UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO DE RETÍCULAS DE CLASES ESTABLES DE MÓDULOS Y CARACTERIZACIONES DE ANILLOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

CÉSAR CEJUDO CASTILLA

DIRECTOR DE TESIS

DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. JOSÉ RÍOS MONTES (INSTITUTO DE MATEMÁTICAS)
DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA (FACULTAD DE CIENCIAS)

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE DEL 2013.

Agradecimientos

Quiero agradecer ampliamente a mi tutor el Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía por haberme aceptado como su alumno; por sus enseñanzas, paciencia y amistad. También quiero agradecerle por ser uno de los pocos tutores que se preocupan por sus alumnos en el ámbito personal.

A mis padres Ma. Eugenia y César por su apoyo durante todos mis estudios y proyectos. Por ser unos excelentes y amorosos padres.

A mi Tía Ma. Elena por su apoyo y cariño.

A mis hermanos Lehilani, Germán y Yeshua por su cariño.

A Fernando por su amistad y por su paciencia al despejar mis dudas en los días de estudio.

A Gerardo, Juan Carlos y Natalia por su amistad.

A mis sinodales Dr.José Ríos Montes, Dr. Carlos Signoret Poillon, Dr. Jaime Castro Pérez y la Dra. Bertha Tomé Arriola por sus valiosos comentarios y correcciones.

Al Conacyt por la beca que me otorgo para realizar mis estudios doctorales.

Índice general

Introducción

En su libro Stenström ([16], pg. 18) define una gran retícula como una clase propia $\mathscr{C}$ con orden parcial $\leq$ dado por la inclusión de clases, tal que $\mathscr{C}$ con este orden es una retícula excepto por el hecho de que no es un conjunto. En trabajos recientes, han sido estudiadas grandes retículas de clases de módulos. Por ejemplo la retícula de clases abiertas que ha sido estudiada por los profesores F. Raggi, H. A. Rincón y C. Signoret, en la que de hecho se ha demostrado que no es un conjunto, pero es una retícula completa distributiva.
Otra retícula que ha sido introducida y estudiada por Dauns y Zhou [18], es la retícula de clases naturales.
Las retículas de clases hereditarias, de clases cohereditarias y conaturales han sido estudiadas por los profesores A. Alvarado, J. Ríos y H. A. Rincón, [1], [2], [3] y [4].
En el primer capítulo de este trabajo desarrollamos algunos de los

conceptos fundamentales de la estructura retícular, de las retículas de clases de módulos hereditarias, cohereditarias, abiertas, naturales y conaturales. En la primera sección describimos cómo generar clases de módulos cerradas bajo ciertas propiedades por ejemplo, clases cerradas bajo tomar submódulos, cocientes, cápsulas inyectivas y sumas directas. En la segunda sección obtenemos los pseudocomplementos en las retículas de clases hereditarias, cohereditarias y abiertas. Además de describir la retícula de clases conaturales que es el esqueleto de la retícula de clases cohereditarias. Por último en la tercera sección estudiamos una caracterización de anillos artinianos de ideales principales dada por los profesores A. Alvarado, J. Ríos y H. A. Rincón en [1], dicha caracterización consiste en que la retícula de clases hereditarias es igual a la retícula de clases cohereditarias si y sólo si R es artiniano de ideales principales.

En la primera sección del segundo capítulo, estudiamos las retículas $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$, $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ y $\mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus\}}$. En esta sección obtenemos cómo generar con una clase de módulos en cada una de las retículas mencionadas anteriormente, dichos resultados son originales y a continuación los enunciamos:

1) Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{E\}}$ entonces $\xi_{\leq}(\mathscr{C}) \in \mathscr{L}_{\{E\}}$.

2) Si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos entonces $\xi_{\leq,E}(\mathscr{C}) = \xi_{\leq}\xi_E(\mathscr{C})$.

3) Si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos entonces la menor clase de módulos cerrada bajo submódulos y sumas directas que contiene a $\mathscr{C}$ es $\xi_{\leq,\oplus}(\mathscr{C}) = \xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$.

4) Si $\mathscr{C} \subseteq R$-mod entonces $\eta^{\infty}(\mathscr{C}) = \xi_{\twoheadrightarrow,E}(\mathscr{C})$.

En la segunda sección, estudiamos algunas relaciones entre las retículas $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$, $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ y $\mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus\}}$. En esta sección se obtuvieron los siguientes resultados originales:

5. Los siguientes enunciados son equivalentes:

   a) $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$.

   b) Para cada R-módulo inyectivo I, si existe un epimorfismo $I \twoheadrightarrow K$, entonces existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$.

6. $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$, si la siguiente condición es válida para todo R-módulo inyectivo izquierdo I: si existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$ entonces existe un epimorfismo $I \twoheadrightarrow K$.

7. Son equivalentes para un anillo R los siguientes enunciados:

   a) $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} = \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$;

b) Para todo módulo inyectivo I se cumple: Existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$ si y sólo si existe un epimorfismo $I \twoheadrightarrow K$.

8. Si $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow, E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ entonces R es casi-Frobenius.

9. Si $\mathscr{L}_{\{\leq, \oplus\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{E\}}$ entonces R es un V-anillo izquierdo y neteriano izquierdo.

10. Si I es inyectivo inescindible entonces $\xi_{\leq, E}(I)$ es un átomo en $\mathscr{L}_{\{\leq, E\}}$.

11. Sea R un anillo neteriano izquierdo. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:

    a) $\mathscr{C}$ es un átomo en $\mathscr{L}_{\{\leq, E\}}$.

    b) Existe I inyectivo inescindible tal que $\mathscr{C} = \xi_{\leq, E}(I)$.

En la tercera sección, nuestro primer teorema consiste en dar una generalización del teorema obtenido por los profesores A. Alvarado, J. Ríos y H. A. Rincón en [1]. A continuación enunciamos la generalización obtenida:

12. Son equivalentes las siguientes proposiciones:

a) Para todo módulo inyectivo I, si existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$ entonces existe un epimorfismo $I \twoheadrightarrow K$;

b) R es artiniano de ideales principales;

c) $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} = \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$;

d) $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \supseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$;

e) $\mathscr{L}_{\{\leq\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$;

f) $\mathscr{L}_{\{\leq\}} \supseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

Como el lector puede observar en el teorema anterior no está incluida la condición $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$, lo que ha quedado como una pregunta abierta; tratando de obtener una respuesta obtuvimos los siguientes resultados:

13. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces son equivalentes para cada R-módulo M:

    1) M es artiniano,

    2) M es finitamente cogenerado.

14. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces R es co-neteriano izquierdo.

15. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces $E(R)$ es cogenerador de R-mod.

16. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces R es semi-artiniano izquierdo.

17. Si R es local izquierdo y co-neteriano izquierdo entonces R satisface la condición de cadena ascendente para ideales bilaterales.

18. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces R es un producto finito de anillos locales izquierdos perfectos derechos e izquierdos que satisface la condición de cadena ascendente para ideales bilaterales.

Capítulo 1

Retículas de clases de módulos.

En el estudio de anillos y módulos, algunas clases de retículas de clases de módulos han sido utilizadas para obtener información acerca de la estructura interna del anillo y de la categoría de módulos asociada a éste.

Podemos definir retículas de clases de módulos con propiedades de cerradura. Algunas de estas propiedades de cerradura son: bajo submódulos, cocientes, cápsulas inyectivas, sumas directas, productos y cubiertas proyectivas. Abreviamos estas propiedades usando los símbolos $\leq, \twoheadrightarrow, E, \oplus, \Pi, P$ respectivamente. Si A denota un conjunto de estas

propiedades de cerradura, denotamos por $\mathscr{L}_A$ a la clase de clases de módulos cerradas bajo propiedades de A.
En este trabajo las clases estudiadas son todas abstractas, es decir, cerradas bajo isomorfismos y conteniendo al cero.

Note que en general $\mathscr{L}_A$ es una retícula grande con el orden dado por la inclusión de clases y con ínfimos dados por la intersección de clases.

Algunas retículas de clases de módulos que han sido estudiadas son:

1) La retícula de clases hereditarias $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$.

2) La retícula de clases cohereditarias $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

3) La retícula de clases abiertas $\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$.

4) La retícula de clases naturales $\mathscr{L}_{\{\leq,\oplus,E\}}$.

5) La retícula de clases de torsión hereditarias $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,\leq,ext\}}$.

6) La retícula de clases de Serre $\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}}$.

1.0.1 Proposición. 1) Si $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ entonces $\bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ y $\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$.

2) Si $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ entonces $\bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y $\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

3) Si $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ entonces $\bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i \in \mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ y $\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i \in \mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$.

1.0.2 Observación. Las retículas $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$, $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y $\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ son completas distributivas tomando $\bigwedge\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i = \bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$ y $\bigvee\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i = \bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$. Más aún R-mod y $\{0\}$ son los elementos mayor y menor de las retículas.

1.1. Generación en retículas $\mathscr{L}_A$

1.1.1 Definición. Sean A un conjunto de propiedades de cerradura y $\mathscr{C}$ una clase de R-módulos, entonces $\xi_A(\mathscr{C})$ es la menor clase de módulos que contiene a $\mathscr{C}$ cerrada bajo las propiedades de A.

1.1.2 Proposición. Si $\mathscr{C} \subseteq R - mod$ entonces

1) $\xi_{\leq}(\mathscr{C}) = \{N |$ existe un monomorfismo $N \rightarrowtail C$ con $C \in \mathscr{C}\}$;

2) $\xi_E(\mathscr{C}) = \mathscr{C} \cup \{E(C) | C \in \mathscr{C}\}$;

3) $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) = \{M |$ existe un epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ con $N \in \mathscr{C}\}$;

4) $\xi_{\oplus}(\mathscr{C}) = \{M | M = \bigoplus\limits_{i\in I}\{C_i\}$ con I un conjunto y $C_i \in \mathscr{C}\ \forall i \in I\}$.

Demostración. 1) Sea $\mathscr{K} = \{N | \exists$ un monomorfismo $N \rightarrowtail C$ con $C \in \mathscr{C}\}$. Es claro que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K}$, además si $M \in \mathscr{K}$ y $N \leq M$, entonces existe $C \in \mathscr{C}$ tal que hay un monomorfismo $M \rightarrowtail C$, luego hay un monomorfismo $N \rightarrowtail C$. Por lo tanto $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Sea $M \in \mathscr{K}$, entonces existe $C \in \mathscr{C}$ y un monomorfismo $M \rightarrowtail C$, como $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ entonces $M \in \mathscr{D}$, de modo que $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$. Por lo tanto $\mathscr{K} = \xi_{\leq}(\mathscr{C})$.

2) Sea $\mathscr{K} = \mathscr{C} \cup \{E(C) | C \in \mathscr{C}\}$. Es claro que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{E\}}$. Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_E$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ y sea $M \in \mathscr{K}$ entonces $M \in \mathscr{C}$ o $M = E(C)$ para algún $C \in \mathscr{C}$. Esto implica que $M \in \mathscr{D}$, y así $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$. Por lo tanto $\mathscr{K} = \xi_E(\mathscr{C})$.

3) Sea $\mathscr{K} = \{M |$ existe un epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ con $N \in \mathscr{C}\}$. Es claro que $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K}$. Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ y sea $M \in \mathscr{K}$ entonces existe $N \in \mathscr{C}$ y un epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ entonces $M \in \mathscr{D}$ por ser $\mathscr{D}$ cerrada bajo cocientes; así que $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$. Por lo tanto $\mathscr{K} = \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$.

4) Sea $\mathscr{K} = \{M | M = \bigoplus_{i \in I}\{C_i\}$ con I un conjunto y $C_i \in \mathscr{C}$ $\forall i \in I\}$. Demostremos que $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\bigoplus\}}$; para ello sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos en $\mathscr{K}$, entonces para cada M_i existe una familia $\{C_{ij}\}_{j \in J_i}$ de módulos en $\mathscr{C}$ tal que $M_i = \bigoplus_{j \in J_i} C_{ij}$. Entonces $\bigoplus_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I}\{\bigoplus_{j \in J_i} C_{ij}\} \in$

$\mathscr{K}$. Por lo tanto $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\bigoplus\}}$. Además es claro que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K}$. Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\bigoplus\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ y sea $M \in \mathscr{K}$, entonces existe una familia $\{C_i\}_{i\in I}$ de módulos en $\mathscr{C}$ tal que $M = \bigoplus\limits_{i\in I}\{C_i\}$, entonces $M \in \mathscr{D}$ por ser $\mathscr{D}$ cerrada bajo sumas directas, por lo que $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$. Por lo tanto $\mathscr{K} = \xi_{\bigoplus}(\mathscr{C})$. $\square$

1.1.3 Observación. Si $\mathscr{L}_P = \mathscr{L}_Q$ entonces $\xi_P(\mathscr{C}) = \xi_Q(\mathscr{C})$ para toda clase $\mathscr{C}$ de R-módulos.

Demostración. Por definición $\xi_P(\mathscr{C})$ es la menor clase en $\mathscr{L}_P$ que contiene a $\mathscr{C}$, y por hipótesis $\mathscr{L}_P = \mathscr{L}_Q$, entonces $\mathscr{C} \subseteq \xi_P(\mathscr{C})$ y $\xi_P(\mathscr{C}) \in \mathscr{L}_Q$; lo que implica que $\xi_Q(\mathscr{C}) \subseteq \xi_P(\mathscr{C})$. Simétricamente $\xi_P(\mathscr{C}) \subseteq \xi_Q(\mathscr{C})$. $\square$

A continuación describimos cómo se generan clases en la retícula $\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$.

1.1.4 Definición. Sean N, M R-módulos, decimos que N es un subcociente de M si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads, "g"] \\ N \arrow[r, tail, "f"] & C \end{tikzcd}$$

donde g es un epimorfismo y f es un monomorfismo.

1.1.5 Observación. El diagrama de la definición se corresponde con el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, two heads, "\lambda"] & M \\ N & \end{tikzcd}$$

tomando pullbacks (pushouts) respectivamente, donde λ es epimorfismo y μ es monomorfismo.

1.1.6 Lema. Si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos entonces

$$\xi_{\leq,\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) = \{M | M \text{ es subcociente de algún } C \in \mathscr{C}\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{K} = \{M|M$ es subcociente de algún $C \in \mathscr{C}\}$, es claro que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K}$. Demostremos que $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$. Sea $M \in \mathscr{K}$ y sea $N \leq M$ entonces existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} & & C \arrow[d, two heads, "g"] \\ N \arrow[r, tail] & M \arrow[r, tail, "f"] & H \end{tikzcd}$$

Con $C \in \mathscr{C}$, entonces N es un subcociente de C. Por lo tanto $\mathscr{K}$ es cerrada bajo submódulos. Sea $M \twoheadrightarrow L$ entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, two heads, "g"] \\
M \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, two heads] & H \\
L &
\end{tikzcd}$$

Tomando el push out queda el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, two heads, "g"] \\
M \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, two heads] & H \arrow[d, two heads] \\
L \arrow[r, tail] & P
\end{tikzcd}$$

Entonces L es un subcociente de C. Por lo tanto $\mathscr{K} \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$.

Sea $\mathscr{D} \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Si $M \in \mathscr{K}$ entonces M es un subcociente de C con $C \in \mathscr{C}$, así que existe un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, two heads, "g"] \\
M \arrow[r, tail, "f"] & H
\end{tikzcd}$$

Entonces $H \in \mathscr{D}$ por ser cerrada bajo cocientes, entonces $M \in \mathscr{D}$ por ser $\mathscr{D}$ cerrada bajo submódulos. Por lo tanto $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$. $\square$

A continuación describimos cómo se generan clases en la retícula $\mathscr{L}_{\{\leq, E\}}$.

1.1.7 Proposición. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{E\}}$ entonces $\xi_{\leq}(\mathscr{C}) \in \mathscr{L}_{\{E\}}$.

Demostración. Sea $N \in \xi_{\leq}(\mathscr{C}) = \{M |$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail C$ con $C \in \mathscr{C}\}$, entonces hay un monomorfismo $N \overset{t}{\rightarrowtail} C$ con $C \in \mathscr{C}$, de modo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[d, tail, "t"] & E(N) \arrow[d, tail, "f"] \\ C \arrow[r, hook] & E(C) \end{tikzcd}$$

Donde el morfismo f existe por ser $E(C)$ inyectivo. Además como N es esencial en $E(N)$ se tiene que f es monomorfismo. Por hipótesis $E(C) \in \mathscr{C}$, por lo tanto $E(N) \in \xi_{\leq}(\mathscr{C})$. $\square$

1.1.8 Observación. Si $\mathscr{C} \subseteq R$-mod entonces $\xi_{\leq}\xi_{E}(\mathscr{C}) = \{M |$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail E(C)$ para algún $C \in \mathscr{C}\}$.

1.1.9 Lema. Si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos entonces $\xi_{\leq, E}(\mathscr{C}) = \xi_{\leq}\xi_{E}(\mathscr{C})$.

Demostración. Consideremos $\mathscr{K} = \{M |$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail E(C)$, para algún $C \in \mathscr{C}\}$. Claramente $\mathscr{K}$ es una clase cerrada bajo submódulos. Observemos que $\mathscr{K}$ también es una clase cerrada

bajo cápsulas inyectivas. Supongamos $M \in \mathscr{K}$, entonces existe un monomorfismo $M \rightarrowtail E(C)$ con $C \in \mathscr{C}$, por lo que $E(M)$ se sumerge en $E(C)$, así que $E(M) \in \mathscr{K}$. Es claro que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K}$.
Supongamos que $\mathscr{D}$ es una clase cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas que contiene a $\mathscr{C}$. Si $M \in \mathscr{K}$ entonces existe un monomorfismo $M \rightarrowtail E(C)$ con $C \in \mathscr{C}$. Como $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ entonces $C \in \mathscr{D}$, así que $E(C) \in \mathscr{D}$, por lo que $M \in \mathscr{D}$. Por lo tanto $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$ demostrando así que $\mathscr{K} = \xi_{\leq,E}(\mathscr{C})$. $\square$

1.1.10 Lema. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\bigoplus\}}$ entonces $\xi_{\leq,E}(\mathscr{C}) \in \mathscr{L}_{\{\bigoplus\}}$.

Demostración. Sea $\{N_i\} \subseteq \xi_{\leq,E}(\mathscr{C})$. Entonces existen monomorfismos $N_i \rightarrowtail E(M_i)$, donde $M_i \in \mathscr{C}$, por lo que

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} N_i \arrow[r, tail] & \bigoplus_{i\in I} E(M_i) \\
& \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[u, hook, "es"]
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que $E(\bigoplus_{i\in I} E(M_i)) \cong E(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ y como $E(\bigoplus_{i\in I} N_i)$ se sumerge en $E(\bigoplus\limits_{i\in I} E(M_i))$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E(\bigoplus\limits_{i\in I} N_i) \arrow[r, tail] & E(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i) \\
\bigoplus\limits_{i\in I} N_i \arrow[u, hook] \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

Dado que $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\bigoplus\}}$ entonces $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i \in \xi_{\leq,E}(\mathscr{C})$. $\square$

Cabe notar la simplicidad del argumento comparado con los argumentos dados por Dauns y Zhou en [18].

1.1.11 Observación. Si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos entonces $(\xi_{\leq}\xi_E)\xi_{\bigoplus}(\mathscr{C}) = \{M|$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail E(\bigoplus\limits_{i\in I}\{C_i\}$) con I un conjunto y $C_i \in \mathscr{C},$ para toda $i \in I\}$

1.1.12 Teorema. Si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos entonces $\xi_{\leq,\bigoplus,E}(\mathscr{C}) = (\xi_{\leq}\xi_E)\xi_{\bigoplus}(\mathscr{C})$.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una clase de R-módulos, entonces $\xi_{\bigoplus}(\mathscr{C}) \in \mathscr{L}_{\{\bigoplus\}}$. Luego por el Lema 1.1.10 tenemos que $(\xi_{\leq,E})\xi_{\bigoplus}(\mathscr{C}) \in \mathscr{L}_{\{\bigoplus\}}$, y por el Lema 1.1.9 tenemos que $\xi_{\leq,E} = \xi_{\leq}\xi_E$ entonces $(\xi_{\leq}\xi_E)\xi_{\bigoplus}(\mathscr{C}) = (\xi_{\leq,E})\xi_{\bigoplus}(\mathscr{C}) \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$. Por lo tanto $(\xi_{\leq}\xi_E)\xi_{\bigoplus}(\mathscr{C}) \in \mathscr{L}_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$. Además es claro que $\mathscr{C} \subseteq (\xi_{\leq}\xi_E)\xi_{\bigoplus}(\mathscr{C})$.

Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Si $M \in (\xi_{\leq}\xi_E)\xi_{\bigoplus}(\mathscr{C})$ entonces existe un monomorfismo $M \rightarrowtail E(\bigoplus\limits_{i\in I}\{C_i\})$ con I conjunto y $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{C}$, entonces $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{D}$. Por lo que $E(\bigoplus\limits_{i\in I}\{C_i\}) \in \mathscr{D}$, y esto implica que $M \in \mathscr{D}$ por ser $\mathscr{D}$ hereditaria. Por lo tanto $\xi_{\leq,\bigoplus,E}(\mathscr{C}) = (\xi_{\leq}\xi_E)\xi_{\bigoplus}(\mathscr{C})$.

$\square$

1.2. Pseudocomplementos

1.2.1 Definición. 1) Decimos que $\mathscr{D}$ en $\mathscr{L}_A$ es pseudocomplemento para $\mathscr{C}$ en la retícula $\mathscr{L}_A$, si $\mathscr{D}$ es una clase máxima con la propiedad de que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{0\}$. Si $\mathscr{C}$ está en $\mathscr{L}_A$ denotamos a su pseudocomplemento como $\mathscr{C}^{\perp_A}$.

2) Un pseudocomplemento $\mathscr{D}$ de $\mathscr{C}$ es llamado pseudocomplemento fuerte si es el mayor elemento de $\mathscr{L}_A$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = 0$.

3) Denotamos por $Skel(\mathscr{L}_A)$ a la clase de pseudocomplementos de $\mathscr{L}_A$.

1.2.2 Proposición. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$, entonces $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}} = \{M|$ si existe un monomorfismo $N \rightarrowtail M$ con $N \in \mathscr{C}$ entonces $N = 0\}$.

Además $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ es un pseudocomplemento fuerte de $\mathscr{C}$.

Demostración. Consideremos $\mathscr{K} = \{M|$ si existe un monomorfismo $N \rightarrowtail M$ con $N \in \mathscr{C}$ entonces $N = 0\}$. Primero demostremos por contradicción que $\mathscr{K}$ pertenece a la retícula $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Sea $M \in \mathscr{K}$ y supongamos que existe $N \leq M$ tal que $N \notin \mathscr{K}$, entonces existe $N' \leq N$ tal que $N' \in \mathscr{C}$ y $N' \neq 0$ entonces $0 \neq N' \leq N \leq M$ y $N' \in \mathscr{C}$ lo que es una contradicción. Entonces $N \in \mathscr{K}$, y por lo tanto $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Sea $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{K}$, entonces para el morfismo identidad $M \xrightarrow{Id} M$ y $M \in \mathscr{C}$ tenemos que $M = 0$.

Veamos por contradicción que $\mathscr{K}$ es pseudocomplemento fuerte. Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ pseudocomplemento de $\mathscr{C}$ tal que $\mathscr{D} \nsubseteq \mathscr{K}$, entonces existe $M \in \mathscr{D}$ tal que $M \notin \mathscr{K}$. Esto implica que existe $0 \neq N \leq M$ con $N \in \mathscr{C}$, entonces $N \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ que es una contradicción. Por lo tanto $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{K}$. □

1.2.3 Proposición. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces $\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \{M|$ si existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow L$ con $L \in \mathscr{C}$, entonces $L = 0\}$.

Además $\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ es un pseudocomplemento fuerte de $\mathscr{C}$.

Demostración. Sea $\mathscr{K} = \{M|$ si existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow L$ con $L \in \mathscr{C}$, entonces $L = 0\}$. Primero demostremos que $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Sea $M \in \mathscr{K}$ y tomemos un cociente A de M. Si L es un

cociente de A tal que $L \in \mathscr{C}$, entonces L es un cociente de M; por lo que $L = 0$. Entonces $A \in \mathscr{K}$ y por lo tanto $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.
Sea $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{K}$, entonces tomando el morfismo identidad tenemos que $M \overset{Id}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} M$ y $M \in \mathscr{C}$; esto implica que $M = 0$.
Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = 0$, y supongamos que $\mathscr{D} \nsubseteq \mathscr{K}$, entonces existe $M \in \mathscr{D}$ tal que $M \notin \mathscr{K}$, entonces existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow L$ con $0 \neq L \in \mathscr{C}$. Como $\mathscr{D}$ es cerrada bajo cocientes entonces $L \in \mathscr{D}$, entonces $0 \neq L \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$, que es una contradicción. Por lo tanto $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{K}$. $\square$

1.2.4 Proposición. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$, entonces

$$\mathscr{C}^{\perp_{\leq, \twoheadrightarrow}} = \{M | M \text{ no tiene subcocientes diferentes de cero en } \mathscr{C}\}$$

Demostración. Sea $\mathscr{D} = \{M | M$ no tiene subcocientes diferentes de cero en $\mathscr{C}\}$. Como los submódulos y los cocientes de M son subcocientes de M, entonces $\mathscr{D}$ es cerrada bajo submódulos y cocientes.
Sea $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$, entonces $M \in \mathscr{C}$ y M no tiene subcocientes diferentes de cero en $\mathscr{C}$, pero M es un subcociente de si mismo, por lo que $M = 0$. Por lo tanto $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{0\}$.
Sea $\mathscr{E} \in \mathscr{L}_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{E} = \{0\}$. Supongamos que $\mathscr{E} \nsubseteq \mathscr{D}$, entonces existe $0 \neq M \in \mathscr{E}$ tal que $M \notin \mathscr{D}$. Esto implica que M tiene un subcociente $\{0\} \neq C \in \mathscr{C}$ y $M \in \mathscr{E}$, así que existe un módulo $0 \neq N$

y un diagrama de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads, "g"] \\ C \arrow[r, tail, "f\neq 0"] & N \end{tikzcd}$$

Donde f es un monomorfismo y g es un epimorfismo, como $\mathscr{E}$ es cerrada bajo subcocientes, entonces $\{0\} \neq \mathscr{C} \cap \mathscr{E}$, que es una contradicción. Entonces $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{D}$. Por lo tanto para toda clase $\mathscr{E} \in \mathscr{L}_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{E} = 0$ tenemos que $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{D}$. Por lo tanto $\mathscr{D}$ es un pseudocomplemento fuerte de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{L}_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$. $\square$

1.2.5 Lema. Si $\mathscr{D} \in Skel(\mathscr{L}_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}})$ entonces $\mathscr{D}$ es cerrada bajo extensiones y sumas directas.

Demostración. Sea $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{\perp_{\leq, \twoheadrightarrow}}$, veamos que $\mathscr{D}$ es cerrada bajo extensiones. Sea $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $L, N \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq, \twoheadrightarrow}}$. Supongamos que existe $0 \neq K \in \mathscr{C}$ un subcociente de M, como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads, "\alpha"] \\ K \arrow[r, tail, "\beta"] & C \end{tikzcd}$$

Donde α es epimorfismo y β es monomorfismo. Como $\beta(K) \cap \alpha(f(L))$ es un subcociente de L y de K, entonces $\beta(K) \cap \alpha(f(L)) = 0$. Así que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r] \arrow[ddl, "\gamma"] & 0 \\
& K \arrow[r, tail, "\beta"] & C \arrow[d, "\pi"] & & \\
& & \frac{C}{\alpha(f(L))} & &
\end{tikzcd}$$

Con γ un epimorfismo y π el epimorfismo canónico. Consideremos el cociente diferente de cero $\frac{C}{\alpha(f(L))}$, que pertenece a $\mathscr{C}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$. Observe que $\pi \circ \beta$ es un monomorfismo, entonces $\pi(\beta(K)) \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$; esto implica que $0 \neq K \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$, que es una contradicción.

Ahora veamos que $\mathscr{C}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$ es cerrada bajo sumas directas. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos en $\mathscr{C}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$, y supongamos que $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ tiene un subcociente $0 \neq N$ con $N \in \mathscr{C}$. Entonces tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "\alpha"] \\
N \arrow[r, tail, "\beta"] & C
\end{tikzcd}$$

Con α un epimorfismo y β un monomorfismo. Podemos elegir N como un R-módulo cíclico, cambiando N por un submódulo cíclico si fuera necesario; digamos $N = Rx$. Esto implica que N tiene un cociente simple S, es decir, existe un epimorfismo $N \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} S$. Entonces tomando el push-out de γ y β tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[d, "\alpha"] \\
N = Rx \arrow[r, tail, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & C \arrow[d, "\gamma'"] \\
S \arrow[r, tail, "\beta'"] & P
\end{tikzcd}$$

Así que S es un módulo simple en $\mathscr{C}$ que es un subcociente de $\bigoplus_{i\in I} M_i$. Entonces S es un subcociente de una suma directa finita $\bigoplus_{i\in J} M_i$ con $J \subseteq I$. Pero $\mathscr{C}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$ es cerrada bajo sumas directas finitas puesto que es cerrada bajo extensiones. Así que $0 \neq N \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$, que es una contradicción. □

1.2.6 Proposición. Si $\mathscr{L}_A$ es fuertemente pseudocomplementada, entonces para cada $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_A$ se tiene que $\mathscr{C} \subseteq (\mathscr{C}^{\perp_A})^{\perp_A}$

Demostración. Como $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp_A} = 0$ y por definición sabemos que $(\mathscr{C}^{\perp_A})^{\perp_A}$ es la mayor clase en $\mathscr{L}_A$ tal que $\mathscr{C}^{\perp_A} \cap (\mathscr{C}^{\perp_A})^{\perp_A} = 0$, entonces $\mathscr{C} \subseteq (\mathscr{C}^{\perp_A})^{\perp_A}$. □

1.2.7 Teorema. Suponga que $\mathscr{L}_P$ y $\mathscr{L}_Q$ son fuertemente pseudocomplementadas donde P, Q son conjuntos de propiedades de cerradura.

Si $Skel(\mathscr{L}_P) \subseteq \mathscr{L}_Q \subseteq \mathscr{L}_P$ entonces $Skel(\mathscr{L}_Q) = Skel(\mathscr{L}_P)$.

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_Q$, entonces $\mathscr{C}^{\perp_Q} \in \mathscr{L}_Q \subseteq \mathscr{L}_P$ y $\mathscr{C} \wedge \mathscr{C}^{\perp_Q} = 0$, así que $\mathscr{C}^{\perp_Q} \leq \mathscr{C}^{\perp_P} \in Skel(\mathscr{L}_P) \subseteq \mathscr{L}_Q$. Como $\mathscr{C} \wedge \mathscr{C}^{\perp_P} = 0$ y $\mathscr{L}_Q$ es fuertemente psudocomplementada, entonces $\mathscr{C}^{\perp_P} \leq \mathscr{C}^{\perp_Q}$. Entonces $\mathscr{C}^{\perp_Q} = \mathscr{C}^{\perp_P} \in Skel(\mathscr{L}_P)$, así que $Skel(\mathscr{L}_P) \subseteq Skel(\mathscr{L}_Q)$.
Sea $\mathscr{C}^{\perp_P}$, afirmamos que es un elemento de $Skel(\mathscr{L}_Q)$. Por la Proposición 1.2.6 tenemos que $\mathscr{C}^{\perp_P} \leq (\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P \perp_P}$, también tenemos que $\mathscr{C} \leq \mathscr{C}^{\perp_P \perp_P}$ esto implica que $(\mathscr{C}^{\perp_P \perp_P})^{\perp_P} \leq \mathscr{C}^{\perp_P}$ de modo que $\mathscr{C}^{\perp_P} = \mathscr{C}^{\perp_P \perp_P \perp_P}$. Así que es suficiente demostrar que $(\mathscr{C}^{\perp_P \perp_P})^{\perp_P} = (\mathscr{C}^{\perp_P \perp_P})^{\perp_Q}$.
Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_Q$ tal que $\mathscr{D} \wedge (\mathscr{C}^{\perp_P \perp_P}) = 0$; como $\mathscr{L}_Q \subseteq \mathscr{L}_P$ entonces $\mathscr{D} \leq (\mathscr{C}^{\perp_P \perp_P})^{\perp_P} = \mathscr{C}^{\perp_P}$, por lo que $(\mathscr{C}^{\perp_P \perp_P})^{\perp_Q} \leq \mathscr{C}^{\perp_P}$.
Por otro lado, tenemos por hipótesis que $\mathscr{C}^{\perp_P} \in \mathscr{L}_Q$. Como $\mathscr{C}^{\perp_P} \wedge \mathscr{C}^{\perp_P \perp_P} = 0$, entonces $\mathscr{C}^{\perp_P} \leq (\mathscr{C}^{\perp_P \perp_P})^{\perp_Q}$. □

1.2.8 Teorema. Sean $\mathscr{L}_P$ y $\mathscr{L}_Q$ fuertemente pseudocomplementadas. Si $Skel(\mathscr{L}_P) \subseteq \mathscr{L}_Q \subseteq \mathscr{L}_P$ entonces para toda clase $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_Q$ se tiene que $\mathscr{C}^{\perp_Q} = \mathscr{C}^{\perp_P}$.

Demostración. Por hipótesis $\mathscr{C}^{\perp_P} \in \mathscr{L}_Q$, y como $\mathscr{C}^{\perp_P} \cap \mathscr{C} = 0$ entonces $\mathscr{C}^{\perp_P} \leq \mathscr{C}^{\perp_Q}$. Por otro lado, $\mathscr{C}^{\perp_Q} \in \mathscr{L}_Q \subseteq \mathscr{L}_P$ y $\mathscr{C}^{\perp_Q} \cap \mathscr{C} = 0$. Entonces $\mathscr{C}^{\perp_Q} \leq \mathscr{C}^{\perp_P}$. □

1.2.9 Corolario. Sean $\mathscr{L}_P$ y $\mathscr{L}_Q$ fuertemente pseudocomplementadas con $P \subseteq Q$ y $Skel(\mathscr{L}_P) \subseteq \mathscr{L}_Q$. Si A es un conjunto de propiedades de cerradura tales que $P \subseteq A \subseteq Q$, entonces $\mathscr{L}_A$ es fuertemente complementada y $Skel(\mathscr{L}_A) = Skel(\mathscr{L}_P)$.

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_A$. Como $\mathscr{L}_A \subseteq \mathscr{L}_P$ entonces $\mathscr{C}^{\perp_P} \in skel(\mathscr{L}_P) \subseteq \mathscr{L}_Q$ y por el Teorema 1.2.8 $\mathscr{C}^{\perp_P} = \mathscr{C}^{\perp_Q}$. Note que $\mathscr{C}^{\perp_P} \in \mathscr{L}_Q \subseteq \mathscr{L}_A$ y que $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp_P} = 0$. Ahora, si $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_A$ tal que $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = 0$. Entonces $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_A \subseteq \mathscr{L}_P$, así que $\mathscr{D} \leq \mathscr{C}^{\perp_P}$. Por lo tanto $\mathscr{C}^{\perp_P}$ es la mayor clase en $\mathscr{L}_P$ tal que su intersección con $\mathscr{C}$ es 0, es decir, es un pseudocomplemento fuerte para $\mathscr{C}$ en $\mathscr{L}_A$.
Además por hipótesis tenemos que $Skel(\mathscr{L}_P) \subseteq \mathscr{L}_A \subseteq \mathscr{L}_P$, entonces por el Teorema 1.2.7 se tiene que $Skel(\mathscr{L}_A) = Skel(\mathscr{L}_P)$. $\square$

1.2.10 Ejemplo. Sabemos que las retículas de clases de torsión hereditaria $\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$, la de clases de Serre $\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}}$ y la de clases abiertas $\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ son retículas fuertemente pseudocomplementadas. Note que por el Lema 1.2.5 tenemos que $Skel(\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$, entonces por el Corolario 1.2.9 tenemos que
$Skel(\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) = Skel(\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}) = Skel(\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}})$.

1.2.11 Teorema. Si $Skel(\mathscr{L}_P) = \mathscr{L}_Q$, con $\mathscr{L}_P$ y $\mathscr{L}_Q$ fuertemente pseudocomplementadas y con P, Q conjuntos de propiedades de cerradura, entonces para toda $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_P$ tenemos que $(\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P} = \xi_Q(\mathscr{C})$.

Demostración. Por hipótesis $\mathscr{C}^{\perp_P} \in \mathscr{L}_Q$, entonces por el Teorema 1.2.8, $(\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P} = (\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_Q} \in \mathscr{L}_Q$. Como $\mathscr{C} \leq (\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P}$, entonces tenemos que $\xi_Q(\mathscr{C}) \leq (\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P}$. Ahora, si $\mathscr{C} \leq \mathscr{D} \in \mathscr{L}_Q$, entonces por hipótesis $\mathscr{D} = \mathscr{A}^{\perp_P}$, para algún $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_P$. Entonces $\mathscr{C} \leq (\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P} \leq (\mathscr{D}^{\perp_P})^{\perp_P} = [(\mathscr{A}^{\perp_P})^{\perp_P}]^{\perp_P} = \mathscr{A}^{\perp_P} = \mathscr{D}$, esto muestra que $(\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P} = \xi_Q(\mathscr{C})$. $\square$

1.2.12 Teorema. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ entonces $\mathscr{C}^{\perp_\leq} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$.

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Entonces $\mathscr{C}^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo submódulos. Veamos que $\mathscr{C}^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea $N \in \mathscr{C}^{\perp_\leq}$ y sea $K \in \mathscr{C}$ tal que existe un monomorfismo $K \rightarrowtail E(N)$, entonces como $K \cap N \in \mathscr{C}$ y se sumerge en N, tenemos que $K \cap N = 0$, por lo que $K = 0$. Por lo tanto $E(N) \in \mathscr{C}^{\perp_\leq}$. Ahora veamos que $\mathscr{C}^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo sumas directas. Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia en $\mathscr{C}^{\perp_\leq}$ y supongamos que $K \in \mathscr{C}$ se sumerge en $\bigoplus\limits_{i \in I} N_i$. Si $0 \neq K$ para $0 \neq k \in K$, $k = n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2} + \cdots + n_{\alpha_s}$ con cada $0 \neq n_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}$. Escojamos k con s mínimo posible. Por la elección de k tenemos que los anuladores de cada uno de sus sumandos son iguales, es decir, $(0 : n_{\alpha_1}) = (0 : n_{\alpha_2}) = \cdots = (0 : n_{\alpha_s})$, ya que en caso contrario, si existiera $t \in (0 : n_{\alpha_i})$ tal que $t \notin (0 : n_{\alpha_j})$ con $i \neq j$, tendríamos que $tk = tn_{\alpha_1} + \cdots + tn_{\alpha_{i-1}} + tn_{\alpha_{i+i}} + \cdots + tn_{\alpha_j} \cdots + tn_{\alpha_s} \in K$, lo que sería una contradicción, pues tk se escribiría con menos sumandos que k. Note que entonces $(0 : n_{\alpha_1}) = (0 : k)$, por lo que $Rk \cong \frac{R}{(0:k)} = \frac{R}{(0:n_{\alpha_1})} \cong Rn_{\alpha_1}$ y Rn_{α_1} es un elemento de $\mathscr{C}$ que se sumerge en N_{α_1}, con $N_{\alpha_1} \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. Esto es una contradicción, por lo que $K = 0$. Por lo tanto $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ es cerrada bajo sumas directas. $\square$

1.2.13 Observación. Para $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ se tiene que la yunta de estas clases es $\bigvee_{i\in I} \mathscr{C}_i = \xi_{\leq,\bigoplus,E}\left(\bigcup_{i\in I} \mathscr{C}_i\right)$.

1.2.14 Proposición. Para una clase de R-módulos $\mathscr{C}$ tenemos que $\xi_{\leq,\bigoplus,E}(\mathscr{C}) = \{M|$ existe $\{P_j\}_{i\in J}$ una familia independiente de submódulos de M tal que $\bigoplus_{j\in J} P_j \leq_e M$ y $P_j \rightarrowtail C_j$ con $C_j \in \mathscr{C}$ y $j \in J\}$

Demostración. Es inmediato del Teorema 1.1.12. $\square$

1.2.15 Proposición. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ entonces $\mathscr{C}^{\perp_{\leq,\oplus,E}} = \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. Más aún $\mathscr{C}^{\perp_{\leq,\oplus,E}}$ es un complemento de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$.

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$. Por el Teorema 1.2.12 tenemos que $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$. Si $M \in \mathscr{C} \wedge \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ entonces $M \in \mathscr{C}$ y $M \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. Tomando el morfismo identidad tenemos que $M \rightarrowtail M$ y $M \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$, lo que implica que $M = 0$.

Ahora supongamos que existe $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = 0$. Supongamos que $\mathscr{D} \nsubseteq \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$, entonces existe $M \in \mathscr{D}$ tal que $M \notin \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$, esto implica que existe $0 \neq N \leq M$ con $N \in \mathscr{C}$. Como $\mathscr{D}$ es hereditaria tenemos que $N \in \mathscr{D}$, entonces $N \in \mathscr{D} \cap \mathscr{C} = 0$, que es una contradicción. Por lo tanto $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$.

Sea $0 \neq M \in R$-mod. Si para todo $0 \neq N \leq M$ tenemos que $N \notin \mathscr{C}$ entonces $M \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ y por lo tanto $M \in \xi_{\leq,\bigoplus,E}(\mathscr{C} \cup \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}) = \mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. Así que podemos suponer que existe un submódulo N de M diferente de cero tal que $N \in \mathscr{C}$. Entonces existe una familia de submódulos $\{C_i\}_{i \in I}$ de M en $\mathscr{C}$ máxima independiente. Entonces $\bigoplus_{j \in J} C_j \in \mathscr{C}$ y sea C un pseudocomplemento de $\bigoplus_{j \in J} C_j$ en M. Si $C = 0$ entonces $\bigoplus_{j \in J} C_j \leq_e M$ y por la Observación 1.2.13 tenemos que $M \in \mathscr{C}$ y por lo tanto $M \in \mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. Así que supongamos que $C \neq 0$ entonces $C \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$, pues en caso contrario existiría $0 \neq C_1 \leq C$ tal que $C_1 \in \mathscr{C}$, entonces $\{C_j\}_{j \in J} \cup \{C_1\}$ sería una familia independiente, llegando a una contradicción.
Entonces $(\bigoplus_{j \in J} C_j) \bigoplus C_1 \in \mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$, y como $(\bigoplus_{j \in J} C_j) \bigoplus C_1 \leq_e M$ tenemos que $M \in \mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. $\square$

1.2.16 Corolario. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ entonces $(\mathscr{C}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$.

1.2.17 Proposición. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Entonces $(\mathscr{C}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$ es la clase de todos los módulos N, tales que para cada monomorfismo diferente de cero de un módulo K a N, existe $U \in \mathscr{C}$ y un monomorfismo diferente de cero de U a K.

Demostración. Por la proposición 1.2.2 tenemos que $(\mathscr{C}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} =$ $\{N \in R-mod|$ el único monomorfismo $K \rightarrowtail N$ con $K \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ es cero$\}$. Entonces tenemos que $(\mathscr{C}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} = \{N \in R-mod|$ para cada monomorfismo diferente de cero $K \rightarrowtail N$, $K \notin \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}\}$. Note que $K \notin \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ si y sólo si existe un monomorfismo diferente de cero $U \rightarrowtail K$ tal que $U \in \mathscr{C}$. □

1.2.18 Proposición. Si $\mathscr{N} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ entonces $\mathscr{N} = (\mathscr{N}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$.

Demostración. Sea $B \in (\mathscr{N}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$. Por la proposición 1.2.17, tenemos que todo submódulo diferente de cero de B tiene un submódulo diferente de cero en $\mathscr{N}$, y como $\mathscr{N}$ es cerrada bajo sumas directas implica que B tiene un submódulo esencial que pertenece a $\mathscr{N}$ (basta tomar una suma directa de submódulos máxima que pertenezca a $\mathscr{N}$). Como $\mathscr{N}$ es también cerrada bajo extensiones esenciales, entonces $B \in \mathscr{N}$. Por lo tanto $(\mathscr{N}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} \leq \mathscr{N}$. La otra inclusión está dada por la Proposición 1.2.6. □

1.2.19 Teorema. $\mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}} = Skel(\mathscr{L}_{\{\leq\}})$.

Demostración. De la proposición 1.2.18 tenemos que todo elemento de $\mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ es un pseudocomplemento de $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Reciprocamente, si $\mathscr{A}$ es un pseudocomplemento en $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$, entonces existe $\mathscr{B} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ tal que $\mathscr{A} = \mathscr{B}^{\perp_{\leq}}$. Por el Teorema 1.2.14 tenemos que $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$. □

1.2.1. El esqueleto de $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$

1.2.20 Observación. Sea $\mathscr{Q} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Entonces $M' \notin \mathscr{Q}^{\perp\twoheadrightarrow}$ si y sólo si existe un epimorfismo diferente de cero $M' \twoheadrightarrow M''$, con $M'' \in \mathscr{Q}$.

1.2.21 Teorema. Si $\mathscr{Q} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces $(\mathscr{Q}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow} = \{N|$ para todo epimorfismo $N \xrightarrow{\neq 0} M$, existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow Q \neq 0$ con $Q \in \mathscr{Q}\}$.

Demostración. Por la Proposición 1.2.3 tenemos que $(\mathscr{Q}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow} = \{M|$ si existe un epimorfismo $M \longrightarrow L$ con $L \in \mathscr{Q}^{\perp\twoheadrightarrow}$ entonces $L = 0\} = \{M|$ si existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow L \neq 0$ entonces $L \notin \mathscr{Q}^{\perp\twoheadrightarrow}\}$.

Por la observación anterior para un cociente $M \twoheadrightarrow N \neq 0$, N tiene un cociente distinto de cero en $\mathscr{Q}$. $\square$

1.2.22 Definición. Denotamos al esqueleto de $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ por R-conat. Los elementos de R-conat son llamados clases conaturales.

1.2.23 Observación. Por la Proposición 1.2.3 y la Proposición 1.2.6 tenemos que si $\mathscr{Q} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ entonces $\mathscr{Q} \subseteq (\mathscr{Q}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$.

1.2.24 Proposición. Si $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ entonces $\mathscr{B}^{\perp\twoheadrightarrow} \subseteq \mathscr{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$.

Demostración. Sea $M \in \mathscr{B}^{\perp\twoheadrightarrow}$ y sea $M \twoheadrightarrow L$ un epimorfismo con $L \in \mathscr{A}$, como $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ entonces $L \in \mathscr{B}$, por lo que $L = 0$ y con ello tenemos que $M \in \mathscr{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$. Por lo tanto $\mathscr{B}^{\perp\twoheadrightarrow} \subseteq \mathscr{A}^{\perp\twoheadrightarrow}$. $\square$

Los siguientes enunciados nos ayudarán a decidir cuando una clase es conatural.

1.2.25 Definición. Sea $\mathscr{A}$ una clase de módulos, decimos que $\mathscr{A}$ satisface la condición (CN) si $M \in \mathscr{A}$ si y sólo si todo cociente $0 \neq N$ de M comparte un cociente $K \neq 0$ con un elemento A de $\mathscr{A}$.

1.2.26 Teorema. Sea $\mathscr{A} \subseteq R$-mod. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:

1) $\mathscr{A} \in R$-conat.

2) $\mathscr{A}$ satisface (CN).

3) $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y $\mathscr{A} = (\mathscr{A}^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Si $\mathscr{A}$ es una clase conatural, entonces $\mathscr{A} = \mathscr{Q}^{\perp\twoheadrightarrow}$ para alguna $\mathscr{Q} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Entonces $\mathscr{A} = \{M|$ si existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow L$ con $L \in \mathscr{Q}$ entonces $L = 0\}$.

Sea M' un cociente diferente de cero de M y supongamos que $M' \in \mathscr{Q}$, entonces, por hipótesis, existe $A \in \mathscr{A}$, $0 \neq X \in R$-mod y epimorfismos $M' \twoheadrightarrow X \twoheadleftarrow A$. Por lo que $X \notin \mathscr{Q}$, ya que $A \in \mathscr{A}$. Pero como $M' \in \mathscr{Q}$, esto implica que $X \in \mathscr{Q}$, dado que $\mathscr{Q}$ es cerrada bajo cocientes; lo que es una contradicción. Por lo tanto $M' \notin \mathscr{Q}$ y $M \in \mathscr{A}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $C \in \mathscr{A}$ y B es un cociente no cero de C, entonces para cada cociente diferente de cero N de B, tomando $K = N$ y $A = C$ concluimos que $B \in \mathscr{A}$. Por lo tanto $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.
Por la Proposición 1.2.6 tenemos que $\mathscr{A} \subseteq (\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Si $N \in (\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ entonces para cada cociente diferente de cero H de N, existe un cociente $H \twoheadrightarrow A \neq 0$ con $A \in \mathscr{A}$. Entonces tenemos que

$$N \twoheadrightarrow H \twoheadrightarrow A \twoheadleftarrow A$$

Por lo tanto $N \in \mathscr{A}$ y así $(\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq \mathscr{A}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Es claro. $\square$

1.2.27 Teorema. Sea $\mathscr{C}$ una clase conatural, entonces $\mathscr{C}$ es cerrada bajo tomar:

1) Imágenes homomorfas.

2) Extensiones.

3) Epimorfismos superfluos.

Demostración.

1) Es claro.

2) Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $A, C \in \mathscr{C}$, y tomemos un epimorfismo $B \overset{h}{\twoheadrightarrow} B' \neq 0$. Entonces tenemos dos

casos a) $h \circ f$ no es suprayectiva, o b) $h \circ f$ es suprayectiva.

Si ocurre a), entonces podemos tomar el epimorfismo canónico $B' \overset{h}{\twoheadrightarrow} \frac{B'}{h \circ f(A)}$
$\neq 0$. Así que $\pi \circ h \circ f = 0$. Entonces por la propiedad universal del conúcleo existe un epimorfismo diferente de cero $C \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \frac{B'}{h \circ f(A)}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r] \arrow[ddl, "\varphi"] & 0 \\
& & B' \arrow[d, "\pi"] & & \\
& & \frac{B'}{h \circ f(A)} & &
\end{tikzcd}$$

Así que $\frac{B'}{h \circ f(A)}$ es un cociente diferente de cero de un elemento de $\mathscr{C}$. Por lo que B' tiene un cociente diferente de cero que también es un cociente de un elemnto en $\mathscr{C}$. Por lo tanto $B' \in \mathscr{C}$.

Si ocurre b) entonces tenemos que B' es un cociente de un elemento en $\mathscr{C}$ y por lo tanto $B' \in \mathscr{C}$.

3) Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $C \in \mathscr{C}$ y $f(A) << B$, es decir, $f(A)$ es superfluo en B. Consideremos un epimorfismo diferente de cero $B \overset{h}{\twoheadrightarrow} B'$. Entonces tenemos dos casos:

a) Si $h \circ f = 0$, entonces por la propiedad universal del conúcleo existe un morfismo $C \xrightarrow{\bar{h}} B'$ tal que $\bar{h} \circ g = h$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r] \arrow[dl, "\bar{h}"] & 0 \\
& & B' & &
\end{tikzcd}$$

Como h es suprayectiva, entonces $\bar{h}$ es un epimorfismo y B' es un cociente de un elemento en $\mathscr{C}$, y por lo tanto $B' \in \mathscr{C}$.

b) Observe que si $h \circ f \neq 0$, entonces f no es un epimorfismo. En efecto, si f fuera un epimorfismo, entonces $f(A) + Nuc(h) = B$. Dado que $f(A) << B$ entonces tendríamos que $Nuc(h) = B$, de modo que $h = 0$, que es una contradicción.

Por lo que si $h \circ f \neq 0$, entonces $h \circ f$ no es un epimorfismo, entonces $\frac{B'}{h \circ f(A)}$ es un cociente de B' diferente de cero, y así un cociente diferente de cero de B. Sea $B' \xrightarrow{\pi} \frac{B'}{h \circ f(A)}$ el epimorfismo canónico, entonces $\pi \circ h \circ f = 0$ y estamos en el mismo caso de 3a). $\square$

1.2.28 Lema. Sea $\{\mathscr{C}_i\}_I$ una familia de clases conaturales. Entonces $\bigcap_{i \in I} \mathscr{C}_i$ es una clase conatural.

Demostración. Veamos que $\bigcap_{i \in I} \mathscr{C}_i$ satisface la condición CN. Sea $M \in R - mod$ tal que para cada cociente N diferente de cero de M, existen $A \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathscr{C}_i$, $0 \neq K \in R$-mod y epimorfismos $N \twoheadrightarrow K \twoheadleftarrow A$. Dado que todo $\mathscr{C}_i \in R$-conat, entonces $M \in \mathscr{C}_i$ para todo $i \in I$. Entonces $M \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathscr{C}_i$. $\square$

1.2.29 Observación. Por el Teorema 1.2.11 tenemos que

$$(\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \xi_{R-conat}(\mathscr{C}).$$

1.2.30 Observación. Sea $\{\mathscr{C}_i\}_{i \in I}$ una familia de clases conaturales, entonces R-conat $\bigvee\limits_{i \in I} \mathscr{C}_i = \xi_{R-conat}(\bigcup\limits_{i \in I} \mathscr{C}_i)$.

1.2.31 Observación. R-conat es una retícula completa tomando $\bigwedge\limits_{i \in I} \mathscr{C}_i = \bigcap\limits_{i \in I} \mathscr{C}_i$ y $\bigvee\limits_{i \in I} \mathscr{C}_i = \xi_{R-conat}(\bigcup\limits_{i \in I} \mathscr{C}_i)$. Más aún R-mod y $\{0\}$ son los elementos mayor y menor de la retícula.

1.2.32 Proposición. Si $\{\mathscr{C}_i\}_{i \in I}$ es una familia de clases conaturales, entonces $\bigvee\limits_{i \in I} \mathscr{C}_i = \{N \in R-mod | \forall N \twoheadrightarrow M \neq 0, \exists M \twoheadrightarrow M' \neq 0$ con $M' \in \mathscr{C}_p$ para algún $p \in I\}$.

Demostración. Por la Observación 1.2.29 tenemos que

$$\bigvee_{i \in I} \mathscr{C}_i = \xi_{R-conat}\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right) = \left(\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right)^{\perp_{\twoheadrightarrow}}\right)^{\perp_{\twoheadrightarrow}},$$

pero por el Teorema 1.2.21 tenemos que $\left(\left(\bigcup\limits_{i \in I} \mathscr{C}_i\right)^{\perp_{\twoheadrightarrow}}\right)^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \{N|$ para todo epimorfismo $N \overset{\neq 0}{\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow} M$, un epimorfismo $M \overset{\neq 0}{\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow} M'$ con $M' \in \mathscr{C}_p$ para algún $p \in I\}$. $\square$

1.2.33 Teorema. R-conat es una gran retícula completa distributiva.

Demostración. Afirmamos que $\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ es el complemento de $\mathscr{C}$ en $R-conat$.
En efecto, si $M \notin \mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$, entonces existiría $M \twoheadrightarrow N \neq 0$ tal que todo cociente de N no estaría en $\mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$, dado que $\mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \xi_{R-conat}(\mathscr{C} \cup \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})$. Pero $N \notin \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ implica que existe un cociente diferente de cero N' de N, con $N' \in \mathscr{C}$. Así que N tiene un cociente diferente de cero en $\mathscr{C}$, lo que es una contradicción.
Por lo tanto $\mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = R$-mod.

Además $\mathscr{C} = (\mathscr{C}^{\perp_{R-conat}})^{\perp_{R-conat}}$ para toda $\mathscr{C} \in R$-conat y $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D} = 0$ si y sólo si $\mathscr{D} \leq \mathscr{C}^{\perp_{R-conat}}$.
También note que si $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in R$-conat, entonces las siguientes propiedades son equivalentes para $\mathscr{B} \in R$-conat:

a) $\mathscr{C} \wedge \mathscr{B} \leq \mathscr{D}$.

b) $\mathscr{C} \wedge \mathscr{B} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{R-conat}} = \{0\}$.

En efecto, si $\mathscr{C} \wedge \mathscr{B} \leq \mathscr{D}$ y $M \in \mathscr{C} \wedge \mathscr{B} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}$, entonces $M \in \mathscr{D}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ y así $M \notin \mathscr{D}$. Por otra parte si $M \in \mathscr{C} \wedge \mathscr{B}$, entonces $M \in \mathscr{D}$, que es una contradicción. Por lo tanto $a) \Rightarrow b)$.

Ahora supongamos que $\mathscr{C} \wedge \mathscr{B} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{R-conat}} = 0$ y que existe $M \in \mathscr{C} \wedge \mathscr{B}$ tal que $M \notin \mathscr{D}$, entonces existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow N \neq 0$ tal que para todo $N \twoheadrightarrow N' \neq 0$, $N' \notin \mathscr{D}$. Entonces $N \in \mathscr{C} \wedge \mathscr{B} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{R-conat}} = 0$, que es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathscr{D}$, y así $b) \Rightarrow a)$.

De la afirmación anterior podemos concluir que si $\mathscr{B} = (\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}^{\perp_{R-conat}})$, entonces $\mathscr{B}$ es máximo tal que $\mathscr{C} \wedge \mathscr{B} \leq \mathscr{D}$. Denotemos a $\mathscr{B}$ por $\mathscr{D} : \mathscr{C}$.

Sean $\mathscr{A}, \mathscr{K}, \mathscr{C} \in R$-conat y sea $\mathscr{D} = (\mathscr{A} \wedge \mathscr{C}) \vee (\mathscr{K} \wedge \mathscr{C})$. Dado que $\mathscr{A} \wedge \mathscr{C} \leq \mathscr{D}$ y $\mathscr{K} \wedge \mathscr{C} \leq \mathscr{D}$, tenemos que $\mathscr{A} \leq \mathscr{D} : \mathscr{C}$ y $\mathscr{K} \leq \mathscr{D} : \mathscr{C}$. Esto implica que $\mathscr{A} \vee \mathscr{K} \leq \mathscr{D} : \mathscr{C}$.

Así que $\mathscr{C} \wedge (\mathscr{A} \vee \mathscr{K}) \leq \mathscr{C} \wedge \mathscr{D} : \mathscr{C} \leq \mathscr{D}$. Esto implica la distributividad, ya que la otra desigualdad siempre se tiene. $\square$

1.2.34 Definición. Decimos que $0 \neq \mathscr{A} \in \mathscr{L}_P$ es un átomo si dado $\mathscr{B} \in \mathscr{L}_P$ tal que $\mathscr{B} \leq \mathscr{A}$ se tiene que $\mathscr{B} = 0$.

1.3. Caracterizaciones de anillos mediante el uso de las retículas $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$ y $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

1.3.1 Lema. Si $\mathscr{L}_{\{\leq\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ entonces todo R-módulo izquierdo simple se sumerge en R.

Demostración. Dado que la colección de los ideales izquierdos de R es una clase hereditaria, entonces es una clase cohereditaria. Así que todo cociente de R se sumerge en R. Por lo tanto todo R-módulo izquierdo simple se sumerge en R. $\square$

1.3.2 Lema. Si toda clase cohereditaria es una clase hereditaria, entonces R es un anillo de ideales principales izquierdos.

Demostración. Consideremos $\xi_{\twoheadrightarrow}(R)$ por hipótesis, $\xi_{\twoheadrightarrow}(R) \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$, lo que implica que $R \in \xi_{\twoheadrightarrow}(R)$ y si I es un ideal izquierdo de R, entonces $I \in \xi_{\twoheadrightarrow}(R)$, es decir, todo ideal izquierdo I de R es un cociente de R. Por lo tanto, todo ideal izquierdo de R es principal. $\square$

La siguiente proposición es un resultado conocido (ver [11, Corolario 24.15]) que ocuparemos para la demostración de nuestro siguiente Lema.

1.3.3 Proposición. Un anillo R es casi-Frobenius si y sólo si todo R-módulo izquierdo es isomorfo a un submódulo de un R-módulo izquierdo libre.

1.3.4 Lema. Si toda clase hereditaria es una clase cohereditaria, entonces R es un anillo casi-Frobenius.

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \{F | F$ es un R-módulo izquierdo libre$\}$. Afirmamos que $\xi_{\leq}(\{\mathscr{F}\}) = R - mod$.

En efecto, todo R-módulo izquierdo M es un cociente de un R-módulo izquierdo libre F. Dado que $F \in \xi_{\{\leq\}}(\mathscr{F})=\{N|$ existe un monomorfismo $N \rightarrowtail F$ para algún R-módulo izquierdo libre $F\}$, por lo que M también pertenece a esta clase, por hipótesis. $\square$

1.3.5 Lema. Si toda clase hereditaria es una clase cohereditaria, entonces R es isomorfo a un producto directo finito de anillos perfectos derechos locales izquierdos.

Demostración. En este caso, tenemos que toda clase hereditaria libre de torsión es cerrada bajo cocientes, así que toda teoría de torsión hereditaria es cohereditaria. Entonces, por [8, Teorema 3], R es isomorfo a un producto directo finito de anillos perfectos derechos locales izquierdos. $\square$

El siguiente teorema contiene resultados acerca de anillos artinianos de ideales principales, que pueden ser consultados en la literatura.

1.3.6 Teorema. Las siguientes condiciones para un anillo R son equivalentes:

1) R es un anillo artiniano de ideales principales.

2) R es un anillo casi-Frobenius de ideales principales izquierdos.

3) La cápsula inyectiva y la cubierta proyectiva de cada R-módulo (izquierdo o derecho) finitamente generado son isomorfas.

4) Para cada R-módulo izquierdo M, ${}_R zoc(M) \cong \frac{M}{JM}$ y para cada R-módulo derecho N, $zoc(N)_R \cong \frac{N}{NJ}$, donde J denota el radical de Jacobson del anillo R.

5) Para todo $I \leq R$, R/I es casi-Frobenius;

Demostración. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Ver Faith [10], 1) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) Ver Boyle [7], 1) $\Leftrightarrow$ 5) puede ser consultado en [11] y [6].

1.3.7 Proposición. Sea R un anillo artiniano de ideales principales. Entonces:

1) Toda teoría de torsión hereditaria es cohereditaria.

2) R es isomorfo a un producto directo finito de matrices de anillos sobre anillos locales perfectos derechos.

Demostración. 1) Sea τ una teoría de torsión hereditaria y supongamos que existe un R-módulo M en $\mathbb{F}_\tau$ y N un cociente de M diferente de cero el cual no está en $\mathbb{F}_\tau$. Entonces $t_\tau(N) \neq 0$. Así que existe $S \in R - simp \cap \mathbb{T}_\tau$ tal que S se sumerge en N. Entonces existe un R-módulo izquierdo diferente de cero $M' \in \mathbb{F}_\tau$ con un cociente simple en $\mathbb{T}_\tau$. De modo que podemos suponer que existe un R-módulo izquierdo $M \in \mathbb{F}_\tau$ finitamente generado el cuál tiene un cociente simple

$S \in \mathbb{T}_\tau$. Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P(M) \arrow[d, tail, two heads] & P(S) \arrow[d, tail, two heads] \\ M \arrow[r, tail, two heads] & S \end{tikzcd}$$

donde $P(M)$ y $P(S)$ son las cubiertas proyectivas de M y S respectivamente. Por el Teorema 1.3.6 3), $E(M) \cong P(M)$ y $E(S) \cong P(S)$. Entonces $P(M) \in \mathbb{F}_\tau$. Dado que $P(S)$ es isomorfo a un sumando directo de $P(M)$, entonces $P(S) \in \mathbb{F}_\tau$. Esto implica que $S \in \mathbb{F}_\tau$, lo que es una contradicción.

2) Del inciso anterior y de [8] tenemos que R es isomorfo a un producto directo finito de anillos perfectos derechos, locales izquierdos. Afirmamos que cada factor es un anillo de matrices completas sobre un anillo local. Supongamos que R es un anillo perfecto derecho local izquierdo. Entonces $R \cong P(S)^n$ donde $P(S)$ es la cubierta proyectiva del único simple. Como $P(S)$ es un módulo inyectivo indescomponible, $End(P(S))$ es un anillo local, así que $R \cong M_n(End(P(S)))$ como se quería.$\square$

1.3.8 Teorema. Para un anillo R, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) $\mathscr{L}_{\{\leq\}} = \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

2) R es isomorfo a un producto directo finito de anillos artinianos de ideales principales.

3) Para cada $M \in R - mod$ se tiene que $\xi_{\leq}(M) = \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Por el Lema 1.3.5 tenemos que R es isomorfo a un producto directo finito de anillos perfectos derechos locales izquierdos y tenemos que para cada factor R_i, $\mathscr{L}_{\{\leq\}} = \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Así que podemos suponer que R es perfecto derecho local izquierdo. Por el Lema 1.3.2 tenemos que R es un anillo principal izquierdo. Dado que R es perfecto derecho, implica que R es un anillo principal izquierdo y artiniano izquierdo. Del Lema 1.3.4 tenemos que R es un anillo de ideales principales izquierdo y casi Frobenius. Por el Teorema 1.3.6 tenemos que R es un anillo artiniano de ideales principales.

2) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que R es un anillo artiniano de ideales principales, por la Proposición 1.3.7 podemos suponer que R es un anillo de matrices completas sobre un anillo local. Como la condición 3) y la propiedad de ser anillo artiniano de ideales principales son Morita invariantes, podemos suponer que R es un anillo local, denotemos por J al ideal máximo del anillo.

Note que cada ideal izquierdo del anillo es cíclico por hipótesis. Recíprocamente R contiene una copia de cada cubierta proyectiva de cada módulo cíclico. Así que cada módulo cíclico se sumerge en R por el Teorema 1.3.6 3). Supongamos que R es local. Entonces (ver [11, Proposición 25.4.6 B]) la retícula de ideales de R es $R > J > J^2 > \cdots > J^n > J^{n+1} = 0$. Dado que R es un anillo de *Köthe*, para cada $M \in R$-mod se tiene que

$$M \cong R^{(X_0)} \oplus J^{(X_1)} \oplus (J^2)^{(X_2)} \oplus \cdots \oplus (J^n)^{(X_n)}$$

para algunos conjuntos $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

a) Sea $0 \neq N \leq M$. Entonces

$$N \cong R^{(Y_0)} \oplus J^{(Y_1)} \oplus (J^2)^{(Y_2)} \oplus \cdots \oplus (J^n)^{(Y_n)}$$

para algunos conjuntos $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$.

Recordemos que el $zoc()$ es un prerradical exacto izquierdo (ver [16]). Así que $zoc()$ preserva monomorfismos. Entonces tenemos para cada i, que $zoc(J^n)^{(Y_i)}$ se sumerge en $zoc(J^n)^{(X_i)}$. Como $|Y_i| \leq |X_i|$ para cada i. Entonces N es un cociente de M.

b) Sea $\frac{M}{N}$ un cociente de M diferente de cero. Por el argumento previo, tenemos que

$$\frac{M}{N} \cong R^{(X_0-Y_0)} \oplus J^{(X_1-Y_1)} \oplus (J^2)^{(X_2-Y_2)} \oplus \cdots \oplus (J^n)^{(X_n-Y_n)}$$

para algunos conjuntos X_i y Y_i. Así que $\frac{M}{N}$ se sumerge en M.
De a) y b) tenemos que para todo $M \in R$-mod, $\xi_{\leq}(M) = \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$.

3) $\Rightarrow$ 1) Es claro. $\square$

Capítulo 2

Acerca de anillos artinianos de ideales principales

2.1. Generación en las retículas $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$, $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ y $\mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus\}}$.

En el primer capítulo describimos como se generan clases en la retícula $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$. El Lema 1.1.9 dice que si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos entonces $\xi_{\leq,E}(\mathscr{C}) = \xi_{\leq}\xi_E(\mathscr{C})$. Note que en general $\xi_{\leq}\xi_E(\mathscr{C}) \neq \xi_E\xi_{\leq}(\mathscr{C})$, como podemos ver en nuestro siguiente ejemplo.

2.1.1 Ejemplo. Si $\mathscr{C} = \{{}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\}$, entonces $\xi_{\leq}\xi_{E}({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = \{M|$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\,\}$ y $\xi_{E}\xi_{\leq}({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = \{M|$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\,\} \cup \{E(M)|$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\,\}$. Observe que $\{\frac{a}{2^n} | a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ pertenece a la clase $\xi_{\leq}\xi_{E}(\mathscr{C})$ pero no pertenece a la segunga clase $\xi_{E}\xi_{\leq}(\mathscr{C})$.

Hay algunas retículas en las que no importa el orden para generar, como en la retícula $\mathscr{L}_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$.

2.1.2 Observación. Si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos entonces

$$\xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) = \{M | M \text{ es un subcociente de } K \text{ para algún } K \in \mathscr{C}\},$$

y si generamos en orden inverso tenemos que

$$\xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\mathscr{C}) = \{M | M \text{ es un cociente de } K \text{ con } K \leq N \in \mathscr{C}\}.$$

2.1.3 Proposición. Si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos entonces $\xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) = \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\mathscr{C})$.

Demostración. Si $M \in \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$, entonces M es un subcociente de algún $K \in \mathscr{C}$, así que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, tail, "f"] & N \end{tikzcd}$$

donde f es un monomorfismo y g es un epimorfismo, tomando el pull-back tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & K \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, tail, "f"] & N \end{tikzcd}$$

donde α es un monomorfismo y β es un epimorfismo, entonces M es cociente de un submódulo P de K con $K \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\mathscr{C})$. La otra contención se obtiene de manera simétrica tomando el pushout. $\square$

2.1.4 Proposición. Si $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$ entonces

1) $\bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$.

2) $\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$.

Demostración. 1) Sea $M \in \bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$ entonces para todo $i \in I$ se tienen que $M \in C_i$. Sea $N \leq M$, entonces para toda $i \in I$ tenemos que $N \in C_i$, por lo que $N \in \bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$. Por otro lado note que para toda $i \in I$ también se cumple que $E(M) \in \bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$. Por lo tanto $\bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$.
2) Basta demostrar que $\xi_{\leq,E}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i) = \bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$. Por definición tenemos que $\xi_{\leq,E}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i) = \{M|$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail E(C)$ para algún

$C \in \bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i\}=\bigcup\limits_{i\in I}\xi_{\leq,E}(\mathscr{C}_i)$. Además como $\mathscr{C}_i \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$ para todo $i \in I$, entonces se cumple que $\xi_{\leq,E}(\mathscr{C}_i) = \mathscr{C}_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $\xi_{\leq,E}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i) = \bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$. $\square$

2.1.5 Observación. $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$ es una retícula completa distributiva tomando $\bigwedge\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i = \bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$ y $\bigvee\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i = \bigcup\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$. Más aún R-mod y $\{0\}$ son los elementos mayor y menor de la retícula.

2.1.6 Proposición. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$ entonces $\mathscr{C}^{\perp_{\leq,E}} = \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. Además $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$ es fuertemente seudocomplementada.

Demostración. Primero mostramos que $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}} \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$. Si $M \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$, entonces $E(M) \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$, pues en caso contrario, si $E(M) \notin \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ entonces existe $0 \neq N \leq E(M)$ tal que $N \in \mathscr{C}$, esto implica que $N \cap M \neq 0$ y $N \cap M \in \mathscr{C}$. Esto último implica que $M \notin \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $E(M) \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ y $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}} \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$. Además si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$ es claro que $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp_{\leq}} = \{0\}$.
Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{0\}$. Supongamos que $\mathscr{D} \nsubseteq \mathscr{C}$, entonces existe $M \in \mathscr{D}$ tal que $M \notin \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. Esto implica que existe $0 \neq N \leq M$ con $N \in \mathscr{C}$, entonces $0 \neq N \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ que es una contradicción. Por lo tanto $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. $\square$

A continuación veremos como se generan clases en la retícula $\mathscr{L}_{\{\leq,\oplus\}}$.

2.1.7 Observación. Si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos izquierdos entonces $\xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C}) = \{M |$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail \bigoplus_{i\in I}\{C_i\}$, con I un conjunto, $C_i \in \mathscr{C}, i \in I\}$.

2.1.8 Proposición. Si $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos entonces la menor clase de módulos cerrada bajo submódulos y sumas directas que contiene a $\mathscr{C}$ es $\xi_{\leq,\oplus}(\mathscr{C}) = \xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$.

Demostración. Claramente $\mathscr{C} \subseteq \xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$. Ahora demostremos que $\xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$ es una clase cerrada bajo submódulos y sumas directas. Sean $M \in \xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$ y $N \leq M$, entonces existen monomorfismos $N \rightarrowtail M$ y $M \rightarrowtail \bigoplus_{i\in I}\{C_i\}$ donde $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{C}$, lo que implica que $N \in \xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$. Por lo tanto $\xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo submódulos. Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$ entonces para cada M_i existe una familia $\{C_{ij}\}_{j\in J_i}$ de módulos en $\mathscr{C}$ tal que M_i se sumerge en $\bigoplus_{j\in J_i}\{C_{ij}\}$, entonces existe un monomorfismo $\bigoplus_{i\in I}\{M_i\} \rightarrowtail \bigoplus_{i\in I}\{\bigoplus_{j\in J_i}\{C_{ij}\}\}$, por lo que $\bigoplus_{i\in I}\{M_i\} \in \xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$.

Si $\mathscr{D}$ una clase de módulos cerrada bajo submódulos y sumas directas que contiene a $\mathscr{C}$ y si $M \in \xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$, entonces existe un monomorfismo $M \rightarrowtail \bigoplus_{i\in I}\{C_i\}$ con $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{C}$, así que $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{D}$; por hipótesis tenemos que $\bigoplus_{i\in I}\{C_i\} \in \mathscr{D}$, por lo que $M \in \mathscr{D}$. Por lo tanto $\xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$ y así $\xi_{\leq,\oplus}(\mathscr{C}) = \xi_{\leq}\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$. $\square$

2.1.9 Definición. Sea $\eta = \xi_E \xi_{\twoheadrightarrow}$ definimos $\eta^0 = Id$, $\eta^{n+1} = \eta\eta^n$ y para $\mathscr{C}$ una clase de R-módulos definimos $\eta^\infty(\mathscr{C}) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \eta^n(\mathscr{C})$.

2.1.10 Observación. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ y para toda clase de R-módulos se tiene que $\eta^{n+1}(\mathscr{C}) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^n(\mathscr{C})) \cup \{E(N) | N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^n(\mathscr{C}))\}$.

2.1.11 Lema. Si $\mathscr{C} \subseteq R$-mod entonces $\eta^\infty(\mathscr{C}) = \xi_{\twoheadrightarrow, E}(\mathscr{C})$.

Demostración. Es claro que $\mathscr{C} \subseteq \eta^\infty(\mathscr{C})$. Veamos que $\eta^\infty(\mathscr{C})$ es cerrada bajo cocientes y cápsulas inyectivas. Sean $M \in \eta^\infty(\mathscr{C})$ y $M \twoheadrightarrow N$ un epimorfismo, entonces $M \in \eta^n(\mathscr{C})$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ por lo que $N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^n(\mathscr{C})) \subseteq \eta^{n+1}(\mathscr{C})$. También $E(M) \in \eta^{n+1}(\mathscr{C})$. Por lo tanto $\eta^\infty(\mathscr{C}) \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow, E\}}$.
Resta probar que $\eta^\infty(\mathscr{C})$ es la menor de las clases cerradas bajo cocientes y cápsulas inyectivas que contiene a $\mathscr{C}$, para ello consideremos $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow, E\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Demostraremos por inducción que $\eta^n(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$. Para $n = 0$ tenemos que $\eta^0(\mathscr{C}) = \mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Supongamos que $\eta^n(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$ y sea $M \in \eta^{n+1}(\mathscr{C}) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^n(\mathscr{C})) \cup \{E(N) | N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^n(\mathscr{C}))\}$. Si $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^n(\mathscr{C}))$ entonces $M \in \mathscr{D}$ por ser $\mathscr{D}$ cerrada bajo cocientes; si $M \in \{E(N) | N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^n(\mathscr{C}))\}$ se tiene que $M \in \mathscr{D}$ por ser $\mathscr{D}$ cerrada bajo cápsulas inyectivas. Por lo tanto $\eta^{n+1}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$ y así $\eta^\infty(\mathscr{C}) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \eta^n(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$. $\square$

2.2. Algunas relaciones entre las retículas $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$, $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ y $\mathscr{L}_{\{\leq,\oplus\}}$.

2.2.1 Teorema. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1) $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$.

2) Para cada R-módulo inyectivo I, si existe un epimorfismo $I \twoheadrightarrow K$, entonces existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$. Sea $I \twoheadrightarrow K$ un epimorfismo, por hipótesis $\xi_{\leq,E}(I) \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$, es decir, $K \in \xi_{\leq,E}(I)$ lo que implica que existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que para todo módulo inyectivo I se cumple que si existe un epimorfismo $I \twoheadrightarrow K$ entonces existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$, tenemos que demostrar que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cocientes. Sean $M \in \mathscr{C}$ y $f : M \twoheadrightarrow N$ un epimorfismo, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Nucf \arrow[r, hook] & M \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, hook] & N \arrow[d, dashed, "h"] \\ Nucf \arrow[r, hook] & E(M) \arrow[r, two heads, "\pi"] & \frac{E(M)}{Nucf}. \end{tikzcd}$$

Donde h existe por la propiedad universal del conúcleo. Ahora por hipótesis existe un monomorfismo $\frac{E(M)}{Nucf} \rightarrowtail E(M)$ y como $M \in \mathscr{C}$ entonces $E(M) \in \mathscr{C}$, de modo que $\frac{E(M)}{Nucf} \in \mathscr{C}$. Basta demostrar que h es monomorfismo. Sea $x \in Nuc\ h$, entonces $h(x) = 0$. Como f es suprayectiva, existe $m \in M$ tal que $f(m) = x$, así que por la conmutatividad del diagrama tenemos que $\pi(m) = h(f(m)) = h(x) = 0$, entonces $m \in ker f$, por lo que $0 = f(m) = x$ y por lo tanto el núcleo de h es cero.□

2.2.2 Teorema. $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$, si la siguiente condición es válida para todo R-módulo inyectivo izquierdo I: si existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$ entonces existe un epimorfismo $I \twoheadrightarrow K$.

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$, queremos demostrar que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo submódulos. Sean $M \in \mathscr{C}$ y $N \rightarrowtail M$ un monomorfismo, entonces N se sumerge en $E(M)$. Así que por hipótesis existe un epimorfismo $E(M) \twoheadrightarrow N$, y como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cocientes entonces $N \in \mathscr{C}$. □

2.2.3 Teorema. Son equivalentes para un anillo R los siguientes enunciados:

1) $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} = \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$;

2) Para todo módulo inyectivo I se cumple: Existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$ si y sólo si existe un epimorfismo $I \twoheadrightarrow K$.

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1) Se sigue de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2. 1) $\Rightarrow$ 2) Por el Teorema 2.2.1 tenemos que, si existe un epimorfismo $K \twoheadrightarrow I$ entonces también existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$. Ahora si existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$ podemos cambiar I por la cápsula inyectiva $E(K)$ de K. Si $L \in \xi_{\twoheadrightarrow}(E(K))$, entonces existe un epimorfismo $E(K) \twoheadrightarrow L$. Sea $E(L)$ la cápsula inyectiva de L. Como hicimos notar al inicio tenemos que existe un monomorfismo $L \rightarrowtail E(K)$ que se extiende a

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, tail] \arrow[d, hook, "i"] & E(K) \\ E(L) \arrow[ur, tail, "f"'] & \end{tikzcd}.$$

Donde f es monomorfismo por ser L esencial en su cápsula inyectiva. Entonces $E(L)$ es isomorfo a un sumando directo de $E(K)$ y por lo tanto $E(L)$ es un cociente de $E(K)$, es decir, $E(L) \in \xi_{\twoheadrightarrow}(E(K))$. Entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(E(K)) \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ y contiene a $E(K)$, por lo que $\xi_{\twoheadrightarrow}(E(K)) = \xi_{\twoheadrightarrow,E}(E(K))$. Así por la Observación 1.1.3 tenemos que $\xi_{\leq,E}(E(K)) = \xi_{\twoheadrightarrow,E}(E(K))$ y como $K \in \xi_{\leq,E}(E(K))$ entonces $K \in \xi_{\twoheadrightarrow}(E(K))$. $\square$

2.2.4 Teorema. Si $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ entonces R es un anillo casi-Frobenius.

Demostración. Veamos que todo módulo proyectivo es inyectivo.

Sea P proyectivo. Como $\xi_{\twoheadrightarrow,E}(E(P)) \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ entonces $P \in \xi_{\twoheadrightarrow,E}(E(P))$. Sea $n \in \mathbb{N}$ el menor tal que $P \in \eta^n(E(P))$. Note que si $n = 0$ entonces $P \in \eta^0(E(P)) = \{E(P)\}$ y por lo tanto P es inyectivo. Si $n > 0$ entonces $P \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-1}E(P)) \cup \{E(N)|N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-1}E(P))\}$. Así que basta considerar el caso de que $P \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-1}(E(P)))$, en este caso se tiene que existe $M_1 \in \eta^{n-1}(E(P)) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-2}E(P)) \cup \{E(N)|N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-2}E(P))\}$ y un epimorfismo $M_1 \xrightarrow{\pi_1} P$. Si M_1 fuera inyectivo, y dado que P es proyectivo entonces π_1 se escinde entonces, P sería isomorfo a un sumando directo de M_1 y por lo tanto sería inyectivo. Si $M_1 \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-2}E(P))$ entonces existe $M_2 \in \eta^{n-2}(E(P)) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-3}E(P)) \cup \{E(N)|N \in \xi_{\{\twoheadrightarrow\}}(\eta^{n-3}E(P))\}$ y un epimorfismo $M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_1$, entonces P es un cociente de M_2, si M_2 es inyectivo como antes ya acabamos. Repitiendo el argumento tenemos una sucesión finita de módulos $M_1, \ldots, M_n$ tales que $M_{i+1} \xrightarrow{\pi_{i+1}} M_i$ con $M_{i+1} \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-(i+1)}(E(P)))$ para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y con $M_i \subseteq \eta^{n-i}(E(P))$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces tenemos la siguiente sucesión

$$M_n \xrightarrow{\pi_n} M_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\pi_1} P\,.$$

Donde $M_n \in \eta^{n-n}(E(P)) = \eta^0(E(P)) = \{E(P)\}$, entonces P es cociente de $E(P)$, por lo tanto P es inyectivo.$\square$

El siguiente Teorema es un resultado conocido y su demostración puede ser consultada en [12].

2.2.5 Teorema. Los siguientes enunciados son equivalentes para un anillo R:

1) ${}_R R$ es neteriano.

2) Toda suma directa de R-módulos izquierdos inyectivos es inyectiva.

3) Toda suma directa numerable de cápsulas inyectivas de R-módulos izquierdos simples es inyectiva.

4) Todo R-módulo izquierdo inyectivo es una suma directa de submódulos inescindibles.

2.2.6 Teorema. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,\oplus\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{E\}}$ entonces R es un V-anillo izquierdo y neteriano izquierdo.

Demostración. Sea $\mathscr{C} = \{M | M \text{es semisimple }\}$. Claramente $\mathscr{C}$ es una clase de R-módulos cerrada bajo submódulos y sumas directas, entonces es cerrada bajo cápsulas inyectivas, es decir, $E(M)$ es semisimple para toda $M \in \mathscr{C}$, pero esto implica que M es un sumando directo de su cápsula inyectiva, por lo que $M = E(M)$, es decir, todos los módulos semisimples son inyectivos y por lo tanto R es un

V-anillo izquierdo. Además tenemos que $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\{E(S_i)\} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\{S_i\}$ que es semisimple e inyectivo, por lo tanto R es neteriano izquierdo. $\square$

2.2.7 Proposición. Si I es inyectivo inescindible entonces $\xi_{\leq,E}(I)$ es un átomo en $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$.

Demostración. Sean $0 \neq C \in \mathscr{C} \subseteq \xi_{\leq,E}(I)$, esto implica que existe un monomorfismo $C \rightarrowtail I$ de modo que $E(C)$ es sumando directo de I. Pero I es inescindible, así que $I \cong E(C)$. Por lo tanto $\mathscr{C} \supseteq \xi_{\leq,E}(C) = \xi_{\leq,E}(E(C)) = \xi_{\leq,E}(I)$. $\square$

2.2.8 Teorema. Sea R un anillo neteriano izquierdo. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:

1) $\mathscr{C}$ es un átomo en $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$.

2) Existe I inyectivo inescindible tal que $\mathscr{C} = \xi_{\leq,E}(I)$.

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1) Se sigue de la proposición 2.2.7.
1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $\mathscr{C}$ es un átomo de $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$ y sea $C \in \mathscr{C}$. Entonces $E(C) \in \mathscr{C}$ y como R es neteriano se tiene que existe $\{I_\alpha\}_{\alpha\in J}$ familia de inyectivos inescindibles tal que $\bigoplus_{\alpha\in J} I_\alpha = E(C)$. Así que para $\alpha \in J$ tenemos que $\xi_{\leq,E}(I_\alpha) \subseteq \mathscr{C}$, pero $\mathscr{C}$ es átomo entonces $\xi_{\leq,E}(I_\alpha) = \mathscr{C}$. $\square$

2.3. Anillos artinianos de ideales principales

2.3.1 Teorema. Son equivalentes las siguientes proposiciones:

1) Para todo módulo inyectivo I, si existe un monomorfismo $K \rightarrowtail I$ entonces existe un epimorfismo $I \twoheadrightarrow K$;

2) R es artiniano de ideales principales.

3) $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} = \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$.

4) $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \supseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$.

5) $\mathscr{L}_{\{\leq\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

6) $\mathscr{L}_{\{\leq\}} \supseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

7) $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq,\Pi\}}$.

8) $\mathscr{L}_{\{\leq,\Pi\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus\}}$.

9) Todo prerradical idempotente es exacto izquierdo y jansiano.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Como $R \rightarrowtail E(R)$ entonces por hipótesis existe un epimorfismo $E(R) \overset{g}{\twoheadrightarrow} R$ y dado que ${}_RR$ es proyectivo entonces $E(R) = Nuc\ g \oplus R$, por lo tanto R es inyectivo. Para cada ideal I de R existe un epimorfismo $R \overset{f}{\twoheadrightarrow} I$, por lo tanto I es cíclico. Por lo tanto R es neteriano izquierdo de ideales principales. Sabemos que si R es neteriano izquierdo e inyectivo izquierdo entonces R es casi-Frobenius y como R es de ideales principales izquierdos entonces por el Teorema 1.3.6 tenemos que R es artiniano de ideales principales.

2) $\Rightarrow$ 1) Por el Teorema 1.3.8 tenemos que 2) es equivalente a que $\mathscr{L}_{\{\leq\}} = \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y esto implica que $\xi_{\leq}(M) = \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$ para todo R-módulo M, en particular para los módulos inyectivos.

2) $\Rightarrow$ 3) Por el Teorema 1.3.8 tenemos que 2) es equivalente a que $\mathscr{L}_{\{\leq\}} = \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y esto implica 3).

3) $\Rightarrow$ 4) Es claro.

4) $\Rightarrow$ 2) Por el Teorema 2.2.4 tenemos que 4) implica que R es casi-Frobenius. Observe que la condición 4), que es nuestra hipótesis, se cumple para los $\frac{R}{I}$-módulos para todo ideal bilateral I de R. Por lo tanto R/I es casi-Frobenius para todo ideal bilateral I, y por el Teorema 1.3.6 esto equivale a 2).

2) $\Rightarrow$ 5) y 2) $\Rightarrow$ 6) se siguen del hecho de que 2) es equivalente a $\mathscr{L}_{\{\leq\}} = \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, esto por el Teorema 1.3.8.

5) $\Rightarrow$ 2) Afirmamos que $\xi_{\leq}(\{F \in R\text{-mod} | F \text{ es libre }\})=R\text{-mod}$. Sabemos que todo R-módulo M es cociente de un R-módulo libre F y

dado que $F \in \xi_{\leq}(\{F \in R\text{-mod}|F \text{ es libre }\}) \in \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$ entonces M pertenece a esta clase por hipótesis. Esto implica que R es casi-Frobenius. Note que la condición 5) también es válida para $\frac{R}{I}$, donde I es cualquier ideal bilateral de R.

6) $\Rightarrow$ 4) Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Dado que por hipótesis $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ entonces $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}}$.
2) $\Longleftrightarrow$ 7) $\Longleftrightarrow$ 8) Pueden ser consultadas en [4].

8) $\Rightarrow$ 9) Sea r un prerradical idempotente y sea $\mathbb{T}_r$ su clase de pretorsión asociada, por hipótesis $\mathbb{T}_r \in \mathscr{L}_{\{\leq,\Pi\}}$. Por lo tanto r es exacto izquierdo y jansiano.

9) $\Rightarrow$ 8) Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus\}}$ entonces existe un prerradical idempotente r tal que $\mathscr{C} = \mathbb{T}_r$. Por lo que r es exacto izquierdo y $\mathbb{T}_r$ es una clase hereditaria. Además como r es jansiano tenemos que $\mathbb{T}_r \in \mathscr{L}_{\{\Pi\}}$. Por lo tanto $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\Pi\}}$. $\square$

Recuerde que los módulos artinianos son precisamente los R-módulos izquierdos tales que todos sus cocientes son finitamente cogenerados. Como la clase de los módulos finitamente cogenerados es cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas, tenemos el siguiente teorema.

2.3.2 Teorema. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces son equivalentes para cada R-módulo M:

1) M es artiniano,

2) M es finitamente cogenerado.

Recuerde que un anillo R es llamado co-neteriano izquierdo si la cápsula inyectiva de todo R-módulo simple es artiniano [17].

2.3.3 Proposición. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces R es co-neteriano izquierdo.

Demostración. Si S un R-módulo simple, entonces S es finitamente cogenerado, así que $E(S)$ es finitamente cogenerado y por el Teorema 2.3.2 tenemos que $E(S)$ es artiniano. Por lo tanto R es co-neteriano. $\square$

2.3.4 Proposición. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces $E(R)$ es cogenerador de R-mod.

Demostración. Sea S un R-módulo simple. Si $0 \neq x \in S$ entonces $Rx = S$. Como hay un epimorfismo $R \twoheadrightarrow Rx$ y $\xi_{\leq,E}(R) \in \mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$, entonces hay un monomorfismo $Rx \rightarrowtail E(R)$. Por lo tanto $E(R)$ es un cogenerador inyectivo.$\square$

2.3.5 Proposición. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces R es semi-artiniano izquierdo.

Demostración. Sea $0 \neq x \in M$ y supongamos que $zoc(Rx) = 0$ entonces $zoc(E(Rx)) = 0$. Como Rx tiene al menos un submódulo máximo N entonces existe un epimorfismo $Rx \twoheadrightarrow \frac{Rx}{N}$ con $\frac{Rx}{N} = S$ simple. Se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & Rx \arrow[d, hook] \\ E(R) \arrow[r, "f"] & E(Rx) \end{tikzcd}$$

y como $E(R)$ es cogenerador entonces existe un monomorfismo de S a $E(R)$. Dado que $f(S) \cong S$ entonces existe un monomorfismo $S \rightarrowtail E(Rx)$ lo que es una contradicción. Por lo tanto R es semi-artiniano.$\square$

En la demostración del siguiente Teorema adaptamos una idea de [9] que también usa un Lema en [15]. Recuerde que un anillo es local izquierdo cuando todos sus módulos simples izquierdos son isomorfos.

2.3.6 Teorema. Si R es local izquierdo y co-neteriano izquierdo entonces R satisface la condición de cadena ascendente para ideales bilaterales.

Demostración. Dado que R es un anillo local izquierdo entonces existe un único R-módulo simple S salvo isomorfismo. Entonces $E = E(S)$ es un cogenerador para R-mod. Observe que por hipótesis $E(S)$ también es artiniano izquierdo. Sea $I_0 = 0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ una cadena ascendente de ideales de R. Tomando $L_i = \{x \in E | I_i x = 0\}$ obtenemos una cadena descendente de submódulos izquierdos de E,

$$L_0 = E \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots$$

Como E es artiniano izquierdo entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $L_{i+k} = L_i$ para toda $k \geq 0$. Podemos identificar L_j con $Hom_R\left(\frac{R}{I_j}, E\right)$, mediante el isomorfismo $L_j \longrightarrow Hom_R\left(\frac{R}{I_j}, E\right)$ dado por $x \longmapsto \_ \cdot x$, donde $(\_ \cdot x) : 1 + I_j \longmapsto x$. Así obtenemos que

$$0 \longrightarrow \frac{I_{j+1}}{I_j} \longrightarrow \frac{R}{I_j} \longrightarrow \frac{R}{I_{j+1}} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de R-módulos izquierdos y como E es un R-módulo inyectivo izquierdo, obtenemos una sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \to Hom_R\left(\frac{R}{I_{j+1}}, E\right) \longrightarrow Hom_R\left(\frac{R}{I_j}, E\right) \longrightarrow Hom_R\left(\frac{I_{j+1}}{I_j}, E\right) \to 0.$$

Entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L_{j+1} \longrightarrow L_j \longrightarrow Hom_R\left(\frac{I_{j+1}}{I_j}, E\right) \longrightarrow 0.$$

En particular para $j = i$, tenemos que $Hom_R(\frac{I_{i+1}}{I_i}, E) \cong \frac{L_i}{L_{i+1}} = 0$. Como E es un cogenerador inyectivo de R-mod, entonces $\frac{I_{i+1}}{I_i} = 0$. De esto tenemos que $I_{i+k} = I_i$ para toda $k \geq 0$. Por lo tanto R satisface la condición de cadena ascendente para ideales bilaterales. $\square$

En [8] Bronowitz y Teply demostraron que los anillos para los cuales todas las teorías de torsión hereditarias son cohereditarias, son precisamente los anillos que son productos finitos de anillos locales izquierdos perfectos derechos.

2.3.7 Teorema. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces R es un producto finito de anillos locales izquierdos perfectos derechos, y R satisface la condición de cadena ascendente para ideales bilaterales.

Demostración. La hipótesis implica que cada teoría de torsión hereditaria es cohereditaria, entonces por [8], R es un producto finito de anillos locales izquierdos perfectos derechos. Por la Proposición 2.3.4, R es un anillo co-neteriano izquierdo. Por el Teorema 2.3.6, R satisface la condición de cadena ascendente para ideales bilaterales. $\square$

2.3.8 Observación. Considere la sucesión de Loewy

$$zoc(R) \hookrightarrow zoc_2(R) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow zoc_n(R) \hookrightarrow \cdots$$

donde $\frac{zoc_{n+1}(R)}{zoc_n(R)} = zoc\left(\frac{R}{zoc_n}(R)\right)$. Por los Teoremas 2.3.6 y 2.3.7, y como

$zoc_n(R)$ es un ideal bilateral para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R = zoc_n(R)$.

2.3.9 Lema. Para un anillo R tenemos que $zoc_n\left(\frac{R}{zoc(R)}\right) = \frac{zoc_{n+1}(R)}{zoc(R)}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por inducción sobre n. Si $n = 1$ tenemos por definición que $zoc\left(\frac{R}{zoc(R)}\right) = \frac{zoc_2(R)}{zoc(R)}$. Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\frac{\frac{zoc_{n+1}(R)}{zoc(R)}}{zoc_{n-1}\left(\frac{R}{zoc(R)}\right)} = \frac{\frac{zoc_{n+1}(R)}{zoc(R)}}{\frac{zoc_n(R)}{zoc(R)}} \cong \frac{zoc_{n+1}(R)}{zoc_n(R)} = zoc\left(\frac{R}{zoc_n(R)}\right) \cong zoc\left(\frac{\frac{R}{zoc(R)}}{\frac{zoc_n(R)}{zoc(R)}}\right) =$$

$zoc\left(\frac{\frac{R}{zoc(R)}}{zoc_{n-1}\left(\frac{R}{zoc(R)}\right)}\right)$. Por lo tanto $zoc_n\left(\frac{R}{zoc(R)}\right) = \frac{zoc_{n+1}(R)}{zoc(R)}$. $\square$

Denotamos por $J = rad(R)$, el radical de Jacobson de R. Como en el libro de Kasch, decimos que un anillo R es un anillo bueno si $rad(M) = rad(R)M$. Los anillos semilocales son anillos buenos, así que los anillos semiperfectos son anillos semilocales [12].

2.3.10 Lema. Para un anillo bueno R, si $zoc_n(R) = R$, entonces $J^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por inducción sobre n. Si $n = 1$ tenemos que $zoc(R) = R$, entonces $J = 0$. Supongamos que $zoc_n(R) = R$, entonces por el Lema 4.10 tenemos que $zoc_{n-1}\left(\frac{R}{zoc(R)}\right) = \frac{R}{zoc(R)}$. Por hipótesis de inducción $0 = \left(rad\left(\frac{R}{zoc(R)}\right)\right)^{n-1} = \frac{J^{n-1}+zoc(R)}{zoc(R)}$, then $J^{n-1} \subseteq zoc(R)$. Therefore $J^n \subseteq Jzoc(R) = 0$. $\square$

2.3.11 Teorema. Si $\mathscr{L}_{\{\leq,E\}} \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow,E\}}$ entonces R es un producto finito de anillos locales izquierdos perfectos derechos e izquierdos que satisface la condición de cadena ascendente para ideales bilaterales.

Demostración. Por la observación 2.3.8 y el Lema 2.3.9, tenemos que J es un ideal nilpotente, así que J es T-nilpotente izquierdo y derecho. Por el Teorema de Bass [6] tenemos que R es perfecto izquierdo y derecho. Las afirmaciones restantes fueron demostradas en el Teorema 2.3.7.$\square$

Referencias

[1] A. Alvarado, H. Rincón, J. Ríos, *On some lattices of module clases*, J. of Algebra and its App. 5(1) (2006) 105-117.

[2] A. Alvarado, H. Rincón, J. Ríos, *On the lattices of natural and conatural classes in R-Mod*, Comm. in Algebra 29(2) (2001).

[3] A. Alvarado, H. Rincón, J. Ríos, *On big lattices of classes of R-modules defined by closure properties*, Verlag-Basel, Switzerland (2010) 19-36.

[4] A. Alvarado, H. Rincón, J. Ríos, *When pretorsion classes coincide with pretorsion free classes*, International Electronic J. of Algebra 10(2011)56-64.

[5] A. Alvarado, C. Cejudo, H. Rincón, F. Vilchis, *The lattice of hereditary torsion theories is a retract of the lattice of natural classes*, Comm. in Algebra (2013).

[6] F. Anderson, K. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, (2nd Edn. Springer-Verlag, New York, 1992).

[7] A. Boyle, *When projective covers and injective hulls are isomorphic*, Bull. Austral. Math. Soc. 8(1973) 471-476.

[8] R. Bronowitz and J. Teply, *Torsion theories of simple type*, J. Pure and Appl. Algebra 3(1973) 329-336.

[9] A. El Mejdani, H. Essannouni, A. Kaidi, *Rings with nice Artinian Modules*, International Journal of Algebra. 2(2008) no.18, 895-904.

[10] C. Faith, *On Köthe rings*, Math. Annalen. 164(1966) 207-212.

[11] C. Faith, *Algebra II Ring Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenchaften 191(Springer-Verlag, 1976).

[12] F. Kasch, *Modules and rings* (Academic Press, London, 1982).

[13] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, (Springer- Verlag, New York, 1999)

[14] F. Raggi, H. A. Rincón, J. Ríos, C. Signoret *On some classes of R-modules and congruences in R-tors* Comm. in Algebra, 27(2) 889-901 (1999).

[15] A. Rosenberg, D. Zelinsky, *Finiteness of the injective hull*, Math. Zeitschr. Bd. 70, S. 372-378(1959)

[16] Stenström, *Rings of Quotiens* (Springer-Verlag, New York, 1975).

[17] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory* (Gordon and Breach Science Publishers, 1991)

[18] Y. Zhou, J. Dauns, *Classes of modules* (Chapman and Hall, Boca Raton, 2006).