



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

**LA DEGENERACIÓN OSCURA, EL FLUIDO OSCURO  
Y MODIFICACIONES A RELATIVIDAD GENERAL**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

ALEJANDRO AVILÉS CERVANTES

TUTOR PRINCIPAL:

DR. JORGE LUIS CERVANTES COTA

Programa de Doctorado en Ciencias (Física)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

Instituto de Ciencias Nucleares

DR. ALBERTO GÜJOSA HIDALGO

Instituto de Ciencias Nucleares

MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE DE 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Prefacio

He realizado este trabajo para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Física), en el Posgrado en Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Autónoma de México bajo la supervisión del Dr. Jorge Luis Cervantes Cota. Mis estudios doctorales comenzaron durante el mes de agosto del año 2007.

Mi trabajo de Tesis Doctoral está basada principalmente en tres artículos, en orden cronológico éstos son:

- 1. A. Aviles and J.L. Cervantes-Cota, *Dark matter from dark energy-baryonic matter couplings*, Phys. Rev. D **83** (2011) 023510, [[arXiv:1012.3203](#)].
- 2. A. Aviles and J.L. Cervantes-Cota, *The dark degeneracy and interacting cosmic components*, Phys. Rev. D **84** (2011) 083515, [[arXiv:1108.2457](#)].
- 3. A. Aviles, A. Bastarrachea-Almodovar, L. Campuzano, and H. Quevedo, *Extending the generalized Chaplygin gas model by using geometrothermodynamics*, Phys. Rev. D **86** (2012) 063508, [[arXiv:1203.4637](#)].

Otros artículos dan soporte a este trabajo y sus resultados son expuestos brevemente a lo largo del mismo, éstos son:

- 4. A. Aviles and J.L. Cervantes-Cota, *Cosmological phase space of  $R^n$  gravity*, AIP Conf. Proc. **1083** (2008) 57, “Gravitation and Cosmology: Third International Meeting”, Morelia, Michoacán, México, 26-30 May, 2008. [[arXiv:0901.3722](#)].
- 5. A. Aviles, L. Bonanno, O. Luongo, and H. Quevedo, *Holographic dark matter and dark energy with second order invariants*, Phys. Rev. D **84** (2011) 103520, [[arXiv:1109.3177](#)].
- 6. A. Aviles, C. Gruber, O. Luongo, and H. Quevedo, *Cosmography and constraints on the equation of state of the Universe in various parametrizations*, Phys. Rev. D **86** (2012) 123516, [[arXiv:1204.2007](#)].
- 7. A. Aviles, A. Bravetti, S. Capozziello, and O. Luongo. *Updated constraints on  $f(R)$  from cosmography*. Phys. Rev. D **87** (2013) 044012, [[arXiv:1210.5149](#)].

Alejandro Avilés Cervantes



# Abstract

In this work we study some properties of the dark degeneracy, which is the fact that the dark sector of the Universe can only be probed by gravitational experiments, and as a consequence, any split of it, as in dark matter and dark energy, could be arbitrary. We show that a single fluid, known as the dark fluid, is capable to give exactly the same phenomenology as the  $\Lambda$ CDM model, at least at zero and first order in cosmological perturbation theory. We also construct the dark fluid from a collection of fluids with interactions between them. Accordingly, there exists an infinity of models which give the same cosmology. If the dark sector components do not interact at all with the standard model of particles, it is difficult to decide which model is correct. This leads us to give new meaning to the search for the right model: models which are exactly degenerate to a certain level in cosmological perturbation theory may be, no longer, to be at the next level. For this reason we explore several scenarios that break the dark degeneracy at different levels in cosmological perturbation theory.

By using the formalism of Geometrothermodynamics, we find a two free parameter model which reduces to the Chaplygin gas, to the polytropic fluids and to the dark fluid in some given limits. We describe its cosmology at zero and first order perturbation theory and in order to constrain its free parameters, we make comparisons to current observations.

We also explore the possibility that the dark fluid interacts with baryons. To do this, complying with the Bianchi identities, we develop a very general class of couplings. We let the background cosmology to stay in degeneracy with the  $\Lambda$ CDM model by forbidding energy transfers in the interactions, but by allowing momentum transfers, the interactions show observational signatures at first order in perturbation theory. We then constrain these interactions by comparing their signatures to observations.

Finally, we show a mechanism in which interactions between a quintessence-like scalar field and baryonic matter can give rise to the effects of dark matter. In doing this, we also show that modifications to the theory of General Relativity, as Scalar Tensor Gravity, are equivalent to couplings of scalar fields and matter under some identifications. We describe a specific model that can emulate all the dark matter in the Universe at the background cosmological level. We show how these models can also give rise to a similar growth of the density contrast of baryonic matter to that of the  $\Lambda$ CDM model, showing that they are plausible alternatives to dark matter.

---

# Resumen

En este trabajo estudiamos algunas propiedades de la degeneración oscura, que es el hecho de que las propiedades del sector oscuro del universo sólo pueden ser probadas por experimentos gravitacionales, y como consecuencia, cualquier división del mismo, como en materia oscura y energía oscura, puede ser arbitraria. Demostramos que de un sólo fluido, llamado fluido oscuro, se obtiene la misma fenomenología que en el modelo  $\Lambda$ CDM, al menos a ordenes cero y primero en teoría de perturbaciones cosmológicas. Luego, construimos éste a partir de una colección de fluidos con interacciones entre ellos. Por consiguiente, existe una infinidad de modelos de los que se obtiene la misma cosmología. Si las componentes del sector oscuro no interactúan en absoluto con el modelo estándar de partículas, es difícil decidir cuál modelo es el correcto. Esto nos lleva a darle un nuevo sentido a la búsqueda del modelo correcto: modelos que están degenerados de manera exacta hasta cierto nivel perturbativo podrían ya no estarlo al siguiente nivel. Por esta razón exploramos varios escenarios que rompen la degeneración parcialmente a diferentes grados en teoría de perturbaciones cosmológicas.

Utilizando el formalismo de geometrotermodinámica, encontramos un modelo de dos parámetros libres que se reduce al gas de Chaplygin, a los fluidos politrópicos y al fluido oscuro en ciertos límites dados. Describimos su cosmología a cero y primer orden en teoría de perturbaciones y hacemos comparaciones con observaciones cosmológicas recientes para acotar sus parámetros libres.

También exploramos la posibilidad de que el fluido oscuro interactúe con la materia bariónica. Para ello, respetando las identidades de Bianchi, desarrollamos una clase muy general de acoplamientos. Dejamos que la cosmología de fondo permanezca en degeneración con el modelo  $\Lambda$ CDM al no permitir transferencia de energía, pero, al permitir transferencia de momento, las interacciones mostrarán signaturas a primer orden en la teoría de perturbaciones, las cuales usamos para acotar las interacciones.

Finalmente, mostramos un mecanismo en el que interacciones entre un campo escalar de energía oscura con materia bariónica pueden emular a la materia oscura. Al hacer esto, mostramos también que modificaciones a la teoría de relatividad general, como teorías escalares tensoriales, son equivalentes a estos acoplamientos bajo algunas identificaciones. Describimos un modelo específico que emula toda la materia oscura en el universo en la cosmología homogénea e isotrópica. Mostramos también cómo estos modelos pueden dar lugar a un crecimiento similar del contraste de densidad de la materia bariónica al del modelo  $\Lambda$ CDM, lo que los convierte en alternativas plausibles al problema de la materia faltante en el universo.

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Contenido energético del universo . . . . .	2
1.1.1. Bariones . . . . .	2
1.1.2. Radiación . . . . .	4
1.1.3. Curvatura . . . . .	5
1.1.4. Energía oscura . . . . .	6
1.1.5. Modelo de la concordancia . . . . .	7
1.2. Candidatos de energía oscura . . . . .	7
1.2.1. Problemas con la constante cosmológica . . . . .	8
1.2.2. Alternativas a la constante cosmológica . . . . .	10
1.3. Candidatos de materia oscura . . . . .	11
1.4. Modelos unificados . . . . .	13
1.5. Cosmografía como herramienta para estudiar la expansión del universo . . . . .	13
<b>2. Cosmología estándar</b>	<b>19</b>
2.1. Cosmología homogénea e isotrópica . . . . .	19
2.2. Teoría de perturbaciones lineales . . . . .	21
2.2.1. Ecuaciones de Einstein . . . . .	24
2.2.2. Ecuaciones de hidrodinámica . . . . .	25
2.3. Ecuación de Boltzmann . . . . .	26
2.3.1. Ecuaciones de Boltzmann para fotones, bariones y materia oscura fria . . . . .	27
2.4. Espectro de potencias en la radiación cósmica de fondo . . . . .	30
2.4.1. Método de la integral de línea de visión . . . . .	32
<b>3. La degeneración oscura y el fluido oscuro</b>	<b>35</b>
3.1. La degeneración oscura . . . . .	36
3.2. La velocidad del sonido de la materia oscura y el fluido oscuro . . . . .	37
3.3. Fluido oscuro como energía oscura . . . . .	38
3.4. Perturbaciones del fluido oscuro . . . . .	41
3.4.1. Orden lineal . . . . .	41
3.4.2. Más allá del primer orden . . . . .	45
3.5. Múltiples componentes interactuantes . . . . .	47



3.6. Ruptura de la degeneración oscura . . . . .	50
<b>4. Extensión al gas de Chaplygin usando geometrotermodinámica</b>	<b>53</b>
4.1. Aspectos básicos de la geometrotermodinámica . . . . .	55
4.2. Descripción unificada de materia y energía oscura . . . . .	59
4.3. Perturbaciones al fluido GTD . . . . .	63
<b>5. Interacciones del fluido oscuro con bariones</b>	<b>69</b>
5.1. Acoplamientos . . . . .	70
5.2. Comparación con observaciones . . . . .	74
5.3. Estructura a gran escala . . . . .	81
5.3.1. El problema del sesgo galáctico . . . . .	82
5.3.2. Comparaciones con observaciones . . . . .	83
<b>6. Campos escalares y modificaciones a relatividad general</b>	<b>89</b>
6.1. Teorías escalares tensoriales . . . . .	92
6.2. Dualidad con interacciones de campos escalares con materia . . . . .	95
6.2.1. Acoplamientos con la traza del tensor de energía momento . . . . .	96
6.3. Generación de materia oscura a través de interacciones con campos escalares	100
6.3.1. Cosmología de fondo . . . . .	101
6.3.2. Acoplamiento universal . . . . .	103
6.3.3. Cotas provenientes de nucleosíntesis . . . . .	103
6.4. Modelo sin materia oscura . . . . .	105
6.4.1. Análisis numérico . . . . .	107
6.4.2. Ajuste a supernovas tipo Ia . . . . .	110
6.4.3. Perturbaciones lineales . . . . .	110
<b>7. Conclusiones</b>	<b>119</b>
<b>A. Convenciones, constantes y relaciones útiles</b>	<b>125</b>
<b>B. Métodos estadísticos en cosmología</b>	<b>129</b>
B.1. Teorema de Bayes y la función de verosimilitud . . . . .	129
B.1.1. Estadística $\chi^2$ . . . . .	130
B.2. Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) . . . . .	131
B.2.1. Diagnóstico de Convergencia Gelman-Rubin . . . . .	134
<b>C. Algunas demostraciones</b>	<b>137</b>
C.1. Demostración ecuaciones (3.39) y (3.40) . . . . .	137
C.2. Fijando la norma síncrona . . . . .	139
C.3. Variación de $\rho$ . . . . .	141
<b>D. La degeneración oscura no es fundamental</b>	<b>143</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>145</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En el año 1933 el astrónomo suizo F. Zwicky estudió el movimiento de ocho galaxias del cúmulo Coma con la finalidad de inferir su masa usando el teorema del virial. Encontró que las velocidades peculiares de las galaxias eran mucho mayores a lo esperado, lo que lo llevó a concluir que el cúmulo contenía al menos 200 veces más masa de la inferida por la luminosidad de las galaxias [1]. Él mismo acuñó el término *materia oscura* para referirse a esta masa faltante. La segunda evidencia de la existencia de la materia oscura provino de las observaciones de galaxias individuales por V. Rubin [2]. Ella midió las velocidades orbitales de la materia interestelar en alrededor de 60 galaxias espirales como función de sus distancias al centro de ellas. Sus observaciones estaban en contradicción con el movimiento kepleriano: al incrementarse la distancia, las velocidades no caían, sino que se mantenían aproximadamente constantes incluso más allá de la región galáctica visible. Su hipótesis fue que las galaxias están rodeadas de un halo esférico de materia “invisible”, cuya masa total es unas 10 veces mayor a la de la materia luminosa y a los gases interestelares.

Desde esa época a la fecha, usando las técnicas descritas en el párrafo anterior, se han encontrado múltiples evidencias de la existencia de una materia faltante. Catálogos de galaxias espirales y sus curvas de rotación superan los miles de casos, mostrando una razón de masa-luminosidad de  $M/L = (10 - 20)M_{\odot}/L_{\odot}$ ; véase por ejemplo [3].

Una observación sorprendente es la del gigantesco cúmulo Abell 2029 que se encuentra a una distancia de alrededor de 100 Mpc y contiene miles de galaxias. Imágenes de rayos X tomadas por el satélite Chandra muestran que éste se encuentra rodeado por una nube de gas que alcanza temperaturas de hasta  $10^6\text{K}$ . Para poder mantener este gas confinado es necesario que el cúmulo tenga una masa 10 veces mayor a la inferida por consideraciones dinámicas [4].

Un importante trazador de la materia oscura en nuestro universo se obtiene del efecto de lentes débiles gravitacionales. El ejemplo más conocido de esta técnica fue empleada en el llamado *Bullet Cluster*, que se encuentra a una distancia aproximadamente de 1 Gpc. Éste es la fusión de dos cúmulos de galaxias con una alta velocidad relativa entre ellas de alrededor de  $4.5 \times 10^3$  km/s. Durante el encuentro los gases intergalácticos son calentados a  $10^6$ K. La consecuente emisión de rayos X fue medida por el satélite Chandra y muestra como el gas queda rezagado del movimiento de las galaxias, las cuales pasan las unas a través de las otras sin sufrir colisiones. El uso de lentes gravitacionales permitió reconstruir los halos de cada cúmulo, concluyendo que éstos contribuyen con 49 veces la masa encontrada en las galaxias y el gas caliente interestelar [5]<sup>1</sup>.

## 1.1. Contenido energético del universo

Las ecuaciones de la relatividad general de Einstein implican que en un universo homogéneo e isotrópico los parámetros de densidad  $\Omega_i(t) \equiv 8\pi G\rho_i(t)/3H^2$  de las distintas especies de energía cumplen con la ecuación

$$\sum_i \Omega_i(t) = 1 - \frac{K}{a^2 H^2}, \quad (1.1)$$

donde  $K$  es un factor de curvatura (constante) de las hipersuperficies espaciales de tiempo constante,  $a = a(t)$  es el factor de escala del universo y  $H \equiv a^{-1}da/dt$  el factor de expansión de Hubble. Esta es una ecuación de constricción que implica que las distintas formas de materia evolucionan de acuerdo al comportamiento de las demás. A continuación presentamos las principales componentes energéticas del universo y sus abundancias inferidas por observaciones astrofísicas y cosmológicas.

### 1.1.1. Bariones

Como es costumbre en cosmología y astrofísica muchos términos son deformados a conveniencia y por costumbres. Cuando hablamos de bariones en cosmología nos referimos a toda partícula, fundamental o compuesta, del modelo estándar de partículas que no sea relativista<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Aunque algunos autores aseveran que el *Bullet Cluster* es un claro indicador de la invalidez del modelo  $\Lambda$ CDM; véanse por ejemplo [6, 7].

<sup>2</sup>En el modelo estándar de partículas se define al barión como una partícula compuesta por tres quarks, como lo son el protón, el neutrón, las partículas  $\Lambda$ , las partículas  $\Xi$ , las partículas  $\Sigma$ , entre otras. Los electrones, por ejemplo, son leptones, sin embargo en cosmología se les considera bariones siempre que no sean relativistas.

La teoría de nucleosíntesis ha sido muy exitosa en predecir la abundancia relativa de los núcleos de átomos ligeros que se formaron durante los primeros minutos de la historia del universo [8, 9]. Los resultados dependen de diversos parámetros: la diferencia entre las masas del neutrón y el protón,  $Q \simeq 1.293 \text{ MeV}$ , la constante gravitacional  $G_N \simeq 6.7 \times 10^{-39} \text{ GeV}^{-2}$ , la constante de Fermi  $G_f \simeq 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ , el número efectivo de grados de libertad relativistas durante nucleosíntesis,  $g_* = 10.75$ , la vida media del neutrón  $\tau_N \simeq 885.7 \text{ s}$  y de dos parámetros que podemos ajustar mediante observaciones cosmológicas, la tasa de expansión del universo al momento de nucleosíntesis y la razón barión-fotón parametrizada por el factor  $\eta_{10} = 10^{10} n_b/n_\gamma = 2.7 \times 10^2 \Omega_b h^2$  donde  $n_b$  y  $n_\gamma$  son las densidades de número de bariones y fotones, respectivamente,  $\Omega_b$  es el parámetro de densidad de bariones evaluado hoy en día y  $h = H_0/(100 \text{ km/s/Mpc})$  parametriza la constante de Hubble. En general,  $\Omega_i \equiv \Omega_i(t_0)$ .

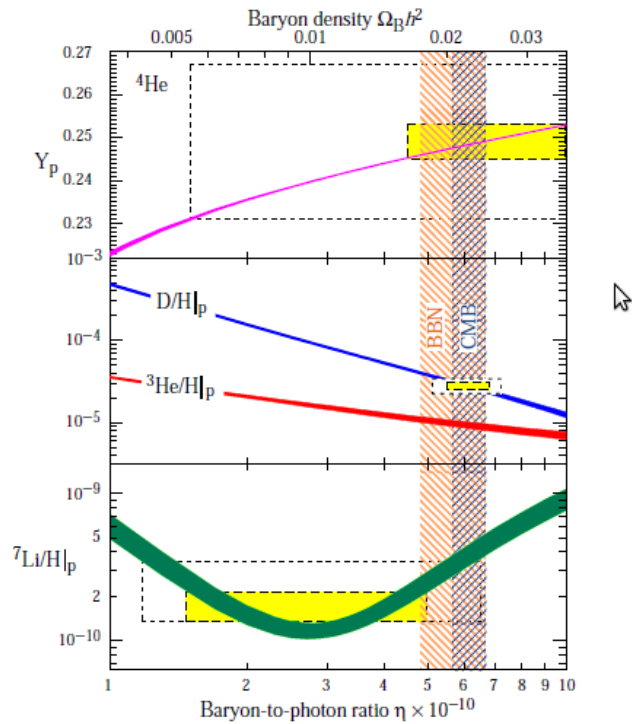


FIGURA 1.1: Abundancia primordial de átomos ligeros como función del parámetro  $\eta = n_b/n_\gamma$ . las cajas horizontales muestran las abundancias observadas a un nivel de confianza de  $2\sigma$  (las grandes incluyen errores estadísticos y sistemáticos, mientras las pequeñas sólo estadísticos). Las barras verticales muestran la fracción de bariones inferida por experimentos de la radiación cósmica de fondo. Imagen extraída de [9].

La figura 1 muestra las abundancias relativas de De,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$  y  ${}^7\text{Li}$  como función de  $\eta_{10}$ , de donde se infiere que el parámetro de densidad bariónica tiene un valor

$$0.017 < \Omega_b h^2 < 0.024, \quad (1.2)$$

a un nivel de confianza de  $2\sigma$  [9].

### 1.1.2. Radiación

La temperatura de los fotones provenientes de la radiación cósmica de fondo ha sido medida con gran precisión por el instrumento FIRAS del satélite COBE, obteniendo un valor  $T_\gamma = 2.725 \pm 0.002\text{K}$  [10]. De esta observación se obtiene

$$\Omega_\gamma = \frac{8\pi G}{3H_0^2} (N_\gamma a_{SB} T_\gamma^4) \simeq 2.47 \times 10^{-5} h^{-2}, \quad (1.3)$$

donde  $N_\gamma = 2$  es el número de grados de libertad de espín para fotones y  $a_{SB} = \pi^2 k_B^4 / (30 \hbar^3 c^2)$  es la constante de Stefan-Boltzmann.

Los neutrinos también contribuyen a la cantidad total de radiación en el universo, siempre que éstos sean relativistas. Dado que se espera una masa total de los neutrinos  $m_T = \sum m_i < 1\text{eV}$ , dejaron de ser relativistas hace relativamente poco tiempo. Si bien éstos se comportan como materia oscura en el universo tardío, no así en el universo temprano por lo que no contribuyeron a la formación de estructura, podemos entonces simplificar la discusión considerando sus masas iguales a cero, de esta manera los neutrinos contribuyen al contenido relativista con un parametro de densidad

$$\Omega_\nu = \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \Omega_\gamma, \quad (1.4)$$

por especie. Si consideramos tres especies de neutrinos se obtiene  $\Omega_\nu \simeq 0.681\Omega_\gamma$ . Es común parametrizar la cantidad total de materia relativista presente en las épocas tempranas del universo, una vez que neutrones y protones dejan de ser relativistas, con la ecuación

$$\Omega_{\text{rad}} = \left( 1 + N_{eff} \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \right) \Omega_\gamma, \quad (1.5)$$

donde  $N_{eff}$  es el número de grados relativistas efectivos. Para tres especies de neutrinos  $N_{eff} = 3.046$ , la desviación del valor  $N_{eff} = 3$  se obtiene si se considera que el desacoplamiento de los neutrinos y el plasma primordial de fotones y bariones no sucede de manera instantánea [11]. Sin embargo, medidas recientes de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo infieren un valor  $N_{eff} = 4.34_{-0.88}^{+0.86} (1\sigma)$  [12]. Esto ha abierto nuevas líneas de investigación para explicar el exceso de radiación, llamado genéricamente *radiación oscura*, que no es esperado dentro del modelo estándar de partículas; véanse por ejemplo [13, 14]. Los últimos resultados de WMAP (9 años) cuando son analizados conjuntamente con mediciones de oscilaciones acústicas de bariones y el valor de la constante de Hubble hoy en día muestran un valor de  $N_{eff} = 3.26 \pm 0.35 (1\sigma)$ , valor consistente con el modelo estándar [15].

### 1.1.3. Curvatura

La geometría espacial de un universo homogéneo e isotrópico está determinada por el parámetro  $\Omega_K \equiv K/a^2 H^2$ , de aquí que la ecuación (1.1) pueda ser escrita como  $\sum_i \Omega_i(t) + \Omega_K = 1$ , donde el índice  $i$  corre sobre las distintas especies de energía. La inferencia más precisa de la curvatura proviene de las posición de los picos acústicos en el espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo, principalmente del primero.

Justo antes de recombinación, fotones y bariones estaban fuertemente acoplados y se comportaban como un sólo fluido que desarrollaba oscilaciones acústicas debido a la fuerza atractiva producida por la gravitación, cuya fuente principal eran inhomogeneidades en la materia oscura que crecían al no interactuar con los fotones, y una fuerza repulsiva producida por la presión de radiación. Desde nuestro lugar en el universo, observamos la proyección de estas oscilaciones en la esfera de última dispersión. En escalas angulares por debajo de alrededor de  $1^\circ$ , es decir, más pequeñas que el horizonte de sonido en la época de última dispersión, observamos modos de oscilación que tuvieron suficiente tiempo de hacer oscilaciones completas, y éstos son reflejados en una serie de picos y valles en la radiación cósmica de fondo. Modos que se encontraban al máximo de compresión o rarefacción corresponden a picos, mientras que los valles corresponden a modos que se encontraban a velocidad máxima. El número de onda de cada uno de estos modos  $k_m$  está relacionado con el multipolo  $l$  de la descomposición de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo en armónicos esféricos por la relación  $l \simeq k_m D_a$ , donde la distancia diametral angular comóvil es  $D_a = K^{-1/2} \text{sen} [K^{1/2}(\tau_0 - \tau_*)]$ , y  $\tau_0 - \tau_*$  es la distancia conforme a la época de última dispersión. De esta manera el tamaño del primer pico acústico representa una regla estándar y su posición se mostrará a un multipolo [16]

$$l \simeq \frac{200}{\sqrt{1 - \Omega_K}}. \quad (1.6)$$

Esta relación se encuentra muy poco degenerada con los demás parámetros cosmológicos. Sin embargo, una técnica más robusta para medir la curvatura espacial del universo consiste en usar además el espaciamiento entre los distintos picos acústicos [17]. De aquí se infiere que la curvatura contribuye con un parámetro de densidad

$$\Omega_K = -0.0057 \pm 0.0068, \quad (1.7)$$

lo que es consistente con un universo espacialmente plano; véase figura 1.2.

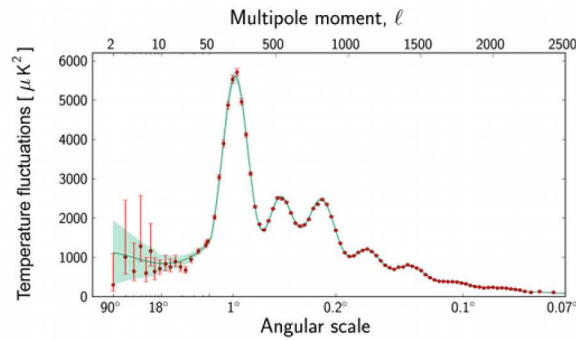


FIGURA 1.2: Espectro de potencias angular en la radiación cósmica de fondo. Se observa que el primer pico acústico aparece a un multipolo  $\sim 200$ . Imagen tomada de [18].

#### 1.1.4. Energía oscura

A finales del siglo pasado, dos grupos independientes, el *Supernova Cosmology Project* [19] y el *High- $z$  Supernova Team* [20], midieron la expansión del universo a tiempos tardíos usando supernovas tipo Ia como candelas estándar hasta corrimientos al rojo  $z \sim 1.5$ . Estos encontraron que el universo actualmente se encuentra en una etapa de expansión acelerada, en vez de una expansión desacelerada como es de esperarse para un universo dominado por materia. Poco tiempo después, las observaciones de supernovas alcanzaron corrimientos al rojo  $z \sim 1.7$ , mostrando que la presente etapa acelerada es precedida de una etapa de desaceleración [21].<sup>3</sup>

Suponiendo que existe un fluido responsable de la aceleración del universo con una ecuación de estado  $P = w\rho$ , genéricamente llamado energía oscura, las ecuaciones de Einstein muestran que el parámetro de la ecuación de estado debe estar en el rango  $w < -1/3$ . Más aún, si consideramos que este fluido debe ser altamente homogéneo, para no estropear el éxito de la teoría de formación de estructura producida por la materia oscura, se deduce que  $w$  debe tener un valor muy cercano a  $-1$ .

Las observaciones de supernovas tipo Ia no sólo indican la cantidad de energía oscura que debe haber en el universo, sino también la cantidad de materia total. Concluyendo que aproximadamente 73% del contenido energético del universo es compuesto por energía oscura y 27% por materia. Recientemente la colaboración PLANCK reportó valores  $\Omega_M = 0.315 \pm 0.017$  a un valor de confianza del 68% [22], en clara tensión con los resultados de mediciones de supernovas. Otra comprobación independiente de la energía oscura se obtiene de un análisis conjunto de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo y de medidas de la constante de Hubble  $H_0$  realizadas por el satélite Hubble

<sup>3</sup>El descubrimiento de la aceleración cósmica del universo galardonó a S. Perlmutter, B.P. Schmidt y A.G. Riess con el premio Nobel de física en el año 2011.

[12, 23]. Más recientemente, la existencia de la energía oscura ha sido confirmada usando únicamente observaciones de la radiación cósmica de fondo, esto a distintas escalas: a escalas angulares pequeñas por el telescopio Atacama [24], y a escalas grandes por T. Giannantonio y colaboradores usando el efecto Sachs-Wolfe integrado [25].

### 1.1.5. Modelo de la concordancia

De las secciones anteriores se deduce que la gran mayoría del contenido energético del universo es no bariónico. El modelo de la concordancia dice que vivimos en un universo espacialmente muy plano y que aproximadamente el 73 % de su energía está constituido por energía oscura, el 23 % por materia oscura y el 4 % por materia bariónica.

## 1.2. Candidatos de energía oscura

La teoría de la relatividad general de Einstein parte de dos principios fundamentales: el principio de covariancia generalizada y el principio de equivalencia. De acuerdo al primero de éstos, las ecuaciones que describen a la gravitación deben ser invariantes ante transformaciones de coordenadas; el segundo dice que la materia libre de toda fuerza, sigue geodésicas del espacio-tiempo. Además, siempre es posible encontrar coordenadas en las que la métrica es localmente la métrica de Minkowski y son válidas las leyes de la relatividad especial, y en estas coordenadas las partículas que siguen geodésicas de la métrica se encuentran en reposo. De estos dos principios se sigue que la conservación local del tensor de energía momento en relatividad especial,  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , deba ser sustituida en espacios curvos por su forma covariante  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Si buscamos ecuaciones de campo que relacionen la métrica y sus derivadas con el contenido energético en el espacio-tiempo, digamos  $E_{\mu\nu}(g, g', \dots) = T_{\mu\nu}$ , debemos imponer  $\nabla_\mu E^{\mu\nu} = 0$ . De aquí, es posible encontrar una infinidad de distintas ecuaciones de campo. Sin embargo, si imponemos además que las ecuaciones dependan de hasta las segundas derivadas de la métrica, (casi) la única posibilidad que existe son las ecuaciones de campo de Einstein:  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2 = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , donde el factor  $8\pi G$  es escogido para obtener un límite newtoniano correcto. Sin embargo, dado que la métrica es covariantemente constante,  $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ , podemos añadir un término  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , con  $\Lambda$  una constante, a las ecuaciones de campo de Einstein, obteniendo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Si el término  $\Lambda$ , llamado constante cosmológica, es positivo, éste actúa como una fuente repulsiva en un universo homogéneo e isotrópico y produce una expansión acelerada. De hecho, la solución de vacío en dicho universo es el espacio de Sitter si  $\Lambda > 0$  y el



espacio anti-de Sitter si  $\Lambda < 0$ . Más aún, si colocamos el término del lado derecho de la ecuación (1.8), éste puede ser interpretado como un fluido perfecto con densidad de energía  $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$  y con ecuación de estado  $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$

La constante cosmológica es entonces un candidato natural, con una sólida interpretación teórica, a ser responsable de la expansión acelerada del universo. Como vimos en las secciones pasadas, el hecho de que  $w_\Lambda = -1$  hace que la constante cosmológica se encuentre en concordancia con todas las observaciones existentes siempre que ésta tenga un valor

$$\Lambda \sim (10^{-33} \text{ eV})^2. \quad (1.9)$$

### 1.2.1. Problemas con la constante cosmológica

A pesar de que el modelo  $\Lambda$ CDM precedido por un periodo inflacionario es hasta ahora el modelo cosmológico más exitoso al compararlo con observaciones, sufre de varios problemas, tanto conceptuales como computacionales. Tanto referentes a la constante cosmológica como a la materia oscura fría.

Los problemas conceptuales y teóricos de la constante cosmológica son dos: el *problema de la constante cosmológica* y el *problema de la coincidencia*.

Según el principio de equivalencia todas las formas de energía deben gravitar. Esto incluye a la contribución de vacío de los campos cuánticos, cuya existencia ha sido comprobada a través del efecto Casimir (aunque cabe decir que los experimentos relacionados miden la diferencia de la energía del vacío de campos electromagnéticos en distintas configuraciones y no la energía misma).

Si en efecto, esta energía gravita, debe ser introducida en las ecuaciones de Einstein de la relatividad general a través de un tensor de energía momento. En el espacio de Minkowsky este tensor debe tener la misma forma para todos los observadores Lorentz, por lo que  $T_{\mu\nu}^{(vac)} = \rho_{vac}\eta_{\mu\nu}$ , en espacios curvos generalizamos esta expresión, usando el principio de covariancia generalizada, a

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = \rho_{vac} g_{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

donde  $\rho_{vac} = \langle T_{00} \rangle_{vac}$  es la densidad de energía del vacío de los campos cuánticos dada por

$$\rho_{vac} = \int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (1.11)$$

Esta integral diverge como  $k^4$  y la contribución del vacío es infinita. Sin embargo, se espera que esta descripción sea incorrecta a altas energías, por ejemplo a la escala de Planck.

Si escogemos a ésta como una escala de corte  $k_{max} \sim M_P = \sqrt{1/8\pi G} \sim 10^{18}$  GeV, la energía del vacío tiene el valor enorme

$$\rho_{vac} = \Lambda_{vac}/8\pi G \sim c^5/G^2\hbar \sim 10^{76} \text{GeV}^4, \quad (1.12)$$

donde además en la primera igualdad hemos definido la constante  $\Lambda_{vac}$ .

Por otro lado, como fue expuesto en la sección anterior, las identidades de Bianchi permiten añadir una constante cosmológica  $\Lambda$  a las ecuaciones de Einstein, obteniendo

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda_{vac} g_{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

La densidad de la energía oscura observada es  $\rho \sim 10^{-47} \text{GeV}^4$ , por lo que las contribuciones de la constante cosmológica y la energía del vacío deben ajustarse a (véase [26])

$$\frac{\Lambda_{vac} + \Lambda}{\Lambda_{vac}} \sim 10^{-123}. \quad (1.14)$$

Un segundo problema conceptual es que la razón de las contribuciones energéticas de materia oscura y constante cosmológica decae con la tercera potencia del factor de escala,  $\Omega_M/\Omega_\Lambda \propto (1+z)^3$ , por lo que estas dos resultan comparables desde corrimientos al rojo de alrededor de  $z \sim 1.2$ . Antes de esa época, la constante cosmológica es despreciable y después, y hasta tiempo cósmico infinito, la densidad de materia lo es. Sólo hay una pequeña ventana en el tiempo en que ambas son comparables, y es justo ahora, en nuestros tiempos. Este es el llamado *problema de la coincidencia*.

En [27] E. Bianchi y C. Rovelli hacen una fuerte crítica al uso de estos problemas como motivación a modelos de energía oscura alternativos a la constante cosmológica. Básicamente argumentan que el problema del tamaño de la constante cosmológica pertenece al campo de la física fundamental: aún no comprendemos lo suficiente a la teoría cuántica de campos y sus interacciones con la gravitación, es un error identificar a la energía del vacío con una constante cosmológica.<sup>4</sup> Según ellos el problema de la coincidencia simplemente no existe, la edad en que empieza la constante cosmológica a ser no despreciable es aproximadamente la mitad de la edad del universo hoy en día<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Notemos, además, que para obtener la ecuación (1.12) hemos usado un espacio de Minkowsky, a diferencia de un espacio curvo en el cual el vacío de campos cuánticos no está bien definido. También hemos roto invariancia de Lorentz al escoger un marco de Lorentz particular para definir  $k_{max}$ .

<sup>5</sup>Si bien esto es cierto, el argumento de los autores en [27] no toma en cuenta que si la constante cosmológica hubiera dominado antes no se hubiera dado la formación de estructura.

### 1.2.2. Alternativas a la constante cosmológica

Dados los problemas con la constante cosmológica expuestos en la pasada sección, en los últimos años han aparecido decenas de clases distintas de modelos que intentan explicar la aceleración actual del universo. En general, éstos asumen que la energía del vacío no gravita, o que es nula, y se concentran en explicar el problema de la coincidencia. Hay dos grandes géneros, fluidos dinámicos y modificaciones a la relatividad general.

El prototipo de fluido dinámico es el de un campo escalar con término cinético canónico que no interactúa con la materia, genéricamente llamado *quintaesencia* [28–30]. Éstos aminoran el problema de la coincidencia al hacer su densidad de energía dependiente del tiempo, las características particulares de la dinámica dependen de un potencial de autointeracción. La idea general es que el campo escalar se encuentre evolucionando hacia el mínimo del potencial, posiblemente en el límite  $\phi \rightarrow \infty$ , mientras su densidad de energía decae, finalmente el campo escalar entra en una fase de *rodamiento lento* impuesta por la competencia entre la pendiente del potencial y la “fricción” dada por la misma expansión del universo. En este momento el parámetro de la ecuación de estado del campo escalar es  $w_\phi \simeq -1$ , comportandose como constante cosmológica. Éste es el esquema general de la teoría de inflación.

### Modificaciones a la relatividad general

Otra alternativa a la constante cosmológica es que ésta la inferimos mediante el uso de una teoría gravitacional incorrecta. Las ecuaciones de campo de Einstein deben ser sustituidas por otras a escalas cosmológicas. Al respecto, muchos modelos han aparecido en la literatura en tiempos recientes.

Las teorías escalares tensoriales suponen que existe un campo escalar no mínimamente acoplado a la gravitación [31–33]. Éstas han sido usadas en diversas ocasiones para imitar la fenomenología cosmológica de la energía oscura; véanse por ejemplo [34, 35]. La importancia de estos modelos radica en su justificación, que es más teórica que fenomenológica. Aunque no fue la motivación original, ahora son interpretados como límites de bajas energías en teoría de cuerdas, y el campo escalar es identificado con el dilatón [36, 37].

Un tipo de estas teorías que ha tenido especial atención durante los últimos diez años son los modelos camaleónicos [38, 39]. Consideremos una teoría escalar tensorial en el marco de Einstein, las partículas de prueba en el espacio-tiempo siguen geodésicas de la métrica conforme, en lugar de geodesicas de la métrica asociada al escalar de Ricci que aparece en la acción de Einstein-Hilbert,  $S = \int d^4x \sqrt{-g} R$ . Ésto produce una

quinta fuerza efectiva mediada por el campo escalar con una intensidad del orden de la fuerza gravitacional newtoniana. Experimentos terrestres acotan fuertemente el alcance de estas fuerzas [40, 41], por lo que el campo escalar debe tener una masa muy grande. Sin embargo, para tener influencia cosmológica su masa debe ser muy pequeña. Una característica de los campos camaleónicos es que su masa depende de la densidad de energía ambiente en que éste se encuentra; heurísticamente podemos argumentar que a bajas energías como las encontradas a escalas cosmológicas la masa es muy ligera, mientras que a densidades grandes, como las presentes en laboratorios terrestres, ésta es muy grande, mediando fuerzas de corto alcance. Aunque dichos experimentos son realizados en cámaras de vacío, los instrumentos de prueba son masivos y contribuyen al perfil del campo dentro de dicha cámara [39]. Sin embargo, en [42] L. Kraisselburd *et al.* objetan que la quinta fuerza mediada por los camaleones depende de la composición de los cuerpos de prueba y, además, que éstos son descartados por experimentos recientes tipo Eötvös.

Otras teorías muy atendidas modifican la densidad lagrangiana de relatividad general por una función general del escalar de Ricci  $f(R)$  [43–45]. Las ecuaciones resultantes son de cuarto orden en la métrica, por lo que su tratamiento es considerablemente más complicado. De hecho, muy pocas soluciones exactas han sido encontradas. En la cosmología homogénea e isotrópica, hemos encontrado la solución del vacío de  $f(R) \propto R^n$ , obteniendo que el factor de escala es  $a(t) \propto t^\alpha$ , con  $\alpha = (2n^2 - 3n + 1)/(2 - n)$ , si  $n \neq 2$ , y  $a(t) \propto \exp(Ht)$ , con  $H$  una constante, si  $n = 2$  [46].

Un problema principal de estas teorías, es el encontrar una función  $f(R)$  que además de cumplir con las observaciones cosmológicas tenga un límite newtoniano correcto. Se puede demostrar que estas teorías tienen una equivalencia matemática con las teorías escalares tensoriales [47], por tanto se han buscado teorías  $f(R)$  que posean un efecto camaleónico como el arriba descrito. Varios trabajos han sido exitoso en hacerlo; véanse por ejemplo [48, 49].

Existen otros tipos de modelos, una lista no extensiva incluye teorías holográficas [50–52], mundos branas [53], teorías con torsión  $f(T)$  [54], entre muchas otras.

### 1.3. Candidatos de materia oscura

En el modelo estándar de cosmología, la materia oscura es fría. Esto significa que las “partículas” que la constituyen, en su mayoría deben ser no relativistas desde épocas tempranas en la historia del universo. Esto es importante para la formación de estructura,

dado que partículas relativistas, como es el caso de materia oscura caliente, no pueden formar estructura a pequeñas escalas.

Los candidatos más populares de materia oscura consisten en partículas muy masivas de origen térmico llamadas WIMP (Weakly Interaction Massive Particles), que fueron creadas en el universo temprano y rápidamente se desacoplaron de la materia ordinaria dando origen a la formación de estructura. Entre éstas se encuentran neutralinos, sneutrinos, gravitinos, axiones, entre otros. Éstas son predichas por extensiones del modelo estándar de partículas. Sin embargo, a la fecha no se han encontrado experimentalmente. Aunque cabe decir que el experimento DAMA reportó algunos eventos que podrían indicar su existencia [55], resultados que han sido recibidos con gran escepticismo por la comunidad científica al no ser verificados por experimentos similares, como los realizados por la colaboración XENON100 [56].

A pesar de su éxito, el modelo estándar de cosmología con materia oscura fría sufre de algunos problemas observacionales. Estos son principalmente los problemas de halos picudos en galaxias [57] y de excesos de subestructura en cúmulos de galaxias [58], que aparecen en simulaciones numéricas de  $N$  cuerpos pero no son observados.

Un modelo de materia oscura compuesta de partículas que interactúan a través de la fuerza nuclear fuerte ha sido propuesta por D.N. Spergel y P.J. Steinhardt en [59]. Ha sido mostrado que estos modelos pueden resolver el problema de halos picudos [60]. Sin embargo, no es claro cómo este tipo de materia pueda ser oscura dado que una interacción fundamental fuerte implica interacciones efectivas con la radiación.

Otro candidato de materia oscura es un campo escalar con una masa muy ligera, si éste oscila alrededor de un mínimo cuadrático su densidad de energía promedio decae con la tercera potencia del factor de escala [61], como sucede con la materia ordinaria. Más recientemente estos modelos han sido estudiados por distintos grupos de la comunidad [62–65].

Un enfoque totalmente diferente para resolver el problema de la materia faltante es MOND (Modified Newton Dynamics), propuesta por M. Milgrom en 1983 [66]. La idea es que la segunda ley de Newton es incorrecta para pequeñas aceleraciones y debe ser sustituida por  $\vec{F} = m\vec{a}$  para  $|\vec{a}| \gg |\vec{a}_0|$  y  $\vec{F} = m\vec{a}|\vec{a}|/|\vec{a}_0|$  para  $|\vec{a}| \ll |\vec{a}_0|$ , donde  $a_0 \simeq 1.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$ . Es fácil ver que estrellas distantes al bulbo de una galaxia con la geometría adecuada tendrán velocidades  $v = (GMa_0)^{1/4}$ . De tal manera, MOND reproduce las observaciones de curvas de rotación planas de materia en galaxias espirales. Dado el éxito observacional de la teoría de MOND, han sido exploradas distintas extensiones relativistas, entre las que figuran TeVeS (Tensor-Vector-Scalar Theory) [67], teorías bimétricas [68], y teorías  $f(R) \propto R^{3/2}$  [69].

## 1.4. Modelos unificados

En la literatura reciente han aparecido una amplia gama de modelos que unifican materia oscura y energía oscura. Por ejemplo, los modelos de *k-esencia* consisten en campos escalares con términos cinéticos no canónicos, fueron introducidos inicialmente como mecanismos para generar inflación [70], y más adelante estudiados como modelos unificados [71–73]. Modelos cercanos a éstos son el *gas de Chaplygin*, compuesto de materia exótica, y sus distintas generalizaciones [74–78].

Otros modelos asumen modificaciones a la relatividad general, entre estos figuran las teorías escalares tensoriales [79] y las teorías holográficas [52].

La holografía está basada en la idea de que la entropía de un sistema físico no es extensiva, sino que escala con el área de su superficie. Al extender este postulado a la cosmología diversos autores interpretan que la densidad de energía oscura debe ser proporcional a una escala de corte infraroja [50, 80], digamos  $L$ , y que ésta pueda ser escrita como  $\rho_X \propto L^{-2}$ . En [50] C.Gao y colaboradores mostraron que al hacer la escala de corte proporcional al inverso de la raíz cuadrada del escalar de Ricci,  $L \propto R^{-1/2}$ , produce un modelo que provee de energía oscura. El fallo de ese trabajo es que no se percatan que su modelo también predice la existencia de materia oscura, como se puede inferir de la evolución del parámetro de la ecuación de estado  $w_X$  (ver figura 1 de [50]). En [52] hemos trabajado estos modelos usando invariantes de curvatura de segundo orden, específicamente los invariantes de Kretschmann,  $I_1 = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  y de Euler,  $I_3 = [*R^*]_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ , donde  $*R^*$  es el doble dual del tensor de Riemann. De esta manera, la densidad de energía del modelo es igual a

$$\rho_X = \frac{3\alpha}{8\pi G} \sqrt{|I_i|}, \quad (1.15)$$

con  $\alpha$  una constante en un principio arbitraria, pero que se ajusta de manera que las soluciones homogéneas e isotrópicas en el vacío sean variedades de máxima simetría. Mostramos que este modelo funciona como una alternativa a energía oscura, y además provee de una fracción de la materia faltante en el universo. Actuando entonces como un modelo unificado.

## 1.5. Cosmografía como herramienta para estudiar la expansión del universo

Cuando comparamos modelos con observaciones, usualmente asumimos que estos son correctos y ajustamos sus parámetros libres, por ejemplo, a través de un análisis de

la función de verosimilitud o de la estadística  $\chi^2$ . Esto crea degeneración estadística entre los modelos y resulta difícil decidir que modelo es realmente favorecido por las observaciones. La cosmografía es una rama de la cosmología diseñada para estudiar la expansión del universo de una manera independiente del modelo [81]. De esta manera, cualquier modelo propuesto puede ser comparado con los resultados obtenidos a través de la cosmografía. Las premisas que asume la cosmografía son el principio cosmológico y que la teoría gravitacional es métrica. La idea es expandir cantidades relacionadas con la expansión del universo en potencias del corrimiento al rojo  $z$ , o alguna función de éste como  $y = z/(1+z)$  [81] o  $y_4 = \arctan z$  [82]; el valor de los coeficientes de tal expansión son ajustados usando mediciones “cinemáticas” como observaciones de supernovas o del factor de Hubble.

Los parámetros usados generalmente, llamados *statefinders*, son definidos a través de las derivadas del factor de escala cósmica como

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, & q &\equiv -\frac{1}{aH^2} \frac{d^2a}{dt^2}, \\ j &\equiv \frac{1}{aH^3} \frac{d^3a}{dt^3}, & s &\equiv \frac{1}{aH^4} \frac{d^4a}{dt^4}, \\ l &\equiv \frac{1}{aH^5} \frac{d^5a}{dt^5}, & m &\equiv \frac{1}{aH^6} \frac{d^6a}{dt^6}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

En la literatura estos son conocidos como el factor de Hubble  $H$ , el parámetro de desaceleración  $q$ , *jerk*  $j$ , *snap*  $s$ , *lerk*  $l$  [83] y el parámetro  $m$  introducido en [82].

Por ejemplo, podemos hacer una expansión de la distancia luminosa en potencias del corrimiento al rojo  $y_4$ , cuyos coeficientes son los parámetros *statefinders* evaluados hoy en día, para el caso espacialmente plano ( $K = 0$ ) la expansión es

$$\begin{aligned} d_L(y_4) = & \frac{1}{H_0} \left[ y_4 + y_4^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{q_0}{2} \right) + y_4^3 \left( \frac{1}{6} - \frac{j_0}{6} + \frac{q_0}{6} + \frac{q_0^2}{2} \right) \right. \\ & + y_4^4 \left( \frac{5}{12} + \frac{5j_0}{24} - \frac{5q_0}{12} + \frac{5j_0q_0}{12} - \frac{5q_0^2}{8} - \frac{5q_0^3}{8} + \frac{s}{24} \right) \\ & + y_4^5 \left( -\frac{1}{12} - \frac{47j_0}{120} + \frac{j_0^2}{12} - \frac{l_0}{120} + \frac{13q_0}{60} - \frac{11j_0q_0}{12} \right. \\ & \left. + \frac{47q_0^2}{40} - \frac{7j_0q_0^2}{8} + \frac{11q_0^3}{8} + \frac{7q_0^4}{8} - \frac{11s_0}{120} - \frac{q_0s_0}{8} \right) \\ & + y_4^6 \left( \frac{1}{3} + \frac{23j_0}{45} - \frac{19j_0^2}{72} + \frac{19l_0}{720} + \frac{m_0}{720} - \frac{q_0}{3} + 2j_0q_0 \right. \\ & - \frac{7j_0^2q_0}{18} + \frac{7l_0q_0}{240} - \frac{23q_0^2}{15} + \frac{133j_0q_0^2}{48} - 3q_0^3 + \frac{7j_0q_0^3}{4} \\ & \left. - \frac{133q_0^4}{48} - \frac{21q_0^5}{16} + \frac{s_0}{5} - \frac{7j_0s_0}{144} + \frac{19q_0s_0}{48} + \frac{7q_0^2s_0}{24} \right) \Big], \end{aligned} \quad (1.17)$$

Una expansión similar puede ser hecha para el factor de Hubble  $H(z)$ . Esto lo hemos

hecho en [82] y hemos ajustados los parámetros cosmográficos con el catálogo Union2 de supernovas [84], el valor de la constante de Hubble,  $H_0 = 74 \pm 3.6$  km/s/Mpc, encontrado por el telescopio espacial Hubble [23], y con observaciones del factor de Hubble como función del corrimiento al rojo [85]. Hemos obtenido las constricciones que se muestran en los contornos de confianza mostrados en la figura 1.3.

Los parámetros statefinders están relacionados con los parámetros del modelo  $\Lambda$ CDM, en la ausencia de curvatura espacial, por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 q_0 &= -1 + \frac{3}{2}\Omega_m, \\
 j_0 &= 1, \\
 s_0 &= 1 - \frac{9}{2}\Omega_m, \\
 l_0 &= 1 + 3\Omega_m - \frac{27}{2}\Omega_m^2, \\
 m_0 &= 1 - \frac{27}{2}\Omega_m^2 - 81\Omega_m^3 - \frac{81}{2}\Omega_m^3,
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

por lo que nuestros resultados son consistentes con el modelo  $\Lambda$ CDM a un nivel de confianza del 68 %.

Aplicaciones diversas han sido estudiadas recientemente. Por ejemplo, en [86] hemos encontrado constricciones a las teorías  $f(R)$  a través de la cosmografía. El valor de los parámetros statefinders está relacionado con las derivadas  $df/dz$  por

$$\begin{aligned}
 \frac{f_0}{2H_0^2} &= -2 + q_0, \\
 \frac{f_{z0}}{6H_0^2} &= -2 - q_0 + j_0, \\
 \frac{f_{2z0}}{6H_0^2} &= -2 - 4q_0 - (2 + q_0)j_0 - s_0, \\
 \frac{f_{3z0}}{2H_0^2} &= -4 - 3j_0^2 + 3l_0 + j_0[2 + q_0(13 + 5q_0)] \\
 &\quad + 15s_0 + q_0[2 + 2q_0(5 + 2q_0) + 9s_0], \\
 \frac{f_{4z0}}{2H_0^2} &= 8 + 30j_0^2(1 + q_0) - 6l_0(5 + 3q_0) - 3m_0 - 66s_0 \\
 &\quad - j_0[22 + q_0(46 + q_0(38 + 29q_0)) - 15s_0] \\
 &\quad - q_0[18 + 84s_0 + q_0(4 + 2q_0(-9 + 2q_0) \\
 &\quad + 33s_0)].
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

donde  $f_{iz0}$  es la  $i$ -ésima derivada de  $f(z)$  evaluada hoy en día. Los contornos de confianza son mostrados en la figura 1.4, y muestran que la cosmografía de estas teorías son consistentes con la relatividad general.



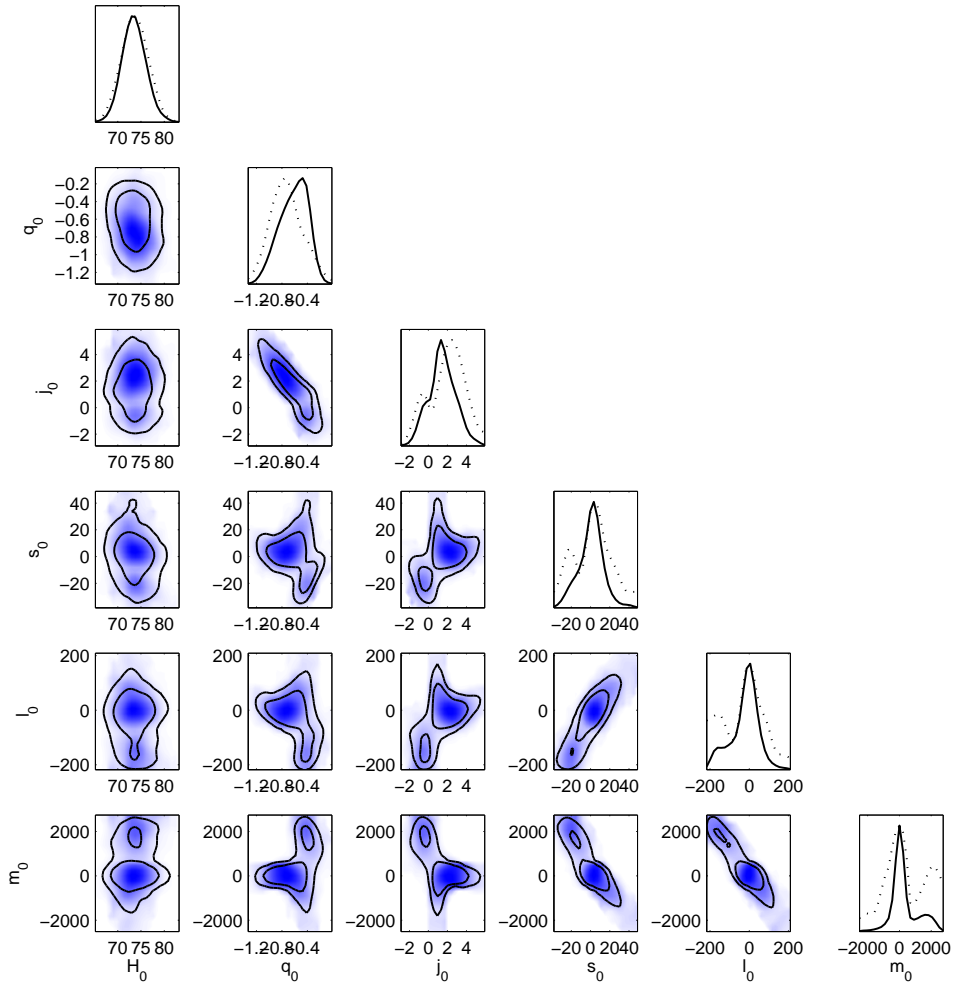


FIGURA 1.3: Contornos de confianza de los parámetros cosmológicos, usando la función  $y_4 = \arctan z$ . Las observaciones usadas son el catálogo UNION 2 de supernovas tipo Ia y observaciones de la constante de Hubble como función del corrimiento al rojo. Las curvas sólidas muestran las densidades de probabilidad posteriores marginalizadas y las curvas punteadas y los sombreados muestran la verisimilitud de los muestreos. Estos resultados son compatibles con el modelo  $\Lambda$ CDM, como se puede inferir de las ecuaciones (1.18).

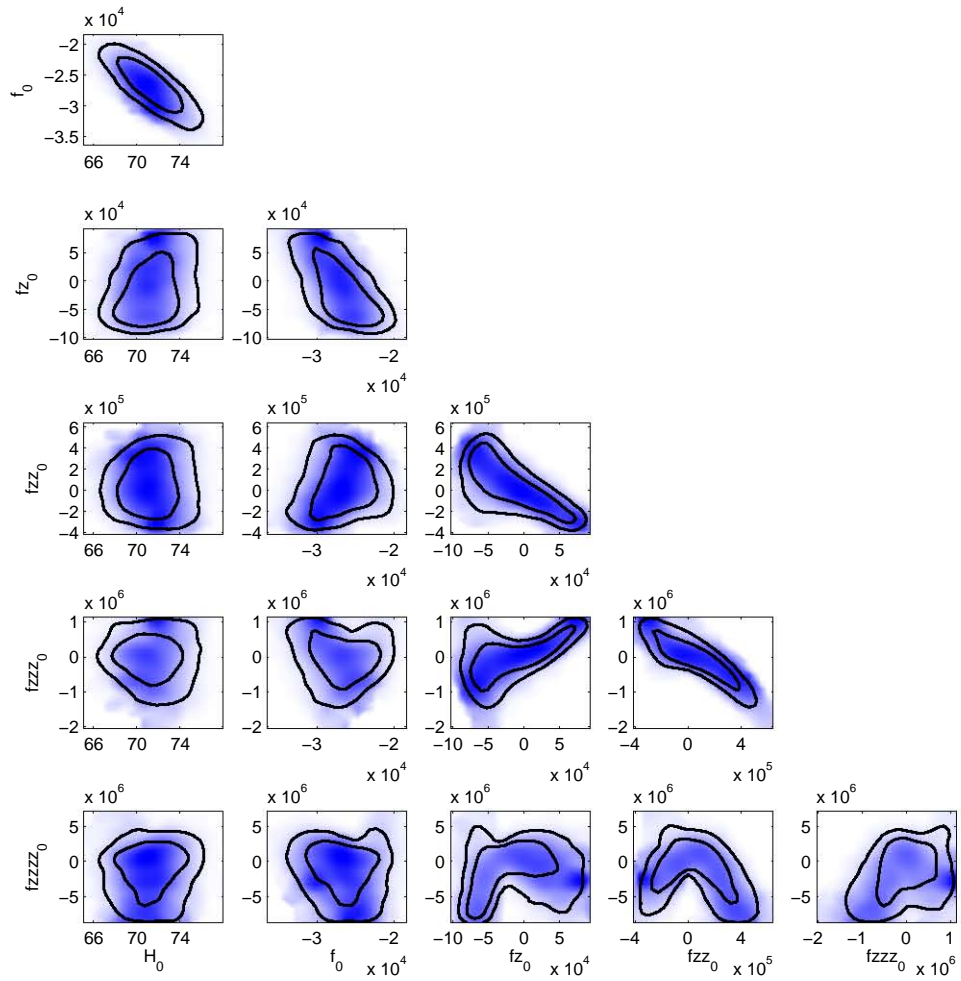


FIGURA 1.4: Contornos de confianza de los parámetros cosmológicos para las teorías  $f(R)$ . Las observaciones usadas son el catálogo UNION 2 de supernovas tipo Ia y observaciones de la constante de Hubble como función del corrimiento al rojo. Las curvas sólidas muestran las densidades de probabilidad posteriores marginalizadas y las curvas punteadas y los sombreados muestran la verisimilitud de los muestreos.



## Capítulo 2

# Cosmología estándar

### 2.1. Cosmología homogénea e isotrópica

A grandes escalas, de algunos cientos de megaparsecs, el universo parece muy homogéneo, observamos una densidad promedio uniforme en la distribución, tipo y composición de galaxias y cúmulos de galaxias [87, 88]. Más aún, es altamente isotrópico a nuestro alrededor; sin importar en qué dirección apuntemos, observamos esencialmente lo mismo, una distribución aleatoria aparentemente uniforme de componentes extragalácticos. Existe una radiación cósmica de fondo que nos llega de todas direcciones con un mismo espectro de cuerpo negro a una temperatura  $T_{\gamma 0} \simeq 2.725 \text{ K}$  con pequeñas variaciones del orden de  $10^{-5} \text{ K}$  [89], calculadas una vez restada la contribución dipolar de estas variaciones, la cual es indistinguible en la práctica de entre un dipolo en la radiación cósmica de fondo y de nuestra velocidad peculiar respecto a ella.<sup>1</sup>

Concluimos que el universo es altamente homogéneo y altamente isotrópico a nuestro alrededor. Bajo la creencia de que nuestra posición en el universo no es particular, postulamos el *principio cosmológico*: el universo es homogéneo e isotrópico a escalas muy grandes. Como consecuencia, la métrica del espacio-tiempo está dada por la métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW),

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.1)$$

donde la función adimensional  $a(t)$  es llamada *factor de escala* y es función únicamente del *tiempo cósmico*  $t$ . Esencialmente, sólo hay tres de estos espacios:  $K = 0$ , donde todas

---

<sup>1</sup>De ser este dipolo consecuencia únicamente de nuestra velocidad peculiar, mostraría que nuestra galaxia se mueve a una velocidad de 552 km/s con respecto al marco en reposo de la radiación cósmica de fondo [90]; este valor es típico de las velocidades peculiares medidas para otras galaxias.

las hipersuperficies de tiempo cósmico constante son euclidianas;  $K = 1$ , hiperesferas; y su contraparte negativa,  $K = -1$ , correspondiente a hiperboloides. Es fácil ver que las curvas integrales de los vectores base  $\partial_t$  son geodésicas de la métrica FRW. Es decir, los observadores con coordenadas espaciales constantes ( $\vec{X} = \text{constante}$ ) son los que se encuentran en caída libre; para ellos su tiempo propio coincide con el tiempo cósmico, y son éstos los que ven el mismo universo homogéneo e isotrópico.

La cosmología estándar asume la validez de las ecuaciones de Einstein<sup>2</sup>

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

aunque más adelante tendremos la oportunidad de trabajar con una gravitación distinta. Por consistencia, el tensor de energía momento debe preservar las simetrías de la métrica, es decir, debe tener la forma de un fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu). \quad (2.3)$$

Supongamos que tenemos una colección de fluidos interactuantes o no; de la constricción hamiltoniana de las ecuaciones de Einstein se obtiene la *ecuación de Friedmann*

$$H^2 \equiv \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_T - \frac{K}{a^2}, \quad (2.4)$$

donde la densidad de energía  $\rho_T$  es la suma de las densidades de las distintas componentes cósmicas consideradas. Prima significa derivada respecto al tiempo cósmico. Dadas las simetrías del problema, sólo queda una ecuación de Einstein independiente, extraíble de sus componentes espaciales. Equivalentemente, ésta es consecuencia de la conservación local del tensor de energía momento,  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ ; como resultado se obtiene la ecuación de continuidad

$$\rho'_T + 3H(\rho_T + P_T) = 0. \quad (2.5)$$

Por diversos motivos, especialmente para poder acercarse al tiempo  $t = 0$  con buena precisión numérica, es común definir el tiempo conforme  $\tau$  a través de  $d\tau = dt/a$ ; de esta manera la métrica FRW para el caso espacialmente plano puede ser escrita como

$$ds^2 = a(\tau)^2(-d\tau^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j). \quad (2.6)$$

Como hemos visto en la sección (1.1.3), bajo el modelo  $\Lambda$ CDM, las observaciones cosmológicas apuntan a un universo espacialmente plano; por este motivo, y por simplicidad, a lo largo de este trabajo consideraremos  $K = 0$ . En la tabla 2.1 presentamos

---

<sup>2</sup>Escogemos unidades de física de partículas, también llamadas unidades naturales, en las que  $\hbar = c = k_B = 1$ ; véase apéndice A.

algunos fluidos barotrópicos con ecuación de estado  $P = w\rho$ , donde  $w$  es constante, y su evolución tanto en el tiempo conforme como en el tiempo cósmico.

TABLA 2.1: Evolución del factor de escala para distintos fluidos como función del tiempo cósmico y del tiempo conforme. (dec-ace) se refiere a la frontera en la evolución de un universo acelerado o desacelerado.

$a$	$\propto$	$t^{2/3(1+w)}$	$\propto$	$\tau^{2/(1+3w)}$	$w = \text{constante}$
$a$	$\propto$	$t$	$\propto$	$\exp(\mathcal{H}\tau)$	$w = -1/3$ (dec-ace)
$a$	$\propto$	$t^{2/3}$	$\propto$	$\tau^2$	$w = 0$ (polvo)
$a$	$\propto$	$t^{1/2}$	$\propto$	$\tau$	$w = 1/3$ (radiación)
$a$	$\propto$	$t^{1/3}$	$\propto$	$\tau^{1/2}$	$w = 1$ (Stiff)
$a$	$\propto$	$\exp(Ht)$	$\propto$	$1/\tau$	$w = -1$ (constante cosmológica)

## 2.2. Teoría de perturbaciones lineales

A escalas menores a aproximadamente 150 Mpc hoy en día, la descripción homogénea e isotrópica del universo expuesta en la sección anterior no es válida. Si bien la descripción exacta de condiciones iniciales y de su subyacente evolución es imposible técnicamente, esperamos que en ciertos regímenes las desviaciones respecto de la cosmología de fondo sean pequeñas. Por este motivo expandimos la métrica del espacio-tiempo alrededor de la métrica FRW  $^{(0)}g$  en potencias de una desviación  $\Delta t \ll 1$ , en componentes esto es

$$g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \Delta t {}^{(1)}g_{\mu\nu} + \Delta t^2 {}^{(2)}g_{\mu\nu} + \dots \quad (2.7)$$

Estamos interesados en teoría de perturbaciones lineales, entonces truncamos la expansión hasta orden lineal, obteniendo

$$g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + a^2 h_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde hemos absorbido  $\Delta t$  en la definición de  $h_{\mu\nu}$ , por lo que  $h_{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(\Delta t)$ .

Es conveniente –y siempre es posible hacerlo– escribir la métrica completa de la siguiente forma:

$$ds^2 = a^2 [-(1+2\psi)d\tau^2 + 2(B_{,i} + S_i)dx^i d\tau + ((1-2\phi)\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}^{(T)})dx^i dx^j], \quad (2.9)$$

imponiendo  $S_{,i}^i = F_{,i}^i = h_{i,i}^{(T)} = h_{j,i}^{(T)} = 0$ . De esta manera la métrica  $g_{\mu\nu}$  tiene 10 grados de libertad. Esta forma de escribir la métrica hace evidente su descomposición en perturbaciones escalares  $(\phi, \psi, E, B)$ , vectoriales  $(S^i, F^i)$  y tensoriales  $(h_{ij}^{(T)})$ , en el

sentido de que son invariantes ante el grupo de difeomorfismos que deja invariante a la métrica de fondo FRW. Es decir, es una descomposición irreducible del grupo de rotaciones  $SO(3)$  y de traslaciones temporales y espaciales. La importancia de esta descomposición se debe a la observación de E. Lifshitz de que en el régimen lineal en teoría de perturbaciones las distintas componentes no se mezclan [91]. La invariancia ante difeomorfismos de la teoría métrica implica que tenemos libertad en escoger coordenadas: dada una métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  que describa un espacio-tiempo, la métrica

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad (2.10)$$

dada por una transformación de coordenadas, describe al mismo espacio-tiempo. Ahora, supongamos una transformación de coordenadas  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$  con  $\epsilon \sim \mathcal{O}(\Delta t)$ . Llamamos *transformación de norma* a la transformación de coordenadas escrita en las coordenadas originales, es decir

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x) + a^2 h_{\mu\nu} - {}^{(0)}g_{\mu\alpha} \epsilon^\alpha_{,\nu} - {}^{(0)}g_{\alpha\nu} \epsilon^\alpha_{,\mu} - {}^{(0)}g_{\mu\nu,\sigma}(x) \epsilon^\sigma. \quad (2.11)$$

De esta manera la métrica de fondo es invariante ante la transformación de norma y la métrica perturbada absorbe todos los cambios, es decir,

$$\begin{aligned} {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x) &\rightarrow {}^{(0)}\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x), \\ a^2 h_{\mu\nu} &\rightarrow a^2 \tilde{h}_{\mu\nu} = a^2 h_{\mu\nu} - {}^{(0)}g_{\mu\nu,\sigma} \epsilon^\sigma - {}^{(0)}g_{\mu\alpha} \epsilon^\alpha_{,\nu} - {}^{(0)}g_{\alpha\nu} \epsilon^\alpha_{,\mu}. \end{aligned}$$

Es conveniente usar el lenguaje de geometría diferencial, de manera que sea más sencillo calcular la transformación de norma de un tensor arbitrario. Dado que la teoría es invariante ante difeomorfismos, las perturbaciones no son únicas. Para un difeomorfismo arbitrario  $\phi$  y su *pushforward* asociado  $\phi_*$ , las dos métricas  $g$  y  $\phi_*(g)$  describen la misma geometría. Dado que hemos fijado la métrica de fondo  ${}^{(0)}g$ , únicamente permitimos difeomorfismos que la mantengan invariante, es decir, que se desvíen sólo en primer orden en la identidad. Tal difeomorfismo puede ser descrito por el flujo infinitesimal de un campo vectorial  $\epsilon$ . En términos de este campo vectorial, el *pushforward* es de la forma  $\phi_* = I + tL_\epsilon + \mathcal{O}(t^2)$ , donde  $I$  es la identidad,  $t$  parametriza las curvas integrales de  $\epsilon$  y  $L_\epsilon$  es la derivada de Lie en la dirección  $\epsilon$ . De esta manera la transformación de norma de un tensor arbitrario  $S = {}^{(0)}S + t{}^{(1)}S$  es

$${}^{(0)}S \rightarrow {}^{(0)}S, \quad (2.12)$$

$${}^{(1)}S \rightarrow {}^{(1)}S + L_\epsilon {}^{(0)}S, \quad (2.13)$$

Notemos que siempre es posible absorber el parámetro  $t$  en las perturbaciones, como

hemos hecho en (2.8). Supongamos el cambio de coordenadas  $x \rightarrow x + \epsilon$  donde  $\epsilon = \epsilon^0 \partial_0 + (\epsilon_\perp^i + \chi^i) \partial_i$  con  $\chi$  una función real y  $\epsilon_\perp^i$  un vector transverso, es decir que  $\epsilon_\perp^i \cdot \epsilon_\perp^i = 0$ . Aplicando la ecuación de transformación de norma (2.13) a la métrica (2.9) es fácil ver que los respectivos cambios en las perturbaciones escalares son

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \tilde{\psi} = \psi - \mathcal{H}\epsilon^0 - \dot{\epsilon}^0, \\ \phi &\rightarrow \tilde{\phi} = \phi + \mathcal{H}\epsilon^0, \\ B &\rightarrow \tilde{B} = B + \epsilon^0 - \dot{\chi}, \\ E &\rightarrow \tilde{E} = E - \chi. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Las perturbaciones vectoriales decaen rápidamente con la expansión del universo (ver, por ejemplo, capítulo 7 de [92]), por lo que en los modelos que tratamos no son importantes y no las consideraremos en este trabajo. Por otro lado, las perturbaciones tensoriales son invariantes de norma; éstas describen la propagación de ondas gravitacionales que no trataremos en este trabajo.

A partir de las ecuaciones (2.14) podemos escribir perturbaciones escalares invariantes de norma  $\Psi$  y  $\Phi$  como

$$\Psi = \psi + \frac{1}{a} \frac{d}{d\tau} \left[ a \left( B - \frac{dE}{d\tau} \right) \right], \tag{2.15}$$

$$\Phi = \phi - \mathcal{H} \left( B - \frac{dE}{d\tau} \right). \tag{2.16}$$

Estas perturbaciones coinciden con los potenciales de Bardeen  $\Phi_A = \Psi$  y  $\Phi_H = -\Phi$  [93]. Usualmente uno trabaja en una norma fija para hacer cálculos y luego expresa sus resultados en términos puramente físicos. Una de las normas más usadas en cosmología es la *norma síncrona*, definida por  $\psi_S = B_S = 0$  (el subíndice  $S$  se usa sólo para recordar que es el valor de la perturbación en la norma síncrona). Entonces la métrica puede ser escrita como  $ds^2 = a^2(-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j)$ , donde las perturbaciones escalares se encuentran en la parte espacial  $h_{ij}$  que contiene a dos potenciales  $h$  y  $\eta$ , que en espacio de Fourier<sup>3</sup> se definen a través de

$$h_{ij}(\vec{x}, \tau) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{k^2} \left[ k_i k_j h(\vec{k}, \tau) + \left( k_i k_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} k^2 \right) 6\eta(\vec{k}, \tau) \right]; \tag{2.17}$$

véase [94]. Las transformaciones entre los potenciales descritos son  $E_S(\vec{k}, \tau) = -(h + 6\eta)/2k^2$  y  $\phi_S(\vec{k}, \tau) = \eta$ . Existe una sutileza que debe ser tomada en cuenta al usar la norma síncrona: ésta no está fijada totalmente. La transformación  $\epsilon^0 \rightarrow \epsilon^0 + C_1(x^i)/a$ ,  $\chi \rightarrow \chi + C_1(x^i) \int a^{-1} d\tau + C_2(x^i)$  mantiene a las perturbaciones en la misma norma. Los

<sup>3</sup>La convención usada para transformaciones de Fourier se encuentra en el Apéndice A.



códigos más usados para evolucionar las ecuaciones de Boltzmann, como CMBFAST [95], CAMB [96] y CMBEasy [97], usan la norma síncrona y explotan la libertad de norma para fijar la materia oscura a puntos coordenados constantes; es decir, hacen su velocidad peculiar igual a cero (ver apéndice C.2).

Otra norma de nuestro interés en este trabajo es la norma newtoniana conforme (también llamada norma longitudinal). Es definida por  $E_l = B_l = 0$ . Su importancia radica en que a escalas por debajo del horizonte ( $k \gg \mathcal{H}$ ) el potencial  $\phi$  coincide con el potencial newtoniano y por ello su interpretación física es más directa. Notamos de las ecuaciones (2.15) y (2.16) que los potenciales en la norma longitudinal coinciden con los potenciales invariantes de norma, es decir,  $\Phi = \phi_l$  y  $\Psi = \psi_l$ . Por esto escribimos la métrica con perturbaciones escalares en la norma newtoniana conforme como

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2\Psi)d\tau^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (2.18)$$

Nosotros trabajaremos la parte teórica en esta norma. Sin embargo, usaremos también la norma síncrona al hacer el trabajo numérico en el código CAMB. La transformación entre los potenciales para ambas normas está dada por

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{k}, \tau) &= \frac{1}{2k^2} [\ddot{h} + 6\ddot{\eta} + \mathcal{H}(\dot{h} + 6\dot{\eta})], \\ \Phi(\vec{k}, \tau) &= \eta - \mathcal{H} \frac{\dot{h} + 6\dot{\eta}}{2k^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

### 2.2.1. Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein,  $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ , son separadas en parte de fondo y parte perturbada. Un cálculo directo para las perturbaciones invariantes de norma lleva al sistema de ecuaciones en el espacio de Fourier

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\dot{\Phi} + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi Ga^2 \overline{\delta T^0_0}, \quad (2.20)$$

$$k^2(\dot{\Phi} + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi Ga^2(\rho + p)\theta, \quad (2.21)$$

$$\ddot{\Phi} + \mathcal{H}(\dot{\Psi} + 2\dot{\Phi}) + (2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{k^2}{3}(\Psi - \Phi) = \frac{4\pi G}{3} a^2 \overline{\delta T^i_i}, \quad (2.22)$$

$$k^2(\Phi - \Psi) = 12\pi Ga^2(\rho + p)\sigma, \quad (2.23)$$

donde la etiqueta  $\overline{\delta T}$  significa que las variables son invariantes de norma, las cuales coinciden con las variables en la norma longitudinal. Además, hemos definido la *velocidad*  $\theta$  y el esfuerzo escalar  $\sigma$  del fluido particular como

$$(\rho + p)\theta = ik^j \delta T^0_j \quad (2.24)$$

y

$$(\rho + p)\sigma = -\frac{1}{k^2} \left( k_i k^j - \frac{1}{3} k^2 \delta_i^j \right) \left( \delta T_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i \overline{\delta T^k_k} \right). \quad (2.25)$$

Las ecuaciones equivalentes para la norma síncrona pueden ser encontradas en [94]. El cambio de unas a otras no está dado simplemente por la sustitución de las ecuaciones (2.19) en las ecuaciones de Einstein obtenidas con la norma longitudinal, dado que éstas son componentes de tensores. Así que se debe tener cuidado al hacerlo; véase, por ejemplo, [98].

### 2.2.2. Ecuaciones de hidrodinámica

Definimos las perturbaciones a las variables de los fluidos a través de las ecuaciones

$$T^0_0 = -\rho(1 + \delta), \quad (2.26)$$

$$T^i_0 = -(\rho + P)v^i, \quad (2.27)$$

$$T^i_j = P((1 + \pi_L)\delta^i_j + \Pi^i_j), \quad (2.28)$$

donde  $\Pi^i_j$  es el tensor anisotrópico de esfuerzos, el cual no tiene traza. La densidad de energía  $\rho$  y la presión  $P$  son cantidades que sólo dependen del tiempo conforme  $\tau$ . El vector  $v^i$  es llamado velocidad peculiar del elemento de fluido y está relacionado con su cuadrivelocidad  $u^\mu$  por la ecuación  $v^i = u^i/u^0$ . En el espacio de Fourier recuperamos las definiciones (2.24) y (2.25) mediante las identificaciones  $\theta = -ik_i v^i$  y  $\sigma = 2k_i k_j \Pi^{ij} w/3(1 + w)$ .

Supongamos ahora que tenemos un fluido aislado de interacciones con otros campos no gravitacionales, las ecuaciones de movimiento están dadas por la conservación del tensor de energía momento  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . A orden cero en teoría de perturbaciones se obtiene la ecuación de continuidad, encontrada en la sección anterior,  $\dot{\rho} + 3\mathcal{H}(\rho + P) = 0$ . A primer orden se obtienen el par de ecuaciones

$$\dot{\delta} = -(1 + w)(\theta - 3\dot{\Phi}) - 3\mathcal{H} \left( \frac{\delta P}{\delta \rho} - w \right) \delta, \quad (2.29)$$

y

$$\dot{\theta} = -\mathcal{H}(1 - 3w)\theta - \frac{\dot{w}}{1 + w}\theta + \frac{\delta P/\delta \rho}{1 + w} k^2 \delta + k^2 \Psi - k^2 \sigma, \quad (2.30)$$

donde  $\delta P = P\pi_L$ ,  $\delta \rho = \rho\delta$ , y las derivadas son tomadas respecto al tiempo conforme. Estas ecuaciones deben ser suplementadas con las ecuaciones de gravitación de Einstein; no todas son necesarias, dado que la condición  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  es equivalente a las identidades de Bianchi, y por tanto hay redundancias. Así que sólo deben ser escogidas dos ecuaciones del sistema (2.20-2.23). Sin embargo, esto no basta para poder resolver

el sistema completo de ecuaciones. Además, necesitamos conocer la ecuación de estado del fluido particular –lo que es indispensable para resolver la cosmología de fondo en primera instancia– y, más aún, es necesario conocer características particulares de las perturbaciones, explícitamente cómo se relacionan  $\delta P$  y  $\delta\rho$ . Lo más común es escoger perturbaciones adiabáticas para las que  $\delta P = c_s^2\delta\rho$ , donde hemos definido *la velocidad del sonido adiabática*  $c_s$  con

$$c_s^2 \equiv \frac{dP}{d\rho}, \quad (2.31)$$

que no necesariamente coincide con la velocidad a la que viajan las perturbaciones dentro del medio, aunque sí en el caso de fluidos barotrópicos. Perturbaciones más generales son caracterizadas por la variable invariante de norma [93]

$$\Gamma = \pi_L - \frac{c_s^2}{w}\delta, \quad (2.32)$$

que es proporcional a la divergencia del flujo de entropía de las perturbaciones [99]. Las perturbaciones adiabáticas son caracterizadas por  $\Gamma = 0$ . El valor de  $\Gamma$  debe ser considerado como un parámetro libre de la teoría que debe ser ajustado con observaciones. A lo largo de este trabajo usamos  $\Gamma = 0$  para fluidos barotrópicos.

Si tenemos una colección de fluidos interactuando en la forma  $\nabla_\mu T_i^{\mu\nu} = Q_i^\nu$  las ecuaciones (2.29) y (2.30) ya no serán válidas. Este caso es de nuestro especial interés y lo abordaremos en los capítulos 3 y 5.

### 2.3. Ecuación de Boltzmann

Según el modelo estándar de cosmología, el universo antes de la época de recombinación estaba compuesto principalmente por fotones, neutrinos, materia oscura, núcleos de hidrógeno y electrones. Los fotones colisionaban frecuentemente con los electrones libres, lo cual no permitía que éstos fueran capturados por los núcleos atómicos. Eventualmente con la expansión del universo, el camino libre de los fotones se fue haciendo más grande y con ello las colisiones menos comunes, hasta la época de última dispersión. Si estamos interesados en anisotropías en la distribución de fotones e inhomogeneidades en la distribución de materia, debemos seguir la evolución de la distribución de estas partículas  $f(x, P)$  a lo largo de la historia del universo. Para esto es necesario usar la ecuación de Boltzmann. Definimos el momento peculiar  $p$  de una partícula en la distribución a través de su cuadrimomento  $P^\mu$  como  $p^2 = g_{ij}P^iP^j$ , ambos momentos están relacionados por  $P^\mu = a^{-1}(E(1 - \Psi), p\hat{p}^i(1 + \Phi))$ , donde  $\hat{p}$  indica la dirección del momento peculiar  $p$ . La

ecuación de Boltzmann la escribimos en términos de estas variables como

$$\frac{df(x, p)}{d\tau} \equiv \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{d\tau} + \frac{d\hat{p}^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} = C[f], \quad (2.33)$$

donde  $C[f]$  es un término de colisiones que depende de la interacción en particular. El último término de la segunda igualdad es cero a primer orden, debido a que las distribuciones iniciales a orden cero no dependen de la dirección de la velocidad de las partículas y por tanto el término  $\partial f / \partial \hat{p}^i$  es de primer orden; también lo es el término  $d\hat{p}^i / d\tau$  dado que la dirección de las partículas únicamente cambia ante una colisión o la presencia de potenciales gravitacionales.

Supongamos la siguiente colisión de dos partículas  $A(\vec{p}) + B(\vec{q}) \longleftrightarrow C(\vec{p}') + D(\vec{q}')$  —en situaciones en que los conglomerados de partículas están suficientemente diluidos, las colisiones de tres o más partículas son muy raras—. El término de colisión está dado por (véanse, por ejemplo, [100, 101])

$$C[f(\vec{p})] = \frac{1}{p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_q} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_{q'}} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}' - \vec{q}') \\ \times \delta(E_p + E_q - E_{p'} - E_{q'}) (f(\vec{p}')f(\vec{q}') - f(\vec{p})f(\vec{q})). \quad (2.34)$$

### 2.3.1. Ecuaciones de Boltzmann para fotones, bariones y materia oscura fría

Justo antes de la época de recombinación, a temperaturas de algunos electronvoltios o menores, el único proceso de dispersión relevante era la dispersión elástica Thomson, la cual sólo cambia la trayectoria del fotón incidente, mientras su energía no es modificada. La tasa de dispersión Thomson está dada por

$$\Gamma_T = \sigma_T n_e x_e, \quad (2.35)$$

donde  $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$  es la sección eficaz de la dispersión Thomson,  $n_e$  es la densidad de número de electrones y  $x_e$  es su fracción de ionización.

La distribución de fotones la escribimos a primer orden como una distribución de Bose-Einstein perturbada

$$f(\vec{x}, p, \hat{p}, \tau) = \left[ \exp \left( \frac{p}{T_0(t) [1 + \Theta(\vec{x}, \hat{p}, \tau)]} \right) - 1 \right]^{-1} = f^{(0)} - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta, \quad (2.36)$$

donde  $f^{(0)}$  es la distribución de Bose-Einstein y hemos añadido una perturbación  $\Theta$  a la temperatura

$$\Theta(\vec{x}, \hat{p}, \tau) = \frac{\Delta T}{T}(\vec{x}, \hat{p}, \tau). \quad (2.37)$$

Ahora, dado el proceso de dispersión Thomson

$$\gamma(\vec{p}) + e^-(\vec{q}) \longleftrightarrow \gamma(\vec{p}') + e^-(\vec{q}'), \quad (2.38)$$

el término de amplitud de la interacción  $\mathcal{M}$  puede ser calculado y su valor es

$$|\mathcal{M}|^2 = 8\pi\sigma_T m_e^2 (1 + (\hat{p} \cdot \hat{p}')^2). \quad (2.39)$$

Finalmente, usando las ecuaciones (2.33) y (2.34) obtenemos la ecuación de evolución de  $\Theta(\vec{k}, \tau, \mu)$  en el espacio de Fourier con  $\mu \equiv \hat{p} \cdot \hat{k}$ , el coseno del ángulo entre el fotón incidente y el número de onda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} + \hat{p}_i \frac{\partial f}{\partial x^i} - p \frac{\partial f}{\partial p} \left[ \mathcal{H} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] \\ = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} a n_e x_e \sigma_T \left( \Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b - \frac{1}{2} P_2(\mu) \Pi \right), \end{aligned} \quad (2.40)$$

con

$$\Pi \equiv \Theta_2 + \frac{1}{4}(G_{\gamma 0} + G_{\gamma 2}). \quad (2.41)$$

Los subíndices 0 y 2 indican el monopolo y el cuadrupolo de la variable en cuestión y  $P_2(\mu)$  es el segundo polinomio de Legendre.  $G_\gamma(\vec{k}, \tau, \mu)$  es la diferencia entre los dos modos de polarización lineal de la radiación incidente. Aunque en este trabajo no estemos particularmente interesados en la polarización de la radiación cósmica de fondo, ésta está acoplada a la intensidad  $\Theta$  a través de los términos  $G_\gamma$ . Éstos provienen (en realidad todo el factor  $\Pi$ ) del término angular en la amplitud de la interacción (2.39). A orden cero la ecuación de Boltzmann (2.40) se traduce en

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \tau} - \mathcal{H} p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} = 0 \rightarrow T \propto \frac{1}{a}, \quad (2.42)$$

es decir, expresa simplemente el hecho de que  $T$  crece linealmente con el corrimiento al rojo.<sup>4</sup> A primer orden la ecuación resultante es

$$\dot{\Theta} + ik\mu\Theta = \dot{\Phi} - ik\mu\Psi + a n_e x_e \sigma_T \left( \Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \mu \frac{\theta_b}{ik} - \frac{1}{2} P_2(\mu) \Pi \right), \quad (2.43)$$

<sup>4</sup>Una vez fuera del equilibrio, después de recombinación,  $T$  no es propiamente una temperatura, sino sólo un parámetro de la distribución de los fotones. Después del congelamiento térmico, o *freeze-out*, partículas relativistas mantienen la misma distribución térmica, por lo que la ecuación (2.36) a orden cero sigue siendo válida.

donde hemos vuelto al espacio de Fourier. Ahora es conveniente expandir  $\Theta(\vec{k}, \tau, \mu)$  en un desarrollo multipolar para quitar la dependencia en el factor  $\mu$

$$\Theta(\vec{k}, \tau, \mu) = \sum (-i)^l (2l+1) \Theta_l(\vec{k}, \tau) P_l(\mu), \quad (2.44)$$

$$\Theta_l(\vec{k}, \tau) = \frac{i^l}{2} \int_{-1}^1 d\mu \Theta(\vec{k}, \tau, \mu) P_l(\mu). \quad (2.45)$$

Insertando esta expansión multipolar en la ecuación de Boltzmann para fotones y usando las relaciones de recurrencia para los polinomios de Legendre [102] obtenemos la *Jerarquía de Boltzmann* [103, 104]

$$\dot{\delta}_\gamma = -\frac{4}{3}\theta_\gamma + 4\dot{\Phi}, \quad (2.46)$$

$$\dot{\theta}_\gamma = k^2 \left( \frac{1}{4}\delta_\gamma - \sigma_\gamma \right) + k^2 \Psi + an_e x_e \sigma_T (\theta_b - \theta_\gamma), \quad (2.47)$$

$$2\dot{\sigma}_\gamma = \frac{8}{15}\theta_\gamma - \frac{12}{5}k\Theta_3 - \frac{9}{5}an_e x_e \sigma_T \sigma_\gamma + \frac{1}{10}an_e x_e \sigma_T (G_{\gamma 0} + G_{\gamma 2}) \quad (2.48)$$

$$\dot{\Theta}_l = \frac{k}{2l+1} [l\Theta_{l-1} - (l+1)\Theta_{l+1}] - an_e x_e \sigma_T \Theta_l \quad (l > 2). \quad (2.49)$$

donde

$$\delta_\gamma = 4\Theta_0, \quad (2.50)$$

$$\theta_\gamma = 3k\Theta_1, \quad (2.51)$$

$$\sigma_\gamma = 2\Theta_2. \quad (2.52)$$

Para neutrinos sin masa se obtiene un sistema igual de ecuaciones, con la diferencia de que los términos de interacción con bariones no aparecen debido a las escalas consideradas,  $T \ll \text{MeV}$ . No consideraremos neutrinos masivos. De igual forma podemos expandir la polarización  $G_\gamma(\vec{k}, \tau, \mu)$  en multipolos  $G_{\gamma l}(\vec{k}, \tau)$  y obtener las ecuaciones, véase [94],

$$\begin{aligned} \dot{G}_{\gamma l} &= \frac{k}{2l+1} [lG_{\gamma(l-1)} - (l+1)G_{\gamma(l+1)}] + an_e x_e \sigma_T \\ &\times \left[ -G_{\gamma l} + 2\Pi \left( \delta_{l0} + \frac{1}{5}\delta_{l2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Finalmente, escribimos las ecuaciones de perturbación para bariones cuando están acoplados con la radiación electromagnética

$$\dot{\delta}_b = -\theta_b + 3\dot{\Phi} \quad (2.54)$$

y

$$\dot{\theta}_b = -\mathcal{H}\theta_b + c_s^2 k^2 \delta_b + \frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b} an_e x_e \sigma_T (\theta_\gamma - \theta_b) + k^2 \Psi. \quad (2.55)$$

Estas dos últimas ecuaciones pueden ser obtenidas de la ecuación de Boltzmann para bariones, pero también del formalismo desarrollado en la sección 3.5; ver ecuaciones (3.61) y (3.62).

A tiempos tempranos y longitudes de onda pequeñas, la velocidad del sonido de los bariones puede no ser despreciable y tener un efecto. Ésta es aproximada en [94] como  $c_s^2 \simeq k_B T_b (3 - d \log T_b / d \log a) / 3\mu$ , donde  $\mu \simeq 1.27$  es el peso molecular promedio y la temperatura de los bariones resuelve la ecuación diferencial  $\dot{T}_b = -2\mathcal{H}T_b + 8\mu\rho_\gamma an_e x_e \sigma_T (T_\gamma - T_b) / 3m_e \rho_b$ .

Para materia oscura se pueden obtener las ecuaciones de evolución también de la ecuación de Boltzmann, pero es considerablemente más sencillo sustituir  $w = 0$  y considerar perturbaciones adiabáticas en las ecuaciones (2.29) y (2.30)

$$\dot{\delta}_c = -\theta_c + 3\dot{\Phi} \quad (2.56)$$

y

$$\dot{\theta}_c = -\mathcal{H}\theta_c + k^2 \Psi, \quad (2.57)$$

donde el subíndice  $c$  refiere a variables de materia oscura fría. En la norma síncrona podemos fijar la norma completamente de manera que la ecuación para la velocidad de la materia oscura,  $\theta_c$ , sea idénticamente cero y la ecuación para el contraste de densidad es  $\dot{\delta}_c = -\frac{1}{2}\dot{h}$  [94]; véase apéndice C.2.

## 2.4. Espectro de potencias en la radiación cósmica de fondo

Dado que la descripción de las oscilaciones acústicas en la sección anterior tuvo lugar en el espacio de Fourier, la proyección de las inhomogeneidades en la época de recombinación en anisotropías hoy en día es particularmente compleja. Un observador mide las oscilaciones acústicas como temperaturas efectivas desde el centro de una esfera a una distancia comóvil  $D_* = \tau_0 - \tau_*$ , donde el subíndice  $*$  indica que la cantidad es evaluada en la época de última dispersión. Por ello es conveniente expandir éstas en armónicos esféricos

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}). \quad (2.58)$$

Hemos quitado la dependencia en la posición y en el tiempo pues sólo podemos tomar mediciones en  $\vec{x} = \vec{x}_0$  y  $\tau = \tau_0$ . Más aún, supondremos que los procesos que generan las perturbaciones iniciales son isotrópicos, por lo que la matriz de covarianza de los modos armónicos es diagonal, esto es,

$$\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l. \quad (2.59)$$

Es importante notar que para cada multipolo  $l$  dado, los distintos modos  $a_{lm}$  tienen la misma varianza, esto debido a que son realizaciones de una misma distribución. Para cada  $l$  tenemos  $2l + 1$  modos, por lo que al encontrarlos estamos también haciendo un muestreo de la distribución subyacente. Las observaciones más recientes de la radiación cósmica de fondo [12] no muestran ninguna desviación de distribuciones gaussianas, aunque algunas teorías de inflación predicen cierto grado de no gaussianidad en éstas.

El hecho de que tengamos un número finito de  $a_{lm}$  para un multipolo dado  $l$  significa que no podemos obtener la distribución con exactitud. Entonces tenemos una incertidumbre de naturaleza estadística en el conocimiento de los valores  $C_l$  y, por tanto, del espectro angular de potencias. Este efecto es más evidente a bajos multipolos y es llamado varianza cósmica. Cuantitativamente obtenemos un error<sup>5</sup>

$$\Delta C_l = C_l \sqrt{\frac{2}{2l + 1}}. \quad (2.61)$$

Si las distribuciones son gaussianas, toda la información estadística en las anisotropías de la temperatura de la radiación cósmica de fondo se encuentra en la función de correlación de dos puntos  $\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle$ . Esto es una consecuencia del teorema de Wick [105] (o teorema de Isserlis [106]), que expresa que la función de correlación de  $N$  puntos se puede expandir en funciones de correlación de 2 puntos si y sólo si éstas son gaussianas. Ahora, calcularemos la correlación

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}') \right\rangle_{\hat{n} \cdot \hat{n}' = \mu} &= \sum_{l, l', m, m'} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle Y_{lm}(\hat{n}) Y_{l'm'}^*(\hat{n}') \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l + 1) C_l P_l(\mu). \end{aligned} \quad (2.62)$$

<sup>5</sup>Formalmente este resultado se cumple únicamente para distribuciones gaussianas. Puede obtenerse de un teorema estándar de la estadística: consideremos una serie de números aleatorios  $x_i$  obtenidos de una distribución normal, si esta serie es infinita tenemos  $\langle x_i x_j \rangle = \delta_{ij}$ . Sin embargo, si la serie es finita, digamos de tamaño  $N$ , el promedio a orden primero en  $1/N$  está dado por

$$\langle x_i x_j \rangle_N = \delta_{ij} + \sqrt{\frac{1 + \delta_{ij}}{N}} a_{ij}, \quad (2.60)$$

donde  $a_{ij}$  son números aleatorios de distribución normal no correlacionados.



Hemos usado en la última igualdad la ecuación (2.59) y el teorema de la adición de los armónicos esféricos [102]. A su vez, los valores  $C_l$  están relacionados con el espectro de potencias primordiales del potencial gravitacional a través de

$$C_l = (4\pi)^2 \int k^2 dk P_\Psi(k) |\Theta_l(k, \tau_0)|^2. \quad (2.63)$$

El espectro de potencias favorecido por las observaciones es un espectro plano de Harrison-Zel'dovich

$$k^3 P_\Psi(k) = A_s \left( \frac{k}{k_0} \right)^{n_s - 1} \quad (2.64)$$

con el índice espectral  $n_s$  cercano a 1 [107, 108]. En esta ecuación  $A_s$  es la amplitud de las perturbaciones y  $k_0$  es una escala pivote arbitraria. Cabe decir que un espectro cercanamente plano es predecido por los modelos de inflación estándar [109–111].

Tenemos ahora todos los elementos necesarios para encontrar el espectro angular de potencias de la radiación cósmica de fondo. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular los  $C_l$  hasta un multipolo  $l = 1000$ . Debemos resolver las ecuaciones para la materia oscura; las ecuaciones para los bariones acoplados a la radiación; alrededor de 1100 ecuaciones acopladas para los distintos multipolos de fotones –para obtener una buena aproximación, la jerarquía de Boltzmann debe ser cortada a valores mayores de los requeridos–; otras 1100 ecuaciones para neutrinos no masivos y 1100 más para la polarización. En total debemos integrar más de 3000 ecuaciones acopladas desde tiempos tempranos en el universo,  $z \sim 10^7$ , hasta la presente época y finalmente calcular la integral (2.63) para cada valor  $C_l$ . Esta laboriosa tarea fue usada en los primeros códigos que se escribieron [94, 112] y tomaban horas o decenas de horas de cómputo para calcular los valores  $C_l$  del espectro angular de potencias.

A continuación presentamos un método desarrollado por U. Seljak y M. Zaldarriaga en [95] que permite encontrar los coeficientes  $C_l$  en un tiempo de cómputo considerablemente menor.

### 2.4.1. Método de la integral de línea de visión

Definimos la profundidad óptica

$$\kappa(\tau) = \int_\tau^{\tau_0} d\tau' a n_e x_e \sigma_T. \quad (2.65)$$

A tiempos tempranos la densidad de electrones libres es muy grande, así que  $\kappa \gg 1$ . Diferenciando tenemos  $\dot{\kappa}(\tau) = -a n_e x_e \sigma_T$ . Podemos transformar la ecuación diferencial

(2.43) en una ecuación integral [113]

$$\begin{aligned} \Theta(\vec{k}, \mu, \tau = \tau_0) &= \Theta(\tau_i) e^{ik\mu(\tau_i - \tau_0)} e^{-\kappa(\tau_i)} + \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau e^{ik\mu(\tau - \tau_0)} e^{-\kappa(\tau)} \\ &\times \left[ \dot{\Phi} - ik\mu\Psi - \dot{\kappa} \left( \Theta_0 + \mu \frac{\theta_b}{ik} - \frac{1}{2} P_2(\mu)\Pi \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Si ponemos la condición inicial a tiempos  $\tau_i$  muy tempranos, el primer término del lado derecho de la ecuación anterior es despreciable. Ahora nos encontramos con la dificultad de que la integral depende del ángulo  $\mu$ . Para deshacernos de estos términos multiplicamos ambos lados de la ecuación por los polinomios de Legendre  $P_l(\mu)$  e integramos sobre  $\mu$ . Después de una integración temporal por partes y el uso de la ecuación (2.45) llegamos al resultado

$$\Theta_l(\vec{k}, \tau_0) = \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau S(\vec{k}, \tau) j_l[k(\tau_0 - \tau)], \quad (2.67)$$

donde  $j_l$  son las funciones esféricas de Bessel; además hemos usado la relación [102]

$$\frac{i^l}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) e^{ik\mu(\tau - \tau_0)} = j_l[k(\tau_0 - \tau)]. \quad (2.68)$$

La función  $S$  está dada por

$$S(\vec{k}, \tau) = e^{-\kappa} (\dot{\Phi} + \dot{\Psi}) + g \left( \Theta_0 + \Psi + \frac{\dot{\theta}_b}{k^2} + \frac{\Pi}{4} + \frac{3\ddot{\Pi}}{4k^2} \right) + \dot{g} \left( \frac{\theta_b}{k^2} + \frac{3\dot{\Pi}}{2k^2} \right) + \ddot{g} \frac{3\Pi}{4k^2}; \quad (2.69)$$

y hemos definido la *función de visibilidad*

$$g(\tau) = -\dot{\kappa} e^{-\kappa}. \quad (2.70)$$

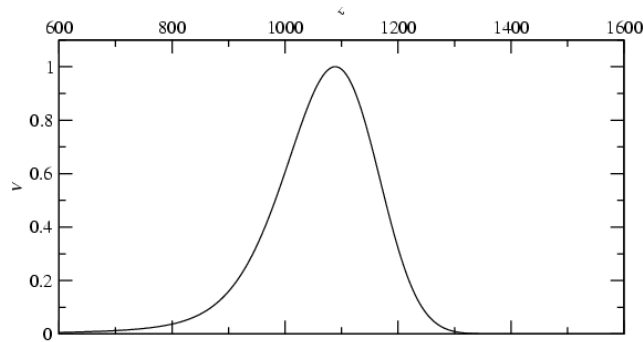


FIGURA 2.1: Función de visibilidad (2.70) como función del corrimiento al rojo. Imagen tomada de [114].

Esta función es la densidad de probabilidad de que un fotón sea dispersado por última

vez en un intervalo de tiempo  $d\tau$ . Además su valor es muy pequeño a tiempos tempranos cuando la profundidad óptica es muy grande y decae muy rápidamente después del desacoplamiento de los fotones de la radiación cósmica de fondo, dado que la tasa de dispersión  $-\dot{\kappa}$  es despreciable. Por lo tanto la función de visibilidad y sus derivadas son casi cero en todo su dominio a excepción de un pico alrededor de la época del desacoplamiento. Por su importancia, la graficamos en la figura 2.1. Notamos que después de la etapa de última dispersión sólo el primer término en la ecuación (2.69) es importante; este término muestra el efecto Sachs-Wolfe integrado [115], e implica que cuando  $\Omega_m$  es apreciablemente menor que 1, se produce un aumento en la potencia de las anisotropías a grandes escalas. También es reconocible el término  $\Theta_0 + \Psi$ , que expresa la temperatura efectiva de los fotones. Los términos que incluyen la velocidad de los bariones son fuente de efecto Doppler y tienden a aumentar el momento dipolar fotónico, mientras los términos que contienen  $\Pi$  son producidos por polarizaciones y por anisotropías en la dispersión Thomson; además son fuente de polarización en la radiación cósmica de fondo. Ecuaciones similares se pueden encontrar para neutrinos sin masa y para los términos de polarización [95].

Esta técnica para encontrar los picos acústicos en la radiación cósmica de fondo es llamado *método de integral de visión*, y fue encontrada e implementada en el código CMBFAST por U. Seljak y M. Zaldarriaga en [95]. También es el método usado por el código CAMB [96].

Las ventajas computacionales del método de la integral de línea de visión sobre el expuesto al final de la sección anterior son considerables, de aproximadamente dos órdenes de magnitud en tiempo de cómputo. Como se puede ver de las ecuaciones (2.67) y (2.69), sólo es necesario encontrar los momentos fotónicos y de polarización hasta el cuadrupolo, así que resolver la jerarquía de Boltzmann hasta un momento multipolar  $l = 10$  resulta en un error inferior a 0.1 % en sus valores. Las funciones esféricas de Bessel pueden ser calculadas una sola vez y almacenadas. El espectro angular de potencias es muy suave (a excepción de las mayores escalas), así que no es necesario calcular la integral (2.67) para todos los multipolos. Se hace cada 10-100 multipolos y luego se utiliza algún método de interpolación; particularmente en CAMB se utiliza un método spline cúbico [116].

En este capítulo hemos expuesto sucintamente los fundamentos de la teoría de perturbaciones cosmológicas y su relación con la radiación cósmica de fondo ya que en los siguientes capítulos compararemos modelos con observaciones mediante el uso de códigos numéricos como CAMB. Para la estimación de parámetros usaremos el código CosmoMC, que usa cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC), y cuyo formalismo teórico exponemos en el apéndice B.

## Capítulo 3

# La degeneración oscura y el fluido oscuro

Aproximadamente 96 % del contenido energético del universo es de origen desconocido. Usualmente, este *fluido oscuro* es separado en dos componentes: una parte llamada *materia oscura*, que colapsa gravitacionalmente y es responsable de formar estructura en el universo, y una componente no aglutinante llamada *energía oscura*, la cual induce la expansión cósmica acelerada hoy en día.

En este capítulo mostraremos que esta separación es arbitraria, al menos en lo que respecta a la teoría de perturbaciones cosmológicas. Las componentes oscuras pueden ser tan sólo una entidad o incluso una gran cantidad de distintos fluidos con interacciones entre ellos. Esto se debe a que la gravedad sólo es influida por el tensor de energía momento total de las componentes oscuras. Tanto fotones como materia bariónica son detectados a través de sus interacciones no gravitacionales, y su contribución al tensor de energía momento puede ser medida directamente.

Creemos que esta división del sector oscuro en materia y energía oscuras se debe principalmente a un motivo histórico: cronológicamente, primero fueron encontradas las propiedades atractivas de este nuevo fluido y tiempo después sus propiedades de energía oscura.

Otro motivo es conceptual: para algunos cosmólogos, y físicos en general, es más conveniente tener dos fluidos con ecuaciones de estado sencillas que una cantidad grande de ellos (o uno solo) con ecuaciones de estado complicadas. En el modelo cosmológico estándar, la energía oscura aparece como una constante fundamental en las ecuaciones de Einstein, lo cual se explica por sí mismo. Por otro lado, el origen de la materia oscura

es hasta ahora desconocido, aunque se cuenta con una amplia gama de posibles candidatos provenientes de extensiones al modelo estándar de física de partículas. Explicar el origen de esta materia faltante abre un amplio campo de investigación en física de partículas y en cosmología.

### 3.1. La degeneración oscura

Supongamos un universo espacialmente plano, compuesto de materia bariónica y oscura con parámetro de densidad  $\Omega_M$ , y de energía oscura con parámetro de ecuación de estado  $w(z)$ , desconocido por el momento. Dado un factor de Hubble  $H(z)$  arbitrario, usando la ecuación de Friedmann

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_{DE} \exp \left( 3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz' \right) \right], \quad (3.1)$$

podemos encontrar  $w(z)$  [117, 118]

$$w(z) = \frac{H(z)^2 - (2/3)H(z)(1+z)dH(z)/dz}{H_0^2\Omega_M(1+z)^3 - H(z)^2}. \quad (3.2)$$

Esto significa que para cualquier  $\Omega_M$  que escojamos siempre será posible encontrar la función  $w(z)$  que reproduzca la historia de la expansión del universo medida; más aún, la ecuación (3.2) no depende de  $H_0$ . Debido a esto,  $\Omega_M$  y  $w(z)$  no pueden ser medidas simultáneamente. La ecuación (3.2) puede ser generalizada de manera que incluya curvatura [119]. Otra manera de ver esto es si tenemos un modelo cosmológico con un parámetro de densidad de materia total  $\hat{\Omega}_M$  y un fluido con una ecuación de estado [120]

$$\hat{w}(z) = -\frac{1 - \Omega_M}{(1 - \Omega_M) + (\Omega_M - \hat{\Omega}_M)(1+z)^3}, \quad (3.3)$$

la expansión del universo será la misma que en el modelo  $\Lambda$ CDM con densidad de materia total  $\Omega_M$ . Esta degeneración se debe a que estamos tratando de medir más grados de libertad que los encontrados en el tensor de energía momento; sólo podemos medir una presión. En lugar de eso estamos intentando medir la presión misma y la cantidad de materia oscura.

La razón de fondo de esta degeneración es el principio de equivalencia. La manera en que definimos las componentes oscuras del universo es a través de las ecuaciones de Einstein

$$T_{\mu\nu}^{dark} = \frac{1}{8\pi G} G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^{obs}, \quad (3.4)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es inferido de la geometría observada en el universo, y  $T_{\mu\nu}^{obs}$  de su contenido energético bariónico observado. De hecho el sector oscuro, representado por  $T_{\mu\nu}^{dark}$ , puede estar descrito por un gran número de diversas partículas con interacciones entre si, o incluso puede ser un único, desconocido, fluido oscuro. Esta propiedad ha sido llamada *degeneración oscura* por M. Kunz en [120].

### 3.2. La velocidad del sonido de la materia oscura y el fluido oscuro

Por un momento consideremos válida la gravitación newtoniana; los modos de Fourier de los contrastes de densidad de la materia en un universo en expansión siguen la ecuación

$$\delta'' + 2H\delta' + (c_s^2 k_{\text{phys}}^2 - 4\pi G\rho) \delta = 0, \quad (3.5)$$

donde la frecuencia  $k_{\text{phys}}$  está relacionada con la escala  $l_{\text{phys}}$  de longitud física por  $l_{\text{phys}} = 2\pi/k_{\text{phys}}$ ,  $c_s^2$  es la velocidad del sonido del fluido bajo consideración, y prima significa derivada respecto al tiempo cósmico. En escalas astrofísicas podemos despreciar la expansión del universo y hacer  $H = 0$ . La ecuación (3.5) tiene un comportamiento distinto de acuerdo con el signo del término entre paréntesis. Hay una escala umbral, llamada longitud de Jeans, dada por

$$l_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}, \quad (3.6)$$

para la que perturbaciones con longitud física por debajo de ella,  $l_{\text{phys}} < l_J$ , desarrollan oscilaciones acústicas, mientras perturbaciones con longitud física mayores,  $l_{\text{phys}} > l_J$ , crecen por colapso gravitacional.

Esperamos tener materia oscura a un amplio rango de escalas, desde las más grandes escalas cosmológicas medidas hasta galaxias. Incluso galaxias enanas necesitan de esta materia oscura para estabilizar sus discos y para obtener las fuentes necesarias de gravitación que expliquen sus curvas de rotación.

La única manera de garantizar que las perturbaciones de materia oscura crezcan a todas las escalas es imponiendo que su longitud de Jeans sea igual a cero.

Definimos al *fluido oscuro* como un fluido barotrópico (para el cual  $P = P(\rho)$ ) con velocidad del sonido adiabática igual a cero,

$$c_s^2 = 0, \quad (3.7)$$

y que, en una primera aproximación, no interactúa con el modelo estándar de partículas. Para fluidos barotrópicos la velocidad del sonido adiabática coincide con la velocidad a la que las perturbaciones del medio se propagan. La condición barotrópica no considera, por ejemplo, campos escalares, para los cuales su velocidad del sonido adiabática incluso puede ser cero aunque la velocidad a la que se propagan sus perturbaciones es siempre igual a la velocidad de la luz; véase [121]. Con la definición (3.7) aseguramos que el fluido oscuro se comporte como materia oscura y sea capaz de formar estructura. Sin pérdida de generalidad podemos escribir la ecuación de estado del fluido oscuro como

$$P(\rho) = w(\rho)\rho, \quad (3.8)$$

donde el parámetro de la ecuación de estado  $w$  es función únicamente de la densidad de energía  $\rho$ . Usando la ecuación (3.7) y la definición (2.31) obtenemos que el parámetro de la ecuación de estado es resuelto por la ecuación

$$\rho \frac{dw}{d\rho} + w = 0, \quad (3.9)$$

cuya solución es

$$w = -\frac{\mathcal{C}}{\rho}, \quad (3.10)$$

con  $\mathcal{C}$  una constante y el signo menos es escogido por futura conveniencia. Esto significa que el valor de la presión del fluido oscuro es igual a una constante,

$$P = P_0 = -\mathcal{C}. \quad (3.11)$$

Observaciones astrofísicas restringen este valor a ser muy pequeño,  $|P| \ll \rho_A$ , donde  $\rho_A$  es la densidad de energía de una escala astrofísica típica donde la materia oscura haya sido detectada [122, 123]; por ejemplo, con el uso de mediciones de curvas de rotación de galaxias de bajo brillo superficial, Barranco *et al.* han encontrado que el parámetro de la ecuación de estado de la materia oscura está acotado por  $|w_{\text{DM}}| \lesssim 10^{-6}$  [123]. Usualmente se asume que la presión de la materia oscura es igual a cero, pero esto no es necesario. Por ejemplo, puede ser el caso que  $|P| \sim \rho_{c0}$ , donde  $\rho_{c0}$  es la densidad de energía cosmológica típica en el presente, y no estar en contradicción con alguna observación astrofísica. De hecho, ésta es la entrada que nos permitirá usar el fluido oscuro no sólo como materia oscura, sino también como energía oscura.

### 3.3. Fluido oscuro como energía oscura

Consideremos un universo cuya geometría es descrita por una métrica FRW plana y está dotado de las partículas del modelo estándar (bariones  $b$ , fotones  $\gamma$ , neutrinos  $\nu, \dots$ )

y del fluido oscuro que definimos en la sección anterior; a partir de ahora incluiremos siempre un subíndice  $d$  al referirnos a las variables de este fluido. Las ecuaciones de evolución de este universo son la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_b + \rho_\gamma + \rho_d) \quad (3.12)$$

y las ecuaciones de continuidad

$$\rho'_b + 3H\rho_b = 0, \quad (3.13)$$

$$\rho'_\gamma + 4H\rho_\gamma = 0, \quad (3.14)$$

$$\rho'_d + 3H(1 + w_d)\rho_d = 0. \quad (3.15)$$

Las ecuaciones para bariones y para radiación se pueden integrar inmediatamente y se obtienen las densidades de energía como funciones del factor de escala,  $\rho_b = \rho_{b0}a^{-3}$  y  $\rho_\gamma = \rho_{\gamma0}a^{-4}$ . El subíndice 0 indica que la cantidad en consideración es evaluada hoy en día. También hemos normalizado el factor de escala de manera que su valor sea igual a uno en la presente época,  $a_0 = 1$ . Usando la ecuación (3.10) podemos resolver la ecuación (3.15), obteniendo

$$\rho_d = \frac{\rho_{d0}}{1 + \mathcal{K}} \left( 1 + \frac{\mathcal{K}}{a^3} \right), \quad (3.16)$$

donde hemos definido la constante

$$\mathcal{K} = (\rho_{d0} - \mathcal{C})/\mathcal{C}. \quad (3.17)$$

La expresión (3.16) es justo lo que esperamos de la evolución de un fluido oscuro unificado. Contiene un sumando constante, el cual se comporta como energía oscura, y otro que cae con la tercera potencia del factor de escala, justo como lo hace la materia oscura. Esta ecuación ha aparecido varias veces en la literatura de fluidos unificados, como en la referencia [124], donde se estudia el gas de Chaplygin [74–76] en un límite en que se reduce al modelo  $\Lambda$ CDM, o en el estudio de fluidos barotrópicos con velocidad del sonido constante [125–127]. De hecho, en el lenguaje de E. Linder y R. Scherrer [127], el término proporcional a  $a^{-3}$  en la ecuación (3.16) es una componente *éter* de un fluido barotrópico, ya que ésta define una cuadrivelocidad en el espacio-tiempo.

El parámetro de la ecuación de estado del fluido oscuro es entonces

$$w_d = -\frac{1}{1 + \mathcal{K}a^{-3}}. \quad (3.18)$$

W. Hu y D. Eisenstein se dieron cuenta de que un fluido que cumpla con esta ecuación de estado y cuya velocidad del sonido adiabática igual a cero es indistinguible del modelo



$\Lambda$ CDM en la cosmología homogénea e isotrópica [128]; ellos no supusieron fluidos barotrópicos por lo que ambas condiciones son necesarias. Al imponer fluidos barotrópicos, como sucede en nuestro caso, la ecuación (3.18) es una consecuencia de  $c_s^2 = 0$ .

El fluido oscuro es proporcional al inverso del parámetro de su ecuación de estado

$$\rho_d = -\frac{\rho_{d0}}{(1 + \mathcal{K})} \frac{1}{w_d}, \quad (3.19)$$

y su presión, expresada en términos de la constante  $\mathcal{K}$  en lugar de la constante  $\mathcal{C}$ , es

$$P_d = -\frac{\rho_{d0}}{1 + \mathcal{K}}. \quad (3.20)$$

Para asegurar que la densidad de energía del fluido oscuro sea positiva a todo tiempo, debemos imponer que  $\mathcal{K}$  sea un número positivo. Esto implica que su presión deba ser negativa, y esta cualidad es la que permite al fluido oscuro acelerar el universo. Como vimos en la sección anterior, la presión puede tomar valores del orden de la densidad crítica del universo ( $\sim 8\pi G/3H_0^2$ ) sin afectar su comportamiento como materia oscura en escenarios astrofísicos.

La ecuación de Friedmann (3.12) se puede reescribir como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{d0}}{1 + \mathcal{K}} + \frac{\mathcal{K}\rho_{d0}}{1 + \mathcal{K}} a^{-3} + \rho_{b0} a^{-3} + \rho_{\gamma 0} a^{-4} \right), \quad (3.21)$$

la cual es la misma ecuación de evolución para el factor de escala que en el modelo  $\Lambda$ CDM. Esto no es un accidente, si se asume  $\Lambda$ CDM como el modelo válido y se considera la densidad de energía total de sus componentes oscuras,  $\rho_T = \rho_{\text{DM}} + \rho_{\Lambda}$ , el parámetro de la ecuación de estado total de las componentes oscuras,  $w_T$ , definido por

$$w_T \equiv \frac{\sum_a w_a \rho_a}{\sum_a \rho_a}, \quad (3.22)$$

donde el subíndice  $a$  indica materia oscura (DM) y constante cosmológica ( $\Lambda$ ), está dado por

$$w_T = -\frac{1}{1 + \frac{\Omega_{\text{DM}}}{\Omega_{\Lambda}} a^{-3}}, \quad (3.23)$$

donde  $\Omega_{\text{DM}} = 8\pi G\rho_{\text{DM}0}/3H_0^2$  y  $\Omega_{\Lambda} = \Lambda/3H_0^2$ . Claramente, la ecuación  $\dot{\rho}_T = -3\mathcal{H}(1 + w_T)\rho_T$  se cumple para la densidad de energía total. Entonces, comparando los resultados de las ecuaciones (3.18) y (3.21), notamos que bajo las identificaciones

$$\mathcal{K} = \frac{\Omega_{\text{DM}}}{\Omega_{\Lambda}} \quad (3.24)$$

y

$$\Omega_d = \Omega_{\text{DM}} + \Omega_\Lambda, \quad (3.25)$$

donde  $\Omega_d = 8\pi G\rho_{d0}/3H_0^2$ , la evolución cosmológica es exactamente la misma en ambos modelos, al menos para el universo homogéneo e isotrópico.

Esta propiedad es de hecho más general que para el caso de un solo fluido que hemos tratado aquí. Cualquier colección de fluidos cuyo parámetro de ecuación de estado sea igual a la ecuación (3.23) y que no interactúe con bariones y fotones se comportará de la misma manera, estando en degeneración con el modelo  $\Lambda$ CDM. En la sección 3.5 construiremos el fluido oscuro a partir de diversas componentes interactuantes.

Cabe mencionar que ha habido diversos intentos por encontrar una teoría fundamental de la cual se pueda obtener el fluido oscuro [129, 130]. En el capítulo 4 nosotros usaremos el formalismo de la geometrotermodinámica [131] para obtener el fluido oscuro.

### 3.4. Perturbaciones del fluido oscuro

En esta sección mostramos explícitamente que la degeneración se preserva cuando vamos más allá de la cosmología homogénea e isotrópica, bajo algunas suposiciones muy generales que han sido obviadas en trabajos anteriores [120, 124, 132]. Dividimos la discusión en perturbaciones cosmológicas de orden lineal y de mayores órdenes.

#### 3.4.1. Orden lineal

Consideremos perturbaciones escalares en la norma newtoniana conforme; la métrica está dada por la ecuación (2.18),

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ - (1 + 2\Psi)d\tau^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \right]. \quad (3.26)$$

Las perturbaciones al tensor de energía momento del fluido oscuro están dadas por (2.26), (2.27) y (2.28). Usando las ecuaciones de hidrodinámica para un fluido general (2.29) y (2.30), y la ecuación

$$c_s^2 = w_d - \frac{\dot{w}_d}{3\mathcal{H}(1 + w_d)} = 0, \quad (3.27)$$

obtenemos

$$\dot{\delta}_d = -(1 + w_d)(\theta_d - 3\dot{\Phi}) + 3\mathcal{H}w_d\delta_d - 3\mathcal{H}\frac{\delta P_d}{\delta\rho_d}\delta_d, \quad (3.28)$$

$$\dot{\theta}_d = -\mathcal{H}\theta_d + k^2\Psi + \frac{\delta P_d/\delta\rho_d}{1 + w_d}k^2\delta_d - k^2\sigma_d, \quad (3.29)$$

mientras que para bariones después de la época de recombinación, cuando el acoplamiento con fotones puede ser despreciado,

$$\dot{\delta}_b = -\theta_b + 3\dot{\Phi}, \quad (3.30)$$

$$\dot{\theta}_b = -\mathcal{H}\theta_b + k^2\Psi. \quad (3.31)$$

Debemos añadir las ecuaciones de Einstein, que aquí escribimos de la siguiente manera

$$k^2\Phi = -4\pi G a^2 \sum_i \rho_i \Delta_i, \quad (3.32)$$

y

$$k^2(\Phi - \Psi) = 12\pi G a^2 \sum_i (\rho_i + P_i)\sigma_i, \quad (3.33)$$

donde la suma es sobre todas las contribuciones de fluidos y

$$\Delta_i = \delta_i + 3\mathcal{H}(1 + w_i)\frac{\theta_i}{k^2} \quad (3.34)$$

es la densidad de energía en reposo del  $i$ -ésimo fluido [93]. En escalas por debajo del horizonte ( $k \gg \mathcal{H}$ ) vemos que  $\Delta_i \simeq \delta_i$ .

Para resolver estas ecuaciones tenemos que añadir información sobre la naturaleza del fluido oscuro. La condición barotrópica implica que  $\delta P = c_s^2 \delta\rho$  y por tanto  $\delta P_d = 0$ , y dado que es un fluido perfecto, los estreses anisotrópicos son cero,  $\sigma_d = 0$ . De aquí que el último término del lado derecho de la ecuación (3.28) se hace cero, mientras en la ecuación (3.29) sólo los dos primeros términos sobreviven. Además, en el siguiente análisis despreciamos los estreses generados por los campos de fotones y neutrinos, por lo que los dos potenciales gravitacionales son iguales,  $\Phi = \Psi$ .

En la figura 3.1 mostramos las evoluciones de las variables perturbadas para un modo  $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ . Las líneas entrecortadas muestran los resultados para el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ , para el cual hemos usado las ecuaciones de perturbación de materia oscura

$$\dot{\delta}_{\text{DM}} = -\theta_{\text{DM}} + 3\dot{\Phi}, \quad (3.35)$$

$$\dot{\theta}_{\text{DM}} = -\mathcal{H}\theta_{\text{DM}} + k^2\Psi, \quad (3.36)$$

en lugar de las ecuaciones (3.28) y (3.29). Al evolucionar las ecuaciones de perturbación para ambos modelos hemos impuesto a un tiempo  $\tau_i$  las condiciones iniciales siguientes:

$$\delta_d(\tau_i) = \alpha \frac{\delta_{DM}(\tau_i)\rho_{DM}(\tau_i)}{\rho_d(\tau_i)}, \quad (3.37)$$

$$\theta_d(\tau_i) = \alpha \frac{\theta_{DM}(\tau_i)\rho_{DM}(\tau_i)}{(1 + w_d(\tau_i))\rho_d(\tau_i)}, \quad (3.38)$$

para los contrastes de densidad y para las velocidades del fluido oscuro;  $\alpha$  es una constante que permitimos tome distintos valores. Estas condiciones iniciales están dadas a un tiempo suficientemente tardío, después de la época de última dispersión, de tal manera que podamos usar las ecuaciones (3.30) y (3.31) y se cumpla la relación  $\delta_b \simeq \delta_{DM}$ .

Notamos que la evolución de los contrastes de densidad para bariones son indistinguibles para ambos modelos si tomamos  $\alpha = 1$ . Aunque el espectro de potencias sea el observable cosmológico que incluye un amplio espectro de frecuencias, la figura 3.1 sugiere que de hecho este resultado es el mismo para cualquier número de onda, como demostraremos a continuación.

En el contexto cosmológico, imponer las condiciones iniciales (3.37) y (3.38) con  $\alpha = 1$  equivale a pedir que a primer orden en teoría de perturbaciones las componentes (00) y (0i) de los tensores de energía momento del fluido oscuro y del modelo  $\Lambda$ CDM sean iguales a un tiempo inicial  $\tau_i$ . Notemos que de la ecuación de Poisson (3.32), en el caso  $\alpha = 1$ , ambas condiciones iniciales se preservan a todo tiempo. Esto significa que al obtener las soluciones con  $\alpha = 1$  en la figura 3.1 hemos impuesto que a todo tiempo (ver apéndice C.1)

$$\rho_d \delta_d = \rho_{DM} \delta_{DM}, \quad (3.39)$$

y

$$\rho_d(1 + w_d)\theta_d = \rho_{DM}\theta_{DM}. \quad (3.40)$$

De ahora en adelante supondremos válidas estas ecuaciones, de manera que estemos en degeneración con el modelo  $\Lambda$ CDM. De nuestros resultados previos, se sigue que

$$\rho_{DM} = \rho_d(1 + w_d). \quad (3.41)$$

Entonces la ecuación (3.40) implica  $\theta_{DM} = \theta_d$ , lo cual explica el comportamiento en la figura 3.1(d). Más aún, de la ecuación (3.32) se sigue que los potenciales gravitacionales son iguales para ambos modelos, de ahí el comportamiento de la figura 3.1(a).

Finalmente, insertando las ecuaciones (3.39) y (3.40) en las ecuaciones (3.35) y (3.36),

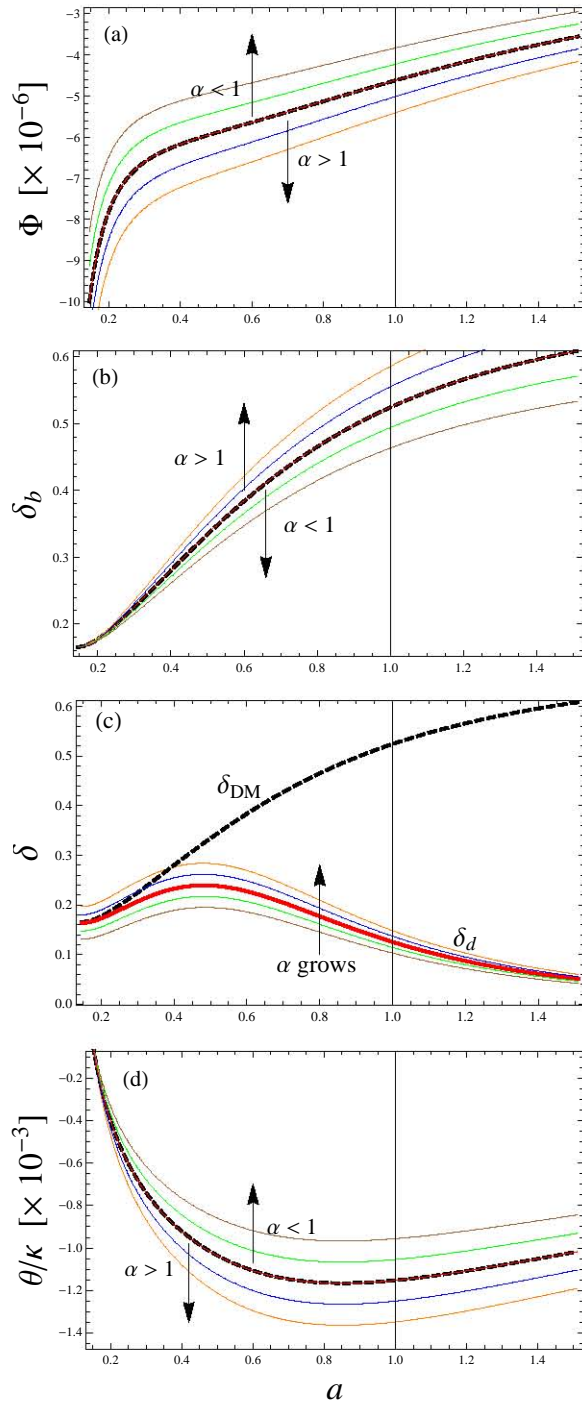


FIGURA 3.1: Evolución de las variables perturbadas para un modo  $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ . Las curvas sólidas son obtenidas para el fluido oscuro con diferentes valores del parámetro  $\alpha$  en las condiciones iniciales  $\delta_d(\tau_i) = \alpha \rho_{\text{DM}}(\tau_i) \delta_{\text{DM}}(\tau_i) / \rho_d(\tau_i)$ .  $\alpha$  toma valores de 0.8 a 1.2. Las curvas entrecortadas denotan la evolución de las variables en el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ . Los paneles muestran: (a) El potencial gravitacional  $\Phi$ . (b) El contraste de densidad de materia bariónica  $\delta_b$ . (c) Los contrastes de densidad del fluido oscuro (líneas sólidas) y materia oscura (línea cortada),  $\delta_d$  y  $\delta_{\text{DM}}$ , respectivamente. (d) Velocidades del fluido oscuro (líneas sólidas) y materia oscura (línea cortada),  $\theta_d$  y  $\theta_{\text{DM}}$ , respectivamente. Las soluciones para el caso  $\alpha = 1$ , que corresponden a que las condiciones iniciales son iguales para ambos modelos, son mostradas con líneas angostas (rojas), las cuales para los paneles (a), (b) y (d) coinciden con las soluciones en el modelo  $\Lambda\text{CDM}$  (líneas entrecortadas).

respectivamente, y usando la ecuación (3.20), obtenemos que las ecuaciones hidrodinámicas del fluido oscuro son

$$\dot{\delta}_d = -(1 + w_d)(\theta_d - 3\dot{\Phi}) + 3\mathcal{H}w_d\delta_d, \quad (3.42)$$

$$\dot{\theta}_d = -\mathcal{H}\theta_d + k^2\Psi. \quad (3.43)$$

Pero estas ecuaciones son iguales que las ecuaciones (3.28) y (3.29) para un fluido perfecto barotrópico. Esto confirma que la degeneración oscura se preserva a orden lineal en teoría de perturbaciones, si consideramos el caso  $\alpha = 1$ .

Es interesante notar el comportamiento del contraste de densidad del fluido oscuro en la figura 3.1(c). Inicialmente crece como una componente de materia oscura para después caer asintóticamente a cero. De hecho, este comportamiento es natural para todas las longitudes de onda, como puede ser inferido de las ecuaciones (3.42) y (3.43): a tiempos tardíos, cuando  $w_d$  tiende a  $-1$ , el término fuente de  $\dot{\delta}_d$  se vuelve independiente de  $\theta_d$  y es una cantidad negativa que tiende a cero. Mientras tanto, a tiempos tempranos, para  $w_d \rightarrow 0$ , se tiene  $\mathcal{H}w_d \rightarrow 0$  y las ecuaciones se vuelven las mismas que las de materia oscura fría, (3.35) y (3.36).

### 3.4.2. Más allá del primer orden

Para estudiar los casos a órdenes mayores en teoría de perturbaciones, expandamos los tensores de energía momento del fluido oscuro y del sector oscuro en el modelo  $\Lambda$ CDM alrededor de los fluidos cosmológicos de fondo (a cero orden) como

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (3.44)$$

Si el tensor de energía momento total en ambos modelos es igual ( $T_{\mu\nu}^d = T_{\mu\nu}^{\Lambda\text{CDM}}$ ), claramente cada uno de los términos de la expansión será también igual ( $T_{\mu\nu}^{d(i)} = T_{\mu\nu}^{\Lambda\text{CDM}(i)}$ ). Este argumento es usado en [120] para notar que la degeneración es preservada a todos los órdenes en teoría de perturbaciones. Ciertamente, esto es correcto.

Sin embargo, nosotros estamos interesados en otro enfoque (que abordaremos en el capítulo 5 para romper la degeneración oscura o orden lineal). Nuestros experimentos son afectados gravitacionalmente por el tensor de energía momento total, pero cuando comparamos observaciones cosmológicas con modelos, realizamos la expansión de la ecuación (3.44), y no es hasta después de eso cuando asignamos valores numéricos a cada uno de los términos perturbativos. El hecho de que ambos tensores de energía momento sean iguales a un orden  $i$ , no implica que lo sean al siguiente orden,  $i + 1$ . En esta situación, ecuaciones como (3.39) y (3.40) son condiciones de la teoría y no

consecuencias de ella, y si no son impuestas, la degeneración se rompe, como se puede observar en la figura 3.1 para los casos  $\alpha \neq 1$ .

Existe una sutileza con la expansión perturbativa (3.44). El hecho de que el universo sea tan suave a muy grandes escalas es lo que nos permite hacer dicha expansión. El término de orden cero es un promedio espacial en hipersuperficies de tiempo conforme (o cósmico) constante a escalas cosmológicas grandes,  $T_{\mu\nu}^{(0)} = \langle T_{\mu\nu} \rangle$ ; después de esto asumimos que la teoría de relatividad general es válida en la forma  $G_{\mu\nu}(g^{(0)}) = \langle T_{\mu\nu} \rangle$ . Esto es falso debido al carácter no lineal de la gravedad; es bien sabido que efectos de *back-reaction* contribuyen a esta última ecuación [133, 134]. Lo usual en cosmología es suponer que estos efectos son despreciables; ejemplos de trabajos recientes sobre estos temas son [135, 136].

Para el caso específico que nos concierne, hay un problema relacionado. Consideremos un fluido con una ecuación de estado  $P = P(\rho)$  que conduce a una descripción unificada del sector oscuro. Claramente la ecuación  $\langle P \rangle = P(\langle \rho \rangle)$  no siempre se cumplirá; de hecho, correcciones de mayores órdenes entrarán en esta ecuación obteniendo

$$\langle P \rangle = P(\langle \rho \rangle) + \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\langle \rho \rangle} \langle \rho \rangle \delta + \dots \quad (3.45)$$

De manera que cuando una escala crece y deja el régimen lineal, el procedimiento simple de tomar promedios en la ecuación de estado ya no es válido. Este efecto no lineal ha sido investigado por diversos grupos; véanse [135] y [137–139]. Particularmente, se ha mostrado que pueden ocurrir inestabilidades incluso a las más grandes escalas cosmológicas, produciendo que la transición de régimen de tipo materia a tipo energía oscura no sea suave; en algunas regiones puede ocurrir antes de lo esperado, mientras en otras puede no suceder nunca [137]. La excepción a esto es cuando la presión es una función lineal de la densidad de energía, como para un fluido  $P = w\rho$  con  $w$  constante, o para el fluido oscuro que hemos estudiado en este capítulo, donde la presión es constante. Sin embargo, es importante subrayar que en los modelos que difieran de éstos –aunque sea de manera indistinguible por las observaciones actuales cuando los cálculos son llevados a cabo con el procedimiento usual de promedios– los efectos mencionados idealmente deberían ser considerados, aunque cabe decir que esto implica una considerable complicación en el análisis de los modelos. Tales son los casos del gas de Chaplygin generalizado [74–76] y de su extensión proveniente de la geometrotermodinámica [78], que encontraremos en el capítulo 4.

### 3.5. Múltiples componentes interactuantes

En esta sección exploramos la posibilidad de que el fluido oscuro esté hecho de una colección de componentes oscuras con posibles interacciones entre ellas. Las ecuaciones que obtengamos serán generalizadas en el capítulo 5 para incluir interacciones con bariones. Consideremos las ecuaciones de Einstein

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G \left( \sum_a T_a^{\mu\nu} + T_{\text{SM}}^{\mu\nu} \right), \quad (3.46)$$

donde el subíndice  $a$  etiqueta las diferentes componentes oscuras. Si prohibimos que éstas interactúen con el modelo estándar de partículas, las identidades de Bianchi implican  $\nabla_\mu T_{\text{SM}}^{\mu\nu} = 0$  y

$$\nabla_\mu T_a^{\mu\nu} = Q_a^\nu, \quad (3.47)$$

donde los vectores de transferencia de energía momento,  $Q_a^\nu$ , obedecen la constricción

$$\sum_a Q_a^\nu = 0. \quad (3.48)$$

Consideremos por el momento la cosmología homogénea e isotrópica, la ecuación de continuidad para cada fluido es

$$\dot{\rho}_a + 3\mathcal{H}(1 + w_a)\rho_a = q_a, \quad (3.49)$$

donde las cantidades  $q_a$  denotan la transferencia de energía entre las distintas componentes oscuras. Esto implica que a orden cero (ignorando los subíndices  $a$  por el momento)

$$Q^\nu{}^{(0)} = \frac{1}{a^2}(q, \vec{0}), \quad (3.50)$$

si definimos  $Q \equiv \sqrt{-g_{\mu\nu}Q^\mu Q^\nu}$ , entonces  $Q^{(0)} = q/a$  y  $Q^\nu{}^{(0)} = a^{-1}(Q^{(0)}, \vec{0})$ . Ahora, siguiendo [140, 141], descomponemos el vector de interacción como

$$Q_\nu = Qu_\nu + f_\nu, \quad (3.51)$$

donde la transferencia de momento,  $f^\nu$ , es de primer orden y es ortogonal a la cuadrivelocidad  $u^\nu$  del fluido particular,  $f^\nu u_\nu = 0$ . Por lo tanto, bajo rotaciones espaciales  $Q$  transforma como un escalar y  $f^i$  como un vector. De acuerdo con esto, descomponemos  $f^i$  como

$$f_i = f_{,i} + \epsilon_i \quad (3.52)$$



con  $f$  un escalar y  $\epsilon_i$  un vector transverso,  $\epsilon^i_{,i} = 0$ . Además, definimos la perturbación  $\delta Q$  a través de

$$Q = Q^{(0)} + \delta Q = \frac{1}{a}(q + \delta q), \quad (3.53)$$

donde en la última igualdad definimos  $\delta q \equiv a\delta Q$ . De (3.51) se sigue que a primer orden

$$Q^0 = \frac{1}{a^2}(q(1 - \Psi) + \delta q) \quad (3.54)$$

$$Q^i = \frac{1}{a^2}qv^i + \frac{1}{a^2}f^{,i} + \frac{1}{a^2}\epsilon^i. \quad (3.55)$$

Finalmente, de la ecuación (3.48) se obtienen (reinsertando los subíndices  $a$ ) las ecuaciones de constricción

$$\sum_a \delta q_a = 0, \quad (3.56)$$

$$\sum_a q_a = 0, \quad (3.57)$$

y  $a^2 \sum_a Q_a^i = \sum_a (q_a v_a^i + f_a^i + \epsilon_a^i)$ , la cual, si le sacamos la divergencia y cambiamos a espacio de Fourier, se vuelve

$$\sum_a (q_a \theta_a + k^2 f_a) = 0. \quad (3.58)$$

Ahora, a primer orden en teoría de perturbaciones, la divergencia del tensor de energía momento para cada fluido –omitiendo nuevamente los subíndices  $a$ – es, para la componente 0

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu 0} &= \frac{1}{a^2}(1 + \delta - 2\Psi)(\dot{\rho} + 3\mathcal{H}(1 + w)\rho) \\ &+ \frac{\rho}{a^2} \left[ \dot{\delta} + (1 + w)(\partial_i v^i - 3\dot{\Phi}) + 3\mathcal{H} \left( \frac{\delta P}{\delta \rho} - w \right) \delta \right], \end{aligned} \quad (3.59)$$

y, para la componente  $i$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu i} &= \frac{P}{a^2} \partial_j \Pi^{ij} + \frac{1}{a^2}(\dot{\rho} + 3\mathcal{H}(1 + w)\rho)v^i + \frac{\rho + P}{a^2} \left[ \dot{v}^i \right. \\ &+ \left. \mathcal{H} \left( 1 + \frac{\dot{\rho}w}{\mathcal{H}(1 + w)\rho} \right) v^i + \frac{\dot{w}}{1 + w} v^i + \frac{w\pi_L^i}{1 + w} + \Psi^{,i} \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Nótese que si la interacción es cero, ambas ecuaciones se reducen a las usuales. Tomamos la divergencia de la ecuación (3.60) para aislar el modo escalar, por lo que la ecuación

(3.47) implica

$$\dot{\delta}_a + (1 + w_a)(\theta_a - 3\dot{\Phi}) + 3\mathcal{H} \left( \frac{\delta P_a}{\delta \rho_a} - w_a \right) \delta_a + \frac{q_a}{\rho_a} (\delta_a - \Psi) - \frac{\delta q_a}{\rho_a} = 0 \quad (3.61)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_a + \mathcal{H} \left( 1 - 3w_a + \frac{q_a w_a}{\mathcal{H}(1 + w_a)\rho_a} \right) \theta_a + \frac{\dot{w}_a}{1 + w_a} \theta_a \\ - \frac{\delta P_a / \delta \rho_a}{1 + w_a} k^2 \delta_a - k^2 \Psi + k^2 \sigma_a + \frac{k^2 f_a}{\rho_a(1 + w_a)} = 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde hemos vuelto al espacio de Fourier y reinsertado los índices  $a$ . También hemos usado la descomposición del tensor  $\Pi^{ij}$  en modos escalares, vectoriales y tensoriales. Multiplicando por  $k_i k_j$ , sólo el estrés anisotrópico escalar sobrevive y el primer término del lado derecho de la ecuación (3.60) se vuelve  $2k^2 \Pi^{(s)} P/3 = (\rho + P)k^2 \sigma$ . 3.61 y 3.62 son entonces las ecuaciones hidrodinámicas para la colección de fluidos interactuantes.

Definiendo la densidad de energía total de los fluidos oscuros como  $\rho_T = \sum \rho_a$ , se sigue que el contraste de densidad total,  $\delta_T$ , es la suma pesada de las componentes individuales

$$\delta_T = \frac{1}{\rho_T} \sum_a \rho_a \delta_a, \quad (3.63)$$

y la “velocidad” total es

$$\theta_T = \frac{1}{\rho_T(1 + w_T)} \sum_a \rho_a (1 + w_a) \theta_a, \quad (3.64)$$

donde  $w_T = \sum_a w_a \rho_a / \sum_a \rho_a$ . Usando estas últimas ecuaciones, es directo demostrar que las ecuaciones hidrodinámicas para el fluido oscuro total son

$$\dot{\delta}_T + (1 + w_T)(\theta_T - 3\dot{\Phi}) + 3\mathcal{H} \left( \frac{\delta P_T}{\delta \rho_T} - w_T \right) \delta_T = 0 \quad (3.65)$$

y

$$\dot{\theta}_T + \mathcal{H}(1 - 3w_T)\theta_T + \frac{\dot{w}_T}{1 + w_T} \theta_T + -\frac{\delta P_T / \delta \rho_T}{1 + w_T} k^2 \delta_T - k^2 \Psi + k^2 \sigma_T = 0, \quad (3.66)$$

donde  $\delta P_T = \sum \delta P_a$ . Éstas son exactamente las ecuaciones que encontramos para una sola componente no interactuante, (2.29) y (2.30). La velocidad del sonido adiabática del fluido total es  $c_{sT}^2 = \dot{P}_T / \dot{\rho}_T = \sum \rho_a c_{sa}^2 / \rho_T$ . Entonces, forzando la condición  $c_{sT}^2 = 0$ , obtenemos  $w_T = w_a$ , y si cada una de las componentes tiene densidad de energía positiva ( $\rho_a > 0$ ), es condición necesaria y suficiente  $c_{sa}^2 = 0$  y  $\delta P_a = 0$ . Hemos obtenido que las ecuaciones de perturbación hidrodinámicas del fluido compuesto son las mismas que

las del fluido oscuro ((3.42) y (3.43)), bajo la sustitución  $T \rightarrow d$ . Justamente, hemos construido el fluido oscuro a partir de un número arbitrario de fluidos e interacciones.

Si consideramos el caso no físico en que alguna componente tiene densidad de energía negativa, la velocidad del sonido de algunas de ellas puede ser diferente de cero, y la perturbación de la presión es igual a

$$\delta P_T = c_{sT}^2 \delta \rho_T - \frac{1}{6\mathcal{H}\dot{\rho}_T} \sum_{a,b} \dot{\rho}_a \dot{\rho}_b (c_{sa}^2 - c_{sb}^2) \mathcal{S}_{ab}, \quad (3.67)$$

donde

$$\mathcal{S}_{ab} = \frac{\delta_a}{1+w_a} - \frac{\delta_b}{1+w_b} \quad (3.68)$$

es la entropía relativa entre los fluidos  $a$  y  $b$  [142]. Entonces, para obtener el fluido oscuro en el caso en que algunas componentes tengan densidad de energía negativa, debemos imponer que las perturbaciones de presión, dadas por la ecuación (3.67) sean igual a cero.

### 3.6. Ruptura de la degeneración oscura

De las secciones anteriores resulta claro que el fluido oscuro puede ser la suma de componentes de materia oscura y energía oscura, o bien puede ser compuesto de un gran número de fluidos distintos. Sin embargo, si la interacción con las partículas del modelo estándar es únicamente gravitacional –la cual es considerada la definición más radical de componente oscura– debido a la universalidad de esta fuerza, la naturaleza del fluido oscuro no es posible de elucidar con la teoría de perturbaciones cosmológicas. Las componentes del modelo estándar de partículas interactúan de una manera bien conocida, lo que nos permite encontrar su contribución al tensor de energía momento total.

Al día de hoy el modelo cosmológico más exitoso en cosmología es el modelo  $\Lambda$ CDM. Y debido a la degeneración oscura, el modelo de fluido oscuro tiene exactamente el mismo éxito al compararlo con observaciones.

En los siguientes capítulos mostraremos modelos cercanos al fluido oscuro que rompen la degeneración en distintos niveles. Realizamos análisis numérico y encontramos sus signatures observables, que podrían ser encontradas en futuras observaciones cosmológicas. En el capítulo 4 mostramos una extensión al gas de Chaplygin, que tiene al fluido oscuro como un caso particular. En el capítulo 5 hacemos acoplamiento del fluido oscuro con la materia bariónica a nivel perturbativo lineal, dejando intacta la cosmología de fondo y en degeneración con el modelo  $\Lambda$ CDM. En el capítulo 6 estudiamos modificaciones a relatividad general y acoplamiento entre campos escalares de energía oscura y materia

bariónica, que pueden emular parte de la materia oscura en el universo. Estos últimos modelos no están exactamente degenerados con el modelo  $\Lambda$ CDM; sin embargo, las diferencias se pueden hacer tan pequeñas como se quiera al nivel homogéneo e isotrópico.



## Capítulo 4

# Extensión al gas de Chaplygin usando geometrotermodinámica

En el contexto de fluidos oscuros unificados, el gas de Chaplygin [74, 76] y su generalización [75] han recibido especial atención en la literatura. Estos modelos se obtienen con la introducción de una ecuación de estado dada por

$$P = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (4.1)$$

con  $A$  y  $0 \leq \alpha \leq 1$  constantes. El modelo  $\alpha = 1$  corresponde al gas de Chaplygin original y el modelo con  $\alpha \neq 1$  al gas de Chaplygin generalizado. La densidad de energía en un espacio-tiempo FRW evoluciona como

$$\rho = \left( A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (4.2)$$

Para el caso  $\alpha = 1$ , este modelo describe una interpolación suave entre una fase temprana dominada por polvo, con  $\rho \simeq \sqrt{B}a^{-3}$ , y una fase temporalmente asintótica de Sitter dominada por una constante cosmológica  $\Lambda_{chaplygin} = 8\pi G\sqrt{A}$ , con una fase intermedia descrita por un gas *stiff* con ecuación de estado  $P \simeq \rho$ . En el modelo generalizado (4.2) el comportamiento es muy similar, con la diferencia de que la fase intermedia está descrita por la ecuación de estado  $P = \alpha\rho$ .

El modelo del gas de Chaplygin admite una representación en el contexto de campos escalares complejos. Dado el campo escalar complejo

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}m} \phi \exp(-im\theta), \quad (4.3)$$

consideremos la densidad lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -g^{\mu\nu}\Phi^*_{,\mu}\Phi_{,\nu} - V(|\Phi|^2) \\ &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\phi^2\theta_{,\mu}\theta_{,\nu} + \frac{1}{m^2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}\right) - V(\phi^2),\end{aligned}\quad (4.4)$$

con un potencial

$$V = \frac{1}{2}\left(\psi^{2/\alpha} + \frac{A}{\psi^2}\right),\quad (4.5)$$

con  $\psi = B^{(1-\alpha)/(1+\alpha)}a^{3(1-\alpha)}\phi^2$ . Para el caso del gas de Chaplygin original, el potencial no depende del factor de escala y además es invariante ante transformaciones  $\phi \rightarrow A/\phi$ .

Notemos que esta descripción impone una escala de homogeneidad [76]; es decir, para el caso en que las variaciones de  $\phi$  en el espacio-tiempo sean pequeñas y cumplan con

$$\phi_{,\mu} \ll m\phi, \quad (4.6)$$

la ecuación de estado (4.1) se obtiene de la densidad lagrangiana (4.4), como se muestra en [75, 76].

Diversos aspectos de los gases de Chaplygin han sido estudiados en la literatura. En particular, cotas provenientes de observaciones cosmológicas imponen constricciones en el parámetro  $\alpha$ .

En [143] un análisis del efecto Sachs-Wolfe integrado constriñe el factor  $\alpha$  a  $\alpha \lesssim 10^{-3}$ ,  $\alpha \gtrsim 350$ . En [144], haciendo un análisis puramente cinemático, con el uso de observaciones de supernovas [145, 146], oscilaciones acústicas de bariones [147],  $H(z)$  [23, 85] y del parámetro *shift* de la radiación cósmica de fondo [148], se obtienen constricciones  $\alpha = 0.043^{+0.134}_{-0.117}$  ( $2\sigma$ ). Las constricciones más fuertes en el parámetro  $\alpha$  provienen de comparaciones del espectro de potencias con datos de SDSS [149], en [150] encuentran la restricción  $\alpha \lesssim 10^{-5}$ ,  $\alpha \gtrsim 3$ .

Además de su estudio como fluidos unificados, los modelos Chaplygin han sido usados únicamente para describir la energía oscura [151–153].

En este capítulo estudiaremos una extensión del gas generalizado de Chaplygin proveniente del formalismo de geometrotermodinámica [131]. Veremos también como el fluido oscuro, estudiado en el capítulo 3, se obtiene como un caso particular de esta extensión. Una vez estudiados sus aspectos termodinámicos, constreñimos sus parámetros libres usando observaciones recientes de supernovas tipo Ia y anisotropías en la radiación cósmica de fondo.

## 4.1. Aspectos básicos de la geometrotermodinámica

La geometrotermodinámica (GTD) es un formalismo desarrollado durante los últimos años por H. Quevedo y colaboradores para describir sistemas termodinámicos con el uso de geometría diferencial [131]. En esta sección revisaremos los aspectos básicos de este formalismo.

En la termodinámica clásica [154], el método estándar para describir un sistema termodinámico consiste en especificar un conjunto de  $n$  variables extensivas  $E^a$  ( $a = 1, \dots, n$ ), sus correspondientes variables intensivas  $I^a$  y algún potencial termodinámico  $\Phi$ . El entero  $n$  determina el número de grados de libertad del sistema.

Por ejemplo, en el caso del gas ideal con un número fijo de partículas  $N$  tenemos  $n = 2$ ; si escogemos la energía interna como el potencial termodinámico,  $\Phi = U$ , las variables extensivas serán  $E^a = (S, V)$  y las intensivas  $I^a = (T, -P)$ ; de tal manera la temperatura  $T$  es la variable dual a la entropía  $S$  y el negativo de la presión  $P$  es la variable dual al volumen  $V$ . Todas las propiedades del gas ideal en equilibrio termodinámico se encuentran contenidas en la ecuación fundamental  $U(S, V) = (e^S/V)^{2/3}$  y en la primera ley de la termodinámica  $dU = TdS - PdV$ , de donde se extraen las ecuaciones de estado que relacionan la presión y la temperatura con las variables  $S$  y  $V$ . Dado que los estados de equilibrio del gas ideal pueden ser representados por los correspondientes valores de  $S$  y  $V$ , todos los posibles estados de equilibrio forman un espacio  $\mathcal{E}$  cuyos puntos pueden ser representados por las coordenadas  $S$  y  $V$ .

Usando esta notación, la ecuación fundamental de un sistema termodinámico arbitrario puede ser escrita como  $\Phi = \Phi(E^a)$ , la primera ley de la termodinámica como  $d\Phi = I_a dE^a$  con  $I_a = \delta_{ab} I^b$ , y las coordenadas del espacio de equilibrio  $\mathcal{E}$  son  $E^a$ . Esta notación puede ser usada para describir el sistema con cualquier potencial termodinámico. Por ejemplo, para describir el gas ideal en la representación de la entropía, sólo se reescribe la primera ley de la termodinámica como  $dS = (1/T)dU + (P/T)dV$ , de tal manera que las variables termodinámicas son ahora  $\Phi = S$ ,  $E^a = (U, V)$  y  $I^a = (1/T, P/T)$ .

Una propiedad fundamental de la termodinámica clásica es que es invariante ante transformaciones de Legendre, es decir, para la descripción de un sistema termodinámico, por ejemplo un gas ideal, puede ser usada la energía libre de Helmholtz  $F(T, V) = U - TS$ , la entalpía  $H(S, P) = U + PV$  o el potencial de Gibbs  $G(T, P) = U - TS + PV$ . Las transformaciones de Legendre que generan los potenciales  $F$  y  $H$  son llamadas transformaciones parciales, mientras  $G$  es generado por una transformación total.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Después de una transformación de Legendre se mezclan las variables extensivas y las intensivas. Sin embargo, como notación, seguiremos llamando extensivas a las variables que describen el espacio de equilibrio bajo un potencial termodinámico determinado e intensivas a sus variables duales.



La idea principal en GTD consiste en asociar una estructura diferencial al espacio de equilibrio de un sistema termodinámico dado de tal manera que ésta no dependa del potencial termodinámico escogido para su descripción, es decir, debe ser invariante de Legendre. Definamos el espacio fase como una variedad diferencial  $\mathcal{T}$  de dimensión  $2n+1$ , con coordenadas  $Z^A = \{\Phi, E^a, I^a\}$ ,  $A = 0, \dots, 2n$ , equipada con la 1-forma fundamental de Gibbs  $\Theta = d\Phi - I_a dE^a$  [155], y una métrica  $G$  que debe ser invariante ante transformaciones de Legendre. A la estructura  $(\mathcal{T}, \Theta)$  se le llama variedad de contacto y a  $(\mathcal{T}, \Theta, G)$  variedad riemanniana de contacto. A cualquier variedad de contacto riemanniana cuyas componentes sean invariantes de Legendre se le llama variedad fase termodinámica. Es importante mencionar que la métrica  $G = \delta_{AB} dZ^A dZ^B$  no es invariante de Legendre, por lo que la variedad fase termodinámica no es euclidiana, o de Minkowsky. En esta notación, una transformación de Legendre está dada por [156]

$$\{Z^A\} \rightarrow \{\tilde{Z}^A\} = \{\tilde{\Phi}, \tilde{E}^a, \tilde{I}^a\}, \quad (4.7)$$

con

$$\Phi = \tilde{\Phi} - \delta_{kl} \tilde{E}^k \tilde{I}^l, \quad E^i = -\tilde{I}^i, \quad I^i = \tilde{E}^i, \quad E^j = \tilde{E}^j, \quad I^j = \tilde{I}^j. \quad (4.8)$$

Aquí,  $i, k, l \in I$  y  $j \in J$ , donde  $I \cup J$  es cualquier descomposición disjunta del conjunto de índices  $\{1, \dots, n\}$ , en particular los casos  $I = \{1, \dots, n\}$  e  $I = \emptyset$  corresponden a una transformación total de Legendre y a la identidad, respectivamente. Por invarianza de Legendre de un tensor arbitrario  $\mathcal{F}(Z)$  entendemos que  $\mathcal{F}(Z) = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{Z} = Z)$ . Notemos que la 1-forma de Gibbs,  $\Theta$ , es también un invariante de Legendre. Además, si  $\Theta$  satisface la condición  $\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0$  se puede demostrar que si existe una segunda forma diferencial  $\tilde{\Theta}$  que cumpla  $\tilde{\Theta} \wedge (d\tilde{\Theta})^n \neq 0$ , ambas están relacionadas por una transformación de Legendre [155].<sup>2</sup> La métrica [157] (suma sobre todos los índices repetidos)

$$G = (d\Phi - I_a dE^a)^2 + \Lambda(E_a I_a)^{2k+1} dE^a dI^a, \quad (4.9)$$

donde  $k$  es un número entero y  $\Lambda$  es una función real invariante de Legendre, es la métrica más general que se ha encontrado hasta ahora que es invariante ante transformaciones parciales y totales de Legendre.

La subvariedad de estados de equilibrio  $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$  es definida por un mapeo suave  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$ , o en coordenadas  $\varphi : \{E^a\} \mapsto \{\Phi(E^a), E^a, I^a(E^a)\}$ , bajo la condición

$$\varphi^*(\Theta) = 0, \quad (4.10)$$

es decir que

$$d\Phi = I_a dE^a \quad \text{con} \quad I_a = \frac{\partial \Phi}{\partial E^a}, \quad (4.11)$$

<sup>2</sup>La condición  $\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0$  implica que el elemento de volumen en  $\mathcal{T}$  sea diferente de cero.

donde  $\varphi^*$  es el pullback asociado al encaje  $\varphi$ . Estas ecuaciones son equivalentes a la primera ley de la termodinámica y a las condiciones de equilibrio termodinámico. Notemos que en el espacio fase  $\mathcal{T}$ , las transformaciones de Legendre están definidas por las ecuaciones (4.8) y (4.8) y no es hasta la subvariedad de espacios de equilibrio  $\mathcal{E}$ , debido a la condición (4.10), que toman el sentido usado en termodinámica.

La métrica inducida por el mapeo  $\varphi$  en el espacio  $\mathcal{E}$  es

$$g = \varphi^*(G) = \Lambda \left( E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} \delta^{ab} dE^a dE^c \quad (4.12)$$

o en componentes esto es

$$g_{ab} = \frac{\partial Z^A}{\partial E^a} \frac{\partial Z^B}{\partial E^b} G_{AB}. \quad (4.13)$$

Uno de los principales objetivos en GTD es encontrar relaciones entre las propiedades geométricas del espacio de equilibrio  $\mathcal{E}$  y las propiedades termodinámicas del sistema descrito por la ecuación fundamental  $\Phi = \Phi(E^a)$ , que a su vez es determinada por el mapeo  $\varphi$ . En particular, la curvatura intrínseca de  $\mathcal{E}$  puede ser usada como una medida de *interacción termodinámica*: la interpretación que damos a interacción termodinámica está basada en el enfoque estadístico de la termodinámica, en el cual las propiedades del sistema son derivadas de la forma explícita del correspondiente hamiltoniano y la interacción entre las partículas del sistema están descritas por el potencial del hamiltoniano. Por ejemplo, en el caso de cero potencial en el hamiltoniano, decimos que la interacción termodinámica es cero y esperamos que la curvatura de la variedad  $\mathcal{E}$  sea igual a cero. Esta equivalencia entre la curvatura y la interacción termodinámica ha sido mostrada en el caso de sistemas clásicos termodinámicos, como el gas ideal y el gas de Van der Waals [157], y también para agujeros negros en diferentes teorías [158]. Más aún, singularidades en la curvatura de  $\mathcal{E}$  corresponden a transiciones de fase del sistema termodinámico. Otra propiedad de interés de la geometrotermodinámica es que las geodésicas en el espacio de equilibrio  $\epsilon$  representan procesos termodinámicos cuasiestáticos [157].

Para encontrar explícitamente la métrica  $g$  de la variedad de equilibrio  $\mathcal{E}$  se necesita especificar la ecuación fundamental  $\Phi = \Phi(E^a)$ , la cual en principio debe ser obtenida por el experimento. Un ingrediente adicional en el formalismo de GTD nos permite generar ecuaciones de estado. Supongamos que el espacio de equilibrio  $\mathcal{E}$  es una superficie extremal del espacio fase  $\mathcal{T}$ , es decir, la variación del elemento de volumen es cero:

$$\delta_Z \int_{\mathcal{E}} \sqrt{\det(g)} d^n E = 0. \quad (4.14)$$

Dado que  $g$  es la métrica inducida por la métrica  $G$  que depende de las coordenadas  $Z^A$ , se puede mostrar [157] que de esta variación se obtiene el sistema de ecuaciones

diferenciales

$$\square Z^A = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \left( \sqrt{\det(g)} g^{ab} Z_{,a}^A \right)_{,b} + \Gamma_{BC}^A Z_{,b}^B Z_{,c}^C g^{bc} = 0, \quad (4.15)$$

donde  $\square$  es el operador d'Alembertiano de la métrica  $g$ . Por tanto, la variación implica que el potencial termodinámico  $\Phi$  debe satisfacer un conjunto de ecuaciones cuyas soluciones pueden ser escritas como funciones de las variables extensivas  $\Phi = \Phi(E^a)$ , obteniendo ecuaciones fundamentales. En adelante consideraremos el caso  $k = 1$  y  $\Lambda$  una constante. Dos soluciones particulares con  $\Phi = S$  y  $E^a = \{U, V\}$  encontradas en [157] son

$$S = c_1 \ln U + c_2 \ln V, \quad (4.16)$$

y

$$S = S_0 \ln \left( U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta} \right), \quad (4.17)$$

donde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $S_0$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes reales. Dedicaremos las siguientes secciones a estudiar las propiedades físicas de estas ecuaciones fundamentales.

## El gas ideal y los fluidos de la cosmología estándar

La elección  $c_1 = 3/2$  y  $c_2 = 1$  en la ecuación (4.16) obtiene la ecuación fundamental del gas ideal, por lo que el método variacional y el formalismo de GTD reproducen la termodinámica del gas ideal. Usando esta ecuación en la métrica del espacio de equilibrio  $\mathcal{E}$  (4.12) con  $k = 1$  y  $\Lambda$  constante, obtenemos la métrica

$$g = -\Lambda \left( c_1^2 \frac{dU^2}{U^2} + c_2^2 \frac{dV^2}{V^2} \right). \quad (4.18)$$

La curvatura de esta métrica es cero, lo que se puede observar fácilmente bajo la transformación de coordenadas  $\xi = \Lambda^{1/2} c_1 \ln U$  y  $\eta = \Lambda^{1/2} c_2 \ln V$ , en la que la métrica toma la forma euclidiana  $g = -(d\xi^2 + d\eta^2)$ . Como hemos mencionado, en GTD interpretamos la curvatura como una medida de la interacción termodinámica, de tal manera que la métrica plana corresponde a los sistemas más sencillos sin interacción termodinámica. De la ecuación fundamental (4.16) también se obtiene la ecuación de estado

$$P = w\rho, \quad (4.19)$$

con  $w = c_2/c_1$  una constante. Es decir, que se han generado los fluidos barotrópicos usuales de la cosmología estándar. De esta manera podemos modelar las distintas épocas cosmológicas escogiendo las constantes  $c_1$  y  $c_2$  apropiadamente.

Es interesante notar que la capacidad calorífica a volumen constante está dada por  $C_V = c_1$ . Esto abre la posibilidad de considerar a la energía oscura como un sistema con capacidad calorífica negativa, en el caso  $c_2 > 0$ . La mayoría de los sistemas físicos tienen una capacidad calorífica positiva. Sin embargo, muchos sistemas físicos presentan capacidades caloríficas negativas, como es el caso de sistemas autogravitantes como estrellas o cúmulos de estrellas [159]. Más aún, se ha demostrado [160] que los sistemas con capacidad calorífica negativa nunca son extensivos. Concluimos que el fluido de energía oscura puede ser considerado como un sistema físico no interactuante con variables termodinámicas no extensivas.

## 4.2. Descripción unificada de materia y energía oscura

En esta sección estudiaremos la ecuación fundamental (4.17), la cual conduce a un fluido unificado de materia y energía oscura con propiedades cosmológicas atractivas. En cierto rango de parámetros este fluido, se reduce al gas de Chaplygin generalizado y especialmente al fluido oscuro estudiado en el capítulo 3. También es posible obtener los fluidos politrópicos, ampliamente usados en la literatura para modelar sistemas astrofísicos [161]. De acuerdo con la ecuación (4.12), esta ecuación fundamental genera la métrica termodinámica

$$\begin{aligned}
 g = & \frac{\Lambda S_0^2}{(U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta})^3} \left[ (1 + \alpha)^2 U^{2\alpha} [\alpha c V^{1+\beta} - U^{1+\alpha}] dU^2 \right. \\
 & + (1 + \beta)^2 c^2 V^{2\beta} [\beta U^{1+\alpha} - c V^{1+\beta}] dV^2 \\
 & \left. - (1 + \alpha)(1 + \beta) c U^{1+\alpha} V^{1+\beta} [(1 + \alpha) U^{1+\alpha} + (1 + \beta) c V^{1+\beta}] dU dV \right], \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

sobre la variedad de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$ . El escalar de Ricci de la métrica (4.20) es

$$\begin{aligned}
 R = & 8 \left[ 3U^{3+\alpha}V^{5+3\beta}c^3\beta^2 - U^{4\alpha+6}V^2\alpha\beta + 3U^{4+2\alpha}V^{4+2\beta}\alpha^2c^2 \right. \\
 & + 14U^{5+3\alpha}V^{3+\beta}\alpha c + 14U^{3+\alpha}V^{5+3\beta}c^3\beta + 3U^{5+3\alpha}V^{3+\beta}c\alpha^2 \\
 & + 24U^{4+2\alpha}V^{4+2\beta}\alpha c^2 + U^{5+3\alpha}V^{3+\beta}c\beta^2 + 24U^{4+2\alpha}V^{4+2\beta}c^2\beta \\
 & + U^{3+\alpha}V^{5+3\beta}c^3\alpha^2 + 3U^2V^{4\beta+6}c^4\beta + 5U^2V^{4\beta+6}c^4\alpha \\
 & - 6U^{4+2\alpha}V^{4+2\beta}\beta\alpha c^2 - 4U^{3+\alpha}V^{5+3\beta}c^3\alpha\beta - 4U^{5+3\alpha}V^{3+\beta}\alpha c\beta \\
 & + 18U^{5+3\alpha}V^{3+\beta}c\beta + 18U^{3+\alpha}V^{5+3\beta}c^3\alpha + U^2V^{4\beta+6}c^4\beta^2 \\
 & + 3U^{4\alpha+6}V^2\alpha + 5U^{4\alpha+6}V^2\beta + U^{4\alpha+6}V^2\alpha^2 - U^2V^{4\beta+6}c^4\alpha\beta \\
 & \left. + 3U^{4+2\alpha}V^{4+2\beta}c^2\beta^2 \right] \times \left[ U^2V^2S_0^2(2U^{1+\alpha}\alpha cV^{1+\beta}\beta \right. \\
 & - 4\alpha c^2V^{2+2\beta} - 4U^{2+2\alpha}\beta + 2U^{1+\alpha}V^{1+\beta}c - U^{2+2\alpha} - 2U^{2+2\alpha}\alpha \\
 & - 2U^{1+\alpha}V^{1+\beta}\alpha c - V^{2+2\beta}c^2 - 2V^{2+2\beta}c^2\beta - V^{2+2\beta}c^2\beta^2 \\
 & \left. - 2U^{1+\alpha}V^{1+\beta}c\beta - U^{2+2\alpha}\alpha^2) \right]^{-1}, \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

la cual es en general distinta de cero, lo que indica la presencia de interacción termodinámica. Por ejemplo, para el caso particular  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$ , que como veremos corresponde al gas de Chaplygin, ésta se reduce a

$$R = \frac{6U^4V^4c^2 + 4U^6V^2c + 4U^2V^6c^3 + V^8c^4 + U^8}{S_0^2(c^2V^4 + U^4)^2}. \tag{4.22}$$

De la primera ley de la termodinámica, ecuación (4.11), en equilibrio termodinámico se obtienen

$$\frac{1}{T} = \frac{S_0(1+\alpha)U^\alpha}{U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta}} \tag{4.23}$$

y

$$\frac{P}{T} = \frac{S_0c(1+\beta)V^\beta}{U^{1+\alpha} + cV^{1+\beta}}. \tag{4.24}$$

De aquí puede ser escrita una ecuación de estado

$$P(U, V) = \frac{c(1+\beta)V^\beta}{(1+\alpha)U^\alpha}. \tag{4.25}$$

Consideraremos ahora la evolución a gran escala de un universo que contiene el modelo estándar de partículas y el sector oscuro descrito por la geometrotermodinámica; el subíndice *gtd* denotará las variables de este fluido. Podemos escribir la ecuación de estado (4.25) en términos del factor de escala  $a(t)$  y su densidad de energía  $\rho_{gtd}$  como

$$P_{gtd} = -\mathcal{C}a^{-3(\alpha-\beta)}\rho_{gtd}^{-\alpha}, \tag{4.26}$$

donde hemos usado  $V = V_0 a^3$ . También, definimos la constante  $\mathcal{C} = -c(1+\beta)V_0^{\beta-\alpha}/(1+\alpha)$ . De esta ecuación se ve de inmediato que el caso  $\alpha = \beta$  en el intervalo  $0 < \alpha \leq 1$  corresponde al gas de Chaplygin generalizado. Más aún, si  $\alpha = \beta = 0$  recuperamos el fluido oscuro que hemos estudiado en el capítulo anterior. El caso  $\alpha = 1$ , conocido como *gas de Chaplygin variable*, ha sido estudiado en [77, 162] y tiene la ventaja sobre el gas de Chaplygin estándar de poder generar grandes perturbaciones inhomogéneas. También pueden ser obtenidos los fluidos politrópicos si  $\alpha = \beta$  cuando  $\alpha < 0$ .

Es interesante notar de la ecuación (4.21) que la curvatura de la métrica termodinámica del fluido oscuro ( $\alpha = \beta = 0$ ) se hace cero idénticamente, por lo cual éste también corresponde a un fluido sin interacción termodinámica.

La ecuación de continuidad  $\rho'_{gtd} = -3H(\rho_{gtd} + P_{gtd})$  puede integrarse para obtener

$$\rho_{gtd} = \left[ \frac{1+\alpha}{1+\beta} \mathcal{C} a^{-3(\alpha-\beta)} + C_I a^{-3(1+\alpha)} \right]^{1/(1+\alpha)}, \quad (4.27)$$

donde  $C_I$  es una constante de integración. Es conveniente reescribir esta expresión como

$$\rho = \rho_{gtd0} \left( \mathcal{A} a^{-3(\alpha-\beta)} + (1-\mathcal{A}) a^{-3(1+\alpha)} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (4.28)$$

donde hemos definido  $\rho_{gtd0}$  como el valor de la densidad de energía del sector oscuro hoy en día. Las constantes están relacionadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C} + C_I(1+\beta)/(1+\alpha)}, & \rho_{gtd0} &= \left( \frac{1+\alpha}{1+\beta} \mathcal{C} + C_I \right)^{1/(1+\alpha)} \\ \mathcal{C} &= \frac{1+\beta}{1+\alpha} \mathcal{A} \rho_{gtd0}^{1+\alpha}, & C_I &= \rho_{gtd0}^{1+\alpha} (1-\mathcal{A}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para asegurar que la densidad de energía  $\rho_{gtd}$  sea un número real positivo a todos los tiempos es necesario imponer la condición  $\mathcal{A} > 0$ , lo cual a su vez implica la desigualdad  $c(1+\beta)/(1+\alpha) < 0$ . Nótese que para  $1+\alpha < 0$  y  $S_0$  positivo, se sigue que  $(\partial S/\partial U)_V < 0$  obteniendo una capacidad calorífica negativa. Este caso no lo estudiaremos aquí, por lo que de la ecuación (4.17) se obtiene que la entropía del fluido disminuye si el espacio de configuración crece a energía constante, y como consecuencia el fluido unificado obtenido a partir de la geometrotermodinámica tiene una presión negativa que es responsable de acelerar el universo.

El cálculo del parámetro de la ecuación de estado da

$$w_{gtd}(a) = -\frac{1+\beta}{1+\alpha} \frac{1}{1 + (1-\mathcal{A})a^{-3(1+\beta)}/\mathcal{A}}, \quad (4.30)$$

el cual tiene el siguiente comportamiento:

$$\begin{aligned} w_{gtd}(a \rightarrow 0) &\longrightarrow 0, \\ w_{gtd}(a \rightarrow \infty) &\longrightarrow -\frac{1+\beta}{1+\alpha}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$w_{gtd}(a = 1) = -\frac{1+\beta}{1+\alpha} \mathcal{A}. \quad (4.32)$$

La figura 4.1 muestra la evolución de  $w_{gtd}$  como función del corrimiento al rojo  $z$  para diferentes combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$ ;  $\mathcal{A}$  es mantenida fija al valor  $\mathcal{A} = 0.76 \simeq 1/(1 + \Omega_{\text{DM}}/\Omega_{\Lambda})$ .

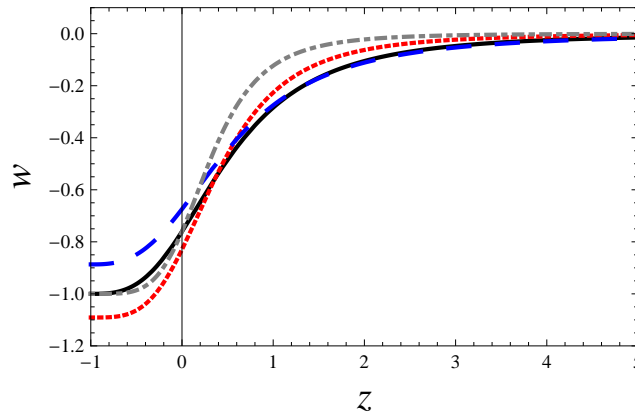


FIGURA 4.1: Evolución del parámetro  $w_{gtd}$  como función del corrimiento al rojo  $z$ . La curva sólida (negra) corresponde a  $\alpha = \beta = 0$  (el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ , o el fluido oscuro); la curva entrecortada (azul) a  $\alpha = 0.06$  y  $\beta = -0.06$ ; la curva punteada (roja) a  $\alpha = 0.1$  y  $\beta = 0.2$ ; la curva punteada y cortada (gris) a  $\alpha = \beta = 0.5$  (un gas de Chaplygin). El parámetro  $\mathcal{A} = 0.76$  está fijo en todos los casos.

Para completar la descripción homogénea e isotrópica resolvemos numéricamente la ecuación de Friedmann y en la figura 4.2 graficamos el factor de escala como función del tiempo cósmico. Para esto, escogemos los mismos valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mathcal{A}$  que en la figura 4.1.

Una cantidad importante para la investigación de las perturbaciones del fluido, pero que puede ser encontrada con puras variables de orden cero, es la velocidad adiabática del sonido (2.31), que en este caso está dada por

$$c_s^2 = -w_{gtd} \frac{\alpha P_{gtd} + \beta \rho_{gtd}}{\rho_{gtd} + P_{gtd}}, \quad (4.33)$$

o, escrita en función del factor de escala,

$$c_s^2 = \frac{1+\beta}{1+\alpha} \frac{1}{1 + (1-\mathcal{A})a^{-3(1+\beta)}/\mathcal{A}} \frac{(\beta-\alpha)/(1+\alpha) + \beta(1-\mathcal{A})a^{-3(1+\beta)}/\mathcal{A}}{(\alpha-\beta)/(1+\alpha) + (1-\mathcal{A})a^{-3(1+\beta)}/\mathcal{A}}. \quad (4.34)$$

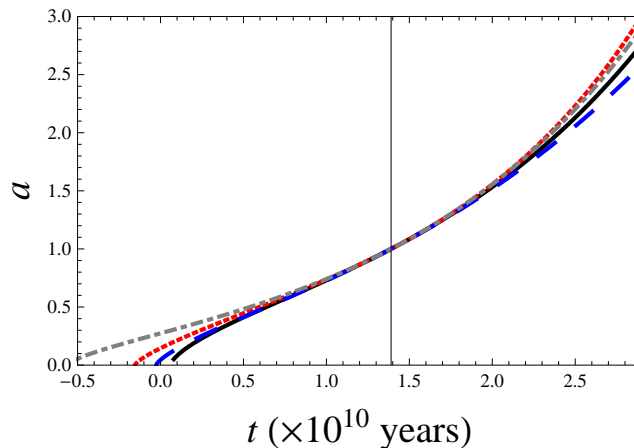


FIGURA 4.2: Evolución del factor de escala  $a$  en función del tiempo cósmico  $t$ . La curva sólida (negra) corresponde a  $\alpha = \beta = 0$  (el modelo  $\Lambda$ CDM, o el fluido oscuro); la curva entrecortada (azul) a  $\alpha = 0.06$  y  $\beta = -0.06$ ; la curva punteada (roja) a  $\alpha = 0.1$  y  $\beta = 0.2$ ; la curva punteada y cortada (gris) a  $\alpha = \beta = 0.5$  (un gas de Chaplygin). Los parámetros  $\mathcal{A} = 0.76$  y  $\Omega_d = 0.96$  están fijos en todos los casos. La línea vertical denota el tiempo presente.

Los límites de esta expresión son  $c_s^2(a \rightarrow 0) = 0$ , y  $c_s^2(a \rightarrow \infty) = -(1 + \beta)/(1 + \alpha)$ , si  $\alpha \neq \beta$ , y  $c_s^2(a \rightarrow \infty) = \alpha$ , si  $\alpha = \beta$ . Este resultado implica una importante diferencia entre el gas generalizado de Chaplygin y la extensión que nosotros encontramos usando geometrotermodinámica. En la cosmología de fondo este hecho no tiene ninguna consecuencia pero, como veremos, es de gran importancia si consideramos perturbaciones. Para no violar la causalidad, requerimos que  $c_s^2 \leq 1$ ; consecuentemente condiciones adicionales pueden ser impuestas a los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

En el caso particular del gas de Chaplygin la velocidad del sonido adiabática está dada por  $c_s^2 = -\alpha w_{gtd}$ , mientras que para el fluido oscuro  $c_s^2 = 0$ , que fue el punto de partida para definirlo en el capítulo 3.

Notamos que si  $\alpha < \beta$  aparece una singularidad en la velocidad del sonido en  $a = [(1 + \alpha)(1 - \mathcal{A})/\mathcal{A}(\beta - \alpha)]^{1/3(1+\beta)}$ ; ésta coincide con el momento en el cual el parámetro de la ecuación de estado cruza la barrera *phantom*, definida por  $w_{gtd} = -1$ .

### 4.3. Perturbaciones al fluido GTD

Para proseguir con el estudio de este fluido unificado, debemos hacer suposiciones adicionales acerca de sus perturbaciones. Consideramos al fluido GTD unificado como un fluido perfecto con perturbaciones adiabáticas. Considerando por el momento tiempos



tardíos, tenemos  $\Phi = \Psi$ , y las ecuaciones de perturbación son entonces

$$\dot{\delta}_{gtd} = -(1 + w_{gtd})(\theta_{gtd} - 3\dot{\Phi}) - 3\mathcal{H}(c_s^2 - w_{gtd})\delta_{gtd} \quad (4.35)$$

y

$$\dot{\theta}_{gtd} = -\mathcal{H}(1 - 3c_s^2)\theta_{gtd} + \frac{c_s^2 k^2 \delta_{gtd}}{1 + w_{gtd}} + k^2 \Phi, \quad (4.36)$$

donde  $w_{gtd}$  y  $c_s^2$  están dadas por las ecuaciones (4.30) y (4.34), respectivamente.

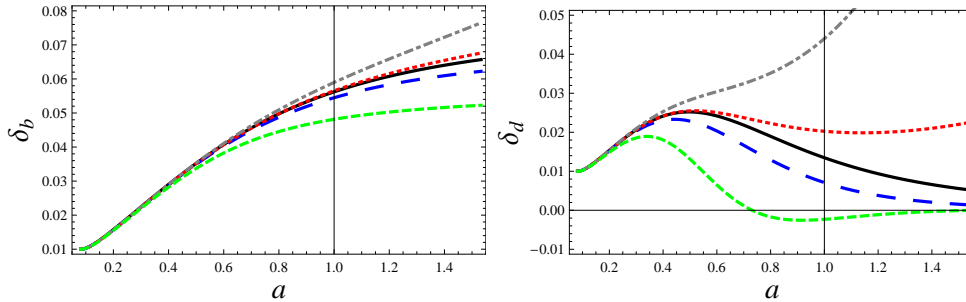


FIGURA 4.3: Evolución de los contrastes de densidad de la materia bariónica (panel izquierdo) y del fluido GTD (panel derecho) como funciones del factor de escala  $a$ . La línea sólida (negra) corresponde a  $\alpha = \beta = 0$  (el fluido oscuro). La línea cortada larga (azul) a  $\alpha = \beta = 0.0001$ . La línea cortada corta (verde) a  $\alpha = \beta = 0.0006$ . La línea entrecortada y punteada (gris) a  $\alpha = 0.0001$  y  $\beta = -0.0001$ . Los parámetros  $\mathcal{A} = 0.76$  y  $\Omega_d = 0.96$  están fijos para todos los casos.

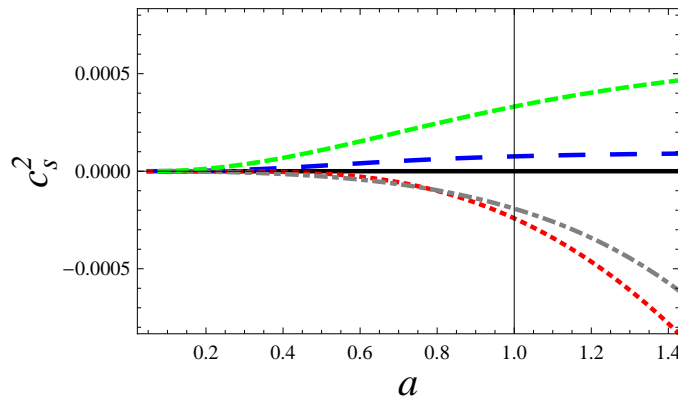


FIGURA 4.4: Evolución de la velocidad del sonido adiabática para los casos considerados en la figura 4.3.

La figura 4.3 muestra la evolución de los contrastes de densidad de los bariones y del fluido unificado,  $\delta_b$  y  $\delta_{gtd}$ , respectivamente, para diferentes valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Notamos que en los casos en que  $\alpha = \beta$ , correspondientes al gas de Chaplygin, los contrastes de densidad decaen más rápido que los casos  $\alpha \neq \beta$ . Esto se debe a que, como se muestra en la figura 4.4, el cuadrado de la velocidad del sonido adiabática es positivo para los casos que son Chaplygin y negativo para los que no lo son. Véase también la discusión que precede a la ecuación (4.34).

Una vez explicado el análisis cualitativo del crecimiento de las perturbaciones de las densidades de energía, estudiamos el conjunto completo de ecuaciones usando el código CAMB [96] y obtenemos el espectro angular de potencias en la radiación cósmica de fondo. En la figura 4.5 lo graficamos para distintos valores de  $\alpha$  y  $\beta$  dejando fijos los demás parámetros del modelo. Notamos que las más grandes desviaciones al modelo  $\Lambda$ CDM se dan a escalas grandes (o multipolos pequeños). Esto es fácil de explicar a partir del parámetro de la ecuación de estado y de la velocidad del sonido adiabática, dado que ambas son esencialmente cero a corrimientos al rojo grandes (mayores que en la época de recombinación), se comportan como materia oscura en estos tiempos, luego a corrimientos al rojo menores, empiezan a diverger de sus valores igual a cero. Consecuentemente, las diferencias se muestran sobre todo a través del efecto Sachs-Wolfe integrado. Este exceso de potencia a bajos multipolos ha sido encontrado en el pasado para el gas de Chaplygin [152], y en general para modelos de unificación de materia y energía oscura [163].

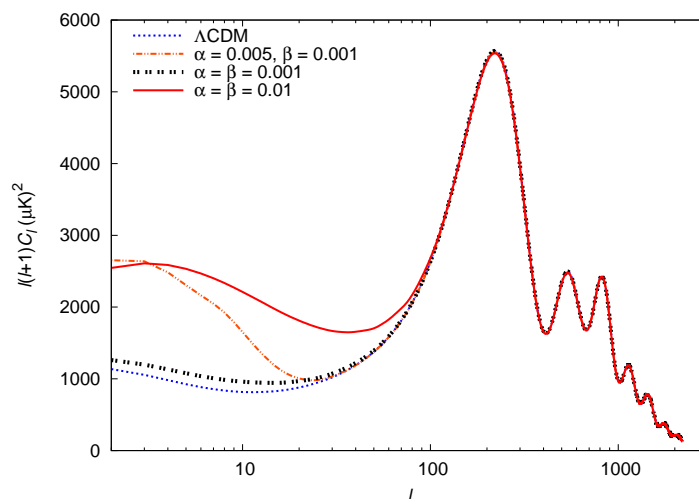


FIGURA 4.5: Espectro angular de potencias en la radiación cósmica de fondo para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . El parámetro  $\mathcal{A} = 0.76$  se mantiene fijo.

Usamos el código CosmoMC [164] para constreñir los parámetros de la teoría mediante un análisis de Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC, por sus siglas en inglés); véase el apéndice B.2. El espacio de parámetros considerado es  $\mathcal{M} = \{\Omega_b h^2, \theta, \tau, n_s, \log A_s, \alpha, \beta, \mathcal{A}\}$ .  $\theta$  es definido como 100 veces el cociente entre el horizonte de sonido y la distancia diametral angular en la época de recombinación,  $\tau$  es la profundidad óptica en reionización,  $n_s$  es el índice espectral de las perturbaciones escalares primordiales y  $A_s$  es su amplitud a una escala base  $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ ; véase la ecuación (2.64). Tomamos probabilidades previas uniformes en los intervalos  $-0.01 < \alpha, \beta < 0.02$  y  $0.2 < \mathcal{A} < 0.99$ .

Para el análisis estadístico escogemos las siguientes observaciones: los resultados de siete años de observaciones de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo por el satélite

WMAP [165] y las observaciones de 557 supernovas del proyecto Supernova Cosmology Project Union 2 [84]. Adicionalmente, imponemos una probabilidad previa gaussiana en la constante de Hubble,  $H_0 = 74 \pm 3.6$  km/s/Mpc, obtenida por el satélite Hubble (Hubble Space Telescope, HST) [23].

En la figura 4.6 graficamos los intervalos de confianza marginalizados a 0.68 y 0.95 en el subespacio  $\alpha - \beta$ . Representamos con una línea recta sólida la región de parámetros correspondiente al gas de Chaplygin generalizado, con una línea recta entrecortada los casos correspondientes a fluidos politrópicos y con un círculo el fluido oscuro.

En la figura 4.7 mostramos las probabilidades posteriores marginalizadas para los ocho parámetros del espacio  $\mathcal{M}$ , y para el parámetro derivado  $\Omega_{gtd}$ . Para hacer comparaciones, graficamos también los resultados obtenidos para el fluido oscuro. Para traducir las cantidades obtenidas al lenguaje del modelo  $\Lambda$ CDM, se usan las ecuaciones  $\mathcal{A} = 1/(1 + \Omega_{DM}/\Omega_\Lambda)$  y  $\Omega_d = \Omega_{DM} + \Omega_\Lambda$ . En el cuadro 4.1 presentamos los resultados a un nivel de confianza de 0.68.

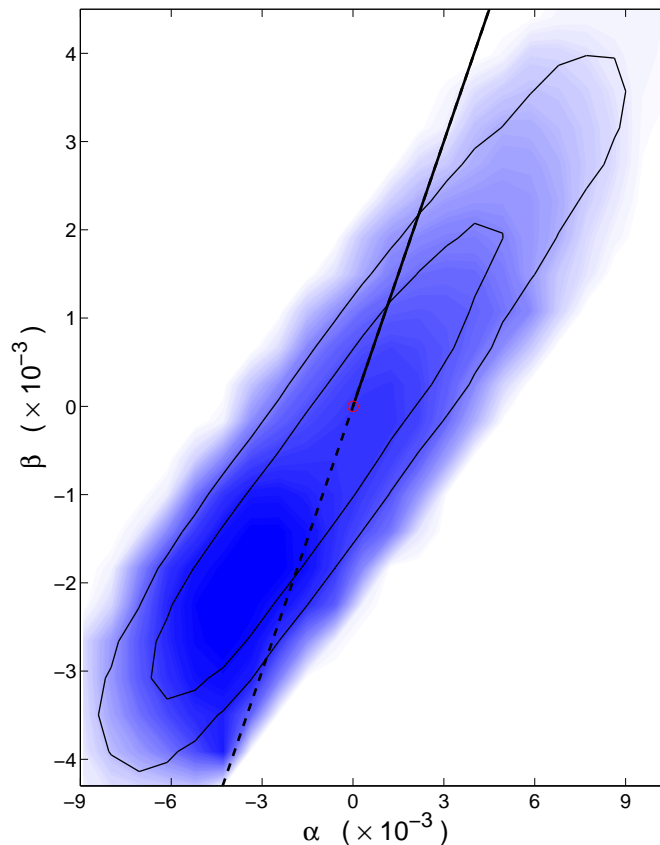


FIGURA 4.6: Contornos de confianza en el subespacio  $\alpha - \beta$  a niveles de confianza de 68% y 95%. La línea sólida corresponde al gas generalizado de Chaplygin, la cortada a los fluidos politrópicos y el círculo al fluido oscuro. El sombreado representa la verosimilitud de los muestreos.

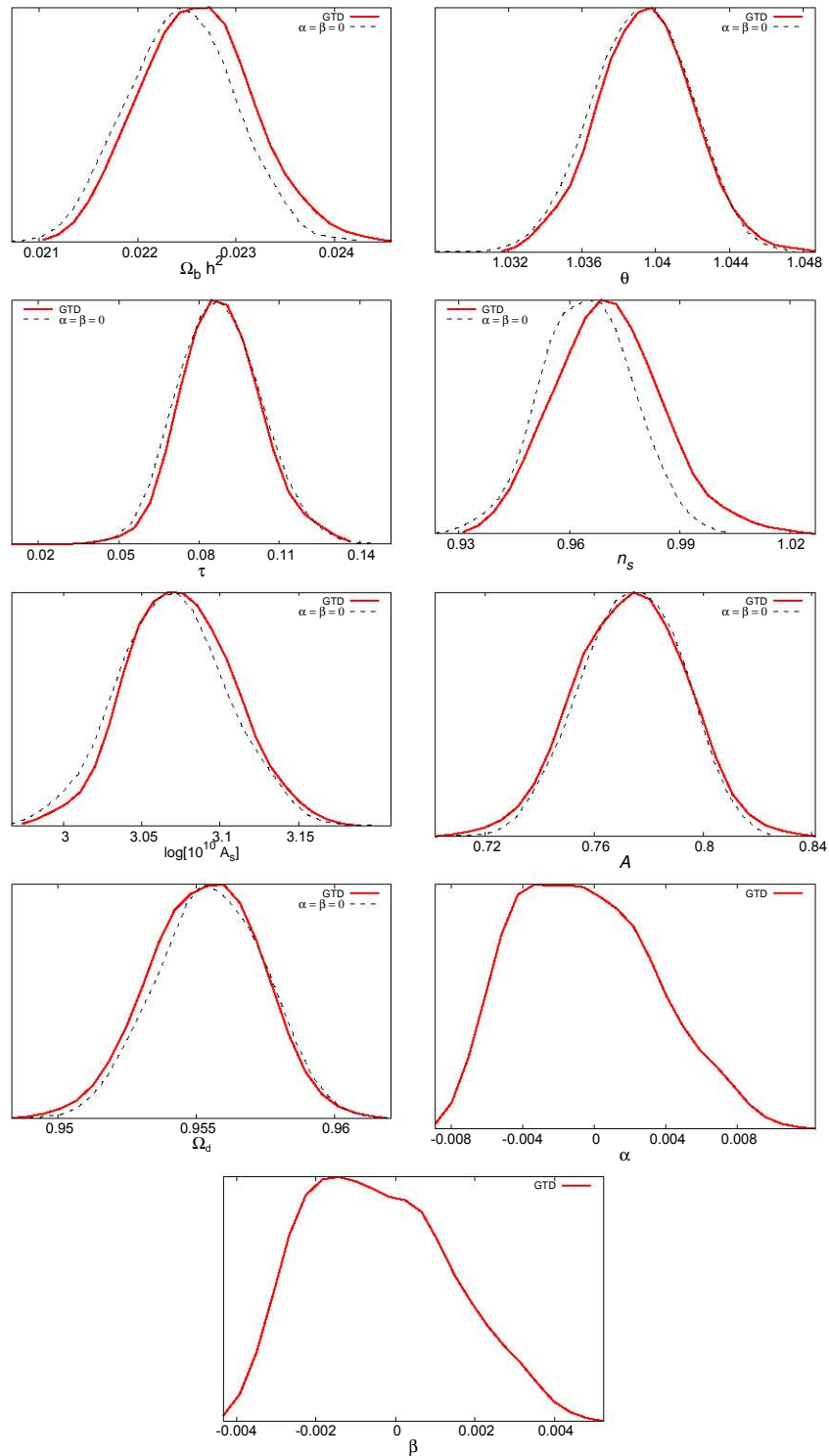


FIGURA 4.7: Probabilidad marginalizada unidimensional para el conjunto completo de parámetros explorados con el método MCMC y el parámetro derivado  $\Omega_{gtd}$ . Los datos usados son las observaciones de siete años de WMAP, la compilación Union 2 de supernovas y el valor de la constante de Hubble inferido por observaciones del telescopio espacial Hubble. Las curvas entrecortadas corresponden al fluido oscuro ( $\alpha = \beta = 0$ ).

TABLA 4.1: Sumario de las constricciones. El panel superior corresponde a los parámetros explorados con el método MCMC. El panel inferior muestra los parámetros derivados. Los datos usados son las observaciones de siete años de WMAP, la compilación Union 2 de supernovas y el valor de la constante de Hubble inferido por observaciones del telescopio espacial Hubble.

Parametro	Mejor ajuste <sup>a</sup>
$10^2 \Omega_b h^2$	$2.231^{+0.163}_{-0.123}$
$\theta$	$1.038^{+0.007}_{-0.005}$
$\tau$	$0.0892^{+0.0038}_{-0.0036}$
$10^3 \alpha$	$-3.21^{+11.92}_{-5.00}$
$10^3 \beta$	$-1.56^{+5.59}_{-2.38}$
$\mathcal{A}$	$0.768^{+0.051}_{-0.047}$
$n_s$	$0.963^{+0.047}_{-0.027}$
$\log[10^{10} A_s]$	$3.075^{+0.086}_{-0.085}$
$\Omega_{gtd}$	$0.955^{+0.005}_{-0.004}$
$t_0$ <sup>b</sup>	$13.84^{+0.23}_{-0.35}$
$H_0$ <sup>c</sup>	$70.41^{+5.84}_{-3.79}$

a. El valor máximo de la función de verosimilitud del muestreo. Los errores muestran un nivel de confianza de 0.68.

b. La edad del universo ( $t_0$ ) está dada en  $10^9$  años.

c.  $H_0$  está dado en km/s/Mpc.

Obtenemos que los parámetros del fluido unificado derivado de la geometrotermodinámica debe tomar valores del orden de  $10^{-3}$  o menores, aunque en principio puedan ser tan grandes como la causalidad lo permita. Estas constricciones se encuentran en concordancia con cotas encontradas para el gas de Chaplygin anteriormente en la literatura; véanse, por ejemplo, [143, 144, 150].

## Capítulo 5

# Interacciones del fluido oscuro con bariones

Interacciones dentro del sector oscuro han sido estudiadas ampliamente en la literatura [166–169], principalmente como un mecanismo para resolver el problema de la coincidencia. Por otro lado, interacciones entre la materia oscura y el modelo estándar de partículas son esperadas y han sido estudiadas en diversas ocasiones. Después de todo, la similitud entre sus abundancias hace presumir un origen común. Más aún, todos los experimentos diseñados para detectar directamente a la materia oscura parten de esta premisa [170, 171]. De hecho, partículas que interactúan con bariones a través de la fuerza nuclear débil, o WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles) han emergido como el paradigma predominante para resolver el problema de la materia faltante [172, 173]; sin embargo, a la fecha no ha sido detectado un solo evento que pruebe convincentemente su existencia. También han surgido otras alternativas, especial atención han tenido los escenarios en que las partículas de materia oscura interactúan a través de la fuerza nuclear fuerte [59, 60, 174–178], tanto con ellas mismas como con bariones [174]. Ha sido mostrado [60] que esta alternativa puede disminuir los problemas de halos picudos y de la sobreabundancia de subestructura que aparece en simulaciones de  $N$  cuerpos basadas en el modelo  $\Lambda$ CDM [57].

En este capítulo, guiados por el principio de conservación del tensor de energía momento y bajo el esquema de relatividad general, desarrollamos una clase de acoplamientos muy general del fluido oscuro con el modelo estándar de partículas, y mostramos que éstas pueden ser comprendidas como interacciones entre materia oscura y bariónica, lo que representa que la degeneración oscura es preservada en cierto grado.

El enfoque que adoptamos es muy cercano y, de hecho, se inspira en el seguido en muchas investigaciones sobre gravedad modificada, las cuales dejan la cosmología de fondo fija,

igual a la obtenida con el modelo  $\Lambda$ CDM, pero difieren de ésta a nivel perturbativo, dejando huellas que puedan ser parametrizadas y comparadas con observaciones presentes y futuras [179–182]. De hecho, si alguno de tales huellas fuese detectada, podría ser consecuencia no de que la teoría de la relatividad general sea incorrecta, sino de la existencia de interacciones en el sector oscuro, o incluso entre el sector oscuro y bariones, como las estudiadas en este capítulo.

## 5.1. Acoplamientos

Las interacciones que consideramos no influyen en la cosmología de fondo homogénea e isotrópica, siendo ésta la misma que en el modelo  $\Lambda$ CDM; esto lo conseguimos al no permitir transferencia de energía entre las distintas componentes cósmicas. Sin embargo, permitiremos transferencias de momento distintas de cero, por lo que la evolución de los fluidos será afectada a nivel perturbativo.

No consideraremos interacciones del fluido oscuro con el electromagnetismo. Nuestra motivación no es únicamente la simplicidad: muchos modelos teóricos presentan acoplamientos conformes, como las teorías camaleónicas [38, 39] (y en general las teorías escalares tensoriales [31–33]), o incluso acoplamientos directos con la traza del tensor de energía momento [183–188] como los que estudiaremos en el capítulo 6. También esto es esperado en los escenarios donde la materia oscura interactúa a través de la fuerza nuclear fuerte [59, 174], para la cual los fotones no tienen carga.

En la sección 3.5 dedujimos las ecuaciones hidrodinámicas para un sistema de componentes oscuras interactuantes. Es inmediato generalizar esos resultados para el acoplamiento entre bariones y el fluido oscuro. Las ecuaciones de conservación para las perturbaciones del fluido oscuro son

$$\dot{\delta}_d = -(1 + w_d)(\theta_d - 3\dot{\Phi}) + 3\mathcal{H}w_d\delta_d + \frac{\delta q_d}{\rho_d}, \quad (5.1)$$

$$\dot{\theta}_d = -\mathcal{H}\theta_d + k^2\Psi - \frac{k^2 f_d}{\rho_d(1 + w_d)}, \quad (5.2)$$

y para las perturbaciones de bariones

$$\dot{\delta}_b = -\theta_b + 3\dot{\Phi} + \frac{\delta q_b}{\rho_b}, \quad (5.3)$$

$$\dot{\theta}_b = -\mathcal{H}\theta_b + k^2\Psi + c_{sb}^2 k^2 \delta_b - \frac{k^2 f_b}{\rho_b(1 + w_b)} + \dots \quad (5.4)$$

Estas ecuaciones deben cumplir con las constricciones (3.56), (3.57) y (3.58). Los puntos suspensivos en la ecuación (5.4) indican que falta escribir las interacciones de los bariones

con el electromagnetismo que se muestran en la ecuación (2.55) y que por brevedad aquí omitimos. Notamos que no hemos considerado un término  $c_{sd}^2 k^2 \delta_d$  en la ecuación (5.2), de acuerdo con la definición del fluido oscuro.

En ausencia de una teoría fundamental para estas interacciones, nosotros decidimos parametrizar el acoplamiento. Antes de hacerlo, hagamos una comparación con el electromagnetismo. Bajo el esquema desarrollado en el capítulo 3, las ecuaciones hidrodinámicas para la dispersión Thomson pueden ser obtenidas, despreciando momentos fotónicos más allá del cuadrupolo, si escogemos

$$\delta q_\gamma = 0 \quad (5.5)$$

y

$$k^2 f_\gamma = -\rho_\gamma(1 + w_\gamma) a x_e n_e \sigma_T c (\theta_b - \theta_\gamma), \quad (5.6)$$

donde hemos reinsertado la velocidad de la luz,  $c = 1$ . Usando esta analogía con el electromagnetismo, escogemos para nuestro acoplamiento los términos de interacción como

$$\delta q_d = 0 \quad (5.7)$$

y

$$f_d = \rho_d(1 + w_d) a n_d \Sigma_I (\theta_b - \theta_d) / k^2, \quad (5.8)$$

donde el parámetro  $\Sigma_I$  tiene unidades de área por velocidad, o de sección eficaz termalizada  $\langle \sigma v \rangle$ , la cual nosotros identificamos con el límite de bajas energías de alguna interacción fundamental desconocida.  $n_d$  es la densidad de número de *partículas* oscuras, el cual hacemos igual a

$$n_d = \frac{\rho_{d0}}{m_p a^3}, \quad (5.9)$$

donde hemos usado la masa del protón,  $m_p = 0.938$  GeV, como una escala de masa arbitraria y  $\rho_{d0}$  es la densidad de energía del fluido oscuro evaluada hoy en día. No hemos introducido un término análogo a una fracción de ionización,  $x_e$ , esto es en empatía con interacciones universales.

Las constricciones  $f_b = -f_d$  y  $\delta q_d = -\delta q_b = 0$  (ver ecuaciones (3.56) y (3.58)) deben considerarse en las ecuaciones para bariones. Dada la relación  $\rho_{DM} = (1 + w_d)\rho_d$ , el término de interacción es proporcional a  $(\theta_d - \theta_b)a^{-2}$ . Por lo tanto, las desviaciones más grandes del modelo estándar de cosmología provienen del universo temprano. En consecuencia, esperamos que éstas resulten muy acotadas por observaciones de la radiación cósmica de fondo, como de hecho lo veremos en la siguiente sección. Hemos modificado el código CAMB [96] para estudiar la interacción propuesta.



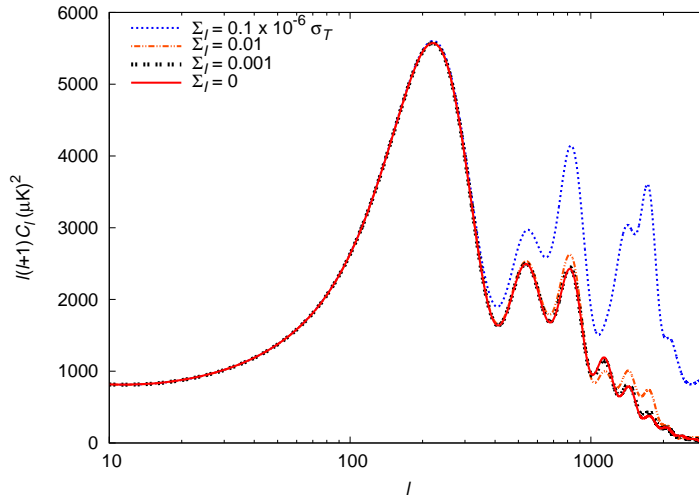


FIGURA 5.1: Espectro de potencias angulares en la radiación cósmica de fondo para diferentes valores del parámetro de interacción  $\Sigma_I$  en unidades de  $10^{-6}\sigma_T$ . Los demás parámetros son dejados fijos.

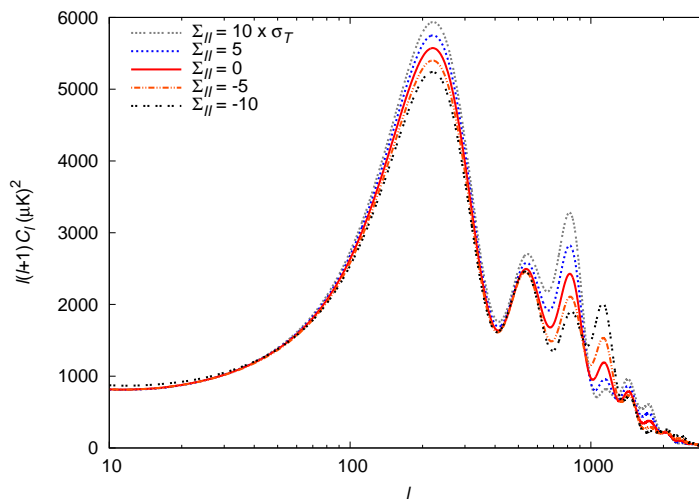


FIGURA 5.2: Espectro de potencias angulares en la radiación cósmica de fondo para diferentes valores del parámetro de interacción  $\Sigma_{II}$  en unidades de  $\sigma_T$ . Los demás parámetros son dejados fijos.

En la figura 5.1 mostramos el espectro angular de potencias de la radiación cósmica de fondo. Mostramos algunas curvas para distintos valores de  $\Sigma_I$ , la cual está expresada en unidades de  $10^{-6}$  veces la sección eficaz de la dispersión Thomson multiplicada por la velocidad de la luz ( $c = 1$ ). Notamos que las más grandes diferencias con el modelo  $\Lambda$ CDM aparecen a multipolos altos, lo cual era esperado debido a que la interacción rápidamente decae y sólo los modos que entraron al horizonte a tiempos tempranos son afectados por ella.

Por otro lado, es bien sabido que las interacciones entre el sector oscuro y bariones están

muy restringidas por experimentos del principio de equivalencia y del sistema solar [40, 41]. Sin embargo, dichas interacciones son predichas por algunos modelos teóricos basados en supersimetrías o teorías de cuerdas [36, 37], lo cual hace necesario algún efecto de apantallamiento para evadir estas constricciones experimentales [38, 39, 189–191]. En las teorías camaleónicas, de las que volveremos a hablar en el siguiente capítulo, el rango de la interacción depende de la densidad de energía del medio en el que las partículas se encuentren, obteniendo fuerzas de largo alcance cuando la densidad del medio es baja y de corto alcance cuando es alta. Inspirados en estas teorías, damos una dependencia a los modos  $k$ , de manera que en la interacción responda a un número de onda efectivo dado por

$$k_{\text{eff}}^2 = k^2 g(\rho), \quad (5.10)$$

donde  $g$  es una función adimensional monótona creciente de la densidad de energía ambiente. Notando que  $\rho$  cae con el factor de escala, escogemos una ley de potencia  $k_{\text{eff}}^2 = k^2/a^n$  con  $n > 0$ . En adelante nos especializamos en el caso  $n = 2$  por los motivos que adelante exponemos. Hacemos entonces la sustitución  $k \rightarrow k_{\text{eff}}$  en la ecuación (5.8) y obtenemos<sup>1</sup>

$$f_d = \rho_d(1 + w_d)\Sigma_{II}\frac{\rho_{d0}}{m_p}(\theta_b - \theta_d)/k^2. \quad (5.11)$$

Ciertamente, también podemos entender estas interacciones con una dependencia de la sección eficaz en la densidad de energía ambiente. En la figura 5.2 mostramos el espectro angular de potencias para diferentes valores del parámetro  $\Sigma_{II}$ . Notamos que, en contraste con la interacción  $\Sigma_I$ , en este caso todas las escalas son afectadas en cierto grado. Esto se debe a que la interacción permanece constante cuando crece el factor de escala y todos los modos son afectados por ella cuando entran al horizonte; ésta es la razón por la que hemos escogido  $n = 2$ .

Es posible tratar ambas parametrizaciones juntas y escoger

$$f_d = \rho_d(1 + w_d)\frac{(\Sigma_I + \Sigma_{II}a^2)\rho_{d0}}{m_p a^2}(\theta_b - \theta_d)/k^2. \quad (5.12)$$

Notemos que al parametrizar las interacciones hemos dejado su descripción covariante y nos enfocamos en encontrar desviaciones al modelo estandar. Esto es similar a lo que se hace en parametrizaciones a gravedad modificada; véase por ejemplo [180].

<sup>1</sup>Las teorías camaleónicas son modificaciones a relatividad general y sus ecuaciones de perturbación son diferentes de las que usamos aquí; está fuera del interés de este trabajo tratar con las ecuaciones correspondientes. Para dicho tratamiento véanse [192, 193].

Las ecuaciones hidrodinámicas para el fluido oscuro son entonces

$$\dot{\delta}_d = -(1 + w_d)(\theta_d - 3\dot{\Phi}) + 3\mathcal{H}w_d\delta_d, \quad (5.13)$$

$$\dot{\theta}_d = -\mathcal{H}\theta_d + k^2\Psi - \frac{(\Sigma_I + \Sigma_{II}a^2)\rho_{d0}}{m_p a^2}(\theta_b - \theta_d), \quad (5.14)$$

y para bariones

$$\dot{\delta}_b = -\theta_b + 3\dot{\Phi}, \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_b &= -\mathcal{H}\theta_b + k^2\Psi + c_{sb}^2 k^2 \delta_b \\ &\quad - \frac{\rho_d}{\rho_b}(1 + w_d) \frac{(\Sigma_I + \Sigma_{II}a^2)\rho_{d0}}{m_p a^2}(\theta_d - \theta_b) + \dots \end{aligned} \quad (5.16)$$

Si uno asume la descomposición del fluido oscuro en materia oscura y constante cosmológica encontrada en el modelo  $\Lambda$ CDM, usando las identidades (3.39), (3.40), (3.63) y (3.64), se sigue que las ecuaciones (5.1) y (5.2) se vuelven:

$$\dot{\delta}_{\text{DM}} = -\theta_{\text{DM}} + 3\dot{\Phi} + \frac{\delta q_{\text{DM}}}{\rho_{\text{DM}}}, \quad (5.17)$$

$$\dot{\theta}_{\text{DM}} = -\mathcal{H}\theta_{\text{DM}} + k^2\Psi - \frac{k^2 f_{\text{DM}}}{\rho_{\text{DM}}}, \quad (5.18)$$

con los términos de transferencia de energía y momento relacionados por

$$\delta q_{\text{DM}} = \delta q_d \quad \text{y} \quad f_{\text{DM}} = f_d. \quad (5.19)$$

Por lo tanto, aunque la degeneración con el modelo  $\Lambda$ CDM ha sido rota a primer orden debido a las interacciones, existen degeneraciones con otros modelos, en este caso con el modelo  $\Lambda$ CDM con las mismas interacciones. Esto significa que la clase de interacciones dada por las ecuaciones (5.1) y (5.2) no ayuda a elucidar la descomposición real del fluido oscuro, si es que ésta existe. Esto también implica que podemos tratar las interacciones arriba descritas como acoplamientos entre materia oscura y materia bariónica. Esto lo haremos así en el tratamiento numérico. Al final, si uno lo desea, puede moverse entre los resultados de ambos modelos usando las ecuaciones (3.24) y (3.25).

## 5.2. Comparación con observaciones

En esta sección constreñimos las interacciones expuestas en la sección anterior. Para esto, realizamos un análisis MCMC (véase apéndice B.2) sobre el espacio de nueve parámetros (Modelo A)

$$A = \{\Omega_b h^2, \Omega_{\text{DM}} h^2, \theta, \tau, n_s, \log A_s, A_{sz}, \Sigma_I, \Sigma_{II}\}, \quad (5.20)$$

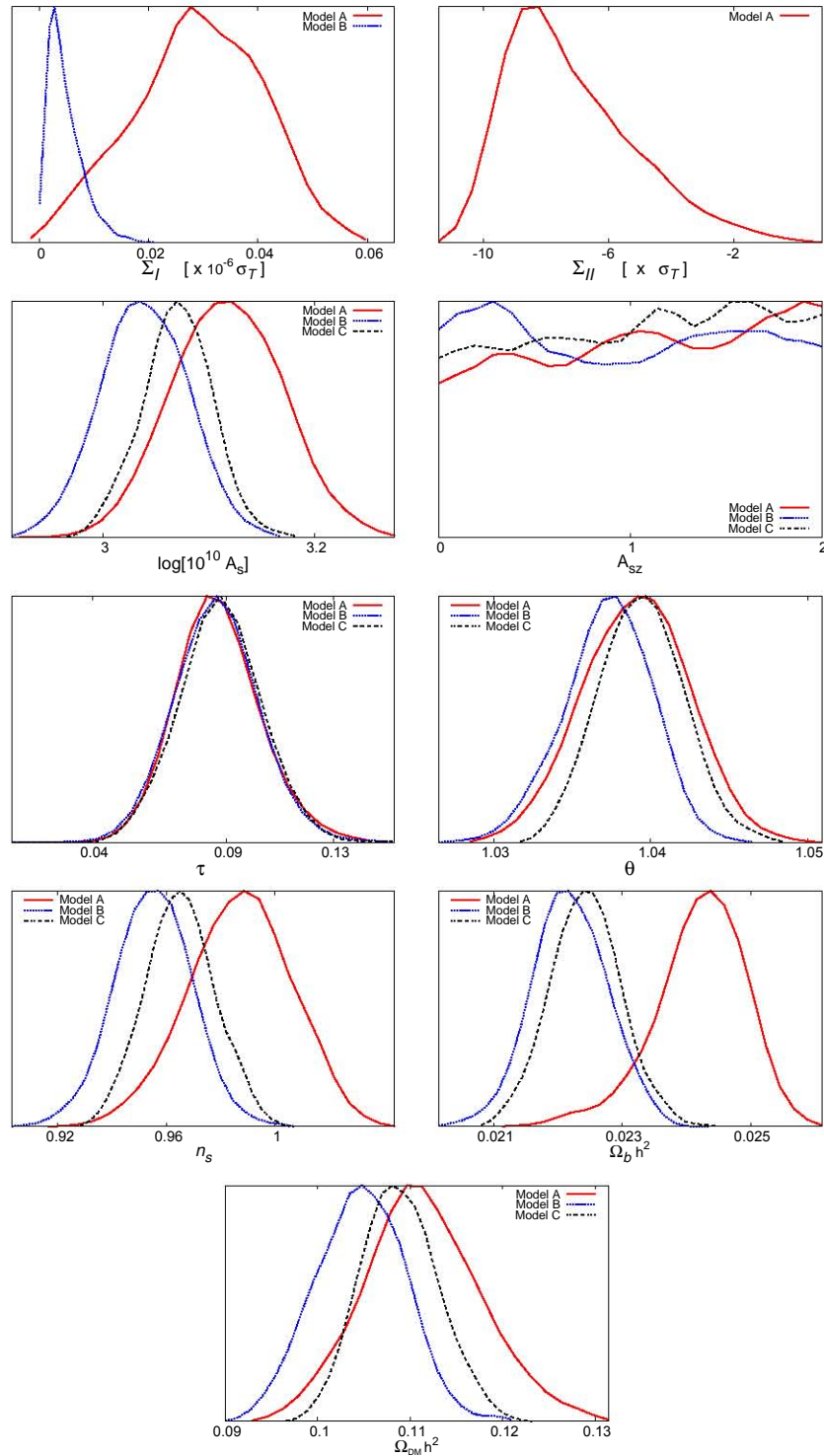


FIGURA 5.3: Probabilidad posterior marginalizada para el conjunto completo de parámetros. Las líneas sólidas (rojas) corresponden al modelo A, las líneas punteadas (azules) al modelo B, y las punteadas dobles (negras) al modelo C. Los datos usados son los resultados de siete años de observaciones de WMAP, la compilación de observaciones de supernovas Union 2 y una probabilidad previa en la constante de Hubble obtenida por el telescopio Hubble (HST).

TABLA 5.1: Sumario de las constricciones. El panel superior contiene los parámetros explorados con el método MCMC para cada uno de los tres modelos. El panel inferior muestra parámetros derivados. Los datos usados son las observaciones de siete años de WMAP, supernovas de la compilación Union 2 y observaciones de HST. Notemos que el modelo C corresponde al modelo  $\Lambda$ CDM.

Parameter	Modelo A <sup>a</sup>	Modelo B <sup>a</sup>	Modelo C <sup>a</sup>
$10^2 \Omega_b h^2$	$2.420^{+0.066}_{-0.064}$	$2.219^{+0.056}_{-0.056}$	$2.243^{+0.053}_{-0.053}$
$\Omega_c h^2$	$0.1114^{+0.0061}_{-0.0060}$	$0.1046^{+0.0047}_{-0.0049}$	$0.1089^{+0.0041}_{-0.0041}$
$\theta$	$1.039^{+0.003}_{-0.003}$	$1.037^{+0.003}_{-0.003}$	$1.039^{+0.003}_{-0.003}$
$\tau$	$0.08712^{+0.00565}_{-0.00721}$	$0.08646^{+0.0061}_{-0.0067}$	$0.08797^{+0.00618}_{-0.00627}$
$10^8 \Sigma_I$ <sup>b</sup>	$2.910^{+1.169}_{-1.229}$	$0.4845^{+0.2980}_{-0.3824}$	—
$\Sigma_{II}$ <sup>b</sup>	$-7.169^{+2.218}_{-1.959}$	—	—
$n_s$	$0.9869^{+0.0192}_{-0.0184}$	$0.9551^{+0.0135}_{-0.0137}$	$0.9651^{+0.0123}_{-0.0124}$
$\log[10^{10} A_s]$	$3.118^{+0.051}_{-0.051}$	$3.039^{+0.040}_{-0.040}$	$3.070^{+0.031}_{-0.033}$
$A_{SZ}$ <sup>c</sup>	$1.054 \pm 0.578$	$0.9544 \pm 0.5911$	$1.040 \pm 0.574$
$\Omega_d$	$0.952^{+0.033}_{-0.033}$	$0.956^{+0.031}_{-0.030}$	$0.955^{+0.027}_{-0.027}$
$\mathcal{K}$	$0.296^{+0.042}_{-0.041}$	$0.270^{+0.034}_{-0.036}$	$0.291^{+0.034}_{-0.032}$
$t_0$	$13.64^{+0.12}_{-0.13}$ Gyr	$13.85^{+0.11}_{-0.12}$ Gyr	$13.79^{+0.12}_{-0.11}$ Gyr
$\Omega_\Lambda$	$0.734^{+0.024}_{-0.024}$	$0.754^{+0.022}_{-0.021}$	$0.740^{+0.019}_{-0.020}$
$H_0$ <sup>d</sup>	$71.55^{+1.86}_{-1.91}$	$71.95^{+2.09}_{-1.96}$	$71.14^{+1.71}_{-1.85}$

## Notas.

- a. Los valores medios de la distribución posterior de cada parámetro. Los errores muestran el intervalo de confianza a 68%.  
b.  $\Sigma_I$  Y  $\Sigma_{II}$  están dadas en unidades de la sección eficaz de la dispersión Thomson multiplicada por la velocidad de la luz,  $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$  y  $c = 1$ .  
c. Los errores mostrados en  $A_{SZ}$  son las desviaciones estándar de las distribuciones.  
d.  $H_0$  está dado en km/s/Mpc.

usando el código CosmoMC [164] y donde CAMB fue modificado de acuerdo a las sección anterior.  $\theta$  es definido como 100 veces la razón entre el horizonte de sonido y la distancia angular en la época de recombinación,  $\tau$  es la profundidad óptica en la época de reionización,  $n_s$  es el índice espectral del espectro de potencias primordial y  $A_s$  es su amplitud a una escala pivote de  $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ , véase la ecuación (2.64).

Hemos impuesto probabilidades previas planas para los dos parámetros de interacción:  $0 < \Sigma_I < 10^{-7} \times \sigma_T$  y  $-11 \times \sigma_T < \Sigma_{II} < 10 \times \sigma_T$ . Los datos de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo son obtenidos de los siete años de observación del satélite WMAP [165]. Para el análisis conjunto usamos también las medidas de 240 estrellas ce-feidas variables del telescopio espacial Hubble [23], que imponen una probabilidad previa en la constante de Hubble de  $H_0 = 74 \pm 3.6 \text{ km/s/Mpc}$ , y los datos de la compilación Union 2 de 557 supernovas tipo Ia por el grupo Supernova Cosmology Project [84].

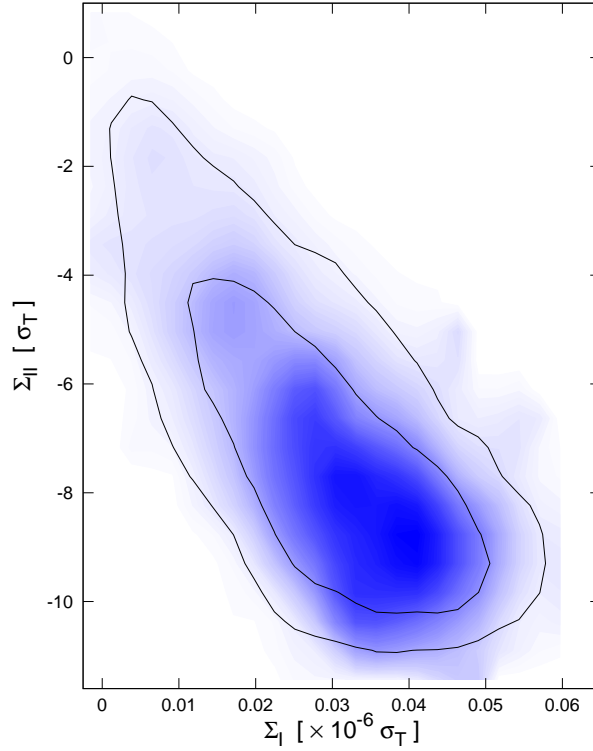


FIGURA 5.4: Curvas de confianza posteriores y marginalizadas para  $\Sigma_I$  contra  $\Sigma_{II}$  a niveles de confianza de 68 % y 95 %. Los sombreados muestran la verosimilitud proyectada de los muestreos.

Estudiamos otros dos modelos: modelo B, el cual sólo considera la interacción  $\Sigma_I$ ; este es un espacio de ocho parámetros,

$$B = \{\Omega_b h^2, \Omega_{\text{DM}} h^2, \theta, \tau, n_s, \log A_s, A_{sz}, \Sigma_I\}; \quad (5.21)$$

y modelo C, que no considera ninguna interacción, un espacio de siete parámetros

$$C = \{\Omega_b h^2, \Omega_{\text{DM}} h^2, \theta, \tau, n_s, \log A_s, A_{sz}\}, \quad (5.22)$$

correspondiente al modelo estándar  $\Lambda$ CDM model.

Los resultados de las probabilidades posteriores unidimensionales marginalizadas se muestran en la figura 5.3 y en la tabla 5.1. En la figura 5.4 mostramos los contornos de confianza marginalizados en el subespacio  $\Sigma_I - \Sigma_{II}$  del modelo A a niveles de confianza de 0.68 y 0.95. Se observa una alta degeneración entre ambos parámetros: mientras  $\Sigma_{II}$  toma valores cercanos a cero,  $\Sigma_I$  también lo hace. Es interesante notar que

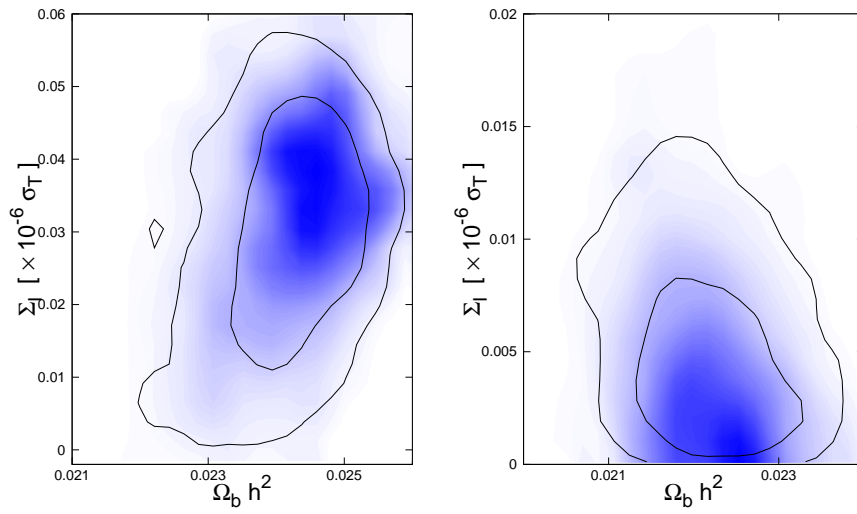


FIGURA 5.5: Curvas de confianza posteriores y marginalizadas para  $\Omega_b h^2$  contra  $\Sigma_I$  a niveles de confianza de 68% y 95%. Panel izquierdo: considera ambas interacciones (modelo A). Panel derecho: considera únicamente la interacción  $\Sigma_I$  (modelo B). Los sombreados muestran la verosimilitud proyectada de los muestreos.

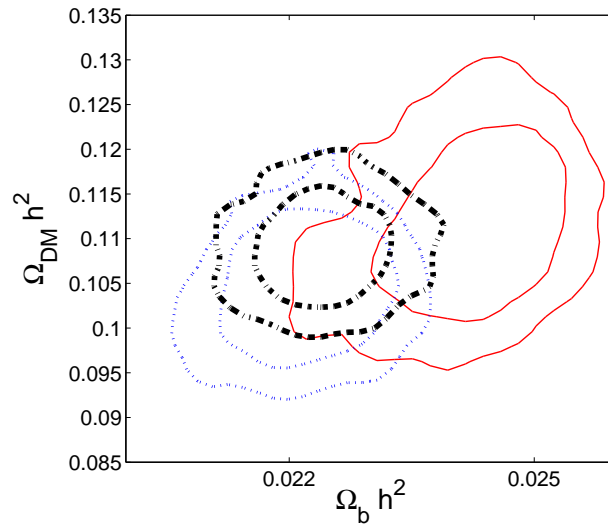


FIGURA 5.6: Curvas de confianza posteriores y marginalizadas para  $\Omega_b h^2$  contra  $\Omega_{DM} h^2$  a niveles de confianza de 68% y 95%. Las curvas sólidas (rojas) son para el modelo A, las curvas entrecortadas punteadas (azules) para el modelo B, las curvas angostas entrecortadas (negras) para el modelo C.

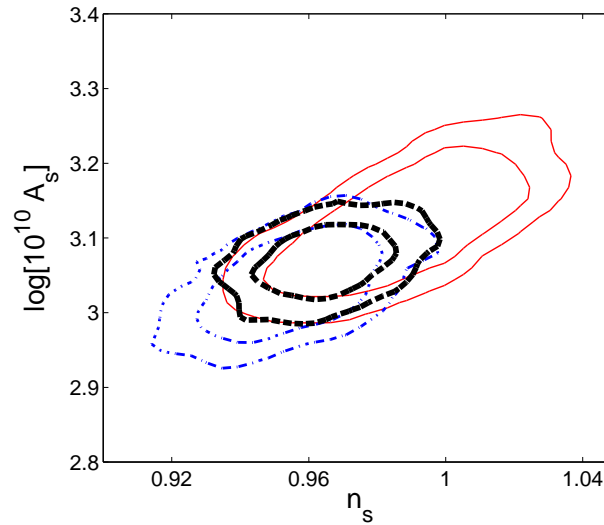


FIGURA 5.7: Curvas de confianza posteriores y marginalizadas para  $n_s$  contra  $A_s$  a niveles de confianza de 68 % y 95 %. Las curvas sólidas (rojas) son para el modelo A, las curvas entrecortadas punteadas (azules) para el modelo B, las curvas angostas entrecortadas (negras) para el modelo C.

valores distintos de cero para las interacciones (si son introducidas) son consistentes y favorecidos por los datos considerados a un nivel de confianza de 0.95.

Notamos también que la adición de las interacciones  $\Sigma_I$  y  $\Sigma_{II}$  a la teoría produce considerables diferencias entre la estimaciones de parámetros para los modelos A y C. Esto es más evidente para la densidad de energía de la  $\Omega_b h^2$ , como puede ser observado en las figuras 5.3, 5.5 y 5.6 o leído directamente de la tabla 5.1. Por este motivo estudiamos el modelo B, que considera únicamente la interacción  $\Sigma_I$ . En este caso las tensiones entre los parámetros son disminuidas. Estas discrepancias también son evidentes para los parámetros del espectro primordial de potencias  $A_s$  y  $n_s$ , las cuales pueden ser observadas en las figuras 5.3 y 5.7. Sin embargo, éstas no son aminoradas si se considera el modelo B.

En lugar de usar la masa del protón como la escala en las interacciones, podemos usar cualquier escala arbitraria asociada con la *masa* de las partículas materia oscura o del fluido oscuro,  $m_d$ . Obtenemos las siguientes constricciones a un nivel de confianza de 0.68 en la razón  $\Sigma/m_d$  (usamos el valor de la velocidad de la luz  $c = 2.998 \times 10^{10}$  cm/s):

Para el caso en que consideramos ambas interacciones (modelo A):

$$3.58 \times 10^{-22} < \frac{\Sigma_I}{m_d} < 8.68 \times 10^{-22} \frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{GeV}/c^2} \quad (5.23)$$



y

$$-1.94 \times 10^{-13} < \frac{\Sigma_{II}}{m_d} < -1.05 \times 10^{-13} \frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{GeV}/c^2}. \quad (5.24)$$

Mientras que para el modelo B:

$$0.22 \times 10^{-22} < \frac{\Sigma_I}{m_d} < 1.66 \times 10^{-22} \frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{GeV}/c^2}. \quad (5.25)$$

Hemos obtenido cotas en la masa  $m_d$  y en la sección eficaz termalizada  $\Sigma$  únicamente en la combinación  $\Sigma/m_d$ . Es posible encontrar constricciones por separado, incluso para la sección eficaz y la velocidad térmica de las partículas, obteniendo constricciones en el espacio  $\sigma - m_d$ . Sin embargo, para hacerlo debemos permitir  $c_s^2 \neq 0$  al menos a energías muy altas, y, más aún, debemos hacer suposiciones adicionales acerca de la naturaleza de la materia oscura (o del fluido oscuro). En el escenario de interacciones nucleares fuertes aparece una interacción similar a  $\Sigma_I$ ; justamente las suposiciones arriba descritas son usadas para imponer cotas en el plano  $\sigma - m_d$  en [176].

Notemos que la sección eficaz termalizada *efectiva* para la interacción  $II$  es  $a^2 \Sigma_{II}$ , y ésta es igual a  $\Sigma_I$  alrededor de un corrimiento al rojo  $z \sim 10^5$ . Antes de esta época la interacción  $I$  dominaba, y después, la interacción  $II$  comenzó a ser predominante. Justo antes de la recombinación, en  $z \sim 1100$ , las interacciones  $I$  y  $II$  eran más pequeñas en intensidad que la interacción Thomson por alrededor de nueve y cinco órdenes de magnitud, respectivamente. Después de esa época la fracción de ionización  $x_e$  cayó exponencialmente y la dispersión Thomson se volvió subdominante muy rápidamente.

En la figura 5.8 graficamos el espectro de potencias angulares de la radiación cósmica de fondo para los valores medios estimados por el análisis MCMC y reportados en la tabla 5.1. La diferencia que reportamos está dada por  $\Delta = l(l+1)(C_l^{\Lambda\text{CDM}} - C_l)$ . Las curvas predichas por los tres modelos se encuentran dentro de las barras de error de las medidas promedio de siete años de observaciones de WMAP. Sin embargo, a más grandes multipolos ( $l > 1000$ ) los tres modelos empiezan a tener discrepancias notables. Las mayores aparecen en la región  $1000 < l < 2000$ , justo dentro de la ventana en que se espera que el espectro primordial de potencias sea medido con mayor precisión ( $1000 < l < 3000$ ), lo que también explica el comportamiento de la figura 5.7. A escalas menores,  $l > 3000$ , anisotropías secundarias dominan el espectro de potencias, especialmente las obtenidas debido al efecto Sunyaev-Zel'dovich [194]. Multipolos  $l > 1000$  serán medidos por la misión PLANCK [195], así que esperamos tener mayores constricciones en el futuro cercano.

Hasta ahora no hemos considerado el efecto que las interacciones  $I$  y  $II$  puedan tener sobre el proceso de nucleosíntesis. Esto es debido nuestro modelo fenomenológico sólo

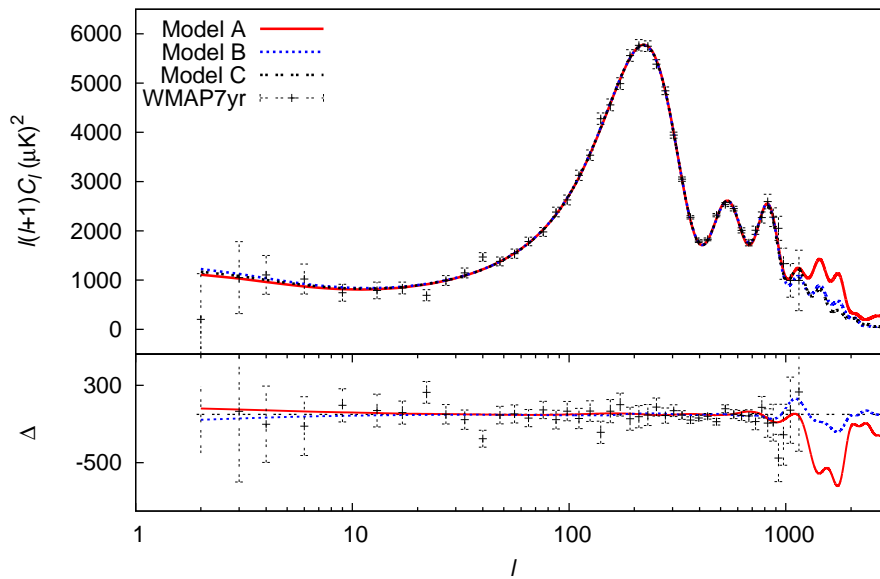


FIGURA 5.8: Espectro angular de potencias de la radiación cósmica de fondo para los valores estimados con el análisis MCMC por el código CosmoMC para los tres modelos. La diferencia reportada es  $\Delta = l(l+1)(C_l^{\Lambda\text{CDM}} - C_l)$ .

contiene secciones eficaces  $\Sigma_I$  y  $\Sigma_{II}$ , cuyas intensidades son al menos 9 órdenes de magnitud más débiles que la dispersión Thomson en esa época, y más importante aún, son elásticas ( $q = \delta q = 0$ ) por lo que no aniquilan bariones y no alteran la razón barión-fotón. Por estos motivos, esperamos que los efectos sobre el proceso de nucleosíntesis sean bastante débiles.

### 5.3. Estructura a gran escala

En esta sección constreñiremos las interacciones  $\Sigma_I$  y  $\Sigma_{II}$  usando, además de las observaciones ya empleadas (que aquí llamaremos Set 1: Union 2, WMAP siete años, HST), observaciones de la distribución de materia bariónica a grandes escalas compiladas en el catálogo DR7 LRG del proyecto SDSS, que contiene 110576 galaxias luminosas rojas entre los corrimientos al rojo  $0.02 \leq z \leq 0.5$  agrupados en bandas de tamaño  $\Delta z = 0.005$  [196]. La razón por la cual realizamos las constricciones por separado es que este método no es tan confiable debido al sesgo galáctico (*galaxy bias*) y a que es calibrado usando simulaciones numéricas de formación de estructura con el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ .

La estadística principal para el análisis de la distribución espacial de galaxias es la función de correlación de dos puntos

$$\xi(r) = \langle \delta(\vec{x} + \vec{r})\delta(\vec{x}) \rangle, \quad (5.26)$$

donde hemos asumido homogeneidad e isotropía estadística en la muestra, por lo que la función de correlación sólo depende de la magnitud de la separación  $r = |\vec{r}|$ . Supongamos que la muestra en la región de interés tiene una densidad de número promedio de galaxias  $\bar{n}$ ; la función de correlación de dos puntos  $\xi(r)$  determina la probabilidad  $dP$  de encontrar simultáneamente dos objetos en la muestra a una distancia  $r$  el uno del otro dentro de dos elementos de volumen  $\delta V_1$  y  $\delta V_2$  a través de la ecuación

$$dP = \bar{n}^2(1 + \xi(r))\delta V_1\delta V_2. \quad (5.27)$$

Es común trabajar en el espacio de Fourier. Es fácil ver, asumiendo isotropía espacial, que de la función de correlación de dos puntos se obtiene el espectro de potencias

$$\langle \delta(\vec{k})\delta^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3\delta_D(\vec{k} - \vec{k}')P(k), \quad (5.28)$$

donde  $\delta(\vec{k})$  es la transformada de Fourier de  $\delta(\vec{x})$  y

$$P(k) = 4\pi \int dr r^2 \xi(r) \frac{\sin(kr)}{kr}. \quad (5.29)$$

La relación inversa es

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 P(k) \frac{\sin(kr)}{kr}. \quad (5.30)$$

Es decir,  $P(k)$  es la transformada de Fourier de  $\xi(r)$ .

### 5.3.1. El problema del sesgo galáctico

El sesgo galáctico [197] es la diferencia entre las distribuciones de materia (o del fluido oscuro en el caso que aquí estudiamos) y la distribución de materia bariónica contenida en las galaxias.

A grandes escalas el sesgo  $b$  está determinado por un sesgo lineal estocástico

$$b = \sqrt{\frac{\langle \delta_{galaxies}^2 \rangle}{\langle \delta_{matter}^2 \rangle}}. \quad (5.31)$$

Esto es debido a que las perturbaciones de modos con longitud de onda grandes sólo interactúan entre ellos gravitacionalmente y de manera lineal. A pequeñas escalas,  $k >$

$0.2h \text{ Mpc}^{-1}$ , además del carácter no lineal o cuasi-lineal de las perturbaciones, efectos no disipativos como el enfriamiento radiativo del gas intergaláctico caliente, los cuales no afectan a la materia oscura, cuestionan el carácter lineal del sesgo galáctico.

Sin embargo, generalmente el espectro de potencias de la distribución de galaxias es relacionado con el de materia por la ecuación

$$P_{galaxies}(\vec{k}) = (b + f(z)\mu_k^2)P_{matter}(\vec{k}), \quad (5.32)$$

donde  $\mu_k = \hat{n} \cdot \hat{k}$  es el coseno del ángulo entre la línea de visión y el número de onda de la perturbación, y  $f(z) = d(\ln \delta)/d(\ln a)$  es llamado factor de crecimiento [198]. En el modelo  $\Lambda$ CDM,  $f \simeq \Omega_b^\gamma$  con  $\gamma \simeq 0.55$  [199]. El término  $f(z)\mu_k^2$  se debe a efectos producidos por las velocidades peculiares de las galaxias, llamados *redshift space distortions* [200].

### 5.3.2. Comparaciones con observaciones

Las observaciones recientes de catálogos de galaxias se encuentran en el límite de perturbaciones lineales. Particularmente, el catálogo DR7 LRG consta de 47 bandas de observación igualmente espaciadas en escala logarítmica en el intervalo  $0.02 < k < 0.2h \text{ Mpc}^{-1}$ . Por lo anterior, usaremos el método lineal expresado en la ecuación (5.32) y particularmente la técnica de ajustes empleada en [196], que incluye efectos no lineales. Es importante recalcar que esta técnica asume que es válido el modelo  $\Lambda$ CDM y usa catálogos producidos por simulaciones para comparar con las observaciones y ajustar sus parámetros libres. Al final, el parámetro de sesgo  $b$ , que se asume constante, es marginalizado. El método resulta ser entonces dependiente del modelo y de la parametrización para el sesgo galáctico.

Comparamos los modelos A, B y C descritos en la sección 5.2 con observaciones de WMAP siete años, HST, Union 2 y el catálogo DR7 LRG del SDSS. Para esto usamos el código CosmoMC y el módulo MPK [196]. En el cuadro 5.2 mostramos el mejor ajuste para cada uno de los modelos, dado por el máximo de la función de verosimilitud; reportamos los errores a un nivel de confianza de 0.68.

Es esperado que el valor de la constante de Hubble sea subestimado, aunque consistente, en este ajuste en comparación con otros métodos. Por ejemplo, en [196] obtienen  $H_0 = 69.4 \pm 1.6 \text{ km/s/Mpc}$  para el modelo  $\Lambda$ CDM, combinando las observaciones de WMAP con las de SDSS DR7 LRG. Este resultado es consistente con el encontrado en [23],  $H_0 = 74 \pm 3.6 \text{ km/s/Mpc}$  a  $1\sigma$ , al igual que los resultados que nosotros encontramos para los tres modelos explorados; véase la tabla 5.2.

TABLA 5.2: Sumario de constricciones. El panel superior contiene los parámetros explorados con el método MCMC para cada uno de los tres modelos. El panel inferior muestra parámetros derivados. Los datos usados son las observaciones de siete años de WMAP, la compilación Union 2, observaciones de HST y el catálogo de galaxias luminosas rojas DR7 LRG.

Parámetro	Modelo A <sup>a</sup>	Modelo B <sup>a</sup>	Modelo C <sup>a</sup>
$10^2\Omega_b h^2$	$2.247^{+0.047}_{-0.047}$	$2.264^{+0.057}_{-0.054}$	$2.270^{+0.054}_{-0.054}$
$\Omega_c h^2$	$0.1201^{+0.0041}_{-0.0040}$	$0.1147^{+0.0030}_{-0.0030}$	$0.1133^{+0.0031}_{-0.0031}$
$\theta$	$1.043^{+0.003}_{-0.003}$	$1.040^{+0.002}_{-0.002}$	$1.040^{+0.003}_{-0.003}$
$\tau$	$0.08733^{+0.00580}_{-0.00680}$	$0.08879^{+0.0055}_{-0.0068}$	$0.08797^{+0.00618}_{-0.00627}$
$10^8\Sigma_I^b$	$0.344^{+0.205}_{-0.244}$	$0.0894^{+0.0493}_{-0.0400}$	—
$\Sigma_{II}^b$	$-3.133^{+1.448}_{-1.402}$	—	—
$n_s$	$0.9813^{+0.0156}_{-0.0159}$	$0.9658^{+0.0130}_{-0.0134}$	$0.9686^{+0.0125}_{-0.0124}$
$\log[10^{10}A_s]$	$3.134^{+0.040}_{-0.041}$	$3.095^{+0.030}_{-0.032}$	$3.089^{+0.032}_{-0.033}$
$A_{SZ}^c$	$1.091 \pm 0.563$	$0.872 \pm 0.562$	$0.927 \pm 0.564$
$\Omega_d$	$0.951^{+0.023}_{-0.023}$	$0.952^{+0.021}_{-0.021}$	$0.953^{+0.019}_{-0.020}$
$\mathcal{K}$	$0.373^{+0.038}_{-0.037}$	$0.336^{+0.030}_{-0.029}$	$0.322^{+0.029}_{-0.028}$
$t_0$	$13.74^{+0.11}_{-0.12}$ Gyr	$13.79^{+0.11}_{-0.11}$ Gyr	$13.77^{+0.12}_{-0.11}$ Gyr
$\Omega_\Lambda$	$0.693^{+0.019}_{-0.019}$	$0.713^{+0.015}_{-0.016}$	$0.721^{+0.016}_{-0.016}$
$H_0^d$	$68.15^{+1.35}_{-1.34}$	$69.22^{+1.39}_{-1.40}$	$69.89^{+1.32}_{-1.46}$

## Notas.

- a. Los valores medios de la distribución posterior de cada parámetro. Los errores muestran el intervalo de confianza a 68%.  
b.  $\Sigma_I$  Y  $\Sigma_{II}$  están dadas en unidades de la sección eficaz de la dispersión Thomson multiplicada por la velocidad de la luz,  $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$  y  $c = 1$ .  
c. Los errores mostrados en  $A_{SZ}$  son las desviaciones estándar de las distribuciones.  
d.  $H_0$  está dado en km/s/Mpc.

En las figuras 5.9 y 5.10 mostramos el espectro de potencias para los modelos A y B, respectivamente. También mostramos los mejores ajustes del modelo C y las barras de error experimentales. Notamos que éstos no deben coincidir con las curvas de mejor ajuste debido a que las perturbaciones son evolucionadas en coordenadas espaciales, mientras las observaciones miden el ángulo al que se encuentran las galaxias y la distancia radial es inferida a través del corrimiento al rojo, como se explica en [201]. Para subrayar este hecho, en las notas al pie de las figuras pedimos hacer comparaciones con dicho artículo.

En las figuras 5.11 y 5.12 mostramos las curvas de confianza, probabilidades posteriores marginalizadas, en los subespacios  $\Sigma_I$ - $\Sigma_{II}$  y  $\Sigma_I$ - $\Omega_b h^2$  para el modelo A. La escala escogida es la misma que en las figuras 5.4 y 5.5 con el fin de simplificar su comparación.

Observamos que la interacción  $\Sigma_I$  es constreñida alrededor de un orden de magnitud más con la inclusión del catálogo DR7 LRG, mientras las constricciones sobre  $\Sigma_{II}$  la acotan a la mitad de los valores, aproximadamente. Esto es de esperarse, a tiempos

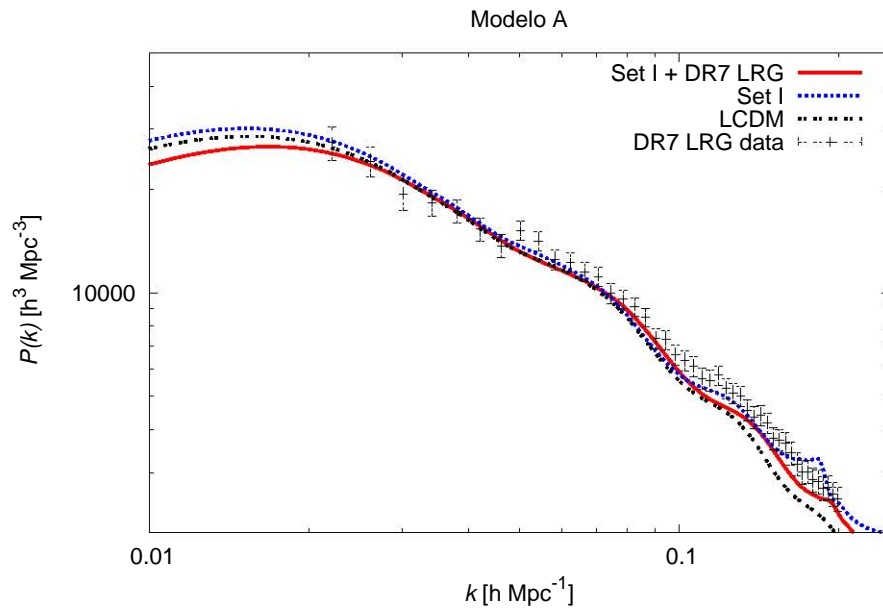


FIGURA 5.9: Espectro de potencias para el modelo A. Utilizamos el set 1 de observaciones: Union 2, WMAP siete años y HST; También usamos observaciones de SDSS DR7 LRG. Compárese con la figura 12 de [201].

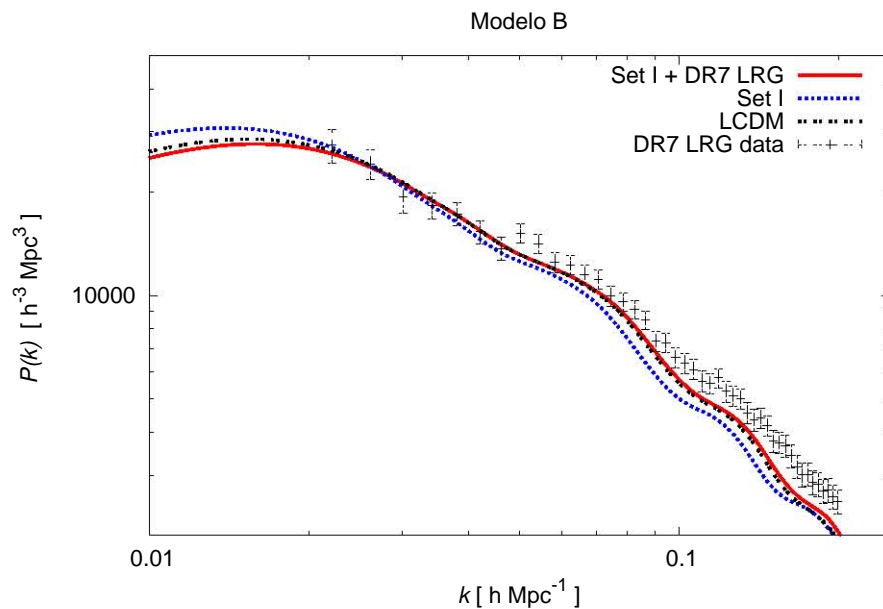


FIGURA 5.10: Espectro de potencias para el modelo B. Utilizamos el set 1 de observaciones: Union 2, WMAP siete años y HST; También usamos observaciones de SDSS DR7 LRG. Compárese con la figura 12 de [201].

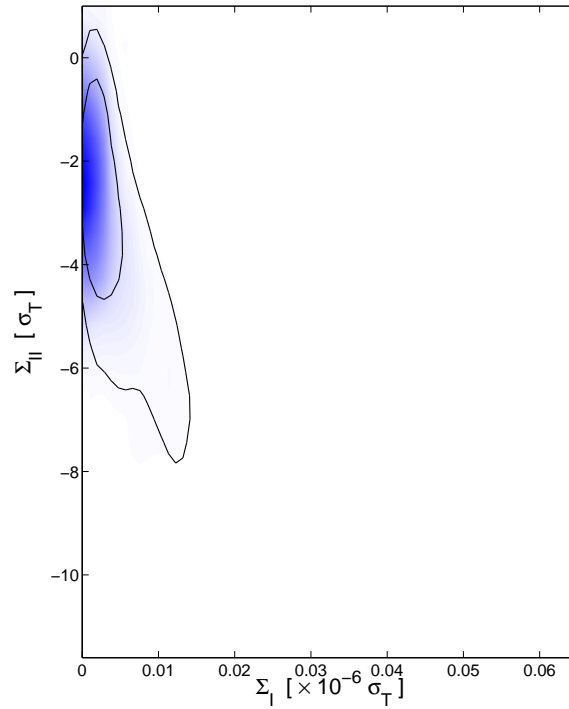


FIGURA 5.11: Curvas de confianza posteriores y marginalizadas para  $\Sigma_I$  contra  $\Sigma_{II}$  a niveles de confianza de 68 % y 95 %. Los sombreados muestran la verosimilitud proyectada de los muestreos. Las observaciones usadas son Union 2, WMAP siete años, HST y SDSS DR7 LRG. Compárese con la figura 5.4.

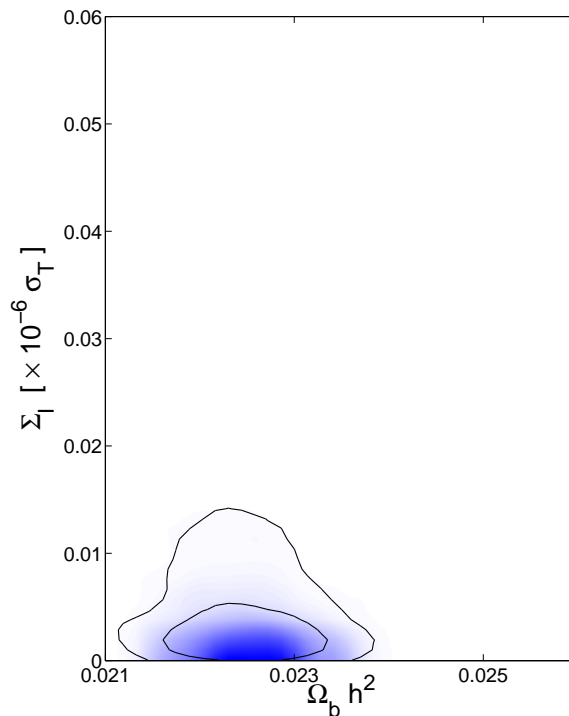


FIGURA 5.12: Curvas de confianza posteriores y marginalizadas para  $\Omega_b h^2$  contra  $\Sigma_I$  a niveles de confianza de 68 % y 95 %. Las observaciones usadas son Union 2, WMAP siete años, HST y SDSS DR7 LRG. Compárese con la figura 5.5.

tardíos la interacción Thomson es despreciable, mientras las interacciones  $\Sigma_I$  y  $\Sigma_{II}$  siguen presentes debido a su caracter universal y modifican la distribución de galaxias a grandes escalas. En las figuras 5.11 y 5.12 también observamos que el caso especial  $\Sigma_I = \Sigma_{II} = 0$  es aceptado por las observaciones a un nivel de confianza de 0.95.

En la parametrización de las interacciones hemos supuesto arbitrariamente que las *partículas* del fluido oscuro tienen una masa  $m_d$  igual a la masa del protón, por lo que el análisis numérico da constricciones en la razón  $\Sigma/m_d$ . A un nivel de confianza de 0.68 obtenemos:

Para el caso en que consideramos ambas interacciones (modelo A):

$$0.21 \times 10^{-22} < \frac{\Sigma_I}{m_d} < 1.17 \times 10^{-22} \frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{GeV}/c^2} \quad (5.33)$$

y

$$-0.96 \times 10^{-13} < \frac{\Sigma_{II}}{m_d} < -0.35 \times 10^{-13} \frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{GeV}/c^2}. \quad (5.34)$$

Mientras que para el modelo B:

$$0.10 \times 10^{-22} < \frac{\Sigma_I}{m_d} < 0.29 \times 10^{-22} \frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{GeV}/c^2}. \quad (5.35)$$

Con estos resultados se completa el análisis y constricciones de los parámetros cosmológicos en los modelos de interacción entre materia bariónica y el fluido oscuro.





## Capítulo 6

# Campos escalares y modificaciones a relatividad general

Los campos escalares han tenido un papel predominante en la física durante las últimas décadas. En particular en cosmología, éstos son usados principalmente para modelar las etapas de expansión acelerada tanto en el universo temprano como en el universo tardío. En la forma inicial de la teoría de la inflación, un campo escalar fundamental con término cinético canónico, mínimamente acoplado a la materia y a la gravitación, es responsable de acelerar el universo temprano [202, 203]. Dado que la teoría de la inflación, en su forma más sencilla, ya estaba desarrollada cuando se descubrió la expansión acelerada del universo hoy en día, la teoría de quintaesencia emergió como una alternativa natural a la constante cosmológica, que como vimos en la sección (1.2.2), aminoran el problema de la coincidencia.

Sin embargo, en la gran mayoría de los modelos existentes en la literatura los campos escalares aparecen acoplados a la materia o a la gravitación no mínimamente. Tanto en teorías clásicas, como en teorías efectivas a teorías fundamentales. Por ejemplo, en el límite de bajas energías en teorías de cuerdas, después de realizar compactificaciones de las dimensiones espaciales extras, aparece acoplado al escalar de Ricci un campo escalar llamado dilatón [36, 37].

El prototipo de estos modelos son las teorías escalares tensoriales [31–33], cuya acción puede escribirse como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{\phi R}{16\pi} - \frac{w(\phi)}{\phi} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - V(\phi) \right] + S_m[\Psi; g], \quad (6.1)$$

donde  $w(\phi)$  y  $V(\phi)$  son funciones arbitrarias del campo escalar  $\phi$  y  $S_m$  es la acción de los campos de materia  $\Psi$ . En el límite en que  $w$  tiende a infinito, esta teoría se reduce a relatividad general. Es fácil demostrar que bajo una transformación conforme de la métrica, se puede obtener la acción de relatividad general más una acción del campo escalar acoplado mínimamente y una acción de materia acoplada a la gravitación a través de la métrica original [47, 204]. A esta descripción de las teorías escalares tensoriales se le llama *descripción en el marco de Einstein*, a diferencia de la acción en el *marco de Jordan* (también llamado *marco de cuerdas*) definida en la ecuación (6.1).

A. Starobinsky propuso un modelo de inflación que no requería de un campo escalar, en el que a la acción de Einstein-Hilbert se le suman términos cuadráticos del escalar de Ricci [205], estos términos son esperados por correcciones cuánticas de la gravitación [206] y pueden ser importantes al comienzo del universo [207]. La idea es que a tiempos tempranos la curvatura es grande y domina el término cuadrático, y éste produce una expansión acelerada en el factor de escala de un universo homogéneo e isotrópico. De hecho, la solución de vacío de la teoría gravitacional con densidad lagrangiana  $\mathcal{L} \propto \sqrt{-g}R^2$  es el espacio de Sitter [46, 207]. Aparte de su relevancia como un modelo de inflación, este trabajo tuvo un segundo repunte ya que modificaciones similares pueden ayudar a modelar la expansión acelerada del universo hoy en día. Esto se obtiene fácilmente si se añade un término  $1/R$  a la acción de Einstein-Hilbert [43, 44]; cuando las densidades de energía decaen, la curvatura del espacio-tiempo también lo hace y este término produce una expansión de tipo ley de potencia. Sin embargo, aunque esta última teoría no es adecuada ya que no posee un límite newtoniano correcto [208], en los años recientes ha habido un gran auge de teorías generales en que la gravitación es descrita por la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (6.2)$$

donde  $f(R)$  es una función del escalar de curvatura de Ricci [45]. Dado que el escalar de curvatura contiene segundas derivadas de la métrica, las ecuaciones de campo resultantes son de cuarto orden en la métrica; en el caso particular de relatividad general los órdenes superiores son colectados en una divergencia total en el proceso variacional y no aparecen en las ecuaciones de campo. Sin embargo, es posible mapear estas teorías a una teoría escalar tensorial como la descrita por la acción (6.1) siempre que se cumpla la condición  $df/dR \neq 0$  [47]. Y, por tanto, el número de grados de libertad de las teorías  $f(R)$  es el mismo que el de la métrica del espacio-tiempo en relatividad general más el de un campo escalar. Además, se obtienen ecuaciones de campo de segundo orden en la métrica y en el campo escalar. Varias funciones  $f(R)$  son capaces de reproducir el éxito del modelo  $\Lambda$ CDM y a su vez cumplir con las constricciones derivadas del sistema solar [48, 49].

La dificultad de construir estos modelos se puede entender más fácilmente si consideramos el caso de una teoría escalar tensorial en el marco de Einstein. El acoplamiento de la materia con el campo escalar a través de la métrica produce una quinta fuerza cuyo alcance es inversamente proporcional a su masa y cuya intensidad es similar a la de la gravitación; experimentos en las desviaciones de la ley del inverso del cuadrado limitan esta longitud a unos cuantos micrómetros [40, 41]. Sin embargo, para tener un alcance cosmológico, el campo escalar debe tener una masa muy ligera, comparable con la escala de la constante de Hubble ( $m_\phi \sim 10^{-33}$  eV). Este conflicto puede ser resuelto si la teoría tiene algún mecanismo de apantallamiento [191] en el que la masa del campo escalar dependa de condiciones externas. El más conocido de estos mecanismos se encuentra en los modelos de campos camaleónicos [38, 39], en los que la masa del campo escalar depende de la densidad de energía ambiente en la que éste se encuentre. De tal manera, en densidades de energía muy bajas, como las que ocurren a escalas cosmológicas, el campo tiene una masa muy pequeña, mientras a densidades altas, como las que se presentan en laboratorios terrestres, el campo escalar adquiere una masa muy grande y por tanto la quinta fuerza asociada a él es de alcance corto. El efecto camaleónico también ha sido estudiado en las teorías  $f(R)$  [48, 209] y en las teorías escalares tensoriales en el marco de Jordan [210, 211].

Otro tipo de teorías estudiadas en la literatura acoplan campos escalares de energía oscura a la materia de manera directa por medio de algún lagrangiano de interacción. Esto se ha hecho principalmente con la materia oscura con la finalidad de resolver el problema de la coincidencia [168, 212, 213]. Sin embargo, motivados en parte por los efectos camaleónicos se han diseñado acoplamientos también con la materia bariónica.

En este capítulo introducimos interacciones de un campo escalar de energía oscura, tipo quintaesencia, con la traza del tensor de energía momento de la materia ordinaria. Las ecuaciones de campo resultantes son similares a las de teorías camaleónicas, sin embargo tienen la ventaja de que no se requiere la introducción de métricas adicionales –que como veremos en los camaleones se introducen tres–. De esta manera, nuestro formalismo es más directo y no requiere de interpretaciones que resultan controvertidas. Además mostraremos cómo estas interacciones son capaces de explicar parte de la materia oscura inferida por las observaciones. Particularmente, presentamos un modelo cosmológico que no requiere de materia oscura. Este modelo resulta ser tan degenerado como se quiera con el modelo  $\Lambda$ CDM al nivel homogéneo e isotrópico, estando en una degeneración efectiva con el modelo estandar. También estudiamos el régimen de perturbaciones lineales para tiempos posteriores a la época de última dispersión y mostramos cómo se obtiene un crecimiento aceptable de las perturbaciones de la materia bariónica.

## 6.1. Teorías escalares tensoriales

Consideremos la siguiente acción, propuesta en [36]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_m[\Psi^{(i)}; \tilde{g}^{(i)}], \quad (6.3)$$

donde  $g$  es la métrica del espacio-tiempo,  $R = R(g)$  es el escalar de Ricci y  $\phi$  es un campo escalar. Los campos  $\Psi^{(i)}$  representan diversos campos de materia y cada uno de ellos se encuentra conformemente acoplado a la gravitación a través de la métrica

$$\tilde{g}_{\mu\nu}^{(i)} = \exp(2\alpha_i(\phi)) g_{\mu\nu}, \quad (6.4)$$

donde las  $\alpha_i(\phi)$  son funciones que dependen únicamente del campo escalar  $\phi$ . Si los factores conformes son iguales para todas las especies de materia  $i$ , la acción es la de teorías escalares tensoriales en el marco de Einstein. Notamos que aunque la parte gravitacional de la acción es la de relatividad general, las partículas de prueba no siguen geodésicas de la métrica  $g$ , sino geodésicas de la métrica conforme, por lo que esta teoría es una modificación a relatividad general. Más aún, si las funciones  $\alpha_i(\phi)$  son distintas para las diferentes especies de materia, se viola el principio de equivalencia. La acción (6.3) es entonces la suma de tres pedazos

$$S = S_{EH}[g] + S_\phi[\phi, g] + S_m[\Psi^{(i)}; \tilde{g}^{(i)}]. \quad (6.5)$$

El primer término es la acción de Einstein-Hilbert [214], de la cual se obtiene la variación

$$\delta_g S_{EH}[g] = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \text{T.F.}, \quad (6.6)$$

donde T.F. denota un término de frontera. Éste puede ser anulado de distintas maneras. Una es compensarlo al añadir a la acción el término de frontera de Gibbons-Hawking [215]. Otra es usar la formulación de Palatini [216], en la que la métrica y las conexiones son independientes en un principio. Otra tercera es considerar no sólo las variaciones de la métrica iguales a cero en la frontera, sino también las variaciones de sus derivadas. Esta última es similar al caso aplicado en mecánica clásica para un lagrangiano ordinario que incluye segundas derivadas temporales de las coordenadas [217].

De la variación del segundo término del lado derecho de la ecuación (6.5) se obtiene

$$\delta_g S_\phi = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu}^{(\phi)} \delta g^{\mu\nu}, \quad (6.7)$$

donde el tensor de energía momento del campo escalar está dado por

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} - g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (6.8)$$

Haciendo variaciones del último término de la ecuación (6.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta_g S_m &= \int \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d^4x = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta S_m}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \right) \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{\sqrt{-g}} \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \tilde{T}_{\alpha\beta} \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \exp(-2\alpha(\phi)) \exp(4\alpha(\phi)) \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \tilde{T}_{\mu\nu} \exp(2\alpha(\phi)) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

En la primera igualdad hemos usado la definición de la variación de un funcional. En la segunda, las relaciones  $\tilde{g}^{\mu\nu} = \exp(-2\alpha(\phi)) g^{\mu\nu}$  y  $\tilde{g} = \exp(8\alpha(\phi)) g$ . Además hemos definido el tensor de energía momento en el marco de Einstein,

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta S_m}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}, \quad (6.10)$$

el cual es covariantemente conservado en el marco de Einstein,

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{T}^{\alpha\beta} = 0, \quad (6.11)$$

y está relacionado con el tensor de energía momento en el marco de Jordan  $T_{\alpha\beta} = -(2/\sqrt{-g})(\delta S_m/\delta g^{\alpha\beta})$  por

$$T_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} \exp(2\alpha(\phi)). \quad (6.12)$$

y

$$T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} \exp(6\alpha(\phi)). \quad (6.13)$$

Notamos que la métrica  $\tilde{g}$  sube y baja índices de los tensores con tilde y la métrica  $g$  de los tensores sin tilde. Las ecuaciones de campo gravitacionales que se obtienen del problema variacional son entonces

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left( e^{2\alpha(\phi)} \tilde{T}_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\phi)} \right). \quad (6.14)$$

Haciendo variaciones de la acción (6.3) con respecto al campo escalar se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$\square\phi - V_{,\phi}(\phi) = -\alpha_{,\phi}(\phi) e^{4\alpha(\phi)} \tilde{T}, \quad (6.15)$$

donde la traza está dada por  $\tilde{T} = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}$ . Notamos que tanto la ecuación (6.14) como la (6.15) mezclan las dos métricas hasta ahora definidas,  $g$  y  $\tilde{g}$ .

Definamos ahora una tercera métrica [38, 39]

$$g_{\mu\nu}^{(K)} = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha(\phi)\right) g_{\mu\nu} \quad (6.16)$$

y un tensor de energía momento

$$T_{\mu\nu}^{(K)} = -\frac{2}{\sqrt{g^{(K)}}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}^{(K)}}. \quad (6.17)$$

Un breve cálculo relaciona los tensores de energía momento y sus trazas respecto a las tres métricas usadas:

$$T_{\mu\nu}^{(K)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha(\phi)\right) T_{\mu\nu} = \exp\left(-\frac{3}{2}\alpha(\phi)\right) \tilde{T}_{\mu\nu} \quad (6.18)$$

y

$$T^{(K)} = \exp(-\alpha(\phi)) T = \exp(3\alpha(\phi)) \tilde{T}. \quad (6.19)$$

A continuación veremos la utilidad de esta nueva métrica  $g^{(K)}$ . Consideremos un fluido de polvo con tensor de energía momento

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu = e^{\alpha(\phi)} \rho^{(K)} u^\mu u^\nu, \quad (6.20)$$

donde en la última igualdad usamos  $\rho^{(K)} = -T^{(K)} = -e^{-\alpha(\phi)} T = e^{-\alpha(\phi)} \rho$ .

De las identidades de Bianchi,

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = \nabla_\mu \left( T^{\mu\nu} + T_{(\phi)}^{\mu\nu} \right) = 0, \quad (6.21)$$

y de la ecuación de Klein-Gordon (6.15) se obtiene

$$u^\nu \nabla_\mu (\rho^{(K)} u^\mu) + \rho^{(K)} u^\mu \nabla_\mu u^\nu + \alpha_{,\phi}(\phi) \rho^{(K)} u^\mu u^\nu \partial_\mu \phi + \alpha_{,\phi}(\phi) \rho^{(K)} \partial^\nu \phi = 0. \quad (6.22)$$

Contrayendo esta última ecuación con  $u_\nu$  se obtiene la ecuación de continuidad

$$\nabla_\mu (\rho^{(K)} u^\mu) = 0, \quad (6.23)$$

y proyectándola en el subespacio perpendicular a  $u^\nu$  (esto se logra contrayendo con el tensor  $(g^\alpha_\nu + u^\alpha u_\nu)$ ) se obtiene la ecuación de geodésicas

$$u^\mu \nabla_\mu u^\alpha = -\alpha_{,\phi}(\phi) (g^{\alpha\mu} + u^\alpha u^\mu) \partial_\mu \phi. \quad (6.24)$$

Vemos que la fuente de la ecuación de geodésicas es distinta de cero sólo si el campo escalar tiene gradientes perpendiculares a la cuadrivelocidad  $u^\mu$  del fluido de polvo. Por ejemplo, si consideramos un espacio-tiempo FRW, la cuadrivelocidad define las hipersuperficies de tiempo propio constante de los observadores comóviles con la expansión. Bajo estas condiciones el campo escalar no tiene gradientes espaciales y el lado derecho de la ecuación (6.24) es cero. Es decir, los observadores comóviles con la expansión,  $\vec{X} = \text{constante}$ , siguen geodésicas en el espacio-tiempo y son éstos los que observan el mismo universo homogéneo e isotrópico, justo como sucede en el modelo  $\Lambda$ CDM. También observamos que de la ecuación de continuidad (6.23) se sigue en este mismo espacio-tiempo que  $\dot{\rho}^{(K)} + 3\mathcal{H}\rho^{(K)} = 0$ , por lo que la densidad de materia  $\rho^{(K)}$  decae con la expansión como  $a(t)^{-3}$ . Estas ideas son usadas por numerosos autores que estudian los campos escalares camaleónicos e interacciones entre materia y energía oscuras para argumentar que la densidad de energía física –aquella medida por los experimentos– es  $\rho^{(K)}$  [38, 39, 192, 193, 218, 219].

Por completitud, escribimos las ecuaciones de campo considerando un fluido de polvo en términos de la densidad  $\rho^{(K)}$ ; éstas son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left( e^{\alpha(\phi)} \rho^{(K)} u_\mu u_\nu + T_{(\phi)}^{\mu\nu} \right), \quad (6.25)$$

y

$$\square\phi - V_{,\phi}(\phi) = \alpha_{,\phi}(\phi) e^{\alpha(\phi)} \rho^{(K)}. \quad (6.26)$$

## 6.2. Dualidad con interacciones de campos escalares con materia

En esta sección mostraremos cómo es posible obtener las ecuaciones de campo de las teorías desarrolladas en la sección anterior a través de acoplamientos entre materia y campos escalares. Estos métodos tienen la ventaja de que de ellos se obtienen las ecuaciones de continuidad (6.23) y de geodésicas (6.24), así como las ecuaciones de campo (6.25) y (6.26), sin necesidad de introducir métricas adicionales como  $g$  y  $g^{(K)}$ . Estudiaremos dos tipos de acoplamientos; el primero es un acoplamiento entre la traza del tensor de energía momento de la materia y un campo escalar [185–188, 220], y el segundo es un acoplamiento entre el lagrangiano de materia y un campo escalar [221–223]. Estas interacciones dan los mismos resultados que los obtenidos en la sección anterior para el caso especial de un fluido de polvo, aunque para fluidos generales éstos pueden diferir. La mayor ventaja de los modelos que tratamos en esta sección sobre el visto en la sección pasada es que no tenemos que decidir cuál es la densidad de energía física, que diversos



autores escogen es  $\rho^{(K)}$  de manera sino arbitraria, al menos controvertida; aquí la única densidad de energía es definida a través de la métrica que aparece en el lagrangiano.

### 6.2.1. Acoplamiento con la traza del tensor de energía momento

Consideremos la densidad lagrangiana de interacción

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sqrt{-g}A(\phi)T, \quad (6.27)$$

donde  $T$  es la traza del tensor de energía momento de los campos de materia y  $A(\phi)$  es una función arbitraria de un campo escalar  $\phi$ . Estos acoplamientos han sido estudiados en astrofísica con distintos propósitos. En [184, 185] se desarrolla una teoría donde el campo gravitacional es un escalar y es acoplado a la traza del tensor de energía momento de la materia ordinaria y del mismo campo gravitacional. En esta teoría la luz no es afectada por la gravitación, por lo que es incorrecta. Sin embargo, el objetivo de estos trabajos es mostrar una versión de la gravitación que, además de ser mediada por un campo escalar, sea invariante de Lorentz. En [186], un campo escalar se acopla a la constante cosmológica con el intento de explicar su pequeño tamaño numérico. Además, el acoplamiento ha servido como base de un modelo cosmológico de energía oscura en el cual el campo escalar interacciona con toda la materia, incluyendo el mismo, con un acoplamiento  $A(\phi) \propto \phi$  [187].

La interacción considerada en la ecuación (6.27) tiene algunas propiedades atractivas. El campo no se acopla con el electromagnetismo ( $T = 0$ ) y por tanto es oscuro; además, no se acopla a la materia ultrarelativista, por lo que la cosmología en el universo temprano no se ve afectada por él, aunque sí puede acoplarse al campo del inflatón. También, como veremos, las ecuaciones de continuidad y geodésicas son las mismas que en el modelo  $\Lambda$ CDM si consideramos la cosmología homogénea e isotrópica.

La acción total de la teoría es

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_m[\Psi^{(i)}; g] + S_{\text{int}}[\Psi^{(i)}; g, \phi]. \quad (6.28)$$

Existe una dificultad debido a que los campos de materia no sólo aparecen en la acción de materia, sino también en la acción de interacción. Debemos entonces definir la traza del tensor de energía momento de la materia como

$$T = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(S_{\text{int}} + S_m)}{\delta g^{\mu\nu}} g^{\mu\nu}; \quad (6.29)$$

definición que es autoreferente.

A continuación estudiaremos el acoplamiento con distintos campos de materia.

### Acoplamiento con fermiones

Estudiaremos estos acoplamientos en un espacio-tiempo de Minkowski. Ésta es una buena aproximación para fermiones con longitud de onda de Compton mucho menor que el radio de curvatura del espacio-tiempo,  $m_f \gg H$ , como asumimos sucede en las fases cosmológicas que aquí tratamos. La densidad lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_\phi = -\bar{\psi}(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi + A(\phi)T + \mathcal{L}_\phi. \quad (6.30)$$

En este caso podemos usar la definición del tensor de energía momento

$$T^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_a)} \partial_\nu \Psi_a, \quad (6.31)$$

la cual en este caso es autorreferente ya que el lagrangiano de materia incluye al tensor de energía momento. Si los fermiones no están acoplados al campo escalar, la traza del tensor de energía momento es  $T^{(0)} = -i\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi = -m\bar{\psi}\psi$ , donde en la última igualdad usamos la ecuación de Dirac. Para el caso con interacción proponemos el ansatz

$$T = -me^{\alpha(\phi)}\bar{\psi}\psi. \quad (6.32)$$

Con éste, la densidad lagrangiana se puede escribir

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - m(1 + e^{\alpha(\phi)}A(\phi))\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_\phi, \quad (6.33)$$

y la ecuación de Dirac modificada resulta  $i\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi = m(1 + e^{\alpha(\phi)}A(\phi))\psi$ . Usando la ecuación (6.31) tenemos  $T = T^\mu{}_\mu = -i\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi = -m(1 + e^{\alpha(\phi)}A(\phi))\bar{\psi}\psi$ . Igualando este resultado con el ansatz (6.32) obtenemos

$$e^{\alpha(\phi)} = \frac{1}{1 - A(\phi)}. \quad (6.34)$$

Finalmente, la densidad lagrangiana (6.30) se puede escribir

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(-i\gamma^\mu\partial_\mu + e^{\alpha(\phi)}m)\psi + \mathcal{L}_\phi. \quad (6.35)$$

El efecto de la interacción del campo escalar con los fermiones es cambiar su masa de  $m$  a  $e^{\alpha(\phi)}m$ . Más adelante compararemos este resultado con el de un fluido de polvo. Cabe mencionar que esta densidad lagrangiana es el punto de partida de algunos trabajos que estudian acoplamientos de fermiones con campos escalares (véanse como ejemplos [79, 212]).

### Acoplamiento con campos escalares

Ahora consideremos un campo escalar adicional  $\varphi$ . La densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_\phi = \left[ -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - W(\varphi) \right] \sqrt{-g} + A(\phi)T\sqrt{-g} + \mathcal{L}_\phi. \quad (6.36)$$

La traza del tensor de energía momento del lagrangiano sin interacción  $\mathcal{L}_\varphi$  está dada por  $T^{(0)} = g^{\mu\nu}(-2/\sqrt{-g})(\delta S_\varphi/\delta g^{\mu\nu}) = -\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi - 4W(\varphi)$ . Para el caso con interacción proponemos el ansatz

$$T = -g(\phi)\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi - 4h(\phi)W(\varphi), \quad (6.37)$$

que incluye dos funciones del campo escalar  $\phi$ . Insertando el ansatz en el lagrangiano (6.36) y sacando la traza del tensor de energía momento con la ecuación (6.29) se obtiene  $T = -(1+2g(\phi)A(\phi))\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi - 4(1+4h(\phi)A(\phi))W(\varphi)$ . Comparando este resultado con el ansatz (6.37) se obtienen las funciones  $g(\phi)$  y  $h(\phi)$  en términos de la función  $A(\phi)$ ,

$$g(\phi) = \frac{1}{1-2A(\phi)} \quad (6.38)$$

y

$$h(\phi) = \frac{1}{1-4A(\phi)}, \quad (6.39)$$

y el lagrangiano (6.36) es finalmente

$$\mathcal{L} = \left[ -\frac{1}{1-2A(\phi)}\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{1-4A(\phi)}W(\varphi) \right] \sqrt{-g} + \mathcal{L}_\phi. \quad (6.40)$$

### Acoplamiento con fluidos barotrópicos

Consideremos ahora el efecto del acoplamiento del campo escalar con un fluido barotrópico con parámetro de ecuación de estado constante,

$$P = w\rho, \quad \text{con } w = \text{constante}. \quad (6.41)$$

La densidad lagrangiana para un fluido perfecto está dada por [224, 225]<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_m = -\rho\sqrt{-g}, \quad (6.42)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía en un marco de referencia localmente inercial donde el fluido se encuentra en reposo. Asumiremos que la traza del tensor de energía momento depende únicamente de la densidad de energía  $\rho$ ,  $T = T(\rho)$ , por lo que  $\delta T = (dT/d\rho)\delta\rho$ ;

<sup>1</sup>Se puede demostrar [226] que esta densidad lagrangiana y, la más convencional,  $\mathcal{L}_m = P\sqrt{-g}$  [227] están relacionadas por una divergencia total.

también  $T$  depende de  $\phi$ , pero dado que  $g$  y  $\phi$  son campos independientes al variar la acción respecto a la métrica, como a continuación haremos, esta dependencia se vuelve irrelevante. La parte de la acción que incluye al fluido perfecto es

$$S_{\text{int}} + S_m = \int d^4x \sqrt{-g} (A(\phi)T - \rho). \quad (6.43)$$

Haciendo variaciones respecto a la métrica, obtenemos

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + w\rho(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}) + A(\phi)g_{\mu\nu} - A(\phi)\frac{dT}{d\rho}\rho(1+w)(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}), \quad (6.44)$$

donde usamos la identidad [225, 228]

$$\delta\rho = \frac{1}{2}(\rho + P)(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}; \quad (6.45)$$

véase también el apéndice C. Sacando la traza de la ecuación (6.44) se obtiene la ecuación diferencial

$$3A(\phi)(1+w)\rho\frac{dT}{d\rho} + (1-4A(\phi))T + (1-3w)\rho = 0, \quad (6.46)$$

cuya solución general es

$$T = -\frac{(1-3w)}{1-(1-3w)A(\phi)}\rho + C\rho^{-(1-4A)/3A(1+w)}, \quad (6.47)$$

con  $C$  una constante de integración que debemos escoger igual a cero si queremos que para un fluido de partículas ultrarelativistas  $w = 1/3$  obtengamos  $T = 0$ . Obtenemos la ecuación de la traza

$$T = -\frac{1-3w}{1-(1-3w)A(\phi)}\rho, \quad (6.48)$$

y la acción (6.43) se puede escribir

$$S_{\text{int}} + S_m = -\int d^4x \sqrt{-g} \frac{1-3w}{1-(1-3w)A(\phi)}\rho. \quad (6.49)$$

Para el caso de un fluido de polvo,  $w = 0$ , la densidad lagrangiana es  $\mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{int}} = -e^{\alpha(\phi)}\rho\sqrt{-g}$  con la función  $e^{\alpha(\phi)}$  definida en la ecuación (6.34). Una derivación alternativa de este resultado, aplicable únicamente a un fluido de polvo, puede ser encontrada en [186, 187].

De este resultado interpretamos que la acción del campo escalar es modificar la masa de las partículas de polvo,  $m \rightarrow e^\alpha m$ , justo como sucede en el caso de fermiones. De hecho, G. Farrar y J. Peebles demuestran que la acción que se obtiene del lagrangiano (6.35) converge a la acción (6.49), con  $w = 0$ , en la situación límite, que se asume aplica en cosmología, en que la longitud de onda de de Broglie de los fermiones es mucho menor que la escala de variación del campo escalar [212].

### 6.3. Generación de materia oscura a través de interacciones con campos escalares

Tomemos la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - V(\phi) - e^{\alpha(\phi)} \rho \right], \quad (6.50)$$

la cual, como vimos en la sección anterior, puede ser obtenida de las interacciones  $A(\phi)T$ . Alternativamente, esta acción es el resultado de modelos donde hay una interacción del tipo

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = f(\phi) \mathcal{L}_m = -f(\phi) \rho \sqrt{-g}; \quad (6.51)$$

véanse por ejemplo [221–223].

Las ecuaciones de campo obtenidas al hacer variaciones respecto a la métrica  $g$  son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left( e^{\alpha(\phi)} T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(\phi)} \right), \quad (6.52)$$

con  $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$  dado por la ecuación (6.8) y consideramos un fluido de polvo con tensor de energía momento

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (6.53)$$

Al hacer variaciones con respecto al campo escalar se obtiene la ecuación de evolución

$$\square \phi - V_{,\phi}(\phi) = \alpha_{,\phi}(\phi) e^{\alpha(\phi)} \rho. \quad (6.54)$$

De aquí que la evolución del campo escalar está regida por un potencial efectivo

$$V_{\text{eff}}(\phi) = V(\phi) + e^{\alpha(\phi)} \rho. \quad (6.55)$$

Vemos que estas ecuaciones de campo son idénticas a las ecuaciones (6.25) y (6.26) encontradas en teorías escalares tensoriales bajo la identificación de  $\rho$  con  $\rho^{(K)}$ . Esto muestra la dualidad entre teorías escalares tensoriales en el marco de Einstein y entre las interacciones entre la materia y campos escalares aquí descritas cuando consideramos polvo o materia ultrarelativista, por lo que el resto de este capítulo puede ser entendido en el marco de teorías escalares tensoriales.

A partir de la ecuación de geodésicas (6.24) se obtiene en el límite no relativista

$$\frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = -\nabla \Phi_N - \alpha_{,\phi} \nabla \phi, \quad (6.56)$$

donde  $\vec{X}$  denota la posición espacial de la partícula y  $\Phi_N = -h_{00}/2$  es el potencial newtoniano. Esta ecuación muestra que una partícula de masa  $m$  está sujeta a una quinta fuerza dada por

$$\vec{F}_\phi = -m\nabla(\alpha(\phi)). \quad (6.57)$$

En esta sección estudiaremos cómo estos modelos pueden emular parte de la materia oscura del universo. Consideremos un fluido de materia bariónica con parámetro de densidad  $\Omega_b$  y un fluido de materia oscura fría con parámetro  $\Omega_c$ . Inicialmente veremos la situación general en que cada uno de los fluidos interactúa con el campo escalar de manera distinta, con funciones de acoplamiento  $\alpha_b$  y  $\alpha_c$ . Más adelante consideraremos una teoría específica en que no hay materia oscura,  $\Omega_c = 0$ .

### 6.3.1. Cosmología de fondo

Las ecuación de Friedmann es

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_{,\phi}(\phi) + \rho_\gamma + \rho_c e^{\alpha_c(\phi)} + \rho_b e^{\alpha_b(\phi)} \right) \quad (6.58)$$

y las ecuaciones de continuidad

$$\rho'_b + 3H\rho_b = 0, \quad (6.59)$$

$$\rho'_c + 3H\rho_c = 0, \quad (6.60)$$

$$\rho'_\gamma + 4H\rho_\gamma = 0, \quad (6.61)$$

$$\phi'' + 3H\phi' + V_{,\phi}(\phi) + \alpha_{c,\phi}(\phi)e^{\alpha_c(\phi)}\rho_c + \alpha_{b,\phi}(\phi)e^{\alpha_b(\phi)}\rho_b = 0. \quad (6.62)$$

Las ecuaciones (6.59) y (6.60) son consecuencia de la ecuación de conservación (6.23), como se discute después de la ecuación (6.24). Pueden éstas ser integradas inmediatamente y obtenemos  $\rho_b = \rho_{b0}a^{-3}$ ,  $\rho_c = \rho_{c0}a^{-3}$  y  $\rho_\gamma = \rho_{\gamma0}a^{-4}$ , donde el subíndice 0 indica el valor de la variable hoy en día.

Las ecuaciones de conservación sugieren interpretar la interacción como una característica puramente oscura. Definimos entonces

$$\rho_{\text{dark}} = \rho_\phi + e^{\alpha_c}\rho_c + (e^{\alpha_b} - 1)\rho_b, \quad (6.63)$$

donde  $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$ . La densidad de energía total es entonces  $\rho_T = \rho_{\text{dark}} + \rho_b + \rho_\gamma$  y la conservación del fluido oscuro es

$$\rho'_{\text{dark}} = -3H(1 + w_{\text{dark}})\rho_{\text{dark}} \quad (6.64)$$

con

$$w_{\text{dark}} = \frac{\phi'^2/2 - V(\phi)}{\phi'^2/2 + V(\phi) + [e^{\alpha_c}\rho_{c0} + (e^{\alpha_b} - 1)\rho_{b0}] a^{-3}}. \quad (6.65)$$

Si el campo escalar se encuentra en rodamiento lento podemos despreciar los términos cuadráticos en su velocidad y el parámetro de la ecuación de estado del sector oscuro es

$$w_{\text{dark}} = -\frac{1}{1 + \frac{e^{\alpha_c}\rho_{c0} + (e^{\alpha_b} - 1)\rho_{b0}}{V(\phi)} a^{-3}}. \quad (6.66)$$

Entonces, el siguiente escenario cosmológico es plausible. Durante la época de radiación, la traza del tensor de energía momento es igual a cero y la cosmología de fondo es muy similar a la del modelo estándar de la gran explosión. A tiempos tempranos de la época dominada por la materia, la densidad de energía es alta y el término de interacción, proporcional a  $a^{-3}$ , es muy grande y domina el parámetro de la ecuación de estado del sector oscuro, dando lugar a  $w_{\text{dark}} \simeq 0$ . Mientras el tiempo pasa la densidad de materia se va diluyendo y cae con la tercera potencia del factor de escala, y finalmente el potencial comienza a dominar sobre el término de interacción, y en este límite  $w_{\text{dark}} \rightarrow -1$ . Hemos obtenido que el fluido oscuro, aquí definido con (6.63), está tan degenerado con el sector oscuro del modelo  $\Lambda$ CDM a nivel homogéneo e isotrópico como tanto el campo escalar esté en rodamiento lento. En el límite en que el campo escalar se encuentre a un valor constante, los dos modelos estarán totalmente degenerados. Compárense las ecuaciones (3.18) y (6.66).

La cantidad total de materia oscura que es inferida hoy en día de las observaciones usando el modelo  $\Lambda$ CDM –o quintaesencia sin interacciones– ( $\Omega_{\text{DM}}$ ), es comparada con la cantidad de materia oscura fría ( $\Omega_c$ ) y materia bariónica ( $\Omega_b$ ) con la presencia de interacciones con

$$\Omega_{\text{DM}} = e^{\alpha_c}\Omega_c + (e^{\alpha_b} - 1)\Omega_b. \quad (6.67)$$

Notemos que estamos usando letras mayúsculas para referirnos a cantidades en el modelo estándar y minúsculas para los modelos que aquí describimos. En el caso de bariones y fotones, las cantidades son las mismas en ambos modelos.

Definimos los parámetros:

$$C_1(\phi) = \frac{e^{\alpha_c}\Omega_c + (e^{\alpha_b} - 1)\Omega_b}{V(\phi)/3M_p^2 H_0^2} \quad (6.68)$$

y

$$C_2(\phi) = \frac{\Omega_c}{\Omega_b} e^{\alpha_c} + e^{\alpha_b} - 1. \quad (6.69)$$

Para obtener una cosmología de fondo aceptable, es necesario imponer las siguientes constricciones a estos parámetros

$$C_1(\phi) \simeq \frac{\Omega_{\text{DM}}}{\Omega_{\text{DE}}} \simeq \frac{0.23}{0.73}, \quad (6.70)$$

y para obtener la cantidad correcta de materia oscura *observada*

$$C_2(\phi) \simeq \frac{\Omega_{\text{DM}}}{\Omega_b} \simeq \frac{0.23}{0.04}. \quad (6.71)$$

Con el fin de proveer la cantidad correcta de aceleración hoy en día, combinamos las constricciones anteriores y obtenemos

$$V(\phi_0) = 3M_p^2 H_0^2 \Omega_\Lambda. \quad (6.72)$$

### 6.3.2. Acoplamiento universal

Para un acoplamiento universal, como sucede en las teorías escalares tensoriales, las interacciones son las mismas,  $e^{\alpha_i} = e^\alpha$ . De acuerdo con esto, podemos usar la constricción

$$e^\alpha \Omega_c(z) + (e^\alpha - 1) \Omega_b(z) = \Omega_{\text{DM}}(z) \quad (6.73)$$

Sin embargo, notemos que la condición (6.73) puede cumplirse exactamente en un solo tiempo en la historia cósmica, que debe ser escogido. Esto se debe a que el lado derecho de la ecuación evoluciona como  $a^{-3}H^{-2}$ , mientras el lado izquierdo lo hace como  $e^\alpha a^{-3}H^{-2}$ . Por lo tanto, la cantidad total de materia oscura cambia con el tiempo si hay interacciones de este tipo. De acuerdo con esto, el campo debe estar en un régimen de rodamiento lento, de manera que  $e^{\alpha(\phi)}$  varíe muy lentamente en comparación con  $a^{-3}H^{-2}$ . En la figura 6.1 mostramos una gráfica de la función  $e^\alpha(\Omega_c) = (\Omega_{\text{DM}} + \Omega_b)/(\Omega_b + \Omega_c)$ . En principio, toda la hipérbola en el espacio de parámetros debe dar (casi) la misma expansión del universo que el modelo  $\Lambda$ CDM con una cantidad  $\Omega_{\text{DM}}$  de materia oscura; las diferencias las dará la evolución del factor  $e^\alpha$ . La región sólida (azul) muestra la parte en que la desigualdad  $0 \leq \Omega_c \leq \Omega_{\text{DM}}$  se cumple.

Más adelante estudiaremos con detalle el modelo con  $\Omega_c = 0$  [220].

### 6.3.3. Cotas provenientes de nucleosíntesis

Aunque la evolución del factor de escala es la misma en la época de nucleosíntesis ( $z \sim 10^{10}$ ), cotas fuertes son impuestas dado que un efecto de la interacción es cambiar las masas de los fermiones de  $m$  a  $m(\phi) = e^{\alpha(\phi)}m$ , como hemos demostrado en la sección



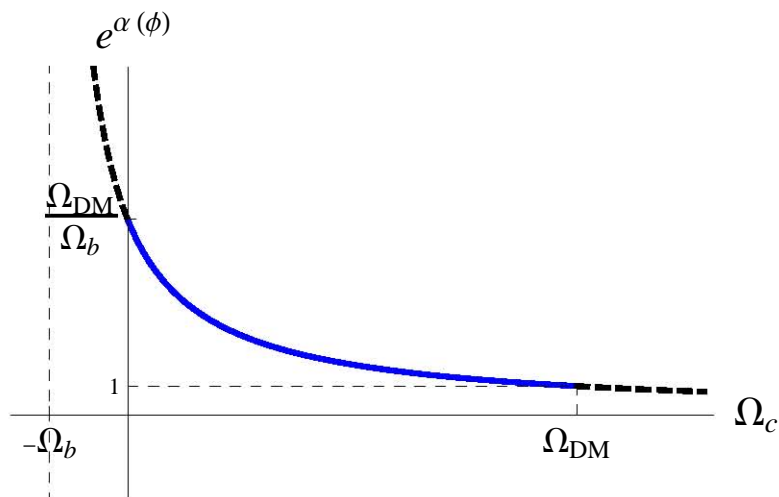


FIGURA 6.1: Constricción en los parámetros con el fin de emular la cantidad correcta de materia oscura

anterior. A continuación, hacemos una estimación aproximada de cuánto pueden cambiar estas masas desde la época de nucleosíntesis hasta nuestros días.

La abundancia fraccional de  ${}^4\text{He}$  primordial está dada por

$$Y_p = \frac{x}{1+x}, \quad (6.74)$$

con  $x$  definida por

$$x = \exp\left(-\frac{m_n - m_p}{kT_f}\right) \exp\left(-\frac{t_N}{\tau_N}\right), \quad (6.75)$$

donde  $T_f \sim 0.8 \text{ MeV}$  es la escala de *congelamiento* de las interacciones débiles y  $\tau_N$  es la vida media de un neutrón. Ni  $T_f$  ni el factor  $\exp(t_N/\tau_N) \sim 1.5$  dependen de la masa de los fermiones; véase por ejemplo [229]. En modelos como el nuestro, en el que la masa de los fermiones varía por la misma cantidad, tenemos

$$\Delta(m_n - m_p) \sim \frac{\Delta m}{m}(m_{n0} - m_{np}). \quad (6.76)$$

Por tanto, una incertidumbre en la abundancia fraccional de  ${}^4\text{He}$ ,  $\Delta Y_p$ , se traduce en una incertidumbre en la masa de los fermiones de

$$\frac{\Delta m}{m} \sim 0.82 \frac{\Delta Y_p}{Y_p}, \quad (6.77)$$

donde hemos usado  $m_{n0} - m_{np} \sim 1.3 \text{ MeV}$  y  $Y_p \sim 0.25$ . La abundancia de  ${}^4\text{He}$  primordial se encuentra en el rango de 0.22 a 0.25 [8], lo que se traduce en 12%. Usando la última ecuación obtenemos una variación máxima de las masas de alrededor de 10% desde

la época de nucleosíntesis hasta hoy en día. Este resultado coincide con el usado para estudiar la cosmología del modelo camaleónico original en [192].

Obtenemos que la variación del campo escalar debe ser tal que se cumpla la desigualdad

$$\frac{\Delta m(\phi)}{m(\phi)} = \frac{e^{\alpha(\phi_N)} - e^{\alpha(\phi_0)}}{e^{\alpha(\phi_0)}} \lesssim 0.1, \quad (6.78)$$

donde  $\phi_N$  es el valor del campo escalar en la época de nucleosíntesis. De acuerdo con esto, el campo escalar ha tenido que estar en rodamiento lento desde esa época.

## 6.4. Modelo sin materia oscura

En los modelos camaleónicos el potencial es del tipo *runaway* ( $V \propto \phi^{-1}$ ) y el acoplamiento con la materia es lineal ( $\alpha \propto \phi$ ); de esta manera el parámetro de la ecuación de estado es  $w_{dark} = -(1 + \phi(\exp(\beta\phi) - 1)(\rho_{b0} + \rho_{c0})a^{-3})^{-1}$ , y los argumentos dados en la sección anterior son aplicables siempre que el campo esté en rodamiento lento. Sin embargo, en este trabajo, aunque está inspirado en los modelos camaleónicos, nuestro propósito es explorar modelos con el único fin de imitar el modelo  $\Lambda$ CDM y estar en degeneración con él –este enfoque es retomado por D. Mota et al. en [230]<sup>2</sup>–; para esto escogemos las funciones libres

$$e^{\alpha(\phi)} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon\phi^2 \quad (6.79)$$

y

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2, \quad (6.80)$$

donde  $\epsilon$  es una constante con unidades del inverso de masa cuadrada y  $m_\phi$  es la masa del campo escalar libre.

En la figura 6.2 mostramos el factor de escala como función del tiempo para el modelo que presentamos en esta sección para distintos valores de  $\Omega_c$ . En la figura 6.3 mostramos la evolución del campo escalar en este modelo. Se muestra cómo después de una ligera caída inicial el campo se mantiene en rodamiento lento.

A partir de ahora fijaremos  $\Omega_c = 0$ , de tal manera que la interacción entre el campo escalar y la materia bariónica debe proveer el efecto de toda la materia oscura.

Con las elecciones de la función de acoplamiento y el potencial dadas por las ecuaciones (6.79) y (6.80), respectivamente, el mínimo del potencial efectivo (6.55) se encuentra en

<sup>2</sup>En este trabajo se usan modelos de este tipo como una alternativa a materia oscura a escalas astrofísicas, obteniendo resultados positivos en cúmulos de galaxias y en galaxias de bajo brillo superficial. Sin embargo, no son capaces de reproducir las mediciones cosmológicas de supernovas.

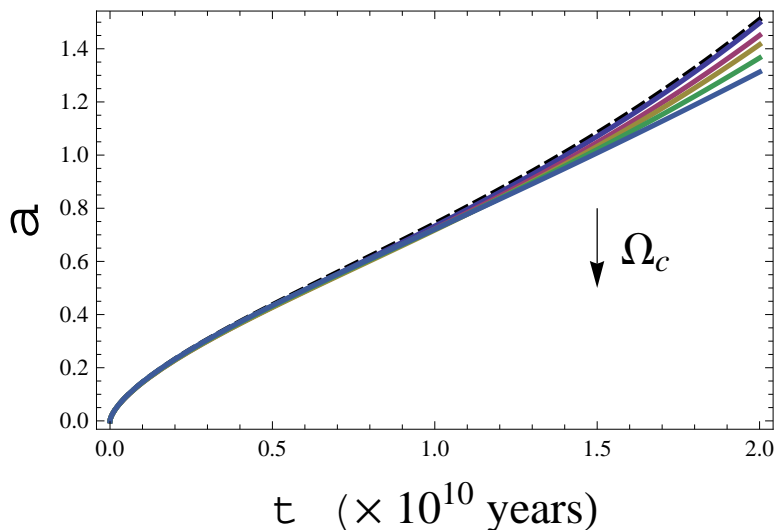


FIGURA 6.2: Factor de escala como función del tiempo cósmico. Las condiciones son tales que en rodamiento lento exacto ( $\dot{\phi} = 0$ ) el modelo tiene  $\Omega_{\text{DM}} = 0.23$  y  $\Omega_{\text{DE}} = 0.73$ . La flecha indica que las curvas caen cuando  $\Omega_c$  crece, esto es debido a que las condiciones iniciales de  $\phi$  deben tener un valor más pequeño y el campo deja el rodamiento lento. La curva cortada es el resultado en el modelo  $\Lambda$ CDM. El valor del parámetro de intensidad es  $\beta = 0.01$ .

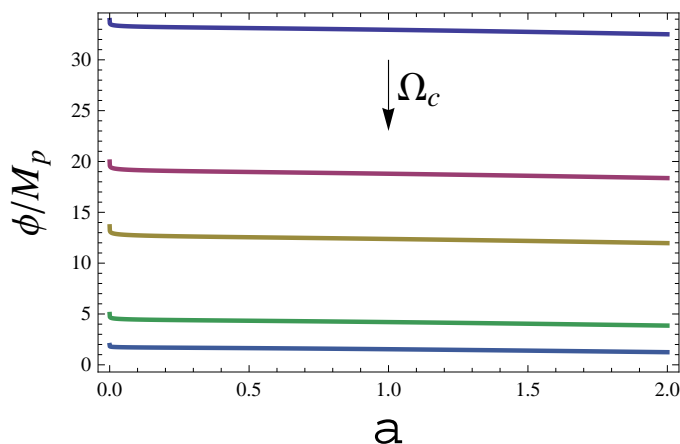


FIGURA 6.3: Campo escalar como función del tiempo cósmico. El rodamiento lento debe ser preservado, por lo que la condición  $\epsilon_{\text{slow-roll}} \ll 1$  se traduce en  $\phi \gg M_p$ .

$\phi = 0$  a todo momento, y la ecuación de Klein-Gordon del campo escalar es

$$\square \phi - (m_\phi^2 + \epsilon \rho_b) \phi = 0. \quad (6.81)$$

De esta ecuación es explícito que el campo tiene una masa efectiva dependiente del ambiente dada por

$$m_{\text{eff}}^2 = m_\phi^2 + \epsilon \rho_b, \quad (6.82)$$

y por tanto la quinta fuerza mediada por el campo tiene un rango  $1/m_{\text{eff}}$ . Aunque ésta es

una de las características de los campos camaleónicos, la ecuación de evolución es lineal, por lo que no esperamos obtener el efecto de supresión de cascarón delgado, también característico de estos modelos [38, 39].

Las dos constricciones (6.70) y (6.71) se vuelven

$$C_1 = \frac{\epsilon\rho_0}{m_\phi^2} \simeq \frac{\Omega_{\text{DM}}}{\Omega_{\text{DE}}} \simeq 0.315 \quad (6.83)$$

y

$$C_2(\phi) = \frac{1}{2}\epsilon\phi^2 \simeq \frac{\Omega_{\text{DM}}}{\Omega_b} \simeq 5.75. \quad (6.84)$$

La ecuación que relaciona la masa del campo escalar con la constante cosmológica es

$$m_\phi^2 \simeq 2\Lambda \left( \frac{M_p}{\phi_0} \right)^2. \quad (6.85)$$

#### 6.4.1. Análisis numérico

Con la elección hecha de las funciones libres y  $\Omega_c = 0$ , las ecuaciones de evolución son

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \frac{1}{2}\epsilon\phi^2\frac{\rho_0}{a^3} + \frac{\rho_0}{a^3} \right) \quad (6.86)$$

y

$$\phi'' + 3H\phi' + m_\phi^2\phi + \epsilon\frac{\rho_0}{a^3}\phi = 0. \quad (6.87)$$

Es conveniente definir el parámetro adimensional de intensidad en la interacción

$$\beta \equiv \epsilon M_p^2. \quad (6.88)$$

Usando la ecuación (6.85) y los valores  $H_0 = 70.4 \text{ km/s/Mpc}$ ,  $\Lambda/3H_0^2 = \Omega_\Lambda = 0.73$  [12], el valor requerido de la masa del campo escalar como función de  $\beta$  y de  $C_2(\phi_0)$  es

$$m_\phi = 3.6 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{\beta}{C_2(\phi_0)}} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (6.89)$$

Evolucionamos las ecuaciones (6.86) y (6.87) para diferentes valores de  $\beta$  usando las constricciones numéricas (6.83) y (6.84).

La figura 6.4 muestra los resultados de  $w_{\text{dark}}$  (ecuación (6.65)). La ecuación de estado que se encuentra oscilando proviene de un campo que oscila alrededor de  $\phi = 0$ , y entonces no se encuentra en rodamiento lento. Las curvas que no oscilan provienen de campos

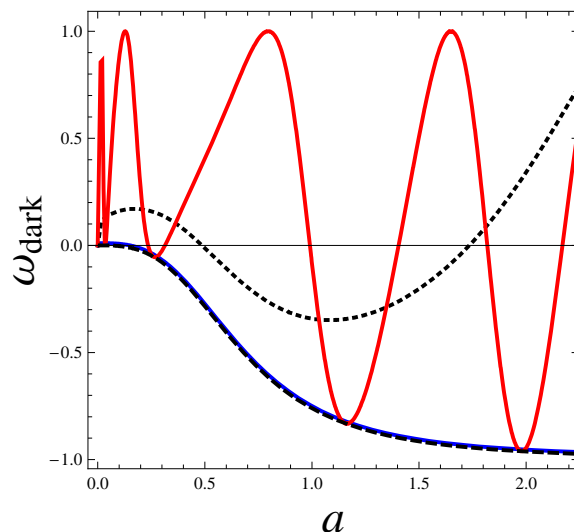


FIGURA 6.4: Muestra la evolución del parámetro de la ecuación de estado del sector oscuro,  $w_{\text{dark}}$ . La línea cortada es el resultado en el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ . La curva sólida oscilante corresponde a  $\beta = 1$ ; la curva cortada corta a  $\beta = 0.2$ ; y la curva sólida no oscilante a  $\beta = 0.04$ .

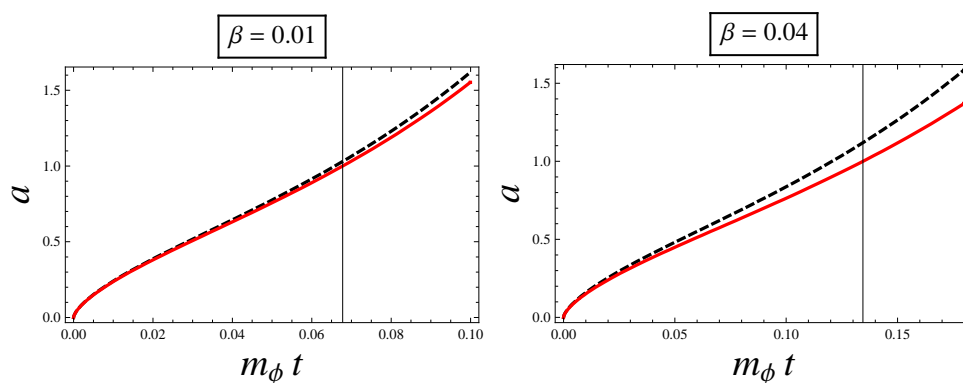


FIGURA 6.5: Evolución del factor de escala como función del tiempo cósmico. Las curvas cortadas son los resultados en el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ . Las líneas verticales denotan el tiempo presente. Nótese que el valor numérico de la escala temporal es diferente en cada caso dado que  $m_\phi$  es diferente para cada valor de  $\beta$ .

que están en rodamiento lento. Queremos hacer notar que la curva con  $\beta = 0.04$ , que corresponde a  $\epsilon \approx G$ , viene de un campo en rodamiento lento.

Graficamos el factor de escala como función del tiempo cósmico para intensidades  $\beta = 0.01$  y  $\beta = 0.04$ , resultado que mostramos en la figura 6.5. También mostramos el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ , las condiciones iniciales son tales que, a un momento temprano, ambos modelos tienen la misma cantidad de materia oscura, aquí dada por la interacción. Notemos que el factor de escala crece más lentamente que en el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ . Esto es debido a que la materia oscura emulada cae como  $\phi^2 a^{-3}$  en lugar de caer como  $a^{-3}$ . La edad del universo es alrededor de 3% más grande que en el modelo estándar para el caso  $\beta = 0.01$  y alrededor de 10% en el caso  $\beta = 0.04$ .

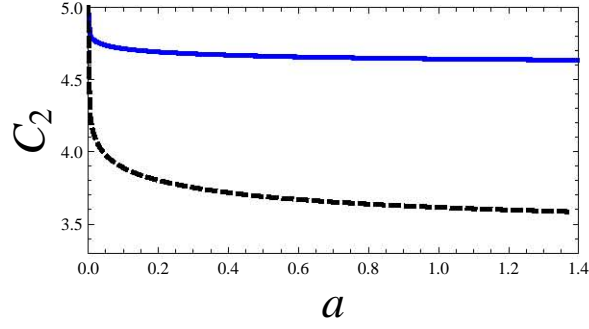


FIGURA 6.6: Evolución de  $C_2(\phi)$  como función del factor de escala usando:  $\beta = 0.01$ , curva sólida; y  $\beta = 0.04$ , curva cortada.

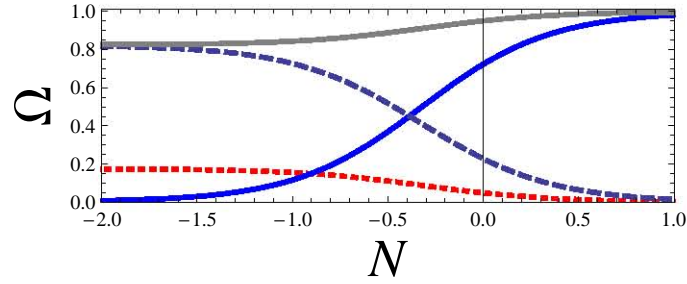


FIGURA 6.7: Evolución de los parámetros de densidad como función del número de  $e$ -folds,  $N = \ln a$ , usando  $\beta = 0.01$ . La curva superior es  $\Omega_{\text{dark}}$ ; la curva punteada  $\Omega_b$ ; la curva cortada,  $\Omega_{\text{int}}$ ; y la curva sólida,  $\Omega_\phi$ .

En la figura 6.6 graficamos  $C_2(\phi)$  como función del factor de escala para intensidades  $\beta = 0.01$  y  $\beta = 0.04$ , con un valor inicial  $C_2(\phi_i)$ . Notamos que, como sucede en los casos mostrados en la figura 6.3, después de un tiempo transitorio ambas funciones se vuelven menos empinadas.

La figura 6.7 muestra la evolución de los diferentes parámetros de densidad en función del número  $N$  de  $e$ -folds,  $N = \ln a$ . Éstos están dados por

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{dark}}(z) &= \frac{8\pi G}{3H^2} \left( \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \frac{1}{2}\epsilon\phi^2\frac{\rho_0}{a^3} \right), \\ \Omega_b(z) &= \frac{8\pi G}{3H^2} \frac{\rho_0}{a^3}, \\ \Omega_{\text{int}}(z) &= \frac{8\pi G}{3H^2} \frac{1}{2}\epsilon\phi^2\frac{\rho_0}{a^3}, \\ \Omega_\phi(z) &= \frac{8\pi G}{3H^2} \left( \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 \right).\end{aligned}$$

Notemos que  $\Omega_{\text{dark}} = \Omega_{\text{int}} + \Omega_\phi$  y  $\Omega_{\text{dark}} + \Omega_b = 1$ .

### 6.4.2. Ajuste a supernovas tipo Ia

Como hemos mencionado en la introducción, hasta ahora la evidencia más directa de la expansión acelerada del universo proviene de observaciones de supernovas tipo Ia [19, 20, 84].

La magnitud aparente  $m$  de un objeto astronómico con magnitud absoluta  $M^3$  está relacionada con la distancia lumínica (en un universo espacialmente plano)

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (6.90)$$

por la ecuación

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L(z)}{\text{Mpc}} \right) + 25, \quad (6.91)$$

donde  $\mu(z) \equiv m - M$ , llamada distancia módulo, es obtenida de las observaciones; de hecho, se miden las magnitudes aparentes  $m$  de las supernovas, mientras sus magnitudes absolutas se infieren de las propiedades de sus curvas de luz usando la *relación de Phillips* [231].

Comparamos nuestro modelo con los datos de la compilación Union 2 [84], que consta de 557 supernovas entre los corrimientos al rojo  $z = 0.015$  y  $z = 1.414$ , usando la estadística  $\chi^2$  (véase el apéndice B). Fijamos los valores de los parámetros  $\beta$  y  $H_0$  a  $\beta = 0.01$  y  $H_0 = 74.2 \text{ km/s/Mpc}$  [23], y dejamos libres los parámetros  $C_1$  y  $C_2(\phi_0)$ . En la figura 6.8 mostramos las curvas de confianza a  $1\sigma$  y a  $2\sigma$ . El mejor ajuste está dado por  $C_1 = 0.305$  y  $C_2(\phi_0) = 4.66$ , que corresponden a un valor de la función  $\chi^2$  por grado de libertad de  $\chi_{\text{d.o.f}}^2 = 0.98$ .

En la figura 6.9 mostramos la curva de expansión en el espacio  $\mu$ - $z$  que proviene del mejor ajuste obtenido, las barras de error corresponden a los datos observacionales.

### 6.4.3. Perturbaciones lineales

En las secciones anteriores demostramos que la dinámica homogénea e isotrópica puede hacerse muy similar al modelo  $\Lambda$ CDM. De hecho, tanto como se quiera, estando en una degeneración efectiva con este modelo. Esto se debe sobre todo a que los fluidos son afectados por el campo escalar sólo gravitacionalmente, ya que únicamente gradientes espaciales del campo escalar, respecto al observador  $u^\mu$  que define las hipersuperficies de tiempo constante, aparecen en la fuente de la ecuación de geodésicas (6.24). En la cosmología de fondo sólo se consideran variaciones temporales del campo escalar; de otra

---

<sup>3</sup>Se define magnitud absoluta  $M$  como la magnitud aparente  $m$  medida para una estrella, o cualquier objeto astronómico, a una distancia de 10pc; por definición, la estrella Vega tiene una magnitud  $M = 0$ .

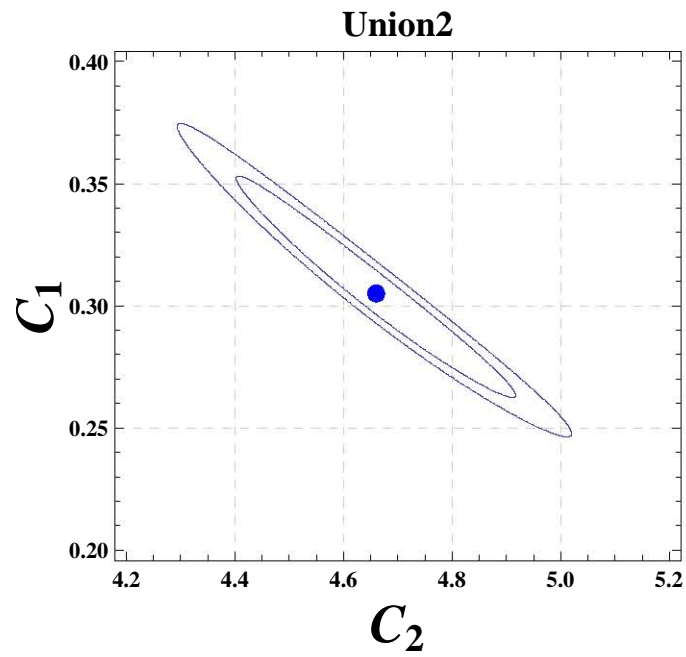


FIGURA 6.8: Curvas de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ . El punto central es  $C_1 = 0.305$  y  $C_2(\phi_0) = 4.66$ , que corresponde a un valor mínimo  $\chi_{d.o.f.}^2 = 0.98$ .

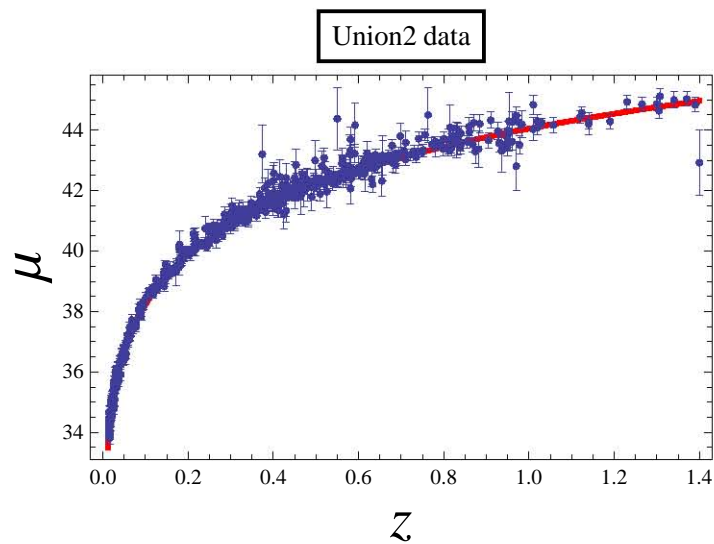


FIGURA 6.9: Datos de supernovas de la compilación Union 2 y la predicción del mejor ajuste de nuestro modelo.



manera se romperían las simetrías de rotación y de traslación, y por lo tanto éste no ejercería ninguna fuerza sobre los fluidos cósmicos. Esto no es cierto en la cosmología inhomogénea, donde se deben tener en cuenta gradientes espaciales. De acuerdo con esto, uno espera que la evolución de los campos de bariones a nivel perturbativo difiera de la obtenida en el modelo  $\Lambda$ CDM, rompiendo con la degeneración. Sin embargo, en esta sección demostraremos que el modelo tiene un crecimiento aceptable de las perturbaciones de materia bariónica a partir de la época de última dispersión.

Consideraremos perturbaciones escalares después de la etapa de la última dispersión. Inicialmente trabajaremos en la norma newtoniana conforme, descrita por el elemento de línea

$$ds^2 = a^2 \left( -(1 + 2\Psi)d\tau^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \right). \quad (6.92)$$

Las perturbaciones en la densidad de energía de los campos de materia están dadas por

$$T_{(m)0}^0 = -\rho(\tau)(1 + \delta(\tau, \vec{x})), \quad (6.93)$$

y las perturbaciones de sus velocidades (escritas en las coordenadas definidas por la métrica (6.92)),

$$u^\mu = \frac{1}{a} (1 - \Psi, v^i). \quad (6.94)$$

Al igual que en la sección 2.2.2, definimos la variable  $\theta$  como la divergencia de la velocidad peculiar de los fluidos de polvo en el espacio de momentos,  $\theta = -ik_i v^i$ . Las perturbaciones del campo escalar están dadas por

$$\phi(\tau, \vec{x}) = \phi_0(\tau) + \delta\phi(\tau, \vec{x}). \quad (6.95)$$

Las ecuaciones gravitacionales perturbadas se obtienen de las ecuaciones de campo (6.52). De la ecuación (00) se obtiene

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\dot{\Phi} + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G \left[ -\dot{\phi}_0\delta\dot{\phi} + \Psi\dot{\phi}_0^2 - a^2 V_{,\phi}(\phi_0)\delta\phi - a^2 e^\alpha \rho(\delta + \alpha_{,\phi}(\phi_0)\delta\phi) \right]. \quad (6.96)$$

Contrayendo la ecuación (0i) con el número de onda  $k^i$  obtenemos

$$k^2(\dot{\Phi} + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G \left[ k^2\dot{\phi}_0\delta\phi + a^2 e^\alpha \rho\theta \right]. \quad (6.97)$$

La traza de la parte espacial da la ecuación

$$\ddot{\Phi} + \mathcal{H}(\dot{\Psi} + 2\dot{\Phi}) + (2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2)\Psi + \frac{k^2}{3}(\Phi - \Psi) = 4\pi G \left[ -\Psi\dot{\phi}_0^2 + \dot{\phi}_0\delta\dot{\phi} - a^2 V'(\phi_0)\delta\phi \right]. \quad (6.98)$$

La cuarta ecuación gravitacional la obtenemos de la parte espacial sin traza, después de contraer con el proyector  $(k_i k_j - k^2 \delta_{ij}/3)/k^2$ ,

$$k^2(\Phi - \Psi) = 12\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma, \quad (6.99)$$

donde  $\bar{\rho}$  y  $\bar{P}$  son la densidad de energía y la presión de todas las fuentes de materia, incluyendo al campo escalar, y

$$(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma = \frac{1}{k^2}(k_i k^j + k^2 \delta_i^j)(T^i_j - \delta_j^i T^k_k) \quad (6.100)$$

es el escalar de estreses anisotrópicos. Para un campo escalar  $\sigma = 0$ , lo mismo sucede para el fluido perfecto acoplado al campo escalar. De aquí que los dos potenciales gravitacionales sean iguales,  $\Psi = \Phi$ , simplificando las ecuaciones gravitacionales perturbadas. Las ecuaciones hidrodinámicas se obtienen de la ecuación de continuidad (6.23)

$$\dot{\delta} - 3\dot{\Psi} + \theta = 0, \quad (6.101)$$

de la ecuación de geodésicas (6.24)

$$\dot{\theta} + (2\mathcal{H} + \alpha'(\phi_0)\dot{\phi}_0)\theta - k^2(\Psi + \alpha'(\phi_0)\delta\phi) = 0 \quad (6.102)$$

y de la ecuación de Klein-Gordon (6.54)

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 2\mathcal{H}\dot{\phi} + \left[ k^2 + a^2 V_{,\phi\phi}(\phi_0) + a^2 e^\alpha(\alpha_{,\phi}^2 + \alpha_{,\phi\phi}) \right] \delta\phi \\ = -2a^2 \Psi V_{,\phi}(\phi_0) - a^2 \alpha_{,\phi} e^\alpha \rho (\delta + 2\Psi) + 4\dot{\phi}_0 \dot{\Psi}. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Escogemos ahora la función de acoplamiento  $e^{\alpha(\phi)}$  y el potencial  $V(\phi)$  dados por las ecuaciones (6.79) y (6.80), respectivamente. Evolucionamos el sistema de ecuaciones usando el tiempo cósmico con ayuda del software Mathematica. Dado que en el sistema de ecuaciones (6.96-6.99) y (6.101-6.103) no todas son independientes, escogemos evolucionar las ecuaciones (6.97) y (6.101-6.103). Es decir, evolucionamos el sistema

$$\frac{2k^2}{a^2}(\Phi' + H\Phi) = 8\pi G \left[ \frac{k^2}{a^2} \phi_0' \delta\phi + \rho \left( 1 + \frac{1}{2} \epsilon \phi_0^2 \right) \frac{\theta}{a} \right], \quad (6.104)$$

$$\delta' - 3\Phi' + \frac{1}{a}\theta = 0, \quad (6.105)$$

$$\frac{1}{a}\theta' + \left( 2H + \frac{\epsilon \phi_0 \phi_0'}{1 + \frac{1}{2} \epsilon \phi_0^2} \right) \frac{1}{a}\theta = \frac{k^2}{a^2} \left( \Phi + \frac{\epsilon \phi_0}{1 + \frac{1}{2} \epsilon \phi_0^2} \delta\phi \right) \quad (6.106)$$

y

$$\delta\phi'' + 3H\delta\phi' + \left[ \frac{k^2}{a^2} + m_\phi^2 + \epsilon\rho \right] \delta\phi = -2m_\phi^2\phi_0\Phi - \epsilon\rho\phi_0(\delta + 2\Phi) + 4\phi_0'\Phi'. \quad (6.107)$$

Recordemos que en la notación que hemos seguido prima significa derivada respecto al tiempo cósmico  $t$  y punto derivada respecto al tiempo conforme  $\tau$ , ambos relacionados por  $d/d\tau = a(t) d/dt$ . Hemos decidido usar el tiempo cósmico dado que éste es más conveniente para simular las épocas tardías, a diferencia del tiempo conforme, que permite acercarse a la singularidad,  $a \rightarrow 0$ , con mayor precisión.

Evolucionamos las ecuaciones para un número de onda comóvil  $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$  y para intensidades de acoplamiento  $\beta = 0.01$  y  $\beta = 0.04$ . Las condiciones de la cosmología de fondo son tales que ambos modelos tienen la misma cantidad de materia oscura emulada al inicio de la evolución, en  $z = 100$ , que la que tiene el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ ; además tomamos  $\delta_i = 0.0001$ ,  $\Phi_i = -0.01$ ,  $\theta_i = 0$ ,  $\delta\phi_i = 0.01 M_p$  y  $\dot{\delta\phi}_i = 0$ . Estas condiciones iniciales son arbitrarias, es decir, no son obtenidas a partir de una simulación previa, por lo que el análisis es cualitativo. En las figuras 6.10 y 6.11 graficamos los resultados obtenidos; las curvas cortadas muestran los resultados en el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ .

Para la discusión siguiente reescribimos la ecuación (6.96) usando las elecciones del modelo particular que ahora estudiamos, obteniendo la ecuación de Poisson:

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{a^2}\Phi + 3H(\Phi' + H\Phi) = 4\pi G \left[ \phi_0'^2\Phi - \phi_0'\delta\phi' - m_\phi^2\phi_0\delta\phi \right. \\ \left. - \rho \left( 1 + \frac{1}{2}\epsilon\phi_0^2 \right) \left( \delta + \frac{\epsilon\phi_0}{1 + \frac{1}{2}\epsilon\phi_0^2} \delta\phi \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.108)$$

Un parámetro interesante de estudiar es la velocidad del sonido de las perturbaciones del campo escalar, dada por  $c_s^2 = \delta p_\phi / \delta \rho_\phi$ ,

$$c_s^2 = \frac{\dot{\phi}_0\dot{\delta\phi} - \dot{\phi}_0^2\Psi - m_\phi^2\phi_0\delta\phi}{\dot{\phi}_0\dot{\delta\phi} - \dot{\phi}_0^2\Psi + m_\phi^2\phi_0\delta\phi + \frac{1}{2}\epsilon\phi_0^2(\delta + \frac{\epsilon\phi_0}{1 + \frac{1}{2}\epsilon\phi_0^2}\delta\phi)\rho_{b0}a^{-3}}. \quad (6.109)$$

Para un campo escalar libre con término cinético canónico, la velocidad del sonido en un marco de referencia en el cual éste se encuentre en reposo es exactamente igual a uno, independientemente del potencial (véase el apéndice A de [121] para una demostración de este resultado). Esto pone en duda la formación de estructura de campo escalar a escalas por debajo del horizonte,  $k > \mathcal{H}$ .

En este modelo particular, definido por  $\Omega_c = 0$  y las ecuaciones (6.79) y (6.80), el campo escalar actúa tanto como energía oscura como materia oscura a través del acoplamiento

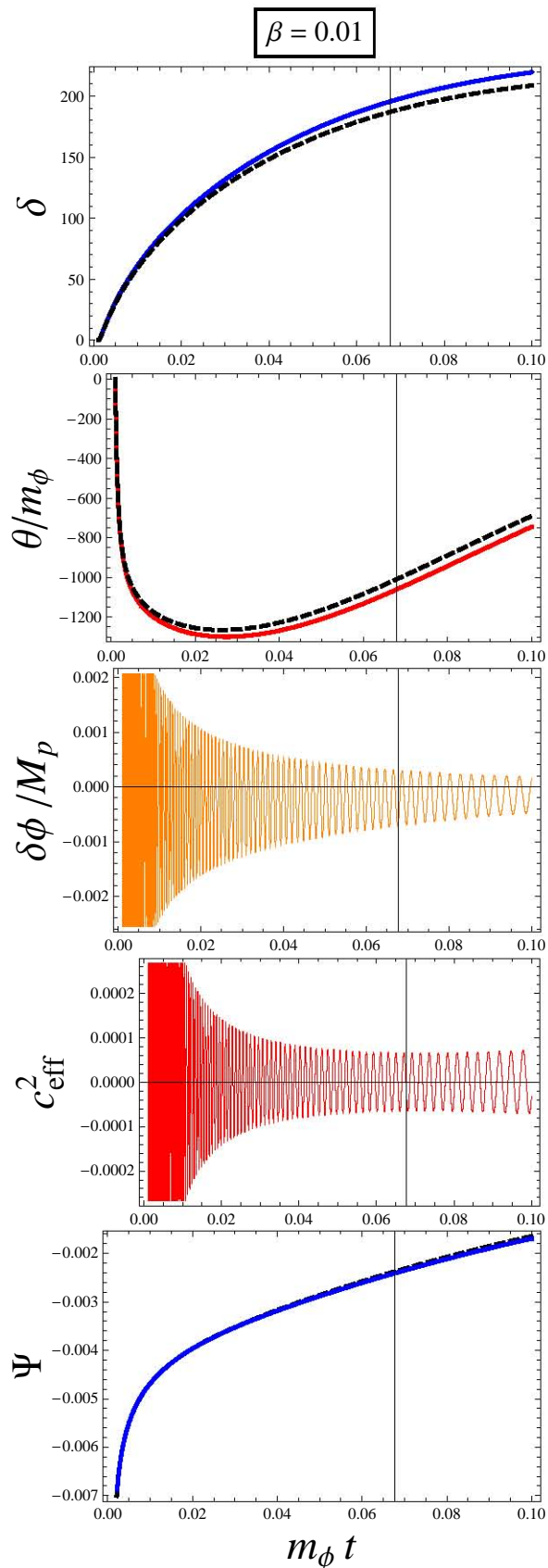


FIGURA 6.10: Evolución de las perturbaciones iniciales para un número de onda comóvil con la expansión  $k = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$ , usando  $\beta = 0.01$ . Para escalas por debajo del horizonte  $k \gg H$  se cumple aproximadamente la relación  $\delta(k_2)/\delta(k_1) = k_2^2/k_1^2$  para el contraste de densidad. Las curvas entrecortadas muestran los resultados en el modelo  $\Lambda\text{CDM}$  y las líneas verticales corresponden al tiempo presente. La dinámica de la cosmología de fondo es la misma que en la figura 5.1.

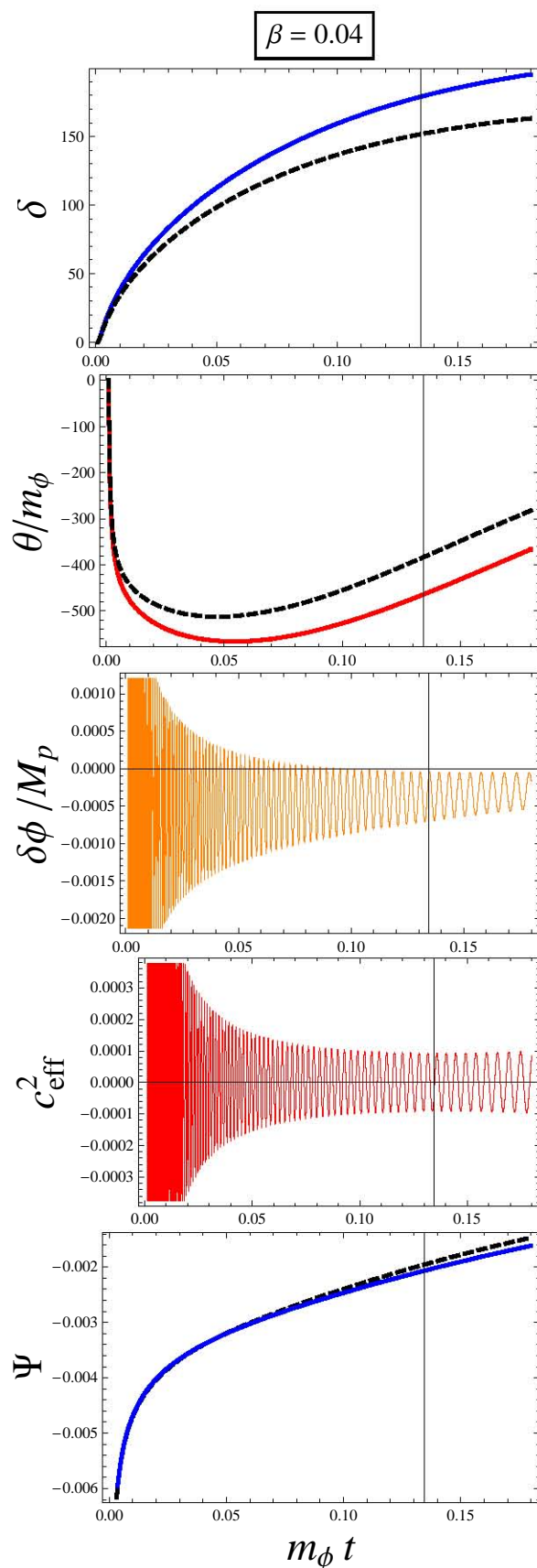


FIGURA 6.11: Igual que en la figura 6.10 pero con  $\beta = 0.04$ , que corresponde a  $\epsilon \approx G$ .

con los bariones. Como componente de energía oscura, las perturbaciones del campo escalar tienden a desaparecer, pero por otro lado la interacción produce que la velocidad del sonido se vaya a cero, debido al último término en el denominador de la ecuación (6.109), permitiendo que las perturbaciones de campo escalar crezcan. Debido a estos dos efectos, las perturbaciones del campo escalar no son borradas completamente, en lugar de esto, las perturbaciones pueden crecer, o al menos mantenerse alrededor de un valor distinto de cero. Este comportamiento se puede observar en las figuras 6.10 y 6.11, donde las perturbaciones del campo no caen a cero, sino que se mantienen oscilando alrededor de un valor negativo.

Las perturbaciones del campo escalar son fuente del potencial gravitacional, como puede observarse de la ecuación (6.108), que actúa sobre la materia bariónica a través de la ecuación (6.105). Ésta es una característica de la materia oscura. Notamos que el signo del promedio de las perturbaciones del campo escalar es negativo y de la ecuación de Poisson (6.108); éstas actúan como una fuente repulsiva. Sin embargo, como se puede observar de las figuras 6.10 y 6.11, la evolución del potencial gravitacional es muy similar a la del modelo  $\Lambda$ CDM. Esto se debe a que la densidad de energía de la materia bariónica se encuentra multiplicada por el factor  $(1 + \epsilon\phi^2/2)$  en la ecuación (6.79), contribuyendo como una fuerza gravitacional atractiva. Por otro lado, el factor de escala crece más lentamente que en el modelo  $\Lambda$ CDM, como se puede observar de la figura 6.5, lo que produce un incremento en las perturbaciones gravitacionales a través del segundo término de la ecuación (6.108). Como resultado neto de estos efectos, la intensidad del potencial gravitacional es ligeramente más grande ( $\Phi$  más negativa), y por tanto el contraste de densidad crece más rápido que en el modelo  $\Lambda$ CDM.



## Capítulo 7

# Conclusiones

En la definición más radical de las componentes oscuras del universo, éstas interactúan únicamente de manera gravitacional con el modelo estándar de partículas. Como consecuencia del carácter universal de la gravitación, mediante un único experimento sólo es posible inferir el tensor de energía momento de las componentes oscuras en su totalidad. Por lo tanto, descomposiciones del sector oscuro, como sucede con el modelo  $\Lambda$ CDM, pueden ser arbitrarias. Si de hecho las componentes oscuras no interactúan de otra manera, su composición es fundamentalmente imposible de elucidar. A esta propiedad se le ha llamado degeneración oscura, y si bien el sector oscuro puede estar compuesto de materia oscura y energía oscura, igualmente podría ser un solo fluido o una gran cantidad de fluidos con acoplamientos entre ellos. En este trabajo hemos estudiado algunos aspectos de la degeneración oscura.

Primero, en el capítulo 3, hemos definido el fluido oscuro como un fluido perfecto barotrópico cuya velocidad del sonido adiabática es igual a cero. Demostramos que con esta sencilla caracterización se obtiene la misma cosmología de fondo que la del modelo  $\Lambda$ CDM. Nuestra definición es motivada por constricciones astronómicas de la materia oscura. Al hacer la velocidad del sonido igual a cero, la escala de Jeans del fluido oscuro es igual a cero, lo que permite que sus perturbaciones crezcan a todas las escalas, como sucede con la materia oscura fría; además, permite que el fluido tenga una presión distinta de cero. Escenarios astrofísicos y cosmológicos impiden que esta presión sea muy grande, pero bien puede tomar valores similares a la densidad crítica del universo hoy en día. Imponiendo que la densidad de energía del fluido oscuro sea positiva en todo momento, resulta como consecuencia que esta presión debe ser negativa, lo que produce la expansión acelerada del universo. Más aún, bajo la suposición de adiabaticidad de las perturbaciones, mostramos que el modelo del fluido oscuro es idéntico al  $\Lambda$ CDM a todos los niveles en teoría de perturbaciones. Por tanto, el fluido oscuro está en degeneración



con el modelo  $\Lambda$ CDM en teoría de perturbaciones cosmológicas. En este capítulo mostramos también cómo es posible construir el fluido oscuro bajo el esquema de relatividad general usando una cantidad arbitraria de fluidos con interacciones entre ellos, pero no con las partículas del modelo estándar.

La degeneración oscura motiva a buscar modelos cercanos al fluido oscuro, los cuales tengan signaturas ligeramente diferentes que puedan ser detectadas en presentes o futuras observaciones; por ejemplo, modelos que presenten degeneración exacta hasta cierto nivel perturbativo, pero que ésta se rompa al siguiente nivel, como hacemos en el capítulo 5.

El resto del trabajo lo dedicamos a estudiar modelos cercanos al fluido oscuro, poniendo especial atención a sus predicciones observacionales.

El gas de Chaplygin ha sido largamente estudiado en la literatura. Éste es caracterizado totalmente por una ecuación de estado  $P \propto -\rho^{-\alpha}$  y una escala de homogeneidad (ecuación (4.6)). Por debajo de esta escala, podemos asumir un universo homogéneo e isotrópico regido por la ecuación de estado arriba escrita. Las propiedades de la expansión del factor de escala imitan a las del modelo  $\Lambda$ CDM en las regiones asintóticas temporales pasadas y futuras; sin embargo, la etapa intermedia, cuando es comparada con observaciones, acota fuertemente el valor del parámetro  $\alpha$  hasta el orden de  $10^{-3}$  o menor. En el capítulo 4 presentamos una extensión del gas de Chaplygin obtenida de la geometrotermodinámica (GTD). Este formalismo ha sido diseñado para describir sistemas termodinámicos con el uso de geometría diferencial, y también provee de ecuaciones fundamentales que son soluciones de un problema variacional. En la sección 4.1 presentamos una introducción a este formalismo. Una de las ecuaciones fundamentales encontradas deriva en un nuevo fluido al que llamamos fluido oscuro GTD, cuya ecuación de estado está dada por  $P \propto -a^{3(\alpha-\beta)}\rho^{-\alpha}$ . El caso  $\alpha = \beta$  se reduce al gas de Chaplygin cuando  $0 < \alpha \leq 1$ ; a los fluidos politrópicos cuando  $\alpha < 0$ , y al fluido oscuro cuando  $\alpha = 0$ .

Mostramos que es posible interpretar este nuevo fluido como un fluido unificado de energía oscura y materia oscura. Para probar esto usamos las ecuaciones de Friedmann con el fin de realizar un detallado análisis del comportamiento del factor de escala cósmico y del parámetro de la ecuación de estado. Los resultados obtenidos se encuentran en concordancia con observaciones cosmológicas actuales. La principal diferencia entre el gas de Chaplygin y el fluido oscuro GTD consiste en el comportamiento de la velocidad del sonido. Aunque en el plano de la cosmología homogénea e isotrópica esto no tenga ninguna implicación, las perturbaciones a la cosmología de fondo muestran una diferencia sustancial. El cuadrado de la velocidad del sonido siempre es positivo para el gas de Chaplygin, mientras es negativo en general para el fluido oscuro GTD, lo que produce

un mayor crecimiento de los contrastes de densidad en el último caso. Un análisis del espectro de la radiación cósmica de fondo muestra que las desviaciones del modelo  $\Lambda$ CDM se dan principalmente a grandes escalas. Esto es debido a que antes de la época del desacoplamiento los dos fluidos son esencialmente iguales; el fluido GTD se comporta como materia oscura, por lo que las desviaciones son producto de la cosmología a tiempos tardíos y en el espectro angular de potencias de la radiación cósmica de fondo éstas son reflejadas por el efecto Sachs-Wolfe integrado.

Encontramos constricciones a los parámetros libres del fluido GTD usando observaciones de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo, supernovas tipo Ia y el valor de la constante de Hubble, y obtenemos que  $\alpha$  y  $\beta$  deben ser del orden de  $10^{-3}$  o menores, en concordancia con cotas encontradas para el gas de Chaplygin en la literatura. Además, encontramos una fuerte degeneración en los parámetros a lo largo de la recta  $\beta = 3\alpha$ .

La naturaleza microscópica del fluido GTD es desconocida, tanto como la de la materia oscura y la energía oscura en el modelo  $\Lambda$ CDM, y a diferencia del modelo de Chaplygin, el cual está fundamentado en campos escalares complejos o con términos cinéticos no canónicos.

Por otro lado, se esperan interacciones entre la materia oscura y los bariones debido a que sus abundancias son similares, lo que apunta a que tienen un origen común. De hecho, ésta es la esperanza de diversos experimentos terrestres que buscan detectar directamente la materia oscura. Además, si estas interacciones existieran, en principio podría ser rota la degeneración oscura. Distintas teorías de física de partículas predicen tales acoplamientos. Los candidatos de materia oscura que quizá han sido más estudiados son los WIMP; sin embargo, otras alternativas como los escenarios donde la materia oscura actúa sobre el modelo estándar a través de la fuerza nuclear fuerte han sido consideradas ampliamente. Esta última tiene la propiedad de ser oscura en el sentido de que no interactúa con los fotones.

En el capítulo 5, basados en la conservación local del tensor de energía momento, desarrollamos una clase muy general de interacciones entre el fluido oscuro y los bariones. Mantenemos la degeneración oscura a nivel cero en teoría de perturbaciones al no permitir transferencia de energía entre las componentes, por lo que la cosmología de fondo es la misma que en el modelo  $\Lambda$ CDM (este enfoque está inspirado en una serie de artículos donde se parametrizan las desviaciones a relatividad general por efectos a primer orden en teoría de perturbaciones). Permitimos una transferencia de momento en la interacción, por lo que la cosmología difiere en general de la del modelo  $\Lambda$ CDM. Sin embargo, demostramos que estas mismas interacciones pueden ser entendidas como acoplamientos entre la materia oscura y la materia bariónica. Por lo anterior, aunque hemos roto la degeneración con el modelo  $\Lambda$ CDM, estos modelos están degenerados con el modelo

$\Lambda$ CDM con las mismas interacciones. En conclusión, de esta manera no es posible romper la degeneración oscura.

En ausencia de una teoría fundamental proponemos dos parametrizaciones para la interacción. La primera, llamada  $\Sigma_I$ , está inspirada en el electromagnetismo y presenta la misma estructura en la ecuación de Euler que la dispersión Thomson; cabe decir que las ecuaciones de los fluidos son iguales a las obtenidas en los modelos de interacción a través de fuerza nuclear fuerte. La segunda,  $\Sigma_{II}$ , está inspirada en los modelos camaleónicos; a grandes densidades del medio, la interacción es mayor que a bajas densidades, y ésta, por lo tanto, decae con la expansión del universo. Comparaciones con observaciones de la radiación cósmica de fondo, supernovas tipo Ia y la constante de Hubble imponen constricciones fuertes en la razón  $\Sigma/m_d$ , donde  $m_d$  es la masa de las *partículas* del fluido oscuro. Si parametrizamos arbitrariamente la interacción con esta masa igual a la masa del protón, obtenemos que  $\Sigma_I$  debe ser del orden de  $10^{-8}$  veces la sección eficaz de Thomson por la velocidad de la luz o menor, mientras que la interacción  $\Sigma_{II}$  es del mismo orden que la interacción Thomson. Sin embargo, la interacción  $II$  efectiva es  $\Sigma_{II}a^2$ , por lo que a tiempos tempranos es despreciable. Añadimos al conjunto de observaciones el catálogo de galaxias luminosas rojas DR7 del SDSS, lo que acota las interacciones por un orden de magnitud más. Sin embargo, el método usado para hacer estas comparaciones observacionales no es tan confiable, debido a que usa técnicas de ajuste de parámetros espurios que consideran válido el modelo  $\Lambda$ CDM, además del problema del sesgo galáctico.

Es plausible que, de ser detectadas firmas observacionales de interacciones en el sector oscuro, éstas sean debidas a una razón distinta: a la validez de una teoría gravitacional diferente a la relatividad general. En el capítulo 6 discutimos las teorías  $f(R)$  y las teorías escalares tensoriales, específicamente la equivalencia matemática entre estas teorías. Luego demostramos que interacciones de un campo escalar con la materia bariónica son equivalentes a las teorías escalares tensoriales en el marco de Einstein, bajo la suposición de que la densidad de energía física de un fluido de polvo está dada por  $\rho^{(K)} = e^{-\alpha(\phi)}\rho$ , donde el acoplamiento conforme con la métrica se da a través de la función  $e^{2\alpha(\phi)}$ . En especial, estudiamos una clase de teorías donde el acoplamiento se da a través de la traza del tensor de energía momento de las partículas del modelo estándar al nivel de la densidad lagrangiana. Vemos que la consecuencia de la interacción sobre los fermiones es la de cambiar su masa; lo mismo sucede con un fluido perfecto de polvo. Para materia ultra-relativista y radiación, el acoplamiento es cero, por lo que el campo escalar no interactúa con fotones.

Mostramos un mecanismo en el que interacciones de intensidad similar a la gravitacional de un campo escalar tipo quintaesencia con materia bariónica da lugar a efectos similares

a los de la materia oscura. Esto puede explicar parte, o la totalidad, de la materia faltante en el universo. En un modelo específico no usamos nada de materia oscura; sus efectos son dados por la interacción. Hemos descrito la cosmología de fondo y, ajustando los parámetros libres del modelo con observaciones de supernovas, podemos mimetizar tanto como queramos al modelo  $\Lambda$ CDM en sus soluciones homogéneas e isotrópicas, por lo que ambos modelos se encuentran en degeneración parcial. La razón de esto es que el acoplamiento con los bariones produce que el parámetro de la ecuación de estado del sector oscuro (compuesto del campo escalar en rodamiento lento y la interacción) se vaya a cero a tiempos tempranos. Luego, a tiempos tardíos tiende a su valor en quintaesencia, es decir, a  $-1$ . Al estudiar la cosmología perturbada a primer orden, hemos demostrado que estos modelos son capaces de formar estructura sin la necesidad de materia oscura. La velocidad del sonido de las perturbaciones de un campo escalar con término cinético canónico es igual a uno independientemente de su potencial, lo que provoca que cualquier perturbación inicial de éste con longitud de onda menor que el radio de Hubble rápidamente decaiga, impidiendo que crezcan y se forme una estructura de campo escalar. Un efecto de la interacción es hacer tender a cero la velocidad del sonido del campo escalar, permitiendo que sus perturbaciones no decaigan. En el modelo particular que estudiamos, esto induce que las perturbaciones del campo escalar oscilen alrededor de un valor negativo, contribuyendo con una gravitación repulsiva. A pesar de ello, mostramos que las perturbaciones de materia bariónica pueden crecer tanto como en el modelo  $\Lambda$ CDM. Esto se debe a que el acoplamiento incrementa la intensidad gravitacional de los bariones.

Cabe mencionar que para que estos modelos no afecten la historia muy temprana del universo, como la etapa de nucleosíntesis, el campo escalar debe encontrarse en rodamiento lento al menos desde esa época.



# Apéndice A

## Convenciones, constantes y relaciones útiles

### Unidades

En este trabajo usamos unidades de física de partículas (o unidades naturales):

$$\hbar = c = k_B = 1. \quad (\text{A.1})$$

Con esta elección las unidades de masa, energía, tiempo, distancia y temperatura se relacionan por

$$[\text{energía}] = [\text{masa}] = [\text{temperatura}] = [\text{longitud}]^{-1} = [\text{tiempo}]^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

En el cuadro [A.1](#) mostramos una tabla de conversiones para estas unidades.

TABLA A.1: Tabla de conversiones.  $\hbar = c = k_B = 1$ .

	GeV	K	kg	$\text{m}^{-1}$	$\text{s}^{-1}$	$\text{Mpc}^{-1}$	$H_0/h$
GeV	1	$1.16 \times 10^{13}$	$1.78 \times 10^{-36}$	$5.07 \times 10^{15}$	$1.52 \times 10^{24}$	$1.56 \times 10^{38}$	$4.69 \times 10^{41}$
K	$8.62 \times 10^{-14}$	1	$1.53 \times 10^{-49}$	$4.37 \times 10^2$	$1.33 \times 10^{11}$	$1.34 \times 10^{25}$	$4.04 \times 10^{28}$
kg	$5.61 \times 10^{27}$	$6.52 \times 10^{48}$	1	$2.85 \times 10^{51}$	$8.54 \times 10^{59}$	$8.76 \times 10^{73}$	$2.63 \times 10^{77}$
$\text{m}^{-1}$	$1.97 \times 10^{-16}$	$2.29 \times 10^{-3}$	$3.51 \times 10^{-52}$	1	$3.00 \times 10^8$	$3.09 \times 10^{22}$	$9.25 \times 10^{35}$
$\text{s}^{-1}$	$6.58 \times 10^{-25}$	$7.53 \times 10^{-12}$	$1.17 \times 10^{-60}$	$3.34 \times 10^{-9}$	1	$1.16 \times 10^{14}$	$3.08 \times 10^{17}$
$\text{Mpc}^{-1}$	$6.39 \times 10^{-39}$	$7.44 \times 10^{-26}$	$1.14 \times 10^{-74}$	$3.24 \times 10^{-23}$	$9.14 \times 10^{-15}$	1	$3.00 \times 10^3$
$H_0/h$	$2.13 \times 10^{-42}$	$2.47 \times 10^{-29}$	$3.79 \times 10^{-78}$	$1.08 \times 10^{-36}$	$3.24 \times 10^{-18}$	$3.34 \times 10^{-3}$	1

## Geometría

Un espacio-tiempo es un par  $(\mathcal{M}, g)$  donde  $\mathcal{M}$  es una variedad diferencial de cuatro dimensiones y  $g$  es una métrica riemanniana no degenerada. Las funciones coordenadas de las variedades sobre los reales son denotadas por los símbolos  $x, y, \dots$ . Índices griegos denotan todas sus componentes, mientras índices latinos denotan únicamente componentes espaciales. También usaremos la descomposición del tipo  $x = (t, \vec{x})$  o  $x^\mu = (x^0, x^i)$ .

Usamos la signatura  $(-, +, +, +)$  para la métrica del espacio-tiempo. El tensor de Riemann y el tensor de Ricci están dados por

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \quad (\text{A.3})$$

y

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Usando la métrica

$$ds^2 = a(\tau) \left[ - (1 + 2\Psi) d\tau^2 + (1 - 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right], \quad (\text{A.5})$$

se obtienen los símbolos de Christoffel dados en el cuadro [A.2](#)

TABLA A.2: Símbolos de Christoffel para la métrica (A.5).

---


$$\begin{aligned} \Gamma^0{}_{00} &= \mathcal{H} + \dot{\Psi} \\ \Gamma^i{}_{00} &= \delta^{ik} \Psi_{,k} \\ \Gamma^0{}_{0i} &= \Psi_{,i} \\ \Gamma^i{}_{0j} &= (\mathcal{H} - \dot{\Phi}) \delta^i_j \\ \Gamma^0{}_{ij} &= \mathcal{H} \delta_{ij} - [2\mathcal{H}(\Psi + \Phi) + \dot{\Phi}] \delta_{ij} \\ \Gamma^k{}_{ij} &= -[\delta^k_i \delta^l_j + \delta^l_i \delta^k_j - \delta_{ij} \delta^{kl}] \Phi_{,l} \end{aligned}$$


---

## Convenciones

La transformada de Fourier de una función espacial  $f(\vec{x})$  está dada por

$$f(\vec{k}) = \int d^3x f(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (\text{A.6})$$

y su inversa es

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k f(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (\text{A.7})$$

Usamos la misma letra para  $f(\vec{x})$  y para su transformada de Fourier  $f(\vec{k})$ .

La función delta de Dirac está dada por

$$\delta_D(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (\text{A.8})$$

## Constantes

En el cuadro A.3 presentamos algunas constantes fundamentales en unidades naturales y en unidades convencionales.

TABLA A.3: Constantes fundamentales.

Constante		Unidades naturales		Unidades convencionales
Constante de Planck	$\hbar =$	1	=	$1.0546 \times 10^{-34}$ kg m/s
Velocidad de la luz	$c =$	1	=	$2.9979 \times 10^8$ m/s
Constante de Boltzmann	$k_B =$	1	=	$8.6170 \times 10^{-14}$ GeV/K
Constante de Newton	$G =$	$6.7071 \times 10^{-39}$ GeV <sup>-2</sup>	=	$6.6732 \times 10^{-11}$ m/(kg s)
Masa del electrón	$m_e =$	$5.1099 \times 10^{-3}$ GeV	=	$9.1094 \times 10^{-31}$ Kg
Masa del protón	$m_p =$	0.9383 GeV	=	$1.6726 \times 10^{-27}$ Kg
Masa del neutrón	$m_n =$	0.9396 GeV	=	$1.6749 \times 10^{-27}$ Kg
Sección eficaz de Thomson	$\sigma_T =$	$1.7100 \times 10^3$ GeV <sup>-2</sup>	=	$6.6525 \times 10^{-25}$ cm <sup>2</sup>
Constante de Stefan-Boltzmann	$a_{SB} =$	$\pi^2/30$	=	$7.7223 \times 10^{24}$ GeVm <sup>-3</sup> K <sup>-4</sup>





## Apéndice B

# Métodos estadísticos en cosmología

Con la llegada de grandes cantidades de datos de diversas observaciones en las últimas décadas, como son aquellos de supernovas tipo Ia, catálogos de galaxias y anisotropías en la radiación cósmica de fondo, entre otras, la importancia de los métodos estadísticos en cosmología se ha vuelto evidente. Hoy en día los modelos más exitosos en la descripción del universo son el modelo  $\Lambda$ CDM o cualquiera degenerado con éste. Si tomamos en cuenta que éstos tienen al menos seis parámetros libres, notamos que la complicación que implica el análisis de datos requiere de más y mejores métodos estadísticos. Por este motivo, su estudio se ha vuelto un área de investigación de frontera en cosmología; véase por ejemplo [232]. En este apéndice nos concentramos únicamente en aquellos métodos que usamos en este trabajo.

### B.1. Teorema de Bayes y la función de verosimilitud

Supongamos que recolectamos ciertos datos  $D$  de un experimento y los queremos interpretar en términos de un modelo el cual asumimos correcto. Éste tiene ciertos parámetros  $\theta$ , los cuales pretendemos determinar. El objetivo de la estimación de parámetros es encontrar estimados de los parámetros, de sus errores e idealmente la distribución de  $\theta$  dados los datos  $D$ . Ésta es llamada *distribución posterior de probabilidad*  $P(\theta|D)$ .

Sin embargo, a menudo lo que es más simple de calcular es la distribución de probabilidad de los datos dados los parámetros  $\theta$ ,  $P(D|\theta)$ . Estas dos cantidades están relacionadas por el teorema de Bayes

$$P(\theta|D) = \frac{P(D|\theta)P(\theta)}{P(D)}. \quad (\text{B.1})$$

La probabilidad  $\mathcal{L}(\theta) \equiv P(D|\theta)$  es llamada *función de verosimilitud* (*likelihood* en inglés).  $P(\theta)$  es llamada *densidad de probabilidad previa*, o simplemente *previa*, y expresa nuestros conocimientos sobre los parámetros inferidos de experimentos anteriores o de alguna teoría física; a menudo, si no se tiene información previa, usualmente se considera una probabilidad uniforme.  $P(D)$  es llamada *evidencia*, y para la estimación de parámetros no tiene gran relevancia ya que no depende de los parámetros  $\theta$  y simplemente actúa como una constante de normalización. Para distribuciones previas uniformes tenemos  $P(\theta|D) \propto \mathcal{L}(\theta)$ .

Las observaciones, evidentemente, incluyen un error sistemático de medición caracterizado por un valor  $\sigma$  y posiblemente un error estadístico que depende del modelo. Supongamos que los  $N$  datos  $D$  son una realización de un proceso aleatorio gaussiano, de tal manera que su función de verosimilitud está dada por

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det C}} \exp\left(-\frac{\sum_{ij} (D_i - \hat{D}_i(\theta)) C_{ij}^{-1} (D_j - \hat{D}_j(\theta))}{2}\right), \quad (\text{B.2})$$

donde  $\hat{D}(\theta)$  son los datos modelados con los parámetros fijos  $\theta$  y  $C_{ij} = \langle (D_i - \hat{D}_i(\theta))(D_j - \hat{D}_j(\theta)) \rangle$  es la matriz de covarianza. Si la matriz de covarianza es diagonal, las mediciones no están correlacionadas y los elementos de la diagonal están dados por las desviaciones estándar  $\sigma_i$ .

El punto del espacio de parámetros con mayor posibilidad de ser el correcto es el que maximiza la distribución posterior de probabilidad. Sin embargo, si el ajuste es lo suficientemente bueno alrededor de este punto, la distribución previa puede ser aproximada con una constante, de tal manera que a menudo, cuando se estiman parámetros uno simplemente busca el máximo de la función de verosimilitud.

### B.1.1. Estadística $\chi^2$

Una técnica ampliamente usada para estimación de parámetros y sus intervalos de confianza es la llamada prueba *chicadrada*. Definimos la función  $\chi^2$  como

$$\chi^2 = \sum_{ij} (D_i - \hat{D}_i(\theta)) C_{ij}^{-1} (D_j - \hat{D}_j(\theta)). \quad (\text{B.3})$$

TABLA B.1:  $\Delta\chi^2$  como función del número de parámetros  $M$  y del nivel de confianza  $p$  a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$ . Tabla extraída de [116].

$p$	1	2	3	4
68.27 %	1.00	2.30	3.53	4.72
95.45 %	4.00	6.18	8.02	9.72
99.73 %	9.00	11.8	14.2	16.3

El mejor ajuste es dado por los parámetros que minimizan esta función. Es evidente que en los casos en que la verosimilitud es gaussiana, tenemos  $\mathcal{L} \propto \exp(-\chi^2/2)$  y maximizarla es equivalente a minimizar la función  $\chi^2$ .

La probabilidad de que el valor observado  $\chi$  exceda por una cantidad  $\hat{\chi}$  al modelo esperado es  $Q(\nu, \hat{\chi}) \equiv 1 - \Gamma(\nu/2, \hat{\chi}^2/2)$  donde  $\Gamma$  es la función gamma incompleta y  $\nu = N - M$  son los grados de libertad  $-N$  es el número de datos y  $M$  es el número de parámetros libres— [116]. Aunque este método aplica para mediciones con errores con distribuciones gaussianas, en la práctica es usada para un amplio rango de distribuciones.

Las regiones de parámetros para los cuales  $\chi^2 \leq \min(\chi^2) + \Delta\chi^2$  se obtienen a partir de la igualdad  $Q(\nu, \min(\chi^2) + \Delta\chi^2) = p$ . Estos intervalos de confianza son regiones del espacio de parámetros  $N$ -dimensional que contienen la fracción  $p$  del total de la distribución de probabilidad. En la tabla B.1 mostramos los valores de  $\Delta\chi^2$  para distintos valores de nivel de confianza  $p$  y para distintos números de parámetros  $M$ .

Si la distribución de errores no es cercanamente gaussiana, los métodos Monte Carlo como los que describimos a continuación son recomendados.

## B.2. Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC)

Las cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC, por sus siglas en inglés) fueron introducidas por primera vez en los años cincuenta por N. Metropolis et al. [233] para muestrear el espacio de parámetros de un modelo con probabilidad proporcional a una distribución de probabilidad desconocida. En lugar de calcular la probabilidad en cada sitio de una malla que cubre el espacio de parámetros en su totalidad, los métodos MCMC usan caminantes aleatorios. Esto produce que el tiempo de cómputo escale aproximadamente de manera lineal con el número de parámetros, a diferencia de exponencialmente. Por tal motivo, estos métodos han sido ampliamente usados en muchas ramas de la física, incluyendo en cosmología. Si tenemos una probabilidad previa  $P(\theta)$ , el teorema de Bayes indica que la distribución posterior de probabilidad  $P(\theta|D)$  es proporcional a la distribución  $\pi(\theta) \equiv P(D|\theta)P(\theta)$ .

Una de las principales características del método es explorar el espacio de parámetros con una cadena de Markov, que es una secuencia de eventos tal que la probabilidad de que se encuentre en un estado a un tiempo  $n$  depende únicamente del estado al tiempo  $n - 1$  y no de anteriores estados. La cadena de Markov queda completamente definida por una función de probabilidad de transición de un estado  $i$  a otro  $i + 1$

$$p_{i \rightarrow i+1} = p(\theta_{i+1} | \theta_i) = p(\theta_i, \theta_{i+1}). \quad (\text{B.4})$$

Si escogemos la probabilidad de transición de manera que se cumpla la ecuación de balance detallado

$$\pi(\theta_i) p(\theta_i, \theta_{i+1}) = \pi(\theta_{i+1}) p(\theta_{i+1}, \theta_i), \quad (\text{B.5})$$

entonces la cadena visitará cada punto en el espacio de parámetros de manera proporcional a  $\pi(\theta)$ , es decir, hará un muestreo de la distribución de manera ergódica, con medida  $\pi(\theta) d\theta$ . De esta manera, si la distribución de  $\theta_{i+1}$  es  $\hat{\pi}(\theta_{i+1})$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(\theta_{i+1}) &= \int p(\theta_{i+1} | \theta_i) \pi(\theta_i) d\theta_i = \int p(\theta_i | \theta_{i+1}) \pi(\theta_{i+1}) d\theta_i = \pi(\theta_{i+1}) \int p(\theta_i | \theta_{i+1}) d\theta_i \\ &= \pi(\theta_{i+1}), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

lo que implica que la función de transición  $p(\theta, \theta')$  deja invariante a la distribución  $\pi(\theta)$ .

W. Hastings [234] propuso una manera de escoger la función de probabilidad de transición  $p(\theta_i, \theta_{i+1})$ , de manera que se cumpla la ecuación de balance detallado (B.5). Primero, se debe escoger una densidad de propuesta  $q(\theta_i, \theta_{i+1})$  para proponer un nuevo punto  $\theta_{i+1}$ , la cual es en principio arbitraria, siempre y cuando la sucesión generada por ella pueda alcanzar cualquier punto del espacio de parámetros en la región de interés. Luego este nuevo punto es aceptado con probabilidad

$$\alpha(\theta_i, \theta_{i+1}) = \min \left[ 1, \frac{\pi(\theta_{i+1}) q(\theta_{i+1}, \theta_i)}{\pi(\theta_i) q(\theta_i, \theta_{i+1})} \right] \quad (\text{B.7})$$

de tal manera que la probabilidad de transición es  $p(\theta_i, \theta_{i+1}) = \alpha(\theta_i, \theta_{i+1}) q(\theta_i, \theta_{i+1})$ , lo que asegura que se cumpla con la ecuación (B.5). A este método se le conoce como *algoritmo Metropolis-Hastings*. Al permitir que la cadena visite lugares con menor probabilidad, el algoritmo explora regiones en la vecindad del máximo y samplea de manera eficiente la distribución posterior de probabilidad.

Una manera usual de simplificar los cálculos considerablemente es escogiendo una densidad de propuesta simétrica. La opción más usada es una gaussiana en  $n$  dimensiones [235, 236]; comenzando en  $\theta_i$  se escoge una dirección angular uniformemente aleatoria y

se mueve una distancia  $r$  en esa dirección con probabilidad

$$P_n(r) \propto r^{n-1} e^{-nr^2/2} \quad (\text{B.8})$$

reescalada como  $r \rightarrow r/s$ . Se usan diferentes valores de  $s$ ; el valor  $s = 2.4$  ha sido recomendado en [236].

Los distintos pasos en la cadena de Markov quedan correlacionados, lo que es más evidente si el punto propuesto es rechazado, en cuyo caso se tiene  $\theta_{i+1} = \theta_i$ . Por este motivo es conveniente tomar en cuenta sólo uno de cada determinado número de pasos (*adelgazamiento de cadenas*).

Durante un periodo inicial de tiempo, *burn-in*, el caminante aleatorio busca a través del espacio de parámetros el valor máximo de la función de verosimilitud. Eventualmente la cadena de Markov alcanza el equilibrio y comienza a muestrear el espacio de parámetros de acuerdo con la densidad posterior de probabilidad. Una objeción contra los métodos MCMC es que no existe una prueba formal de la convergencia de las cadenas, así que debe edivinarsse el tiempo de burn-in. Al final de la rutina, la densidad de número de los muestreos tomados después del burn-in representa (ya marginalizada pero no normalizada) la distribución posterior de probabilidad.

El algoritmo Metropolis-Hastings puede ser resumido como sigue:

1. Escójase un punto inicial en el espacio de parámetros, o tantos como cadenas sean usadas.
2. Propóngase un salto aleatorio. Cualquier función puede hacerlo siempre que cumpla con la condición de balance detallado. Calcúlese la verosimilitud en este nuevo punto y multiplíquese el resultado por la probabilidad previa para obtener la probabilidad posterior.
3. Si la probabilidad del nuevo punto es más alta, acéptese el salto. De otra manera, se acepta el salto con probabilidad igual a la razón de las probabilidades posteriores de ambos puntos. Si el salto no es aceptado, el nuevo punto de la cadena será igual al anterior.
4. Repítase desde el paso 2 hasta que las cadenas hayan muestreado de manera satisfactoria la densidad de probabilidad posterior. Es posible hacer esto revisando las distribuciones, pero es recomendable utilizar un criterio de convergencia, como el de Gelman-Rubin.

Otra ventaja del uso de los métodos MCMC es que el proceso de marginalización (i.e. obtener la distribución para algunos de los parámetros) resulta muy simple; sólo se

ignoran los otros parámetros en las cadenas y se grafica la densidad de puntos de los parámetros en que uno está interesado. En contraste, con un método de malla se debe integrar sobre los parámetros que no son de interés.

### B.2.1. Diagnóstico de Convergencia Gelman-Rubin

Aunque no hay una manera determinante para saber si una cadena ha alcanzado estacionaridad y por lo tanto se encuentra muestreando la densidad posterior  $\pi(\theta)$ , algunos criterios de convergencia han aparecido en la literatura. Nosotros estamos interesados en el diagnóstico Gelman-Rubin [237, 238], aplicable al uso de múltiples cadenas. La idea es comenzar cada cadena desde puntos dispersos sobre el espacio de parámetros y después comparar sus estados posteriores. Consideremos  $M$  cadenas cada una con  $2N$  puntos, de los cuales descartamos los primeros  $N$ .  $\theta_I^J$  representa el punto en el espacio de parámetros en la posición  $I$  de la cadena  $J$ . Calculamos la media de cada cadena  $J$ ,

$$\bar{\theta}^J = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N \theta_I^J, \quad (\text{B.9})$$

y la media de todas las cadenas

$$\bar{\theta} = \frac{1}{NM} \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^M \theta_I^J. \quad (\text{B.10})$$

La varianza entre las  $M$  medias es

$$\frac{B}{N} = \frac{1}{M-1} \sum_{J=1}^M (\bar{\theta} - \bar{\theta}^J)^2 \quad (\text{B.11})$$

y la varianza promedio de cada cadena es

$$W = \frac{1}{M(N-1)} \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^M (\bar{\theta}^J - \theta_I^J)^2. \quad (\text{B.12})$$

La cantidad

$$\hat{R} = \frac{\frac{N-1}{N}W + \frac{B}{N} \left(1 + \frac{1}{M}\right)}{W} \quad (\text{B.13})$$

es la razón de dos estimadores de la varianza de la distribución buscada: el numerador es un estimador no sesgado si la distribución es estacionaria, pero sobrestimado si no lo es. Mientras tanto, el denominador es subestimado si las cadenas individuales no han convergido. De tal manera que  $\hat{R} \rightarrow_+ 1$  cuando las series comienzan a muestrear la

densidad posterior de probabilidad. Un criterio estándar es detener las series cuando éstas hayan alcanzado  $\hat{R} < 1.03$ .





## Apéndice C

# Algunas demostraciones

### C.1. Demostración ecuaciones (3.39) y (3.40)

Las ecuaciones de Einstein relevantes son

$$k^2\Phi = -4\pi G a^2 \sum_a \rho_a \Delta_a, \quad (\text{C.1})$$

donde la suma es sobre todos los fluido involucrados, y hemos definido el contraste de densidad invariante de norma

$$\Delta = \delta + 3\mathcal{H}(1+w)\frac{\theta}{k^2} \quad (\text{C.2})$$

y

$$k^2(\dot{\Phi} + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 \sum_a \rho_a(1+w_a)\theta_a. \quad (\text{C.3})$$

Las ecuaciones de hidrodinámica son

$$\dot{\delta} = -(1+w)(\theta - 3\dot{\Phi}) - 3\mathcal{H}\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - w\right)\delta, \quad (\text{C.4})$$

y

$$\dot{\theta} = -\mathcal{H}(1-3w)\theta - \frac{\dot{w}}{1+w}\theta + \frac{\delta P/\delta\rho}{1+w}k^2\delta + k^2\Psi - k^2\sigma, \quad (\text{C.5})$$

A continuación consideramos que no hay estreses anisotrópicos, por lo que  $\sigma_a = 0$  y  $\Phi = \Psi$ .

Queremos demostrar que las condiciones iniciales para dos distintos modelos ( $\Lambda$ CDM y fluido oscuro),

$$\delta_d(\tau_i) = \alpha \frac{\delta_{\text{DM}}(\tau_i) \rho_{\text{DM}}(\tau_i)}{\rho_d(\tau_i)}, \quad (\text{C.6})$$

$$\theta_d(\tau_i) = \alpha \frac{\theta_{\text{DM}}(\tau_i) \rho_{\text{DM}}(\tau_i)}{(1 + w_d(\tau_i)) \rho_d(\tau_i)}, \quad (\text{C.7})$$

se preservan a todo tiempo  $\tau$  en el caso particular  $\alpha = 1$ .

La ecuación de Bardeen, despreciando estreses anisotrópicos está dada por

$$\ddot{\Phi} + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\dot{\Phi} + [3(c_s^2 - w_T)\mathcal{H} + c_s^2 k^2] \Phi = 0. \quad (\text{C.8})$$

Para los modelos  $\Lambda$ CDM y fluido oscuro  $c_s^2_{\Lambda\text{CDM}} = c_s^2_d = 0$  y  $w_T = \text{Constante}/\rho_T$ , por lo que la ecuación (C.8) describe la misma dinámica tanto para  $\Phi_{\Lambda\text{CDM}}$  como para  $\Phi_d$ . Nótese que para el modelo  $\Lambda$ CDM el parámetro de la ecuación de estado en la ecuación de Bardeen es el del fluido total, es decir  $w_T = \sum_a w_a \rho_a / \sum \rho_a$ . Para demostrar que  $\Phi_d(\tau) = \Phi_{\Lambda\text{CDM}}(\tau)$  sólo falta ver si las condiciones iniciales son iguales, i.e.,  $\Phi_d(\tau_i) = \Phi_{\Lambda\text{CDM}}(\tau_i)$  y  $\dot{\Phi}_d(\tau_i) = \dot{\Phi}_{\Lambda\text{CDM}}(\tau_i)$  son iguales a un tiempo inicial  $\tau_i$ .

Evaluando  $\rho(\tau_i)\Delta(\tau_i)$  en las condiciones iniciales (C.6) y (C.7) se obtiene  $\rho_{\text{DM}}(\tau_i)\Delta_{\text{DM}}(\tau_i) = \rho_d(\tau_i)\Delta_d(\tau_i)$ , por lo que usando la ecuación (C.1) tenemos  $\Phi_d(\tau_i) = \Phi_{\text{DM}}(\tau_i)$ . Notando ahora que  $\Delta_\Lambda = 0$  tenemos el resultado deseado, i.e.,  $\Phi_d(\tau_i) = \Phi_{\Lambda\text{CDM}}(\tau_i)$ . Ahora, de la ecuación (C.3) se sigue que también se cumple  $\dot{\Phi}_d(\tau_i) = \dot{\Phi}_{\Lambda\text{CDM}}(\tau_i)$ , por lo que hemos demostrado

$$\Phi_d(\tau) = \Phi_{\Lambda\text{CDM}}(\tau). \quad (\text{C.9})$$

Ahora, usando la ecuación (C.5) con la identidad (C.9) obtenemos

$$\frac{d}{d\tau}(\theta_{\text{DM}} - \theta_d) = -\frac{\dot{a}}{a}(\theta_{\text{DM}} - \theta_d), \quad (\text{C.10})$$

por lo que

$$\theta_{\text{DM}}(\tau) - \theta_d(\tau) = \frac{a(\tau_i)}{a(\tau)}(\theta_{\text{DM}}(\tau_i) - \theta_d(\tau_i)). \quad (\text{C.11})$$

Usando la relación  $\rho_{\text{DM}} = \rho_d(1 + w_d)$  obtenemos que la condición inicial (C.7) implica que  $\theta_{\text{DM}}(\tau_i) = \theta_d(\tau_i)$ . Por lo que hemos demostrado que

$$\theta_{\text{DM}}(\tau) = \theta_d(\tau). \quad (\text{C.12})$$

y, en particular

$$\theta_d(\tau) = \frac{\theta_{\text{DM}} \rho_{\text{DM}}}{(1 + w_d) \rho_d}(\tau). \quad (\text{C.13})$$

Finalmente, de (C.4) y usando los resultados (C.9) y (C.12) y la relación  $\rho_{\text{DM}} = \rho_d(1 + w_d)$ , se obtiene

$$\frac{d}{d\tau}(\rho_d\delta_d - \rho_{\text{DM}}\delta_{\text{DM}}) = -3\frac{da}{d\tau}(\rho_d\delta_d - \rho_{\text{DM}}\delta_{\text{DM}}) \quad (\text{C.14})$$

con solución

$$(\rho_d\delta_d - \rho_{\text{DM}}\delta_{\text{DM}})(\tau) = \left(\frac{a(\tau)}{a(\tau_i)}\right)^{-3} (\rho_d\delta_d - \rho_{\text{DM}}\delta_{\text{DM}})(\tau_i), \quad (\text{C.15})$$

y usando la condición inicial (C.6) obtenemos

$$\rho_d(\tau) = \frac{\rho_{\text{DM}}\delta_{\text{DM}}}{\delta_d}(\tau), \quad (\text{C.16})$$

con lo que completamos la demostración.

## C.2. Fijando la norma síncrona

A continuación demostraremos que es posible fijar la norma síncrona de tal manera que la velocidad de las partículas de la materia oscura proyectada en el número de onda sea igual a cero, es decir, de tal manera que  $\theta_c = 0$

En el párrafo siguiente a la ecuación (2.17) mencionamos que la norma síncrona, definida por  $\phi_s = B_s = 0$ , no está totalmente fija, sino que dado una transformación de norma descrita por el vector  $\epsilon = \epsilon^0\partial_0 + (\epsilon_\perp^i + \chi^i)\partial_i$ , la transformación conjunta  $\epsilon^0 \rightarrow \epsilon^0 + C_1(x^i)/a$ ,  $\chi \rightarrow \chi + C_1(x^i) \int a^{-1} d\tau + C_2(x^i)$  mantiene la norma síncrona, como se puede observar de las ecuaciones (2.14). Trabajaremos en el espacio de Fourier por lo que la transformación se escribe

$$\epsilon^0(\vec{k}, \tau) \rightarrow \epsilon^0(\vec{k}, \tau) + \frac{C_1(\vec{k})}{a(\tau)}, \quad (\text{C.17})$$

$$\chi(\vec{k}, \tau) \rightarrow \chi(\vec{k}, \tau) + C_1(\vec{k}) \int a^{-1}(\tau) d\tau + C_2(\vec{k}) \quad (\text{C.18})$$

Ante transformaciones de norma, el tensor de energía momento transforma como la ecuación (2.13), es decir, dada la descomposición  $T_\nu^\mu = {}^{(0)}T_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu$  las componentes  $(0, i)$  de la perturbación transforman como

$$\delta T_i^0 \rightarrow \tilde{\delta T}_i^0 = \delta T_i^0 + {}^{(0)}T_0^0 \epsilon_{,i}^0 + {}^{(0)}T_i^j \epsilon_{,j}^0. \quad (\text{C.19})$$

Si consideramos materia oscura fría, el último término de la ecuación anterior es cero. Ahora, escribimos la transformación en el espacio de Fourier:

$$\delta T_i^0 \rightarrow \tilde{\delta T}_i^0 = \delta T_i^0 - ik_i {}^{(0)}T_0^0 \epsilon^0, \quad (\text{C.20})$$

o, multiplicando por  $k^i$ ,

$$ik^i \delta \tilde{T}_i^0 = ik^i \delta T_i^0 + k^2 {}^{(0)}T_0^0 \epsilon^0. \quad (\text{C.21})$$

Usando la definición de  $\theta$  (2.24) y  ${}^{(0)}T_0^0 = -\rho$  obtenemos

$$\tilde{\theta}_c(\vec{k}, \tau) = \theta_c(\vec{k}, \tau) - k^2 \epsilon^0(\vec{k}, \tau) \quad (\text{C.22})$$

Ahora consideremos dos transformaciones de norma que llevan tensores de una norma arbitraria a la norma síncrona y de las cuales se obtienen  $\theta_{cS1}$  y  $\theta_{cS2}$ , ambas en la norma síncrona. De la ecuación (C.22) tenemos  $\theta_{cS1} = \theta_c - k^2 \epsilon_1^0$  y  $\theta_{cS2} = \theta_c - k^2 \epsilon_2^0$ , y entonces

$$\theta_{cS2}(\vec{k}, \tau) = \theta_{cS1}(\vec{k}, \tau) + k^2 (\epsilon_2^0(\vec{k}, \tau) - \epsilon_1^0(\vec{k}, \tau)). \quad (\text{C.23})$$

Para mantener la norma síncrona, vemos de la ecuación (C.17) que  $\epsilon_1^0$  y  $\epsilon_2^0$  deben estar relacionadas por  $\epsilon_2^0 - \epsilon_1^0 = C_1(\vec{k})/a(\tau)$ . Consideremos un tiempo fijo  $\tau_i$ , escogiendo  $C_1(\vec{k}) = -a(\tau_i)\theta_{cS1}(\vec{k}, \tau_i)/k^2$  en la ecuación (C.23) obtenemos que  $\theta_{cS2}(\vec{k}, \tau_i) = 0$ . Hemos demostrado que es posible hacer  $\theta_{cS2}$ , que de ahora en adelante llamaremos  $\theta_c$ , igual a cero a un tiempo fijo dado especificando la norma síncrona de manera adecuada.

Ahora, las ecuaciones hidrodinámicas para un fluido perfecto en la norma síncrona son

$$\dot{\delta} = -(1+w) \left( \theta + \frac{\dot{h}}{2} \right) - 3\mathcal{H} \left( \frac{\delta P}{\delta \rho} - w \right) \delta, \quad (\text{C.24})$$

y

$$\dot{\theta} = -\mathcal{H}(1-3w)\theta - \frac{\dot{w}}{1+w}\theta + \frac{\delta P/\delta \rho}{1+w} k^2 \delta - k^2 \sigma, \quad (\text{C.25})$$

las cuales corresponden a las ecuaciones (2.29) y (2.30) escritas en la norma newtoniana conforme. Para materia oscura fría  $w = \delta P = \sigma = 0$ , y las ecuaciones son

$$\dot{\delta}_c = - \left( \theta_c + \frac{\dot{h}}{2} \right), \quad (\text{C.26})$$

y

$$\dot{\theta}_c = -\mathcal{H}\theta_c. \quad (\text{C.27})$$

Ésta última ecuación la podemos escribir como

$$\frac{d}{d\tau}(a\theta_c) = 0, \quad (\text{C.28})$$

Cuya solución es  $\theta_c(\vec{k}, \tau) = \theta_c(\vec{k}, \tau_i)a(\tau_i)/a(\tau)$ . Hemos visto que siempre es posible hacer  $\theta_c(\vec{k}, \tau_i) = 0$ , por lo que dada la libertad de la norma síncrona podemos fijar  $\theta_c(\vec{k}, \tau) = 0$  a todo tiempo. Con esto concluimos la demostración.

### C.3. Variación de $\rho$

En esta sección demostraremos la ecuación (6.45). Es decir, queremos demostrar que para un fluido perfecto con cuadrivelocidad  $u^\mu$  se cumple

$$\delta\rho = \frac{1}{2}(\rho + P)(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{C.29})$$

donde  $\rho$  y  $P$  son la densidad de energía y la presión del fluido medidas por un observador comóvil con él, respectivamente. Definamos la densidad vectorial de flujo de número de partículas

$$n^\alpha = nu^\alpha\sqrt{-g}, \quad (\text{C.30})$$

con  $n$  la densidad de número de partículas. De esta manera

$$n = \left(\frac{g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu}{g}\right)^{1/2}. \quad (\text{C.31})$$

Un fluido perfecto es una configuración de fluido sin viscosidad y sin conducción de calor. Pedimos que las variaciones deben cumplir con el requerimiento de que las tasas de producción de entropía y producción de partículas son conservadas, es decir,

$$\delta s = 0 \quad (\text{C.32})$$

y

$$\delta n^\alpha = 0. \quad (\text{C.33})$$

De la ecuación (C.30) tenemos  $\partial_\mu n^\mu = \partial_\mu(\sqrt{-g}nu^\mu) = \sqrt{-g}\nabla_\mu(nu^\mu)$ , por lo que (C.33) y el hecho de que  $\delta\partial = \partial\delta$  implican

$$\delta(\nabla_\mu(nu^\mu))\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\nabla_\alpha(nu^\alpha)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

La condición (C.33) es entonces más débil que pedir que la tasa de producción de partículas sea cero.

Consideremos una ecuación de estado  $\rho = \rho(n, s)$ . De la relación termodinámica

$$w = \left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_s \quad (\text{C.34})$$

y de  $\delta s = 0$ , se tiene

$$\delta\rho = w\delta n, \quad (\text{C.35})$$

donde  $w$  es la entalpía del fluido

$$w = \frac{\rho + P}{n}. \quad (\text{C.36})$$

Calculemos ahora  $\delta n$ :

$$\begin{aligned}
\delta n &= \delta \left( \frac{g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu}{g} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{n} \delta \left( \frac{g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu}{g} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{n} n^\mu n^\nu \left( \frac{\delta g_{\mu\nu}}{g} - \frac{g_{\mu\nu} \delta g}{g^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{n} n^\mu n^\nu \left( \frac{\delta g_{\mu\nu}}{g} - \frac{g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}}{g} \right) \\
&= -\frac{1}{2} n u^\mu u^\nu (\delta g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{2} n (g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta) \delta g_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2} n (g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta) \delta g_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2} n (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) \delta g^{\alpha\beta}. \tag{C.37}
\end{aligned}$$

Usando (C.35) y (C.36) obtenemos el resultado buscado

$$\delta \rho = \frac{1}{2} (\rho + P) (u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}. \tag{C.38}$$

Notamos que de la acción

$$S = - \int d^4 x \sqrt{-g} \rho, \tag{C.39}$$

de la definición  $T_{\mu\nu} = -(2/\sqrt{-g}) \delta S / \delta g^{\mu\nu}$  y el uso de la ecuación (C.38), obtenemos

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P (u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}), \tag{C.40}$$

es decir, el tensor de energía momento para un fluido perfecto.

## Apéndice D

# La degeneración oscura no es fundamental

En este apéndice demostramos que la degeneración oscura no es fundamental. Contrariamente a lo que se afirma en la literatura; véanse por ejemplo [120, 183]. Esta demostración es autoría de Daniel Sudarsky y surgió a partir de discusiones que tuvimos hace unos meses.

El argumento es el siguiente:

Supongamos que existen campos de materia interaccionan con la materia común (leptones, hadrones, fotones, etcétera) únicamente de manera gravitacional. Por lo que sólo podemos inferir sus propiedades mediante la medición de efectos gravitacionales y el uso de las ecuaciones de Einstein

$$T_{\mu\nu}^{\text{dark}} = \frac{1}{8\pi G} T_{\mu\nu}^{\text{obs}} - T_{\mu\nu}^{\text{obs}} \quad (\text{D.1})$$

La pregunta que contestaremos es si se pueden distinguir teorías con múltiples componentes de teorías con sólo componente. Consideremos, por simplicidad, teorías de materia que se modelan como fluidos perfectos con ecuaciones de estado barotrópicas. Si tenemos  $N$  componentes tendremos  $N$  ecuaciones de estado

$$P_i = F_i(\rho_i), \quad (\text{D.2})$$

con  $i = 1, \dots, N$ . Donde  $P_i$  es la presión de la  $i$ -ésima componente con densidad de energía  $\rho_i$ .



Mediante un conjunto de  $M$  observaciones, cada una de las cuales distinguimos con letras mayúsculas latinas  $A, B, C, \dots$ , medimos los  $M$  pares  $(\rho^A, P^A), (\rho^B, P^B), (\rho^C, P^C), \dots$ . Debido a la ecuación (D.1) tenemos  $\rho = \sum_i^N \rho_i$ . El modelo sugerido se adaptará a las observaciones siempre que se tenga una solución al sistema de  $M$  ecuaciones

$$P^A = \sum_i^N F_i(\rho_i^A) \quad \text{con} \quad \rho^A = \sum_i^N \rho_i^A. \quad (\text{D.3})$$

A primera vista, dada la libertad que no conocemos las funciones  $F_i$ , pareciera que tenemos suficiente libertad para resolver el sistema. Sin embargo, supongamos que  $N = 1$  y  $M \geq 2$ , y que entre las  $M$  mediciones tenemos dos con igual densidad  $\rho^A = \rho^B$  y diferente presión  $P^A \neq P^B$ . El sistema a resolver es

$$\begin{aligned} P^A &= F_1(\rho_1^A) & \text{con} & & \rho^A &= \rho_1^A, \\ P^B &= F_1(\rho_1^B) & \text{con} & & \rho^B &= \rho_1^B. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Claramente este sistema de ecuaciones no es posible resolverlo bajo la suposición de que  $\rho^A = \rho^B$  y  $P^A \neq P^B$ . En este caso el modelo de una sólo componente es rechazado independientemente de la función  $F_1$ . Pero esto no ocurre si consideramos un modelo con dos componentes, en este caso el sistema a resolver es

$$\begin{aligned} P^A &= F_1(\rho_1^A) + F_2(\rho_2^A) & \text{con} & & \rho^A &= \rho_1^A + \rho_2^A, \\ P^B &= F_1(\rho_1^B) + F_2(\rho_2^B) & \text{con} & & \rho^B &= \rho_1^B + \rho_2^B. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Inclusive si tomamos las funciones lineales  $F_1(\rho) = A\rho$  y  $F_2(\rho) = B\rho$  con  $A \neq B$  el sistema tiene solución. Vemos entonces que bajo un conjunto de mediciones podemos descartar el modelo de una componente oscura. Este es entonces un contraejemplo a la aseveración de que la degeneración oscura es fundamental.

# Bibliografía

- [1] F. Zwicky, *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*, Helvetica Physica Acta **6** (1933) 110127.
- [2] V. Rubin and W. Ford, *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*, Astrophys.J. **159** (1970) 379.
- [3] L. Bergstrom, *Nonbaryonic dark matter: Observational evidence and detection methods*, Rept.Prog.Phys. **63** (2000) 793, [[hep-ph/0002126](#)].
- [4] A. D. Lewis, D. A. Buote, and J. T. Stocke, *Chandra observations of Abell 2029*, Astrophys.J. **586** (2003) 135–142, [[astro-ph/0209205](#)].
- [5] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, et al., *A direct empirical proof of the existence of dark matter*, Astrophys.J. **648** (2006) L109–L113, [[astro-ph/0608407](#)].
- [6] J. Lee and E. Komatsu, *Bullet Cluster: A Challenge to LCDM Cosmology*, Astrophys.J. **718** (2010) 60–65, [[arXiv:1003.0939](#)].
- [7] R. Thompson and K. Nagamine, *Pairwise Velocities of Dark Matter Halos: a Test for the Lambda Cold Dark Matter Model using the Bullet Cluster*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **419** (2012) 3560–3570, [[arXiv:1107.4645](#)].
- [8] K. A. Olive, G. Steigman, and T. P. Walker, *Primordial nucleosynthesis: Theory and observations*, Phys.Rept. **333** (2000) 389–407, [[astro-ph/9905320](#)].
- [9] B. Fields and S. Sarkar, *Big-Bang nucleosynthesis (2006 Particle Data Group mini-review)*, [astro-ph/0601514](#).
- [10] J. C. Mather, D. Fixsen, R. Shafer, C. Mosier, and D. Wilkinson, *Calibrator design for the COBE far infrared absolute spectrophotometer (FIRAS)*, Astrophys.J. **512** (1999) 511–520, [[astro-ph/9810373](#)].
- [11] G. Mangano, G. Miele, S. Pastor, T. Pinto, O. Pisanti, et al., *Relic neutrino decoupling including flavor oscillations*, Nucl.Phys. **B729** (2005) 221–234, [[hep-ph/0506164](#)].

- [12] **WMAP** Collaboration, E. Komatsu et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, *Astrophys.J.Suppl.* **192** (2011) 18, [[arXiv:1001.4538](#)].
- [13] M. Archidiacono, E. Calabrese, and A. Melchiorri, *The case for dark radiation*, *Phys.Rev.* **D84** (2011) 123008, [[arXiv:1109.2767](#)].
- [14] A. X. Gonzalez-Morales, R. Poltis, B. D. Sherwin, and L. Verde, *Are priors responsible for cosmology favoring additional neutrino species?*, [arXiv:1106.5052](#).
- [15] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. Spergel, C. Bennett, et al., *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*, [arXiv:1212.5226](#).
- [16] S. Hanany, P. Ade, A. Balbi, J. Bock, J. Borrill, et al., *MAXIMA-1: A Measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of 10 arcminutes to 5 degrees*, *Astrophys.J.* **545** (2000) L5, [[astro-ph/0005123](#)].
- [17] W. Hu and M. J. White, *Measuring the curvature of the universe*, [astro-ph/9606140](#).
- [18] <http://sci.esa.int/planck/53103-planck-cosmology/>. Accessed: oct, 2013.
- [19] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, S. Perlmutter et al., *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, *Astrophys.J.* **517** (1999) 565–586, [[astro-ph/9812133](#)].
- [20] **Supernova Search Team** Collaboration, A. G. Riess et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron.J.* **116** (1998) 1009–1038, [[astro-ph/9805201](#)].
- [21] **Supernova Search Team** Collaboration, A. G. Riess et al., *The farthest known supernova: support for an accelerating universe and a glimpse of the epoch of deceleration*, *Astrophys.J.* **560** (2001) 49–71, [[astro-ph/0104455](#)].
- [22] **Planck Collaboration** Collaboration, P. Ade et al., *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, [arXiv:1303.5076](#).
- [23] A. G. Riess, L. Macri, S. Casertano, M. Sosey, H. Lampeitl, et al., *A Redetermination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope from a Differential Distance Ladder*, *Astrophys.J.* **699** (2009) 539–563, [[arXiv:0905.0695](#)].

- [24] B. D. Sherwin, J. Dunkley, S. Das, J. W. Appel, J. R. Bond, et al., *Evidence for dark energy from the cosmic microwave background alone using the Atacama Cosmology Telescope lensing measurements*, Phys.Rev.Lett. **107** (2011) 021302, [[arXiv:1105.0419](#)].
- [25] T. Giannantonio, R. Crittenden, R. Nichol, and A. J. Ross, *The significance of the integrated Sachs-Wolfe effect revisited*, [arXiv:1209.2125](#).
- [26] S. Weinberg, *The Cosmological Constant Problem*, Rev.Mod.Phys. **61** (1989) 1–23.
- [27] E. Bianchi and C. Rovelli, *Why all these prejudices against a constant?*, [arXiv:1002.3966](#).
- [28] B. Ratra and P. Peebles, *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*, Phys.Rev. **D37** (1988) 3406.
- [29] R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, *Cosmological imprint of an energy component with general equation of state*, Phys.Rev.Lett. **80** (1998) 1582–1585, [[astro-ph/9708069](#)].
- [30] E. J. Copeland, A. R. Liddle, and D. Wands, *Exponential potentials and cosmological scaling solutions*, Phys.Rev. **D57** (1998) 4686–4690, [[gr-qc/9711068](#)].
- [31] C. Brans and R. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys.Rev. **124** (1961) 925–935.
- [32] R. V. Wagoner, *Scalar tensor theory and gravitational waves*, Phys.Rev. **D1** (1970) 3209–3216.
- [33] K. Nordtvedt, *PostNewtonian metric for a general class of scalar tensor gravitational theories and observational consequences*, Astrophys.J. **161** (1970) 1059–1067.
- [34] L. Amendola, *Scaling solutions in general nonminimal coupling theories*, Phys.Rev. **D60** (1999) 043501, [[astro-ph/9904120](#)].
- [35] A. Riazuelo and J.-P. Uzan, *Cosmological observations in scalar-tensor quintessence*, Phys.Rev. **D66** (2002) 023525, [[astro-ph/0107386](#)].
- [36] T. Damour, G. Gibbons, and C. Gundlach, *Dark matter, time varying  $G$ , and a dilaton field*, Phys.Rev.Lett. **64** (1990) 123–126.
- [37] T. Damour and A. M. Polyakov, *The string dilaton and a least coupling principle*, Nucl.Phys. **B423** (1994) 532–558, [[hep-th/9401069](#)].

- [38] J. Khoury and A. Weltman, *Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space*, Phys.Rev.Lett. **93** (2004) 171104, [[astro-ph/0309300](#)].
- [39] J. Khoury and A. Weltman, *Chameleon Cosmology*, Phys.Rev. **D69** (2004) 044026, [[astro-ph/0309411](#)].
- [40] C. M. Will, *The Confrontation between general relativity and experiment*, Living Rev.Rel. **9** (2005) 3, [[gr-qc/0510072](#)]. An update of the Living Review article originally published in 2001.
- [41] E. Adelberger, B. R. Heckel, and A. Nelson, *Tests of the gravitational inverse square law*, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. **53** (2003) 77–121, [[hep-ph/0307284](#)].
- [42] L. Kraiselburd, S. Landau, M. Salgado, and D. Sudarsky, *Equivalence Principle in Chameleon Models. In Progress*, .
- [43] S. Capozziello, S. Carloni, and A. Troisi, *Quintessence without scalar fields*, Recent Res.Dev.Astron.Astrophys. **1** (2003) 625, [[astro-ph/0303041](#)].
- [44] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, and M. S. Turner, *Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?*, Phys.Rev. **D70** (2004) 043528, [[astro-ph/0306438](#)].
- [45] A. De Felice and S. Tsujikawa,  *$f(R)$  theories*, Living Rev.Rel. **13** (2010) 3, [[arXiv:1002.4928](#)].
- [46] A. Aviles and J. L. Cervantes-Cota, *Cosmological phase space of  $R^{**n}$  gravity*, AIP Conf.Proc. **1083** (2008) 57–64, [[arXiv:0901.3722](#)]. Gravitation and Cosmology: Third International Meeting”, Morelia, Michoacán, México, 26-30 May, 2008.
- [47] G. Magnano and L. M. Sokolowski, *On physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general relativistic selfgravitating scalar field*, Phys.Rev. **D50** (1994) 5039–5059, [[gr-qc/9312008](#)].
- [48] W. Hu and A. L. I. Sawicki, *Models of  $f(R)$  Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests*, Phys.Rev. **D76** (2007) 064004, [[arXiv:0705.1158](#)].
- [49] A. A. Starobinsky, *Disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity*, JETP Lett. **86** (2007) 157–163, [[arXiv:0706.2041](#)].
- [50] C. Gao, X. Chen, and Y.-G. Shen, *A holographic dark energy model from Ricci scalar curvature*, Phys.Rev. **D79** (2009) 043511, [[arXiv:0712.1394](#)].
- [51] P. McFadden and K. Skenderis, *Holography for cosmology*, Phys.Rev. **D81** (2010) 021301, [[arXiv:0907.5542](#)].

- [52] A. Aviles, L. Bonanno, O. Luongo, and H. Quevedo, *Holographic dark matter and dark energy with second order invariants*, Phys.Rev. **D84** (2011) 103520.
- [53] R. Maartens and K. Koyama, *Brane-World Gravity*, Living Rev.Rel. **13** (2010) 5, [[arXiv:1004.3962](#)].
- [54] G. R. Bengochea and R. Ferraro, *Dark torsion as the cosmic speed-up*, Phys.Rev. **D79** (2009) 124019, [[arXiv:0812.1205](#)].
- [55] **DAMA/LIBRA** Collaboration, R. Bernabei et al., *New results from DAMA/LIBRA*, Eur.Phys.J. **C67** (2010) 39–49, [[arXiv:1002.1028](#)].
- [56] **XENON100 Collaboration** Collaboration, E. Aprile et al., *First Dark Matter Results from the XENON100 Experiment*, Phys.Rev.Lett. **105** (2010) 131302, [[arXiv:1005.0380](#)].
- [57] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. White, *The Structure of cold dark matter halos*, Astrophys.J. **462** (1996) 563–575, [[astro-ph/9508025](#)].
- [58] B. Moore, S. Ghigna, F. Governato, G. Lake, T. R. Quinn, et al., *Dark matter substructure within galactic halos*, Astrophys.J. **524** (1999) L19–L22, [[astro-ph/9907411](#)].
- [59] D. N. Spergel and P. J. Steinhardt, *Observational evidence for selfinteracting cold dark matter*, Phys.Rev.Lett. **84** (2000) 3760–3763, [[astro-ph/9909386](#)].
- [60] R. Dave, D. N. Spergel, P. J. Steinhardt, and B. D. Wandelt, *Halo properties in cosmological simulations of selfinteracting cold dark matter*, Astrophys.J. **547** (2001) 574–589, [[astro-ph/0006218](#)].
- [61] M. S. Turner, *Coherent Scalar Field Oscillations in an Expanding Universe*, Phys.Rev. **D28** (1983) 1243.
- [62] W. Hu, R. Barkana, and A. Gruzinov, *Cold and fuzzy dark matter*, Phys.Rev.Lett. **85** (2000) 1158–1161, [[astro-ph/0003365](#)].
- [63] V. Sahni and L.-M. Wang, *A New cosmological model of quintessence and dark matter*, Phys.Rev. **D62** (2000) 103517, [[astro-ph/9910097](#)].
- [64] T. Matos and L. A. Urena-Lopez, *Quintessence and scalar dark matter in the universe*, Class.Quant.Grav. **17** (2000) L75–L81, [[astro-ph/0004332](#)].
- [65] J. Magana and T. Matos, *A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model*, J.Phys.Conf.Ser. **378** (2012) 012012, [[arXiv:1201.6107](#)].

- [66] M. Milgrom, *A Modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis*, *Astrophys.J.* **270** (1983) 365–370.
- [67] J. D. Bekenstein, *Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm*, *Phys.Rev.* **D70** (2004) 083509, [[astro-ph/0403694](#)].
- [68] M. Milgrom, *Bimetric MOND gravity*, *Phys.Rev.* **D80** (2009) 123536, [[arXiv:0912.0790](#)].
- [69] T. Bernal, S. Capozziello, J. Hidalgo, and S. Mendoza, *Recovering MOND from extended metric theories of gravity*, *Eur.Phys.J.* **C71** (2011) 1794, [[arXiv:1108.5588](#)].
- [70] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, *A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration*, *Phys.Rev.Lett.* **85** (2000) 4438–4441, [[astro-ph/0004134](#)].
- [71] A. Vikman, *Can dark energy evolve to the phantom?*, *Phys.Rev.* **D71** (2005) 023515, [[astro-ph/0407107](#)].
- [72] D. Bertacca, N. Bartolo, and S. Matarrese, *Unified Dark Matter Scalar Field Models*, *Adv.Astron.* **2010** (2010) 904379, [[arXiv:1008.0614](#)].
- [73] J. De-Santiago and J. L. Cervantes-Cota, *Generalizing a Unified Model of Dark Matter, Dark Energy, and Inflation with Non Canonical Kinetic Term*, *Phys.Rev.* **D83** (2011) 063502, [[arXiv:1102.1777](#)].
- [74] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, *An alternative to quintessence*, *Phys.Lett.* **B511** (2001) 265–268, [[gr-qc/0103004](#)].
- [75] M. Bento, O. Bertolami, and A. Sen, *Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy matter unification*, *Phys.Rev.* **D66** (2002) 043507, [[gr-qc/0202064](#)].
- [76] N. Bilic, G. B. Tupper, and R. D. Viollier, *Unification of dark matter and dark energy: The Inhomogeneous Chaplygin gas*, *Phys.Lett.* **B535** (2002) 17–21, [[astro-ph/0111325](#)].
- [77] Z.-K. Guo and Y.-Z. Zhang, *Cosmology with a variable Chaplygin gas*, *Phys.Lett.* **B645** (2007) 326–329, [[astro-ph/0506091](#)].
- [78] A. Aviles, A. Bastarrachea-Almodovar, L. Campuzano, and H. Quevedo, *Extending the generalized Chaplygin gas model by using geometrothermodynamics*, *Phys.Rev.* **D86** (2012) 063508, [[arXiv:1203.4637](#)].

- [79] J. L. Cervantes-Cota, R. de Putter, and E. V. Linder, *Induced gravity and the attractor dynamics of dark energy/dark matter*, JCAP **1012** (2010) 019, [[arXiv:1010.2237](#)].
- [80] M. Li, *A Model of holographic dark energy*, Phys.Lett. **B603** (2004) 1, [[hep-th/0403127](#)].
- [81] M. Visser, *Cosmography: Cosmology without the Einstein equations*, Gen.Rel.Grav. **37** (2005) 1541–1548, [[gr-qc/0411131](#)].
- [82] A. Aviles, C. Gruber, O. Luongo, and H. Quevedo, *Cosmography and constraints on the equation of state of the Universe in various parametrizations*, Phys.Rev. **D86** (2012) 123516, [[arXiv:1204.2007](#)].
- [83] S. Tsujikawa, *Dark energy: investigation and modeling*, [arXiv:1004.1493](#).
- [84] R. Amanullah, C. Lidman, D. Rubin, G. Aldering, P. Astier, et al., *Spectra and Light Curves of Six Type Ia Supernovae at 0.511 lt z lt 1.12 and the Union2 Compilation*, Astrophys.J. **716** (2010) 712–738, [[arXiv:1004.1711](#)].
- [85] D. Stern, R. Jimenez, L. Verde, M. Kamionkowski, and S. A. Stanford, *Cosmic Chronometers: Constraining the Equation of State of Dark Energy. I:  $H(z)$  Measurements*, JCAP **1002** (2010) 008, [[arXiv:0907.3149](#)].
- [86] A. Aviles, A. Bravetti, S. Capozziello, and O. Luongo, *Updated constraints on  $f(R)$  from cosmography*, Phys.Rev. **D87** (2013) 044012, [[arXiv:1210.5149](#)].
- [87] D. W. Hogg, D. J. Eisenstein, M. R. Blanton, N. A. Bahcall, J. Brinkmann, et al., *Cosmic homogeneity demonstrated with luminous red galaxies*, Astrophys.J. **624** (2005) 54–58, [[astro-ph/0411197](#)].
- [88] B. Hoyle, R. Tojeiro, R. Jimenez, A. Heavens, C. Clarkson, et al., *Testing Homogeneity with the Galaxy Fossil Record*, [arXiv:1209.6181](#).
- [89] G. F. Smoot, C. Bennett, A. Kogut, E. Wright, J. Aymon, et al., *Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps*, Astrophys.J. **396** (1992) L1–L5.
- [90] A. Kogut, C. Lineweaver, G. F. Smoot, C. Bennett, A. Banday, et al., *Dipole anisotropy in the COBE DMR first year sky maps*, Astrophys.J. **419** (1993) 1, [[astro-ph/9312056](#)].
- [91] E. Lifshitz and I. Khalatnikov, *Investigations in relativistic cosmology*, Adv.Phys. **12** (1963) 185–249.



- [92] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [93] J. M. Bardeen, *Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, Phys.Rev. **D22** (1980) 1882–1905.
- [94] C.-P. Ma and E. Bertschinger, *Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges*, Astrophys.J. **455** (1995) 7–25, [[astro-ph/9506072](#)].
- [95] U. Seljak and M. Zaldarriaga, *A Line of sight integration approach to cosmic microwave background anisotropies*, Astrophys.J. **469** (1996) 437–444, [[astro-ph/9603033](#)].
- [96] A. Lewis, A. Challinor, and A. Lasenby, *Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models*, Astrophys. J. **538** (2000) 473–476, [[astro-ph/9911177](#)].
- [97] M. Doran, *CMBEASY: an object oriented code for the cosmic microwave background*, JCAP **0510** (2005) 011, [[astro-ph/0302138](#)]. 7 pages, 5 figures, matches published version, code at <http://www.cmbeasy.org> Journal-ref: JCAP 0510 (2005) 011.
- [98] V. F. Mukhanov, H. Feldman, and R. H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions*, Phys.Rept. **215** (1992) 203–333.
- [99] R. Durrer, *The Cosmic Microwave Background*. Cambridge University Press, 2008.
- [100] E. Kolb and M. Turner, *The Early Universe*. Frontiers in Physics. Addison-Wesley, 1990.
- [101] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Academic Press, Elsevier Science, 2003.
- [102] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. Harcourt Academic Press, 5th ed., 2001.
- [103] J. Bond and G. Efstathiou, *Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter*, Astrophys.J. **285** (1984) L45–L48.
- [104] W. Hu and N. Sugiyama, *Toward understanding CMB anisotropies and their implications*, Phys.Rev. **D51** (1995) 2599–2630, [[astro-ph/9411008](#)].

- [105] G. C. Wick, *The evaluation of the collision matrix*, Phys. Rev. **80** (1950) 268–272.
- [106] L. Isserlis, *On a formula for the product-moment coefficient of any order for a normal frequency distribution in any number of variables*, Biometrika **12** (1918) 134–139.
- [107] Y. Zeldovich, *Gravitational instability: An Approximate theory for large density perturbations*, Astron.Astrophys. **5** (1970) 84–89.
- [108] E. Harrison, *Fluctuations at the Treshold of Classical Cosmology*, Phys. Rev. **D1** (1970) 2726.
- [109] V. F. Mukhanov and G. Chibisov, *Quantum fluctuation and nonsingular universe. (In Russian)*, JETP Lett. **33** (1981) 532–535.
- [110] S. Hawking, *The development of irregularities in a single bubble inflationary universe*, Phys.Lett. **B115** (1982) 295.
- [111] A. H. Guth and S. Pi, *Fluctuations in the new inflationary universe*, Phys.Rev.Lett. **49** (1982) 1110–1113.
- [112] N. Sugiyama, *Cosmic background anistropies in CDM cosmology*, Astrophys.J.Suppl. **100** (1995) 281, [[astro-ph/9412025](#)].
- [113] M. Zaldarriaga and D. D. Harari, *Analytic approach to the polarization of the cosmic microwave background in flat and open universes*, Phys.Rev. **D52** (1995) 3276–3287, [[astro-ph/9504085](#)].
- [114] J. Chluba and R. Sunyaev, *Induced two-photon decay of the 2s level and the rate of cosmological hydrogen recombination*, Astron.Astrophys. **446** (2006) 39–42, [[astro-ph/0508144](#)].
- [115] R. Sachs and A. Wolfe, *Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background*, Artophys. J. **73** (1967) 1.
- [116] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 3 ed., 2007.
- [117] D. Huterer and M. S. Turner, *Probing the dark energy: Methods and strategies*, Phys.Rev. **D64** (2001) 123527, [[astro-ph/0012510](#)].
- [118] C. Rubano and P. Scudellaro, *Quintessence or phoenix?*, Gen.Rel.Grav. **34** (2002) 1931–1939, [[astro-ph/0203225](#)].

- 
- [119] R. Hlozek, M. Cortes, C. Clarkson, and B. Bassett, *Non-parametric dark energy degeneracies*, [arXiv:0801.3847](#).
- [120] M. Kunz, *The dark degeneracy: On the number and nature of dark components*, Phys.Rev. **D80** (2009) 123001, [[astro-ph/0702615](#)].
- [121] M. Kunz and D. Sapone, *Crossing the Phantom divide*, Phys.Rev. **D74** (2006) 123503, [[astro-ph/0609040](#)].
- [122] A. L. Serra and M. J. d. L. D. Romero, *Measuring the dark matter equation of state*, [arXiv:1103.5465](#).
- [123] J. Barranco, A. Bernal, and D. Nunez, *Dark matter equation of state from rotational curves of galaxies*, [arXiv:1301.6785](#).
- [124] P. Avelino, L. Beca, J. de Carvalho, and C. Martins, *The lambda-CDM limit of the generalized Chaplygin gas scenario*, JCAP **0309** (2003) 002, [[astro-ph/0307427](#)].
- [125] A. Balbi, M. Bruni, and C. Quercellini, *Lambda-alpha DM: Observational constraints on unified dark matter with constant speed of sound*, Phys.Rev. **D76** (2007) 103519, [[astro-ph/0702423](#)].
- [126] O. Luongo and H. Quevedo, *Reconstructing the expansion history of the Universe with a one-fluid approach*, [arXiv:1104.4758](#).
- [127] E. V. Linder and R. J. Scherrer, *Aetherizing Lambda: Barotropic fluids as dark energy*, Phys.Rev. **D80** (2009) 023008, [[arXiv:0811.2797](#)].
- [128] W. Hu and D. J. Eisenstein, *The structure of structure formation theories*, Phys.Rev. **D59** (1999) 083509, [[astro-ph/9809368](#)].
- [129] A. R. Liddle and L. A. Urena-Lopez, *Inflation, dark matter and dark energy in the string landscape*, Phys.Rev.Lett. **97** (2006) 161301, [[astro-ph/0605205](#)].
- [130] L. M. Reyes, J. E. M. Aguilar, and L. A. Urena-Lopez, *Cosmological dark fluid from five-dimensional vacuum*, Phys.Rev. **D84** (2011) 027503, [[arXiv:1107.0345](#)].
- [131] H. Quevedo, *Geometrothermodynamics*, J.Math.Phys. **48** (2007) 013506, [[physics/0604164](#)].
- [132] M. Kunz, A. R. Liddle, D. Parkinson, and C. Gao, *Constraining the dark fluid*, Phys.Rev. **D80** (2009) 083533, [[arXiv:0908.3197](#)].

- [133] V. F. Mukhanov, L. R. W. Abramo, and R. H. Brandenberger, *On the back reaction problem for gravitational perturbations*, Phys.Rev.Lett. **78** (1997) 1624–1627, [[gr-qc/9609026](#)].
- [134] G. Geshnizjani and R. Brandenberger, *Back reaction and local cosmological expansion rate*, Phys.Rev. **D66** (2002) 123507, [[gr-qc/0204074](#)].
- [135] R. A. Sussman, *Quasilocal variables in spherical symmetry: Numerical applications to dark matter and dark energy sources*, Phys.Rev. **D79** (2009) 025009, [[arXiv:0801.3324](#)].
- [136] S. R. Green and R. M. Wald, *A new framework for analyzing the effects of small scale inhomogeneities in cosmology*, Phys.Rev. **D83** (2011) 084020, [[arXiv:1011.4920](#)].
- [137] P. P. Avelino, L. Beca, J. de Carvalho, C. Martins, and E. Copeland, *The onset of the nonlinear regime in unified dark matter models*, Phys.Rev. **D69** (2004) 041301, [[astro-ph/0306493](#)].
- [138] L. Beca and P. Avelino, *Dynamics of perfect fluid unified dark energy models*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **376** (2007) 1169–1172.
- [139] P. Avelino, L. Beca, and C. Martins, *Linear and nonlinear instabilities in unified dark energy models*, Phys.Rev. **D77** (2008) 063515.
- [140] H. Kodama and M. Sasaki, *Cosmological Perturbation Theory*, Prog.Theor.Phys.Suppl. **78** (1984) 1–166.
- [141] K. A. Malik and D. Wands, *Cosmological perturbations*, Phys.Rept. **475** (2009) 1–51, [[arXiv:0809.4944](#)].
- [142] K. A. Malik and D. Wands, *Adiabatic and entropy perturbations with interacting fluids and fields*, JCAP **0502** (2005) 007, [[astro-ph/0411703](#)].
- [143] O. F. Piattella, *The extreme limit of the generalized Chaplygin gas*, JCAP **1003** (2010) 012, [[arXiv:0906.4430](#)].
- [144] L. Xu and J. Lu, *Cosmological constraints on generalized Chaplygin gas model: Markov Chain Monte Carlo approach*, JCAP **1003** (2010) 025, [[arXiv:1004.3344](#)].
- [145] D. Rubin, E. Linder, M. Kowalski, G. Aldering, R. Amanullah, et al., *Looking Beyond Lambda with the Union Supernova Compilation*, Astrophys.J. **695** (2009) 391–403, [[arXiv:0807.1108](#)].

- [146] M. Hicken, W. M. Wood-Vasey, S. Blondin, P. Challis, S. Jha, et al., *Improved Dark Energy Constraints from 100 New CfA Supernova Type Ia Light Curves*, *Astrophys.J.* **700** (2009) 1097–1140, [[arXiv:0901.4804](#)].
- [147] W. J. Percival, S. Cole, D. J. Eisenstein, R. C. Nichol, J. A. Peacock, et al., *Measuring the Baryon Acoustic Oscillation scale using the SDSS and 2dFGRS*, *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* **381** (2007) 1053–1066, [[arXiv:0705.3323](#)].
- [148] J. Bond, G. Efstathiou, and M. Tegmark, *Forecasting cosmic parameter errors from microwave background anisotropy experiments*, *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* **291** (1997) L33–L41, [[astro-ph/9702100](#)].
- [149] SDSS Collaboration, M. Tegmark et al., *The 3-D power spectrum of galaxies from the SDSS*, *Astrophys.J.* **606** (2004) 702–740, [[astro-ph/0310725](#)].
- [150] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, O. Piattella, and A. Starobinsky, *Gauge-invariant analysis of perturbations in Chaplygin gas unified models of dark matter and dark energy*, *JCAP* **0802** (2008) 016, [[arXiv:0711.4242](#)].
- [151] R. Bean and O. Dore, *Are Chaplygin gases serious contenders to the dark energy throne?*, *Phys.Rev.* **D68** (2003) 023515, [[astro-ph/0301308](#)].
- [152] L. Amendola, F. Finelli, C. Burigana, and D. Carturan, *WMAP and the generalized Chaplygin gas*, *JCAP* **0307** (2003) 005, [[astro-ph/0304325](#)].
- [153] S. Thakur, A. Nautiyal, A. A. Sen, and T. R. Seshadri, *Thawing versus tracker behaviour: Observational evidence*, [arXiv:1204.2617](#).
- [154] H. B. Callen, *Thermodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1960.
- [155] R. Hermann, *Geometry, physics and systems*. Marcel Dekker, New York, 1973.
- [156] V. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer Verlag, New York, 1980.
- [157] A. Vazquez, H. Quevedo, and A. Sanchez, *Thermodynamic systems as extremal hypersurfaces*, *J.G geom.Phys.* **60** (2010) 1942–1949, [[arXiv:1101.3359](#)].
- [158] H. Quevedo, A. Sanchez, S. Taj, and A. Vazquez, *Curvature as a measure of the thermodynamic interaction*, *J.Kor.Phys.Soc.* **57** (2010) 646, [[arXiv:1011.0122](#)].
- [159] W. Thirring, *Systems with negative specific heat*, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* **235** (1970) 339–352.
- [160] D. Lynden-Bell, *Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry*, *Physica* **A263** (1999) 293–304, [[cond-mat/9812172](#)].

- [161] H. G.P., *Polytropes - Applications in Astrophysics and Related Fields*, vol. 306 of *Astrophysics and Space Science Library*. 2004.
- [162] N. Bilic, G. B. Tupper, and R. D. Viollier, *Cosmological tachyon condensation*, Phys.Rev. **D80** (2009) 023515, [[arXiv:0809.0375](#)].
- [163] D. Bertacca and N. Bartolo, *ISW effect in unified dark matter scalar field cosmologies: An analytical approach*, JCAP **0711** (2007) 026, [[arXiv:0707.4247](#)].
- [164] A. Lewis and S. Bridle, *Cosmological parameters from CMB and other data: a Monte- Carlo approach*, Phys. Rev. **D66** (2002) 103511, [[astro-ph/0205436](#)].
- [165] D. Larson, J. Dunkley, G. Hinshaw, E. Komatsu, M. Nolta, et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters*, Astrophys.J.Suppl. **192** (2011) 16, [[arXiv:1001.4635](#)].
- [166] L. Amendola, *Perturbations in a coupled scalar field cosmology*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **312** (2000) 521, [[astro-ph/9906073](#)].
- [167] G. Mangano, G. Miele, and V. Pettorino, *Coupled quintessence and the coincidence problem*, Mod.Phys.Lett. **A18** (2003) 831–842, [[astro-ph/0212518](#)].
- [168] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon, and W. Zimdahl, *Interacting quintessence solution to the coincidence problem*, Phys.Rev. **D67** (2003) 083513, [[astro-ph/0303145](#)].
- [169] C. G. Boehmer, G. Caldera-Cabral, R. Lazkoz, and R. Maartens, *Dynamics of dark energy with a coupling to dark matter*, Phys.Rev. **D78** (2008) 023505, [[arXiv:0801.1565](#)].
- [170] **DAMA** Collaboration, R. Bernabei et al., *On a further search for a yearly modulation of the rate in particle dark matter direct search*, Phys.Lett. **B450** (1999) 448–455.
- [171] **XENON** Collaboration, J. Angle et al., *First Results from the XENON10 Dark Matter Experiment at the Gran Sasso National Laboratory*, Phys.Rev.Lett. **100** (2008) 021303, [[arXiv:0706.0039](#)].
- [172] G. Jungman, M. Kamionkowski, and K. Griest, *Supersymmetric dark matter*, Phys.Rept. **267** (1996) 195–373, [[hep-ph/9506380](#)].
- [173] M. Beltran, D. Hooper, E. W. Kolb, and Z. C. Krusberg, *Deducing the nature of dark matter from direct and indirect detection experiments in the absence of collider signatures of new physics*, Phys.Rev. **D80** (2009) 043509, [[arXiv:0808.3384](#)].

- [174] B. D. Wandelt, R. Dave, G. R. Farrar, P. C. McGuire, D. N. Spergel, et al., *Selfinteracting dark matter*, [astro-ph/0006344](#).
- [175] R. H. Cyburt, B. D. Fields, V. Pavlidou, and B. D. Wandelt, *Constraining strong baryon dark matter interactions with primordial nucleosynthesis and cosmic rays*, Phys.Rev. **D65** (2002) 123503, [[astro-ph/0203240](#)].
- [176] X.-l. Chen, S. Hannestad, and R. J. Scherrer, *Cosmic microwave background and large scale structure limits on the interaction between dark matter and baryons*, Phys.Rev. **D65** (2002) 123515, [[astro-ph/0202496](#)].
- [177] A. L. Erickcek, P. J. Steinhardt, D. McCammon, and P. C. McGuire, *Constraints on the Interactions between Dark Matter and Baryons from the X-ray Quantum Calorimetry Experiment*, Phys.Rev. **D76** (2007) 042007, [[arXiv:0704.0794](#)].
- [178] G. D. Mack, J. F. Beacom, and G. Bertone, *Towards closing the window on strongly interacting dark matter: Far-reaching constraints from earth's heat flow*, Phys.Rev. **D76** (2007) 043523, [[arXiv:0705.4298](#)].
- [179] W. Hu and I. Sawicki, *A parameterized Post-Friedmann framework for modified gravity*, Phys.Rev. **D76** (2007) 104043, [[arXiv:0708.1190](#)].
- [180] E. Bertschinger and P. Zukin, *Distinguishing modified gravity from dark energy*, Phys.Rev. **D78** (2008) 024015, [[arXiv:0801.2431](#)].
- [181] S. F. Daniel, E. V. Linder, T. L. Smith, R. R. Caldwell, A. Cooray, et al., *Testing general relativity with current cosmological data*, Phys.Rev. **D81** (2010) 123508, [[arXiv:1002.1962](#)].
- [182] S. F. Daniel and E. V. Linder, *Confronting General Relativity with further cosmological data*, Phys.Rev. **D82** (2010) 103523, [[arXiv:1008.0397](#)].
- [183] A. Aviles and J. L. Cervantes-Cota, *The dark degeneracy and interacting cosmic components*, Phys.Rev. **D84** (2011) 083515, [[arXiv:1108.2457](#)]. 15 pages, 9 figures, Version 2: Extended discussion of Sec. IV B and some references added.
- [184] J. Rawal and J. Narlikar, *On a nonlinear and Lorentz-invariant version of Newtonian gravitation*, J.Astrophys.Astron. **3** (1982) 393–398.
- [185] J. Narlikar and T. Padmanabhan, *On a nonlinear and Lorentz-invariant version of Newtonian gravitation-II*, J.Astrophys.Astron. **6** (1985) 171–175.
- [186] T. Singh and T. Padmanabhan, *An attempt to explain the smallness of the cosmological constant*, Int.J.Mod.Phys. **A3** (1988) 1593–1602.



- [187] M. Sami and T. Padmanabhan, *A Viable cosmology with a scalar field coupled to the trace of the stress tensor*, Phys.Rev. **D67** (2003) 083509, [[hep-th/0212317](#)].
- [188] L. Hui and A. Nicolis, *An Equivalence principle for scalar forces*, Phys.Rev.Lett. **105** (2010) 231101, [[arXiv:1009.2520](#)].
- [189] A. Vainshtein, *To the problem of nonvanishing gravitation mass*, Phys.Lett. **B39** (1972) 393–394.
- [190] K. Hinterbichler and J. Khoury, *Symmetron fields: Screening long-range forces through local symmetry restoration*, Phys.Rev.Lett. **104** (2010) 231301, [[arXiv:1001.4525](#)].
- [191] J. Khoury, *Theories of Dark Energy with Screening Mechanisms*, [arXiv:1011.5909](#).
- [192] P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, J. Khoury, and A. Weltman, *Detecting dark energy in orbit - The cosmological chameleon*, Phys.Rev. **D70** (2004) 123518, [[astro-ph/0408415](#)].
- [193] R. Gannouji, B. Moraes, D. F. Mota, D. Polarski, S. Tsujikawa, et al., *Chameleon dark energy models with characteristic signatures*, Phys.Rev. **D82** (2010) 124006, [[arXiv:1010.3769](#)].
- [194] Y. B. Zeldovich and R. A. Sunyaev, *The Interaction of Matter and Radiation in a Hot-Model Universe*, Astrophys.Space Sci. **4** (1969) 301.
- [195] **Planck** Collaboration, P. Ade et al., *Planck Early Results: The Planck mission*, [arXiv:1101.2022](#).
- [196] B. A. Reid, W. J. Percival, D. J. Eisenstein, L. Verde, D. N. Spergel, et al., *Cosmological Constraints from the Clustering of the Sloan Digital Sky Survey DR7 Luminous Red Galaxies*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **404** (2010) 60–85, [[arXiv:0907.1659](#)].
- [197] N. Kaiser, *On the Spatial correlations of Abell clusters*, Astrophys.J. **284** (1984) L9–L12.
- [198] P. Peebles, *Principles of physical cosmology*, .
- [199] E. V. Linder, *Cosmic growth history and expansion history*, Phys.Rev. **D72** (2005) 043529, [[astro-ph/0507263](#)].
- [200] N. Kaiser, *Clustering in real space and in redshift space*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **227** (1987) 1–27.



- [201] W. J. Percival, R. C. Nichol, D. J. Eisenstein, J. A. Frieman, M. Fukugita, et al., *The shape of the SDSS DR5 galaxy power spectrum*, *Astrophys.J.* **657** (2007) 645–663, [[astro-ph/0608636](#)].
- [202] A. H. Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 347–356.
- [203] A. D. Linde, *A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*, *Physics Letters B* **108** (1982) 389–393.
- [204] K.-i. Maeda, *Towards the einstein-hilbert action via conformal transformation*, *Phys. Rev. D* **39** (May, 1989) 3159–3162.
- [205] A. A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, *Phys.Lett.* **B91** (1980) 99–102.
- [206] N. Birrel and P. Davies, *Quantum fields in curved spacetimes*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982.
- [207] A. A. Starobinsky, *Relict gravitation radiation spectrum and initial state of the Universe.*, *JETP Lett.* **30** (1979) 682–685.
- [208] T. Chiba, T. L. Smith, and A. L. Erickcek, *Solar System constraints to general  $f(R)$  gravity*, *Phys.Rev.* **D75** (2007) 124014, [[astro-ph/0611867](#)].
- [209] P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, and D. J. Shaw,  *$f(R)$  gravity and Chameleon theories*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 104021, [[arXiv:0806.3415](#)].
- [210] S. Das and N. Banerjee, *Brans-Dicke scalar field as a Chameleon*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 043512, [[arXiv:0803.3936](#)].
- [211] S. Tsujikawa, K. Uddin, S. Mizuno, R. Tavakol, and J. Yokoyama, *Constraints on scalar-tensor models of dark energy from observational and local gravity tests*, *Phys.Rev.* **D77** (2008) 103009, [[arXiv:0803.1106](#)].
- [212] G. R. Farrar and P. J. E. Peebles, *Interacting dark matter and dark energy*, *Astrophys.J.* **604** (2004) 1–11, [[astro-ph/0307316](#)].
- [213] T. Koivisto, *Growth of perturbations in dark matter coupled with quintessence*, *Phys.Rev.* **D72** (2005) 043516, [[astro-ph/0504571](#)].
- [214] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung.)*, *Math.-Phys. Kl.* **1915** (1915) 395–407.

- [215] G. Gibbons and S. Hawking, *Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity*, Phys.Rev. **D15** (1977) 2752–2756.
- [216] A. Palatini, *Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*, Rend. Circ. Mat. Palermo **43** (1919) 203.
- [217] J. Jose and E. Saletan, *Classical Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 1998.
- [218] T. Tamaki and S. Tsujikawa, *Revisiting chameleon gravity: Thin-shell and no-shell fields with appropriate boundary conditions*, Phys.Rev. **D78** (2008) 084028, [[arXiv:0808.2284](#)].
- [219] R. Bean, E. E. Flanagan, I. Laszlo, and M. Trodden, *Constraining interactions in Cosmology's dark sector*, Phys.Rev. **D78** (2008) 123514, [[arXiv:0808.1105](#)].
- [220] A. Aviles and J. L. Cervantes-Cota, *Dark matter from dark energy-baryonic matter couplings*, Phys.Rev. **D83** (2011) 023510, [[arXiv:1012.3203](#)].
- [221] R. Bean and J. Magueijo, *Dilaton derived quintessence scenario leading naturally to the late time acceleration of the universe*, Phys.Lett. **B517** (2001) 177–183, [[astro-ph/0007199](#)].
- [222] T. Gonzalez, G. Leon, and I. Quiros, *Quintessence models of dark energy with non-minimal coupling*, [astro-ph/0502383](#).
- [223] B. Li and J. D. Barrow, *N-Body simulations for coupled scalar field cosmology*, Phys.Rev. **D83** (2011) 024007, [[arXiv:1005.4231](#)].
- [224] S. Hawking and G. Ellis, *The Large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973.
- [225] F. de Felice and C. Clarke, *Relativity on curved manifolds*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990.
- [226] J. D. Brown, *Action functionals for relativistic perfect fluids*, Class.Quant.Grav. **10** (1993) 1579–1606, [[gr-qc/9304026](#)].
- [227] B. F. Schutz, *Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle*, Phys.Rev. **D2** (1970) 2762–2773.
- [228] O. Bertolami, J. Paramos, T. Harko, and F. S. Lobo, *Non-minimal curvature-matter couplings in modified gravity*, [arXiv:0811.2876](#).
- [229] J.-P. Uzan, *The fundamental constants and their variation: Observational status and theoretical motivations*, Rev.Mod.Phys. **75** (2003) 403, [[hep-ph/0205340](#)].

- [230] D. Mota, V. Salzano, and S. Capozziello, *Testing feasibility of scalar-tensor gravity by scale dependent mass and coupling to matter*, Phys.Rev. **D83** (2011) 084038, [[arXiv:1103.4215](https://arxiv.org/abs/1103.4215)].
- [231] M. Phillips, *The absolute magnitudes of Type IA supernovae*, Astrophys.J. **413** (1993) L105–L108.
- [232] M. P. Hobson, A. H. Jaffe, A. R. Liddle, P. Mukherjee, and D. Parkinson, *Bayesian Methods in Cosmology*. Cambridge University Press, 1 ed., 2010.
- [233] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller, *Equation of state calculations by fast computing machines*, Journal of Chemical Physics **21** (1953) 1087–1092.
- [234] W. Hastings, *Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications*, Biometrika (1970) 97–109.
- [235] A. Lewis and S. Bridle, “Cosmomc notes.”  
<http://cosmologist.info/notes/CosmoMC.pdf>.
- [236] J. Dunkley, M. Bucher, P. G. Ferreira, K. Moodley, and C. Skordis, *Fast and reliable MCMC for cosmological parameter estimation*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **356** (2005) 925–936, [[astro-ph/0405462](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0405462)].
- [237] A. Gelman and D. B. Rubin, *Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences*, Statist.Sci. **7** (1992) 457–472.
- [238] S. Brooks and A. Gelman, *General methods for monitoring convergence of iterative simulations*, Journal of Computational and Graphical Statistics **7** (1998) 434–455.