



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**COLOREANDO SIN RESTRICCIONES
UNA INTRODUCCIÓN A LAS DIGRÁFICAS
PANCROMÁTICAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

MICAEL ALEXI TOLEDO ROY



**DIRECTORA DE TESIS:
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ
2013**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Toledo

Roy

Micael Alexi

46 32 48 80

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

409058725

2. Datos del tutor

Dra.

Hortensia

Galeana

Sánchez

3. Datos del sinodal 1

Mat.

Laura

Pastrana

Ramirez

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Juan José

Montellano

Ballesteros

5. Datos del sinodal 3

Dra.

Eugenia

O'Reilly

Regueiro

6. Datos del sinodal 4

Dra.

Mucuy Kak del Carmen

Guevara

Aguirre

7. Datos del trabajo escrito

Coloreando sin restricciones

Una introducción a las digráficas pancromáticas

51 páginas

2013

A mi padre, que discute con gatos.
A mi madre, que conversa con plantas.

Agradezco de todo corazón a la Dra. Hortensia Galeana Sánchez, mi guía y mi asesora, sin quien este trabajo no hubiera podido realizarse. Agradezco igualmente a la Mat. Laura Pastrana Ramirez que me enseñó el bello mundo de las gráficas, a la Universidad Nacional Autónoma de México y el incansable esfuerzo de sus profesores.

Esta investigación fue realizada gracias al programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IN1066132 y al programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IB101412. Agradezco a todas las partes involucradas.

Indice

1. Introducción	1
2. Conceptos preliminares	5
3. Núcleos por trayectorias monocromáticas	17
4. El número pancromático	22
4.1 Algunas digráficas pancromáticas	25
4.2 Digráficas localmente pancromáticas	30
4.3 Digráficas sin núcleo	39
5. Notas sobre una conjetura	50
6. Bibliografía	51

1. Introducción

Sea $D = (V, F)$ una digráfica, esto es, un conjunto V distinto del vacío con una relación antireflexiva $F \subseteq V \times V$. Llamamos vértices a los elementos de V y flechas a los elementos de F . Un torneo es una digráfica tal que existe exactamente una flecha entre cualesquiera dos vértices. Llamamos C_3 (alt. T_3) a un torneo con tres vértices x, y y z tal que $(x, y), (y, z), (z, x) \in F$ (alt. $(x, y), (y, z), (x, z) \in F$). Un camino dirigido en D es una sucesión de vértices (v_1, v_2, \dots, v_n) tales que $(v_i, v_{i+1}) \in F$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Una trayectoria dirigida es un camino dirigido en el cual $v_i \neq v_j$ para toda $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Un conjunto de vértices $N \subseteq V$ en una digráfica D es independiente si entre cualesquiera dos vértices u y v en N , no existe una flecha que los une; es decir, $(u, v) \notin F$ y $(v, u) \notin F$. Decimos que un conjunto independiente $N \subseteq V$ es un núcleo si además se tiene que para todo vértice x que no está en N , existe una flecha de x a algún vértice de N .

Una k -coloración de las flechas de D es una función $\varsigma : F \rightarrow [k]$ que asigna a cada flecha un color de un conjunto de k colores distintos. Una trayectoria monocromática en D es una trayectoria dirigida (v_1, v_2, \dots, v_n) tal que todas las flechas $(v_i, v_{i+1}) \in F$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, son del mismo color. Un conjunto $N \subseteq V$ es ς -independiente si para cualesquiera dos vértices u y v en N no existe una trayectoria monocromática que los une. Si además se tiene que para todo vértice x que no está en N existe una trayectoria monocromática de x a algún vértice en N , decimos que N es un núcleo por trayectorias monocromáticas, o simplemente un ς -núcleo. La existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en una digráfica D depende fuertemente de su coloración. Existen digráficas que tienen núcleos por trayectorias monocromáticas para algunas coloraciones de sus flechas pero para otras no.

El número pancromático de una digráfica D , denotado $\pi(D)$, es el mayor natural k para el cual toda coloración de las flechas de D , con k colores, admite un núcleo por trayectorias monocromáticas. Llamamos digráficas pancromáticas a las digráficas que admiten núcleos por trayectorias monocromáticas con todas sus posibles coloraciones. Esto es, no importa con cuántos colores o cómo se colorean las flechas de una digráfica pancromática, ésta siempre tendrá un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Los conceptos de ς -independencia y de núcleo por trayectorias monocromáticas nacen como generalizaciones de conceptos conocidos previamente; a saber, los conceptos de independencia y núcleo. El estudio de núcleos en digráficas comienza en 1944, cuando Von Neumann y Morgenstern introducen el concepto en el marco de la teoría de juegos en [13]. En este contexto, un núcleo representa un conjunto de estrategias ganadoras (otras aplicaciones interesantes de núcleos en la teoría de juegos pueden encontrarse en [2] y [4]). Casi cuarenta años después, en 1982, el núcleo por trayectorias monocromáticas hace su primera aparición, aunque no con ese nombre, en [12]. En este trabajo Sands, Sauer y

Woodrow prueban la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas 2-coloreadas por flechas. En [12] también se demuestra que un torneo T 3-coloreado cuyos vértices han sido divididos en conjuntos ajenos de modo que dos vértices en distintos conjunto están unidos por flechas rojas, mientras que vértices en un mismo conjunto están unidos con flechas azules o verdes, tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Es fácil ver que ningún torneo coloreado de este modo tiene ciclos tricolores de longitud 3 (C_3). Esto motivó a Sand et al. a plantear el siguiente problema: ¿Si T es un torneo coloreado de modo que no tiene ciclos tricolores de longitud 3, entonces será cierto que existe un vértice v en T tal que para cualquier otro vértice x en T existe una trayectoria monocromática de x a v ? Claramente, este vértice sería un núcleo por trayectorias monocromáticas.

En 1988, Minggang determina en [11] que en el problema de Sands et al., si se pide además que el torneo T no tenga subtorneos transitivos tricolores de tres vértices (T_3) entonces T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas, que consiste en un solo vértice. Además, Minggang muestra que este resultado no se puede mejorar para torneos m -coloreados con $m \geq 5$. A la fecha, la pregunta de Sands et al. con 3 colores sigue abierta.

En 1996 Galeana-Sánchez introduce el término *núcleo por trayectorias monocromáticas* en [5] y establece condiciones suficientes para su existencia en torneos m -coloreados. Concretamente, si en un torneo T todos los ciclos de longitud a lo más 4 son casi-monocromáticos -i.e. todas sus flechas, a excepción de a lo más una, son de un mismo color- entonces T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. En [5] también se prueba, mediante dos contraejemplos, que esta condición para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas no implica la condición de Minggang, ni viceversa. Esto es, los resultados de Minggang y Galeana-Sánchez son independientes uno del otro. Además, Galeana-Sánchez prueba que es necesario pedir que los ciclos de longitud 4 sean casi-monocromáticos para que su resultado sea cierto. Si no se piden que los ciclos de longitud 4 sean casi-monocromáticos, entonces es necesario pedir que los ciclos de longitud 3 sean completamente monocromáticos.

En [6], Galeana-Sánchez extiende el resultado principal obtenido en [5] para digráficas que son casi-torneos, es decir, digráficas resultantes de sustraer una flecha a un torneo. Concretamente, se prueba que si D es un casi-torneo m -coloreado y todos los ciclos de D de longitud menor o igual a 4 son casi-monocromáticos, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Notemos que en este caso, el ζ -núcleo de D puede constar de dos vértices.

Un año más tarde, en 2001, Galeana-Sánchez y García Ruvalcaba [7] prueban que si D es un casi-torneo m -coloreado y D no contiene a C_3 ni a T_3 , entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas, extendiendo el resultado de Minggang a casi-torneos. También se dan ejemplos de digráficas que no tienen C_3 (alt. T_3) y que no tienen ζ -núcleos, lo que prueba que este resultado es lo mejor posible.

En [8], se dan condiciones necesarias para que una digráfica tenga núcleo por trayectorias monocromáticas para toda coloración sin C_3 ni T_3 .

Notemos que todos los resultados obtenidos en [5], [6], [7], [8] y [11] para la

existencia de ζ -núcleos en digráficas, son válidos únicamente para coloraciones sin subtorneos tricolores de orden 3 (C_3 y T_3). Los resultados [5], [6], [7] y [11] son válidos sólo para torneos o casi-torneos. Resultados interesantes sobre núcleos por trayectorias monocromáticas en otras clases de digráficas pueden encontrarse en [9].

En [10] Galeana-Sánchez y Strausz introducen el concepto de digráfica pancromática y número pancromático, temas de la actual tesis. Entre los resultados obtenidos en [10] se dan condiciones suficientes para que digráficas m -coloreadas de algunas clases tengan núcleo por trayectorias monocromáticas, sin poner restricciones a la coloración de sus flechas. En particular, se caracterizan a los torneos pancromáticos en términos de su número pancromático, se muestra que digráficas quasi-transitivas con núcleo, digráficas acíclicas y digráficas sin ciclos ni trayectorias de longitud 3 admiten un ζ -núcleo para toda coloración. También se establecen cotas para el número pancromático de digráficas sin núcleo (en el sentido de Von Neumann). Todo estos resultados se discuten a detalle en esta tesis.

En el Capítulo 2 de este trabajo se definen conceptos elementales de la teoría de digráficas y se demuestran algunos resultados conocidos que serán de utilidad en las secciones posteriores.

En el Capítulo 3 se definen coloraciones por vértices y flechas. Se introduce al lector al concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas y se demuestra su existencia en digráficas 1-coloreadas así como su relación con los núcleos.

En el Capítulo 4 se define el número pancromático de una digráfica coloreada por flechas y el concepto de digráfica pancromática. En la sección 4.1 se determinan algunas clases de digráficas pancromáticas y se caracterizan los torneos pancromáticos en relación con su número pancromático. En particular, se prueba que digráficas sin ciclos ni trayectorias de longitud 3, digráficas acíclicas y digráficas cuasitransitivas con núcleo son pancromáticas. También tenemos, como único resultado original de esta sección, que los ciclos de longitud par son pancromáticos. Finalmente, también se muestra que un torneo T es pancromático si y sólo si $\pi(T) > 2$.

En la sección 4.2 se establecen algunas condiciones suficientes que tiene que cumplir sólo localmente una digráfica para que ésta sea pancromática. Se demuestra que si todos los bloques de una digráfica D son transitivos y asimétricos, entonces D es pancromática. También se prueba que la unión de digráficas pancromáticas que comparten sólo vértices de exgrado 0 (alt. ingrado 0) es una digráfica pancromática. Finalmente, en la última proposición de esta sección se muestra que la suma de Zykov sobre una digráfica transitiva y asimétrica K es pancromática si los sumandos correspondientes al núcleo de K son digráficas pancromáticas. Se muestran mediante contraejemplos que ninguno de estos resultados puede mejorarse. Todos las proposiciones y contraejemplos de esta sección son resultados originales.

En la sección 4.3, se demuestra que el número pancromático de ciclos impares y digráficas quasi-transitivas sin núcleo es exactamente 2. Como resultados originales en esta sección, tenemos que digráficas sin núcleo de orden

menor o igual a 4 y digráficas sin núcleo, que no contienen determinadas subdigráficas (mostradas en la fig. 4.16), tienen número pancromático 2. También se determinan cotas superiores del número pancromático para digráficas sin núcleo en general. Concretamente, si D no tiene núcleo, entonces $\pi(D) < \min\{2\sqrt{\chi(D)}, \chi(L(D)), 2\sqrt{\tau(D)} + 1\}$, donde $\chi(D)$ es el número cromático de D , $L(D)$ es la digráfica de líneas de D y $\tau(D)$ es la mínima partición de D en digráficas transitivas.

En el Capítulo 5, que cierra este trabajo, encontramos comentarios respecto a la conjetura sobre el número pancromático enunciada por Galeana-Sánchez y Strausz en [10] de qué tanto nos acerca este trabajo a su demostración o a su refutación. La conjetura dice: si D es una digráfica con m flechas, entonces $\pi(D) \in \{2, m\}$.

2. Conceptos preliminares

Una gráfica simple $G = (V, A)$ consiste en un conjunto finito V distinto del vacío, junto con un conjunto $A \subseteq V \times V$ de parejas no ordenadas de distintos elementos de V . Llamamos vértices a los elementos de V , y aristas a los elementos de A . Esto es, a cada arista de G corresponde un subconjunto de V de cardinalidad 2.

Una gráfica dirigida, o simplemente una digráfica, $D = (V, F)$ consiste en un conjunto finito V distinto del vacío, junto a un conjunto $F \subseteq V \times V$ de parejas ordenadas de V , tal que $\forall v \in V, (v, v) \notin F$. Llamaremos vértices a los elementos de V , y flechas a los elementos de F . Si D tiene n vértices y m flechas, decimos que D es de orden n y tamaño m . En adelante usaremos siempre la letra n para referirnos al orden de una digráfica y la letra m para referirnos a su tamaño. Para evitar ambigüedad en la notación, siempre que se tengan dos digráficas D y D' , usaremos $V(D)$ y $V(D')$ para referirnos a sus respectivos conjuntos de vértices, y $F(D)$ y $F(D')$ para sus conjuntos de flechas.



Figura 2.1: Una digráfica de orden 4 y tamaño 6 (izq.) junto a una digráfica de orden y tamaño 3 (der.).

Dada una digráfica D y dos vértices $u, v \in V$, decimos que u y v son adyacentes cada vez que $(u, v) \in F$ o $(v, u) \in F$. Siempre que se tenga una flecha $(u, v) \in F$, diremos que u es su vértice inicial, y v su vértice final. Si sucede que $(u, v) \in F$ y $(v, u) \in F$, decimos que la flecha (u, v) es una flecha simétrica de D . Llamaremos digráficas asimétricas a las digráficas sin flechas simétricas.

Definición 2.1. La gráfica subyacente de una digráfica D , denotada por G_D es la única gráfica simple tal que:

- $V(G_D) = V(D)$
- $(u, v) \in A(G_D)$ si y sólo si $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$.

Definición 2.2. Si dos digráficas D y D' son tales que $V(D') \subset V(D)$ y $F(D') \subset F(D)$, decimos que D' es una subdigráfica de D . Si además se tiene que para cualesquiera $u, v \in V(D')$, $(u, v) \in F(D')$ si y sólo si $(u, v) \in F(D)$,

entonces decimos que D' es una subdigráfica inducida de D .

Si D es una digráfica y $U \subset V$ un conjunto de vértices, llamamos a la subdigráfica inducida D' cuyos vértices son los vértices de U , la digráfica inducida por $U \subset V$, y se denota por $D' = [U]$.

Definición 2.3. La exvecindad o vecindad exterior de un vértice $v \in V$ es el conjunto $\Gamma^+(v) = \{u \in V : (v, u) \in F\}$. Similarmente, la invecindad o vecindad interior de v es $\Gamma^-(v) = \{u \in V : (u, v) \in F\}$.

Llamamos vecinos exteriores de v a todos los vértices $u \in \Gamma^+(v)$, y vecinos interiores de v a todos los vértices $u \in \Gamma^-(v)$. Los vecinos exteriores (interiores) de v también son llamados exvecinos (invecinos). El exgrado o grado exterior $\delta^+(v)$ de un vértice $v \in V$ es la cardinalidad de su exvecindad $\Gamma^+(v)$; el ingrado o grado interior $\delta^-(v)$ de un vértice $v \in V$ es la cardinalidad de su invecindad $\Gamma^-(v)$. Definimos el grado máximo de una digráfica D como el natural $\Delta(D) = \max\{\delta^+(v_0) + \delta^-(v_0) : v_0 \in V\}$.

Para gráficas simples, definimos el grado de un vértice v , $\delta(v)$, como la cardinalidad del conjunto $\{u \in V : vu \in A\}$. El grado máximo de una gráfica simple G es el natural $\Delta(G) = \max\{\delta(v_0) : v_0 \in V\}$. Es fácil ver que para toda digráfica $\Delta(D) \geq \Delta(G_D)$, dándose la igualdad cuando D es asimétrica.

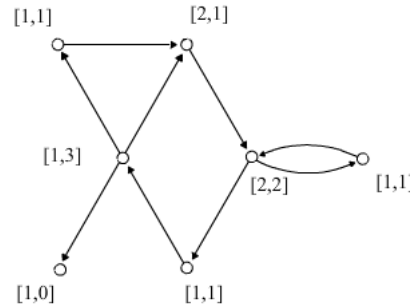


Figura 2.2: Una digráfica de orden 7. Junto a cada vértice, su ingrado y su exgrado.

Dado que toda flecha en una digráfica tiene exactamente un vértice inicial y un vértice final, es fácil ver que en toda digráfica, $\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = m$.

Definición 2.4. Un camino no dirigido en una gráfica simple G es una sucesión $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ de vértices de G , tales que para todo $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $v_i v_{i+1} \in A$. Similarmente, un camino no-dirigido en una digráfica D es una sucesión $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ de vértices de D , tales que para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$, $(v_i, v_j) \in F$ es una flecha de D , con $|i - j| = 1$. Si además se tiene que $(v_i, v_{i+1}) \in F$ para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ entonces decimos que C es un camino dirigido de longitud k . Es claro que cada flecha de D es un camino dirigido de longitud 1.

Diremos que un camino dirigido C es cerrado si $v_0 = v_k$. Sea $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ un camino dirigido cerrado en una digráfica D . Si para todo $i, j \in \{1, \dots, k-1\}$, $v_i \neq v_j$ siempre que $i \neq j$, diremos que C es un ciclo dirigido de D . Llamamos acíclica a una digráfica que no tiene ciclos dirigidos.

Una trayectoria dirigida T es un camino dirigido $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ que no repite vértices -i.e. $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$, para $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

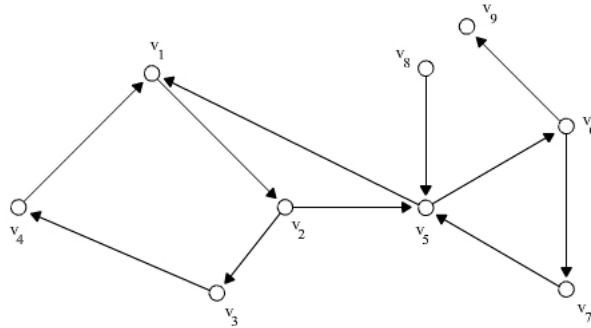


Figura 2.3: Una digráfica con tres ciclos $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$, $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_5, v_1)$ y (v_5, v_6, v_7) ; $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_5, v_1)$ es un camino cerrado que no es un ciclo; (v_1, v_5, v_6, v_7) es un camino no-dirigido.

Dada una trayectoria dirigida T en D , si $u \in V$ es su vértice inicial y $v \in V$ su vértice final, diremos que T es una uv -trayectoria dirigida. Generalizando esta idea, dado un conjunto de vértices $N \subseteq V$ y un vértice $u \in V$, diremos que T es una uN -trayectoria dirigida si T es una uv -trayectoria dirigida para algún $v \in N$.

Para facilitar la notación, en adelante nos referiremos a caminos dirigidos, ciclos dirigidos y trayectorias dirigidas, simplemente como caminos, ciclos y trayectorias.

Proposición 2.5. Si D es una digráfica acíclica, entonces $\{v \in V : \delta^+(v) = 0\} \neq \emptyset$.

Demostración. Sea D una digráfica acíclica y supongamos que $A = \{v \in V : \delta^+(v) = 0\} = \emptyset$. Sea $T = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ una trayectoria de longitud máxima en D . Dado que $A = \emptyset$, tenemos que $\delta^+(v_k) > 0$, es decir, existe un vértice $u \in V$ tal que $(v_k, u) \in F$. Dado que D es acíclica, $u \neq v_i$ para toda $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Notemos que la trayectoria $T' = (v_0, v_1, \dots, v_k, u)$ es de longitud mayor que T , lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, $A \neq \emptyset$. \square

Definición 2.6. Una digráfica D es cuasi-transitiva si para cada trayectoria de longitud dos (u, v, w) , se tiene que u y w son vértices adyacentes. Más aún, si cada vez que se tenga una trayectoria (u, v, w) sucede que $(u, w) \in F$, entonces decimos que D es transitiva.

Se sigue de la definición que toda digráfica transitiva es cuasitransitiva. La proposición 2.26 da una equivalencia entre digráficas transitivas y una clase de digráficas cuasitransitivas.

Proposición 2.7. Sea D una digráfica cuasi-transitiva. Si existe una uv -trayectoria, entonces u es adyacente a v , o existen dos vértices $x, y \in V$ tales que (u, x, y, v) es una trayectoria y $(v, x), (y, v) \in F$ (ver figura 2.4).

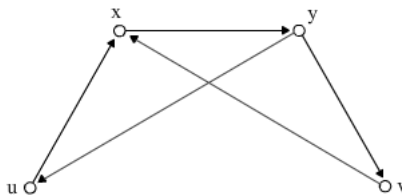


Figura 2.4: Si u no es adyacente a v , esta digráfica es subdigráfica inducida de D .

Demostración. Sea D una digráfica cuasi-transitiva. Probaremos primero que:

Afirmación 1: Si $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ es una uv -trayectoria en D de longitud $n \geq 2$ tal que $(x_i, x_j) \notin F$ si $i+1 < j$, con $i \in \{2, \dots, n\}$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces $(x_n, x_i) \in F$ si $i < n-1$.

Probaremos esta afirmación por inducción sobre n .

Si T es de longitud 2, entonces $T = (u = x_0, x_1, x_2 = v)$. Como D es cuasi-transitiva, u y v son adyacentes, pero $(u, v) \notin F$, entonces $(v, u) \in F$, quedando así demostrado el caso base.

Supongamos que si $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_k = v)$ es una uv -trayectoria de longitud $k < n$ tal que $(x_i, x_j) \notin F$ si $i+1 < j$, con $i \in \{2, \dots, k\}$, $j \in \{0, \dots, k-1\}$, entonces $(x_k, x_i) \in F$ si $i < k-1$.

Sea $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ una uv -trayectoria de longitud n en D . Notemos que como D es cuasi-transitiva y $(x_i, x_j) \notin F$ si $i + 1 < j$, tenemos que $(x_{i+2}, x_i) \in F, \forall i \in \{0, \dots, n-2\}$. En particular $(v = x_n, x_{n-2}) \in F$. Consideremos a $T' = (u = x_0, x_1, \dots, x_{n-2})$. T' es una trayectoria de longitud $n-2$, y por hipótesis inductiva $(x_{n-2}, x_i) \in F$ para toda $i \in \{0, \dots, n-4\}$. Tenemos entonces que $(x_{n-2}, x_i) \in F$ para toda $i \in \{0, \dots, n-4\}$ y que $(v = x_n, x_{n-2}) \in F$, de donde se sigue que $(x_n, x_i) \in F$ para toda $i \in \{0, \dots, n-2\}$, ya que es D cuasi-transitiva y $(x_i, x_j) \notin F$ si $i + 1 < j$.

Ahora, tomemos una digráfica cuasi-transitiva D que no contiene a B , la digráfica de la figura 2.4, como subdigráfica inducida. Demostraremos que para toda uv -trayectoria en D , con $u, v \in V$, se tiene que u y v son adyacentes. Procedemos por inducción sobre n , la longitud de la uv -trayectoria.

Si T es de longitud 1, no hay nada que probar; si es de longitud 2, la cuasi-transitividad de D nos garantiza que u y v son adyacentes. Entonces, para el caso base tomaremos $T = (u, x, y, v)$ una trayectoria en D . Como D es cuasi-transitiva, x es adyacente a v , y u es adyacente a y . Como D no contiene a B , $(u, y) \in F$ o $(x, v) \in F$. En cualquiera de los dos casos se tiene que u es adyacente a v por ser D cuasi-transitiva.

Ahora, supongamos que si T es una uv -trayectoria de longitud $k < n$, entonces u es adyacente a v .

Sea $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ una uv -trayectoria de longitud n en D , $n > 3$. Como D es cuasi-transitiva, x_i es adyacente a x_{i+2} para toda $i \in \{0, \dots, n-2\}$. Si existe la flecha $(x_i, x_j) \in F$ con $i + 1 < j$, entonces tenemos una trayectoria $(u = x_0, x_1, \dots, x_i, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$ de longitud menor que n , y por hipótesis inductiva, u es adyacente a v . Supongamos entonces que $(x_i, x_j) \notin F$ si $i + 1 < j$. Por la Afirmación 1, tenemos que $(x_n, x_i) \in F$ para toda $i \in \{0, \dots, n-2\}$. En particular $(v, u) \in F$.

Así, si D es una digráfica cuasi-transitiva y si existe una uv -trayectoria, entonces u y v son adyacentes o la digráfica de la figura 2.4 es una subdigráfica inducida de D . \square

Proposición 2.8. *Sea D una digráfica transitiva y sean $u, v \in V$. Si existe una uv -trayectoria en D , entonces $(u, v) \in F$.*

Demostración. Sea D una digráfica transitiva y sea T una uv -trayectoria para algún par de vértices $u, v \in V$.

Procedemos por inducción sobre la longitud de T . Si T es de longitud 2 se tiene que $(u, v) \in F$, ya que D es transitiva. Supongamos que si T es una uv -trayectoria de longitud $k < n$ para algún par de vértices $u, v \in V$, entonces $(u, v) \in F$.

Sea $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ una uv -trayectoria de longitud n . Consideremos $T' = (u = x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Por hipótesis inductiva, $(u, x_{n-1}) \in F$. Entonces $(u, x_{n-1}, x_n = v)$ es una uv -trayectoria de longitud 2 y como D es transitiva, entonces $(u, v) \in F$. \square

Proposición 2.9. Si D es una digráfica transitiva y $C = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ es un ciclo de D , entonces existe una flecha simétrica entre cualesquiera dos vértices v_i y v_j , $i, j \in \{0, \dots, n\}$.

Demostración. Sea D una digráfica transitiva y sea $C = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ un ciclo de D . Sean v_i y v_j , $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ dos vértices del ciclo C . Es claro que existe una $v_i v_j$ -trayectoria y una $v_j v_i$ -trayectoria en D y por proposición 2.8 $(v_i, v_j) \in F$ y $(v_j, v_i) \in F$. \square

Definición 2.10. Un torneo es una digráfica D en la cual hay una flecha, y sólo una, entre cualquier par de vértices. Notemos que todos los torneos son cuasi-transitivos.

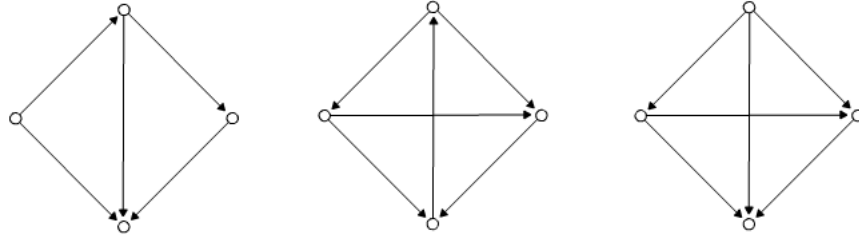


Figura 2.5: Una digráfica que no es cuasitransitiva (izq), una digráfica cuasi-transitiva que no es transitiva (centro) y una digráfica transitiva (der)

Definición 2.11. Una gráfica simple G es conexa si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V$ existe un camino no-dirigido entre u y v . Análogamente, una digráfica D es conexa si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V$ existe un camino no dirigido entre u y v . Decimos que D es 2-conexa si para todo $v \in V$, $D - v$ es una digráfica conexa ó consta de un único vértice.

Llamamos bloques de D a las subdigráficas inducidas de D que son 2-conexas y máximas por contención con esta propiedad.

Importante: a partir de este punto todas las digráficas consideradas son digráficas conexas, salvo que se indique lo contrario.

Definición 2.12. Una digráfica D es fuertemente conexa (o fuerte) si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V$, existe una uv -trayectoria y una vu -trayectoria en D .

Llamamos componentes fuertemente conexas de D , o simplemente componentes fuertes, a las subdigráficas inducidas de D que son fuertemente conexas y son máximas por contención con esta propiedad. Se sigue de la definición que una digráfica es fuertemente conexa si y sólo si tiene una única componente fuertemente conexa (ella misma).

Es claro que si D_1 y D_2 son componentes fuertes de D , entonces pueden existir flechas de D_1 a D_2 , ó de D_2 a D_1 , pero nunca ambas, pues entonces $[V(D_1) \cup V(D_2)]$ sería fuertemente conexa, contradiciendo que las componentes son máximas por contención.

Decimos que una componente fuerte D_1 es terminal si no salen flechas de D_1 ; es decir, si para todo par de vértices $u \in V(D_1)$ y $v \in V \setminus V(D_1)$, se tiene que $(u, v) \notin F(D)$.

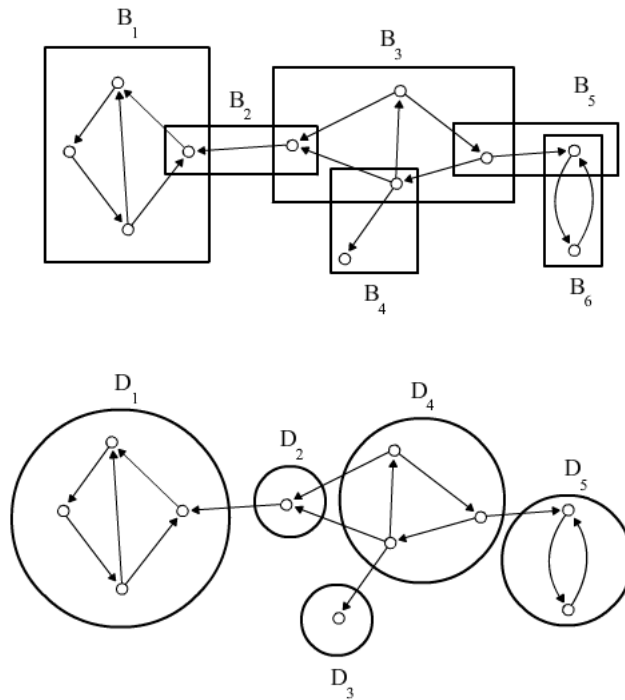


Figura 2.6: Los bloques (arriba) y las componentes fuertemente conexas de una digráfica.

Definición 2.13. Sea D una digráfica. Su digráfica de líneas, denotada $L(D)$, es la digráfica definida como sigue:

- Los vértices de $L(D)$ son las flechas de D .
- Dados dos vértices $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V(L(D))$, $((u_1, v_1), (u_2, v_2))$ es una flecha de $L(D)$ si y sólo si $v_1 = u_2$.

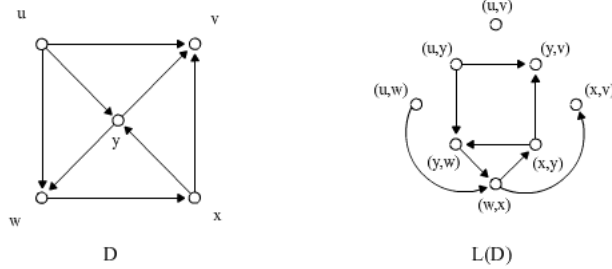


Figura 2.7: Una digráfica D y su digráfica de líneas $L(D)$.

La siguiente proposición es consecuencia directa de la definición 2.13.

Proposición 2.14. D es un ciclo par (impar) si y sólo si $L(D)$ es un ciclo par (impar).

Proposición 2.15. Si $L(D)$ es una digráfica de líneas con más de 4 vértices, entonces $L(D)$ no es un torneo.

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que $L(D)$ es un torneo. Sea $U \subseteq V(L(D))$ un conjunto de cuatro vértices de $L(D)$ y sea G la subdigráfica inducida por U . Es claro que G es un torneo de cuatro vértices. Como existe una flecha entre cada pareja de estos vértices, tenemos que $|F(G)| = \binom{4}{2} = 6$. Entonces $\sum_{v \in U} \delta^+(v) = \sum_{v \in U} \delta^-(v) = 6$. Se sigue que existe un vértice $v \in U$ tal que $\delta^+(v) \geq 2$. Sean $u, w \in U$ dos de los vecinos exteriores de v . Esto es $(v, u), (v, w) \in F(G)$, lo que implica que $(v, u), (v, w) \in F(L(D))$. Además, como G es un torneo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(u, w) \in F(L(D))$. Entonces, en D las flechas v y u forman una trayectoria de longitud 2 (recordemos que los vértices de $L(D)$ corresponden a flechas de D). Análogamente, las flechas v y w forman otra trayectoria de longitud 2 en D . Se sigue que en D , las flechas u y w tienen el mismo vértice inicial. Pero como $(u, w) \in F(L(D))$, en D las flechas u y w forman una tercera trayectoria de longitud 2, lo que contradice que tengan el mismo vértice inicial. Por lo tanto, $L(D)$ no es un torneo. \square

Un argumento completamente análogo muestra que:

Proposición 2.16. Si $L(D)$ es una digráfica de líneas con más de 4 vértices, entonces $L(D)$ no es una digráfica semi-completa.

Definición 2.17. Sea D una digráfica y $N \subseteq V$ un conjunto de vértices de D . Decimos que N absorbe a un vértice $u \in V \setminus N$ si existe la flecha $(u, v) \in F$ para algún vértice $v \in N$. En este caso decimos que (u, v) es una uN -flecha.

Por ejemplo, en la figura 2.7, tenemos que el conjunto $\{w, x\} \subseteq V$ absorbe a los vértices u y y .

Decimos que un conjunto $N \subseteq V$ es absorbente si absorbe a todos lo vértices de $V \setminus N$; esto es, si para todo vértice u que no está en N , existe una uN -flecha.

Naturalmente, toda digráfica tiene al menos un conjunto absorbente ya que V siempre es absorbente.

Sea D una digráfica. Si un conjunto $N \subseteq V$ es tal que para cualesquiera dos vértices $u, v \in N$, (u, v) no es una flecha de D , entonces decimos que N es un conjunto independiente.

Es claro que un conjunto que consta de un sólo vértice siempre es independiente puesto que un vértice nunca está relacionado consigo mismo. En la figura 2.7, los conjuntos $\{u, x\}$ y $\{w, v\}$ son conjuntos independientes.

Definición 2.18. Un núcleo $N \subseteq V$ es un conjunto de vértices que es a la vez absorbente e independiente.

La existencia de un núcleo único en una digráfica nunca es algo garantizado: algunas digráficas no tienen núcleo (e.g. ciclos de longitud impar), y otras tienen más de uno (e.g. ciclos de longitud par). Las siguientes proposiciones dan algunas condiciones suficientes para que una digráfica tenga un núcleo.

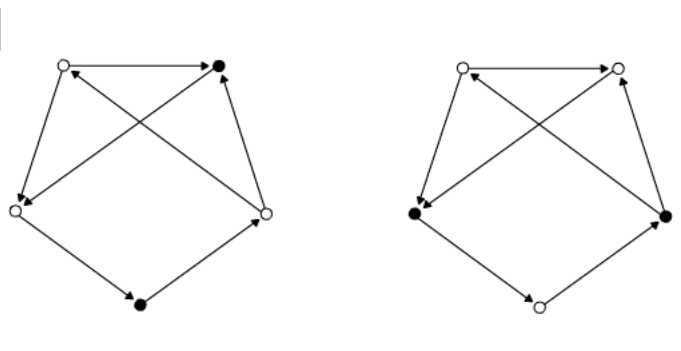


Figura 2.8: Los núcleos en digráficas, de existir, no necesariamente son únicos. Coloreados de negro, los vértices de dos núcleos distinto de la misma digráfica.

Proposición 2.19. Si D es una digráfica acíclica, entonces D tiene núcleo.

Demostración. Procederemos por inducción sobre el orden de D . Es claro que K_1 , la digráfica que consta de un sólo vértice, tiene núcleo. Supongamos ahora que toda digráfica acíclica de orden k , con $k < n$, tiene un núcleo. Sea D una digráfica acíclica de orden n . Como D es acíclica entonces el conjunto $K = \{v \in V : \delta^+(v) = 0\}$ es distinto del vacío (proposición 2.5). Claramente K es una conjunto independiente. Definimos la invecindad de K , como el conjunto $K^- = \cup_{v \in K} \Gamma^-(v)$. Ahora, sea D' la subdigráfica inducida por $V \setminus (K \cup K^-)$. Notemos que si $V \setminus (K \cup K^-) = \emptyset$, entonces K es un núcleo de D . Entonces podemos suponer que $V \setminus (K \cup K^-)$ es no vacío. Dado que $K \neq \emptyset$, D' tiene menos de n vértices y entonces, por hipótesis inductiva, tiene un núcleo N .

Afirmación: $N \cup K$ es un núcleo de D .

Consideremos un vértice $v \in V \setminus (N \cup K)$. Claramente $v \in K^-$ ó $v \in V(D') \setminus N$. En el primer caso, K absorbe a v . En el segundo caso, N absorbe a v , ya que N es núcleo de D' . Así, $N \cup K$ es absorbente. Además, K y N son independientes. Como $\delta^+(v) = 0$ para todo $v \in K$, tenemos que no hay flechas de K hacia N ; y como por construcción $N \cap K^- = \emptyset$, tenemos que no hay flechas de N hacia K . Entonces $K \cup N$ es independiente. Por lo tanto $K \cup N$ es un núcleo de D . \square

Proposición 2.20. *Si D es un ciclo de longitud par, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Sea $D = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ un ciclo de longitud par. Es fácil ver que los conjuntos $V_+ = \{v_i \in V : i \text{ es par}\}$ y $V_- = \{v_i \in V : i \text{ es impar}\}$ son los dos únicos núcleos de D . \square

Proposición 2.21. *Si D es un ciclo de longitud impar, entonces D no tiene núcleo.*

Demostración. Si $v_0 \in N$, entonces $V_+ \subseteq N$, lo que contradice la independencia de N , ya que $v_{n-1}, v_0 \in V_+$ y $(v_{n-1}, v_0) \in F$.

Si $v_0 \notin N$, entonces $V_- \subseteq N$, lo que contradice la ausencia de N , ya que v_{n-1} no es absorbido por N .

Sea $D = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ un ciclo de longitud impar y sean $V_+ = \{v_i \in V : i \text{ es par}, i \in \{1, \dots, n\}\}$ y $V_- = \{v_i \in V : i \text{ es impar}, i \in \{1, \dots, n\}\}$. Supongamos que D tiene un núcleo $N \subseteq V$. Claramente, $v_i \notin N$ si y sólo si $v_{i+1} \in N$. Tenemos entonces dos casos posibles. \square

Proposición 2.22. *Sea D una digráfica. Si todo ciclo de D tiene una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Probaremos primero que para toda digráfica D en la que todo ciclo tiene una flecha simétrica, existe una subdigráfica D' acíclica que cumple las siguientes condiciones:

1. $V(D') = V(D)$
2. $(u, v) \in F(D) \setminus F(D') \Rightarrow (v, u) \in F(D') \cap F(D)$

Procedemos por inducción sobre la cantidad de ciclos en D . Si D tiene un sólo ciclo $\gamma = (x_0, \dots, x_j = x_0)$ con una flecha simétrica (x_s, x_{s+1}) , para alguna $s \in \{0, \dots, j-1\}$, tomamos $D' = D \setminus \{(x_s, x_{s+1})\}$. Es claro que D' cumple las condiciones (1.) y (2.).

Supongamos que toda digráfica D con k ciclos, $k < n$, contiene una subdigráfica acíclica que cumple las condiciones (1.) y (2.) siempre que todo ciclo de D tenga una flecha simétrica.

Sea D una digráfica con n ciclos, en la que todo ciclo tiene una flecha simétrica. Sea C el conjunto de ciclos de D con sólo una flecha simétrica.

Si $C = \emptyset$, todo ciclo en D tiene al menos dos flechas simétricas. Consideremos $\gamma = (x_0, \dots, x_j = x_0)$ un ciclo arbitrario en D . Entonces, para alguna $s \in \{0, \dots, j-1\}$, (x_s, x_{s+1}) es una flecha simétrica de γ . Consideremos $D_1 = D \setminus \{(x_s, x_{s+1})\}$. Es claro que todo ciclo en D_1 tiene al menos una flecha simétrica y que D_1 tiene menos de n ciclos. Entonces, por hipótesis inductiva, D_1 tiene una subdigráfica D' tal que $V(D') = V(D_1)$ y $(u, v) \in F(D_1) \setminus F(D') \Rightarrow (v, u) \in F(D') \cap F(D)$.

Si $C \neq \emptyset$. Consideremos $\gamma_x = (x_0, \dots, x_h = x_0)$ un ciclo con una sólo flecha simétrica. Sea (x_s, x_{s+1}) , para alguna $s \in \{0, \dots, h-1\}$, la flecha simétrica de γ_x . Consideremos $D_1 = D \setminus \{(x_s, x_{s+1})\}$.

Veamos que todo ciclo en D_1 tiene una flecha simétrica. En busca de una contradicción, supongamos que existe un ciclo $\gamma_y = (y_0, \dots, y_l = y_0)$ en D_1 sin flechas simétricas. Esto implica que (x_{s+1}, x_s) es una flecha de γ_y y ésta es la única flecha simétrica de γ_y en D . Sin pérdida de generalidad $x_s = y_0$ y $x_{s+1} = y_{l-1}$. Sea $r \in \{1, \dots, l-1\}$ el menor entero para el cual $y_r \in V(\gamma_x) \cap V(\gamma_y)$. Este número existe ya que $y_{l-1} = x_{s+1}$. Entonces $y_r = x_t$ para alguna $t \in \{0, \dots, h\}$. Consideremos el camino cerrado $\zeta = (y_0, y_1, \dots, y_{r-1}, y_r = x_t, x_{t+1}, \dots, x_{s-1}, x_s = y_0)$. Notemos que $y_0 \neq y_r$. Además, por la elección de r , $y_i \neq x_j$ con $i \in \{2, \dots, r-1\}$ y $j \in \{0, \dots, h-1\}$. Se sigue que ζ es un ciclo y por lo tanto debe tener una flecha simétrica distinta de (y_{l-1}, y_0) . Esto implica la existencia de una segunda flecha simétrica en γ_x o en γ_y , llevándonos a una contradicción.

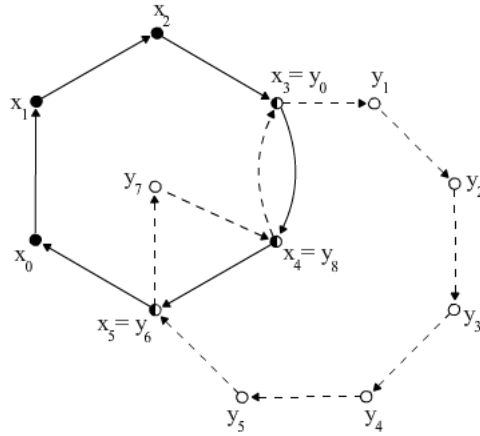


Figura 2.9: Una posible representación de los ciclos γ_x (flechas en negro) y γ_y (flechas punteadas). En esta configuración, $x_s = x_3$, $y_r = y_6$ y $\zeta = (y_0, y_1, \dots, y_5, y_6 = x_5, x_0, x_1, x_2, x_3 = y_0)$.

Se tiene que todo ciclo en D_1 tiene una flecha simétrica y que D_1 tiene menos de n ciclos. Por hipótesis inductiva, existe una subdigráfica acíclica D' de D_1 tal que $V(D') = V(D_1)$ y $(u, v) \in F(D_1) \setminus F(D') \Rightarrow (v, u) \in F(D') \cap F(D)$. Es

claro que $V(D') = V(D)$ y $(u, v) \in F(D) \setminus F(D') \Rightarrow (v, u) \in F(D') \cap F$.

Ahora, como D' no tiene ciclos, tiene un núcleo N . Veamos que N es también núcleo de D . Claramente N es absorbente en D , ya que es absorbente en D' . Supongamos que N no es independiente en D , entonces existen $u, v \in N$ tales que $(u, v) \in F(D) \setminus F(D')$. Entonces, por (2.), tenemos que $(v, u) \in F(D')$, lo que contradice que N sea independiente en D' . Por lo tanto N es núcleo de D . \square

Definición 2.23. Una digráfica D es núcleo-perfecta si para toda subdigráfica inducida $D' \subseteq D$, se tiene que D' tiene un núcleo.

Se sigue de la definición anterior que toda digráfica núcleo-perfecta tiene núcleo.

Proposición 2.24. Si D es una digráfica transitiva, entonces D es núcleo-perfecta.

Demostración. Sea D una digráfica transitiva y sea $D' \subseteq D$ una subdigráfica inducida de D . Como D es transitiva, entonces D' también lo es. Por proposición 2.9 todo ciclo de D' tiene una flecha simétrica y por proposición 2.22 tenemos que D' tiene núcleo. \square

Proposición 2.25. Si D es un torneo transitivo, D tiene un único núcleo.

Demostración. Sea D un torneo con n vértices y sea $x \in V$ un vértice de ingrado máximo. Si $\delta^-(x) = n-1$, $\{x\}$ es núcleo de D . Si $\delta^-(x) < n-1$ entonces existe un vértice $x' \in V$ tal que $(x, x') \in F$. Consideremos $\Gamma^-(x) = \{v \in V : (v, x) \in F\}$. Dado que D es transitivo, tenemos que para todo $v \in \Gamma^-(x)$, $(v, x') \in F$ es una flecha de D y entonces $\delta^-(x') \geq \delta^-(x) + 1$, lo que contradice que x sea de ingrado máximo. Así, $\delta^-(x) = n-1$. Además, x no es absorbido por ningún vértice en D ya que D no tiene flechas simétricas, lo que garantiza que el núcleo $\{x\}$ es único. \square

Proposición 2.26. Una digráfica D es transitiva si y sólo si es cuasitransitiva y núcleo-perfecta.

Demostración. Para la condición necesaria, recordemos que toda digráfica transitiva es por definición cuasitransitiva. Por proposición 2.24 tenemos que las digráficas transitivas son núcleo-perfectas.

Para la otra implicación, sea D una digráfica cuasitransitiva y núcleo-perfecta. Sea $T = (v_0, v_1, v_2)$ una trayectoria de longitud dos en D . Como D es cuasitransitiva, v_0 debe ser adyacente a v_2 . Si $(v_0, v_2) \notin F$ entonces $(v_2, v_0) \in F$ y entonces la subgráfica inducida por el conjunto de vértices $\{v_0, v_1, v_2\}$ es un ciclo de longitud 3, lo que contradice que D sea núcleo-perfecta. Entonces necesariamente (v_0, v_2) es una flecha de D y como la elección de T fue arbitraria, queda probado que D es una digráfica transitiva. \square

3. Núcleos por trayectorias monocromáticas

Definición 3.1. Sea $[k] := \{1, 2, \dots, k\}$ un conjunto de k elementos que llamaremos colores. Una coloración de los vértices de una digráfica D , es una función $\varsigma : V \rightarrow [k]$, que asigna un color a cada vértice.

Una k -coloración de los vértices de una digráfica D es una coloración de sus vértices con k colores. Llamamos clase cromática al conjunto de todos los vértices de D que están coloreados con un mismo color. Formalmente, un conjunto de vértices $U \subseteq V$ es la clase cromática correspondiente a $i \in [k]$ si $U = \varsigma^{-1}(i)$. Así, una k -coloración es una partición del conjunto de vértices V con k elementos disjuntos (las clases cromáticas de D).

Definición 3.2. Decimos que una coloración de los vértices de una digráfica es propia si no existen dos vértices adyacentes del mismo color, es decir, si las clases cromáticas son conjuntos independientes.

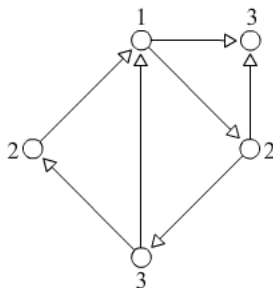


Figura 3.1: Una 3-coloración propia de los vértices de una digráfica con el conjunto de colores $\{1, 2, 3\}$

Definición 3.3. El número cromático $\chi(D)$, de una digráfica D , es el mínimo número natural k para el cual D tiene una k -coloración propia.

Se tiene que para toda digráfica D de orden n , $1 \leq \chi(D) \leq n$. Se da la igualdad $1 = \chi(D)$ cuando D no tiene flechas, y $\chi(D) = n$ cuando D es una digráfica semi-completa. Es claro que para todo natural l tal que $\chi(D) \leq l \leq n$, existe una l -coloración propia de los vértices de D .

Se sigue de las definiciones 2.1 y 3.3 que $\chi(D) = \chi(G_D)$. Este hecho es de particular utilidad cuando tomamos en cuenta el Teorema de Brooks, que da una cota del número cromático de gráficas simples y por extensión, de digráficas cuando se conoce el grado máximo de la digráfica subyacente. La demostración de este teorema puede encontrarse en [3].

Teorema 3.4. (Brooks) Si G es una gráfica conexa simple distinta de un ciclo de longitud impar o una gráfica completa, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

De manera análoga a como se colorean los vértices de una digráfica, también se pueden colorear sus flechas. Lo que motiva las siguientes definiciones.

Definición 3.5. Sea $[k] := \{1, 2, \dots, k\}$ un conjunto de k elementos que llamaremos colores. Una coloración de las flechas de una digráfica D , es una función $\varsigma : F \rightarrow [k]$, que asigna un color a cada flecha.

En este caso llamaremos clase cromática al conjunto de todas las flechas de D que están coloreadas con un mismo color. Formalmente, si D es una digráfica con una coloración $\varsigma : F \rightarrow [k]$ de sus flechas, $E \subseteq F$ es la clase cromática correspondiente a $i \in [k]$ si $E = \varsigma^{-1}(i)$.

Definición 3.6. Sea D una digráfica y $T = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ una trayectoria en D . Decimos que T es una trayectoria monocromática si para toda $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, las flechas (v_i, v_{i+1}) son del mismo color -i.e. están en la misma clase cromática.

Diremos que una coloración de las flechas de una digráfica D es propia si todas las trayectorias monocromáticas de D son de longitud 1. El índice cromático de una digráfica D , denotado $\chi'(D)$, es el mínimo número natural k para el cual D tiene una k -coloración propia de sus flechas. Es claro que para toda digráfica D , $\chi'(D) = \chi(L(D))$.

Definición 3.7. Sea D una digráfica y ς una coloración de sus flechas. Un conjunto de vértices $A \subseteq V$ es un conjunto ς -absorbente si para todo $v \in V \setminus A$, existe una vA -trayectoria monocromática.

Decimos que $A \subseteq V$ es un conjunto ς -independiente si para cualesquiera $u, v \in A$, se tiene que no existe una uv -trayectoria monocromática en D .

Dado que toda flecha es una trayectoria monocromática de longitud 1, todo conjunto ς -independiente es independiente, pero el converso no necesariamente es cierto.

Notemos que tampoco los conceptos de absorbencia y ς -absorbencia son equivalentes: todo conjunto absorbente (en el sentido tradicional) también es ς -absorbente, pero el recíproco no siempre es cierto.

Definición 3.8. Sea D una digráfica y ς una coloración de sus flechas. Decimos que $N \subseteq V$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas, o simplemente un ς -núcleo, si N es ς -absorbente y ς -independiente.

La existencia de ς -núcleos en una digráfica depende fuertemente de la coloración de sus flechas. Así, una digráfica puede tener un ς -núcleo con algunas k -coloraciones y con otras no.

Si bien núcleo y ς -núcleo son conceptos similares, la existencia de núcleos en una digráfica no garantiza la existencia de ς -núcleos, y viceversa. La relación, cuando la hay, entre núcleos y ς -núcleos en ciertas clases de digráficas va a ser explorada en las siguientes secciones.

Notemos que en toda digráfica D con una coloración ς , los núcleos y los ς -núcleos coinciden si ς es una coloración propia.

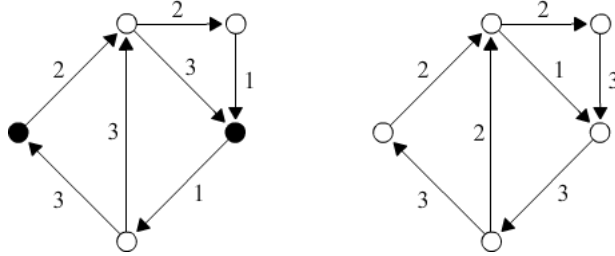


Figura 3.2: Dos coloraciones de las flechas de una digráfica D . Con la coloración de la izquierda, D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas (vértices negros), mientras que con la coloración de la derecha no.

Proposición 3.9. *Si D es una digráfica 1-coloreada por flechas, entonces D tiene un ς -núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica y sea ς una 1-coloración de sus flechas. Notemos que con esta coloración, todas las trayectorias de D son trayectorias monocromáticas. Empezaremos probando que para todo vértice $v_0 \in V$ que no está en una componente terminal, existe una trayectoria $T = (v_0, v_1, \dots, v_j)$ donde v_j es el único vértice de T que está en una componente terminal. Procedemos por inducción sobre n , la cantidad de componentes fuertemente conexas de D .

Si D es fuertemente conexas, todos sus vértices están en una misma componente terminal y por lo tanto cualquier vértice es un ς -núcleo. Entonces, para el caso base, consideremos una digráfica con dos componentes conexas D_1 y D_2 , donde D_2 es terminal pero D_1 no. Consideremos un vértice $v_0 \in V(D_1)$. Como D es conexas, existe una flecha (u, w) , con $u \in V(D_1)$ y $w \in V(D_2)$. Además, existe una v_0u -trayectoria en D_1 ya que es una componente fuerte. Así, existe una v_0w -trayectoria T en D . Es claro que w es el único vértice de T que está en D_2 .

Supongamos que si D tiene k componentes fuertemente conexas, $k < n$, entonces para todo $v_0 \in V$ que no está en una componente terminal, existe una v_0v_j -trayectoria T , donde v_j es el único vértice de T que está en una componente terminal de D .

Sea D una digráfica con n componentes fuertemente conexas D_1, D_2, \dots, D_n . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que D_n es una componente terminal. Sea D' la digráfica inducida por $V(D) \setminus V(D_n)$. Es claro que D' tiene $n - 1$ componentes fuertes: D_1, D_2, \dots, D_{n-1} . Consideremos un vértice $v_0 \in V(D)$ que no está en una componente terminal de D . Por hipótesis inductiva, existe una trayectoria $T = (v_0, v_1, \dots, v_j)$ en D' donde v_j es el único vértice de T que está en una componente terminal D_k , de D' . Si D_k es una componente terminal de D , aquí concluye esta parte de la prueba. Entonces, supongamos que D_k no es una componente terminal de D . Esto es, existe una flecha $(y, z) \in F(D) \setminus F(D')$, con

$y \in D_k$ y $z \in D_n$. Como y y v_j están en la misma componente fuerte, existe una trayectoria $T_1 = (v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+h} = y)$ en D_k . Ahora, consideremos el camino $T_2 = (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+h} = y, z)$. Notemos que $v_i \in V(D) \setminus V(D_k)$ para todo $i \in \{0, \dots, j-1\}$; $v_i \in V(D_k)$ para todo $i \in \{j, j+1, \dots, j+h\}$; $z \in V(D_n)$. Se sigue que T_2 es una v_0z -trayectoria, donde z es el único vértice de T_2 que está en una componente terminal de D .

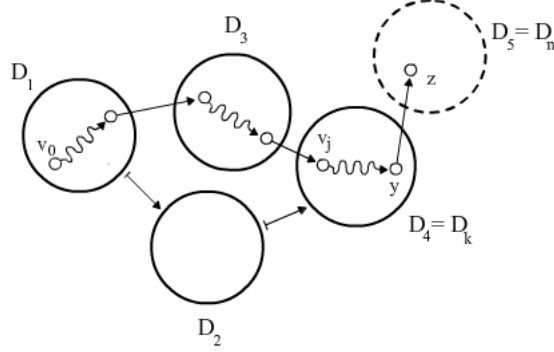


Figura 3.3: Una posible representación de D con cinco componentes fuertes donde se muestran la trayectoria T_2 . Las flechas onduladas representan trayectorias dentro de las componentes conexas de D .

Teniendo este resultado, consideremos un conjunto $N \subseteq V$ tal que:

1. $|N \cap V(D_i)| = 1$ si D_i es una componente terminal de D .
2. $|N \cap V(D_i)| = 0$ si D_i no es una componente terminal de D .

Esto es, N tiene exactamente un vértice de cada componente terminal de D . Probemos que N es un ζ -núcleo de D .

Para ver que N es ζ -absorbente, tomemos un vértice $u \in V(D) \setminus N$. Si u está en una componente terminal, entonces claramente es absorbido por algún vértice $w \in N$. Si u no está en una componente terminal, entonces existe una uv -trayectoria T donde v es el único vértice de T que está en alguna componente terminal de D . Sea D_k esta componente terminal. Tenemos que existe una vw -trayectoria donde $w \in N \cap V(D_k)$ (o $v \in N \cap V(D_k)$) lo que implica que existe una uw -trayectoria con $w \in N$. Así, N es ζ -absorbente.

Por otro lado, como no salen flechas de las componentes terminales de D , no puede existir una uv -trayectoria para dos vértices u y v en componentes terminales distintas. Así, N también es ζ -independiente y por lo tanto, es un ζ -núcleo de D . \square

Definición 3.10. Definimos la cerradura transitiva de una digráfica D coloreada por flechas como la única digráfica $\mathcal{C}(D)$ tal que:

1. $V(D) = V(\mathcal{C}(D))$

2. $(u, v) \in F(\mathcal{C}(D))$ si y sólo si existe una uv -trayectoria monocromática en D .

Observación. Para toda digráfica, $D \subseteq \mathcal{C}(D)$.

Proposición 3.11. *Sea D una digráfica y sea ς una coloración de sus flechas. D tiene un ς -núcleo si y sólo si $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica coloreada por flechas y sea N un ς -núcleo de D . Por definición tenemos que $V(D) = V(\mathcal{C}(D))$. Como N es ς -independiente en D , entonces N es independiente en $\mathcal{C}(D)$. Basta entonces probar que N es absorbente en $\mathcal{C}(D)$. Supongamos que existe $v \in V(\mathcal{C}(D)) \setminus N$ que no es absorbido por N -i.e. no existe una vN -flecha. Entonces no existe una vN -trayectoria monocromática en D , y por lo tanto N no es ς -absorbente en D , llevándonos a una contradicción. Por lo tanto, N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

Para la condición de suficiencia, sea D una digráfica coloreada por flechas tal que su cerradura transitiva $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo N . Claramente N es independiente en D . Probaremos que N es ς -absorbente en D . Consideremos un vértice $v \in V(\mathcal{C}(D)) \setminus N$. Como N es un núcleo, existe una vN -flecha en $\mathcal{C}(D)$, lo que implica la existencia de una vN -trayectoria monocromática en D . Por lo tanto N es ς -absorbente en D . \square

Corolario 3.12. *N es un ς -núcleo de D si y sólo si N es un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.*

El siguiente teorema, demostrado por Sands, Sauer y Woodrow [12], garantiza la existencia de ς -núcleos en digráficas 2-coloreadas.

Teorema 3.13. *Si D es una digráfica 2-coloreada, D tiene un ς -núcleo.*

Este resultado es en general falso para k -coloraciones con $k > 2$. Los ejemplos de digráficas coloreadas que no admiten ς -núcleos con algunas coloraciones abundan y son muy diversos en su tamaño y orden. Por ejemplo, es fácil ver que un ciclo de longitud 3 no admite un ς -núcleo si la coloración ς es propia. Entonces no resulta asunto trivial el preguntarse qué características tiene que tener una digráfica para que admita un núcleo por trayectorias monocromáticas cuando se colorean sus flechas con 3 colores, 4 colores, etc. No menos trivial es encontrar criterios que nos permitan determinar el máximo natural k para el cual toda k -coloración de las flechas de una digráfica admite ς -núcleos. Estos problemas se abordarán en la sección siguiente.

4. El número pancromático

Definición 4.1. Sea D una digráfica. Su número pancromático $\pi(D)$ es el mayor natural k para el cual toda k -coloración de las flechas de D admite un núcleo por trayectorias monocromáticas.

El teorema de Sands, Sauer y Woodrow nos garantiza que el número pancromático de una digráfica D siempre existe y que $2 \leq \pi(D)$. Evidentemente $\pi(D) \leq m$, donde $m = |F|$. Así, para toda digráfica tenemos que $2 \leq \pi(D) \leq m$.

Si bien puede parecer contraintuitivo a primera vista, el hecho de que $\pi(D) = k$ no garantiza que toda k' -coloración, con $k' < k$, admita un núcleo por trayectorias monocromáticas. Mostraremos que la digráfica D de la figura 1 admite núcleos por trayectorias monocromáticas para cada coloración de sus flechas con 1, 2, 8 y 9 colores, pero existen coloraciones con 3, 4, 5, 6 y 7 colores sin núcleos por trayectorias monocromáticas.

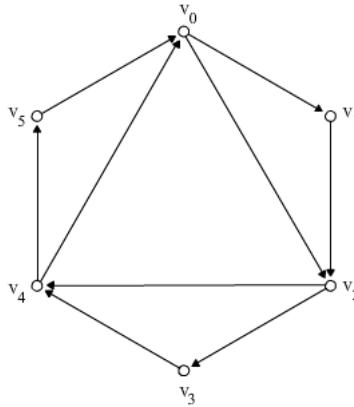


Figura 4.1: Digráfica D con número pancromático 9.

Notemos que el conjunto de vértices $\{v_1, v_3, v_5\}$ es un núcleo, en el sentido de Von Neumann, de la digráfica. Esto garantiza que tiene núcleo por trayectorias monocromáticas con cada 9-coloración -i.e. $\pi(D) = 9$. La proposición 3.9 y el teorema 3.13 nos garantizan que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas para toda 1- y 2-coloración, respectivamente. Consideremos ahora una 8-coloración ζ . Observemos que con ζ , D tiene a lo más una trayectoria monocromática y ésta, de existir, es de longitud 2. También es fácil ver que si $\{v_1, v_3, v_5\}$ es ζ -independiente, entonces $\{v_1, v_3, v_5\}$ es un ζ -núcleo de D . Podemos suponer que la única trayectoria monocromática posible bajo ζ une a dos vértices de $\{v_1, v_3, v_5\}$. Sin pérdida de generalidad, esta trayectoria es una $v_1 v_3$ -trayectoria monocromática. Pero entonces tenemos que $\{v_0, v_3\}$ es un ζ -núcleo. Así, D admite un núcleo por trayectorias monocromáticas con toda 8-coloración.

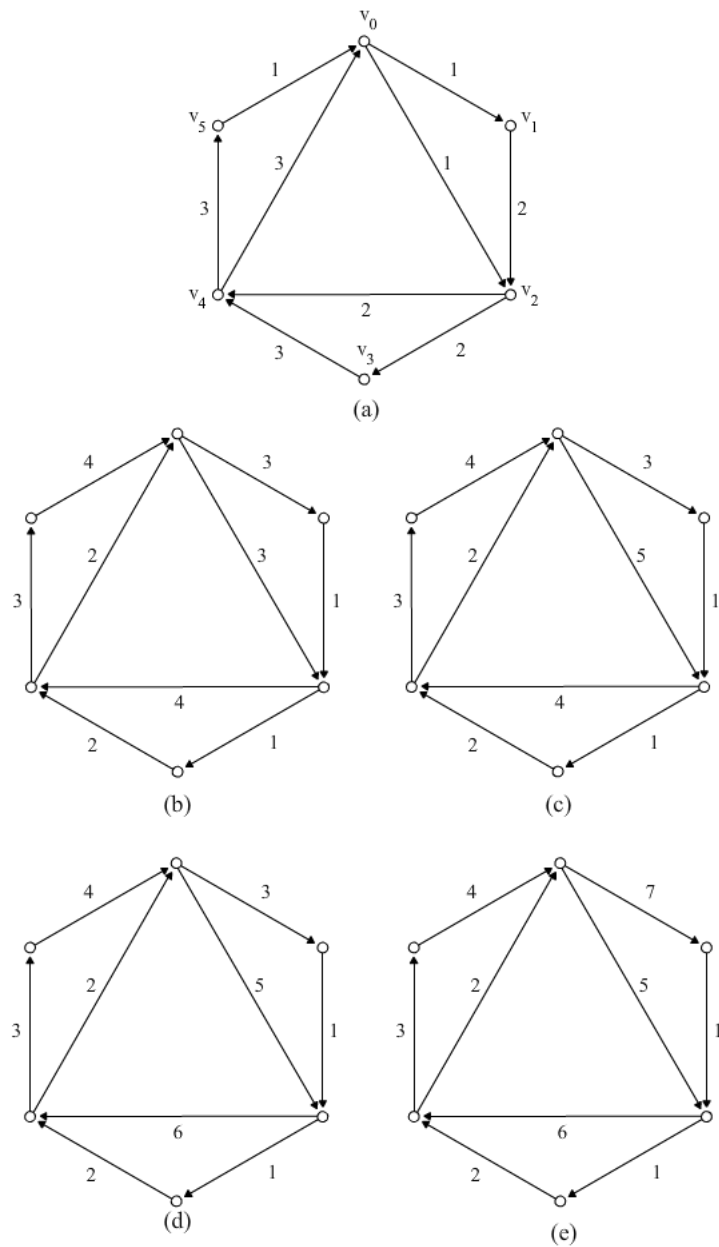


Figura 4.2: Coloraciones de D que no admiten núcleos por trayectorias monocromáticas.

La figura 4.2 muestra 3-, 4-, 5-, 6- y 7-coloraciones sin núcleo por trayectorias monocromáticas. Empecemos probando que con la coloración del inciso (a), D no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Para esto, supongamos que

D sí tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas N . Supongamos también que $v_0 \in N$. Como v_0 no absorbe a v_2 mediante una trayectoria monocromática, entonces necesariamente $v_3 \in N$ ó $v_4 \in N$. En ambos casos llegamos a una contradicción ya que (v_3, v_4, v_0) es una trayectoria monocromática de color 3. Entonces $v_0 \notin N$. Dado que la digráfica (con esta coloración) es altamente simétrica, un argumento completamente análogo muestra que $v_2 \notin N$ y $v_4 \notin N$. Ahora, supongamos que $v_1 \in N$. Notemos que los únicos vértices que absorben a v_2 mediante una trayectoria monocromática son v_3 y v_4 . Entonces $v_3 \in N$ ó $v_4 \in N$. Pero tenemos, que (v_1, v_2, v_3) y (v_1, v_2, v_4) son trayectorias monocromáticas de color 2, lo que contradice la ζ -independencia de N . Un argumento análogo muestra que $v_3 \notin N$ y $v_5 \notin N$. Así, D no tiene núcleos por trayectorias monocromáticas con esta coloración.

Para probar que D no tiene núcleos por trayectorias monocromáticas con las coloraciones de los incisos (b), (c), (d) y (e), notemos que con estas cuatro coloraciones, D tiene la misma cerradura transitiva $\mathcal{C}(D)$ (ver figura 4.3). Entonces basta probar que $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo. Supongamos que $\mathcal{C}(D)$ sí tiene un núcleo N . Si $v_0 \in N$, entonces $v_2 \notin N$ y $v_3 \notin N$, de donde se sigue que N no absorbe a v_1 . Así, $v_0 \notin N$. Si $v_1 \in N$, necesariamente $v_4 \in N$ (si no, v_2 no es absorbido por N). Pero entonces tenemos que v_5 no es absorbido por N . Se sigue $v_1 \notin N$. Finalmente si $v_2 \in N$, entonces v_3 no es absorbido por N . Así, $v_2 \notin N$. Hemos probado que ningún vértice en $\Gamma^+(v_0) = \{v_1, v_2\}$ puede estar en un núcleo de $\mathcal{C}(D)$ y que v_0 tampoco puede estar en un núcleo de $\mathcal{C}(D)$. Se sigue que $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo y por lo tanto, D no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

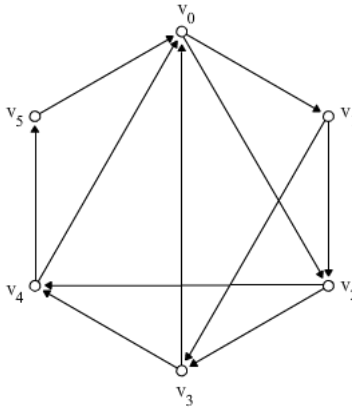


Figura 4.3: La cerradura de D .

Proposición 4.2. *Sea D una digráfica con m flechas. D tiene núcleo si y sólo si $\pi(D) = m$.*

Demostración. Sea D una digráfica y sea $N \subseteq V(D)$ un núcleo de D . Como N es por definición absorbente, se tiene que es también ζ -absorbente. Dotemos de una m -coloración a las flechas de D . Dado que hay exactamente m flechas

y m colores, es claro que no hay dos flechas del mismo color. Así, todas las trayectorias monocromáticas de D son de longitud uno, lo que nos garantiza la independencia de N con esta coloración. Por lo tanto N es ζ -núcleo para toda m -coloración.

Si $\pi(D) = m$, entonces D tiene un ζ -núcleo N . Como todo conjunto ζ -independiente es también independiente, basta probar que N es absorbente. Como bajo toda m -coloración, toda trayectoria monocromática es de longitud 1, se tiene que N es absorbente y por lo tanto es un núcleo. \square

Definición 4.3. Una digráfica D con m flechas es pancromática si para todo natural $k \in \{1, \dots, m\}$, toda k -coloración de las flechas de D admite un núcleo por trayectorias monocromáticas.

4.1. Algunas digráficas pancromáticas

Las proposiciones 4.4, 4.5, 4.6, 4.8 se deben a Galeana-Sánchez y Strausz [10]

Proposición 4.4. Si D es una digráfica que no contiene ciclos o trayectorias de longitud 3, entonces D es pancromática.

Demostración. Comencemos dando una 3-coloración $\zeta : F \rightarrow \{r, a, v\}$ a D . Nos referiremos a los colores como rojo, azul y verde respectivamente. Ahora, identifiquemos las clases cromáticas azul y roja, fusionándolas en una sola clase que llamaremos púrpura. Así, obtenemos una 2-coloración $\zeta' : F \rightarrow \{p, v\}$ de D . Por proposición 3.13 D tiene un ζ' -núcleo N . Si N es un ζ -núcleo aquí termina la prueba. Supongamos entonces que no lo es. Nótese que la independencia de N es heredada de ζ a ζ' -i.e., $U \subseteq V$ es ζ -independiente siempre que sea ζ' -independiente. Simplemente tenemos que probar que N es ζ -absorbente.

Sea $u \in V \setminus N$ un vértice que no es ζ -absorbido por N con la coloración ζ . Como N sí es ζ' -absorbente, debe haber una uN -trayectoria púrpura de longitud 2: claramente no puede ser de longitud 1, y no puede ser de longitud mayor o igual a 3, ya que por hipótesis D no contiene dichas trayectorias. Supongamos entonces que $T = (u, v, w)$ es esa trayectoria. Podemos suponer que $N \cup \{u\}$ no es ζ -independiente. Entonces, existe un vértice $w' \in N$ y una $w'u$ -trayectoria, o (w, u) es una flecha de D . El último caso no es posible ya que D no admite trayectorias de longitud mayor a 2, y el primer caso induce un triángulo dirigido, también prohibido por hipótesis. Concluimos entonces que N -o bien, $N \cup \{u_1, \dots, u_l\}$ para alguna l - es ζ -absorbente y por lo tanto, un ζ -núcleo. Además, como las flechas verdes no jugaron ningún papel, podemos argumentar de manera similar con cualquier k -coloración, $k \in \{2, \dots, m\}$ y entonces se tiene que D es pancromática. \square

Proposición 4.5. Si D es una digráfica acíclica, entonces D es pancromática.

Demostración. Sea D una digráfica acíclica y sea ζ una coloración de sus flechas. Empezaremos probando que $\mathcal{C}(D)$, la cerradura transitiva de D , es una digráfica acíclica. Para esto, supongamos que $\mathcal{C}(D)$ tiene un ciclo C . Entonces, existe una

flecha $(u, v) \in F(\mathcal{C}(D))$ en el ciclo C que no es una flecha de D . Como (u, v) está en un ciclo tenemos que existe una uv -trayectoria y una vu -trayectoria en $\mathcal{C}(D)$. Esto implica la existencia de una uv -trayectoria y una vu -trayectoria en D , que a su vez implica la existencia de un ciclo en D , contradiciendo que D es acíclica.

Como $\mathcal{C}(D)$ es acíclica, $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo (prop. 2.22) y por proposición 3.11 D tiene un ζ -núcleo. \square

Proposición 4.6. *Una digráfica cuasi-transitiva tiene núcleo si y sólo si es pancromática.*

Demostración. Sea D una digráfica pancromática, entonces $\pi(D) = m$ y por lo tanto D tiene núcleo.

Para la otra implicación, sea D una digráfica cuasitransitiva y con núcleo y sea ζ una coloración de sus flechas. Sea $N \subset V$ un núcleo de D . Claramente N es ζ -absorbente, entonces basta ver que N sea ζ -independiente. Supongamos que existe una uv -trayectoria, con $u, v \in N$, y supongamos que es de longitud mínima. Por la proposición 2.7 sabemos que la digráfica de la figura 2.4, que denotaremos por B , es subdigráfica de D o u es adyacente a v .

Si $B \subseteq D$, como N es un núcleo, debe existir una flecha de x (ver figura 2.4) a algún vértice de N ; digamos que es (x, w) . Si $w \in \{u, v\}$ entonces u y w son adyacentes, lo que contradice la independencia de N .

De otro modo, u y v son adyacentes, lo que también nos lleva a una contradicción. \square

Dado que toda digráfica transitiva tiene núcleo, obtenemos que:

Corolario 4.7. *Si D es una digráfica transitiva, entonces D es pancromática.*

Proposición 4.8. *Un torneo T con más de dos vértices es pancromático si y sólo si $\pi(T) > 2$.*

Demostración. Sea T un torneo pancromático con más de dos vértices. Es claro que T tiene al menos tres flechas, y como es pancromático, $\pi(T) = m \geq 3$, quedando así desmostrada esta implicación.

Para la otra implicación, supongamos que T no es pancromático y por lo tanto, no tiene núcleo. Mostraremos que $\pi(T) = 2$. Sea B el conjunto de vértices de un torneo transitivo maximal contenido en T . B es distinto de V ya que T no tiene núcleo.

Definimos $N^+(B) = \{(u, v) \in F : u \in B \text{ y } v \notin B\}$ y $N^-(B) = \{(u, v) \in F : u \notin B \text{ y } v \in B\}$

Asignemos el color rojo a las flechas en $N^+(B)$, el color verde a las flechas en $N^-(B)$, y el azul a todas las demás flechas en $F(T) \setminus (N^+(B) \cup N^-(B))$. Veamos que T no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas con esta coloración. Recordemos que como T es un torneo, un núcleo debe consistir de un sólo vértice. Supongamos que $\{x\} \subseteq V$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D .

Supongamos que x está en B . Notemos que toda trayectoria de $V \setminus B$ a B de longitud mayor que 1, tiene una flecha azul y una verde. Así, x debe absorber

a todos los vértices de $V \setminus B$ por una flecha verde, es decir, (v, x) es una flecha de T para todo $v \in V \setminus B$. Además, existe un vx -trayectoria monocromática para cada $v \in B \setminus \{x\}$, pero como $T[B]$ es transitivo, $(v, x) \in F$ para todo $v \in B \setminus \{x\}$. Así, tenemos que $\{x\}$ absorbe por una flecha a todo vértice de $V \setminus \{x\}$ -i.e. x es un núcleo de T - lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto x no puede estar en B .

Ahora, supongamos que $x \in V \setminus B$. Tenemos que toda trayectoria de B a $V \setminus B$ de longitud mayor que 1, tiene una flecha roja y una azul. Entonces x debe absorber a cada vértice de B por una flecha roja. Notemos que $T[B \cup \{x\}]$ es un torneo transitivo, ya que para cada una trayectoria $\{u, v, x\}$, con $u, v \in B$, se tiene que (u, x) es una flecha de $T[B \cup \{x\}]$. Esto contradice que B sea maximal.

Hemos probado así que con esta coloración T no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Es decir, $\pi(T) \neq 3$. Podemos simplemente subdividir las clases cromáticas para mostrar que $\pi(T) \neq k$ para cada $k \in \{4, 5, \dots, m\}$. Así, necesariamente $\pi(T) = 2$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, T debe ser pancromático.

□

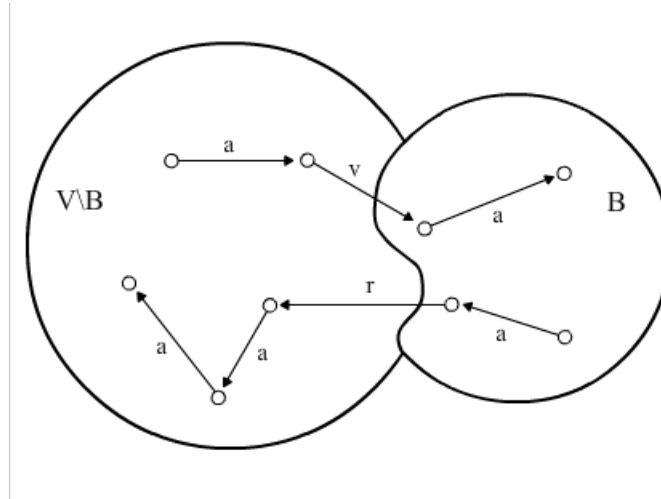


Figura 4.4: Dos posibles trayectorias en D . De $V \setminus B$ a B y de B a $V \setminus B$. Junto a cada flecha, una letra indicando su color.

Proposición 4.9. *Si D es un ciclo de longitud par, entonces D es pancromática.*

Demostración. Sea D un ciclo de longitud par y sea ζ una coloración de sus flechas. Si ζ es una coloración propia de las flechas de D , entonces D tiene un ζ -núcleo ya que tiene núcleo. Si ζ es una 1-coloración, entonces D tiene ζ -núcleo por proposición 3.9. En lo que queda de la prueba, podemos suponer que ζ no es una coloración propia ni una 1-coloración. Sea $\{v_0, v_1, \dots, v_n = v_0\}$

el conjunto de vértices de D , etiquetados de modo que $(v_i, v_{i+1}) \in F$, para toda $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Decimos que una uv -trayectoria T es monocromática no-aumentante si es monocromática y toda flecha en $N^-(\{u\}) \cup N^+(\{v\})$ está coloreada con un color distinto que las flechas de T . Notemos que dos trayectorias monocromáticas no-aumentantes T_1 y T_2 , de color 1 y 2 respectivamente, no pueden tener más de un vértice en común. De lo contrario, necesariamente tendrían que compartir una flecha f (recordemos que D es un ciclo) que sería de color 1 y de color 2 simultáneamente, lo cual no es posible. Definimos M como la clase de todas las trayectorias monocromáticas no-aumentantes en D de longitud mayor o igual a dos.

Decimos que una uv -trayectoria T es un enlace heterocromático si u es el vértice final de una trayectoria $T' \in M$, v es el vértice inicial de una trayectoria $T'' \in M$, y no hay dos flechas consecutivas de T del mismo color. Informalmente, un enlace heterocromático es una trayectoria heterocromática que no está en M pero que une a dos trayectorias en M , formando una sola trayectoria. Llamaremos H^+ a la clase de todos los enlaces heterocromáticos de longitud par en D , y H^- a la clase de todos los enlaces heterocromáticos de longitud impar en D .

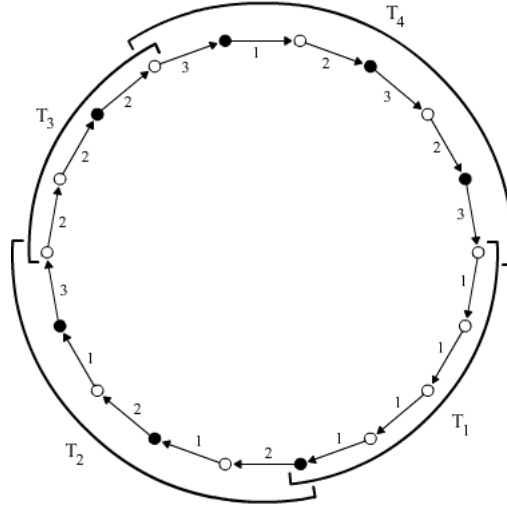


Figura 4.5: Un ciclo de longitud par descompuesto en elementos de \mathcal{T} . T_1 y T_3 están en M , mientras que T_2 y T_4 están en H^- y H^+ respectivamente. En negro, los vértices de N .

Sea $\mathcal{T} = M \cup H^+ \cup H^-$. Para facilitar la notación, etiquetamos a los elementos de \mathcal{T} de modo que $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \dots, T_p\}$ donde el vértice final de T_i es el vértice inicial de T_{i+1} para toda $i \in \{0, 1, \dots, p\}$. Como ς no es una coloración propia ni una 1-coloración, \mathcal{T} tiene al menos dos elementos. Notemos que D puede expresarse como la unión de los elementos de \mathcal{T} . Esto es, todo vértice de

D está en al menos una trayectoria $T_i \in \mathcal{T}$.

Para cada trayectoria $T_i \in \mathcal{T}$, $T_i = (v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+k})$ definimos un conjunto N_i (posiblemente vacío) según los siguientes casos:

$$\begin{aligned} N_i &= \{v_{j+1}, v_{j+3}, \dots, v_{j+k-1}\} \text{ si } T_i \in H^+ \\ N_i &= \{v_{j+2}, v_{j+4}, \dots, v_{j+k-1}\} \text{ si } T_i \in H^- \\ N_i &= \{v_{j+k-1}\} \text{ si } T_i \in M \text{ y } T_{i+1} \in M \cup H^+. \\ N_i &= \{v_{j+k}\} \text{ si } T_i \in M \text{ y } T_{i+1} \in H^-. \end{aligned}$$

Afirmación: $N = \cup_{i=1}^p N_i$ es un ζ -núcleo de D .

Para probar que N es ζ -absorbente, consideremos un vértice $v_j \in V \setminus N$. Procedemos caso por caso.

Caso 1: v_j es un vértice de una trayectoria $T_i \in H^+$ -i.e T_i es un enlace heterocromático de longitud par.

Claramente v_j es ζ -absorbido por v_{j+1} .

Caso 2: v_j es un vértice de una trayectoria $T_i \in H^-$ -i.e T_i es un enlace heterocromático de longitud impar.

Tenemos que v_j es ζ -absorbido por v_{j+1} , ó v_j es el vértice inicial de T_i . En el último caso, v_j es el vértice final de T_{i-1} . Claramente T_{i-1} no puede ser un enlace heterocromático. Esto es, $T_{i-1} \in M$ y por lo tanto $v \in N_{i-1} \subseteq N$.

Caso 3: v_j es un vértice de una trayectoria $T_i \in M$ y $T_{i+1} \in H^-$ -i.e. T_i es una trayectoria monocromática no-aumentante y T_{i+1} es un enlace heterocromático.

Claramente v_j es ζ -absorbido por el vértice final de T_i .

Caso 4: v_j es un vértice de una trayectoria $T_i \in M$ y $T_{i+1} \in M \cup H^+$ - i.e. T_i es una trayectoria monocromática no-aumentante y T_{i+1} es un enlace heterocromático.

Tenemos que v_j es absorbido por el penúltimo vértice de T_i ó v_j es el último vértice de T . En el último caso, tenemos que v_j es el vértice inicial de T_{i+1} . Si $T_{i+1} \in M$, entonces v_j es ζ -absorbido por el penúltimo o el último vértice de T_{i+1} (ninguno de estos vértices es igual a v_j , ya que en este caso T_{i+1} es longitud al menos dos). Si $T_{i+1} \in H^+$ nos remitimos al caso 1. Si $T_{i+1} \in H^-$ nos remitimos al caso 2.

Para probar la ζ -independencia de N , consideremos dos vértices $v_i, v_j \in N$ y supongamos que existe una $v_i v_j$ -trayectoria monocromática P . Notemos que, por la manera en que construimos el conjunto N , v_i y v_j no pueden estar en una misma trayectoria $T_i \in M$. Entonces P consta de una sola flecha. Esto es, $v_j = v_{i+1}$ lo cual nos lleva a una contradicción, por la construcción de N . Por lo tanto N es un ζ -núcleo de D . \square

Observemos que en la demostración de la proposición anterior sólo se usó la hipótesis de que la longitud de D es par en el caso en que la coloración de sus flechas es propia. La construcción del ζ -núcleo de D es válida para cualquier coloración que no sea propia en cualquier ciclo, sin importar cual sea su longitud. Así obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.10. *Si D es un ciclo y ζ es una coloración de sus flechas que no es propia, entonces D tiene un ζ -núcleo.*

4.2. Digráficas localmente pancromáticas

En la sección 3.1 hemos definido algunas clases de digráficas pancromáticas identificando condiciones suficientes para la pancromaticidad. En todos los casos, pedimos a las digráficas que tuvieran alguna propiedad global (e.g. ser transitiva, ser acíclica, etc). En esta sección estudiamos la pancromaticidad de digráficas que cumplen ciertas condiciones sólo localmente. Es decir que basta con que una digráfica dada contenga subdigráficas con ciertas propiedades para garantizar su pancromaticidad. En todos los casos, pediremos que contengan alguna subdigráfica pancromática. Diremos que estas digráficas son localmente pancromáticas. Comenzamos definiendo algunas operaciones entre digráficas.

Definición 4.11. Sean D_1 y D_2 dos digráficas. La unión $D_1 \cup D_2$ es la única digráfica que cumple las siguientes condiciones:

1. $V(D_1 \cup D_2) = V(D_1) \cup V(D_2)$
2. $F(D_1 \cup D_2) = F(D_1) \cup F(D_2)$.

Definición 4.12. Dada una familia indicada de digráficas $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ y una digráfica K , con $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, decimos que la suma de Zykov $\sum_K D_i$ es la digráfica D que cumple las siguientes condiciones:

1. $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2) \cup \dots \cup V(D_n)$.
2. Para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, D_i es una subdigráfica inducida de D .
3. Dados $u \in V(D_i)$ y $w \in V(D_j)$, $i \neq j$, se tiene que $(u, w) \in F(D)$ si y sólo si $(v_i, v_j) \in F(K)$.

La figura siguiente ilustra como se obtiene la suma de Zykov de una familia de digráficas $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ sobre una digráfica K de cuatro vértices.

Esta definición motiva el siguiente teorema cuya demostración puede encontrarse en [1]

Teorema 4.13. *(Bang Jensen y Huang) Sea D una digráfica cuasitransitiva.*

Si D no es fuertemente conexa, entonces $D = \sum_{v \in V(K)} D_i$ donde K es una digráfica transitiva y cada D_i es una digráfica fuerte y cuasitransitiva.

Si D es fuertemente conexa, entonces $D = \sum_{v \in V(K)} D_i$ donde K es una digráfica fuerte semi-completa y cada D_i es una digráfica que no es fuertemente conexa.

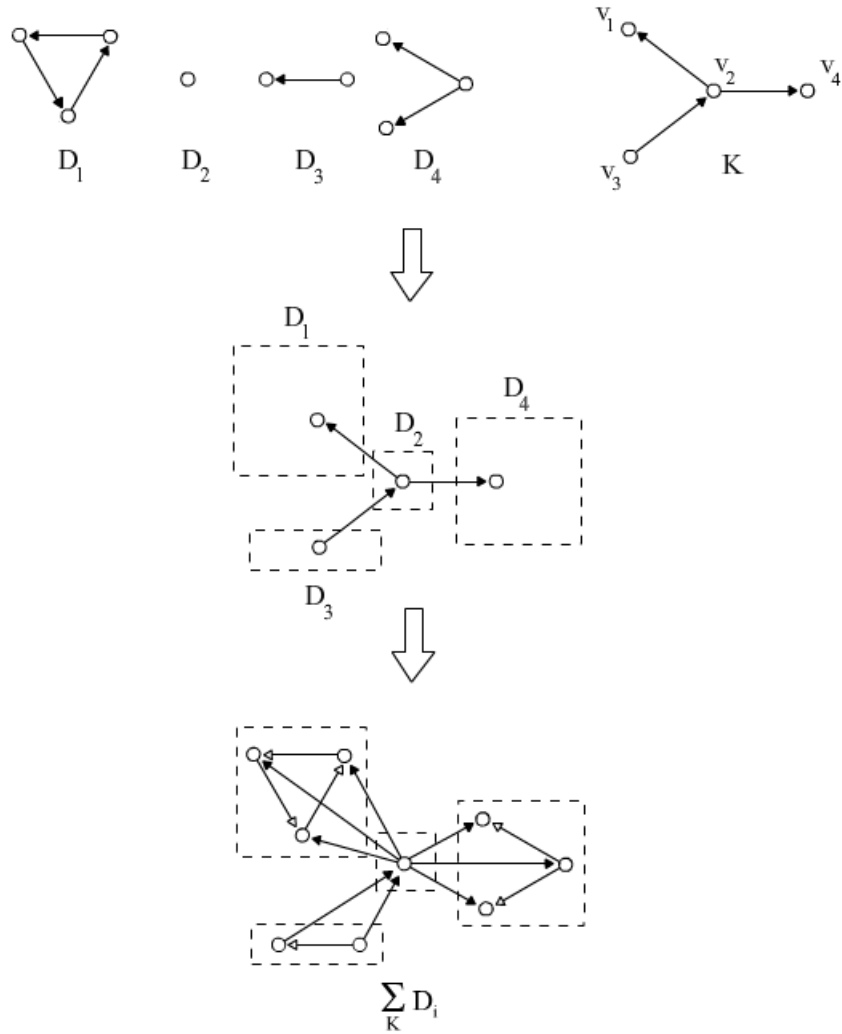


Figura 4.6: En dos pasos la construcción de $\sum_K D_i$.

Proposición 4.14. Sea $D = \bigcup_{i=1}^n E_i$ donde cada E_i es una digráfica pancromática. Si para todo $v \in E_i \cap E_j$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $\delta_D^-(v) = 0$, entonces D es una digráfica pancromática.

Demostración. Procedemos por inducción sobre la cantidad de uniendos de $D = U_{i=1}^n E_i$. Si $D = E_1$, entonces D es pancromática.

Supongamos que si $D = U_{i=1}^k E_i$, $k < n$, donde $\{E_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$ es una familia de digráficas que satisfacen la hipótesis, entonces D es pancromática.

Consideremos una digráfica $D = U_{i=1}^n E_i$, donde $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ es una familia de digráficas que satisfacen la hipótesis. Sea $D_1 = E_1$ y $D_2 = U_{i=2}^n E_i$. Dotemos a las flechas de D de una coloración ζ . Por hipótesis, D_1 es una digráfica pancromática y por hipótesis inductiva D_2 lo es también. Entonces D_1 tiene un ζ -núcleo N_1 y D_2 tiene un ζ -núcleo N_2 . Consideremos a los conjuntos $U_1 = \{v \in V(D_1) \cap V(D_2) : v \in N_1 \text{ y } v \notin N_2\}$ y sea $U_2 = \{v \in V(D_1) \cap V(D_2) : v \in N_2 \text{ y } v \notin N_1\}$. Sea $N = (N_1 \cup N_2) \setminus (U_1 \cup U_2)$.

Afirmación: N es un ζ -núcleo de D .

Empecemos probando que N es un conjunto ζ -independiente. Supongamos que no lo es, entonces existe una uw -trayectoria monocromática T en D para algún par de vértices $u, w \in V(N)$. Claramente, no pueden estar ambos en N_1 o en N_2 , ya que estos conjuntos son ζ -independientes. Sin pérdida de generalidad $u \in N_1$ y $w \in N_2$. Esto es, $u \in V(D_1) \setminus V(D_2)$ y $w \in V(D_2) \setminus V(D_1)$. Notemos que toda trayectoria de $V(D_1) \setminus V(D_2)$ a $V(D_2)$ tiene que pasar por algún $v \in V(D_1) \cap V(D_2)$. En particular, T pasa por algún vértice $v \in V(D_1) \cap V(D_2)$, lo que contradice que $\delta_D^-(v) = 0$. Por lo tanto N es ζ -independiente.

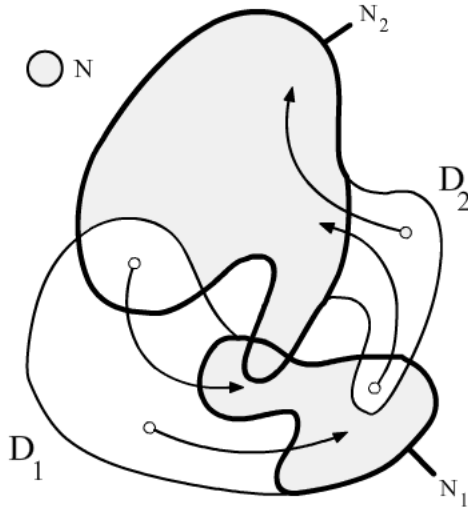


Figura 4.7: Diagrama de la ζ -absorbencia de N . Las flechas gruesas representan trayectorias monocromáticas.

Para probar que N es ζ -absorbente, consideremos un v3rtice $u \in V(D_1) \setminus N$ y sea $v \in V(D_1) \cap V(D_2)$. Como $\delta_D^-(v) = 0$ entonces no existen trayectorias de u a v en D . En particular, no existen trayectorias de u a ning3n v3rtice $v' \in (U_1 \cup U_2)$, ya que $(U_1 \cup U_2) \subseteq V(D_1) \cap V(D_2)$. Recordemos que N_1 es un n3cleo de D_1 . Esto implica que existe una uw -trayectoria monocrom3tica para alg3n $w \in N_1$. Ahora, w no puede estar en $(U_1 \cup U_2)$, entonces $w \in N_1 \setminus (U_1 \cup U_2) \subseteq N$. As3, u es absorbido mediante una trayectoria monocrom3tica por N . El caso en que $u \in V(D_2) \setminus N$ es an3logo. Por lo tanto N es ζ -absorbente. \square

La proposici3n anterior es falsa si no se pide que todos los v3rtices en las intersecciones de los uniendos tengan ingrado cero. La digr3fica de la figura 4.8 es la uni3n de dos digr3ficas pancrom3ticas, D_1 y D_2 , que comparten un v3rtice de ingrado 3, pero no tiene ζ -n3cleo con la coloraci3n dada.

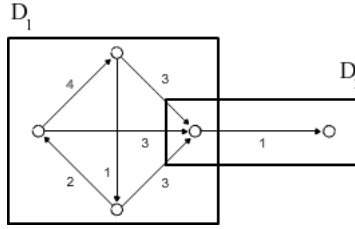


Figura 4.8: Una uni3n de digr3ficas pancrom3ticas que no es pancrom3tica.

Puede decirse que la siguiente proposici3n es, en cierta manera, dual a la proposici3n 4.14. Su demostraci3n es muy similar.

Proposici3n 4.15. *Sea $D = U_{i=1}^n E_i$ donde cada E_i es una digr3fica pancrom3tica. Si para todo $v \in E_i \cap E_j$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $\delta_D^+(v) = 0$, entonces D es una digr3fica pancrom3tica.*

Demostraci3n. Procedemos por inducci3n sobre la cantidad de uniendos de $D = U_{i=1}^n E_i$. Si $D = E_1$ entonces D es pancrom3tica.

Supongamos que si $D = U_{i=1}^k E_i$, $k < n$, donde $\{E_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$ es una familia de digr3ficas que satisfacen la hip3tesis, entonces D es pancrom3tica.

Consideremos una digr3fica $D = U_{i=1}^n E_i$, donde $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ es una familia de digr3ficas que satisfacen la hip3tesis. Sea $D_1 = E_1$ y $D_2 = U_{i=2}^n E_i$. Dotemos a las flechas de D de una coloraci3n ζ . Por hip3tesis, D_1 es una digr3fica pancrom3tica y por hip3tesis inductiva D_2 lo es tambi3n. Entonces D_1 tiene un ζ -n3cleo N_1 y D_2 tiene un ζ -n3cleo N_2 . Consideremos un v3rtice $v \in V(D_1) \cap V(D_2)$. Como $\delta^+(v) = 0$, tenemos que v no es absorbido mediante una trayectoria monocrom3tica por ning3n otro v3rtice de D . Entonces, $v \in N_1$ y $v \in N_2$. Como la elecci3n de v fue arbitraria, tenemos que $V(D_1) \cap V(D_2) \subseteq N_1 \cap N_2$. Es f3cil ver que $N = N_1 \cup N_2$ es un ζ -n3cleo de D . \square

Proposici3n 4.16. *Si D es una digr3fica asim3trica tal que todos sus bloques son transitivos, entonces D es pancrom3tica.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre la cantidad de bloques de D . Si D consta de un sólo bloque, entonces D es transitiva y por lo tanto es pancromática.

Supongamos que si D es una digráfica asimétrica con k bloques, $k < n$, y todos sus bloques son transitivos, entonces D es una digráfica pancromática.

Sea D una digráfica asimétrica con n bloques, donde cada bloque es transitivo. Sea ζ una coloración de las flechas de D . Sea $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ el conjunto de bloques de D . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que B_1 tiene un sólo vértice de corte. Definimos $V_2 = \{v \in V : v \in V(B_i), i \in \{2, \dots, n\}\}$ y consideramos $D_2 = [V_2]$. Es claro que D_2 tiene $n - 1$ bloques distintos. Para mantener congruencia en la notación, $D_1 = B_1$.

Tenemos que ζ es una coloración de las flechas de D_1 y D_2 . Como D_1 es transitiva por hipótesis, se sigue que tiene un ζ -núcleo N_1 . Y por hipótesis inductiva D_2 tiene un ζ -núcleo N_2 . Sea $v = V(D_1) \cap V_2$. Hacemos un análisis caso por caso.

Caso 1: $v \notin N_1 \cup N_2$.

Sea $N = N_1 \cup N_2$. Claramente N es ζ -absorbente en D . Veamos que N es ζ -independiente. En busca de una contradicción, supongamos que existe una uw -trayectoria monocromática, con $u \in N_1$ y $w \in N_2$. Esto implica la existencia de una uv -trayectoria T . Como $v \in V(D_1)$, v es absorbido mediante una trayectoria monocromática por algún vértice $u' \in N_1$ -i.e. existe una vu' -trayectoria monocromática T' en D_1 . La existencia de T y T' implica la existencia de las flechas $(u, v) \in F(D_1)$ y $(v, u') \in F(D_1)$ ya que D_1 es transitiva.

Si $u = u'$, entonces la flecha (u, v) es simétrica, lo que está prohibido por hipótesis.

Si $u \neq u'$, entonces, como D_1 es transitiva, se tiene que $(u, u') \in F(D_1)$, lo que contradice que N_1 sea ζ -independiente.

Así, N es ζ -independiente y por lo tanto es un ζ -núcleo de D .

Caso 2: $v \in N_1$ y $v \notin N_2$.

Definimos A como el conjunto de vértices en $V(D_1) \setminus N_1$ que son absorbidos únicamente por v mediante una trayectoria monocromática. Esto es:

$$A = \{u \in V(D_1) \setminus N_1 : \nexists uw\text{-trayectoria monocromática}, w \in N_1 \setminus \{v\}\}$$

Ahora, definimos $A' \subseteq A$ como el conjunto de vértices en A que no son absorbidos mediante una trayectoria monocromática por N_2 . Más formalmente,

$$A' = \{u \in A : \nexists uw\text{-trayectoria monocromática}, w \in N_2\}$$

Notemos que, como D_1 es transitiva, $[A']$ lo es también. Así, $[A']$ tiene un ζ -núcleo $N_{A'}$.

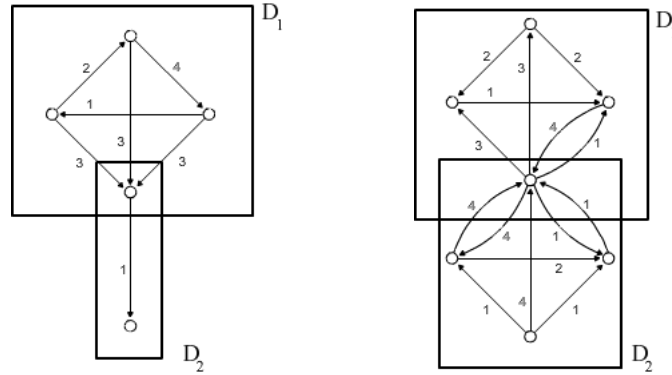
da vértice $w \in V(D_1) \setminus ((N_1 \setminus \{v\}) \cup A)$. Tenemos entonces que N es ζ -absorbente y por lo tanto es un ζ -núcleo de D .

Caso 3: $v \in N_1 \cap N_2$.

Es claro que $N = N_1 \cup N_2$ es un ζ -núcleo de D .

En cualquiera de los tres posibles casos, D tiene un ζ -núcleo. Por lo tanto, D es pancromática. \square

Aunque las condiciones que tienen que cumplir los bloques de D parezcan algo fuertes, la proposición 4.16 es falsa si se debilita cualquiera de ellas. Notemos que pedir que los bloques sean transitivos y asimétricos, es equivalente a pedir que sean cuasitransitivos, asimétricos y núcleo-perfectos (ver proposición 2.26). En la figura 4.10 tenemos dos digráficas que no son pancromáticas: en (a) se muestra una digráfica con bloques cuasitransitivos y asimétricos; en (b) los bloques son cuasitransitivos y núcleo-perfectos. Esto prueba que es necesario pedir que los bloques de D sean asimétricos y núcleo-perfectos.



(a) El bloque D_1 tiene núcleo pero no es una digráfica núcleo-perfecta

(b) Los bloques D_1 y D_2 tienen flechas simétricas.

Figura 4.10: Dos digráficas con coloraciones de sus flechas sin núcleos por trayectorias monocromáticas. Esto muestra que no pueden debilitarse las condiciones de la proposición 4.16.

Para ver que la cuasitransitividad de los bloques es necesaria, haremos un breve análisis de D , la digráfica 8-coloreada por flechas que se muestra en la figura 4.11. Notemos que D es 2-conexa -i.e consta de un sólo bloque- y asimétrica. Mostraremos que D es núcleo-perfecta y que no admite ζ -núcleos con la coloración dada.

Definimos para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, al conjunto $V_i = \{v_i, u_i\}$. Notemos que cada vértice de V_i está unido a cada vértice de V_{i+2} mediante una trayectoria monocromática de longitud 2, tomando los índices módulo 4 (e.g. existe una

u_2v_0 -trayectoria y una v_2v_0 -trayectoria, ambas de color 1). Además, en D no hay trayectorias monocromáticas de longitud mayor o igual a 3. Así, si suponemos que D tiene un ζ -núcleo N y que $v_i \in N$ (o $u_i \in N$), entonces $v_{i+2} \notin N$ y $u_{i+2} \notin N$. Se tiene entonces que N no absorbe mediante una trayectoria monocromática a ningún vértice del conjunto V_{i+1} , y por lo tanto no puede ser un ζ -núcleo. Se sigue que D no admite núcleos por trayectorias monocromáticas.

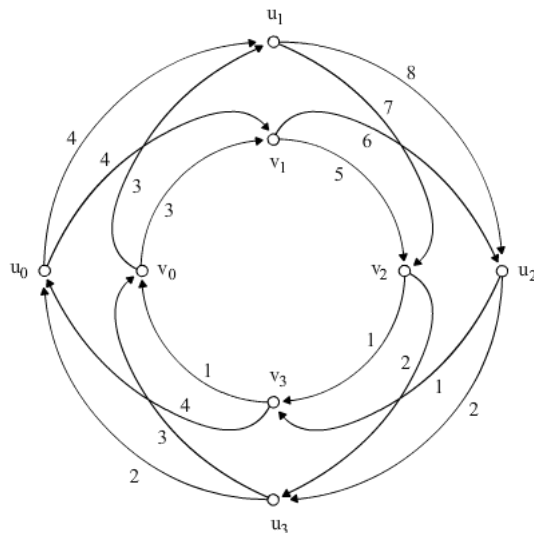


Figura 4.11

Veamos que D es una digráfica núcleo-perfecta. Como es fácil verificar, D es la suma de Zykov $\sum_C V_i$ donde C es un ciclo de longitud 4. No es difícil ver que los ciclos de longitud par son digráfica núcleo-perfectas. Sea $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ el conjunto de vértices de C , donde V_i es el sumando correspondiente al vértice c_i . Dado que cada V_i es un conjunto independiente, tenemos que si K es un núcleo de C , entonces los vértices de los sumandos correspondientes a los vértices K forman un núcleo de D , que llamaremos N . Esto es, si $c_i \in K$ entonces los vértices de V_i están en N .

Sea D' una subdigráfica inducida de D . Si para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ se tiene que $V_i \cap V(D') \neq \emptyset$, entonces D' sigue siendo una suma de Zykov de conjuntos independientes sobre un ciclo de longitud 4, y por lo tanto D' tiene núcleo. Si para al menos una $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ se tiene que $V_i \cap V(D') = \emptyset$ entonces D' es una suma de Zykov de conjuntos independientes sobre una trayectoria T , ó D' es una digráfica sin flechas. En el primer caso, D' tiene un núcleo N y sus vértices son los vértices de los sumandos correspondientes a los vértices del núcleo de T (recordemos que toda trayectoria tiene núcleo ya que no contiene ciclos dirigidos). En el segundo caso, $V(D')$ es un núcleo de D' . Así, tenemos que D es una digráfica núcleo-perfecta.

Resumiendo, tenemos que D es una digráfica asimétrica, núcleo-perfecta y que no es cuasitransitiva, y no admite núcleos por trayectorias monocromáticas. Concluimos que la cuasitransitividad de los bloques de una digráfica es una hipótesis necesaria para que la proposición 4.16 sea verdadera.

Proposición 4.17. *Sea K una digráfica transitiva y asimétrica con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, y $\{D_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ una familia indicada de digráficas. Sea N_K un núcleo de K y sea $J = \{i \in \{1, \dots, n\} : v_i \in N_K\}$. Si D_j es pancromática para todo $j \in J$, entonces $D = \sum_K D_i$ es pancromática.*

Demostración. Consideremos ζ una coloración de las flechas de D . Para cada $j \in J$, sea N_j un ζ -núcleo de D_j . Consideremos $N = \cup_{j \in J} N_j$.

Afirmación: N es un ζ -núcleo de D .

Para probar que N es ζ -absorbente, consideremos un vértice $u \in V(D)$. Si $u \in V(D_j)$, para alguna $j \in J$, entonces claramente u es absorbido mediante una trayectoria monocromática por algún vértice en $N_j \subseteq N$. Podemos suponer que para toda $j \in J$, $u \notin D_j$. Esto es, $u \in D_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\} \setminus J$. Como N_K es un núcleo de K , existe un vértice $v_j \in V(K)$, $j \in J$, tal que $(v_i, v_j) \in F(K)$. Entonces, si D_j es el sumando correspondiente a v_j , tenemos que existe una flecha $(u, w) \in F(D)$, para cada $w \in V(D_j)$. En particular, existe una flecha $(u, w) \in F(D)$ para algún $w \in N_j$. Por lo tanto, N es un conjunto ζ -absorbente.

Ahora, en busca de una contradicción, supongamos que N no es ζ -independiente. Es decir, existen dos vértices $u \in V(D_j)$ y $w \in V(D_k)$, $j, k \in J$, unidos por una uw -trayectoria monocromática en D . Si $j \neq k$, entonces existe una $v_j v_k$ -trayectoria en K . Esto implica que $(v_j, v_k) \in F(K)$ (ya que K es una digráfica transitiva) lo que contradice que N_K sea independiente. Si $j = k$, entonces existe un ciclo en K que contiene al vértice v_j . Pero los ciclos en digráficas transitivas tienen flechas simétricas, lo que está prohibido por hipótesis. Así, no existen dos vértices en N unidos por una trayectoria monocromática. Por lo tanto N es ζ -independiente. \square

El siguiente colorario es un debilitamiento de la proposición anterior con un enunciado mucho más simple.

Corolario 4.18. *La suma de digráficas pancromáticas sobre una digráfica transitiva y asimétrica es una digráfica pancromática.*

Aún si la clase de las digráficas transitivas es una subclase de las digráficas pancromáticas, el resultado anterior no puede generalizarse para sumas sobre digráficas pancromáticas. Es decir, no es verdadero que la suma de digráficas pancromáticas sobre una digráfica pancromática es una digráfica pancromática. Ya hemos visto que la gráfica de la figura 4.11 es una suma de Zykov de digráficas pancromáticas sobre un ciclo par (pancromático), con una coloración que no admite núcleo por trayectorias monocromáticas.

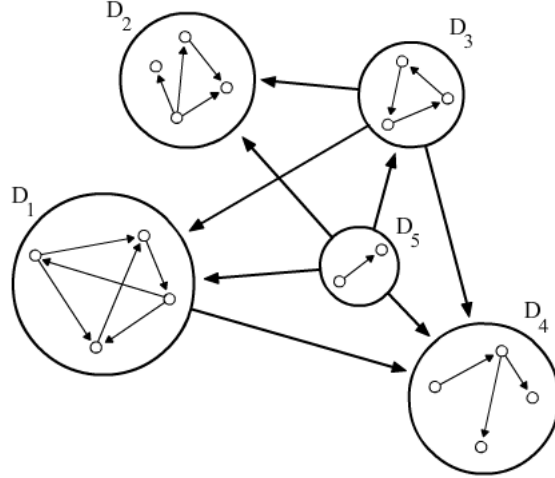


Figura 4.12: La suma de Zykov de cinco digráficas sobre una digráfica transitiva K . Los sumandos D_2 y D_4 , correspondientes al núcleo de K , son pancromáticos.

Se sigue de la proposición 4.17 que las digráficas pancromáticas no pueden caracterizarse por medio de subdigráficas prohibidas, ya que cuando se considera la suma de Zykov sobre una digráfica transitiva K , no es necesario dar condiciones para los sumandos que no corresponden al núcleo de K para que la suma de Zykov sobre K sea una digráfica pancromática. En la digráfica de la figura 4.12, podemos reemplazar al sumando D_1 con cualquier digráfica, y la suma de Zykov sobre K seguirá siendo pancromática.

4.3. Digráficas sin núcleos

En las secciones 3.1 y 3.2 hemos estudiado varias familias de digráficas pancromáticas. En esta sección estudiaremos el número pancromático de digráficas tales que $\pi(D) \neq m$. Evidentemente ninguna de estas digráficas tiene núcleo. Determinaremos de manera exacta el número pancromático de algunas clases de digráficas y daremos cotas superiores para digráficas sin núcleo en general.

La siguiente proposición nos será útil para establecer cotas superiores en las proposiciones 4.22, 4.23 y 4.26. Estas proposiciones junto con las proposiciones 4.28, 4.29 aparecen por primera vez en [10].

Proposición 4.19. Sean $c, k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Si $c \neq \lceil \frac{k}{l} \rceil + l$, para toda $l \in \{1, 2, \dots, k\}$, entonces $c < 2\sqrt{k}$.

Demostración. Comencemos esta prueba definiendo un par de funciones y analizando su comportamiento. Para algún $k \in \mathbb{N}$, consideremos la función $f_k : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_k(x) = \frac{k}{x} + x$. Derivando esta función, obtenemos que

alcanza su valor mínimo en $x = \sqrt{k}$. Evaluando, $f_k(\sqrt{k}) = 2\sqrt{k}$. Además, es fácil ver que f_k es creciente en el intervalo $[\sqrt{k}, \infty)$.

Ahora consideremos la función $f_k^* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f_k^*(x) = \lceil \frac{k}{x} \rceil + x$. Se sigue que $2\sqrt{k} \leq f_k(n) \leq f_k^*(n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Notemos que si \sqrt{k} es un entero, entonces

$$f_k^*(\lceil \sqrt{k} \rceil) = f_k(\lceil \sqrt{k} \rceil) = f_k(\sqrt{k}) = 2\sqrt{k} = \lceil 2\sqrt{k} \rceil.$$

Por otro lado, si \sqrt{k} no es un entero, tenemos que

$$f_k^*(\lceil \sqrt{k} \rceil) < \left\lceil \frac{k}{\lceil \sqrt{k} \rceil} \right\rceil + \sqrt{k} + 1 \leq \frac{k}{\lceil \sqrt{k} \rceil} + \sqrt{k} + 2 \leq 2\sqrt{k} + 2.$$

obteniendo $2\sqrt{k} \leq f_k^*(\lceil \sqrt{k} \rceil) \leq 2\sqrt{k} + 1$ lo que implica que $f_k^*(\lceil \sqrt{k} \rceil) = \lceil 2\sqrt{k} \rceil$.

Esto es, f_k^* alcanza su mínimo en $\lceil \sqrt{k} \rceil$.

Además, como f_k es creciente en $[\sqrt{k}, \infty)$, entonces claramente f_k^* también lo es en $[\sqrt{k}, \infty) \cap \mathbb{N}$ -i.e. $f_k^*(n) \geq f_k^*(m)$ si $n > m \geq \lceil \sqrt{k} \rceil$. Así, para $n \geq \lceil \sqrt{k} \rceil$, $f_k^*(n+1) \geq f_k^*(n)$ de donde sigue que $0 \leq f_k^*(n+1) - f_k^*(n)$. Desarrollando esta expresión, obtenemos $0 \leq \left\lceil \frac{k}{n+1} \right\rceil + n + 1 - \left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil - n = \left\lceil \frac{k}{n+1} \right\rceil - \left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil + 1 \leq 1$.

Esto implica que para todo $m \geq \lceil 2\sqrt{k} \rceil$ existe n tal que $f_k^*(n) = m$.

Ahora, tomemos un natural $c \in \mathbb{N}$ tal que $c < k$ y $c \neq \lceil \frac{k}{l} \rceil + l$, para toda $l \in \{1, 2, \dots, k\}$. Supongamos que se cumple que $c \geq 2\sqrt{k}$. Como c es un natural, también se cumple que $c \geq \lceil 2\sqrt{k} \rceil$. Entonces existe un natural n tal que $f_k^*(n) = c$. Es fácil ver que $n \leq k$. Así, se tiene que $\lceil \frac{k}{n} \rceil + n = c$, con $n \in \{1, 2, \dots, k\}$, lo que contradice el comportamiento de f_k^* . Por lo tanto $c < 2\sqrt{k}$. \square

Proposición 4.20. *Sea D una digráfica sin núcleo. Si D tiene a lo más 4 vértices, entonces $\pi(D) = 2$.*

Demostración. Mostraremos primero que existe una 3-coloración propia de las flechas de la digráfica completa de cuatro vértices, es decir la digráfica de orden cuatro que tiene un flecha simétrica entre cualesquiera dos vértices. Sea K_4 esa digráfica y sean $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ sus vértices. Llamemos C_1, C_2 y C_3 a las clases cromáticas de K_4 bajo una 3-coloración. Definimos ς como la 3-coloración con clases cromáticas: $C_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$; $C_2 = \{(v_1, v_4), (v_4, v_1), (v_3, v_2), (v_2, v_3)\}$; $C_3 = \{(v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_2, v_4), (v_4, v_2)\}$ (ver figura 4.13). Es fácil ver que esta coloración es propia, y que toda digráfica de orden menor o igual a cuatro es subdigráfica de K_4 . En particular D es una subdigráfica de K_4 . Entonces tenemos que D tiene una 3-coloración propia, y como D no tiene núcleo, entonces $\pi(D) \neq 3$. Subdividiendo las clases cromáticas de D obtenemos que $\pi(D) \neq k$ para toda $k \in \{3, \dots, m\}$. Por lo tanto $\pi(D) = 2$. \square

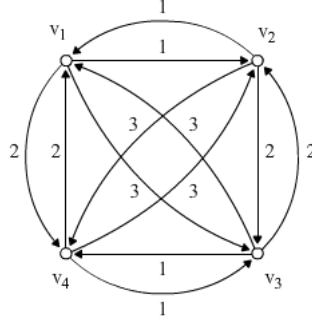


Figura 4.13: Coloración propia de K_4

En lo que resta de esta sección, consideraremos sólo digráficas con más de cuatro vértices. Es decir, siempre que se tenga una digráfica D , queda sobrentendido que D tiene al menos 5 vértices.

Proposición 4.21. *Si D es un ciclo de longitud impar, entonces $\pi(D) = 2$.*

Demostración. Sea D un ciclo de longitud impar con conjunto de vértices $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$. Sabemos que D no tiene núcleo. Mostraremos entonces una 3-coloración propia de F . Definimos $F_1 = \{(v_i, v_{i+1}) \in F : i \text{ es par}, i \in \{2, \dots, n-1\}\}$, $F_2 = \{(v_i, v_{i+1}) \in F(D) : i \text{ es impar}, i \in \{1, \dots, n-2\}\}$. Coloreamos de rojo todas las flechas en F_1 , de verde todas las flechas F_2 , y de color azul a $(v_0, v_1) \in F$. Con esta coloración, D no tiene núcleo por trayectoria monocromática puesto que no tiene núcleo. Así $\pi(D) \neq 3$. Subdividiendo las clases cromáticas bajo esta coloración, obtenemos que para cada $k \in \{4, \dots, m\}$, existe una k -coloración propia de D . Por lo tanto $\pi(D) = 2$. \square

Proposición 4.22. *Una digráfica D no tiene núcleo si y sólo si $\pi(D) < 2\sqrt{\chi(D)}$*

Demostración. Para la condición de suficiencia, observemos que:

1. Si D es un torneo con n vértices, $\chi(D) = n < m$.
2. Si la gráfica subyacente de D es un ciclo impar, $\chi(D) = 3 < m$.

Por teorema 3.4 tenemos que si la gráfica subyacente de D no es un ciclo impar o una gráfica completa $\chi(D) \leq \Delta(D)$. Además, es fácil ver que $\Delta(D) < m$, excepto cuando D es una estrella, caso que no está en consideración puesto las estrellas, no teniendo ciclos, tienen núcleo. De las dos últimas desigualdades obtenemos $\chi(D) < m$. Así, si $\pi(D) < \chi(D)$, entonces $\pi(D) < m$ y por proposición 4.2 D no tiene núcleo.

Para la otra implicación, sea D una digráfica sin núcleo y sea $k = \chi(D)$. Demos una k -coloración $\varsigma : V \rightarrow [k]$ propia a los vértices de D . Denotemos por $V_i = \varsigma^{-1}(i)$, para cada $i \in [k]$, a las clases cromáticas de D .

Ahora, coloreemos a las flechas de D con k colores de la siguiente manera: a cada flecha le asignamos el color de vértice inicial. Es decir, la flecha $(u, v) \in F$

tendrá el mismo color que $u \in V$. Como la coloración de los vértices ς es una coloración propia, cada V_i es independiente. Denotemos por F_i a las clases cromáticas de las flechas de D . Es claro que no se añade estructura a las trayectorias monocromáticas de D con esta coloración, es decir, no hay trayectorias monocromáticas de longitud 2. Así, como por hipótesis D no tiene núcleo, entonces D tampoco tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, probando que $\pi(D) \neq k$.

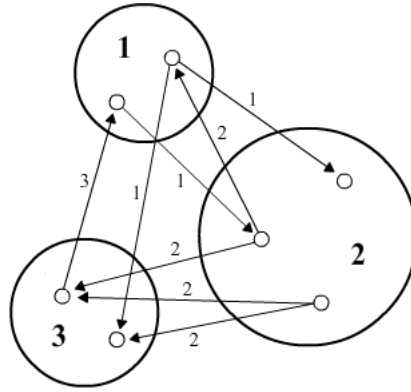


Figura 4.14: Una digráfica 3-coloreada en la que cada flecha tiene el color de su vértice inicial. Los círculos representan las clases cromáticas.

Podemos simplemente subdividir las clases cromáticas de las flechas de D para probar que $\pi(D) \neq l$, para $l = \{k, \dots, m\}$. Así, $\pi(D) < k = \chi(D)$.

Para mejorar esta cota, refinemos la coloración de las flechas de D . Recordemos que ς es una coloración propia de V . Sea l un natural tal que $l < k$. Definimos una partición del conjunto $\{V_i : i \in [k]\}$ en l partes de cardinalidad “casi” k/l :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{V_1, V_2, \dots, V_{\lceil k/l \rceil}\}, \\ U_2 &= \{V_{\lceil k/l \rceil+1}, V_{\lceil k/l \rceil+2}, \dots, V_{2\lceil k/l \rceil}\}, \\ &\vdots \\ U_l &= \{V_{(l-1)\lceil k/l \rceil+1}, V_{(l-1)\lceil k/l \rceil+2}, \dots, V_k\} \end{aligned}$$

Para cada $i \in [k]$, denotamos ahora por $A_i = \{(u, v) \in F : u, v \in \cup U_i\}$ al conjunto de flechas contenidas en la parte U_i . Así, podemos colorear las flechas de cada una de los conjuntos U_i de esta partición con $\lceil k/l \rceil$ colores, digamos $\{1, 2, \dots, \lceil k/l \rceil\}$, y con otros l colores distinto, digamos $\{1', 2', \dots, l'\}$, podemos colorear las flechas que “unen” a los conjuntos U_i .

Esto es, las flechas en:

- 1 $N^+(V_1) \cap A_1, N^+(V_{\lfloor k/l \rfloor + 1}) \cap A_2, \dots, N^+(V_{(l-1)\lfloor k/l \rfloor + 1}) \cap A_l$ reciben el color
- 2 $N^+(V_2) \cap A_1, N^+(V_{\lfloor k/l \rfloor + 2}) \cap A_2, \dots, N^+(V_{(l-1)\lfloor k/l \rfloor + 2}) \cap A_l$ reciben el color
- \vdots
- $N^+(V_{\lfloor k/l \rfloor}) \cap A_1, N^+(V_{2\lfloor k/l \rfloor}) \cap A_2, \dots, N^+(V_k) \cap A_l$ reciben el color $\lfloor k/l \rfloor$

Mientras que las flechas en $N^+(U_i)$ reciben el color i' .

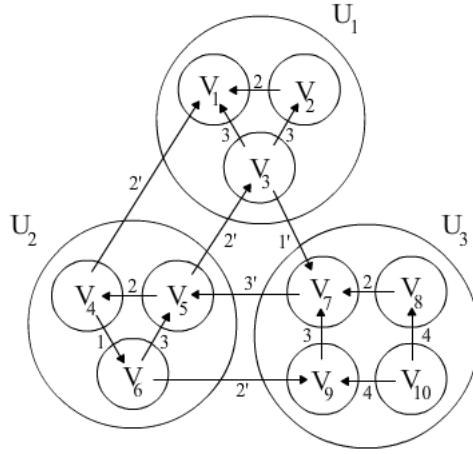


Figura 4.15: Diagrama de la coloración de las flechas de D

Como las clases V_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, son conjuntos independientes, esta coloración no altera la estructura de las clases monocromáticas de D -i.e. D no tiene trayectorias monocromáticas de longitud 2 o mayor. Así, dado que D no tiene núcleo, D no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas con esta coloración. Entonces $\pi(D) \neq \lfloor k/l \rfloor + l$. Como se puede definir una coloración análoga para cada $l \in \{1, \dots, k\}$, tenemos que $\pi(D) < 2\sqrt{\chi(D)}$. \square

Proposición 4.23. Una digráfica D no tiene núcleo si y sólo si $\pi(D) < \chi(L(D))$

Demostración. Sea D una digráfica sin núcleo y sea $k = \chi(L(D))$. Sea $\varsigma : V(L(D)) \rightarrow [k]$ una coloración propia de los vértice de $L(D)$. Claramente, ς es también una coloración de las flechas de D . Esta coloración para $F(D)$ también es propia, ya que si existieran dos flechas (u, v) y (v, w) en D coloreadas con el mismo color, entonces los vértices $(u, v) \in V(L(D))$ y $(v, w) \in V(L(D))$ serían adyacentes y estarían coloreados con el mismo color, lo que contradice que ς es una coloración propia de $V(L(D))$. Así, con esta coloración no existen trayectorias monocromáticas de longitud 2 en D . Ahora, por hipótesis D no tiene núcleo,

entonces tampoco tiene núcleo por trayectorias monocromáticas con esta coloración. Así, $\pi(D) \neq k$. Subdividiendo las clases cromáticas, podemos encontrar una l -coloración que no admite núcleos por trayectorias monocromáticas, para cada $l \in \{k, \dots, m\}$, obteniendo así que $\pi(D) < \chi(L(D))$.

Para la otra implicación, sea D una digráfica tal que $\pi(D) < \chi(L(D))$ y sea $m = |F(D)|$. Es claro que $\chi(L(D)) \leq |V(L(D))| = m$. Así, si $\pi(D) < \chi(L(D))$, entonces $\pi(D) < m$ y por lo tanto D no tiene núcleo. \square

Definición 4.24. Sea D una digráfica con conjunto de vértices V . Una partición de D en subdigráficas transitivas es un conjunto $P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ que cumple las siguientes condiciones:

1. $V = \cup_{i=1}^k V_i$
2. $V_i \cap V_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, \dots, k\}$.
3. $[V_i]$ es una digráfica transitiva para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Definición 4.25. Sea D una digráfica, definimos $\tau(D) = \min\{|P| : P \text{ es una partición transitiva de } D\}$

Proposición 4.26. Una digráfica D no tiene núcleo si y sólo si $\pi(D) < 2\sqrt{\tau(D)} + 1$.

Demostración. Para la condición de suficiencia, considera D una digráfica sin núcleo. Probaremos que $\pi(D) < 2\sqrt{\tau(D)} + 1$. Sea $V = V_1 \cup \dots \cup V_{\tau(D)}$ de modo que cada V_i induce una subdigráfica transitiva de D . Para cada $i \in \{1, \dots, \tau(D)\}$, asignemos el color i a las flechas en $N^+(V_i)$. Usemos un color adicional para colorear todas las flechas restantes (aquellas en el “interior” de las clases V_i). Tenemos entonces una $(\tau(D) + 1)$ -coloración. Observemos que si $u \in V_i$ y $v \in V_j$, $i \neq j$, entonces las únicas uv -trayectorias monocromáticas posibles tienen longitud 1. Más aún, si $u, v \in V_i$ se tiene que existe una uv -trayectoria si y sólo si $(u, v) \in F(D)$, ya que V_i es transitiva. Así $D = C(D)$, su cerradura por trayectorias monocromáticas. Entonces D tiene núcleo si y sólo tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Como por hipótesis D no tiene núcleo, hemos probado que $\pi(D) < \tau(D) + 1$.

Para mejorar esta cota, utilizamos un argumento completamente análogo al usado en la prueba anterior, obteniendo que $\pi(D) < 2\sqrt{\tau(D)} + 1$.

Para el recíproco, consideremos una digráfica D tal que $\pi(D) < 2\sqrt{\tau(D)} + 1$. Claramente cualquier digráfica con dos vértices es transitiva, entonces $\tau(D) \leq \lceil n/2 \rceil$. Si sucediera que $m = n - 1$, donde n es el orden de D , entonces D es una digráfica acíclica, y $\pi(D) = m$ (proposición 4.5). Así obtenemos que $\pi(D) = m = n - 1$ y entonces, como D tiene al menos 5 vértices, $n \leq 2\sqrt{\tau(D)} + 1 < 2\sqrt{\lceil n/2 \rceil + 1} < n$ lo cual es imposible. Así, podemos suponer que $m \neq n - 1$ y como D es conexa, necesariamente $m \geq n$. Además, $\lceil n/2 \rceil \leq n - 1 < m$. Así, $\tau(D) + 1 \leq m$ y por lo tanto $2\sqrt{\tau(D)} + 1 \leq m$. Finalmente, como $\pi(D) < 2\sqrt{\tau(D)} + 1$, se tiene que $\pi(D) < m$ y por lo tanto D no tiene núcleo. \square

La siguiente proposición nos servirá para la demostración de la proposición 4.28.

Proposición 4.27. Si D es un torneo y $G \subset D$ es una subdigráfica inducida acíclica de D , entonces G es transitiva

Demostración. Sean $u, v, w \in V(G)$ tales que $(u, v) \in F(G)$ y $(v, w) \in F(G)$. Como D es un torneo y G es una subdigráfica inducida, entonces u y w son adyacentes en G . Si $(w, u) \in F(G)$ entonces (u, v, w, u) sería un ciclo, lo que está prohibido por hipótesis. Entonces necesariamente $(u, w) \in F(G)$, probando así que G es transitiva. \square

Proposición 4.28. Sea $D = \sum_{v \in V(G)} D_v$ la suma de digráficas D_v sin núcleo sobre una digráfica G cualquiera. D no tiene núcleo si y sólo si $\pi(D) < |V(G)| + \max\{\pi(D_v)\} + 1$.

Demostración. Para la condición de suficiencia, sea $D = \sum_{v \in V(G)} D_v$ una digráfica sin núcleo y sea $k = \max\{\pi(D_v)\} + 1$. Es claro que para cada D_v , se tiene que $\pi(D_v) < k$. Así, para cada D_v existe una k -coloración de sus flechas que no admite un núcleo por trayectorias monocromáticas (si $|F(D_v)| < k$ la coloración sólo tendrá $|F(D_v)|$ colores). Coloreemos así a cada término de la suma. Extendamos esta coloración a todas las flechas de D , usando $|V(G)|$ colores adicionales, de la siguiente manera: para cada $v \in V(G)$ y cada $u \in \Gamma^+(v)$, coloreamos a todas flechas de D_v a D_u con el color v .

Afirmación: con esta coloración D no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

En busca de una contradicción, supongamos que D sí tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas $K \subseteq V(D)$. Para cada $v \in V(G)$, definimos $K_v = K \cap D_v$. Claramente existe $v_0 \in V(G)$ tal que K_{v_0} es distinto del vacío. Como D_{v_0} no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, debe existir un vértice $w \in D_{v_0}$ que no es absorbido por K_{v_0} , de lo contrario K_{v_0} sería un núcleo por trayectorias monocromáticas de D_{v_0} . Como estamos bajo la suposición que K es un núcleo por trayectorias monocromáticas, debe existir un $u \in V(G)$, $u \neq v_0$, tal que el término K_u es distinto del vacío y absorbe a w . Esto es, existe una flecha de w a algún vértice en D_u , lo que implica que (v_0, u) es una flecha de G y entonces cada vértice de K_{v_0} es adyacente a cada vértice de K_u , lo que contradice que K sea independiente.

Así, D no admite núcleos por trayectorias monocromáticas con esta coloración, y por lo tanto $\pi(D) \neq |V(G)| + \max\{\pi(D_v)\} + 1$. Subdividiendo las clases cromáticas de las flechas de D , se obtiene que $\pi(D) \neq k'$, para toda $k' \in \{k, \dots, m\}$, y por lo tanto $\pi(D) < |V(G)| + \max\{\pi(D_v)\} + 1$.

Para la condición de necesidad, sea D una digráfica tal que $D = \sum_{v \in V(G)} D_v$ y $\pi(D) < |V(G)| + \max\{\pi(D_v)\} + 1$. Si sucediera que G tiene un sólo vértice, entonces $D = D_v$, que por hipótesis no tiene núcleo y aquí concluiría la demostración. Podemos suponer que G tiene más de un vértice. Notemos que como ninguna D_v tiene núcleo, entonces $|F(D_v)| \geq 3$, para cada $v \in V(G)$. Así, $|\cup\{F(D_v) : v \in V(G)\}| \geq \max\{|F(D_v)| : v \in V(G)\} + 3$.

Además, $\max\{|F(D_v)| : v \in V(G)\} > \max\{\pi(D_v)\}$, entonces

$$|\cup\{F(D_v) : v \in V(G)\}| \geq \max\{\pi(D_v)\} + 3.$$

Por otro lado, como D es conexa, G debe serlo también y por lo tanto

$$|F(G)| \geq |V(G)| - 1.$$

Claramente, como cada D_v tiene más de un vértice,

$$\begin{aligned} m &> |\cup\{F(D_v) : v \in V(G)\}| + |F(G)| \text{ y entonces} \\ m &> \max\{\pi(D_v)\} + 3 + |V(G)| - 1 > \max\{\pi(D_v)\} + V(G) + 1 > \pi(D). \end{aligned}$$

Por lo tanto, D no tiene núcleo. \square

Proposición 4.29. *Una digráfica asimétrica (sin flechas simétricas) y cuasitransitiva D no tiene núcleo si y sólo si $\pi(D) = 2$.*

Demostración. Para la condición necesaria, consideremos una digráfica D tal que $\pi(D) = 2$. Por la proposición 4.20 podemos suponer que D tiene al menos 5 vértices y como es conexa, tenemos que $m = |F| > 2$. Entonces $\pi(D) < m$, y por lo tanto D no tiene núcleo, concluyendo esta parte de la demostración.

Para la otra implicación, procederemos por inducción sobre el orden de D .

Para el caso base, consideremos D una digráfica de orden 3, asimétrica, cuasitransitiva y sin núcleo. La única digráfica con más de dos flechas y con estas características es un ciclo de longitud tres. Es claro que $\pi(D) = 2$.

Ahora, supongamos que si D es una digráfica de orden menor que n , cuasitransitiva, asimétrica y sin núcleo, entonces $\pi(D) = 2$.

Sea D una digráfica de orden n , cuasitransitiva, asimétrica y sin núcleo. Haremos un análisis caso por caso.

Caso 1: D es fuertemente conexa.

Por teorema 4.13 tenemos que:

$D = \sum_K D_i$, donde K es una digráfica semicompleta y fuertemente conexa, y cada D_i es cuasitransitiva pero no es fuertemente conexa. Tenemos entonces dos posibilidades.

Caso 1.1: K tiene núcleo. Como K es semicompleta, un núcleo debe consistir en un sólo vértice que llamaremos v . Más aún, como D es asimétrica, K también debe serlo, entonces K es un torneo y su núcleo es único. Sea D_v el término de $D = \sum_K D_i$ correspondiente a v . Notemos que como v absorbe a todo vértice en $V(K) \setminus \{v\}$, entonces cada vértice de D_v absorbe a todos los vértices en $V(D) \setminus V(D_v)$. Entonces $N^+(V(D_v)) = \emptyset$. Esto contradice que D sea una digráfica fuertemente conexa. Así, K no puede tener núcleo. Pasamos al siguiente caso.

Caso 1.2: K no tiene núcleo. Ya hemos probado que si K es un torneo y no tiene núcleo, necesariamente $\pi(K) = 2$ (proposición 4.8), y por lo tanto para cada $k \in \{3, \dots, m\}$, existe una k -coloración sin núcleo por trayectorias monocromáticas en K .

Dotemos a las flechas de K de una coloración sin ζ -núcleo. Definimos una coloración de D de la siguiente manera: por cada flecha coloreada $(u, v) \in F(K)$ en K , coloreamos las flechas de D_u a D_v con el mismo color; las flechas en el interior de D_u y D_v son coloreadas de manera arbitraria.

Afirmación: D no tiene ζ -núcleo con esta coloración.

En busca de una contradicción, supongamos que D si admite un ζ -núcleo $N \subseteq V(D)$. Como estamos considerando la suma sobre una digráfica semi-completa K , dados dos términos D_u y D_w tenemos que cada vértice de D_u es adyacente a cada vértice de D_w . Entonces debe existir un término D_v tal que $N \subseteq V(D_v)$; si no, N no sería independiente. Pero entonces, el vértice $v \in V(K)$ sería un ζ -núcleo de K , lo que es una contradicción. Por lo tanto $\pi(D) = 2$.

Caso 2: D no es fuertemente conexa.

Por teorema 4.13 tenemos que:

$D = \sum_T D_i$, donde T es transitiva y acíclica, y cada D_i es cuasitransitiva y fuertemente conexa. Esto es, T es la digráfica de condensación de D .

Notemos que como T es transitiva y acíclica, todo vértice en $V(D)$ es absorbido por un vértice en alguna componente terminal de D . Así, si toda componente terminal D_j de D tiene un núcleo $N_j \subset V(D)$, entonces claramente $\cup N_j$ es un núcleo de D . Pero por hipótesis D no tiene núcleo, entonces debe existir un componente terminal D_v de D , sin núcleo. Es claro que $N^+(D_v) = \emptyset$, ya que D_v es terminal. Ahora, como D_v es fuertemente conexa, pero D no lo es, sabemos que $D \neq D_v$ -i.e. $|V(D_v)| < |V(D)| = n$. Además, D_v es asimétrica, cuasi-transitiva, y no tiene núcleo, entonces por hipótesis inductiva tenemos que $\pi(D_v) = 2$. Esto es, para cada $k' \in \{3, \dots, |F(D_v)|\}$, existe una k' -coloración de D_v que no admite núcleos por trayectorias monocromáticas. Extendemos de manera arbitraria esta coloración a D . Notemos que D_v no tiene núcleos por trayectorias monocromáticas con esta coloración extendida, ya que $N^+(D_v) = \emptyset$.

Afirmación: Con esta coloración D no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Supongamos que $N \subseteq V(D)$ es un ζ -núcleo de D . Como $N^+(D_v) = \emptyset$, entonces $N \cap D_v$ es un ζ -núcleo de D_v , lo que contradice la manera de colorear a D_v .

Observemos que dada una colección de k colores, $k \in \{|F(D_v)|, \dots, |F(D)|\}$, podemos colorear a D_v con k' colores de modo que no tenga ζ -núcleo, y al resto de la digráfica con los $k - k'$ colores restantes. Así, D no tendrá núcleo por trayectorias monocromáticas. Concluimos que $\pi(D) = 2$. \square

Proposición 4.30. *Sea D una digráfica asimétrica sin núcleo. Si D no contiene a una de las siguientes digráficas como subdigráfica, entonces $\pi(D) = 2$.*

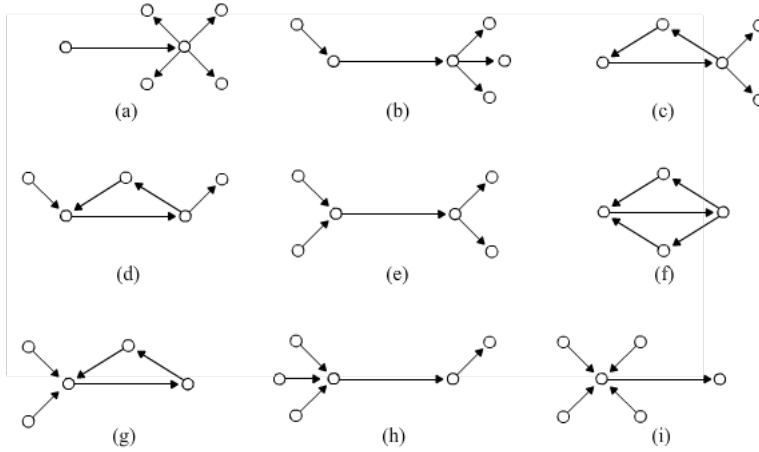


Figura 4.16: Subdigráficas no contenidas en D .

Demostración. Sea D una digráfica sin núcleo que no contiene a ninguna de las digráficas de la figura 4.16. En la proposición 4.21 probamos que los ciclos de longitud impar tienen número pancromático 2. Para lo que resta de la demostración podemos suponer que D no es un ciclo de longitud impar. Ahora, consideremos $L(D)$, la digráfica de líneas de D . Como D no es un ciclo impar, entonces $L(D)$ tampoco lo es. Por proposición 2.16 ($L(D)$) tampoco es una digráfica semi-completa.

Probaremos que, dado que D no contiene a ninguna de las digráficas de la figura 4.16, tenemos que no existe un vértice $v \in V(L(D))$ tal que $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v) > 3$ (de existir D contendría a alguna de las digráficas prohibidas por hipótesis). Para esto, supongamos que existe un vértice $v \in V(L(D))$ tal que $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v) \geq 4$. Analicemos cada posible caso.

Si $\delta^+(v) \geq 4$, entonces existen $u, w \in V(D)$ tales que $v = (u, w) \in F(D)$ y $\delta^+(w) \geq 4$. Así, la digráfica (a) de la figura 4.16 sería una subdigráfica de D .

Si $\delta^-(v) \geq 1$ y $\delta^+(v) \geq 3$, entonces existen $u, w \in V(D)$ tales que $v = (u, w) \in F(D)$, $\delta^-(u) \geq 1$ y $\delta^+(w) \geq 3$. Así, la digráfica (b) o (c) de la figura 4.16 sería una subdigráfica de D .

Si $\delta^-(v) \geq 2$ y $\delta^+(v) \geq 2$, entonces existen $u, w \in V(D)$ tales que $v = (u, w) \in F(D)$, $\delta^-(u) \geq 2$ y $\delta^+(w) \geq 2$. Así, la digráfica (d), (e) o (f) de la figura 4.16 sería una subdigráfica de D .

Si $\delta^-(v) \geq 1$ y $\delta^+(v) \geq 3$, entonces existen $u, w \in V(D)$ tales que $v = (u, w) \in F(D)$, $\delta^-(u) \geq 1$ y $\delta^+(w) \geq 3$. Así, la digráfica (g) o (h) de la figura 4.16 sería una subdigráfica de D .

Si $\delta^-(v) \geq 4$, entonces existen $u, w \in V(D)$ tales que $v = (u, w) \in F(D)$ y

$\delta^-(w) \geq 4$. Así, la digráfica (i) de la figura 4.16 sería una subdigráfica de D .

Es fácil ver que estos son los únicos casos posibles, y entonces se tiene que no existe un vértice $v \in V(L(D))$ tal que $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v) \geq 4$.

Entonces, si $G_{L(D)}$ es la gráfica subyacente de $L(D)$ tenemos que el grado máximo de $G_{L(D)}$ es menor o igual que 3. Por teorema 3.4 tenemos que $\chi(G_{L(D)}) \leq \Delta(G_{L(D)})$ y entonces obtenemos $\chi(L(D)) \leq \Delta(L(D)) \leq 3$. Además sabemos que el número cromático de la digráfica de líneas de D es igual al índice cromático de D . Así, $\chi'(D) \leq 3$ -i.e. existe una 3-coloración propia de las flechas de D . Sea ζ dicha coloración. Como por hipótesis D no tiene núcleo, entonces D no tiene ζ -núcleo, de donde se sigue que $\pi(D) \neq 3$. Subdividiendo las clases cromáticas de D , obtenemos que $\pi(D) \neq k$, para toda $k \in \{3, \dots, m\}$. Por lo tanto $\pi(D) = 2$. \square

5. Notas sobre una conjetura

En el Capítulo 3 hemos demostrado que el número pancromático de una digráfica con núcleo es $m = |F|$. En particular, en las subsecciones 4.1 y 4.2 hemos probado que digráficas acíclicas, digráficas sin ciclos ni trayectorias de longitud 3, digráficas cuasitransitivas con núcleo y ciclos de longitud par tiene número pancromático m . Este resultado también es cierto para digráficas asimétricas con bloques transitivos, uniones de digráficas pancromáticas que comparten sólo vértices de ingrado 0, y sumas de Zykov de digráficas pancromáticas sobre digráficas transitivas y asimétricas. La proposición 4.8 garantiza que si D es un torneo, entonces $\pi(D) \in \{2, m\}$. En la sección 4.3 se demostró que las digráficas de orden menor o igual a cuatro, los ciclos impares, digráficas sin núcleo que no contiene a cierta subdigráficas (ver figura 4.16) y digráficas cuasitransitivas sin núcleo tienen número pancromático 2. Los mismo vale para digráficas 3-coloreables sin núcleo.

Resumiendo los resultados de el Capítulo 4, salta a la vista el hecho de que en todos los casos en que se pudo calcular el número pancromático exacto de una digráfica D con m flechas, resultó que $\pi(D) \in \{2, m\}$. Observaciones de este tipo motivaron a Galeana-Sánchez y Strausz a enunciar la siguiente conjetura

Conjetura. *Si D es una digráfica con m flechas, entonces $\pi(D) \in \{2, m\}$.*

De ser verdadera la conjetura, obtendríamos que una digráfica D con más de dos flechas no tiene núcleo si y sólo si $\pi(D) = 2$. Esto reduciría la tarea de buscar k -coloraciones que no admiten ς -núcleos, $2 < k < m$, a la tarea, en general mucho más simple, de probar que D no tiene núcleo.

De ser falsa la conjetura, tendríamos que existe una digráfica D tal que $2 < \pi(D) < m$. De existir, esta digráfica tendría que cumplir todas las siguientes propiedades:

- D no tiene núcleo de donde se sigue que no es un ciclo de longitud par, pero contiene al menos un ciclo asimétrico
- D no es un ciclo de longitud impar
- D no es cuasitransitiva asimétrica de donde se sigue que no es un torneo
- D tiene más de cuatro vértices
- D no es 3-coloreable por flechas
- D contiene a alguna de las digráficas de la figura 4.16
- G_D tiene un vértice de grado mayor o igual a 4.

Referencias

- [1] J. Bang-Jensen, G. Gutin, *Digraphs: Theory Algorithms and Applications*. Springer, London, 2001.
- [2] E. Boros, V. Gurvich, *Perfect graphs, kernels and cores of cooperative games*. Discrete Math, 306 (2006), 2336-2354.
- [3] J. Bondy, U. S. R. Murty, *Graphs theory with applications*. North-Holland, New York, Amsterdam, Oxford, 1982.
- [4] A.S. Fraenkel, *Combinatorial games: selected bibliography with a succinct gourmet introduction*. The Electronic Journal of Combinatorics, 14 (2007), DS2
- [5] H. Galeana-Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*. Discrete Math, 156 (1996), 103-112.
- [6] H. Galeana-Sánchez, *Kernels in edge-coloured digraphs*. Discrete Math, 184 (1998), 87-99.
- [7] H. Galeana-Sánchez, J.J. García Ruvalcaba, *Kernels in the closure of coloured digraphs*. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 20 (2000), 293-354.
- [8] H. Galeana-Sánchez, J.J. García Ruvalcaba, *On graphs allwhose $\{C_3, T_3\}$ -free arc colourations are kernel perfect*. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 21 (2001), 77-93.
- [9] H. Galeana-Sánchez, L. Pastrana Ramirez, *Kernels in edge coloured line digraphs*. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 18 (1998), 91-98.
- [10] H. Galeana-Sánchez, R. Strausz, *On panchromatic digraphs and the panchromatic number*. Graphs and Combinatorics (aprobado pero no publicado)
- [11] S. Minggang, *On monochromatic paths in m -coloured tournaments*. Journal of Combinatorial Theory. B45 (1988), 108-111.
- [12] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*. Journal of Combinatorial Theory, B33 (1982), 271-275.
- [13] J. Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1994