre las rectas $b = -\frac{\mu}{\delta_2}$ y $b = 0$ apunta hacia abajo, como lo ilustra la figura 3.4.

3.3.3. $\delta_2 < 0$, $\Delta < 0$ y $\eta > 0$

Retomando la expresión (3.17), tenemos que $\det J_P > 0$. Más aún, calculando la traza de (3.16) obtenemos

$$\text{tr} J_P = \lambda - \mu \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right) - \mu < 0 \Leftrightarrow \lambda \delta_2 - \mu \delta_1 < \mu \delta_2 \Leftrightarrow \Delta > -\mu \delta_2 > 0, \quad (3.22)$$

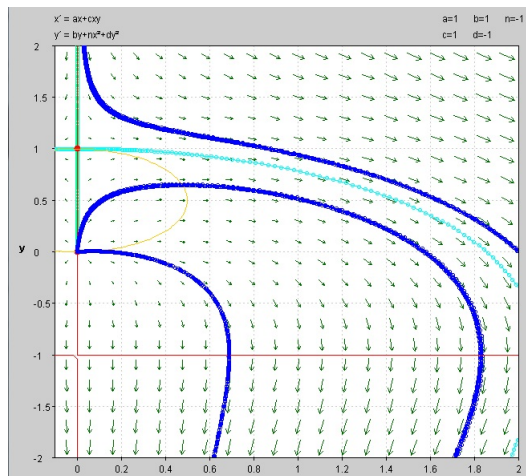


Figura 3.4: Retrato fase para $\lambda = \mu = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ y $\eta = 1$.

para cualesquiera $\mu > 0$ y $\delta_2 < 0$; luego P es asintóticamente estable localmente. De hecho, P es nodo, pues²,

$$\begin{aligned} (tr J_P)^2 - 4det J_P &= \left[\lambda - \mu \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + 1 \right) \right]^2 - 4\mu \left(-\lambda + \frac{\delta_1}{\delta_2} \mu \right) \\ &= \left[\lambda + \mu \left(1 - \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \right]^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En este caso, siendo $\eta > 0$, el punto de equilibrio Q no existe, ya que justo la ceroclina (3.2) está entre los vértices de la hipérbola (3.3). Probaremos que toda trayectoria que parte asintóticamente de P_0 converge a P . Para esto tomemos una condición inicial $\vec{z} = (K, -\frac{\lambda}{\delta_1})$ para cualquier $K > 0$. De esta forma, si la curva solución $\vec{\varphi}(t)$ de 3.1 con condición inicial \vec{z} interseca a (a_1, b_1) y a (a_2, b_2) para $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente, entonces definimos las regiones:

1. $\mathcal{A}_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a < K; -\frac{\lambda}{\delta_1} < b; \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \geq 0\}$,

²Lo anterior se puede confirmar de inicio al notar que una ceroclina horizontal es la recta $a = 0$.

2. $\mathcal{B}_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a < a_1; b < b_1; \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \leq 0\}$,
3. $\mathcal{C}_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a < K; -\frac{\lambda}{\delta_1} > b; \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \geq 0\}$,
4. $\mathcal{D}_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a < a_2; b > b_2; \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \leq 0\}$,

Es claro que no necesariamente existen (a_1, b_1) y (a_2, b_2) , pero si no existen entonces $\vec{\varphi}(t)$ converge a P . Dicho esto, se puede probar la siguiente proposición.

Proposición 3.2 *P es un atractor global*

Demostración. Como vimos, basta demostrarlo para cuando las regiones anteriores están bien definidas, esto es, que (a_1, b_1) y (a_2, b_2) existan.

Como \mathcal{B}_2 es positivamente invariante, y por construcción existe t tal que $\vec{\varphi}(t) \in \mathcal{B}_2$, entonces el conjunto ω -límite de $\vec{\varphi}(t)$ es P . Pero esto es cierto para toda $K > 0$, por lo que P es atractor global.

De hecho podemos decir más, ya que de forma similar se demuestra que el conjunto α -límite de $\vec{\varphi}(t)$ es P_0 . El lector puede ver la figura 3.5 para ver las regiones que se definieron, así como un ejemplo de las soluciones.

□

3.3.4. $\delta_2 < 0$, $\Delta < 0$ y $\eta < 0$

El punto de equilibrio Q existe. Más aún, como $\Delta < 0$ se tiene que $\delta_1 < 0$ y ya que $\det J_Q = -\frac{2\lambda\Delta}{\delta_1} < 0$, entonces Q es punto silla.

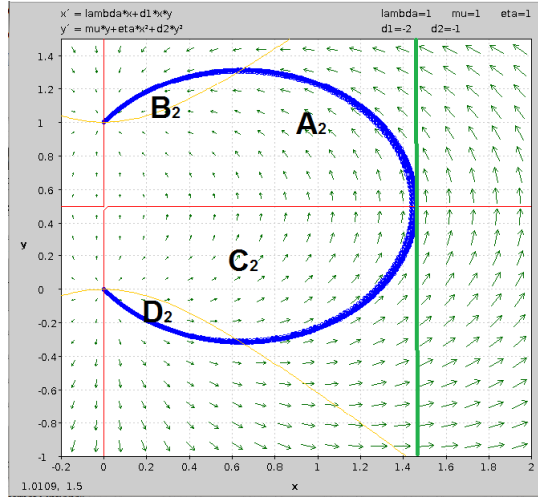


Figura 3.5: Retrato fase para $\lambda = \mu = 1$, $\delta_1 = -2$, $\delta_2 = -1$ y $\eta = 1$.

Proposición 3.3 *El conjunto α -límite de la variedad estable izquierda de (3.1) en Q , W_Q^s , es P_0 . Además, el conjunto ω -límite de la variedad inestable izquierda de (3.1) en Q , W_Q^u , es P .*

Demostración. Empezamos definiendo las regiones siguientes, que se observan en la figura 3.6:

1. $\mathcal{A}_3 = \left\{ (a, b) \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \leq 0; b \in \left[-\frac{\lambda}{\delta_1}, -\frac{\mu}{\delta_2} \right] \right\}$
2. $\mathcal{B}_3 = \left\{ (a, b) \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \geq 0; b \in \left[-\frac{\lambda}{\delta_1}, -\frac{\mu}{\delta_2} \right] \right\}$
3. $\mathcal{C}_3 = \left\{ (a, b) \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \geq 0; b \in \left[0, -\frac{\lambda}{\delta_1} \right] \right\}$
4. $\mathcal{D}_3 = \left\{ (a, b) \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \leq 0; b \in \left[0, -\frac{\lambda}{\delta_1} \right] \right\}$

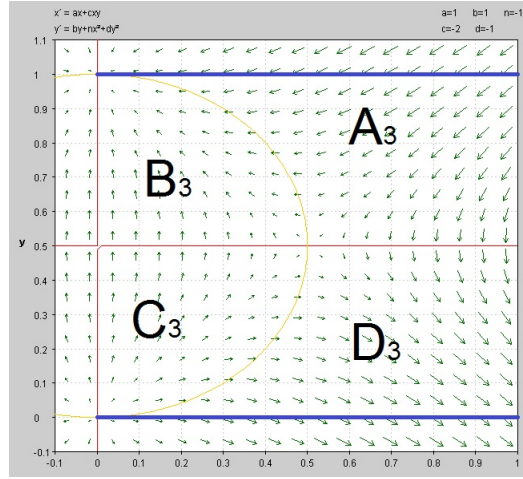


Figura 3.6: Regiones \mathcal{A}_3 , \mathcal{B}_3 , \mathcal{C}_3 y \mathcal{D}_3 .

Afirmamos que la rama izquierda de la variedad estable de (3.1) en Q , W_Q^s , permanece en la región \mathcal{C}_3 . En efecto, como la región \mathcal{B}_3 es positivamente invariante del flujo asociado a (3.1), entonces W_Q^s no puede converger a Q desde un punto condición inicial en \mathcal{B}_3 pues, por el teorema de Poincaré-Bendixson, como P es asintóticamente estable localmente entonces W_Q^s intersecta a la cicloclina (3.2) o a la cicloclina (3.3). Análogamente al **Caso 3.2.1.a**, Q no sería punto silla.

Lo mismo ocurre con la región \mathcal{D}_3 , y como no hay ciclos heteroclínicos (de existir, habría un punto de equilibrio en el interior del supuesto ciclo distinto de P_0 , P y Q), las variedades estables permanecen en las regiones \mathcal{C}_3 y \mathcal{A}_3 . En consecuencia, ya que la región \mathcal{C}_3 es negativamente invariante, se tiene que el conjunto α -límite de W_Q^s es P_0 .

De la misma forma se puede probar, acotando la región \mathcal{A}_3 con la recta $a = K$ con $K > 0$, que las variedades inestables permanecen en las regiones \mathcal{B}_3 y \mathcal{D}_3 . Siendo \mathcal{B}_3 positivamente invariante, por el teorema de Poincaré-Bendixson, el conjunto ω -límite de W_Q^u es P . Un retrato fase ilustrativo se encuentra en la imagen 3.7.

□

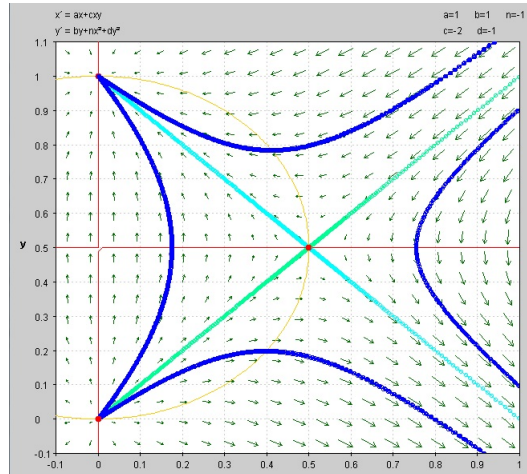


Figura 3.7: Retratos fase para $\lambda = \mu = 1$, $\delta_1 = -2$, $\delta_2 = -1$ y $\eta = -1$.

3.3.5. $\delta_2 < 0$, $\Delta \equiv 0$, $\eta > 0$

En este caso tenemos que $Q = P$. En principio podríamos pensar que se dé una bifurcación de tipo nodo-silla. Sin embargo, al recordar que, por la simetría del campo vectorial, en realidad colapsan Q y su simétrico respecto al eje vertical precisamente en P (sería más apropiado pensar en una *bifurcación de tenedor*). En este caso

$$\det J_P = \mu \left(-\lambda + \mu \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) = \mu \delta_2 \Delta = 0,$$

así que P es punto de equilibrio no hiperbólico, por lo que no se satisfacen las hipótesis del teorema de Hartman-Grobman. De hecho, no podemos asegurar la existencia de una vecindad abierta de P en la que la dinámica local del sistema no lineal (3.1) sea topológicamente equivalente a la del sistema lineal que lo aproxima en P .

Como $\lim_{\delta_1 \rightarrow \frac{\lambda \delta_2}{\mu}} \Delta = 0$, por la continuidad respecto de los parámetros del campo vectorial que define al sistema (3.1), la dinámica del Caso 3.2.1.b se preserva, por lo que P es foco o nodo.

Ahora, del Caso 3.2.1.b podemos observar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} (tr J_P^2 - 4det J_P) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\left(\mu - 2\lambda \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 - 4 \left(-2 \frac{\lambda \Delta}{\delta_1} \right) \right] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\mu - 2\lambda \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

es decir, a medida que Δ tiende a cero, para alguna $\epsilon > 0$ siempre que $\Delta \in (0, \epsilon)$ se tiene en el Caso 3.2.1.b que Q es nodo, por lo que cuando $\Delta = 0$, se preserva dicha dinámica (observe un ejemplo de la dinámica de este caso en la figura 3.8).

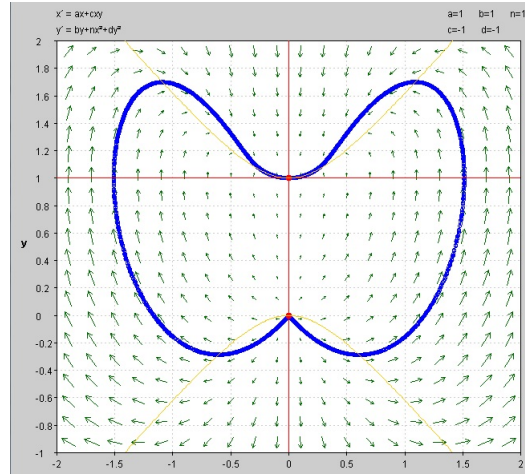


Figura 3.8: Retrato fase para $\lambda = \mu = 1$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = -1$ y $\eta = 1$.

3.3.6. $\delta_2 < 0$, $\Delta \equiv 0$, $\eta < 0$

En este caso la dinámica del sistema es análoga a la del caso anterior. Esto se fundamenta en el hecho de que el campo vectorial que define al sistema (3.1) es

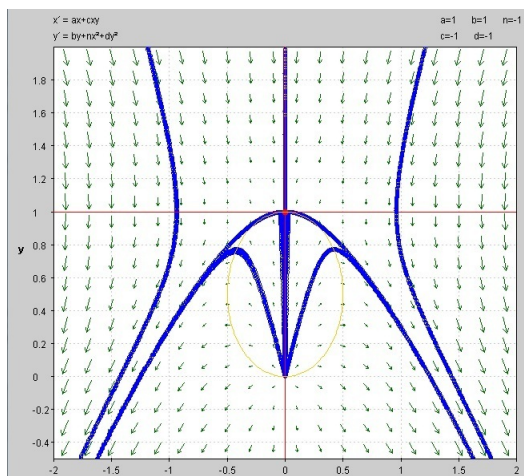


Figura 3.9: Retrato fase para $\lambda = \mu = 1$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = -1$ y $\eta = -1$.

continuo respecto a los parámetros. Luego se preserva la dinámica en P del Caso 2.2.4, y entonces P es punto silla. Para tener idea de cómo es la dinámica en este caso, observe la figura 3.9.

3.3.7. Caso $\delta_2 > 0$

Los casos subsecuentes de la hipótesis planteada son análogos a los casos presentados anteriormente, por lo que omitiremos su escritura. El lector puede referirse a la siguiente tabla para consultar dichas similitudes con los casos anteriores.

Signo de Δ y η	Otros parámetros	Análogo a
$\Delta < 0$		
$\eta < 0$	$\delta_1 < 0$	3.2.1.a
	$\delta_1 > 0$	3.2.1.b
$\eta > 0$		3.2.2
$\Delta > 0$		
$\eta < 0$		3.2.3
$\eta > 0$		3.2.4
$\Delta \equiv 0$		
$\eta < 0$		3.2.5
$\eta > 0$		3.2.6

3.4. Caso II: $\lambda > 0$; $\mu < 0$

Notemos que $\det J_{P_0} = \lambda\mu < 0$, por lo que P_0 es punto silla. Además sabemos que la recta $a = 0$ es un conjunto invariante del sistema (3.1).

3.4.1. $\delta_2 > 0$, $\Delta > 0$ y $\eta > 0$

Si hacemos el análisis como en el Caso 3.2.1 podemos ver que la recta antes mencionada es la variedad estable del sistema citado asociado al punto P_0 . De la ecuación (3.17), tenemos que $\det J_P < 0$, por lo tanto P es punto silla. También podemos notar que $\delta_1 < 0$.

En este caso la ceroclina vertical es una elipse, pues $\eta > 0$. Además, recordando de las condiciones (3.10) y (3.11), el campo vectorial restringido a los siguientes

conjuntos satisface lo que a continuación presentamos:

- a) $b = 0$: $\dot{a} = \lambda a > 0$; $\dot{b} = \eta a^2 > 0$
 b) $b = -\frac{\mu}{\delta_2}$: $\dot{a} = -\frac{a\Delta}{\delta_2} < 0$; $\dot{b} = \eta a^2 > 0$

También para este caso se tiene que Q (véase la ecuación (3.5)) existe y, por la ecuación (3.19), cumple que $\det J_Q > 0$. Analizando la traza de la matriz de Jacobi de (3.1) en el punto Q , se observa que hay las siguientes tres posibilidades distintas:

- a) $\underline{tr J_Q = 0}$.

Si la hipótesis anterior es cierta, se tiene que los parámetros satisfacen la siguiente igualdad:

$$tr J_Q = \mu - 2\lambda \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\mu}{\delta_2} = -\frac{2\lambda}{\delta_1} \quad (3.25)$$

de donde

$$\mu = \frac{2\lambda\delta_2}{\delta_1}.$$

Ya que, como observamos anteriormente, $\det J > 0$ para la relación de parámetros dada por (3.25), Q es punto de equilibrio no hiperbólico justo cuando la rama de la ceroclina horizontal (3.2) contiene al centro de la cónica \mathcal{C}_v de la ceroclina vertical. La ecuación (3.25) implicará que hay una simetría en el campo vectorial en el sentido expresado por la siguiente proposición:

Proposición 3.4 *El campo vectorial que define al sistema (3.1) satisface que, para todo $\epsilon > 0$*

$$F_1\left(a, -\frac{\lambda}{\delta_1} + \epsilon\right) = -F_1\left(a, -\frac{\lambda}{\delta_1} - \epsilon\right)$$

$$F_2\left(a, -\frac{\lambda}{\delta_1} + \epsilon\right) = F_2\left(a, -\frac{\lambda}{\delta_1} - \epsilon\right)$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, entonces:

$$F_1(a, -\frac{\lambda}{\delta_1} \pm \epsilon) = \lambda a + \delta_1 a \left(-\frac{\lambda}{\delta_1} \pm \epsilon \right) = \pm \epsilon \delta_1 a;$$

mientras que para la componente vertical se tiene

$$\begin{aligned} F_2(a, -\frac{\lambda}{\delta_1} \pm \epsilon) &= -\frac{\lambda\mu}{\delta_1} \pm \epsilon\mu + \eta a^2 + \frac{\delta_2\lambda^2}{\delta_1^2} \mp \frac{2\lambda\delta_2}{\delta_1}\epsilon + \epsilon^2\delta_2 = \\ &= -\frac{\lambda\mu}{\delta_1} \pm \frac{2\lambda\delta_2}{\delta_1}\epsilon + \eta a^2 + \frac{\delta_2\lambda^2}{\delta_1^2} \mp \frac{2\lambda\delta_2}{\delta_1}\epsilon + \epsilon^2\delta_2 = \\ &= -\frac{\lambda\mu}{\delta_1} + \eta a^2 + \frac{\delta_2\lambda^2}{\delta_1^2} + \epsilon^2\delta_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

□

Lo anterior nos es sÚmamente Útil para determinar la dinÁmica del sistema en este caso. Lo siguiente que debemos notar es que la rama derecha de la variedad estable del sistema (3.1) en P , W_P^s coincide con la rama inestable del mismo pero en el punto P_0 , $W_{P_0}^u$; es decir,

Proposici3n 3.5 *Para las hip3tesis del caso presente, el sistema exhibe una trayectoria heteroclÍnica que conecta a P_0 con P (en ese orden)*

Demostraci3n. Por la simetría descrita en la Proposici3n 3.4, basta demostrar que $W_{P_0}^u$ interseca a la recta $b = -\frac{\mu}{\delta_2}$. Afirmamos que W_P^s y $W_{P_0}^u$ no intersecan a \mathcal{C}_v .

En efecto, supongamos que esto no es cierto. Luego, si W_P^s interseca a la ceroclina vertical³ \mathcal{C}_v en un punto R nos tomamos cualquier condici3n inicial sobre \mathcal{C}_v entre A y P . La soluci3n del sistema (3.1) con condici3n inicial P , por el teorema de Poincaré-Bendixson, tiene como conjunto ω -lÍmite a P , lo cual es una contradicci3n al hecho de que P es punto silla.

³Por la simetría, es equivalente a suponer que $W_{P_0}^u$ interseca a \mathcal{C}_v .

Ahora bien, por los valores que toma el campo vectorial que define al sistema (3.1), W_P^s permanece en la región delimitada por $b \in [0, -\frac{\mu}{\delta_2}]$. Por la continuidad de dicho campo vectorial en todo punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, como sobre la recta $b = -\frac{\lambda}{\delta_1}$ se tiene que $\dot{a} = 0$ y $\dot{b} > 0 \Leftrightarrow a > \sqrt{\frac{\lambda\Delta}{\eta\delta_1^2}}$, entonces W_P^s interseca a la recta $b = -\frac{\lambda}{\delta_1}$. Con esto concluimos la demostración.

□

Finalmente, basta demostrar que el punto de equilibrio Q es un centro. En principio esto es viable, ya que los valores propios de la matriz de Jacobi son imaginarios con parte real nula. Sea $S = (a_S, -\frac{\lambda}{\delta_1})$ y tomemos una condición inicial $T = (a_T, -\frac{\lambda}{\delta_1})$ con $a_T < a_S$. Como sobre la recta $b = -\frac{\lambda}{\delta_1}$ tenemos que $\dot{b} > 0$ entonces la solución de (3.1) asociada a S no puede converger a Q , pues por la simetría se formaría un ciclo homoclínico y debería tener un cuarto punto de equilibrio en el interior de la región delimitada por dicho ciclo.

Como la solución no puede converger a P , entonces interseca al interior del segmento OQ , donde O es el centro de C . Por la simetría descrita por la Proposición 1.4 la solución de (3.1) asociada a T es una curva cerrada. Puede verse un ejemplo de la dinámica de este caso en la figura 3.10.

Note que no existe una bifurcación de Hopf en este caso (véase el Apéndice B), ya que la condición de no degeneración, es decir, aquella que pide que $c\left(\frac{2\lambda\delta_2}{\delta_1}\right) \neq 0$, no se satisface. En efecto, considere el sistema trasladado al origen, con los cambios de variable $A = a - \sqrt{\frac{\lambda\Delta}{\eta\delta_1^2}}$ y $B = b + \frac{\lambda}{\delta_1}$. Por lo tanto, el sistema resultante es

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\lambda\sqrt{\frac{\delta_2}{\eta}}B + \delta_1AB \\ \dot{B} &= -\frac{2\eta\lambda}{\delta_1}\sqrt{\frac{\delta_2}{\eta}}A + \eta A^2 + \delta_2 B^2\end{aligned}\tag{3.27}$$

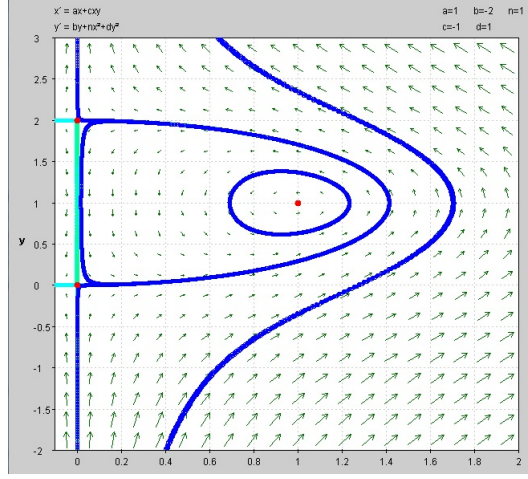


Figura 3.10: Retrato fase para $\lambda = 1$, $\mu = -2$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 1$ y $\eta = 1$.

Consideremos el cambio de variable

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-\frac{2\eta}{\delta_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

que al sustituir en (3.27), omitiendo las tildes de ambas variables por comodidad en la notación, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\lambda \sqrt{\frac{\delta_1 \delta_2}{2\eta^2}} B - \frac{\delta_1^2}{2\eta} AB \\ \dot{B} &= \lambda \sqrt{\frac{\delta_1 \delta_2}{2\eta^2}} A + \eta^2 A^2 + \delta_2 B^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A fin de calcular c , según lo indica el Apéndice B, introduzcamos la siguiente notación:

$$p(A, B) = -\frac{\delta_1^2}{2\eta} AB ; \quad q(A, B) = \eta^2 A^2 + \delta_2 B^2.$$

De ésta se sigue que

$$p_{AAA} = p_{ABB} = p_{AA} = p_{BB} = q_{AAB} = q_{BBB} = q_{AB} = 0.$$

De lo anterior se concluye que no se cumplen las hipótesis del teorema de la bifurcación de Hopf⁴, por lo que no tenemos (por el momento) la garantía de la existencia de un ciclo límite⁵.

b) $tr J_Q > 0$.

Debido a que $\frac{\partial tr J_Q}{\partial \mu} = 1$, al aumentar el valor de este parámetro se tiene que el valor de $tr J_Q$ aumenta.

En particular, fijando el valor λ y suponiendo que μ^* es el valor para el cual $tr J_Q = 0$, entonces, para $\mu \in \left(\mu^*, \frac{\lambda \delta_2}{\delta_1}\right)$ se tiene que⁶ Q es inestable. Más aún, es foco.

Enseguida haremos uso de una técnica que consiste en ver el cambio del ángulo que forma el campo vectorial con el eje horizontal, a medida que el parámetro μ crece. Note que

$$\tan \theta(a, b) = \frac{\mu b + \eta a^2 + \delta_2 b^2}{\lambda a + \delta_1 a b}$$

de donde

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu} = \frac{\frac{b}{\lambda a + \delta_1 a b}}{1 + \left(\frac{\mu b + \eta a^2 + \delta_2 b^2}{\lambda a + \delta_1 a b}\right)^2}, \quad (3.30)$$

por lo que, si nos restringimos al conjunto del plano donde $b > 0$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{\lambda a + \delta_1 a b} > 0 \Leftrightarrow b < -\frac{\lambda}{\delta_1}. \quad (3.31)$$

⁴En realidad, el cálculo que se hizo es una aproximación del valor c del Apéndice B. Sin embargo, notemos que derivadas de orden superior de p y q se anulan, por lo que en este caso el valor de c es exactamente 0

⁵Hemos encontrado aquí un ejemplo de un sistema de EDO's para el cual, si se suprime la hipótesis de la no degeneración del Teorema de la Bifurcación de Hopf, como un poco más adelante, no hay emergencia de un ciclo límite al variar el signo de la traza de la matriz de Jacobi evaluada en Q . Como consecuencia de ello, es una hipótesis que no se puede suprimir.

⁶Note que si $\mu = \frac{\lambda \delta_2}{\delta_1}$, entonces $\Delta = 0$ y no corresponde al caso que estamos analizando.

Ahora, demostraremos que el sistema (3.1), para la presente combinación de valores de los parámetros, no tiene ciclos límite.

Proposición 3.6 *El sistema (3.1), para los valores de los parámetros supuestos, no exhibe soluciones periódicas.*

Demostración. Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que el sistema (3.1) tiene una trayectoria cerrada \mathcal{L} , correspondiente a una solución periódica de (3.1). Observe que, de existir, $Q \in \text{int}\mathcal{L}$. Sean R_1 y R_2 la intersección de \mathcal{L} con la recta $b = -\frac{\lambda}{\delta_1}$, y considere la curva cerrada \mathcal{O} , definida por la solución al sistema (3.1) con condición inicial R_1 del caso anterior (esto es cuando $\text{tr}J_Q = 0$).

Afirmamos que $|\mathcal{L} \cap \mathcal{O}| \leq 2$. En efecto⁷, si se intersectaran en un punto $Z \neq R_i$ ($i = 1, 2$), la curva cerrada formada por \mathcal{O} y \mathcal{L} entre R_1 y Z define una región positiva o negativamente invariante (dependiendo de la posición de Z , uno puede fácilmente convencerse de este último hecho) y que además no tiene puntos de equilibrio en el interior, lo cual no es posible por el Teorema de Poincaré-Bendixon. Podemos concluir entonces que \mathcal{O} está contenida en el interior de \mathcal{L} , o viceversa.

Veremos que en ambos casos se tiene un absurdo. Sea R'_2 , la intersección de \mathcal{O} con la recta $b = -\frac{\lambda}{\delta_1}$, a la derecha de Q , y consideremos la región, \mathcal{K} , que se encuentra por debajo de la recta $b = -\frac{\lambda}{\delta_1}$, acotada por \mathcal{O} , \mathcal{L} y el segmento $R_2R'_2$. Si \mathcal{O} está contenida en el interior de \mathcal{L} , entonces esta región es negativamente invariante y no contiene puntos de equilibrio (cuanto menos un ciclo límite), lo cual es una contradicción⁸.

De forma similar se puede demostrar que esto no es posible cuando \mathcal{L} está contenida en el interior de \mathcal{O}

□

⁷La intersección es R_1 y, quizás, R_2 en cuyos casos son tangentes.

⁸Pues toda curva solución tiene como conjunto α -límite a un punto de equilibrio o un ciclo límite, cosa que no sería cierta para las trayectorias con condición inicial en \mathcal{K}

La proposición anterior nos conduce al siguiente resultado:

Corolario 3.2 *Existe una trayectoria heteroclínica que conecta Q con P (en ese orden).*

Demostración. Sea \mathcal{T} la curva que define a la trayectoria heteroclínica entre P_0 y Q del caso en que $tr J_Q = 0$, y sea S el punto de intersección entre \mathcal{T} y la recta $b = -\frac{\lambda}{\delta_1}$. Observe que P se encuentra abajo del punto donde T intersecciona al eje vertical. A continuación veremos que no existe una trayectoria que conecte a P_0 con P .

Supongamos, por el contrario, que la variedad inestable de (3.1) en P_0 , $W_{P_0}^u$, permanece en el interior de la región acotada por \mathcal{T} y el eje vertical. A esta región la llamaremos \mathcal{J} . Por los valores que toma el campo vectorial que define a (3.1), se tiene que $W_{P_0}^u$ intersecciona al segmento QS en un punto M . Si tomamos una condición inicial \vec{z} en la región acotada por $W_{P_0}^u$, el segmento QS , y la curva \mathcal{T} desde P_0 hasta S , entonces, como esta última es negativamente invariante, y por la Proposición anterior, al no tener ciclos límite, tenemos que el conjunto α -límite de la solución de (3.1) asociada a la condición inicial \vec{z} es P_0 , lo cual contradice que P_0 fuera punto silla. Por lo tanto, $W_{P_0}^u$ permanece en el exterior de \mathcal{J} .

Como la variedad estable de (3.1) en P , W_P^s , converge a P desde \mathcal{J} , consideremos el conjunto $J \cup J'$ donde J' es la región acotada por la trayectoria \mathcal{T} de P_0 a S , $W_{P_0}^u$, y el segmento SR , donde R es la intersección de $W_{P_0}^u$ con la recta $y = -\frac{\lambda}{\delta_1}$. Notemos que $J \cup J'$ es compacto y negativamente invariante, luego, por la Proposición 2.7, al no haber ciclos límite, el conjunto α -límite de W_P^s es un punto de equilibrio. Pero P_0 es punto silla, por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} W_P^s = Q$$

□

Note que con todas las observaciones hechas anteriormente, es posible decir cómo

es el retrato fase de (3.1) en el caso en que $\text{tr}J_Q > 0$. Un ejemplo de ello se ve en la figura 3.11.

$$c) \underline{\text{tr}J_Q < 0}$$

En este caso, Q es un foco estable. El análisis de este caso es análogo al anterior, por lo que omitiremos los detalles del mismo.

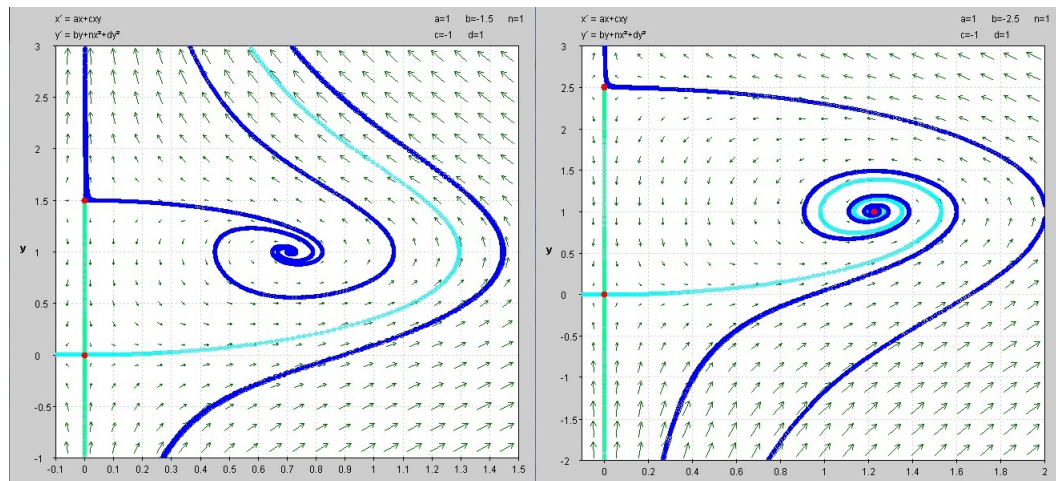


Figura 3.11: Retrato fase para: del lado izquierdo $\lambda = 1, \mu = -1.5, \delta_1 = -1, \delta_2 = 1$ y $\eta = 1$ (caso b); del lado derecho $\lambda = 1, \mu = -2.5, \delta_1 = -1, \delta_2 = 1$ y $\eta = 1$ (caso c).

3.4.2. $\delta_2 > 0, \Delta > 0$ y $\eta < 0$

Aquí se tiene que Q no existe; para determinar la dinámica asociada al sistema (3.1) empecemos por evaluar el campo vectorial sobre las siguiente rectas:

$$\text{Si } b = 0, \text{ entonces } \dot{a} < 0 \text{ y } \dot{b} < 0. \text{ Si } b = -\frac{\mu}{\delta_2}, \text{ entonces } \dot{a} > 0 \text{ y } \dot{b} < 0.$$

Por lo anterior, el retrato fase se determina como lo muestra la figura 3.12.

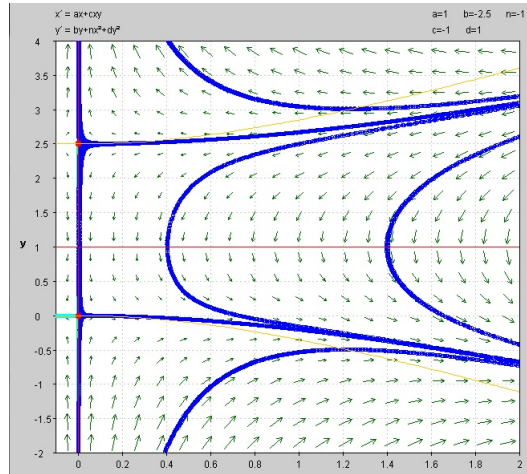


Figura 3.12: Retrato fase para $\lambda = 1, \mu = -2.5, \delta_1 = -1, \delta_2 = 1$ y $\eta = -1$.

3.4.3. $\delta_2 > 0, \Delta < 0$ y $\eta < 0$

Bajo los supuestos que dan el título de esta subsección, $\text{tr} J_P > 0$ y $\det J_P > 0$, por lo que P es nodo inestable. Tenemos también que el punto Q existe, además puede ser de dos tipos:

a) Si $\delta_1 < 0$, Q es punto silla. En este caso, la siguiente proposición su cumple:

Proposición 3.7 *El conjunto α -límite de la rama izquierda de la variedad inestable del sistema en Q es P .*

Demostración. Definamos las siguientes regiones:

1. $\mathcal{A}_4 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \geq 0; a \leq M; b \in \left[0, -\frac{\lambda}{\delta_1} \right] \right\}$,
2. $\mathcal{B}_4 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \leq 0; b \in \left[-\frac{\lambda}{\delta_1}, K \right] \right\}$,

$$3. \mathcal{C}_4 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \leq 0; b \in \left[0, -\frac{\lambda}{\delta_1} \right] \right\},$$

$$4. \mathcal{D}_4 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta a^2 + \delta_2 b^2 + \mu b \geq 0; a \leq M; b \in \left[0, -\frac{\lambda}{\delta_1} \right] \right\}.$$

La demostración es análoga a la Proposición 1.1, por lo que omitiremos los detalles. Un ejemplo de este caso lo ilustra la figura 3.13.

□

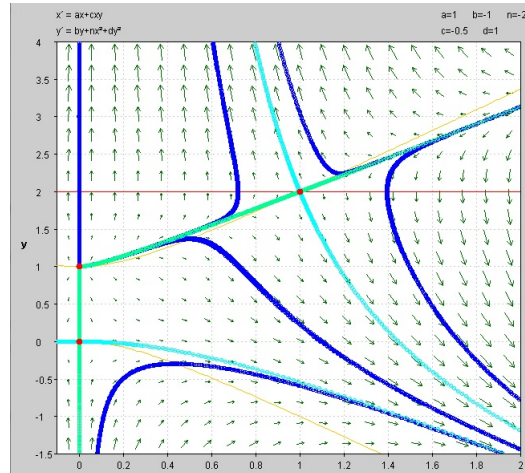


Figura 3.13: Retrato fase para $\lambda = 1, \mu = -1, \delta_1 = -0.5, \delta_2 = 1$ y $\eta = - - 2$.

b) Si $\delta_1 > 0$, se tiene en este caso, por (3.19), que $\det J_Q > 0$. Además Q es asintóticamente estable localmente, pues por (3.18) se llega a que $\text{tr} J_Q < 0$. De hecho, Q puede ser nodo o foco según los valores de los parámetros. Esto se muestra en la figura 3.14

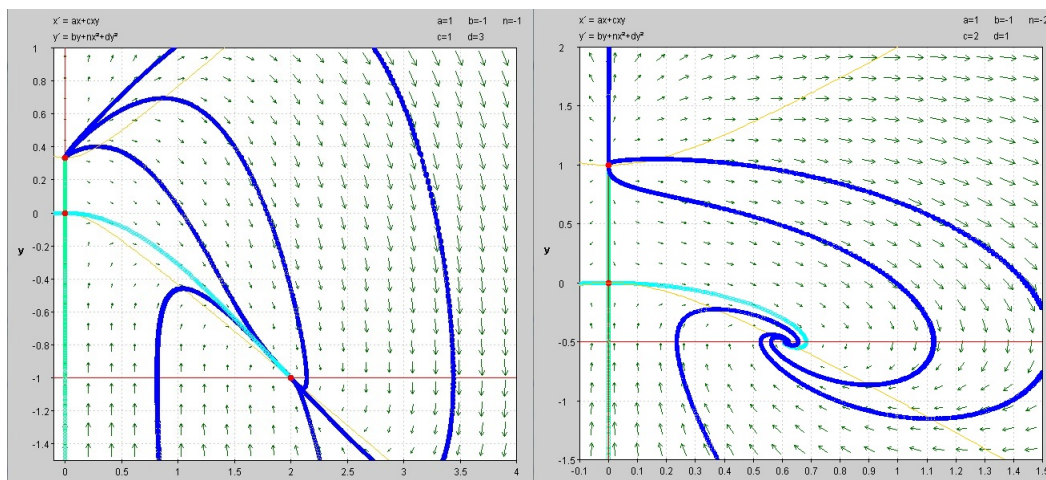


Figura 3.14: Retrato fase para: a) Del lado derecho $\lambda = 1, \mu = -1, \delta_1 = 2, \delta_2 = 1$ y $\eta = -2$. b) Del lado izquierdo $\lambda = 1, \mu = -1, \delta_1 = 1, \delta_2 = 3$ y $\eta = -2$

3.4.4. $\delta_2 > 0, \Delta < 0$ y $\eta > 0$

El punto Q no existe, así que el retrato fase del sistema queda como lo ilustra la figura 3.15

3.4.5. $\delta > 0, \Delta \equiv 0, \eta < 0$

Por el mismo argumento de la continuidad del campo vectorial respecto de los parámetros que define al sistema (3.1), la dinámica local de P se preserva de Q al ser en este caso que $P = Q$.

Los argumentos de los siguientes casos son idénticos a los del Caso 3.2.5 y 3.2.6, por lo que sólo mencionaremos lo esencial de cada uno.

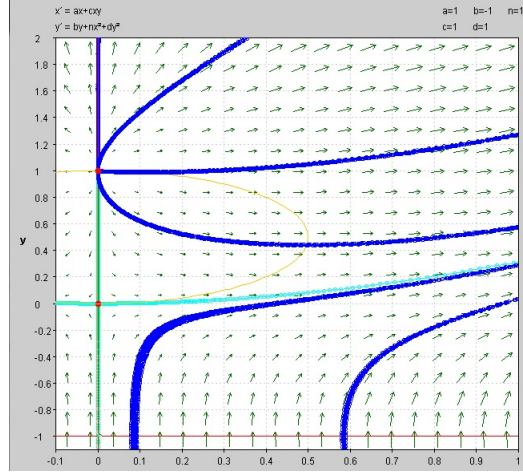


Figura 3.15: Retrato fase para $\lambda = 1, \mu = -1, \delta_1 = -0.5, \delta_2 = 1$ y $\eta = 2$.

Siendo $\eta < 0$, como $\lim_{\mu \rightarrow \frac{\lambda\delta_2}{\delta_1}} -\Delta = 0$, la dinámica alrededor del punto $P = Q$ se preserva del Caso 3.3.3.a, siendo éste punto silla (véase figura 3.16)

3.4.6. $\delta > 0, \Delta \equiv 0, \eta > 0$

Aquí $\lim_{\mu \rightarrow \frac{\lambda\delta_2}{\delta_1}} +\Delta = 0$, entonces la dinámica alrededor del punto $P = Q$ se preserva del Caso 3.2.1.b.

Más aún, como

$$\lim_{\mu \rightarrow \frac{\lambda\delta_2}{\delta_1}} \text{tr} J_Q = -\frac{\lambda\delta_2}{\delta_1} > 0$$

por lo que P es nodo inestable (véase la figura 3.16)

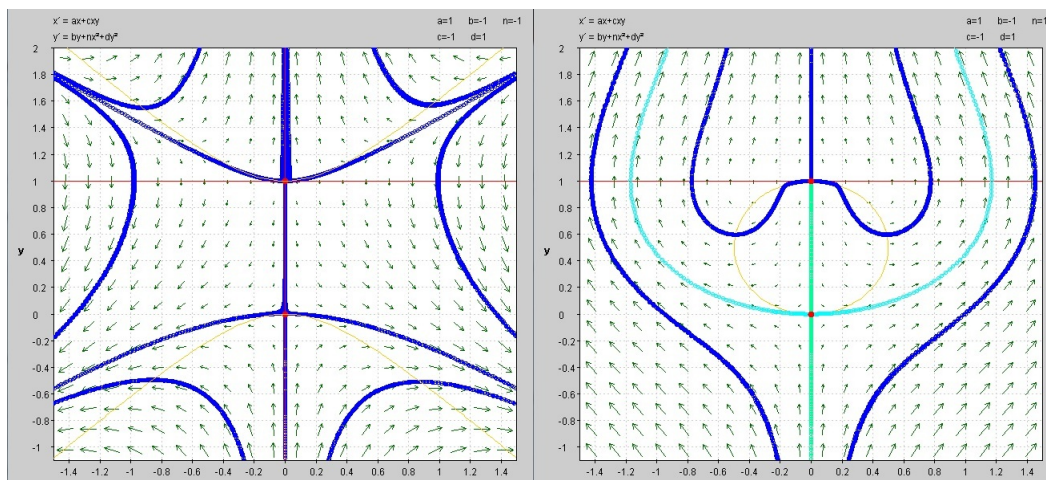


Figura 3.16: Retrato fase para: del lado izquierdo $\lambda = 1, \mu = -1, \delta_1 = -1, \delta_2 = 1$ y $\eta = -1$ (Caso 3.3.5); del lado derecho $\lambda = 1, \mu = -1, \delta_1 = -1, \delta_2 = 1$ y $\eta = 1$ (Caso 3.3.6).

3.4.7. $\delta_2 < 0$

De la misma forma que en el Caso 3.2.7, las tablas siguientes concentran la información relativa a las analogías entre el retrato fase del sistema (3.1) bajo la restricción $\delta_2 < 0$ y los correspondientes que hemos estudiado anteriormente.

Signo de Δ y η	Otros parámetros	Análogo a
$\Delta < 0$		
$\eta < 0$	$tr J_Q = 0$	3.3.1.a
	$tr J_Q > 0$	3.3.1.b
	$tr J_Q < 0$	3.3.1.c
$\eta > 0$		3.3.2
$\Delta > 0$		
$\eta > 0$	$\delta_1 > 0$	3.3.3.a
	$\delta_1 < 0$	3.3.3.b
$\eta < 0$		3.3.4
$\Delta \equiv 0$		
$\eta < 0$		3.3.5
$\eta > 0$		3.3.6

3.5. Caso III: $\lambda < 0$; $\mu > 0$

La dinámica de cada caso es análoga a la de los casos generales **I** y **II**. En la siguiente tabla el lector podrá notar las analogías que hay entre ellos, y confirmarlo por su cuenta.

Para $\delta_2 < 0$:

Signo de Δ y η	Otros parámetros	Análogo a
$\Delta > 0$		
$\eta < 0$	$trJ_Q = 0$	3.3.1.a
	$trJ_Q > 0$	3.3.1.b
	$trJ_Q < 0$	3.3.1.c
$\eta > 0$		3.3.2
$\Delta < 0$		
$\eta > 0$	$\delta_1 > 0$	3.3.3.a
	$\delta_1 < 0$	3.3.3.b
$\eta < 0$		3.3.4
$\Delta \equiv 0$		
$\eta > 0$		3.3.5
$\eta < 0$		3.3.6

Para $\delta_2 > 0$:

Signo de Δ y η	Otros parámetros	Análogo a
$\Delta < 0$		
$\eta > 0$	$trJ_Q = 0$	3.3.1.a
	$trJ_Q > 0$	3.3.1.b
	$trJ_Q < 0$	3.3.1.c
$\eta < 0$		3.3.2
$\Delta > 0$		
$\eta < 0$	$\delta_1 < 0$	3.3.3.a
	$\delta_1 > 0$	3.3.3.b
$\eta > 0$		3.3.4
$\Delta \equiv 0$		
$\eta < 0$		3.3.5
$\eta > 0$		3.3.6

3.6. Caso IV: $\lambda < 0$; $\mu < 0$

Pedimos nuevamente al lector que siga las analogías mostradas por las siguientes tablas y se convenza de ellas.

Para $\delta_2 < 0$:

Signo de Δ y η	Otros parámetros	Análogo a
$\Delta < 0$		
$\eta > 0$	$\delta_1 > 0$	3.2.1.a
	$\delta_1 < 0$	3.2.1.b
$\eta < 0$		3.2.2
$\Delta > 0$		
$\eta > 0$		3.2.3
$\eta < 0$		3.2.4
$\Delta \equiv 0$		
$\eta > 0$		3.2.5
$\eta < 0$		3.2.6

Para $\delta_2 > 0$:

Signo de Δ y η	Otros parámetros	Análogo a
$\Delta > 0$		
$\eta < 0$	$\delta_1 < 0$	3.2.1.a
	$\delta_1 > 0$	3.2.1.b
$\eta > 0$		3.2.2
$\Delta < 0$		
$\eta < 0$		3.2.3
$\eta > 0$		3.2.4
$\Delta \equiv 0$		
$\eta < 0$		3.2.5
$\eta > 0$		3.2.6

3.7. Análisis del sistema (2.50)

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales (2.50), obtenido en el Capítulo 2:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \lambda a + \delta_1 a^3 + \eta_1 a b^2 \equiv F_1(a, b) \\ \dot{b} &= \mu b + \delta_2 a^2 b + \eta_2 b^3 \equiv F_2(a, b) \end{aligned} \quad (3.32)$$

El análisis completo de este sistema se puede consultar en [9]. En el siguiente apartado únicamente consideraremos el caso en que $\delta_i, \eta_j < 0$ para $i, j \in \{1, 2\}$; donde⁹ $\lambda, \mu > 0$ y $\Delta \equiv \delta_1 \eta_2 - \delta_2 \eta_1 < 0$.

Observemos que $F_1(-a, b) = -F_1(a, b)$ y $F_1(a, -b) = F_1(a, b)$, por lo que basta

⁹En [19] aparece la misma forma normal. En dicho texto se trata sólo estos casos sin detalle, por lo cual consideramos oportuno clarificar la dinámica para esta combinación de parámetros.

analizar el sistema (3.32) cuando $a \geq 0$. Una vez conociendo la dinámica para los valores de a mencionados, basta con reflejar el retrato fase respecto al eje vertical. Por otro lado, como $F_2(-a, b) = F_2(a, b)$ y $F_2(a, -b) = -F_2(a, b)$, ocurre lo mismo con la variable b . En conclusión, basta con analizar el sistema en \mathbb{R}_+^2 .

Los puntos de equilibrio del sistema son:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0) ; P = \left(\sqrt{-\frac{\lambda}{\delta_1}}, 0 \right) ; Q = \left(0, \sqrt{-\frac{\mu}{\eta_2}} \right) ; \\ R &= \left(\sqrt{\frac{-\lambda\eta_2 + \eta_1\mu}{\Delta}}, \sqrt{\frac{-\mu\delta_1 + \lambda\delta_2}{\Delta}} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nótese que P y Q , dadas las hipótesis, siempre existen. Sin embargo, no podemos decir lo mismo de R ; de hecho para que exista, es necesario que $-\lambda\eta_2 + \eta_1\mu < 0$ y que $-\mu\delta_1 + \lambda\delta_2 < 0$, es decir, que

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} < \frac{\mu}{\lambda} < \frac{\delta_2}{\delta_1}. \quad (3.34)$$

Para determinar el retrato fase de (3.32), empezamos obteniendo sus ceroclinas. Horizontal: $a = 0$ y $a^2 = -\frac{\eta_1 b^2 + \lambda}{\delta_1}$; vertical: $b = 0$ y $b^2 = -\frac{\mu + \delta_2 a^2}{\eta_2}$.

Calculamos ahora la matriz de Jacobi asociada al sistema (3.32) para cualquier punto $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. Ésta es

$$J_{(a,b)} \equiv J[F_1, F_2]_{(a,b)} = \begin{bmatrix} \lambda + \eta_1 b^2 + 3\delta_1 a^2 & 2\eta_1 ab \\ 2\delta_2 ab & \mu + \delta_2 a^2 + 3\eta_2 b^2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

de donde¹⁰

$$\begin{aligned} \text{tr} J_{(a,b)} &= (\lambda + \mu) + (3\delta_1 + \delta_2)a^2 + (3\eta_2 + \eta_1)b^2, \\ \det J_{(a,b)} &= (\lambda + \eta_1 a^2 + 3\delta_1 b^2)(\mu + \delta_2 b^2 + 3\eta_2 a^2) - 4\eta_1 \delta_2 a^2 b^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

¹⁰Nuevamente la expresión de $\text{tr} J_{(a,b)}$ no nos permite aplicar tan fácilmente el criterio negativo de Bendixson, por lo que haremos un análisis distinto.

Observe que, sin ninguna hipótesis adicional, P_0 es siempre nodo inestable. En efecto, para empezar se cumple que

$$\operatorname{tr} J_{P_0} = \lambda + \mu > 0 \text{ y } \det J_{P_0} = \lambda\mu > 0.$$

Más aún,

$$\operatorname{tr}^2 J_{P_0} - 4 \det J_{P_0} = (\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu = (\lambda - \mu)^2 \geq 0.$$

Por lo tanto, P_0 es nodo inestable.

a) Primer caso: $\frac{\mu}{\lambda} > \frac{\delta_2}{\delta_1}$.

Note que en este caso P es punto silla. En efecto,

$$\det J_P = 2 \left(\frac{\lambda^2 \delta_2}{\delta_1} - \lambda\mu \right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\delta_2}{\delta_1} < \frac{\mu}{\lambda} \quad (3.37)$$

lo cual es cierto.

Además Q es asintóticamente estable localmente, pues

$$\operatorname{tr} J_Q = \lambda - \mu \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} + 2 \right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\eta_2}{\eta_1 + 2\eta_2} < \frac{\mu}{\lambda} \quad (3.38)$$

pero

$$\frac{\eta_2}{\eta_1 + 2\eta_2} < \frac{\eta_2}{\eta_1} < \frac{\delta_2}{\delta_1} < \frac{\mu}{\lambda},$$

por lo tanto, $\operatorname{tr} J_Q < 0$. Por otro lado,

$$\det J_Q = 2 \left(\mu^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} - \lambda\mu \right) > 0 \Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda} > \frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad (3.39)$$

lo cual es cierto. Por lo tanto Q es asintóticamente estable localmente. De hecho, como una rama de la ceroclina horizontal es $a = 0$, entonces no le queda a Q otra opción más que ser nodo asintóticamente estable localmente.

El siguiente lema determina la dinámica global del sistema (3.32).

Lema 3.1 Q es atractor global en \mathbb{R}_+^2 .

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Definimos los rayos

$$L_\epsilon^1 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \mid a = \sqrt{-\frac{\lambda}{\delta_1} + \epsilon}; b \geq 0 \right\}$$

$$L_\epsilon^2 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \mid a \geq 0; b = \sqrt{-\frac{\mu}{\eta_2} + \epsilon} \right\}$$

y consideremos la región cerrada Ω , delimitada por el cuadrado P_0STM ; donde $S = \left(\sqrt{-\frac{\lambda}{\delta_1} + \epsilon}, 0 \right)$, T es el punto de intersección de L_ϵ^1 y L_ϵ^2 , y $M = \left(0, \sqrt{-\frac{\mu}{\eta_2} + \epsilon} \right)$. Afirmamos que Ω es positivamente invariante.

Como las rectas $a = 0$ y $b = 0$ son ramas de las ceroclinas horizontal y vertical respectivamente, basta analizar el comportamiento del campo vectorial, $\vec{F} = (F_1, F_2)$, que define al sistema (3.32) en los segmentos ST y TQ para demostrar que, en efecto, Ω es positivamente invariante. Analicémoslo primero en ST ; sea $\vec{n}_{ext}^1 = \left(\sqrt{-\frac{\lambda}{\delta_1} + \epsilon}, 0 \right)$ un vector ortogonal a la recta L_ϵ^1 . Entonces

$$\begin{aligned} \vec{F}|_{L_\epsilon^1} \cdot \vec{n}_{ext}^1 &= \lambda \left(-\frac{\lambda}{\delta_1} + \epsilon \right) + \eta_1 \left(-\frac{\lambda}{\delta_1} + \epsilon \right) a^2 + \delta_1 \left(-\frac{\lambda}{\delta_1} \right)^2 \\ &= \epsilon(\eta_1 b^2 - \lambda) + \epsilon^2 \delta_1 - \frac{\lambda \eta_1}{\delta_1} b^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como cada sumando es negativo, para toda $\epsilon > 0$, entonces el ángulo¹¹ en cada punto de L_ϵ^1 , entre \vec{n}_{ext}^1 y \vec{F} , es mayor a $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, \vec{F} apunta hacia la izquierda. En particular, sobre el segmento ST , apunta al interior de Ω .

Usando la misma técnica, definimos $\vec{n}_{ext}^2 = \left(0, \sqrt{-\frac{\mu}{\eta_2} + \epsilon} \right)$, que es un vector ortogonal al segmento TQ . Entonces se tiene que

$$\vec{F}|_{L_\epsilon^2} \cdot \vec{n}_{ext}^2 = \epsilon(-\mu + \delta_2 a^2) + \epsilon^2 \eta_2 - \frac{\mu \delta - 2}{\eta_2} a^2 < 0,$$

¹¹Recuerde la fórmula geométrica del producto interior (euclidiano) en \mathbb{R}^n : $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$; donde θ es el ángulo entre los vectores \vec{x} y \vec{y} .

por lo que el campo vectorial sobre TQ apunta hacia el interior de Ω .

En consecuencia, como no hay ciclos límite (de haber, existiría otro punto de equilibrio distinto), toda solución con condición inicial en el interior de Ω converge a Q . Como lo anterior ocurrió para toda $\epsilon > 0$, entonces se concluye que Q es atractor global en \mathbb{R}_+^2 .

□

Corolario 3.3 *La variedad inestable de P converge a Q .*

Para ejemplificar la dinámica del sistema (3.32) para estos valores de los parámetros, véase la figura 3.17

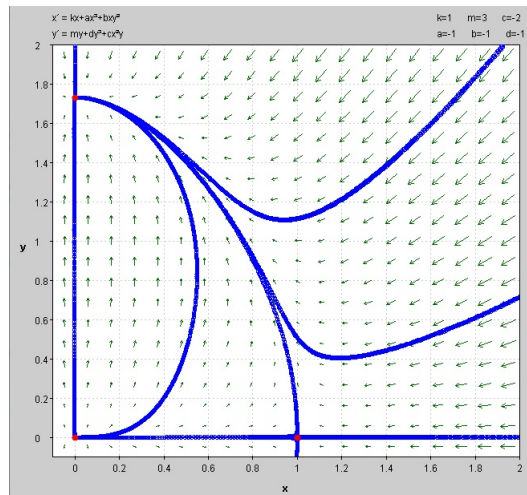


Figura 3.17: Retrato fase para $\lambda = 1$, $\mu = 3$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = -1$, $\eta_1 = -2$ y $\eta_2 = -1$.

b) Segundo caso: $\frac{\mu}{\lambda} < \frac{\eta_2}{\eta_1}$

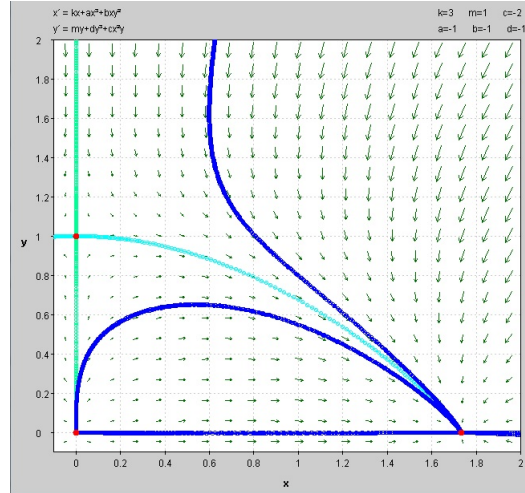


Figura 3.18: Retrato fase para $\lambda = 3$, $\mu = 1$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = -1$, $\eta_1 = -2$ y $\eta_2 = -1$.

Este caso es análogo al anterior, tomando en consideración que ahora el atractor global es P y el punto silla es Q . Observe la figura 3.18

c) Tercer caso: $\frac{\eta_2}{\eta_1} < \frac{\mu}{\lambda} < \frac{\delta_2}{\delta_1}$

Como observamos anteriormente, R existe en este caso. También podemos ver fácilmente que tanto P como Q son asintóticamente estables localmente. En efecto, para el caso de P , por (3.37), sabemos que $\det J_P > 0$. Por otro lado, $\text{tr} J_P$ cumple que

$$\text{tr} J_P = \mu - \lambda \left(2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda} < 2 + \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

lo cual es cierto, pues $\frac{\mu}{\lambda} < \frac{\delta_2}{\delta_1}$.

Ahora bien, por (3.38) y (3.39), se tiene el mismo resultado para Q , siendo, en conclusión, ambos puntos de equilibrio asintóticamente estables localmente.

A continuación vamos a demostrar que no existen soluciones periódicas de (3.32)

en \mathbb{R}_+^2 . Deberá ser claro que si se demuestra que R es punto silla, entonces no habrá soluciones periódicas de (2.1). Esto se debe a que de existir alguna, entonces R estaría en el interior de dicha curva solución, y como eso lo hace una región invariante, se tendría una trayectoria homoclínica. Esto último contradice el hecho de que tenemos a lo más 4 puntos de equilibrio.

Dicho esto, procedemos a demostrar que R es punto silla. Después de realizar muchas operaciones, se llega a que

$$\det J_R = \frac{4\lambda\mu(\delta_1^2\eta_2^2 - \delta_2^2\eta_1^2)}{\Delta^2} - \frac{4(\lambda^2\delta_2\eta_2 + \mu^2\delta_1\delta_2)}{\Delta} \quad (3.41)$$

luego,

$$\det J_R < 0 \Leftrightarrow \lambda\mu(\delta_1^2\eta_2^2 - \delta_2^2\eta_1^2) < (\lambda^2\delta_2\eta_2 + \mu^2\delta_1\delta_2)(\delta_1\eta_2 - \delta_2\eta_1)$$

Verificamos que lo anterior se cumple:

$$\begin{aligned} (\lambda^2\delta_2\eta_2 + \mu^2\delta_1\delta_2)(\delta_1\eta_2 - \delta_2\eta_1) &= \lambda^2(\delta_1\delta_2\eta_2^2 - \eta_1\delta_2^2\eta_2) + \mu^2(\delta_1^2\eta_1\eta_2 - \delta_1\eta_1^2\delta_2) \\ &> \lambda^2\left(\frac{\mu}{\lambda}\delta_1^2\eta_2^2 - \frac{\mu}{\lambda}\eta_1^2\delta_2^2\right) + \mu^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\delta_1^2\eta_2^2 - \frac{\lambda}{\mu}\eta_1^2\delta_2^2\right) \\ &= 2\lambda\mu(\delta_1^2\eta_2^2 - \eta_1^2\delta_2^2) \\ &> \lambda\mu(\delta_1^2\eta_2^2 - \eta_1^2\delta_2^2). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por lo tanto, R es punto silla. De hecho, podemos conocer los conjuntos α -límite y ω -límite de la variedad estable e inestable, respectivamente, de (2.1) en R . Observemos que $R \in \text{int}(\Omega)$, donde la región Ω está definida como en el primer caso. Más aún, Ω es positivamente invariante por los argumentos ya expuestos.

Como consecuencia del Teorema de Poincaré-Bendixson, la rama izquierda de la variedad inestable de (3.32) converge a Q , mientras que la rama derecha converge a P . Por otro lado, la rama izquierda de la variedad estable tiene como conjunto α -límite a P_0 . El lector puede verificar un ejemplo de la dinámica en la figura 3.19

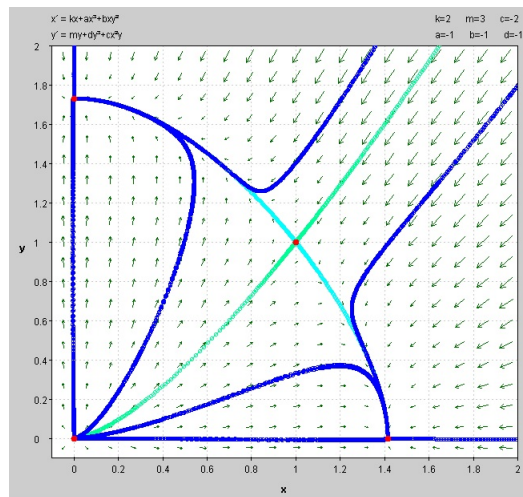


Figura 3.19: Retrato fase para $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = -1$, $\eta_1 = -2$ y $\eta_2 = -1$.

Capítulo 4

El oscilador de Bruselas, un ejemplo

“Un ejemplo ayudará a aclarar lo que quiero decir más que un volumen entero de generalidades”

E. A. Abbott, en *Planilandia*.

4.1. Introducción

En los dos capítulos anteriores hemos expuesto la teoría que fundamenta la existencia de bifurcaciones secundarias en una amplia familia de sistemas de tipo RD. El objetivo del capítulo que estamos iniciando es exponer un ejemplo con el que queremos retomar la motivación original del presente trabajo, esto es la *bifurcación de Hopf-Turing*. Además expondremos la aplicación del material contenido en los capítulos anteriores a un modelo matemático específico: *el oscilador de Bruselas*.

El material que contiene este capítulo está organizado como sigue: en la sección 4.2 haremos la deducción del sistema de EDPs correspondiente al modelo cinético que presentaremos. En la sección 4.3 demostraremos la existencia de una *bifurcación de Hopf* supercrítica del sistema homogéneo asociado, mientras que en la sección 4.4 daremos las condiciones bajo las cuales se exhibe una *inestabilidad de Turing* más general¹. En la sección 4.5 daremos condiciones necesarias y suficientes para que ambas bifurcaciones coexistan, dando origen a una *bifurcación de Hopf-Turing* generalizada (en el sentido que mencionamos anteriormente para la *inestabilidad de Turing*). En la sección 4.6 haremos los cálculos indicados del Capítulo 2 para determinar los casos presentes de bifurcaciones secundarias. Finalmente, en la sección 4.7 presentamos unas simulaciones numéricas que teniendo como mecanismo subyacente a una *bifurcación de Hopf-Turing*, nos muestran los patrones espacio-temporales que aparecen.

4.1.1. Una breve historia de este oscilador químico

El modelo matemático de un tipo de reacciones químicas que se presentará a continuación fue propuesto por Ilya Prigogine, René Lefevre y Grégoire Nicolis, los tres, miembros del llamado *Grupo de Bruselas*. El modelo que presentaremos y estudiaremos en las siguientes páginas, es útil en el sentido de que ejemplifica la riqueza matemática detrás de la dinámica espacio-temporal que el mecanismo propuesto genera.

El modelo propuesto, llamado por John Tyson el *oscilador de Bruselas*² (véase [27]), en su simplicidad tanto algebraica como química, ejemplifica perfectamente, en la línea de pensamiento del matemático inglés Alan Turing, lo que Prigogine sostenía: el proceso de la difusión, junto con un proceso reactivo, no conduce necesariamente a la homogeneización de la concentración de las sustancias. De hecho, no sólo eso,

¹Estaremos pensando que no necesariamente ocurre que $\text{tr}J < 0$. Hablaremos de la *inestabilidad de Turing* aunque no contemos con la hipótesis mencionada.

²Esta es la traducción que hicimos del término *Brusselator*

sino que produce patrones (a los cuales llamó *estructuras disipativas*³) que en el laboratorio, con los reactivos adecuados, pueden ser evidentes y vistosos.

En palabras de Prigogine y de Lefevre (véase [16]), “Más allá de la transición inestable, uno puede tener una situación que podría ser apropiadamente llamada estructura disipativa, ya que es caracterizada por un orden estructural y funcional y por un orden bajo de entropía”. En el mismo artículo, estos autores explican:

En principio parece que la difusión sólo puede conducir a la homogeneización del sistema. Aquí, por el contrario, vemos que la difusión es necesaria para obtener una estructura disipativa correspondiente a un estado independiente del tiempo, en el que las concentraciones son dependientes del espacio. Esta aparente paradoja se resuelve, como mostramos, que la difusión tiene un doble papel: por un lado, incrementa la estabilidad del estado estacionario, pero por el otro, incrementa la variedad de perturbaciones compatibles con las ecuaciones macroscópicas del cambio.

En consonancia con lo expresado por el personaje principal del libro *Flatland*, y que presentamos como epígrafe del presente capítulo, enseguida desarrollaremos nuestro ejemplo: el *oscilador de Bruselas*.

4.2. Planteamiento del problema

Como hipótesis generales, supondremos que tendremos en un mismo dominio (el espacio físico) reacciones químicas paralelas e independientes (posiblemente reversibles). La ley que rige la cinética de las reacciones químicas se establece empíricamente

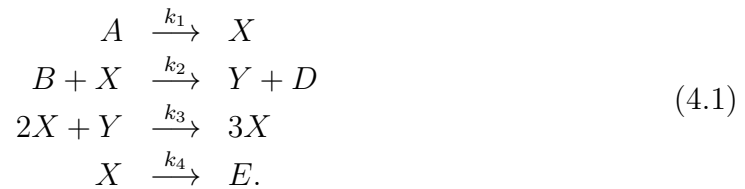
³Este término se contrasta con el nombre de sistema conservativo, el cual supone que, como su nombre lo indica, tiene la característica de conservar algunas magnitudes. Casi siempre se maneja en términos mecánicos, y lo que se conserva es la energía total.

bajo las hipótesis que rigen la *ley de acción de masas*, así como lo desarrollamos en el capítulo introductorio.

Ahora bien, si además las sustancias se difunden en el medio siguiendo la *ley de Fick*, que estipula que el flujo se da en dirección contraria al gradiente de la concentración, entonces se tiene que la dinámica espacio-temporal del sistema está dado por un sistema de EDPs no lineales de tipo RD.

4.2.1. Deducción del modelo del *oscilador de Bruselas*

El mecanismo subyacente del *oscilador de Bruselas* consta de las siguientes reacciones paralelas



Estaremos suponiendo que las reacciones no son reversibles⁴, además de suponer que la concentración de los reactivos A y B , y la de los productos D y E es constante. Es importante hacer notar en este momento que la tercer reacción hace químicamente imposible este sistema⁵. Sin embargo, no hay que olvidar que se busca ejemplificar algunos tipos de dinámicas en esta clase de ecuaciones, así como los resultados contenidos en los Capítulos 2 y 3.

Por la *ley de acción de masas*, tenemos que el sistema de EDPs que determina la dinámica espacio-temporal del sistema de reacciones químicas que aparecen en (4.1)

⁴Esta hipótesis no es tan arriesgada, ya que en cada caso se puede suponer que el experimento se modifica para garantizar lo anterior. Por ejemplo, para la primer reacción se puede suponer que la concentración de A sea excesivamente grande.

⁵Esto es porque para poder producir $3X$ sin hacer otro producto, Y tendría que ser idénticamente la sustancia X

es

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} &= \tilde{D}_1 \nabla^2 \tilde{X} + k_1 \tilde{A} - (k_2 \tilde{B} + k_4) \tilde{X} + k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} \\ \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial t} &= \tilde{D}_2 \nabla^2 \tilde{Y} + k_2 \tilde{B} \tilde{X} - k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y},\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde $k_i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$), $D_j > 0$ ($j = 1, 2$) y \tilde{X} , \tilde{Y} denotan la concentración de los reactivos X y Y respectivamente.

A continuación haremos la adimensionalización del sistema, proponiendo las nuevas variables

$$\begin{aligned}t &= k_4 \tilde{t} \quad ; \quad X = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \tilde{X} \quad ; \quad Y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \tilde{Y}; \\ A &= \sqrt{\frac{k_1^2 k_3}{k_4^3}} \tilde{A} \quad ; \quad B = \frac{k_2}{k_4} \tilde{B} \quad ; \quad D_i = \frac{\tilde{D}_i}{k_4}\end{aligned}\tag{4.3}$$

que al sustituirlas en (4.2), dan el sistema adimensionalizado

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t} &= D_1 \nabla^2 X + A - (B + 1)X + X^2 Y \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= D_2 \nabla^2 Y + BX - X^2 Y.\end{aligned}\tag{4.4}$$

A este sistema parabólico de EDPs se le añaden las condiciones iniciales y de frontera a fin de completar el problema matemático a estudiar. Esto lo haremos más adelante, cuando se requiera.

4.3. Existencia de una *bifurcación de Hopf*

Consideremos el sistema homogéneo asociado a (4.4), esto es el sistema de EDOs

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2 Y \\ \dot{Y} &= BX - X^2 Y\end{aligned}\tag{4.5}$$

del cual podemos observar que la ceroclina horizontal tiene dos ramas, éstas son

$$X = 0 \quad \text{y} \quad Y = \frac{B}{X};$$

mientras que la ceroclina vertical es

$$Y = \frac{(B+1)X - A}{X^2}.$$

A partir de la rama no trivial de las ceroclinas, uno se convence que el sistema (4.5) tiene un único punto de equilibrio positivo: $(A, \frac{B}{A})$.

Trasladando el punto de equilibrio al origen, esto es, haciendo el cambio de variable $u = X - A$ y $v = Y - \frac{B}{A}$, obtenemos el siguiente sistema en términos de u y v

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (B-1)u + A^2v + \frac{B}{A}u^2 + 2Auv + u^2v \equiv p(u, v) \\ \dot{v} &= -Bu - A^2v - \frac{B}{A}u^2 - 2Auv - u^2v \equiv q(u, v). \end{aligned} \quad (4.6)$$

De lo anterior, tenemos que el sistema lineal que aproxima a (4.6) en cualquier punto (u, v) lo define la matriz de Jacobi

$$J_{(u,v)} \equiv J[p, q]_{(u,v)} = \begin{bmatrix} (B-1) + \frac{2B}{A}u + 2Av + 2uv & A^2 + 2Au + u^2 \\ -B - \frac{2B}{A}u - 2Av - 2uv & -A^2 - 2Au - u^2 \end{bmatrix}.$$

Al evaluarla en el origen se obtiene la matriz

$$J_{\vec{0}} = \begin{bmatrix} B-1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

cuyos valores propios son

$$\lambda_{\pm} = \frac{(B-1-A^2) \pm \sqrt{B^2+1+A^4-2B-2A^2B-2A^2}}{2}. \quad (4.8)$$

Para demostrar la existencia de una *bifurcación de Hopf*, según la técnica expuesta en el Apéndice B, es necesario averiguar si existen valores de los parámetros (en este caso, A y B) para los cuales hay un cambio de estabilidad del punto de equilibrio; es decir, para los que el signo de la traza, $tr J_{\vec{0}}$, cambia.

Notemos que

$$\det J_{\bar{0}} = A^2 > 0,$$

mientras que, por otro lado,

$$\text{tr} J_{\bar{0}} = B - 1 - A^2.$$

De lo anterior se tiene que $\text{tr} J_{\bar{0}} > 0$ si, y sólo si,

$$B > A^2 + 1 \equiv B_H. \quad (4.9)$$

La figura 4.1 ilustra un diagrama en el plano de los parámetros relevante en términos dinámicos. En efecto, para valores de B correspondientes a la región arriba de la parábola $A^2 + 1$ en el plano de los parámetros (plano AB) el origen es inestable. De la misma forma, por debajo de ella, el origen es asintóticamente estable; mientras que para toda combinación de parámetros A y B que están sobre la parábola $B = A^2 + 1$, $\text{tr} J_{\bar{0}} = 0$, por lo que los valores propios tienen parte real nula.

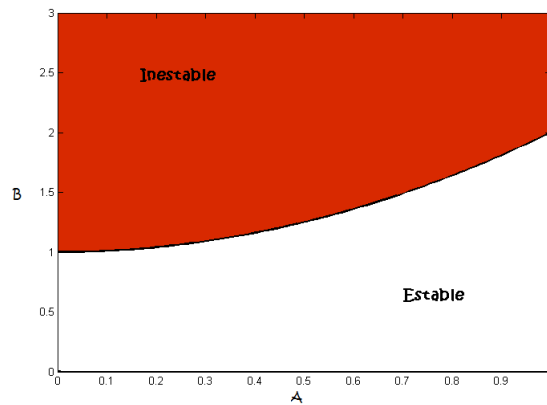


Figura 4.1: Diagrama de parámetros. Se ilustra la región en la que se da la *bifurcación de Hopf*.

Veamos si se cumple la condición de transversalidad. Al calcular la derivada de la parte real de los valores propios respecto a B y evaluarla en el valor crítico (o de

bifurcación) $B_H = A^2 + 1$, se tiene

$$\frac{dRe(\lambda(A^2 + 1))}{dB} = 1 \neq 0.$$

Una vez que la condición de transversalidad se satisface, es necesario, según el teorema de la *bifurcación de Hopf* (véase el Apéndice B), verificar que se cumple la condición de no degeneración.

Para ello, es necesario hacer una transformación que lleve a la parte lineal definida por (4.7) a su forma canónica de Jordan. De (4.8), si denotamos por $\alpha \equiv Re(\lambda_{\pm})$ y $\beta \equiv Im(\lambda_{\pm})$, al hacer los cálculos, obtenemos que un vector propio de la matriz (4.7) correspondiente a λ_- es

$$\vec{v}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha+A^2}{A^2} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\beta}{A^2} \end{pmatrix} \equiv \vec{v}_1 + i\vec{v}_2, \quad (4.10)$$

por lo que construimos la matriz $Q \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ cuyas columnas son los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 ; es decir

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\alpha+A^2}{A^2} & -\frac{\beta}{A^2} \end{bmatrix}; \quad (4.11)$$

matriz que claramente es invertible, pues $\det Q = -\frac{\beta}{A^2} \neq 0$. De hecho

$$Q^{-1} = -\frac{A^2}{\beta} \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{A^2} & 0 \\ \frac{\alpha+A^2}{A^2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Con el cálculo anterior, tenemos que la matriz $Q^{-1}JQ$ es la forma canónica de $J_{\bar{0}}$. Esto es,

$$Q^{-1}J_{\bar{0}}Q = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} = Q^{-1} J Q \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + Q^{-1} \begin{pmatrix} f(U, V) \\ g(U, V) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

donde $f(U, V) = -g(U, V) = -\frac{\alpha+A}{A^2}U^3 - \frac{\beta}{A^2}U^2V + \left[\frac{B-2(\alpha+A^2)}{A}\right]U^2 - \frac{2\beta}{A}UV$, que, en otros términos, es la parte no lineal de (4.6) evaluado en las variables U y V . Su forma explícita está dada por

$$\begin{pmatrix} p(U, V) \\ q(U, V) \end{pmatrix} = f(U, V) Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f(U, V) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix},$$

y por consecuencia

$$p(U, V) = f(U, V) ; \quad q(U, V) = -\frac{\alpha}{\beta}f(U, V). \quad (4.15)$$

Para calcular la constante que determina si la bifurcación es doblemente degenerada o no, es importante conocer los términos no lineales anteriores cuando los parámetros A y B están relacionados por $B = 1 + A^2$. Si entendemos $\alpha \equiv \alpha(B)$ y $\beta \equiv \beta(B)$, entonces $\alpha(1 + A^2) = 0$ y $\beta(1 + A^2) = A^2$, siendo $q(U, V)$, en este caso, idénticamente cero.

Siguiendo el procedimiento que se expone en el Apéndice B, calculamos la constante (B.16). Ésta es

$$c = -\left(\frac{3}{8A} + \frac{1}{4}\right) < 0, \quad (4.16)$$

desigualdad que se da, pues $A > 0$.

Como $c \neq 0$, las hipótesis del teorema de la bifurcación de Hopf se cumplen. Más aún, como $c < 0$, para valores de B cercanos a $A^2 + 1$, se tiene que la *bifurcación es supercrítica*. De esta forma, el ciclo límite del sistema (4.14) que surge de la *bifurcación de Hopf* es asintóticamente estable.

A continuación se muestra el retrato fase de (4.5) con valores de los parámetros que hacen posible la presencia de un ciclo límite de (4.5) debido a la *bifurcación de Hopf*. Véase la figura 4.2

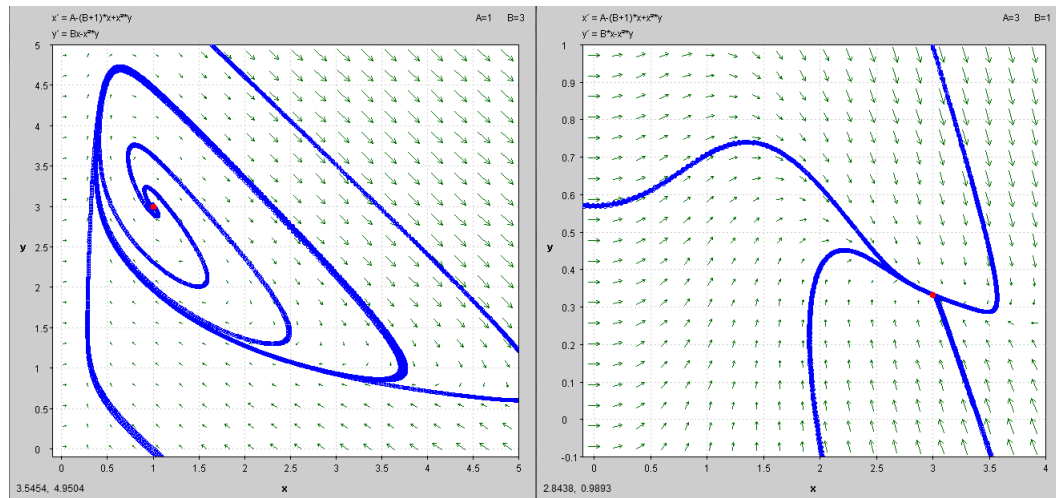


Figura 4.2: Retrato fase de (4.5): del lado izquierdo se exhibe el ciclo límite estable para $A = 1$ y $B = 3$. Del lado derecho el ciclo se destruye, esto para los valores de $A = 3$ y $B = 1$.

4.4. Presencia de inestabilidad de Turing generalizada

A continuación demostraremos la existencia de bifurcaciones, dadas por la inestabilidad espacio-temporal de las soluciones del *oscilador de Bruselas* en su parte lineal. La llamamos *inestabilidad de Turing* generalizada, en el sentido de que no estamos suponiendo que $\text{tr}J < 0$ como lo indica el Apéndice C. Consideraremos el caso unidimensional, de hecho, supondremos sin pérdida de generalidad que el dominio espacial es el intervalo $(0, \pi)$. Entonces la ecuación (4.2), al trasladar el punto de

equilibrio estacionario y homogéneo (a saber, el punto $(A, \frac{B}{A})$) al origen, obtenemos el sistema de EDPs⁶

$$\begin{aligned} u_t &= D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B-1)u + A^2 v + \frac{B}{A} u^2 + 2Auv + u^2 v \\ v_t &= D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Bu - A^2 v - \frac{B}{A} u^2 - 2Auv - u^2 v, \end{aligned} \quad (4.17)$$

Bastará con analizar el sistema lineal asociado a (4.17), es decir, consideraremos en adelante el sistema

$$\begin{aligned} u_t &= D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B-1)u + A^2 v \\ v_t &= D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Bu - A^2 v, \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde para completar el problema, tomaremos condiciones iniciales arbitrarias pero suficientemente cercanas a la solución estacionaria y homogénea, y condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas⁷.

Siguiendo la idea presentada en el Apéndice C, que no es exactamente igual, propondremos por solución de (4.18) a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_m \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} e^{\lambda_m t + i k_m x}, \quad (4.19)$$

donde $a_m, b_m, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y k_m es el m -ésimo número de onda de las soluciones⁸.

Bajo la misma filosofía del Apéndice C, bastaría con que un sumando de (4.19) fuera inestable para garantizar que la solución lo fuera también. Por ello tomaremos

⁶Véase (4.6)

⁷Hay que remarcar que las condiciones de frontera pueden no ser necesariamente esas para hallar inestabilidades de Turing, por ejemplo, pudiéramos cambiarlas por condiciones de tipo Neumann homogéneas. Sin embargo, a fin de continuar la línea de razonamiento seguida en los capítulos anteriores convendrá considerar estas condiciones.

⁸En general, por las condiciones del problema, k_m es un múltiplo de m . De hecho, $k_m = \frac{lm}{\pi}$ donde l es la longitud del intervalo. Por lo tanto en nuestro problema particular se tiene que $l = \pi$ y por tanto $k_m = m$.

un único sumando, digamos

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} e^{\lambda_m t + i k_m x},$$

que, al sustituirlo en la ecuación (4.18) obtenemos que a_m , b_m , λ_m y k_m deben de ser tales que se cumpla la igualdad

$$M \begin{bmatrix} a_m \\ b_m \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_m + D_1 k_m^2 - (B - 1) & -A^2 \\ B & \lambda_m + k_m^2 D_2 + A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Este sistema de ecuaciones algebraicas tiene solución no trivial siempre que $\det M = 0$, igualdad que conduce a la ecuación característica en λ_m

$$\lambda_m^2 + (\beta_m - \alpha_m)\lambda_m + A^2 B - \alpha\beta_m = 0, \quad (4.21)$$

donde $\alpha_m = B - 1 - k_m^2 D_1$ y $\beta_m = A^2 + k_m^2 D_2$.

Las soluciones de (4.21) están dadas así

$$\lambda_m^\pm = \frac{\alpha_m - \beta_m \pm \sqrt{(\alpha_m + \beta_m)^2 - 4A^2 B}}{2}. \quad (4.22)$$

De esta expresión, podemos considerar un primer caso cuando $\lambda_m \in \mathbb{C}$. Esto ocurre si, y sólo si,

$$[(B - 1 - k_m^2 D_1 + A^2 + k_m^2 D_2)^2 - 4A^2 B] < 0,$$

lo cual es equivalente a que

$$[B^2 - 2B(A^2 + \delta_m) + (A - \delta_m)^2] < 0, \quad (4.23)$$

donde $\delta_m = 1 + k_m^2(D_1 - D_2)$.

Notemos que el polinomio en B que está del lado izquierdo en la desigualdad (4.23) determina condiciones para que se cumpla dicha desigualdad. De hecho, los valores del parámetro B deberán estar entre las raíces del polinomio mencionado, es decir, pertenecer al intervalo (B_-, B_+) donde

$$B_\pm = \frac{2(A^2 + \delta_m) \pm \sqrt{4(A^2 + \delta_m)^2 - 4(A^2 - \delta_m)^2}}{2} = A^2 + \delta_m \pm 2A\sqrt{\delta_m}. \quad (4.24)$$

Nótese que en (4.24), necesitamos que δ_m sea positiva⁹, teniendo una condición de degeneración cuando su valor es nulo. De lo anterior, la desigualdad (4.23) se satisface si, y sólo si, $B_- < B < B_+$. Equivalentemente

$$(A - \sqrt{\delta_m})^2 < B < (A + \sqrt{\delta_m})^2. \quad (4.25)$$

Finalmente, tendremos que $Re(\lambda_m^\pm) > 0$ si, y sólo si, $\alpha_m - \beta_m > 0$; o lo que es lo mismo que

$$B > A^2 + 1 + k_m^2(D_1 + D_2). \quad (4.26)$$

Siendo B el parámetro de bifurcación, el valor crítico, \tilde{B}_m , está dado por la curva

$$\tilde{B}_m = A^2 + 1 + k_m^2(D_1 + D_2). \quad (4.27)$$

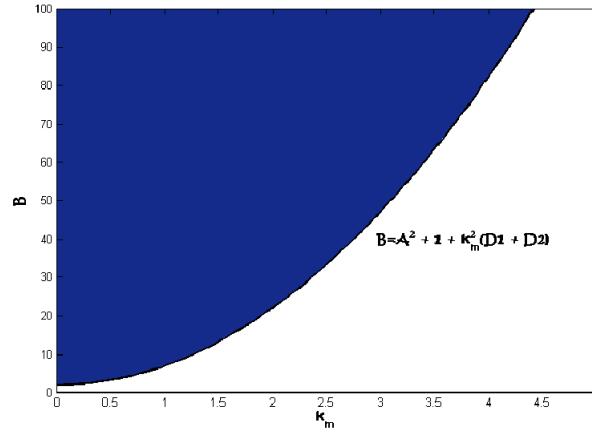


Figura 4.3: Inestabilidad espacio-temporal debida al valor positivo de algún valor propio de las funciones propias de (4.18). Visto en el plano $k_m B$.

⁹Hay que notar que si no lo fuera, es decir, si $(D_2 - D_1) > \frac{1}{k_m^2}$ para toda k_m , entonces no se tendrían valores propios complejos conjugados. En nuestro caso particular, como $k_m = m$, bastaría con que $(D_2 - D_1) > 1$.

Concluyendo, a fin de garantizar que la perturbación espacio-temporal desestabilice a la distribución estacionaria y homogénea, bastará¹⁰ que $B > \tilde{B}_0$.

Analicemos ahora el caso en el que uno de los valores propios (de hecho en ese caso serían ambos) es un número real. Para que exista inestabilidad de la solución trivial de (4.18), será necesario que éste sea positivo. Observando de (4.21) vemos que para tener una raíz positiva, entonces necesitamos que $(\alpha_m \beta_m - A^2 B) > 0$, lo cual nos lleva a la desigualdad

$$B > 1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + \frac{A^2}{D_2 k_m^2} + k_m^2 D_1. \quad (4.28)$$

Por lo que el valor crítico de bifurcación está dado en términos de k_m y B por

$$B_m = 1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + \frac{A^2}{D_2 k_m^2} + k_m^2 D_1. \quad (4.29)$$

Analizaremos a continuación cómo es la curva B_m . Afirmamos que tiene por gráfica a una curva convexa. En efecto, como

$$\frac{dB_m}{dk_m} = 2k_m D_1 - \frac{2A^2}{D_2 k_m^3},$$

entonces el punto crítico, p , satisface que $p^2 = \frac{A}{\sqrt{D_1 D_2}}$ y, entonces

$$\frac{d^2 B_m}{dk_m^2} = 2D_1 + \frac{4A^2}{D_2 k_m^4} > 0, \quad \forall k_m^2,$$

de donde se concluye que en p está el mínimo absoluto de B_m , y que la gráfica de B_m es convexa.

¹⁰Note que en este caso $B_0 = A^2 + 1$, lo cual coincide con la bifurcación de Hopf que obtuvimos anteriormente.

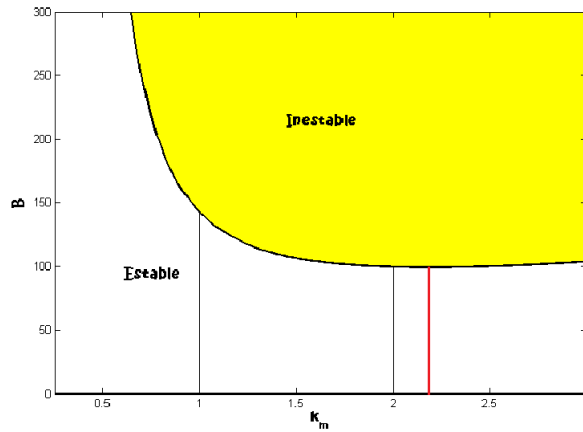


Figura 4.4: Inestabilidad espacio-temporal de la solución de equilibrio de (4.18) debido al valor positivo de los valores propios en el plano $k_m B$.

Evaluando B_m en p

$$B_p = \left(1 + \sqrt{\frac{D_1}{D_2} A} \right)^2. \quad (4.30)$$

Finalmente, si m_c es el entero tal que B_{m_c} es el más próximo a B_p , si $B > B_{m_c}$, entonces el valor propio es positivo y también hay una condición de inestabilidad.

Por (4.27) y (4.30), concluimos que si $B > \min\{B_0, B_{m_c}\}$, entonces garantizamos la inestabilidad de la solución trivial de (4.17). En [17] se puede consultar el hecho de que si $B_0 < B_{m_c}$ y $B_0 < B < B_{m_c}$, entonces la dinámica está regida por la bifurcación de Hopf; por lo que si buscamos *estructuras disipativas*, o *patrones de Turing*, deberemos encontrar valores de B tales que $B_{m_c} < B < B_0$.

4.5. Presencia de bifurcación de Hopf-Turing generalizada

De las dos secciones anteriores se tiene que existe una *bifurcación de Hopf* siempre que $B > 1 + A^2 \equiv B_H$, mientras que ocurre una *inestabilidad de Turing* generalizada si se satisface que $B > B_{m_c}$. La pregunta que surge naturalmente es: ¿Existen valores de los parámetros para los que coexistan ambas bifurcaciones? En términos geométricos esto ocurre si ambas curvas de bifurcación se intersectan de forma transversal en el plano de los parámetros AB.

Recordemos que (4.27) no es exactamente el punto de bifurcación que buscamos en (4.29), sino el valor B_{m_c} . Este último está dado al evaluar B_m en m o en $m + 1$ tal que $p \in [m, m + 1]$.

Luego, podemos definir a la curva B_T como B_m evaluada en la m que mencionamos anteriormente. Esto es

$$B_T = 1 + \frac{D_1}{D_2}A^2 + \frac{A^2}{D_2m^2} + D_1m^2. \quad (4.31)$$

Hasta este momento, en las secciones anteriores, hemos visto las condiciones para que el sistema (4.17) exhiba una *bifurcación de Hopf* y una *inestabilidad de Turing* generalizada. Respecto a esta última, aligeramos las hipótesis que se exponen en el Apéndice C, en el cual se expone el análisis que conduce a las condiciones para que se dé la tradicional *bifurcación de Turing*. Sin embargo, la ruta para que se dé la *bifurcación de Hopf* debe ser tal que los parámetros, al variar, hagan pasar la traza de la matriz de Jacobi evaluada en el origen de negativa a positiva (probamos que su determinante es siempre positivo). Justo en la parte donde no se exhibe un ciclo límite (cuando $\text{tr}J < 0$), se pueden satisfacer las condiciones de la *inestabilidad de Turing* como se exhibe en el Apéndice C, pudiendo ser como antesala a la emergencia del ciclo límite.

El siguiente teorema da condiciones para la existencia de una *bifurcación de Hopf*-

Turing para el sistema (4.17).

Teorema 4.1 *Considere el sistema (4.17), entonces B_H y B_T se intersectan transversalmente si, y sólo si, $m^2 > \frac{1}{D_2 - D_1}$. Más aún, si no se intersectan, entonces sólo puede haber bifurcación de Hopf o bifurcación de Hopf-Turing generalizada, pero no inestabilidad de Turing generalizada. En cambio, si se intersectan, pueden haber comportamientos de los tres tipos.*

Demostración. Como mencionamos al inicio de la sección, estaremos pensando en hallar la intersección de la gráfica de B_T con la de B_H . Igualando ambas expresiones se tiene

$$1 + \frac{D_1}{D_2}A^2 + \frac{A^2}{D_2m^2} + D_1m^2,$$

de lo cual se concluye que

$$A^2 = \frac{D_1D_2m^4}{(D_2 - D_1)m^2 - 1}. \quad (4.32)$$

Lo anterior tiene sentido si, y sólo si, $(D_2 - D_1)m^2 - 1 > 0$. Dicho en otros términos

$$m^2 > \frac{1}{D_2 - D_1}.$$

Afirmamos que lo hacen de forma transversal, esto es que en el punto de intersección sus derivadas son distintas. En efecto, dado que $\frac{dB_T}{dA} = 2\frac{D_1}{D_2}A + \frac{2A}{D_2m^2}$ y $\frac{dB_H}{dA} = 2A$, entonces $\frac{dB_T}{dA} = \frac{dB_H}{dA}$ si, y sólo si,

$$m^2 = \frac{1}{D_2 - D_1}.$$

Para la segunda parte, sólo basta ver que las gráficas de B_H y B_T son parábolas en el plano AB , y cuando $A = 0$ tenemos que $B_T > B_H$.

□

El método aquí presentado da condiciones necesarias y suficientes para que el sistema (4.17) presente una *bifurcación de Hopf-Turing* generalizada. Sin embargo, no tenemos el valor explícito de la m necesaria para el teorema anterior. Ésta, en cambio, es calculable cuando tenemos valores particulares de A , D_1 y D_2 .

4.6. Bifurcaciones secundarias

Utilizaremos los resultados del Capítulo 1, según los cuales para algunos m_1 y m_2 , tales que $|m_1 - m_2| = 1$, $\det(J - m_i^2 D) = 0$. Para el caso del *oscilador de Bruselas*, explícitamente tenemos que

$$\det(J - n^2 D) = A^2 + A^2 n^2 D_1 - B n^2 D_2 + n^2 D_2 + n^4 D_1 D_2 = 0,$$

y, al despejar B , se tiene para cada $n \in \mathbb{N}$

$$B_n = \frac{A^2}{n^2 D_2} + \frac{A^2 D_1}{D_2} + 1 + n^2 D_1. \quad (4.33)$$

Debido a que la igualdad anterior se cumple para m_1 y m_2 , entonces

$$B_{m_1} - B_{m_2} = \frac{A^2}{m_1^2 D_2} - \frac{A^2}{m_2^2 D_2} + m_1^2 D_1 - m_2^2 D_1 = 0,$$

por lo que, al despejar a A^2 , obtenemos su valor crítico. Éste está dado por la expresión

$$A_c^2 = D_1 D_2 m_1^2 m_2^2. \quad (4.34)$$

Si de (4.33) despejamos A , obtendremos para cada número natural n , un valor de A expresado como

$$A_n = \frac{(B - 1 - n^2 D_1)(n^2 D_2)}{1 + n^2 D_1}.$$

Análogamente, $A_{m_1} - A_{m_2} = 0$, por lo que podemos obtener el valor crítico para B , el cual es

$$B_c = 1 + (m_1^2 + m_2^2)D_1 + m_1^2 m_2^2 D_1^2. \quad (4.35)$$

De acuerdo a (2.17) y (2.18), tenemos

$$T_m = \begin{bmatrix} -A_c^2 - m^2 D_2 & B_c - 1 - m^2 D_1 \\ B_c & -B_c \end{bmatrix}; \quad T_m^{-1} = \frac{1}{D_m} \begin{bmatrix} -B_c & -B_c + 1 + m^2 D_1 \\ -B_c & -A_c^2 - m^2 D_2 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

donde $m \in \{m_1, m_2\}$ y $D_m = -B_c(B_c - 1 - A_c^2 - m^2(D_1 + D_2))$.

Haremos una traslación en el espacio de los parámetros, de tal suerte que el valor de los parámetros críticos sea cero. Para esto, definamos λ y σ así: $\lambda = B - B_c$ y $\sigma = A^2 - A_c^2$. En ese caso tenemos

$$J = \begin{bmatrix} B_c - 1 & A_c^2 \\ -B_c & -A_c^2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv A + \lambda B + \sigma C.$$

Como $\beta_i = (B_{m_i})_{11}$ y $B_k = T_k^{-1} B T_k$ para $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$B_m = \frac{1}{D_m} \begin{bmatrix} -B_c & (1 - B_c + m^2 D_1) \\ -B_c & -A_c^2 - m^2 D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_c^2 - m^2 D_2 & B_c - 1 - m^2 D_1 \\ A_c^2 + m^2 D_2 & -B_c + 1 + m^2 D_1 \end{bmatrix}.$$

De lo anterior podemos concluir que

$$\beta_i = \frac{1}{D_{m_i}} (1 + m_i^2 D_1)(A_c^2 + m_i^2 D_2). \quad (4.37)$$

Análogamente, como $\gamma_i = (C_{m_i})_{11}$ y $C_k = T_k^{-1} C T_k$, entonces

$$C_m = \frac{B_c}{D_m} \begin{bmatrix} -B_c & 1 - B_c + m^2 D_1 \\ -B_c & -A_c^2 - m^2 D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo que

$$\gamma_i = \frac{B_c}{D_{m_i}} (1 + m_i^2 D_1). \quad (4.38)$$

Para poder aplicar lo obtenido en la primera parte de este trabajo, vamos a considerar el sistema (4.17) en una vecindad del punto de equilibrio tal que los términos cúbicos sean despreciables. Así, tomemos el sistema de tipo RD

$$\begin{aligned} u_t &= D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B-1)u + A^2 v + \frac{B}{A} u^2 + 2Auv \\ v_t &= D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Bu - A^2 v - \frac{B}{A} u^2 - 2Auv, \end{aligned} \quad (4.39)$$

el cual tiene la estructura necesaria para aplicar los resultados del Capítulo 2.

Comenzaremos por calcular C_i y H_i , cuyas expresiones están dadas por las ecuaciones (2.63). Luego

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1+m_1^2 D_1}{D_{m_1}} \frac{B_c}{A_c} ; & C_2 &= -\frac{1+m_1^2 D_1}{D_{m_1}} 2A_c \\ H_1 &= -\frac{1+m_2^2 D_1}{D_{m_2}} \frac{B_c}{A_c} ; & H_2 &= -\frac{1+m_2^2 D_1}{D_{m_2}} 2A_c. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Con la información anterior, podemos calcular δ_1 , δ_2 y η de (2.62). Esto es

$$\delta_1 = \frac{c_{m_1} m_2 B_c}{\pi m_1 A_c D_{m_1}} [A_c^2 (-A_c^2 + (D_1 - D_2) m_1^2 + 1)],$$

de lo que podemos concluir que, al sustituir (4.34) en la ecuación anterior,

$$\text{sgn}(\delta_1) = \text{sgn}(D_{m_1}) \text{sgn}(-D_1 D_2 m_1^2 m_2^2 + (D_1 - D_2) m_1^2 + 1). \quad (4.41)$$

Análogamente,

$$\eta = \frac{-c_{m_1} B_c (1 + m_2^2 D_1) (A_c^2 + m_1^2 D_2)}{\pi A_c D_{m_2}} [A_c^2 - m_1^2 D_2],$$

y

$$\delta_2 = \frac{-8B_c (A_c^2 + m_2^2 D_2) (1 + m_1^2 D_1) (A_c^2 - m_2^2 D_2)}{3\pi m_2 D_{m_2} A_c},$$

concluyéndose que

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\eta) &= \text{sgn}(D_{m_2}) \text{sgn}(1 - D_1 m_2^2); \\ \text{sgn}(\delta_2) &= \text{sgn}(D_{m_2}) \text{sgn}(1 - D_1 m_1^2). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Finalmente, el cálculo del signo de $\Delta \equiv \mu\delta_1 - \lambda\delta_2$ involucra expresiones engorrosas, por lo que será conveniente analizar en cada caso particular de valores de parámetros. A partir de los signos obtenidos anteriormente, según el Capítulo 2, podemos determinar la estabilidad generada por bifurcaciones secundarias.

Ahora bien, la interpretación de los resultados en la geometría de las soluciones no es inmediata. En efecto, si queremos entender más de las cualidades de la dinámica es necesario desarrollar técnicas nuevas que puedan describir los comportamientos dinámicos de los sistemas de tipo RD. En el siguiente capítulo, a modo de perspectiva, hablaremos un poco sobre las herramientas desarrolladas por A. De Wit para exhibir la existencia de *bifurcaciones de Hopf-Turing* en sistemas muy generales.

4.7. Simulaciones numéricas

En esta sección presentamos algunos ejemplos visuales del comportamiento de las ecuaciones que describen al *oscilador de Bruselas*. Para ello, antes hablaremos del método empleado para posteriormente ilustrar este proyecto de tesis con algunas gráficas de las soluciones numéricas de este modelo, con distintos valores de los parámetros. El código utilizado para el sistema (4.17) es una modificación al que se utiliza en [3], el cual fue desarrollado bajo la asesoría de Jorge Castillo que se logró adaptar a las necesidades del problema.

4.7.1. El método

Las simulaciones numéricas se hicieron usando el método de diferencias finitas en el sistema (4.17). Este método consiste en discretizar el operador laplaciano en una malla regular, del intervalo en consideración que en nuestro caso es el intervalo $(0, \pi)$. Los valores obtenidos de dicha discretización se sustituyen en la ecuación diferencial parcial que se esté resolviendo y, utilizando algún otro método, se resuelven las

ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes. Veámoslo con un poco más de detalle:

Consideremos el sistema de EDPs

$$\begin{aligned} u_t &= D_u u_{xx} + f(u, v) \\ v_t &= D_v v_{xx} + g(u, v), \end{aligned} \quad (4.43)$$

entonces u y v se pueden aproximar por el método de Euler, el cual utiliza el hecho de que

$$f'(t) \approx \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

donde Δt es un salto de tiempo suficientemente pequeño. De lo anterior, se concluye para (4.43) que

$$u(x, t + \Delta t) \approx u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) \equiv u(x, t) + \Delta t (D_u u_{xx} + f(u(x, t), v(x, t))), \quad (4.44)$$

y análogamente

$$v(x, t + \Delta t) \approx v(x, t) + \Delta t (D_v v_{xx} + g(u(x, t), v(x, t))); \quad (4.45)$$

lo cual, con las condiciones iniciales, podemos actualizar la información en cada salto de tiempo y construir la solución de forma aproximada.

Ahora falta discretizar la parte espacial del problema. Partimos el intervalo que se esté trabajando en una colección de puntos equidistantes $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), con distancia $x_{i+1} - x_i = h$, entonces la discretización del laplaciano en una dimensión puede expresarse como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t)}{h^2},$$

que, al sustituir esto en (4.44) y (4.45), tenemos

$$u(x_i, t + \Delta t) \equiv u(x_i, t) + \Delta t \left[D_u \frac{u(x_{i-1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i+1}, t)}{h^2} + f(u(x_i, t), v(x_i, t)) \right] \quad (4.46)$$

Ahora bien, conociendo las condiciones iniciales en los puntos x_i es posible determinar en adelante el valor de la función en dichos puntos. De esta forma se puede aproximar la solución del sistema. A continuación aplicaremos este método en el modelo matemático del *oscilador de Bruselas*.

4.7.2. Los ejemplos

A continuación resolveremos el sistema (4.17) con condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas. Cada paso de tiempo es de 0.01, y el tamaño de la rejilla en donde se realizó la simulación es de 40. Las condiciones iniciales están dados por números aleatorios entre 0 y 0.0025.

Según el Teorema 4.1, la *bifurcación de Hopf-Turing* generalizada se exhibe dependiendo de la forma de B_H y B_T . Podemos elegir valores de D_1 y D_2 para que esto no pase. Comencemos por exhibir que el sistema puede presentar una *bifurcación de Hopf*. El resultado de las simulaciones numéricas se ve en la figura 4.5.

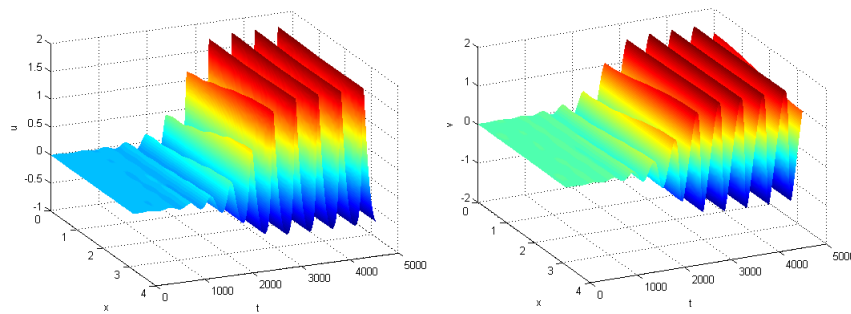


Figura 4.5: Patrones oscilatorios homogéneos. Se tomaron los valores de los parámetros $A = 1.5$, $B = 3.8$, $D_1 = 1.5$ y $D_2 = 4$.

Por otro lado, presentamos los patrones de Turing emergentes de una *inestabilidad de Turing* generalizada. El resultado se muestra en la figura 4.6.

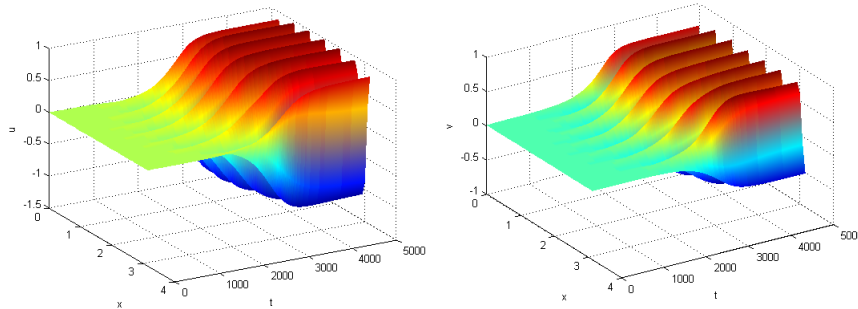


Figura 4.6: Patrones espacio-temporales fijos en el tiempo. Se tomaron los valores de los parámetros $A = 2.5$, $B = 6.8$, $D_1 = 1.5$ y $D_2 = 4$.

Finalmente, con lo anterior, podemos mostrar que el tipo de patrones generados por la *bifurcación de Hopf-Turing* generalizada no puede explicarse sin la presencia de ambas, ésta no surge de la presencia de sólo una de ellas. Eligiendo parámetros para que se cumplan tanto la *bifurcación Hopf* como la de Turing generalizada, podemos exhibir este tipo de comportamiento dinámico como en la figura 4.7.

Ahora bien, los resultados numéricos pueden ser engañosos ya que en ocasiones pueden exhibirse patrones de Turing en el modelo discretizado cuando en el modelo continuo no existen; o bien pueden no aparecer estos patrones en las simulaciones cuando el sistema de EDPs garantiza su existencia.

Este tipo de comportamientos pueden consultarse en [15], donde se presentan estas observaciones. Dejaremos pendiente este análisis para un trabajo posterior.

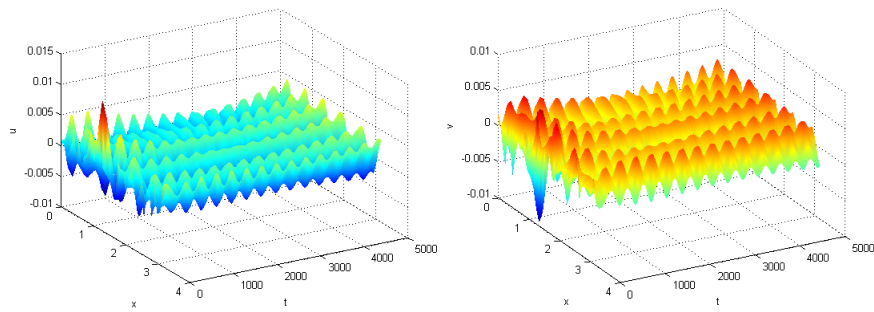


Figura 4.7: Patrones de tipo Hopf-Turing. Se tomaron los valores de los parámetros $A = 1.9$, $B = 4.76$, $D_1 = 1.5$ y $D_2 = 4$.

Capítulo 5

Perspectivas y conclusiones

Coming to the end of the book, but not quite yet. Maybe when we reach the bottom.

Leonard Cohen.

Después de estos cuatro capítulos, hemos llegado al final del cuerpo central de este trabajo. El objetivo de este capítulo final es doble, por un lado presentamos las conclusiones del trabajo desarrollado, y por el otro intentamos ofrecer al lector un panorama reciente de los temas de investigación que se están desarrollando en esta área interdisciplinaria. Esto nos llevará a dar un salto de escala, para dejar de lado las reacciones químicas y asomarnos a la dinámica de poblaciones y a la fisiología. Además, revisaremos algunos modelos matemáticos propuestos y estudiados por investigadores mexicanos que están relacionados con las bifurcaciones que hemos analizado a lo largo de esta tesis.

Por otro lado, vamos a comparar la investigación de las bifurcaciones secundarias que presentamos en el Capítulo 2 con las correspondientes que se han desarrollado en la Universidad Libre de Bruselas (donde trabajó Prigogine) y en la Universidad de la Habana, respectivamente.

5.1. La ecología, un salto de escala

5.1.1. De la cinética química de Lotka y las poblaciones de Volterra

La ecología, como disciplina, no es joven. Quizás el primer modelo matemático propuesto para describir la dinámica de una población, fue el propuesto por Leonardo de Pisa (mejor conocido como Fibonacci), quien vivió de 1170 a 1250, y que está contenido en su libro titulado *Liber abaci*; modelo que dio origen a la famosa *sucesión de Fibonacci*.

Sin embargo, no fue sino hasta 1925 que Alfred James Lotka publica su *Elements of Physical Biology*¹. En esta obra, su autor analiza un modelo en ecuaciones diferenciales para describir una relación de tipo presa-depredador. Lotka nació en Lemberg en 1880 (antes parte del Imperio Austrohúngaro, hoy se encuentra en Ucrania), y estudió física y química en la Universidad de Birmingham y después en Leipzig. Hacia 1934, dejó de lado la academia para trabajar para la *Metropolitan Life*— una compañía de seguros— y posteriormente a su retiro, muriendo dos años después de esto último en 1949. Durante su actividad científica, Lotka publicó artículos de física, química, biología, epidemiología, entre otros; siendo su especialidad los temas referentes a poblaciones.

Por otro lado, en 1927 el matemático italiano Vito Volterra, trabajando de forma independiente, generaliza los resultados de Lotka. Nacido en Ancona en 1860, Volterra se interesó desde pequeño en las matemáticas y en la física. Considerado uno de los precursores en el análisis funcional, en su opinión consideraba necesario incluir los métodos matemáticos en la biología y las ciencias sociales, dedicándose él mismo a la modelación matemática de la dinámica de poblaciones. También podemos destacar su labor dentro del senado italiano, oponiéndose al régimen fascista de Mussolini, lo cual le causó su expulsión como catedrático de la Universidad de

¹Posteriormente llamado *Elements of Mathematical Biology*.

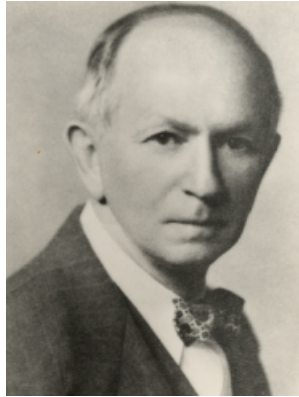


Figura 5.1: Alfred James Lotka. Imagen tomada de <http://www.theenergylibrary.com/node/10410>. Consultada el 1° de octubre de 2013.

Roma y le impidió toda actividad científica en el país. Por esta razón tuvo trabajos temporales en España y en Inglaterra.



Figura 5.2: Vito Volterra. Imagen tomada de http://es.wikipedia.org/wiki/Vito_Volterra. Consultada el 1° de octubre de 2013.

En términos cinéticos, el modelo original que propusieron en principio Lotka y

después Volterra se deduce del sistema de ecuaciones químicas



donde supondremos A constante, y las variables importantes serán la concentración de X y de Y (en términos ecológicos pueden ser la densidad de presas y de depredadores, respectivamente), que denotaremos con las mismas literales. De esta forma, usando la *ley de acción de masas* y demás hipótesis planteadas en el Capítulo 1 de este trabajo, el modelo matemático en EDO's resultante es un caso particular de

$$\begin{aligned} \dot{X} &= aX - bXY \\ \dot{Y} &= cXY - dY, \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde los parámetros, siendo positivos, tienen una importante interpretación, pues a y d dicen qué tan rápido se reproduce la presa y muere el depredador respectivamente en ausencia de la otra especie; mientras que b y c representan la proporción de encuentros perjudiciales para las presas y benéficos para los depredadores.

Vito Volterra publicó un artículo en la revista *Nature* por invitación de D'Arcy Thompson, quien estaba interesado en el análisis que había realizado. Lotka al leerlo, le envió copias de su libro para exigir la prioridad del estudio. No hay mejores palabras que las de Antonio Lazcano para describir el final de este cuento (véase [10]):

Un año es un año, y el apellido de Lotka quedó como el primer nombre en un binomio que dejó unidos para la posteridad a dos hombres que se detestaban.

En efecto, el sistema (5.2) es el modelo más básico a partir del cual se hicieron generalizaciones para describir diferentes tipos de interacciones entre n especies. Genéricamente a tales sistemas se les llama *sistemas de Lotka-Volterra*. En la siguiente subsección presentaremos algunos aspectos dinámicos de una extensión de estos sistemas.

5.1.2. Una bifurcación Turing-Hopf y la presencia de una de Takens-Bogdanov

A continuación analizaremos un modelo matemático para describir una relación de tipo presa-depredador de la autoría de Baurmann, Gross y Feudel (véase [2]). Nuestro objetivo es dar una mirada a posibles análisis de bifurcaciones futuros los cuales presentan mayor grado de degeneración, esto es, que no sólo se presenta una *bifurcación de Hopf* y de Turing, sino que también puede presentar otras como la *bifurcación de Takens-Bogdanov*.

Supondremos que los organismos se mueven de forma aleatoria en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$). La hipótesis anterior nos permite plantear un modelo matemático en EDPs de tipo RD, en donde las funciones desconocidas son $U(\vec{x}, \tau)$ y $V(\vec{x}, \tau)$ las cuales representan la densidad en el punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ al tiempo τ de presas y depredadores, respectivamente.

El modelo matemático lo escribimos como

$$\begin{aligned} U_\tau &= D_u \nabla^2 U + S(U) - F(U, V) \\ U_\tau &= D_v \nabla^2 V - M(V) + \eta F(U, V), \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde las funciones $S(U)$ y $M(V)$ dan la dinámica intrínseca de cada población, $F(U, V)$ da la tasa de depredación, η es la fracción de biomasa de la presa que se vuelve biomasa del depredador y D_u y D_v son los coeficientes de difusión de las presas y los depredadores, respectivamente.

Supóngase que existe una solución positiva, estacionaria y homogénea en el sistema (5.3), con coordenadas (U_s, V_s) . El análisis empieza por normalizar el modelo. Así, introduzcamos los cambios de variable

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, \tau) &= \frac{U(\vec{x}, \tau)}{U_s} ; v(\vec{x}, \tau) = \frac{V(\vec{x}, \tau)}{V_s} ; \\ f(u, v) &= \frac{F(uU_s, vV_s)}{F(U_s, V_s)} ; s(u) = \frac{S(uU_s)}{S(U_s)} ; m(v) = \frac{M(vV_s)}{M(V_s)}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Sustituyendo (5.4) en (5.3), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \tau} &= U_s \frac{\partial u}{\partial \tau} = U_s D_u \nabla^2 u + s(u)S(U_s) - \frac{F(U_s, V_s)}{U_s} f(u, v) \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} &= V_s \frac{\partial v}{\partial \tau} = V_s D_v \nabla^2 v - m(v)M(V_s) + \eta \frac{F(U_s, V_s)}{V_s} f(u, v),\end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} &= D_u \nabla^2 u + \alpha_u (s(u) - f(u, v)) \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= D_v \nabla^2 v + \alpha_v (f(u, v) - m(v)),\end{aligned}\tag{5.5}$$

donde² $\alpha_u = \frac{S(U_s)}{U_s} = \frac{F(U_s, V_s)}{U_s}$ y $\alpha_v = \frac{M(V_s)}{V_s} = \eta \frac{F(U_s, V_s)}{V_s}$.

A continuación normalizamos las variables temporales y espaciales a través de los cambios

$$\vec{z} = \sqrt{\frac{\alpha_v}{D_v}} \vec{x}; \quad t = \alpha_u \tau; \quad p_r = \frac{\alpha_u}{\alpha_v}; \quad p_d = \frac{D_u}{D_v}.\tag{5.6}$$

Utilizando (5.6) en (5.5), llegamos finalmente al sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= p_d \nabla^2 u + p_r (s(u) - f(u, v)) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla^2 v - m(v) + f(u, v).\end{aligned}\tag{5.7}$$

Este último sistema será el que analizaremos con detalle. Vamos a iniciar el análisis lineal del sistema homogéneo asociado, a través de la matriz de Jacobi que la define, evaluada en el punto de equilibrio que, en el sistema (5.7), es el punto (1, 1). Esta matriz es

$$J = \begin{bmatrix} p_r(\phi - \gamma) & -p_r\psi \\ \gamma & \psi - \rho \end{bmatrix}.\tag{5.8}$$

²La segunda igualdad se da debido a que como (U_s, V_s) es solución de equilibrio, entonces este punto satisface $S(U_s) - F(U_s, V_s) = 0$ y $-M(V_s) + \eta F(U_s, V_s) = 0$.

donde

$$\frac{ds(1)}{du} = \phi, \quad \frac{dm(1)}{dv} = \rho, \quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial u} = \gamma \text{ y } \frac{\partial f(1,1)}{\partial v} = \psi.$$

De esta forma, el modelo lineal asociado a (5.7) en (1, 1) es

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= p_d \nabla^2 u + p_r(\phi - \gamma)u - p_r \psi v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla^2 v + \gamma u + (\psi - \rho)v, \end{aligned} \tag{5.9}$$

y como lo hemos hecho en el capítulo anterior, buscaremos las condiciones para que una bifurcación de Turing se presente. Aquí seguiremos la estrategia del Apéndice C, proponiendo que la solución es una serie de exponenciales complejas y nos quedaremos con un término, digamos el término

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{\lambda t + i\vec{k} \cdot \vec{z}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Al sustituir en (5.9) y siendo $\|\vec{k}\|^2 = k^2$, llegamos a que λ , c_1 y c_2 deben ser tales que³

$$\begin{aligned} c_1 (p_r(\phi - \gamma) - p_d k^2 - \lambda) - c_2 p_r \psi &= 0 \\ c_1 \gamma + c_2 (\psi - \rho - k^2 - \lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

o de forma equivalente, que λ sea valor propio de la matriz

$$J_d(k^2) = \begin{bmatrix} p_r(\phi - \gamma) - p_d k^2 & -p_r \psi \\ \gamma & \psi - \rho - k^2 \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

Retomando la ecuación (C.10) del Apéndice C, tenemos que

$$\Delta(k^2) \equiv \det J_d(k^2) = p_d k^4 - [p_d(\psi - \rho) + p_r(\phi - \gamma)]k^2 + p_r(\phi - \gamma)(\psi - \rho);$$

de lo que

$$\Delta'(k^2) = 2p_d k^2 - [p_d(\psi - \rho) + p_r(\phi - \gamma)] = 0$$

³Observemos que $J_d(0) = J$

si, y sólo si,

$$k^2 = \frac{p_d(\psi - \rho) + p_r(\phi - \gamma)}{2p_d} \equiv k_e^2. \quad (5.12)$$

Ahora, $k_e^2 > 0$ (que es equivalente a $\det J > 0$, lo cual es una condición para que se de una *bifurcación de Turing*) si, y sólo si,

$$\frac{p_r}{p_d}(\phi - \gamma) > \rho - \psi. \quad (5.13)$$

En general, suele suponerse que $\rho > \psi$ (véase [2]) lo cual, para que se satisfaga (5.13), se requiere que $\phi > \gamma$, de donde se sigue que $J_{11} > 0$ y $J_{22} < 0$; de ahí que la presa se comporta como un “activador” y el depredador como un “inhibidor”. Otra de las condiciones para que se presente una inestabilidad de Turing es que $\text{tr}J < 0$, o equivalentemente que $p_r(\phi - \gamma) < \rho - \psi$. Utilizando (5.13), concluimos que $p_d < 1$.

Observemos que $J_{12} < 0$ y $J_{21} > 0$, por lo que el sistema es de tipo activador-inhibidor cruzado de cumplirse la condición 5 del teorema de la *bifurcación de Turing* que enunciamos al final del Apéndice C. Esto último ocurre si, y sólo si⁴,

$$\frac{p_r}{p_d} > \frac{(\sqrt{\phi\psi - \phi\rho + \gamma\rho} + \sqrt{\gamma\rho})^2}{(\phi - \gamma)^2}. \quad (5.14)$$

Regresemos por un momento al sistema lineal homogéneo asociado a (5.7), el cual está determinado por la matriz de Jacobi (5.7). En el capítulo anterior observamos la posibilidad de que haya una transición de una *inestabilidad de Turing* a una *bifurcación de Hopf*. Parte del objetivo de esta sección es observar que además pueden presentarse otro tipo de bifurcaciones, complicando y enriqueciendo la dinámica del problema.

⁴Note que las expresiones dentro de las raíces del lado derecho de la ecuación (5.14) siempre tienen sentido ya que $\phi\psi - \phi\rho + \gamma\rho = \frac{\det J}{\rho} > 0$ y $\gamma\psi \geq 0$.

Notemos que el sistema (5.7) también presenta una *bifurcación de Hopf*. En efecto, calculemos la traza trJ e igualémosla a cero. Considerando a γ como el parámetro de bifurcación obtenemos que su valor crítico, γ_H , es

$$\gamma_H = \phi + \frac{\psi - \rho}{p_r}. \quad (5.15)$$

Además, se debe cumplir que $\det J > 0$, por lo que γ debe satisfacer la desigualdad

$$\gamma > \phi - \frac{\phi\psi}{\rho}. \quad (5.16)$$

Veamos que la condición de transversalidad se satisface. En efecto, $\left. \frac{\partial trJ}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_H} = -p_r \neq 0$. En tanto se satisfaga la condición de no degeneración (consúltese el Apéndice B de este trabajo) la *bifurcación de Hopf* se exhibe en el sistema⁵. Ahora veremos que también se presenta otra bifurcación. Ésta es la *bifurcación transcítica*.

La condición para que se presente una *bifurcación transcítica*, es que uno de los valores propios se anule. Para el caso de los sistemas bidimensionales de EDOs esto ocurre cuando $\det J = 0$. De ser así, el parámetro γ debe satisfacer

$$\gamma_{NS} = \phi - \frac{\phi\psi}{\rho}. \quad (5.17)$$

Las bifurcaciones anteriores son de *codimensión* 1; sin embargo, el sistema (5.7) es suficientemente rico como para que también encontremos bifurcaciones de *codimensión* 2. Éstas se dan, pensando que los valores críticos de γ son curvas en el plano de los parámetros $\gamma\phi$, en las intersección de los valores críticos de cada una de las anteriores. Por ejemplo, analicemos primero la *bifurcación de Takens-Bogdanov*, que es cuando los dos valores propios de la matriz de Jacobi del sistema lineal se anulan. En este caso, debe satisfacerse (5.15) y (5.17), dándonos como condición que

$$\phi_{TB} = \frac{\rho(\rho - \psi)}{\psi p_r},$$

⁵La estabilidad del ciclo límite que surge depende de las condiciones que se exhiben en el Apéndice B.

que, al sustituirlo en (5.15), da un valor crítico, γ_{TB} , para γ dado por

$$\gamma_{TB} = \frac{(\rho - \psi)^2}{\psi p_r}. \quad (5.18)$$

Por otro lado, veremos en qué casos se presenta la intersección entre los valores críticos de la bifurcación transcítica y la bifurcación de Turing (que llamaremos simplemente *bifurcación de Turing-transcítica*) en donde $k_e^2 = 0$, recordando (5.12), y se cumple (5.17). Para que $k_e^2 = 0$ se debe cumplir que

$$\gamma = \phi + \frac{p_d(\psi - \rho)}{p_r},$$

que en conjunto con (5.17) obtenemos un valor crítico para ϕ dado por

$$\phi_{Ttc} = \frac{\rho p_d(\rho - \psi)}{\psi p_r}.$$

Si sustituimos lo anterior en (5.17), obtenemos

$$\gamma_{Ttc} = \frac{p_d}{p_r \psi} (\rho - \psi)^2. \quad (5.19)$$

Finalmente, veremos en dónde se encuentra la *bifurcación de Hopf-Turing*⁶. Un valor crítico de la *bifurcación de Turing* se presenta cuando en (5.14) se da la igualdad. Como lo hemos venido realizando al despejar la condición para el parámetro γ , obtenemos que el valor crítico para éste es

$$\gamma_T = \frac{p_d}{p_r} \left(\sqrt{\psi} - \sqrt{\rho + \frac{p_r}{p_d} \phi} \right)^2. \quad (5.20)$$

⁶Es importante notar que, a diferencia del Capítulo 4, aquí no estamos pensando en una *inestabilidad de Turing* generalizada, en cuyo caso estaremos pensando en la *bifurcación de Hopf-Turing* como una ruta de una en la otra al variar trJ .

Aunada a esta condición, tomando el valor crítico de la bifurcación de Hopf dada por (5.15) podemos encontrar el valor de ϕ para el cual coinciden. Éste es

$$\phi_{TH} = \frac{\rho - \psi}{p_r \psi} \left(\frac{(\rho - \psi)(p_d - 1)^2}{4p_d} + \rho \right),$$

que, al sustituirlo en (5.15), da

$$\gamma_{TH} = \frac{(\rho - \psi)^2}{p_r \psi} \left(\frac{(p_d - 1)^2}{4p_d} + 1 \right). \quad (5.21)$$

En la figura (5.3) el lector puede ver un ejemplo de diagrama de parámetros que muestra dónde se exhiben las bifurcaciones que hemos expuesto en esta sección.

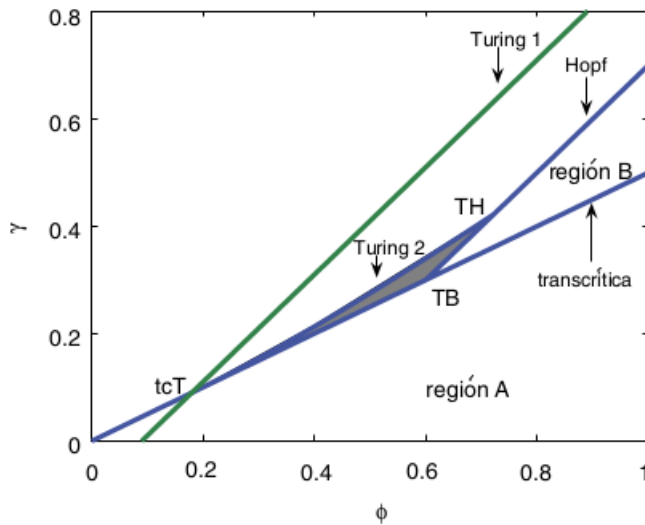


Figura 5.3: Diagrama de parámetros ϕ - γ . Tomado de [2] para los parámetros $p_r = \frac{10}{3}$, $\psi = 1$, $\rho = 2$ y $p_d = 0.3$.

5.1.3. Discusión y problemas

Que hay un nexo entre los sistemas de reacciones químicas, y los sistemas de interacción de especies como lo puede ser la dinámica presa-depredador, es claro. En esencia las hipótesis en estos sistemas son similares: no aparece ni desaparece materia de la nada. Una bondad de las matemáticas es ésta, la de poder entender una gran cantidad de sistemas bajo un mismo lenguaje y hasta bajo un mismo marco teórico, tratando de conseguir lo que en la Biología ha tenido deficiencias: el generalizar con propiedad.

En la subsección anterior hicimos el análisis de un sistema de RD con dinámica del tipo presa-depredador. Más aún, la interacción entre estas poblaciones en principio fue muy general, garantizando que la emergencia de patrones puede exhibirse en sistemas ecológicos de diversa índole. Baurmann, et al. realizaron una serie de simulaciones numéricas en el modelo de Rosenzweig-McArthur para observar este tipo de comportamientos.

Una de las cosas interesantes que arroja su análisis es la presencia de la *bifurcación de Takens-Bogdanov* en el modelo. Las bifurcaciones de codimensiones mayores enriquecen la dinámica, ofreciéndonos un mayor espectro de comportamientos cualitativos. Por ejemplo, al exhibirse una *bifurcación de Takens-Bogdanov* se garantiza mayor riqueza dinámica en el sistema debido a esta bifurcación homoclínica⁷. Sin embargo, ¿cómo son cualitativamente estos comportamientos? Para poder tratar de predecir qué patrones emergen del sistema es necesario desarrollar nuevas técnicas que no sólo nos dicte la existencia de bifurcaciones, sino que nos diga de qué forma lo hacen. A continuación presentaremos unas ideas que abordan esta problemática en el caso de la *bifurcación de Hopf-Turing*.

⁷La *bifurcación de Takens-Bogdanov* se da, bajo ciertas hipótesis extras, cuando la matriz de Jacobi tiene dos valores propios nulos, pero no es la matriz nula. En este caso el retrato fase puede exhibir una trayectoria homoclínica que, variando los parámetros, puede romperse generando un ciclo límite. Para más detalles véase [12]

5.2. Las ecuaciones de amplitud

Como lo mencionan De Wit *et al.* en [32], los sistemas químicos han sido un buen punto de partida para entender el rompimiento de la estabilidad (es decir, estudiar bifurcaciones) ya que presentan inestabilidades espaciales y temporales, así como combinación de ellas. El trabajo que el lector tiene en sus manos en gran parte se ha enfocado al estudio de las bifurcaciones que se generan por una doble degeneración, ya sea del tipo de la estudiada en los Capítulos 2 y 3, o aquellos formados por una *bifurcación de Hopf-Turing*.

En la presente sección haremos una breve discusión de lo que este “nuevo Grupo de Bruselas” han trabajado a partir de las ecuaciones de amplitud. Haremos una comparación con la teoría desarrollada en los capítulos anteriores de este trabajo, para después presentar lo que podría ser una posibilidad de continuación, una perspectiva para investigaciones posteriores.

5.2.1. Selección de patrones y análisis débil no lineal

La emergencia de patrones en sistemas de reacción-difusión puede generar distintos tipos de geometrías. En ese sentido, la teoría de selección de patrones busca determinar bajo qué condiciones se observarán ciertos patrones de entre todos los posibles. Entre las características que interesa determinar están su orientación y su rapidez, en el caso de que éstos se muevan, así como su estabilidad.

Matemáticamente reducimos el problema a determinar la existencia y estabilidad de estos comportamientos, que en el sistema de reacción-difusión corresponden a soluciones específicas. En principio, el sistema se rige de forma equivalente al lineal asociado, por lo que si tomamos una condición inicial cercana al equilibrio homogéneo y estacionario será la *bifurcación de Turing* la que determina el comportamiento para tiempos pequeños. A medida que el tiempo avanza, los términos no lineales comienzan a ser parte importante de la dinámica, por lo que se debe estudiar el comportamiento

asintótico en tiempo. Esto nos motiva a buscar un análisis global, para complementar el local.

Consideramos nuevamente el sistema

$$\vec{U}_t = \tilde{D}\nabla^2\vec{U} + \vec{F}(\vec{U}; \gamma), \quad (5.22)$$

definido en un dominio espacial rectangular, donde \vec{X} es el vector que tiene por entradas las concentraciones $u_i(\vec{x}, t)$ en el punto \vec{x} y al tiempo t , $\tilde{D} = \text{diag}(D_1, D_1, \dots, D_n)$ es la matriz de coeficientes de difusión de las sustancias con concentración u_i , $\nabla^2\vec{U} = (\nabla^2 u_1, \dots, \nabla^2 u_n)$ y γ es el parámetro de bifurcación. Si tomamos N modos de (5.22), entonces \vec{U} se aproxima como

$$\vec{U}(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^N \left[T_j(\tau) e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{x}} + T_j^*(\tau) e^{-i\vec{k}_j \cdot \vec{x}} \right] \vec{w} + O(\dots), \quad (5.23)$$

donde, sin pérdida de generalidad, $\vec{U} = \vec{0}$ es el equilibrio estacionario y homogéneo, T_j es la amplitud del modo j ($*$ denota al conjugado complejo), \vec{w} el vector propio de la matriz de Jacobi en el punto de bifurcación y $\tau = \mu t$. Si γ_c es el punto de bifurcación se tiene $\mu = \gamma - \gamma_c$.

En la vecindad del punto de bifurcación, trataremos de determinar \vec{U} como un desarrollo asintótico, es decir, en términos de potencias de un parámetro pequeño ϵ y funciones $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots$, como

$$\vec{U} = \epsilon \vec{U}_1 + \epsilon^2 \vec{U}_2 + \epsilon^3 \vec{U}_3 + \dots, \quad (5.24)$$

donde \vec{U}_i son funciones desconocidas y el parámetro ϵ está relacionado a μ al expresarse como serie de potencias de la siguiente forma

$$\mu \equiv \gamma - \gamma_c = \epsilon \gamma_1 + \epsilon^2 \gamma_2 + \dots \quad (5.25)$$

para algunos valores $\gamma_1, \gamma_2, \dots$

Dando un desarrollo en serie de potencias de ϵ del operador $\frac{\partial}{\partial t}$ y de la matriz de Jacobi del sistema (5.22), se puede llegar a las ecuaciones de amplitud (véase [30])

$$\frac{dT_j}{dt} = \mu T_j + G_j(T_1, T_2, \dots, T_N), \quad (5.26)$$

donde G_j son polinomios no lineales de las variables T_1, T_2, \dots, T_N .

Enseguida consideramos el caso en dos dimensiones.

5.2.2. Patrones bidimensionales

Haremos un breve resumen de la selección de patrones que podemos ver en sistemas de reacción-difusión. Los patrones que tienen sólo una dirección espacial y que por lo tanto corresponden a franjas, son aquellos resultantes de tomar $N = 1$. De esta forma (5.23) se reduce a

$$\vec{U} = \left[T(\tau)e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + T^*(\tau)e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \right] \vec{w}; \quad \|\vec{k}_1\| = k_c, \quad (5.27)$$

con k_c el número de onda crítico para el cual se desestabiliza la solución estacionaria y homogénea. De ésta podemos obtener la ecuación diferencial para $T \in \mathbb{C}$ a partir de (5.22), la cual está dada por

$$\dot{T} = \mu T - g |T|^2 T,$$

Si aquí suponemos que $T(\tau) = R(\tau)e^{i\theta(\tau)}$, obtenemos las ecuaciones diferenciales para R y θ

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \mu R - gR^3 \\ \dot{\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde $g \in \mathbb{R}$. Notemos que los puntos de equilibrio corresponden al equilibrio estacionario y homogéneo cuando $R = 0$, y por el otro a $R = \sqrt{\frac{\mu}{g}}$ le corresponde el patrón de franjas.

Consideremos ahora arreglos que generen ángulos de $\frac{\pi}{N}$ radianes entre sus vectores de onda. Para $N = 2$ corresponde a patrones con geometría de cuadrados, y que al tomarlo en (5.23) tenemos

$$\vec{U} = \left[T_1(\tau)e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + T_2(\tau)e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} + c.c. \right] \vec{w}; \quad \left| \vec{k}_i \right| = k_c (i = 1, 2), \quad (5.29)$$

y estamos denotando por *c.c.* a los complejos conjugados de los sumandos asociados a T_1 y T_2 .

En este caso se llega a las ecuaciones para la amplitud j

$$\dot{T}_j = \mu T_j - g |T_j|^2 T_j - h |T_l|^2 T_j,$$

con $j, l = 1, 2$ pero $j \neq l$. Tomando la expresión polar $T_j(\tau) = R_j(\tau)e^{i\theta(\tau)}$ de cada T_j obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{R}_j &= \mu R_j - g R_j^3 - h R_j^2 R_l \\ \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta}_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

De este sistema buscaremos los puntos de equilibrio en las variables R_1 y R_2 , que corresponde a $N = 2$. Notemos que nuevamente $R_1 = R_2 = 0$ es el punto de equilibrio correspondiente al estado homogéneo y estacionario. Por otra parte, si $R_1 = 0$ y $R_2 = \sqrt{\frac{\mu}{g}}$ tendremos franjas perpendiculares al vector de onda \vec{k}_1 ; de forma análoga, si $R_1 = \sqrt{\frac{\mu}{g}}$ y $R_2 = 0$, entonces las rayas serán perpendiculares a \vec{k}_2 . Finalmente, los cuadrados emergen si $g \neq h$ para

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{\mu}{g+h}}.$$

De forma similar, para hallar patrones en forma de hexágonos, basta tomar $N = 3$ y proceder de manera similar. A través de la estabilidad local o global, uno puede detectar cuándo son compatibles la interacción entre los puntos de equilibrio (o en otros términos, la intermitencia entre el tipo de patrones).

5.2.3. Ecuaciones de amplitud para la bifurcación de Hopf-Turing

Para hallar las ecuaciones de amplitud correspondientes a los patrones de tipo Hopf y Turing en un dominio unidimensional y analizar su interacción propondremos que

$$\vec{U} = T(\tau, \chi)e^{ik_c x} \vec{w}_T + H(\tau, \chi)e^{i\omega_c t} \vec{w}_H + c.c. \quad (5.31)$$

donde $\tau = \mu t$, $\chi = \epsilon x$, \vec{w}_T y \vec{w}_H son los vectores críticos de Turing y Hopf respectivamente del sistema lineal asociado a (5.22), ω_c es la frecuencia crítica del ciclo límite y \vec{k}_c es el vector de onda crítico de Turing. Estamos entendiendo que los modos (en variable compleja) asociados a los patrones de Turing y Hopf están dados por el sistema de EDO's

$$\begin{aligned} T_\tau &= \mu_T T - g |T|^2 T - \lambda |H|^2 T + D^T T_{xx} \\ H_\tau &= \mu_H H - \beta |H|^2 H - \delta |T|^2 H + D^H H_{xx}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde μ_T y μ_H son la distancia al punto de bifurcación de Turing y Hopf, respectivamente. Además $g, \lambda, D^T \in \mathbb{R}$ y $\beta, \delta, D^H \in \mathbb{C}$.

El análisis de la estabilidad de los equilibrios del sistema anterior es lo que determinará la interacción entre los patrones de Hopf-Turing en el sistema (5.22)

5.2.4. Discusión

En esta sección hemos observado las bondades de las ecuaciones de amplitud de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo reacción-difusión, dentro de las que, de las más importantes y que para fines prácticos nos interesa, es la de poder darnos información geométrica de la dinámica.

Cuando el sistema se encuentra en vecindades de los parámetros cercanos el punto de bifurcación de Hopf-Turing, se garantiza que el sistema puede exhibir caos

espaciotemporal. Esto está documentado, por ejemplo, en [31]. La pregunta que nos surge es, ¿pueden las ecuaciones de amplitud prever este comportamiento? ¿Qué otro tipo de comportamientos pueden describir fuera de los anteriormente mencionados?

En consonancia con la sección anterior, podríamos ir pensando de qué forma las ecuaciones de amplitud pueden ajustarse para cuando el sistema exhibe bifurcaciones de codimensión mayor, como cuando se exhiben *bifurcaciones de Takens-Bogdanov* como la revisada en la sección anterior.

Por otra parte, de la misma forma que en sistemas de tipo convectivo podemos ver la emergencia de celdas o, como ya vimos, la formación de patrones poligonales en sistemas de reacción-difusión, la pregunta que nos surge es: ¿puede extenderse el método a sistemas más generales como, por ejemplo, los que involucran un término quimiotáctico? De ser esto posible, mucho nos gustaría poder decir bajo qué condiciones se presentan fenómenos de ramificación en sistemas que modelan el crecimiento de tumores cancerígenos, que son de los casos más difíciles de erradicar

5.3. Teoría de Floquet y la bifurcación de Hopf-Turing

En esta sección usaremos otra técnica para determinar la emergencia de patrones espaciotemporales debido a una *bifurcación de Hopf-Turing*. Esta técnica ha sido desarrollada en parte por el matemático cubano Mariano R. Ricard, basado en principio en la teoría de Floquet. El resumen que se hará en esta parte está basado en [18] debida a Mariano R. Ricard, quien labora en la Universidad de la Habana y S. Mischler, de la Université Paris IX-Dauphine.

5.3.1. La bifurcación de Hopf bajo la lupa de las perturbaciones

Como ya lo hemos hecho antes, procederemos con un sistema de tipo RD con dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas

$$\begin{aligned} u_t &= D_u \nabla^2 u + f(u, v; a) \\ v_t &= D_v \nabla^2 v + g(u, v; a), \end{aligned} \quad (5.33)$$

que en su forma vectorial se escribe como

$$\vec{X}_t = \tilde{D} \nabla^2 \vec{X} + \vec{F}(\vec{X}; a), \quad (5.34)$$

donde a es el parámetro de bifurcación.

Consideremos el sistema homogéneo asociado de (5.34)

$$\dot{\vec{X}} = \vec{F}(\vec{X}; a), \quad (5.35)$$

y supongamos que el sistema anterior tiene un ciclo límite que surge de una *bifurcación de Hopf*, para un valor crítico a_0 . Para nuestros fines, supondremos que este ciclo límite es estable, es decir, supondremos que éste proviene de una *bifurcación de Hopf* supercrítica. Más aún, podemos suponer que el punto de equilibrio \vec{X}_0 del que hay un cambio de estabilidad es un foco inestable para $a < a_0$; mientras que es un foco estable si $a > a_0$.

Si denotamos por $\vec{\Theta}(t)$ al ciclo límite, como solución de la parte reactiva del sistema (5.34), entonces hacemos una perturbación alrededor de esta solución como $\vec{X} = \vec{\Theta}(t) + \vec{Z}(t)$. Al linealizar alrededor de $\vec{\Theta}(t)$, obtenemos el sistema lineal no autónomo

$$\dot{\vec{Z}} = J_{\vec{\Theta}}(t) \vec{Z}, \quad (5.36)$$

donde $J_{\vec{\Theta}}$ es la matriz de Jacobi de (5.34) evaluada en $\vec{\Theta}(t)$. Cabe notar en este punto que $J_{\vec{\Theta}}$ es periódica, por lo cual se antoja que podamos usar la Teoría de Floquet, a fin de estudiar la estabilidad del ciclo.

De hecho, sabemos que $\dot{\vec{\Theta}}(t)$ es una solución de (5.36) ya que como $\dot{\vec{\Theta}} = \vec{F}(\vec{\Theta}; a)$, por ser solución de (5.35), entonces

$$\frac{d}{d\tau} \dot{\vec{\Theta}}(t + \tau) = \frac{d}{d\tau} \vec{F}(\vec{\Theta}(t + \tau); a).$$

Al evaluar en $\tau = 0$, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \dot{\vec{\Theta}} = J_{\vec{\Theta}}(t) \dot{\vec{\Theta}};$$

por lo que uno de los exponentes de Floquet, ρ_1 , es cero; o equivalentemente que uno de los multiplicadores de Floquet es 1 (véase [12]). Si el período fundamental de $\vec{\Theta}(t)$ es T , la expresión del exponente de Floquet, no nulo está dado por

$$\rho_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial f(\vec{\Theta}(s))}{\partial u} + \frac{\partial g(\vec{\Theta}(s))}{\partial v} \right) ds, \quad (5.37)$$

que no es otra cosa que el promedio de $\text{tr} J_{\vec{\Theta}(t)}$ calculado en un período. Se concluye que si $\rho_2 < 0$, entonces si $\vec{\varphi}(t)$ es una solución de (5.35) con condición inicial suficientemente cercana a $\vec{\Theta}(t)$, entonces

$$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\Theta}(t + \phi_0)\| \leq C e^{\rho_2 t},$$

que quiere decir que $\vec{\Theta}(t)$ es *orbitalmente asintóticamente estable*.

Reescribamos ahora (5.35) como

$$\dot{\vec{X}} = J_a \vec{X} + \vec{\Psi}(\vec{X}), \quad (5.38)$$

donde J_a es la matriz de Jacobi evaluada en el punto de equilibrio (y que esta depende del parámetro a), y $\vec{\Psi}$ tiene todos los términos no lineales de \vec{F} . Haciendo un cambio de variable no lineal como $\vec{Y} = \vec{\mathcal{H}}(\vec{X})$ y si además

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix},$$

entonces podemos llegar a una ecuación diferencial no lineal de segundo orden en la variable z . Eso se resume en el siguiente resultado:

Proposición 5.1 (Ricard y Mischler, [18]) *Supongamos que en el punto de equilibrio de (5.38) se cumple que $(\text{tr}^2 J_a - 4 \det J_a) < 0$, entonces existe un cambio de variables invertible \mathcal{H} como se propuso anteriormente, tal que la variable $z(t)$ satisface la EDO*

$$\ddot{z} - \text{tr} J_a \dot{z} + \det J_a z = G(z, \dot{z}), \quad (5.39)$$

en donde G no tiene términos lineales.

Ahora proponemos el cambio de variable $z(t) = \epsilon \zeta(t)$, que al sustituirlo en (5.39) obtenemos

$$\ddot{\zeta} - \text{tr} J_a \dot{\zeta} + \det J_a \zeta = \epsilon G(\zeta, \dot{\zeta}; \epsilon).$$

Para dar una expresión asintótica de la solución periódica emergente de la Bifurcación de Hopf, usaremos el método de promedios de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski (el método KBM) al proponer las variables, como en ([21]),

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= r(t) \cos(t + \theta(t)) \\ \dot{\zeta}(t) &= -r(t) \sin(t + \theta(t)), \end{aligned} \quad (5.40)$$

de donde las ecuaciones promediadas son

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\phi (-\text{tr} J_a r \sin\phi + \epsilon G(r \cos\phi, -r \sin\phi; \epsilon)) d\phi \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \cos\phi (-\text{tr} J_a r \sin\phi + \epsilon G(r \cos\phi, -r \sin\phi; \epsilon)) d\phi; \end{aligned}$$

de las que concluimos que

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{r}{2} (\text{tr} J_a - p(r; \epsilon)) \\ \dot{\theta} &= q(r; \epsilon) \end{aligned} \quad (5.41)$$

con

$$\begin{aligned} p(r; \epsilon) &= \frac{\epsilon}{\pi r} \int_0^{2\pi} \sin\phi G(r \cos\phi, -r \sin\phi; \epsilon) d\phi, \\ q(r; \epsilon) &= \frac{\epsilon}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \cos\phi G(r \cos\phi, -r \sin\phi; \epsilon) d\phi. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Suponiendo que hay una solución a la ecuación

$$p(r; \epsilon) - \text{tr} J_a = 0,$$

entonces esta raíz tiene la forma

$$r = r_0 \left(\frac{|\text{tr} J_a|}{\epsilon^{2N}} \right)^{\frac{1}{2N}} + O(\epsilon^2),$$

donde N es tal que

$$p(r; \epsilon) = \omega \epsilon^{2N} r_0^{-2N} r^{2N} + O(\epsilon^{2N+2} r^{2N+2})$$

es la expresión en serie de Taylor de la función $p(r; \epsilon)$ ⁸

5.3.2. Clasificación de la bifurcación de Hopf-Turing y su teorema

Ahora combinaremos lo anteriormente expuesto con la *inestabilidad de Turing* a través del sistema (5.33) y (5.34). Supongamos entonces que la solución $\vec{\Theta}(t) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ es solución periódica de (5.33), la cual emerge de una *bifurcación de Hopf*. Haremos una perturbación de la solución anterior al proponer

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \bar{u}(t) + U(x, t) \\ v(t, x) &= \bar{v}(t) + V(x, t); \end{aligned} \tag{5.43}$$

que al sustituir en (5.33) y linealizando, obtenemos el sistema

$$\vec{Z}_t = D\nabla^2 \vec{Z} + J_{\vec{\Theta}} \vec{Z}; \quad \vec{Z} = (U, V). \tag{5.44}$$

Como ya lo mencionamos, no es el fin de este capítulo exponer los detalles de todo lo que aquí se presenta. Después de proponer este tipo de solución a (5.33), podemos ir directamente a los resultados obtenidos.

Tomemos como base lo siguiente: sea σ un valor propio, es decir, una solución de la ecuación $\det(J_a - \lambda_k D - \sigma I) = 0$. Supongamos que el sistema homogéneo de

⁸Los detalles que conducen a esta expresión para $p(r; \epsilon)$ pueden verse en [18].

(5.33) exhibe una *bifurcación de Hopf* para $0 < \text{tr} J_a \ll 1$. Luego, inestabilidades de Hopf-Turing emergen del ciclo límite si $\text{Re}(\sigma) > 0$. Hecho esto, introducimos la siguiente definición:

Definición 5.1 *Decimos que la bifurcación de Hopf-Turing es débil si existe al menos una raíz real $\sigma > 0$. Si las raíces son complejos conjugados, $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$, con $\sigma_r > 0$, entonces lo llamamos una bifurcación de Hopf-Turing fuerte.*

En términos de la Definición 5.1, enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 5.1 *Sea λ_k un valor propio espacial positivo. Supongamos que el sistema homogéneo de (5.33) exhibe una bifurcación de Hopf. Si $\text{tr}(J_a - \lambda_k D) \leq 0$ y $\det(J_a - \lambda_k D) < 0$, entonces la bifurcación de Hopf-Turing emergente es débil.*

Por otro lado, si $\text{tr}(J_a - \lambda_k D) > 0$, esta bifurcación aparece, y es débil si $\text{tr}^2(J_a - \lambda_k D) - 4 \det(J_a - \lambda_k D) \geq 0$, mientras que son fuertes si $\text{tr}^2(J_a - \lambda_k D) - 4 \det(J_a - \lambda_k D) < 0$.

Finalmente si los coeficientes de difusión son iguales, o suficientemente cercanos, sólo bifurcaciones de Hopf-Turing fuertes pueden aparecer.

La demostración de este teorema no se incluye en este trabajo ya que haría falta un trabajo más extenso en este tema, por lo cual se invita al lector interesado a que revise, como lo hemos estado mencionando, el artículo de M. Ricard y S. Mischler ([18]). En este mismo texto, además de los aspectos teóricos, se aplican los resultados generales a un modelo particular: el *modelo de Schnackenberg*.

5.3.3. Discusión

La caracterización de *bifurcaciones de Hopf-Turing* en débiles o fuertes lo que nos dicta es, por un lado para las débiles, que ligeras oscilaciones interactúan con

patrones no homogéneos dominantes. Por otro lado, para las bifurcaciones fuertes se exhiben principalmente patrones intermitentes.

La desventaja en este tipo de análisis es que nos es muy complicado detectar qué geometrías tienen los patrones emergentes, aunque podemos decir a *grosso modo* ciertas características de la dinámica, justamente por su característica de ser débil o fuerte.

Sin embargo, el Teorema 5.1 nos da condiciones relativamente sencillas para conocer estos detalles del sistema que estamos analizando. Aunque no es muy exhaustivo, al menos da condiciones de existencia de las distintas formas de la *bifurcación de Hopf-Turing*.

Para determinar algunos detalles en la geometría de los patrones, convendría retomar las ecuaciones de amplitud del sistema. Sin embargo, su análisis conduce a una mayor complejidad pues el número de variables del sistema de EDO's resultante aumenta.

5.4. Discusión y conclusiones generales

5.4.1. De las aplicaciones a las ciencias de la vida

A lo largo de este trabajo me han preguntado en muchas ocasiones: ¿Para qué sirve esta investigación? Considero que es una pregunta válida, tanto lo es que generaciones van y generaciones vienen y en la educación básica siguen preguntando lo mismo a propósito de cosas menos técnicas, que para los que estudiamos carreras de ciencias exactas nos pueden resultar muy naturales⁹.

⁹Se dice que hay una anécdota en donde uno de los alumnos de Euclides le pregunta que de qué le serviría estudiar la geometría, a lo que éste le pide a su esclavo “Dale tres peniques, pues debe sacar provecho de lo que aprende”. Independientemente de si fue real o es ficción, lo que es un

Vale la pena decir que la gran mayoría de los modelos de tipo reacción-difusión están fundamentados en principios bioquímicos. El primer ejemplo que damos surge del problema de explicar la formación de patrones de colores en los seres vivos. Los mecanismos de Turing que hemos planteado a lo largo de este trabajo (por ejemplo, véase el Apéndice C) dan una buena explicación a la emergencia de estos patrones.

Debido a que el modelo sólo nos permite cambiar la parte cinética, las ecuaciones propuestas por Barrio, *et al*, conocidas como el *modelo BVAM* (véase [1]), han resultado ser precisas en la coloración de la mantarraya *Potomotrygon motoro* incluso para distintas edades y sexo del organismo.

El modelo propuesto es resultado de tomar términos de la parte reactiva hasta términos cúbicos, y que al adimensionalizar, queda en la forma

$$\begin{aligned} u_t &= D\nabla^2 u + \eta(u + av - Cuv - uv^2) \\ v_t &= \nabla^2 v + \eta(bv + hu + Cuv + uv^2). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Los siguientes ejemplos provienen de procesos fisiológicos. El primero de ellos es el *modelo de Gray-Scott*, que es una simplificación del proceso de la glucólisis. Este par de EDP's de tipo reacción-difusión tienen la propiedad también de presentar emergencia de patrones muy vistosos, además de tener una cinética muy sencilla. En su forma original, el sistema de Gray-Scott es

$$\begin{aligned} u_t &= D_u \nabla^2 u + F(1 - u) - uv^2 \\ v_t &= D_v \nabla^2 v - (F + k)v + uv^2, \end{aligned} \quad (5.46)$$

el cual tiene gran parecido con el *oscilador de Bruselas* (véase el Capítulo 4). La gama de patrones emergentes del sistema (5.46) es amplia, además de exhibir entre otras cosas, una *bifurcación de Hopf-Turing* en una región muy particular de los parámetros (véase [11]).

hecho es que demuestra que desde hace siglos la gente se sigue preguntando por la practicidad de las matemáticas, y a pesar de todo no podemos responderla aún. Considero que esto tiene trascendencia científica, económica, social y hasta política.

El último ejemplo que mencionamos en esta parte es uno muy interesante proveniente de las neurociencias. Se ha observado la emergencia de *bifurcaciones de Hopf-Turing* en un sistema propuesto para analizar la interacción espacio-temporal del voltaje somático excitatorio e inhibitorio. Las ecuaciones están dadas por

$$\begin{aligned}\tau_e \frac{\partial V_e}{\partial t} &= D_1 \nabla^2 V_e + V_e^{rep} - V_e + [\rho_e \psi_{ee} \Phi_{ee} + \rho_i \psi_{ie} \Phi_{ie}] \\ \tau_i \frac{\partial V_i}{\partial t} &= D_2 \nabla^2 V_i + V_i^{rep} - V_i + [\rho_e \psi_{ei} \Phi_{ei} + \rho_i \psi_{ii} \Phi_{ii}],\end{aligned}\tag{5.47}$$

donde $\tau_{e,i}$ son constantes temporales, $V_{e,i}^{rep}$ son los voltajes de reposo, y las funciones $\rho_a \psi_{ab} I_{ab}$ (con $a, b \in \{e, i\}$) están dadas por perturbaciones voltaicas, cuya deducción se puede consultar en [22].

La relevancia de este modelo recae en el hecho de que hay evidencia clínica que sugiere que las interacciones dadas por (5.47) están relacionadas con enfermedades cerebrales como la *esquizofrenia* y el *mal de Parkinson*. La dopamina es un neurotransmisor involucrado en ambas disfunciones, por un lado se presenta en exceso en pacientes con *esquizofrenia*, y por el otro es deficiente en pacientes con *mal de Parkinson*. Por un lado, se sugiere que la presencia de patrones de Turing generen los movimientos involuntarios asociados al *mal de Parkinson*; mientras que su ausencia puede romper la correlación de largo alcance en la actividad neuronal de la *esquizofrenia*.

Las dos últimas aplicaciones a fenómenos fisiológicos son clínicamente importantes, ya que entender el proceso de la glucólisis o de la actividad eléctrica en el cerebro de forma matemática nos puede indicar si es posible revertir alguna enfermedad. ¿Podemos entender una cuestión de la *diabetes* a través de los modelos actuales de glucólisis? ¿Se puede introducir un parámetro controlable y clínicamente viable para disminuir las cantidades de azúcar en la sangre? Por otro lado, ¿se puede introducir un medicamento o una corriente externa que revierta la formación de patrones dañinos en la actividad neuronal?

5.4.2. De la generalización matemática

Inicialmente, el objetivo del trabajo presente era entender la forma normal asociada a la *bifurcación de Hopf-Turing* que propusieron Rovinski y Menzinger en [19]. Sin embargo, entender su artículo me llevó a investigar un caso muy particular, a saber las formas normales descritas por Keener en [8].

Las conclusiones de A. de Wit *et al.* de [32] me hicieron pensar que el método de Rovinski no podía estar del todo bien, y menos cuando el procedimiento de análisis no estaba claramente explicado.

A pesar de todo, los resultados aquí expuestos son una forma interesante de aproximarse a las formulaciones de las ecuaciones de amplitud, pues a partir de un caso particular podemos entender mucho de la filosofía que hay detrás de la búsqueda de bifurcaciones en EDP's de reacción-difusión. Más aún, hicimos todo lo posible para que este trabajo fuera autocontenido y se pudiera entender sin la necesidad de buscar demasiados resultados en otros textos. De hecho, podría ser posible que la relación entre la *bifurcación de Hopf-Turing* y las bifurcaciones secundarias se encuentren en los casos restantes que Keener plantea en [8] y que, en apariencia, Rovinsky retoma en [19].

Las demostraciones contenidas en el Capítulo 3 son originales, pues el análisis global de las formas normales (2.50) y (2.64) no las encontramos en otras referencias. La ventaja es que todas las demostraciones de dicho capítulo son principalmente de carácter geométrico, utilizando el Teorema de existencia y unicidad, así como el Teorema de Poincaré-Bendixson.

Por todo lo que se ha expuesto en este capítulo, parece evidente que la línea de trabajo para el análisis de bifurcaciones más complicadas en EDP's parabólicas es a través del método de perturbaciones y analizando las ecuaciones de amplitud. En particular, podemos utilizar las ecuaciones (5.32) para el análisis de la *bifurcación de Hopf-Turing*, e incluso podríamos intentar generalizarlas, como en dimensiones espaciales mayores o para la interacción con otras bifurcaciones como la de Takens-

Bogdanov.

Un problema relativamente reciente es el de la emergencia de patrones en sistemas de tipo reacción-difusión, pero en este caso se considera que la dinámica se da en dominios que crecen. Este tipo de modelos son más precisos para explicar la formación de patrones de color en los seres vivos, considerando que la reacción y la difusión de los morfógenos se lleva a cabo en una variedad de dimensión dos contenida en \mathbb{R}^3 que crece debido a los procesos metabólicos del organismo.

Nos surge una pregunta: ¿podemos describir unas ecuaciones de amplitud como las de (5.32) que describan la geometría de los patrones en estos dominios que crecen? De ser así, ¿podríamos entender procesos biológicos como el de la filotaxia? O bien, ¿podríamos explicar alguna formación de patrones en sistemas ecológicos donde el dominio decrece? En ese sentido estaríamos pensando ecosistemas que se vean comprometidos por diversos factores como la invasión humana o la desertificación.

Resolver los problemas anteriores no parecen tener una forma fácil de resolverse. Incluso determinar condiciones para la emergencia de inestabilidades de Turing en dominios crecientes se vuelve un problema difícil. Sin embargo, los principios teóricos fueron planteados por Plaza, et al. (véase [14]), en donde además el lector podrá encontrar las condiciones para la existencia de una *bifurcación de Turing* en una superficie arbitraria.

Una propuesta alternativa para abordar el problema anterior fue hecha por M. Golubitsky y A. Comanici en [6], en donde se busca la formación de patrones, desde la perspectiva de las simetrías. La investigación hecho por estos autores estuvo basada en parte por un trabajo realizado principalmente por matemáticos mexicanos (véase [14]). A partir de ello, pudieron demostrar la transición entre patrones cuadrados, franjas y otros. Sin embargo, el problema queda en gran medida abierto, pues este último trabajo utilizó como hipótesis que el dominio creciente era cuadrangular.

Con este panorama amplio bien planteado concluimos que aún queda un largo camino que recorrer.

Apéndice A

Resultados de Análisis Matemático

“Nadie puede enfrentarse al infinito sin sentir vértigo”

En *Moëbius* (1996), dirigida por Gustavo R. Mosquera.

En el primer capítulo se desarrollaron las técnicas analíticas necesarias para poder construir una forma normal del sistema (2.1) bajo la condición de que presentara bifurcaciones secundarias. Algunos resultados de análisis matemático fueron empleados, por lo que en el presente apéndice los presentaremos y demostraremos.

El primero de ellos es un teorema que nos da condiciones bajo las cuales es posible intercambiar series (que más en general, son sucesiones) con el operador derivada. El segundo de ellos es análogo al anterior, donde la serie está dada por el desarrollo en serie de Fourier de alguna función. El tercero de ellos nos da una expresión de la serie de Fourier del producto de dos funciones, en términos de los coeficientes de la serie de Fourier de cada una de ellas.

Es importante remarcar que el problema planteado en este trabajo de tesis involucra el dominio espacial $(0, \pi)$, mientras que algunos de los resultados que aquí pre-

sentaremos son válidos en $[-\pi, \pi]$. Esto no debe causar ruido, pues siempre podemos hacer una extensión periódica de cualquier función en el intervalo $[0, \pi]$ y de período 2π . Sin más preámbulo procederemos a enunciar y demostrar dichos resultados.

A.1. Intercambio de derivada con límite de sucesiones de funciones.

Teorema A.1 *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones reales, derivables en (a, b) tal que $(f_n(x_0))$ converge para algún $x_0 \in (a, b)$ y (f'_n) converge uniformemente en (a, b) , entonces $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$, f es derivable y se cumple que $f'_n \xrightarrow{\text{unif}} f'$ en (a, b)*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, como $f_n(x_0)$ converge, entonces es una sucesión de Cauchy. Por ello, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N$, entonces

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, ya que f'_n converge uniformemente en $[a, b]$, para $n, m \geq N^1$ se tiene que

$$|f'_n(x_0) - f'_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad a \leq t \leq b. \quad (\text{A.2})$$

¹Si no fuera la misma N sino una N_1 , se define $N^* = \max\{N, N_1\}$ para que cumpla ambas.

Entonces, utilizando el Teorema del Valor Medio² y (A.2) respectivamente,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| &= |y - t| |f'_n(y) - f'_m(y)| \\ &< \frac{\epsilon |y-t|}{2(b-a)} \leq \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{A.3}$$

Ahora, por (A.1) y (A.3)

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) + (f_n(x_0) - f_m(x_0))| \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |(f_n(x_0) - f_m(x_0))| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned} \tag{A.4}$$

por lo que f_n converge uniformemente a alguna función f .

Fijemos un $x \in [a, b]$ y definamos

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}; \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

luego, usando (A.3),

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| < \frac{|f_n(t) - f_n(x) - f_m(t) + f_m(x)|}{|t - x|} < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Por lo anterior, $\phi_n(t)$ converge uniformemente, lo que nos permite hacer el siguiente cálculo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} \phi_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} \phi(t) = f'(t).$$

□

²Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe $y \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(y)$$

A.2. Intercambio de derivada con series de Fourier

Teorema A.2 *Sea $f(x)$ una función continua y tal que $f'(x)$ no exista en a lo más un número finito de puntos (en cada periodo), ambas condiciones en el intervalo $[0, \pi]$. Si $f(x)$ tiene un desarrollo en serie de Fourier cuyos términos son únicamente senos o cosenos, entonces si la serie de Fourier es de cosenos se puede derivar término a término; mientras que si es de senos se puede derivar término a término siempre que $f(0) = f(\pi) = 0$*

Demostración. Supongamos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) ; \quad f'(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(nx) + b'_n \sin(nx).$$

Primero,

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0.$$

Ahora, usando integración por partes, calculamos los coeficientes de Fourier de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} f(x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = nb_n \\ b'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} f(x) \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = -na_n, \end{aligned} \tag{A.5}$$

que si nos damos cuenta, da lo mismo que haber derivado término a término.

□

A.3. Multiplicación de series de Fourier

Teorema A.3 (Tolstov, [24]) Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones cuadrado integrables³ en (a, b) . Supongamos que las series de Fourier de f y F están dadas por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sen(nx)) \\ F(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sen(nx)) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Entonces la serie de Fourier de fF es

$$f(x)F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sen(nx)) \quad (\text{A.7})$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{a_0 A_n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (A_{m+n} + A_{m-n}) + b_m (B_{m+n} + B_{m-n})], \\ \beta_n &= \frac{a_0 B_n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (B_{m+n} - B_{m-n}) - b_m (A_{m+n} - A_{m-n})]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Demostración. Enunciaremos el siguiente lema que nos ayudará a hacer el cálculo deseado.

Lema A.1 Sean f y F cuadrado integrables, definidas en $[-\pi, \pi]$ tales que sus series de Fourier están dadas por (A.6). Entonces

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_n + b_n B_n \quad (\text{A.9})$$

³ f es cuadrado integrable en (a, b) si $\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$

La demostración de este lema puede consultarse en [24]. Ahora bien, en cuanto al problema que en este momento nos compete, sabemos que el producto fF tiene una serie de Fourier que escribimos como

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen}(nx) + \beta_n \operatorname{cos}(nx),$$

por lo que sólo necesitamos hallar los coeficientes de dicha expresión. Primero, α_0 puede calcularse por el lema como

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_n + b_n B_n \quad (\text{A.10})$$

Ahora bien, por la ortogonalidad de las funciones $\operatorname{sen}(nx)$ en L_2 , podemos calcular fácilmente α_n

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)\operatorname{cos}(nx)dx, \quad (\text{A.11})$$

que para poder realizar dicho cálculo, usando el lema anterior, bastará con conocer los coeficientes de Fourier de la función $F(x)\operatorname{cos}(nx)$. Éstos están dados en términos de los coeficientes de Fourier de $F(x)$, suponiendo que $F(x)\operatorname{cos}(nx)$ tiene un desarrollo

$$F(x)\operatorname{cos}(nx) = \frac{A_0^*}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^* \operatorname{cos}(mx) + B_m^* \operatorname{sen}(mx),$$

entonces

$$A_m^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\operatorname{cos}(nx)\operatorname{cos}(mx)dx.$$

Usando la identidad trigonométrica $\operatorname{cos}(nx)\operatorname{cos}(mx) = \frac{1}{2}[\operatorname{cos}((m+n)x) + \operatorname{cos}((m-n)x)]$ concluimos que

$$\begin{aligned} A_m^* &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\operatorname{cos}((m+n)x)dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\operatorname{cos}((m-n)x)dx \right] \\ &= \frac{1}{2}(A_{m+n} + A_{m-n}), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde acordamos que $B_{-k} = -B_k$.

Análogamente,

$$B_m^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) \operatorname{sen}(mx) dx,$$

pero $\cos(nx) \operatorname{sen}(mx) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)]$, por lo que

$$\begin{aligned} B_m^* &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \operatorname{sen}((m+n)x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \operatorname{sen}((m-n)x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} (B_{m+n} + B_{m-n}), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde nuevamente $B_{-k} = -B_k$.

Finalmente, usando el lema enunciado al inicio y las ecuaciones (A.12) y (A.13), podemos calcular

$$\alpha_n = \frac{a_0 A_n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m (A_{m+n} + A_{m-n}) + b_m (B_{m+n} + B_{m-n}). \quad (\text{A.14})$$

Siguiendo el mismo procedimiento podemos encontrar el valor de β_n como

$$\beta_n = \frac{a_0 B_n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m (B_{m+n} - B_{m-n}) - b_m (A_{m+n} - A_{m-n}). \quad (\text{A.15})$$

□

Apéndice B

La Bifurcación de Hopf

*Volverá toda noche de insomnio: minuciosa.
La mano que esto escribe renacerá del mismo
vientre. Férreos ejércitos construirán el abismo.
(David Hume de Edinburgo dijo la misma cosa.)*

*No sé si volveremos en un ciclo segundo
como vuelven las cifras de una fracción periódica;
pero sé que una oscura rotación pitagórica
noche a noche me deja en un lugar del mundo*

Jorge Luis Borges, fragmento de *La noche cíclica*.

B.1. Introducción

Bien conocido es que la dinámica de un sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico es topológicamente equivalente a la del sistema lineal inducido por la matriz de Jacobi asociada al sistema de EDO al que nos estemos refiriendo en una vecindad de dicho punto. Por su importancia, el resultado anterior es conocido como el teorema de Hartman-Grobmann. Sin embargo, este resultado no es válido alrededor de los puntos de equilibrio no hiperbólicos, por lo cual es necesario desarrollar una teoría alterna que nos permita entender el comportamiento de las soluciones del sistema en vecindades de los puntos de equilibrio mencionados.

La teoría de las *formas normales*, que es la que desarrollaremos en esta sección, es, en principio, un análisis de carácter no lineal de los términos de orden superior de la serie de Taylor del campo vectorial que define al sistema de ecuaciones diferenciales. El problema anterior genera dos preguntas de gran interés:

1. ¿A partir de qué orden los términos de la serie de Taylor son despreciables, de manera que la dinámica se conserve al eliminar los términos de orden superior?
2. ¿Cómo obtener una versión distinta del sistema de forma que el análisis cualitativo sea más fácil de interpretar?

La técnica que se presenta a continuación fue formalizada por el físico y matemático Aleksandr Andronov, quedando la labor de hacer la teoría más concisa en manos de Vladimir Arnol'd.

La motivación de lo anterior es la siguiente, supongamos que en un sistema no lineal de EDO dependiente de parámetros se tiene un punto de equilibrio cuyo comportamiento pasa de ser un atractor a repulsor, al variar el valor de los parámetros. El valor de la traza es la que determina este cambio de comportamiento, siendo el valor de bifurcación cuando la traza tiene valor cero y, como consecuencia, se tiene la presencia de un punto de equilibrio no hiperbólico. Se antoja entonces que podamos aplicar el método de las formas normales.

Este tipo de bifurcación conocido con el nombre de la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf (que por comodidad nos referiremos a ella simplemente como *bifurcación de Hopf*) tiene como consecuencia la emergencia de un ciclo límite, dándonos la oportunidad de interpretar nuestros resultados en términos de oscilaciones físicas, químicas o biológicas (entre otros) muy importantes, ¿o no lo es un comportamiento periódico de especies en competencia para, por ejemplo, la ecología?

B.2. Formas normales y el operador homológico

Para fines del presente apéndice, y siguiendo la línea del trabajo en general, trabajaremos en sistemas de EDO bidimensionales, aunque hay que recordar que se puede generalizar a n dimensiones (consúltese [12]).

Sea \mathbb{H}_k el espacio vectorial formado por los polinomios homogéneos de orden k y consideremos el espacio $\mathbb{H}_k^2 = \mathbb{H}_k \times \mathbb{H}_k$. A manera de ejemplo consideremos el caso en el que se tienen dos variables, u y v . Aquí el espacio \mathbb{H}_k está generado por el conjunto $\{u^k, u^{k-1}v, \dots, uv^{k-1}, v^k\}$.

Observación B.1 \mathbb{H}_k como \mathbb{H}_k^2 son espacios vectoriales de dimensión finita.

Comencemos por proponer un sistema de ecuaciones arbitrario

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v) \\ \dot{v} &= g(u, v) \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el punto de equilibrio es el origen. Supongamos que f y g son funciones que tienen el siguiente desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio

$$f(u, v) = \sum_{k=1}^m f_k(u, v) + O(m+1)$$

$$g(u, v) = \sum_{k=1}^m g_k(u, v) + O(m+1)$$

donde

$$\begin{aligned} (f_k(u, v), g_k(u, v)) &\in \mathbb{H}_k^2; \quad f_k(u, v) = u^{\epsilon_1} v^{\epsilon_2}; \quad g_k(u, v) = u^{\sigma_1} v^{\sigma_2} \\ \vec{\epsilon} &= (\epsilon_1, \epsilon_2); \quad \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2) \\ |\vec{\epsilon}| &= \epsilon_1 + \epsilon_2 = |\vec{\sigma}| = \sigma_1 + \sigma_2 = k \end{aligned}$$

y $O(m+1)$ denota a los demás términos de orden mayor o igual a $m+1$.

Como se mencionó anteriormente, lo que buscamos es reducir el mayor número de términos de orden superior posibles. La expresión en serie de f y g nos motiva a introducir la siguiente definición.

Definición B.1 Sea $A \in M_{n \times n}$. Definimos el operador homológico como la función $L_A : \mathbb{H}_k^2 \rightarrow \mathbb{H}_k^2$ cuya regla de correspondencia es

$$L_A(\vec{h}) = A\vec{h} - D_{\vec{h}}Ax \quad (\text{B.2})$$

donde $\vec{h} \in \mathbb{H}_k^2$ y $D_{\vec{h}}$ es la matriz derivada de \vec{h} .

Notemos que el operador homológico es un operador lineal en \mathbb{H}_k^2 . Por lo anterior¹,

$$\mathbb{H}_k^2 = \text{rng}(L_A) \oplus \text{rng}^\perp(L_A). \quad (\text{B.3})$$

Nuestro principal objetivo es utilizar el operador homológico para transformar el sistema (B.1) a una “forma normal” en la que éste toma una expresión más sencilla, en el sentido de determinar cuál es su dinámica.

Para lograr lo anterior proponemos el cambio de variable $(U, V) = \vec{h}(u, v) \equiv (u, v) + \vec{h}_k(u, v)$ donde $\vec{h}_k = (f_k, g_k) \in \mathbb{H}_k^2$. Por (B.3), sabemos que $f_k = f_1 + f_2$ y $g_k = g_1 + g_2$ donde $f_1, g_1 \in \text{rng}(L_A)$ y $f_2, g_2 \in \text{rng}^\perp(L_A)$.

¹Esta descomposición no siempre es conveniente y depende del producto interior que se de, pero para fines de este apéndice bastará considerar esa forma.

Definición B.2 *Al campo vectorial (f_2, g_2) se le llama la parte resonante de (f, g) .*

Es inmediato del párrafo anterior que la parte no resonante, (f_1, g_1) , está generada por los vectores propios de L_A , así que mediante una \vec{h} adecuada se puede probar que el sistema se puede simplificar, dejando únicamente la parte resonante (véase [12])

B.2.1. El caso particular: la matriz diagonal

Supongamos que la matriz de Jacobi del sistema (B.1) es $J[\vec{F}] \equiv J$. Trabajaremos con el operador homológico $L_J \equiv L$ suponiendo, además, que J es diagonal, digamos $J = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si calculamos el operador homológico actuando sobre un monomio de orden k , es decir sobre $(f_k, 0)$ o en $(0, g_k)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} L(f_k, 0) &= [\lambda_1 - (\epsilon_1 \lambda_1 + \lambda_2 \epsilon_2)] \vec{e}_1 \equiv [\lambda_1 - (\vec{\lambda} \cdot \vec{\epsilon})] \vec{e}_1 \\ L(0, g_k) &= [\lambda_2 - (\sigma_1 \lambda_1 + \sigma_2 \lambda_2)] \vec{e}_2 \equiv [\lambda_2 - (\vec{\lambda} \cdot \vec{\epsilon})] \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

De lo anterior, tenemos que $(f_k, 0)$ y $(0, g_k)$ son vectores propios del operador L siempre y cuando su valor propio $\mu_{\vec{\epsilon}, i} = \lambda_i - (\vec{\lambda} \cdot \vec{\epsilon})$ sea distinto de cero, en otro caso, es un término resonante.

B.3. Cambio de estabilidad y emergencia de ciclos límite

En esta sección nos restringimos a sistemas autónomos planos. En la segunda parte vamos a permitir que las EDO dependan de un parámetro μ que toma valores reales.

A continuación presentaremos la bifurcación de Hopf en un sistema bidimensional. Como siempre que se quiera trabajar con bifurcaciones, es necesario hacer un análisis en el parámetro de bifurcación, en este caso estaremos suponiendo que la estabilidad del punto de equilibrio cambia mediante una variación de los parámetros, que se puede observar cuando en la aproximación lineal hay un cambio de signo en la traza de la matriz de Jacobi. Primero consideremos nuevamente el sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= f(u, v) \\ \dot{v} &= g(u, v)\end{aligned}\tag{B.5}$$

Supongamos que el origen es punto de equilibrio² del sistema anterior, el cual es de tipo centro en su aproximación lineal, es decir, la matriz de Jacobi $J \equiv J[f, g]_{\bar{0}}$ es tal que su traza y determinante satisfacen

$$\begin{aligned}\det J &> 0 \\ \operatorname{tr} J &= 0\end{aligned}$$

De ahí, el sistema se puede expresar mediante una transformación lineal como

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \beta v + p(u, v) \\ \dot{v} &= -\beta u + q(u, v)\end{aligned}\tag{B.6}$$

donde p y q son todos los términos de orden mayor o igual a 2 de f y g respectivamente.

Transformamos el sistema anterior a variable compleja por el cambio

$$z = u + iv\tag{B.7}$$

De esta forma, obtenemos el sistema en variable compleja³

$$\begin{aligned}\dot{z} &= i\beta z + p\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + iq\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) \\ \dot{\bar{z}} &= -i\beta z + p\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - iq\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\end{aligned}\tag{B.8}$$

²En caso contrario se hace una traslación al mismo.

³Estamos considerando a z y \bar{z} como variables independientes, sin embargo hay que notar que la segunda ecuación es redundante

Es necesario observar que habiendo realizado el cambio de variable (B.7) hemos logrado que la matriz de Jacobi del sistema (B.8) sea diagonal, de hecho

$$\tilde{J} \equiv \begin{bmatrix} i\beta & 0 \\ 0 & -i\beta \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Desarrollamos la función $p + iq$ en serie de Taylor alrededor del origen

$$\dot{z} = i\beta z + \sum_{|\bar{c}| \geq 2} a_{\bar{c}} z^{\epsilon_1} \bar{z}^{\epsilon_2}$$

En este momento emplearemos el operador homológico para reducir el sistema. Como la segunda ecuación de (B.8) es irrelevante, bastará analizar lo que ocurre con los vectores $\vec{P}_{m,n} \equiv (z^n \bar{z}^n, 0)$ bajo el operador $L_{\tilde{J}}$, pero, como observamos en la sección anterior, éstos son vectores propios del operador $L_{\tilde{J}}$, siempre y cuando el valor propio $\mu_{\bar{c}} = i\beta - i\beta\epsilon_1 + i\beta\epsilon_2$ sea distinto de cero.

En este caso podemos notar que $\mu_{\bar{c}} = 0$ si y sólo si $\epsilon_2 = \epsilon_1 - 1$, así que mediante transformaciones no lineales podemos eliminar los términos no resonantes y quedarnos con la ecuación

$$\dot{z} = z(i\beta + a|z|^2 + b|z|^4 + \dots) \quad (\text{B.10})$$

Ahora, supongamos que tenemos un sistema cuyo campo vectorial que lo define depende, además, de un parámetro μ que toma valores reales. Así, la aproximación lineal alrededor del origen la define la matriz

$$J = \begin{bmatrix} \alpha(\mu) & \beta(\mu) \\ -\beta(\mu) & \alpha(\mu) \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

donde (sin pérdida de generalidad)⁴ $\alpha(0) = 0$ y $\beta(0) \equiv \beta \neq 0$

Siendo $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$, hay que notar que si procedemos de forma análoga con el nuevo sistema, la matriz de Jacobi del sistema en variable compleja es digonal. Más aún, $\tilde{J} = \text{diag}(\lambda, \bar{\lambda})$ y por lo tanto, al implementar la técnica de las formas normales todos los términos se pueden eliminar (incluso aquellos donde $\epsilon_2 = \epsilon_1 - 1$) al no haber solución a la ecuación $\lambda(1 - \epsilon_1) = \bar{\lambda}\epsilon_2$. Así que un sistema que aproxima bien la dinámica de (B.10) (véase [12]) es

$$\dot{z} = z(\lambda(\mu) + a(\mu)|z|^2 + b(\mu)|z|^4 + \dots) \quad (\text{B.12})$$

Si expresamos a z en coordenadas polares, siendo $z = re^{i\theta}$, se tiene primeramente que

$$\begin{aligned} r^2 &= z\bar{z} \\ \theta &= \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

de donde, en general, se tiene el sistema en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}}{2r} \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{2ir^2}(\dot{z}\bar{z} - z\dot{\bar{z}}) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

y en particular para nuestro sistema, y si $a(\mu) = c(\mu) + ie(\mu)$ y $b(\mu) = d(\mu) + if(\mu)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \text{Re}(\lambda)r + c(\mu)r^3 + d(\mu)r^5 + O(r^7) \\ \dot{\theta} &= \text{Im}(\lambda) + e(\mu)r^2 + f(\mu)r^4 + O(r^6) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Un ciclo límite corresponde a un cero de la ecuación en r . Notemos que $r \equiv 0$ nos da el punto de equilibrio original. Si r no es cero y eliminando los términos de orden mayor o igual a cuatro⁵, entonces \dot{r} se anula cuando $r \equiv r^* = \sqrt{\frac{-\text{Re}(\lambda)}{c}}$, para lo cual es necesario que $c(0) \neq 0$ y que $\text{Re}(\lambda)c < 0$. Todo lo expuesto en esta sección lo sintetiza el siguiente teorema:

⁴Si ocurriera lo mencionado en μ_0 distinto de cero hacemos el cambio de variable $\nu = \mu - \mu_0$

⁵Se puede demostrar (véase [28]), utilizando el teorema de Poincaré-Bendixson y usando el hecho de que para valores suficientemente pequeños de r y μ los términos eliminados tienen menor peso, que el resultado sigue siendo cierto si no se remueven de la ecuación

Teorema B.1 (de la bifurcación de Hopf) *Supongamos que el sistema (B.5) tiene un punto de equilibrio en el origen, para todo valor de μ . Además, supongamos que cuando $\mu = 0$ los valores propios de J son de la forma $\pm i\beta$. Si $c(0) \neq 0$ y además cumple la condición de transversalidad, esto es,*

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{Re}(\lambda(0)) \neq 0$$

entonces existe una bifurcación de Hopf (emergencia de un ciclo límite) siempre que $\operatorname{Re}(\lambda)c < 0$.

El análisis de la estabilidad del ciclo límite emergente puede deducirse directamente del signo de $\operatorname{Re}(\lambda)$. Si este parámetro es mayor que cero, entonces $c(\mu)$ tiene que ser negativo y por tanto $\dot{r} > 0$ siempre que $r \in (0, r^*)$, análogamente se puede ver que $\dot{r} < 0$ si $r \in (r^*, \infty)$. En este caso el ciclo límite es asintóticamente estable, entonces diremos que la bifurcación de Hopf es **supercrítica**.

Por el contrario, si $\operatorname{Re}(\lambda)$ es negativo, de la misma forma que en el análisis anterior conduce a que el ciclo límite es inestable. En este caso diremos que la bifurcación es **subcrítica**.

Para determinar la emergencia de un ciclo límite debida a una bifurcación de Hopf, el trabajo complicado se resume a calcular el valor $c(0)$. Para la suerte de la practicidad, Guckenheimer y Holmes dedujeron una fórmula que calcula el valor de $c(\mu)$ en términos de p y q y que en [12] se puede consultar dicha expresión. Ésta es

$$\begin{aligned} c = & \frac{1}{16}(p_{xxx} + p_{xyy} + q_{xxy} + q_{yyy}) \\ & - \frac{1}{16\beta}(q_{xy}(q_{xx} + q_{yy}) - p_{xy}(p_{xx} + p_{yy}) + p_{xx}q_{xx} - p_{yy}q_{yy}) \end{aligned} \tag{B.16}$$

Apéndice C

La Inestabilidad de Turing

*¡Hombres, leones, águilas codornices, ciervos astados, gansos, arañas, silenciosos
peces de las profundidades, estrellas de mar y tantas otras criaturas que el ojo
humano no alcanza a ver;...!*

Anton Chéjov, en *La Gaviota*.

C.1. Introducción

Cuando observamos regularidades en la naturaleza, es casi inmediato que nos preguntemos el por qué de su existencia. En particular, tratar de explicar el fenómeno de la emergencia de patrones en los seres vivos ha sido de gran interés para muchos científicos, así como generador de posiciones encontradas en cuanto a los mecanismos en que estas estructuras ordenadas se originan.

Sanders afirma¹ que antes de la publicación de *The chemical basis of morphogenesis* en 1952, escrito por el matemático y computólogo inglés Alan Mathison Turing, no muchos científicos trabajaban en el problema del origen de las formas vivas. Es así como el mecanismo morfogénético propuesto por Turing inspirado en el postulado de otro gran pensador, D'arcy W. Thompson; según el cual “Los problemas de la forma orgánica son en primera instancia problemas matemáticos, los problemas del desarrollo son esencialmente problemas físicos...”²; se convierte en un parteaguas en la biología.

Mucho puede decirse sobre la historia del estudio de la morfogénesis y la teoría de la evolución (temas comúnmente relacionados), sin embargo no es éste el fin del presente apéndice³. A continuación haremos una revisión de los aspectos matemáticos de la propuesta turingiana, planteada a partir de un conjunto de sustancias (llamadas morfógenos) que son sometidas a dos procesos físicos que ocurren simultáneamente: difusión y reacción.

C.2. Planteamiento del problema

Turing formuló la siguiente propuesta morfogénica:⁴

Se sugiere que un sistema de sustancias químicas, llamadas morfógenos, reaccionando y difundiendo a través de un tejido, es adecuado para explicar el principal fenómeno de la morfogénesis. Dicho sistema, aunque originalmente pueda ser muy homogéneo, puede posteriormente desarrollar un patrón o una estructura debida a una inestabilidad del equilibrio homogéneo, el cual es provocado por perturbaciones aleatorias...

¹ *Collected works of A.M. Turing: Morphogenesis*. Véase [25]

² *On growth and form*; [23]

³ El lector puede referirse a la literatura de la escuela mexicana en este tema como en algunos capítulos de [5] y [20].

⁴ *The chemical basis of morphogenesis*; [26]

Para fines de este apéndice pensemos en dos morfógenos que reaccionan al mismo tiempo que se difunden y denotemos la concentración de ellas al tiempo t y en el punto \vec{x} , de una región⁵ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, como $u(\vec{x}, t)$ y $v(\vec{x}, t)$.

Bajo el supuesto de que el proceso difusivo de los morfógenos sigue la ley de Fick y que la cinética química obedece la ley de acción de masas representada por las funciones f y g para cada morfógeno respectivamente, entonces u y v satisfacen la EDP de tipo reacción-difusión (RD)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + g(u, v)\end{aligned}\tag{C.1}$$

con D_u y D_v parámetros positivos, ∇^2 es el operador laplaciano sobre la parte espacial.

A fin de completar el problema matemático a estudiar, debemos agregar las condiciones iniciales, es decir

$$\begin{aligned}u(\vec{x}, 0) &= u_0(\vec{x}) \\ v(\vec{x}, 0) &= v_0(\vec{x})\end{aligned}\tag{C.2}$$

donde u_0 y v_0 son funciones dadas para todo $\vec{x} \in \Omega$; y las condiciones de frontera de tipo Neumann homogéneas

$$\vec{n}(\vec{x}) \cdot \nabla u = \vec{n}(\vec{x}) \cdot \nabla v = 0\tag{C.3}$$

para todo $\vec{x} \in \partial\Omega$ y para todo $t \geq 0$; donde $\partial\Omega$ denota a la frontera de la región Ω , $\vec{n}(\vec{x})$ es el vector normal a $\partial\Omega$ en el punto \vec{x} , y ∇ es el operador gradiente que actúa sólo en la parte espacial.

⁵Claramente tendrá sentido biológico si se define en el espacio euclideo de dimensión menor o igual a 3, aunque matemáticamente tiene sentido en cualquier dimensión.

C.3. Emergencia de inestabilidad espacio-temporal

Supongamos que en el sistema homogéneo asociado a (C.1) el punto $(u^*, v^*) \equiv (0, 0)$ (sin pérdida de generalidad) es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Para ello, analizando el sistema homogéneo asociado

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v) \\ \dot{v} &= g(u, v) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

donde, a fin de que (u^*, v^*) sea asintóticamente estable localmente, pediremos que la matriz de Jacobi, $J \equiv J[f, g]_{(u^*, v^*)} = (J_{ij})$, que define al sistema lineal que aproxima a (C.4) en (u^*, v^*) satisfaga:

$$\begin{aligned} \text{tr} J &< 0 \\ \det J &> 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Observemos ahora que (u^*, v^*) es una solución estacionaria y homogénea del sistema (C.1). Bajo estas hipótesis el sistema mencionado se aproxima por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + J_{11} u + J_{12} v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + J_{21} u + J_{22} v \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Nuestro objetivo en adelante será hallar condiciones para las cuales el sistema anterior es inestable bajo perturbaciones espacio-temporales alrededor del equilibrio estacionario y homogéneo (u^*, v^*) .

Consideremos una solución de la EDP (C.6) dada en su serie de Fourier, esto es:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^n} A_{\vec{k}} e^{\lambda t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ v(\vec{x}, t) &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^n} B_{\vec{k}} e^{\lambda t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

donde $A_{\vec{k}}$, $B_{\vec{k}}$ y λ son números complejos.

Como buscamos las condiciones bajo las cuales (u^*, v^*) sea inestable, bastará que uno solo de los sumandos sea inestable. Observemos que la parte espacial es siempre acotada, así que el problema se reduce a analizar bajo qué condiciones $Re\lambda > 0$. Tomemos pues un único sumando:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= A e^{\lambda t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ v(\vec{x}, t) &= B e^{\lambda t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

que al sustituirlo en la ecuación (C.6) se obtiene el problema de valores propios:

$$\begin{bmatrix} J_{11} - D_u \|\vec{k}\|^2 - \lambda & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} - D_v \|\vec{k}\|^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (\text{C.9})$$

Para encontrar soluciones no triviales de (C.9) bastará con que

$$\det [J - \|\vec{k}\|^2 \tilde{D} - \lambda I] = 0,$$

es decir,

$$\lambda^2 + \lambda(\text{tr}(\tilde{D}\|\vec{k}\|^2) - \text{tr}J) + \Delta(\|\vec{k}\|^2) = 0 \quad (\text{C.10})$$

donde

$$\Delta(\|\vec{k}\|^2) = D_u D_v \|\vec{k}\|^4 - \|\vec{k}\|^2 (D_u J_{22} + D_v J_{11}) + \det J$$

Como $\text{tr}J < 0$ entonces $\text{tr}(\tilde{D}\|\vec{k}\|^2) - \text{tr}J < 0$, así que para que la parte real de λ sea positiva se pide que para algún \vec{k} , $\Delta(\|\vec{k}\|^2) < 0$.

Haciendo $z = \|\vec{k}\|^2$, notemos que $\Delta(z)$ es una parábola cóncava hacia arriba. Además $\Delta(z)$ se anula si y sólo si

$$z_{\pm} = \frac{D_v J_{11} + D_u J_{22} \pm \sqrt{(D_v J_{11} + D_u J_{22})^2 - 4 \det \tilde{D} \cdot \det J}}{2 \det \tilde{D}} \quad (\text{C.11})$$

Observemos que cuando $z_+ = z_- = z_{crit}$, es este valor el punto crítico de Δ (de hecho es un mínimo absoluto), por tanto si $\Delta(z_{crit}) < 0$, se cumple que $\Delta(z) < 0$ para todo $z \in (z_-, z_+)$

Por ser $z_{crit} > 0$ entonces $J_{11} + \delta J_{22} > 0$, que si consideramos, además, la hipótesis inicial de que $tr J = J_{11} + J_{22} < 0$ resulta que J_{11} y J_{22} tienen signos contrarios. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que J_{11} es positivo, de donde se deduce que $\delta = \frac{D_v}{D_u} > 1$.

Otro valor crítico es cuando $\Delta_{min} \equiv \Delta(z_{crit}) = 0$, lo cual determinará un valor crítico para δ . En este caso, se tiene el polinomio cuadrático en δ :

$$\delta^2 J_{11}^2 + \delta(2J_{11}J_{22} - 4 \det J) + J_{22}^2 \quad (C.12)$$

cuya solución es

$$\delta_{crit} = \frac{\det J - J_{12}J_{21} \pm 2\sqrt{-J_{12}J_{21} \det J}}{J_{11}^2} \quad (C.13)$$

Para que lo anterior tenga sentido, como por hipótesis $\det J > 0$, es necesario que J_{12} y J_{21} tengan signos contrarios. Y por tanto será necesario que

$$\delta > \delta_{crit} \quad (C.14)$$

Resumamos lo anteriormente desarrollado en el enunciado de un teorema:

Teorema C.1 *(de la bifurcación de Turing) Considere el sistema (C.1) con la matriz de Jacobi $J[f, g]_{(u,v)} \equiv (J_{ij})$ asociada al sistema homogéneo (C.4). Supongamos que $J_{11} > 0$, entonces el sistema (C.1) exhibe una bifurcación de Turing (inestabilidad de las soluciones cercanas a la solución homogénea y estacionaria asintóticamente estable) si se cumplen las condiciones:*

1. $tr J < 0$

2. $\det J > 0$
3. $J_{22} < 0$
4. J_{12} y J_{21} tienen signos contrarios
5. $\delta > \delta_{crit}$

El arreglo de la matriz de Jacobi debe tener entonces una de las siguientes configuraciones:

$$\begin{bmatrix} + & - \\ + & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & + \\ - & - \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

El primer arreglo corresponde a la forma conocida como *activador-inhibidor* cruzado, mientras que al segundo se le conoce como *activador-inhibidor* puro.

El resultado anterior sólo demuestra la existencia de dicha bifurcación, pudiendo ser ésta de diferentes formas. El estudio de las geometrías formadas por este mecanismo morfogénico es un problema más complicado, de la cual hemos hablado en el Capítulo 5. Una breve introducción a ello se puede encontrar en [13].

Bibliografía

- [1] R. A. Barrio, R. E. Baker, B. Jr. Vaughan, K. Tribuzy, M. R. de Carvalho, R. Bassanezi y P. K. Maini. “Modelling the skin pattern of fishes”. *Physical Review E* **79** (2009), pp. 220–229.
- [2] M. Baurmann, T. Gross y U. Feudel. “Instabilities in spatially extended predator-prey systems: spatio-temporal patterns in the neighborhood of Turing-Hopf bifurcations”. *Journal of Theoretical Biology* **245** **2** (2007), pp. 220-229.
- [3] J. A. Castillo Medina. “Dinámica espacio-temporal modelada a través de sistemas de reacción-difusión (bifurcación de Turing-Hopf e inestabilidades generadas por difusión)”. Avances de la tesis doctoral en el Programa de Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM.
- [4] D. S. Cohen, H. C. Neu y R. R. Rosales. “Rotating Spiral Wave Solutions of reaction-diffusion equations”. *SIAM Journal on Applied Mathematics* **35** **3** (1978), pp. 536–547.
- [5] M. Falconi Magaña y L. Esteva Peralta, eds. *Biología Matemática, un enfoque desde los sistemas dinámicos*. Prensas de Ciencias, UNAM, 2012.
- [6] M. Golubitsky y A. Comanici. “Patterns on growing square domains via mode interactions”. *Dynamical Systems: an International Journal* **23** **2** (2008), pp. 167–206.

-
- [7] M. W. Hirsch, S. Smale y R. L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. 2a. ed. EUA: Elsevier, 2004.
- [8] J. P. Keener. “Secondary bifurcation in nonlinear diffusion reaction equations”. *Studies in Applied Mathematics* 55 (1976), pp. 187–211.
- [9] M. S. Langford y G. Iooss. “Interactions of Hopf and Pitchfork Bifurcations”. En: *Bifurcation Problems and their Numerical Solutions*. H. D. Mittelman y H. Weber, eds. 1980, pp. 103–134.
- [10] A. Lazcano Araujo. “Bugs y Faus en el país de las matemáticas”. En: *Ciencias* 52 (1998).
- [11] J. S. McGough y K. Riley. “Pattern formation in the Gray-Scott model”. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 5 1 (2004), pp. 105–121.
- [12] J. D. Meiss. *Differential Dynamical Systems*. Mathematical Modelling and Computation. EUA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [13] J. D. Murray. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. 3a. ed. Springer, 2003.
- [14] R. Plaza, F. Sánchez Garduño, P. Padilla, R. A. Barrio y P. K. Maini. “The effect of growth and curvature on pattern formation”. *Journal of Dynamics and Differential Equations* 16 4 (2004), pp. 1093–1121.
- [15] A. V. Ponce Bobadilla. “Formación de patrones por el mecanismo de Turing en sistemas de reacción-difusión” Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM (2013).
- [16] I. Prigogine y R. Lefever. “Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems. II”. *The Journal of Chemical Physics* 48 4 (1968), pp. 1695–1700.
- [17] I. Prigogine y G. Nicolis. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations*. John Wiley Sons, 1977.
- [18] M. R. Ricard y S. Mischler. “Turing Instabilities at Hopf Bifurcation”. *Journal of Nonlinear Science* 19 (2009), pp. 467–496.

- [19] A. Rovinsky y M. Menzinger. “Interaction of Turing and Hopf Bifurcations in chemical systems”. *Physical Review A* 46 **10** (1992), pp. 6315–6322.
- [20] F. Sánchez Garduño, P. Miramontes y J.L. Gutiérrez, eds. *Clásicos de la biología matemática*. Siglo XXI, 2002.
- [21] J. A. Sanders y F. Verhulst. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Springer-Verlag, 1985.
- [22] M. L. Steyn-Ross, D. A. Steyn-Ross y J. W. Sleight. “Modelling general anaesthesia as a first-order phase transition in the cortex”. *Progress in Biophysics & Molecular Biology* 85 (2004), pp. 369–385.
- [23] D’Arcy W. Thompson. *On growth and form*. Dover Publications Inc., 1992.
- [24] G. P. Tolstov. *Fourier Series*. Dover, 1976.
- [25] A. M. Turing. *Morphogenesis*. P. T. Sanders, ed. Collected Works of A. M. Turing. North-Holland, 1992.
- [26] A. M. Turing. “The chemical basis of morphogenesis”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences* 237 **641** (1952).
- [27] J. J. Tyson y J. C. Light. “Properties of two-component bimolecular and trimolecular chemical reaction systems”. *The Journal of Chemical Physics* 59 **8** (1973), pp. 4164–4173.
- [28] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2a. ed. EUA: Springer, 2000.
- [29] A. T. Winfree. “The Prehistory of the Belousov-Zhabotinsky Oscillator”. *Journal of Chemical Education* 61 **8** (1984), pp. 661–663.
- [30] A. de Wit. “Spatial Patterns and Spatiotemporal Dynamics in Chemical Systems”. *Advances in Chemical Physics*. I. Prigogine y S. A. Rice, eds. Vol. 109. John Wiley & Sons, Inc., 1999, pp. 435–513.

- [31] A. de Wit, G. Dewel y P. Borckmans. “Chaotic Turing-Hopf mixed mode”. *Physical Review E* 48 **6** (1993).
- [32] A. de Wit, Dewel Lima D. y P. G. Borckmans. “Spatiotemporal dynamics near a codimension-two point”. *Physical Review E* 54 **1** (1996), pp. 261–271.