



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación

Aspectos combinatorios y algorítmicos sobre m -ágonos en
conjuntos de puntos coloreados

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Doctora en Ciencias (Computación)

P R E S E N T A :

Adriana Ramírez Viguera

Tutor principal:

Dr. Jorge Urrutia Galicia

Instituto de Matemáticas, UNAM

México, D. F. Octubre de 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Hoy sólo quiero decirte mi viejito del alma, que fuiste uno de los seres que más he querido en esta vida y que estés donde estés, tu recuerdo estará siempre en mi mente y corazón. Te quiero mucho papá.

Mil gracias mamá por todo lo que me has dado e inculcado.

Agradezco a todos mis hermanos, Valente, Guillermo, Esperanza, Marcos, Sergio y Juan por su apoyo incondicional y sincero en todo momento, en especial a mi Vale por mostrar interés en todas las cosas que hago y por ser mi fiel cómplice y compañero, me siento muy afortunada por ser tu hermana.

Gilo admiro mucho tu forma de ser. Gracias sinceramente por estar siempre conmigo y preocuparte por mí. Estoy segura que eres el ángel de la guarda, que Dios envió para mí.

El mejor legado que un tutor puede dar a sus estudiantes es un poco de su tiempo cada día. Jorge, gracias por ser un excelente padre académico.

Quiero agradecer a los doctores Francisco Hernández, Criel Merino, Juan José Montellano y Sergio Rajsbaum, por aceptar ser mis sinodales y por el tiempo que dedicaron a este trabajo para que saliera lo mejor posible.

Agradezco de manera especial a José Galaviz por formar parte de mi jurado del examen de candidatura y por ser uno de mis profesores y amigos que mejor me sabe aconsejar para tomar con calma y sabiduría los retos que me ha ofrecido la vida.

Mónica Leñero, me siento profundamente agradecida con la vida por encontrar una amiga como tú, gracias por tu apoyo incondicional que me has ofrecido durante todos estos años, tu amistad y disposición a ayudarme siempre me hacen sentir confortada hasta en los peores momentos de mi vida.

Uno de los tesoros invaluable que me dio el doctorado, es contar con amigos como ustedes. Crevel gracias por mostrar interés en mis cosas. Marquito me quedo con tu fraternidad que siempre me has mostrado y con tu forma de escuchar y resolver cualquier problema, incluso las soluciones MacGyver para reparar lavadoras je. Canek (pareja), por primera vez no me voy a quejar, aunque ganas no me faltan, esta vez quiero usar este

momento para agradecerte la amistad que siempre me has ofrecido. Javier muchas gracias por los momentos divertidos, las pláticas largas y por ser un gran equipo para iniciar la experiencia como profesor.

Estos agradecimientos no estarían completos si no menciono a algunos amigos que he conseguido del otro lado del charco, mis amigos españoles, muchas gracias por recibirme y proporcionarme ayuda y apoyo cuando me encuentro fuera de casa. Muchas gracias a José Miguel Díaz Bañez por recibirme siempre. A Inma Ventura gracias por el asilo y las cenas deliciosas y placenteras en tu casa, que a pesar de estar a kilómetros y kilómetros de casa me hicieron sentir en ella. A Tony Sellarès por recibirme en Girona, dedicarme tiempo y ofrecerme su amistad de manera incondicional. Agradezco a Carlos Seara por recibirme en Barcelona y por sus divertidas y pesadas sesiones de trabajo. A Maria Saumell por el asilo y las cenas, gracias a ti esa semana en Barcelona fue libre de colesterol y llena de compañerismo.

Quiero reconocer la labor excelente y al gran apoyo que me han mostrado siempre a Lulú, Diana, Cecilia y Amalia, chicas, sin ustedes los rituales burocráticos, serían una odisea sin fin. Otra persona del posgrado que no puedo olvidar mencionar es el ex-coordinador el Dr. Boris Escalante, muchas gracias por el apoyo que siempre mostraste con todos, en tu periodo como coordinador tuve la oportunidad de tratarte y gracias a eso descubrí que eres una persona con una gran calidez humana.

Reconozco todo el apoyo que me ha dado el Conacyt, que más que apoyo fue el principal benefactor en mis estudios de doctorado.

Finalmente, muchas gracias a todos los que directa e indirectamente han sido parte de esta historia en la búsqueda de mi doctorado.

¡Muchas gracias a todos!

Adriana

Índice general

Índice de Figuras	v
1. Introducción	1
1.1. Estructura del trabajo	2
1.2. Contribución del trabajo de doctorado	3
1.3. Definiciones fundamentales	4
1.3.1. Conjuntos de puntos, m -ágonos y k -hoyos	4
1.3.2. Gráficas geométricas	6
2. Gráficas geométricas maximales sin 3-hoyos	11
2.1. Introducción	12
2.1.1. El conjunto de Horton	16
2.2. Construcción de la cota inferior	17
2.3. Construcción de la cota superior	21
2.4. Conclusiones y problemas abiertos	25
3. 4-hoyos balanceados en conjuntos de puntos bi-coloreados	27
3.1. Introducción	27
3.1.1. Variantes cromáticas del problema de Erdős-Szekeres	28
3.2. Número de 4-hoyos balanceados	29
3.3. 4-hoyos convexos balanceados	37
3.4. Caracterización de conjuntos de puntos sin 4-hoyos convexos balanceados	38
3.4.1. R y B no son linealmente separables	39
3.4.2. R y B son linealmente separables	40
3.5. Conclusiones y problemas abiertos	46
4. Círculo y m-ágonos convexos sobre puntos coloreados	47
4.1. Introducción	48
4.2. Definición de problemas	49
4.3. Definiciones y trabajo previo relacionado	50
4.3.1. Algoritmo de barrido de línea	50
4.3.2. Dualidad	50
4.3.3. Arreglos de subdivisiones planas	52
4.4. Círculo k -cromático de radio fijo	54
4.4.1. Preprocesamiento y algoritmo	55

4.4.2. Análisis de complejidad	57
4.5. Triángulo k -cromático con vértices fijos	57
4.5.1. Algoritmo y análisis de complejidad	57
4.6. Polígono k -cromático ordenado	59
4.7. Conclusiones y problemas abiertos	60
5. M-ágonos ortogonales sobre conjuntos de puntos bi-coloreados	61
5.1. Introducción	62
5.2. Definiciones y trabajo relacionado	64
5.3. Separabilidad en cierres convexos rectilíneos	66
5.3.1. Algoritmo para determinar si $R \cap \mathcal{RH}(B) = \emptyset$	66
5.3.2. Determinar el mínimo número de escaleras para separar	68
5.4. Clasificación máxima con caminos monótonos ortogonales	68
5.4.1. Algoritmo	69
5.5. Conclusiones y problemas abiertos	71
6. Bibliografía.	73

Índice de figuras

1.1. (a) Polígono. (b) No es polígono.	5
1.2. (a) Polígono simple. (b) Polígono no simple.	5
1.3. (a) 5-ágono convexo. (b) 4-ágono no convexo.	5
1.4. Conjunto de puntos bi-coloreado con 4-hoyos balanceados.	6
1.5. Conjuntos de puntos 6-coloreados. En (a) se muestra un 3-ágono 6-cromático. En (b) se muestra un 6-ágono 6-cromático.	6
1.6. 6-ágono 6-cromático ordenado.	7
1.7. Ejemplos de las gráficas geométricas completas.	7
1.8. Ejemplos de gráficas 3-partitas.	8
1.9. Polígono contenido en $G(S)$	8
1.10. Las líneas sólidas determinan un camino simple mientras que las punteadas son parte de $G(S)$ pero no del camino.	8
1.11. Las líneas sólidas determinan un ciclo en $G(S)$	9
1.12. Unión ajena de árboles (Bosque).	9
1.13. Camino monótono con respecto a θ	10
1.14. Camino monótono ortogonal.	10
2.1. Gráficas geométricas sin 3-hoyos con 4 puntos.	12
2.2. Gráfica de Turán $T_3(8)$	13
2.3. Aristas para $r = 5$ y $n = 13$	14
2.4. Si los puntos de S están en posición convexa, el máximo número de aristas en G sin 3-hoyos es $\frac{n^2}{4}$	15
2.5. En conjuntos de 5 puntos siempre existen 4-hoyos.	16
2.6. Conjunto de Horton H_4	17
2.7. División de la banda inducida por el segmento \overline{pq}	17
2.8. Segmentos del conjunto $B(H_4)$	18
2.9. Construcción de G . Las líneas sólidas son las aristas de G_k y las aristas punteadas son las aristas eliminadas.	19
2.10. Aristas que son eliminadas para construir G_4 . Las aristas punteadas son aristas eliminadas en la construcción de G_3	21
2.11. Siempre existe al menos un triángulo vacío.	21
2.12. Proceso para eliminar $n - 2$ aristas prohibidas. Las aristas punteadas son las prohibidas y al final del proceso forman un bosque.	23
2.13. Partiendo el conjunto S en subconjuntos de 10 puntos.	23

2.14. K_5 sin las aristas punteadas no contiene triángulos vacíos y las aristas punteadas contienen un ciclo de aristas prohibidas.	24
2.15. Cada ciclo de aristas prohibidas contiene al menos una arista que no ha sido contada antes.	24
3.1. Conjunto de puntos con exactamente cinco 4-hoyos balanceados.	29
3.2. Aristas de color verde y negro.	30
3.3. Coloración de aristas.	31
3.4. Orden de los puntos azules con respecto al punto r	32
3.5. El triángulo Δ acotado por $\overline{rb_i}$, $\overline{b_ib_{i+1}}$ y $\overline{rb_{i+1}}$ contiene al menos tres puntos dentro.	33
3.6. 4-hoyos formados con los puntos r, r', b y b''	33
3.7. 4-hoyos posibles que contienen a la arista $\overline{rb_{i+1}}$	34
3.8. Bloque \mathcal{B}	35
3.9. Cualquier 4-hoyo balanceado usa dos puntos consecutivos rojos y dos consecutivos azules.	37
3.10. Conjuntos de puntos sin 4-hoyos convexos balanceados.	38
3.11. Segmentos que se intersectan. El segmento \overline{ab} puede ser reemplazado por el segmento \overline{ar}	38
3.12. Dos cuadriláteros posibles que contienen los puntos azules: convexo y no convexo.	40
3.13. Los cierres convexos se traslapan o se contienen.	40
3.14. Cuña $w(a, b, c)$ con ápice en el punto b	41
3.15. La región $w(b, a, c) \cup w(a, b, c)$ no contiene puntos del mismo conjunto que c	41
3.16. $R \cup B$ no tiene segmentos bi-coloreados que intersectan aristas del $CH(R)$ y del $CH(B)$ a la vez.	42
3.17. Siempre existe un 4-hoyo convexo balanceado.	42
3.18. Etiquetado de los puntos con respecto a su cierre convexo.	43
3.19. El segmento $\overline{b_1b_2}$ puede ser intersectado por varias líneas rojas. El punto $r_i = r_4$ y el punto $r_j = r_4$ en (b) y $r_j = r_3$ en (c)	43
3.20. Todos los puntos de B son visibles desde r_1	44
3.21. La línea $\ell(b_1, b_2)$ es la línea que separa a R y B	45
3.22. No es posible agregar más puntos azules. En (a) el punto $r = r_1$, en (b) y (c) el punto $r = r_3$	45
3.23. Siempre existen regiones que pueden contener sólo puntos azules.	45
3.24. Configuración de puntos que no contiene 4-hoyos convexos balanceados.	46
4.1. Círculo k -cromático de área mínima.	48
4.2. Rectángulos k -cromáticos de área mínima.	49
4.3. Algoritmo de barrido de línea.	51
4.4. Espacio primal y dual.	51
4.5. Las líneas sólidas forman una subdivisión del plano y las líneas punteadas determinan su gráfica dual.	52

4.6. En (a) se muestran ejemplos de curvas de Jordan y en (b) las curvas no son de Jordan.	53
4.7. Subdivisión del plano determinada por un conjunto de círculos unitarios. . .	53
4.8. Ejemplo de una <i>DCEL</i>	54
4.9. Cara de $\mathcal{A}(S)$ y su tupla.	55
4.10. El círculo centrado en cualquier punto de la cara genera la misma tupla. . .	56
4.11. Dos caras adyacentes sólo difieren en una posición en la tupla asociada a cada cara.	56
4.12. Representación del triángulo $T = \{p_i, p_j, p_k\}$ en el espacios primal y dual. .	58
4.13. Polígono k -cromático ordenado.	59
4.14. Polígonos $k - 1$ y k -cromáticos ordenados.	60
5.1. El cierre convexo rectilíneo es más ajustado que el círculo.	61
5.2. En (a) R y B son linealmente separables mientras que en (b) no lo son. . .	63
5.3. Ejemplo de separabilidad lineal débil.	64
5.4. El punto p es dominado por q , pero r es punto extremal.	64
5.5. Ejemplos de cierres convexos rectilíneos.	65
5.6. El punto p_1 es $\frac{\pi}{2}$ -maximal y el punto p_2 no lo es.	66
5.7. El punto p está dominado por las cuatro escaleras, mientras que q no. . . .	67
5.8. En (a) se muestra el cierre convexo rectilíneo con orientación de 0 grados y en (b) con orientación de 45 grados.	67
5.9. Cierres convexos rectilíneos bi-coloreados	69
5.10. Escaleras separadoras.	70
5.11. Matriz de dominación.	70

1

Introducción

La Geometría Computacional es una rama de las Ciencias de la Computación con un gran crecimiento en los últimos años. Su objetivo principal es el diseño y análisis de algoritmos para resolver, de manera óptima, problemas que pueden ser expresados en términos geométricos. La interacción que ha tenido con muchos campos de las ciencias e ingenierías, la hacen cada vez más atractiva para muchos investigadores, esto tiene como consecuencia que el cómputo geométrico esté presente en una gran variedad de investigaciones científicas que tienen relación directa con: Sistemas de Información Geográfica, Graficación por Computadora, Ubicación de Servicios, Análisis de Datos Médicos, Diseño de Circuitos Digitales (*Very-Large-Scale Integration* VLSI), Clasificación y Optimización de Meta Información, por mencionar algunas.

La Geometría Combinatoria es un rama de las Matemáticas Discretas que estudia propiedades combinatorias de objetos geométricos discretos. Su objetivo principal es contar el número de objetos geométricos que cumplen con ciertas características geométricas. Actualmente, esta rama se ha convertido en una disciplina de investigación muy exitosa fuertemente relacionada con la Geometría Computacional ya que con frecuencia problemas de investigación de Geometría Combinatoria conllevan al diseño de algoritmos óptimos en Geometría Computacional. Uno de los teoremas de más tradición en la Geometría Combinatoria es el Teorema de Erdős-Szekeres:

Teorema 1.0.1 (Erdős-Szekeres). *Para todo entero positivo n , existe un entero positivo $N(n)$, tal que todo conjunto de $N(n)$ puntos en el plano en posición general contiene un subconjunto de n puntos en posición convexa.*

En este trabajo de tesis presentamos algunos resultados dentro de estas dos áreas de investigación, donde los objetos geométricos principales son los polígonos de m lados, comúnmente llamados m -ágonos, concretamente vamos a estudiar m -ágonos vacíos y/o convexos sobre conjuntos de puntos coloreados.

1.1. Estructura del trabajo

El presente trabajo esta enfocado a la solución de problemas relacionados con gráficas geométricas y m -ágonos sobre conjuntos de puntos coloreados, desde el punto de vista combinatorio y algorítmico. A continuación damos un breve resumen sobre los resultados obtenidos y la forma en que se organizan en este trabajo.

El Capítulo 2 esta conformado por un problema estrechamente relacionado con el Teorema de Turán de Teoría de Gráficas, desde el punto de vista geométrico. Dicho teorema afirma lo siguiente: *el máximo número de aristas que puede tener una gráfica de n vértices sin subgráficas isomorfas a K_{r+1} , es a lo más $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$* . Los resultados obtenidos son una cota inferior y una cota superior sobre el número de aristas que una gráfica geométrica puede tener, tal que no contenga m -ágonos vacíos, con $m = 3$.

En el Capítulo 3 continuamos con el estudio de m -ágonos vacíos, consideramos una variante al problema clásico de Erdős-Szekeres sobre la existencia y el número m -ágonos vacíos convexos en un conjunto de puntos en el plano. Dicha variante consiste en considerar que $m = 4$, contemplar o no la convexidad de los m -ágonos, colorear el conjunto de puntos con dos colores y restringir que los m -ágonos tengan el mismo número de puntos de cada clase cromática (balanceados). Los resultados obtenidos fueron la caracterización del conjunto de puntos que no contiene 4-ágonos vacíos convexos balanceados y que todo conjunto de puntos bi-coloreado, contiene un número cuadrático de 4-ágonos vacíos balanceados.

Cambiando de m -ágonos vacíos a m -ágonos que contengan al menos k puntos dentro de k distintas clases. Nos interesamos en problemas bajo el paradigma de separación cromática, encontrando regiones de área mínima que separan a un subconjunto de puntos que cumplen una restricción.

En el Capítulo 4, diseñamos algoritmos para resolver problemas en el contexto de planeación de la ubicación. El objetivo más simple de la planeación de la ubicación, es elegir un lugar de residencia que tiene al menos un representante de cada tipo de comodidad. Este tipo de problemas son comúnmente modelados, en el plano de la siguiente manera: las comodidades pueden ser representadas por puntos coloreados en el plano y el lugar de residencia que contiene al menos una comodidad puede ser mapeado a una región en el plano conocida como *color-spanning*. Los problemas tratados en este capítulo son:

- Dado un conjunto S de puntos k -coloreado. Encontrar el círculo k -cromático de área mínima con radio fijo y centro en un punto de S .
- Dado un conjunto S de puntos k -coloreado. Encontrar el 3-ágono k -cromático de área mínima con vértices determinados por los puntos de S .
- Dado un conjunto S de puntos k -coloreado y en posición convexa. Encontrar el k -hoyo k -cromático ordenado de área mínima.

En el Capítulo 5 continuamos con problemas de separabilidad geométrica, estudiamos la separabilidad entre cierres convexos rectilíneos sobre conjuntos de puntos bi-coloreados. El primer resultado es de tipo combinatorio y muestra el número de escaleras que son necesarias para separar los cierres convexos rectilíneos de cada clase cromática. El segundo resultado es de tipo algorítmico y encuentra el camino ortogonal monótono C_{OM} que maximiza la suma del número de puntos de cada clase cromática que son separados por C_{OM} .

1.2. Contribución del trabajo de doctorado

A continuación cito los trabajos de investigación que realicé durante mi doctorado. Los trabajos marcados con * son los tratados a detalle en este trabajo de tesis.

Trabajos en revista internacional.

- J.M. Díaz-Báñez, G. Hernández, D. Oliveros, A. Ramírez-Vigueras, J. A. Sellarès, J. Urrutia, and I. Ventura. *Computing Shortest Heterochromatic Monotone Routes*. Operations Research Letters Volume 36, Issue 6, November 2008, Pages 684-687.
- * C. Bautista-Santiago, M. A. Heredia, C. Huemer, A. Ramírez-Vigueras, C. Seara, J. Urrutia. *On the number of edges in geometric graphs without empty triangles*. Aceptado en *Graphs and Combinatorics*.

Trabajos en congresos arbitrados.

- * S. Bereg, J. M. Díaz-Báñez, R. Fabila-Monroy, P. Pérez-Lantero, A. Ramírez-Vigueras, T. Sakai, J. Urrutia, I. Ventura *On balanced 4-holes in bichromatic point sets*. 28th European Workshop on Computational Geometry Assisi, Perugia, Italia, 2012.
- C. Peláez, A. Ramírez-Vigueras, C. Seara, J. Urrutia *On the Rectilinear Convex Layers of a Planar Set*. 28th European Workshop on Computational Geometry Assisi, Perugia, Italia, 2012.
- * C. Peláez, A. Ramírez-Vigueras, C. Seara, J. Urrutia. *Weak separators, vector dominance, and the dual space*. XIV Spanish Meeting on Computational Geometry. Alcalá de Henares, España, 2011.
- C. Peláez, A. Ramírez-Vigueras, J. Urrutia. *Triangulations with many points of even degree*. Canadian Conference on Computational Geometry. Monitoba, Canadá, 2010.

Trabajos en seminarios.

- * C. Bautista-Santiago, J. M. Díaz-Báñez, A. Ramírez-Vigueras, C. Seara, J. Urrutia, I. Ventura. *Objetos k -cromáticos*. Seminario de Computación de la Universidad de Sevilla. Sevilla, España 2008.

Trabajos enviados a revista intervencional.

- * S. Bereg, J. M. Díaz-Báñez, R. Fabila-Monroy, P. Pérez-Lantero, A. Ramírez-Vigueras, T. Sakai, J. Urrutia, I. Ventura *On balanced 4 -holes in bichromatic point sets*.

Trabajos en proceso para enviar a revista intervencional.

- C. Peláez, A. Ramírez-Vigueras, C. Seara, J. Urrutia *On the Rectilinear Convex Layers of a Planar Set*.

1.3. Definiciones fundamentales

Las definiciones que a continuación se describen son fundamentales para delimitar los temas principales que se estudian en este trabajo. Cabe aclarar que algunos conceptos relacionados con cada problema presentado en este trabajo, estarán en la introducción de cada capítulo con la finalidad de hacer más autocontenidos a los mismos. Algunas de las definiciones siguen las definiciones dadas en [47].

1.3.1. Conjuntos de puntos, m -ágonos y k -hoyos

Sea S un conjunto de puntos en el plano en posición general¹.

Definición 1.3.1. *Un polígono en S es la región del plano cerrada y conexa, cuyo contorno consiste de segmentos de recta consecutivos, formando una curva cerrada. A los extremos de estos segmentos se les conoce como vértices del polígono y a los segmentos como aristas; Figura 1.1.*

Un polígono es simple si no existen dos aristas no consecutivas que compartan un punto, es decir, que no existen aristas que se intersecten salvo en el vértice que comparten; Figura 1.2. El contorno de un polígono simple divide al plano en dos regiones: interior (región finita) y exterior (región infinita).

A un polígono simple con m vértices se le conoce como m -ágono. Por ejemplo, un triángulo es un 3-ágono y un cuadrilátero es un 4-ágono.

Definición 1.3.2. *Un m -ágono P es convexo si para cualesquiera dos puntos $q_1, q_2 \in P$ el segmento de recta que une a q_1 y q_2 , denotado por $\overline{q_1q_2}$, está completamente contenido en P ; Figura 1.3.*

¹Conjunto que no contiene 3 colineales.

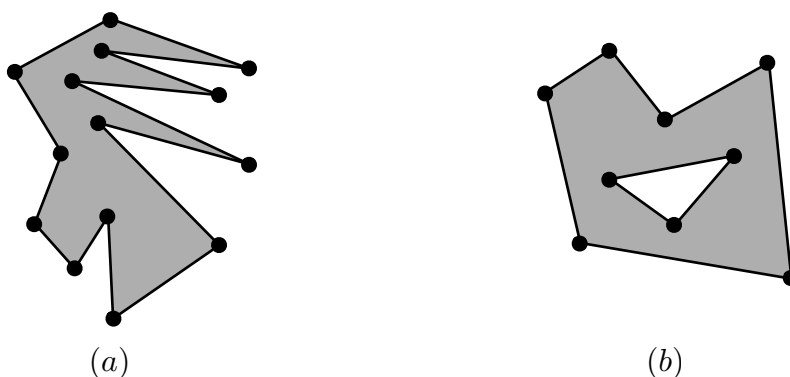


Figura 1.1: (a) Polígono. (b) No es polígono.

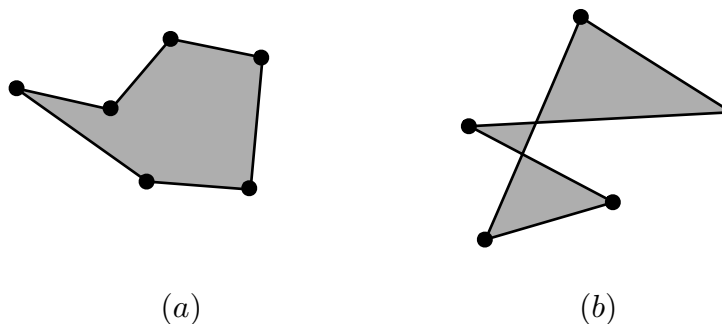


Figura 1.2: (a) Polígono simple. (b) Polígono no simple.



Figura 1.3: (a) 5-ágono convexo. (b) 4-ágono no convexo.

Definición 1.3.3. *Un m -hoyo es un m -ágono cuyos vértices son puntos de S y no contiene en su región interior puntos de S .*

Decimos que S está k -coloreado si S está particionado en $k \geq 1$ subconjuntos no vacíos y ajenos; $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ llamados las clases cromáticas de S . A los puntos de la clase S_i les llamaremos puntos de color i . Definimos a un subconjunto $Q \subseteq S$ como monocromático si Q contiene puntos de una sola clase cromática y como k -cromático si Q contiene puntos de k clases cromáticas distintas, con $k \geq 2$.

Definición 1.3.4. Sea $S = S_i \cup S_j$ un conjunto de puntos en el plano 2-coloreado² y m un valor múltiplo de 2. Un m -hoyo es balanceado si $\frac{m}{2}$ de sus puntos son de color i y $\frac{m}{2}$ son de color j ; Figura 1.4.

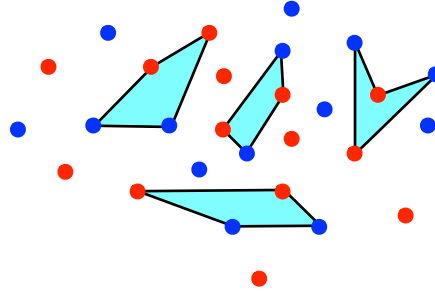


Figura 1.4: Conjunto de puntos bi-coloreado con 4-hoyos balanceados.

Definición 1.3.5. Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ un conjunto de puntos k -coloreado. Diremos que un m -ágono es k -cromático, si la unión de sus vértices con los puntos en su interior contienen al menos un punto de cada clase cromática; Figura 1.5.

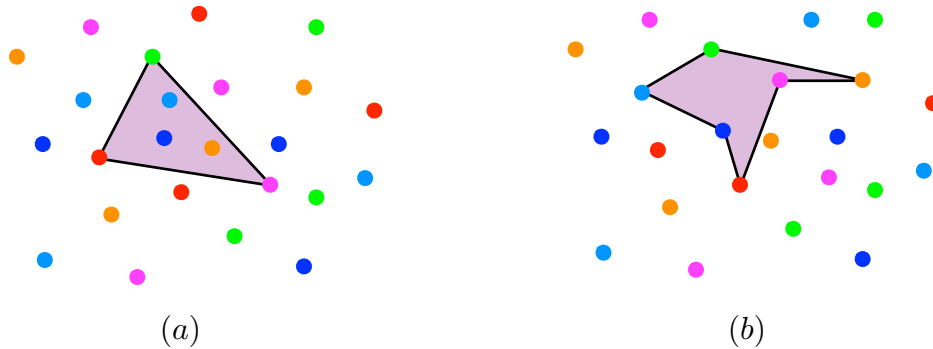


Figura 1.5: Conjuntos de puntos 6-coloreados. En (a) se muestra un 3-ágono 6-cromático. En (b) se muestra un 6-ágono 6-cromático.

Definición 1.3.6. Un m -ágono k -cromático, se dice que está ordenado, si al recorrer sus aristas, los vértices siguen un orden de visita dado por sus distintas clases cromáticas; Figura 1.6.

1.3.2. Gráficas geométricas

Las gráficas geométricas proveen un modelo esencial para muchas aplicaciones en el área de las Ciencias de la Computación, y al mismo tiempo, son el corazón de la mayoría de los algoritmos geométricos. Su definición es la siguiente:

²A lo largo del trabajo llamaremos al conjunto 2-coloreado también como conjunto bi-coloreado.

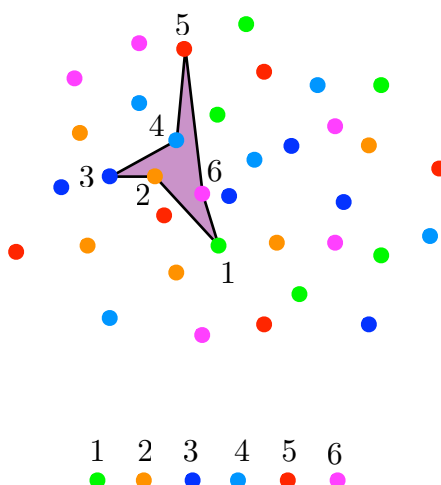


Figura 1.6: 6-ágono 6-cromático ordenado.

Definición 1.3.7. Dado el conjunto S , una gráfica geométrica $G(S) = (V, E)$, es una gráfica no dirigida cuyo conjunto de vértices V es igual a S y su conjunto de aristas E son segmentos de recta que unen los puntos de S .

Muchos de los conceptos de Teoría de Gráficas se mapean directamente a gráficas geométricas. A continuación mencionaremos algunos conceptos. Si todos los vértices de $G(S)$ son adyacentes, entonces $G(S)$ es una gráfica completa, es decir $G(S)$ es una *gráfica geométrica completa*; Figura 1.7.

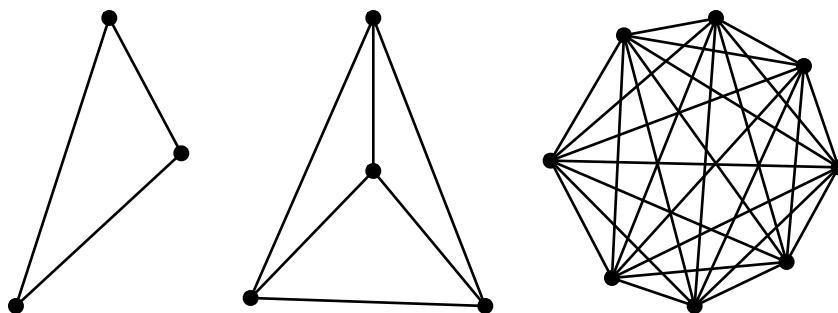


Figura 1.7: Ejemplos de las gráficas geométricas completas.

Sea $r \geq 2$ un entero. Una gráfica $G(S)$ es r -partita si S admite una partición en r clases ajenas y sus aristas están determinadas por dos vértices en distintas clases; Figura 1.8(a). Una gráfica r -partita es completa si para cualesquiera dos vértices de distintas clases son adyacentes; Figura 1.8(b).

En [45] se presenta un compendio de artículos sobre gráficas geométricas.

Usualmente se dice que un m -ágono está contenido en $G(S)$ si sus vértices y aristas son un subconjunto de los vértices y aristas de $G(S)$; Figura 1.9.

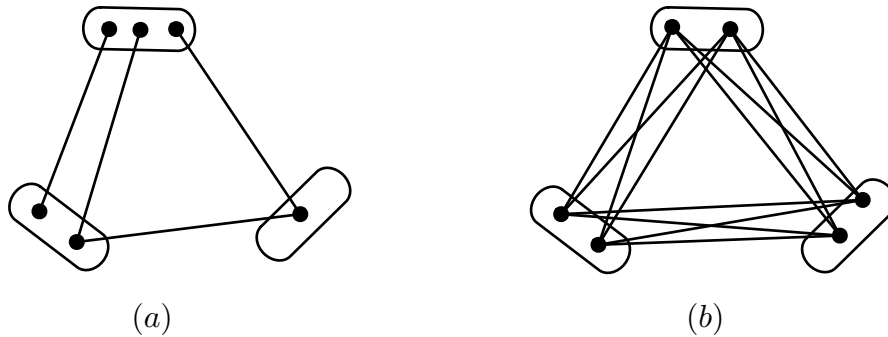


Figura 1.8: Ejemplos de gráficas 3-partitas.

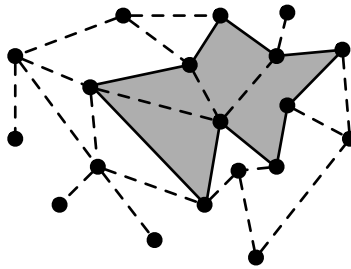


Figura 1.9: Polígono contenido en $G(S)$.

Definición 1.3.8. *Un camino simple en una gráfica geométrica $G(S)$ es una secuencia de vértices distintos v_1, v_2, \dots, v_k tal que $G(S)$ contiene a todas las aristas $v_i v_{i+1}$, para $1 \leq i < k$; Figura 1.10.*

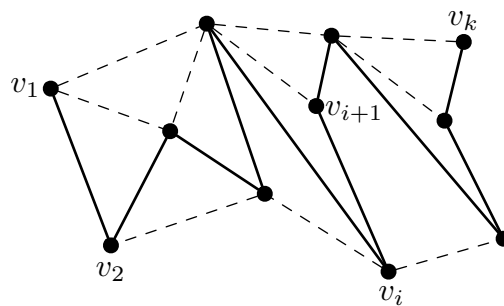


Figura 1.10: Las líneas sólidas determinan un camino simple mientras que las punteadas son parte de $G(S)$ pero no del camino.

Al número de aristas en el camino se le conoce como longitud del camino. Si $G(S)$ contiene un camino entre cualesquiera dos vértices $v_i, v_j \in S$, con $i \neq j$, entonces la gráfica geométrica $G(S)$ es conexa.

Definición 1.3.9. *Un ciclo en una gráfica geométrica $G(S)$ es una secuencia de parejas*

de vértices distintos v_1, v_2, \dots, v_k tal que $G(S)$ contiene a todas las aristas $v_i v_{i+1}$, para $1 \leq i < k$, así como también la arista $v_k v_1$; Figura 1.11.

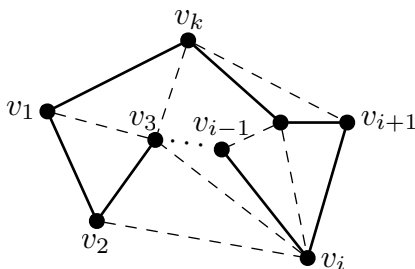


Figura 1.11: Las líneas sólidas determinan un ciclo en $G(S)$.

Definición 1.3.10. Un árbol en una gráfica geométrica $G(S)$ es una gráfica conexa $T(S)$ tal que no contiene ciclos.

Diremos que $G(S)$ contiene un bosque si es exactamente la unión ajena de árboles; Figura 1.12.

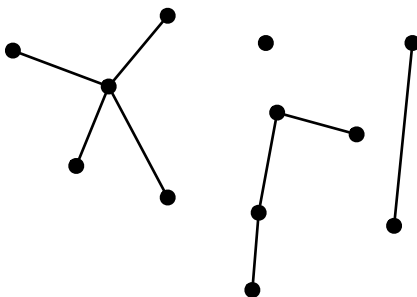


Figura 1.12: Unión ajena de árboles (Bosque).

Definición 1.3.11. Sea C_M un camino simple y θ un ángulo tal que $\theta \in [0, \pi)$. Decimos que C_M es monótono con respecto a θ si toda recta con dirección $\theta + \frac{\pi}{2}$ intersecta a C_M en un conjunto conexo, donde un conjunto conexo es aquel que consiste de un punto o para cualesquiera dos puntos del conjunto existe un camino simple dentro del conjunto que los une; Figura 1.13.

Definición 1.3.12. Un camino ortogonal monótono, es un camino monótono con aristas horizontales y verticales; Figura 1.14.

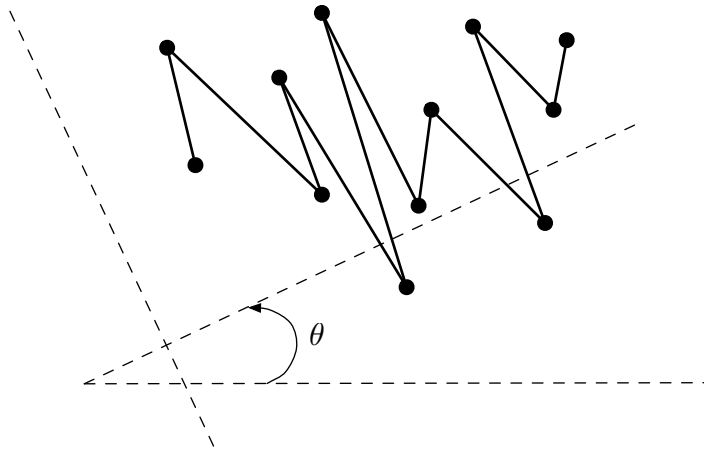


Figura 1.13: Camino monótono con respecto a θ .

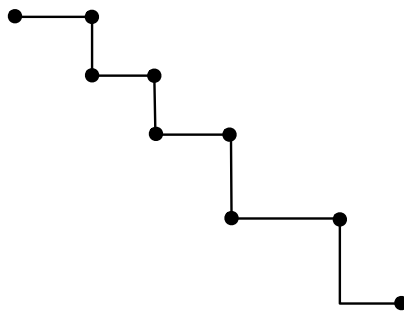


Figura 1.14: Camino monótono ortogonal.

2

Gráficas geométricas maximales sin 3-hoyos

El trabajo descrito en este capítulo, trata sobre un problema estrechamente relacionado con la Teoría Extremal de Gráficas. El problema más simple en dicha área, consiste en encontrar el máximo número de aristas que una gráfica G con $N(m)$ vértices puede tener, de tal forma que G no contenga una subgráfica completa de orden m . Este problema representado en el plano, pueden ser planteado de la siguiente manera:

¿Cuál es el máximo número de aristas que una gráfica geométrica $G(S)$ sobre un conjunto S de $N(m)$ puntos en el plano puede tener, tal que $G(S)$ no contiene un m -ágono convexo?

En este capítulo damos una cota inferior y una superior sobre el máximo número de aristas cuando $m = 3$ y el 3-ágono es vacío¹, el enunciado del problema es el siguiente:

Problema 2.0.1. *¿Cuál es el máximo número de aristas que una gráfica geométrica $G(S)$ sobre un conjunto S de n puntos en el plano puede tener, tal que $G(S)$ no contiene 3-hoyos?*

Sea $ET(S)$ el número entero más grande tal que, existe un gráfica geométrica $G(S)$ con $ET(S)$ aristas que no contiene 3-hoyos y sea $ET(n)$ el valor más grande que alcanza $ET(S)$ entre todos los conjuntos S de n puntos. Observemos que si $|S| = 3$ el máximo número de aristas que tiene $G(S)$ sin contener 3-hoyos es 2. También es fácil de ver que todo conjunto S de 4 puntos, contiene una gráfica geométrica $G(S)$ con exactamente 4 aristas y no contiene 3-hoyos. Es más, cualquier gráfica geométrica determinada por un conjunto S de cuatro puntos con más de 4 aristas siempre contiene un 3-hoyo. Por lo tanto $ET(4) = 4$ (Figura 2.1).

¹A lo largo del trabajo diremos 3-hoyo o triángulo vacío.

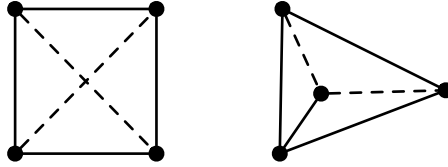


Figura 2.1: Gráficas geométricas sin 3-hoyos con 4 puntos.

El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

$$\binom{n}{2} - O(n \log n) \leq ET(n) \leq \binom{n}{2} - \left(n - 2 + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor\right)$$

Los resultados mostrados en este capítulo fueron obtenidos trabajando en conjunto con los siguientes coautores: Crevel Bautista, Marco A. Heredia, Clemens Huemer, Carlos Seara y Jorge Urrutia, y fueron aceptados en la revista *Graphs and Combinatorics*, bajo el título *On the Number of Edges in Geometric Graphs Without Empty Triangles*.

2.1. Introducción

La Teoría Extremal de Gráficas es una rama de la Teoría de Gráficas que inicia con la siguiente pregunta:

¿Cuál es el máximo número de aristas que puede tener una gráfica $G(V, E)$ con n vértices, tal que no contenga un triángulo como subgráfica?

Esta pregunta fue resuelta en 1907 por W. Mantel,

Teorema 2.1.1 (Teorema de Mantel [37]). *El número máximo de aristas que puede tener una gráfica G de n vértices sin triángulos es $\frac{n^2}{4}$ aristas.*

Demostración. Mostraremos este teorema por inducción sobre n . Para $n = 1$ y $n = 2$ el resultado se cumple. Supongamos que el resultado es verdadero para $n - 1$ vértices y sea $G = (V, E)$ una gráfica con n vértices triángulos. Sean x y y dos vértices adyacentes en G . Observemos que $\delta(x) + \delta(y) \leq n$, porque todo vértice de G es adyacente a x ó a y , pero no a ambos, ya que G no contiene triángulos como subgráficas. Sea $G' = \{V(G) \setminus \{x, y\}\}$, dado que G tiene $n - 2$ vértices se cumple la hipótesis de inducción, entonces el número de aristas de G' , denotado por $E(G')$ es $\frac{(n-2)^2}{4}$. Por lo tanto el número de aristas de G es a lo más:

$$E(G') + \delta(x) + \delta(y) - 1 \leq \frac{(n-2)^2}{4} + n - 1 = \frac{n^2}{4}$$

□

Aunque Mantel fue el primero en obtener una cota sobre el máximo número de aristas que una gráfica puede tener sin contener un triángulo como subgráfica, no se le considera fundador de la Teoría Extremal de Gráficas, ya que en 1941 un matemático húngaro llamado Paul Turán generalizó el Teorema de Mantel y definió la Teoría Extremal de Gráficas. La generalización de Turán consiste no sólo en evitar los triángulos, sino cualquier subgráfica completa K_r con $r > 1$. Observó que todas las gráficas completas $(r-1)$ -partitas son las mejores candidatas para maximizar su número de aristas sin que contengan a una gráfica K_r . Pero, ¿Cuáles de todas estas tienen el máximo número de aristas?. Claramente, las particiones deben estar lo más balanceadas posible, es decir deben diferir a lo más en un elemento: Si V_1 y V_2 son dos particiones de V con $|V_1| - |V_2| \geq 2$, entonces podemos incrementar el número de aristas en nuestra gráfica completa $(r-1)$ -partita moviendo un vértice de V_1 a V_2 . Las únicas gráficas completas $(r-1)$ -partitas con $n \geq r-1$ vértices, cuya partición difieren a lo más en un elemento son las gráficas de Turán.

Definición 2.1.1. La gráfica de Turán denotada por $T_r(n)$, es una gráfica formada a partir de una subdivisión del conjunto de n vértices en r subconjuntos lo más balanceados posible y sus aristas son determinadas por cualesquiera dos vértices que pertenecen a subconjuntos distintos; Figura 2.2.

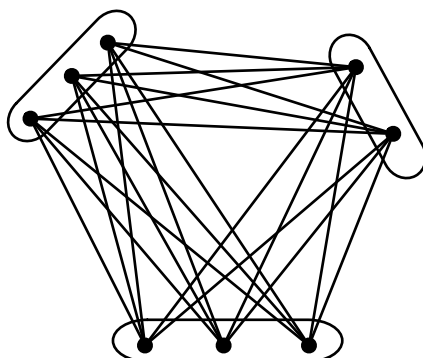


Figura 2.2: Gráfica de Turán $T_3(8)$.

El Teorema de Turán es el siguiente:

Teorema 2.1.2 (Teorema de Turán [53]). *El máximo número de aristas que puede tener una gráfica de n vértices sin subgráficas isomorfas a K_{r+1} , es a lo más $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$.*

Demostración. Por inducción sobre n , el Teorema es verdadero para $n = 1, 2, \dots, r$. Supongamos que el Teorema es verdadero para un valor menor que n y probemos para n . Sea $G(V, E)$ una gráfica con n vértices que no contiene la subgráfica K_{r+1} y tiene el máximo número de aristas posible, es decir G es la gráfica de Turán $T_r(n)$. Entonces G contiene gráficas K_r , ya que si no fuera así, podríamos agregar aristas a G , contradiciendo que tiene el máximo número de aristas. Sea A un clan de r vértices y sea B su complemento. Dado que B tiene $n - r$ elementos y no contiene a K_{r+1} , por hipótesis de inducción B tiene a lo más $(1 - \frac{1}{r})\frac{(n-r)^2}{2}$ aristas. Sin embargo, dado que cada vértice de B tiene a lo más

$r - 1$ vecinos en A , el número de aristas entre A y B es a lo más $(r - 1)(n - r)$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$E(G) = E(A) + E(A, B) + E(B) \leq \binom{r}{2} + (r-1)(n-r) + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{(n-r)^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2}$$

donde $E(A)$, $E(A, B)$, $E(B)$ es el número de aristas en A , entre A y B y B respectivamente; Figura 2.3. \square

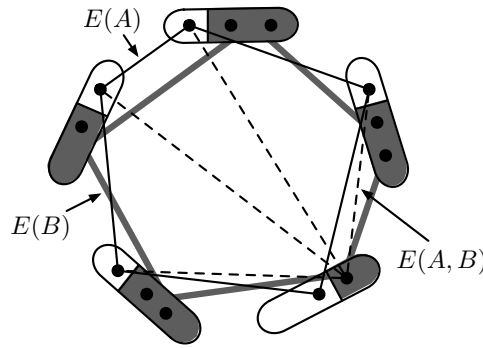


Figura 2.3: Aristas para $r = 5$ y $n = 13$.

Fue entonces el Teorema de Turán el que marco el origen del problema de subgráficas prohibidas (*Forbidden subgraph problem*) dentro de la Teoría Extremal de Gráficas. La definición del problema de subgráficas prohibidas es la siguiente:

¿Cuál es el máximo número de aristas que una gráfica $G = (V, E)$ de n vértices puede tener tal que, G no contenga una subgráfica G' ?

En Teoría Extremal de Gráficas se estudia la constante búsqueda de gráficas con alguna propiedad, tratando de maximizar o minimizar algún parámetro establecido.

Por ejemplo, sea \mathcal{G} el conjunto de todas las gráficas de orden n y tamaño al menos n , observemos que toda gráfica en \mathcal{G} tiene la propiedad gráfica “contener un ciclo” y su número de aristas denotado por $\mu(G)$ es mayor que $n - 1$, entonces las gráficas extremales de \mathcal{G} son las gráficas sin la propiedad contener un ciclo y su número de aristas es igual a $n - 1$, por lo tanto los árboles de orden n son las gráficas extremales de \mathcal{G} .

La fuerte correspondencia que tienen las gráficas abstractas con la gráficas geométricas, ha dado como consecuencia que una gran variedad de problemas de Teoría de Gráficas sean estudiados en el plano usando gráficas geométricas. Hacemos notar que a partir del Teorema de Mantel y del Teorema de Turán, podemos obtener de manera directa el siguiente resultado en gráficas geométricas:

Teorema 2.1.3. *Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición convexa. El máximo número de aristas que una gráfica geométrica sobre S sin subgráficas isomorfas a K_{r+1} es a lo más $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$. La cota es justa.*

Por lo tanto, para el problema planteado en este capítulo si S esta en posición convexa, el número máximo de aristas que $G(S)$ puede tener sin contener 3-hoyos es $\frac{n^2}{4}$; Figura 2.4.

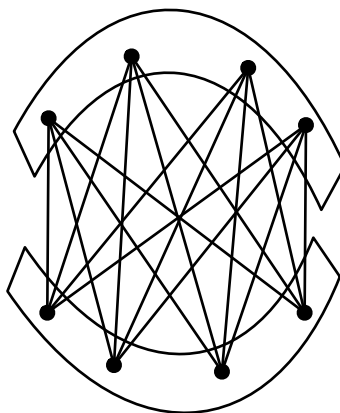


Figura 2.4: Si los puntos de S están en posición convexa, el máximo número de aristas en G sin 3-hoyos es $\frac{n^2}{4}$.

Sin embargo, no podemos concluir a partir del Teorema de Turán, ninguna cota si los puntos están en posición general.

En [41] Nara, Sakai y Urrutia estudiaron el Teorema de Turán para gráficas geométricas. Ellos mostraron que el número máximo de aristas que puede tener una gráfica geométrica de n vértices, tal que no contenga un m -ágono convexo es: $\lfloor (\frac{m-1}{2m}) n^2 \rfloor$. Observemos que esta cota considera m -ágonos vacíos y no vacíos, por tal motivo no puede ser aplicado de manera directa para solucionar el problema planteado en este capítulo.

Recordemos que un m -ágono en un conjunto de puntos S es un polígono simple en S , y que un m -hoyo es un m -ágono vacío.

J. D. Horton mostró que existe un conjunto de puntos arbitrariamente grande tal que no contiene 7-hoyos convexos [27]. De esto se deduce que $\binom{n}{2}$ es el máximo número de aristas que una gráfica geométrica G puede tener, tal que no contenga m -hoyos convexos con $m \geq 7$. Pero, qué podemos decir sobre m -ágonos, con $m < 7$.

Para $m = 6$ Carlos M. Nicolás [42] y de manera independiente Tobias Gerken [22] probaron que para un conjunto de puntos suficientemente grande siempre existe un 6-hoyo convexo.

Para el caso $m = 5$, Heiko Harborth [25] mostró que cualquier conjunto de 10 puntos siempre contiene un 5-hoyo convexo.

Cuando $m = 4$, Esther Klein demostró que cualquier conjunto de 5 puntos determinan un 4-hoyo convexo; Figura 2.5.

Dado lo anterior en este trabajo mostramos cotas sobre el número de aristas que una

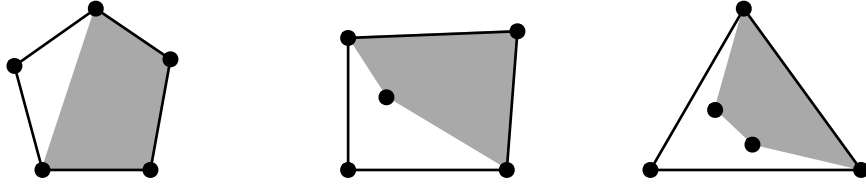


Figura 2.5: En conjuntos de 5 puntos siempre existen 4-hoyos.

gráfica geométrica puede tener sin que contenga 3-ágonos vacíos o 3-hoyos.

2.1.1. El conjunto de Horton

El conjunto de Horton es un componente principal para la obtención de nuestras cotas, por lo tanto presentaremos su definición y construcción recursiva mostradas en [27, 39].

Definición 2.1.2. Sean X y Y dos conjuntos finitos de puntos en el plano, decimos que X está muy arriba de Y y Y está muy abajo de X , si se cumplen las siguientes propiedades:

- Ninguna línea determinada por dos puntos de $X \cup Y$ es vertical.
- Todos los elementos de Y se encuentran debajo de toda línea determinada por dos elementos de X .
- Todos los elementos de X se encuentran por arriba de toda línea determinada por dos elementos de Y .

Dado un conjunto X de n puntos en el plano, ordenamos a los elementos de X de acuerdo a su coordenada x , de manera que $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ con $x_i < x_{i+1}$. Definimos a los conjuntos $X^- = \{x_2, x_4, x_6, \dots\}$ y $X^+ = \{x_1, x_3, x_5, \dots\}$ a los subconjuntos de X con índice par e impar respectivamente.

Definición 2.1.3. Sea H un conjunto finito de puntos en el plano. H es un conjunto de Horton si $|H| \leq 1$ o si se cumple lo siguiente:

- H^- y H^+ son ambos conjuntos de Horton
- H^+ está muy arriba de H^- o H^- está muy abajo de H^+

Para mostrar que el conjunto de Horton existe, vamos a mostrar la construcción recursiva mostrada en [27]. Dicha construcción es la siguiente: Sea k un valor entero positivo, el conjunto de Horton H_k de tamaño 2^k es:

1. $H_1 = \{(0, 0), (1, 0)\}$
2. H_k consiste de dos subconjuntos de puntos H_{k-1}^- y H_{k-1}^+ , los cuales son obtenidos a partir de H_{k-1} y a su vez este es obtenido de la siguiente manera: Si $p = (i, j) \in H_{k-1}$, entonces $p' = (2i, j) \in H_{k-1}^-$ y $p'' = (2i + 1, j + d_k) \in H_{k-1}^+$. El valor d_k es suficientemente grande ya que H_{k-1}^- y H_{k-1}^+ deben cumplir la definición 2.1.2; Figura 2.6.

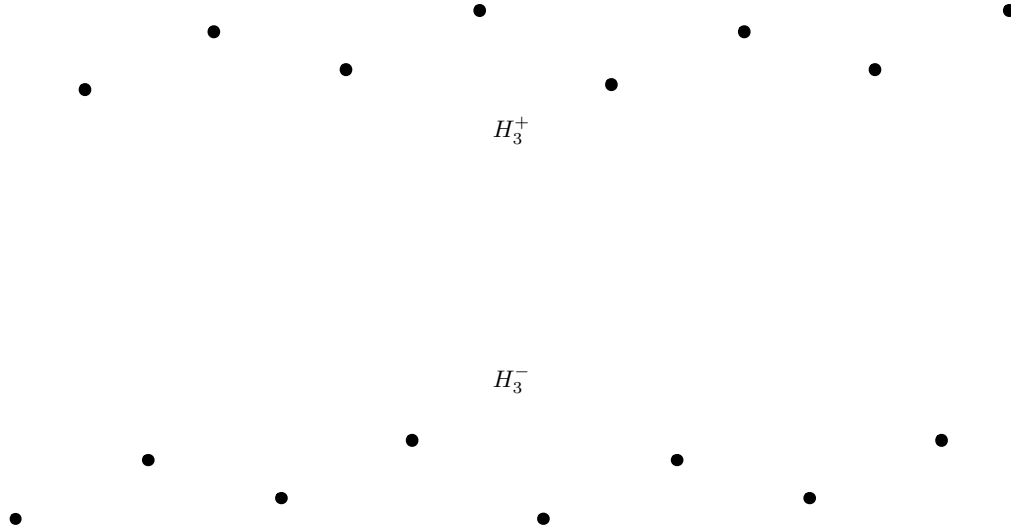


Figura 2.6: Conjunto de Horton H_4 .

2.2. Construcción de la cota inferior

En esta sección mostramos que $\binom{n}{2} - O(n \log n) \leq ET(n)$. Para obtener dicha cota, hicimos uso de los conjuntos de Horton, H_k de tamaño 2^k , y los siguientes resultados a partir de su definición.

Observación 2.2.1. *Los puntos $p = (i, j)$ de H_k con i par, pertenecen a H_{k-1}^- y con i impar pertenecen a H_{k-1}^+ .*

Sean p y q dos puntos en el plano y ℓ_p y ℓ_q dos líneas verticales que pasan por p y q respectivamente. Observemos que el segmento \overline{pq} divide a la banda vertical inducida por ℓ_p y ℓ_q en una parte superior $U_{\overline{pq}}$ y otra inferior $L_{\overline{pq}}$. Diremos que no hay puntos abajo (arriba) del segmento \overline{pq} si $L_{\overline{pq}}$ ($U_{\overline{pq}}$) es vacía (Figura 2.7).

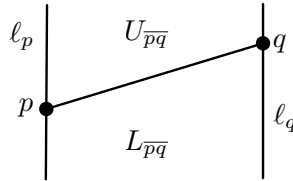
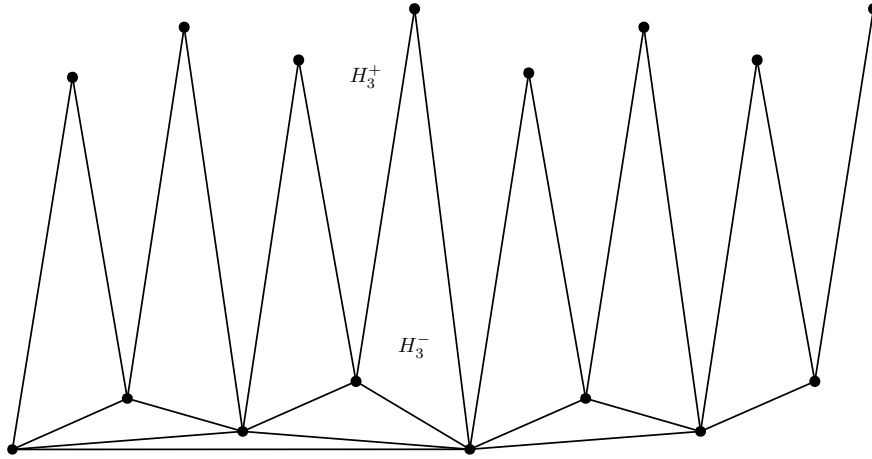


Figura 2.7: División de la banda inducida por el segmento \overline{pq} .

Sea $B(H_k)$, el conjunto de segmentos que unen dos puntos p y q de H_k , tal que no hay puntos de H_k abajo de ellos (Figura 2.8).

Observación 2.2.2. *Si $p, q \in H_{k-1}^+$ entonces hay al menos un punto de H_{k-1}^- abajo del segmento \overline{pq} . Si $p, q \in H_{k-1}^-$ entonces existe un punto de H_{k-1}^+ arriba del segmento \overline{pq} .*

La prueba del siguiente lema también fue dada por Bárány y Valtr en [10].

Figura 2.8: Segmentos del conjunto $B(H_4)$.

Lema 2.2.1. $|B(H_k)| = 2^{k+1} - (k + 2)$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre k . Es claro que para $k = 1$, nuestro resultado es verdadero. Sea $H_k = H_{k-1}^- \cup H_{k-1}^+$ un conjunto de Horton construido como en la sección anterior, y sea $p, q \in H_k$ tal que no existe ningún punto de H_k abajo del segmento \overline{pq} , es decir, p y q forman un segmento en $B(H_k)$. Analicemos los posibles casos para cualesquiera $p, q \in H_k$:

- Supongamos que p y q pertenecen al conjunto H_{k-1}^- . Por hipótesis de inducción deducimos que existen $2^k - (k + 1)$ pares de puntos p, q .
- Claramente usando la observación 2.2.2, podemos deducir que p y q no pueden estar en H_{k-1}^+ .
- El otro caso es cuando un punto está en H_{k-1}^- y el otro en H_{k-1}^+ . Por la observación 2.2.1, podemos concluir directamente que si $p = (i, j)$, entonces el punto q puede tener dos valores distintos $q = (i \pm 1, r)$ para alguna r , excepto cuando el punto p es el punto de coordenada x menor o el punto de coordenada x mayor. Dado lo anterior podemos concluir que hay exactamente $2^k - 1$ parejas de puntos tal que uno pertenece a H_{k-1}^- y el otro a H_{k-1}^+ .

Usando el análisis anterior obtenemos lo siguiente:

$$|B(H_k)| = 2^k - (k + 1) + 2^k - 1 = 2^{k+1} - (k + 2)$$

□

Observemos que los segmentos del conjunto $\{B(H_k) \setminus B(H_{k-1}^-)\}$ son formados por parejas de puntos, tal que uno pertenece al conjunto H_{k-1}^+ y el otro a H_{k-1}^- . Por lo tanto tenemos la siguiente observación:

Observación 2.2.3. $|B(H_k)| - |B(H_{k-1}^-)| = 2^k - 1$

Es fácil de ver que el número de segmentos que unen parejas de puntos en H_k que no tiene elementos de H_k arriba de estos es también $2^{k+1} - (k + 2)$. Por lo tanto el lema 2.2.1 afirma que el número de segmentos que unen parejas de elementos de H_k , tal que no hay elementos de H_k abajo de estos, (a saber $2 \times 2^k - (k + 2)$), es lineal con respecto a 2^k , que es la cardinalidad de H_k .

Usaremos el lema 2.2.1 para probar el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1. *Para toda $n = 2^k, k \geq 1$, existe un conjunto de puntos (H_k) tal que contiene una gráfica geométrica en H_k con $\binom{n}{2} - O(n \log n)$ aristas, y no contiene triángulos vacíos.*

Demostración. Sea G_k una gráfica geométrica de H_k , obtenida de la siguiente manera:

G_1 contiene la arista que une a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Ahora supongamos que tenemos construida la gráfica G_{k-1} en H_{k-1} . G_k es obtenida a partir de los siguientes pasos:

1. Si la arista pq esta en G_{k-1} , entonces las aristas $p'q'$ y $p''q''$ están en G_k , y los puntos p', q', p'' y q'' son puntos obtenidos a partir de la definición recursiva de H_k .
2. Agrega a G_k todas las aristas que unen parejas de puntos tales que uno esta en H_{k-1}^+ y el otro en H_{k-1}^- .
3. Finalmente, borra de G_k a todas las aristas pq , tal que $p, q \in H_{k-1}^+$ y abajo de pq no existen puntos de H_{k-1}^+ , más todas las aristas rm tal que $r, m \in H_{k-1}^-$ y arriba de rm no existen puntos de H_{k-1}^- . (Figura 2.9).

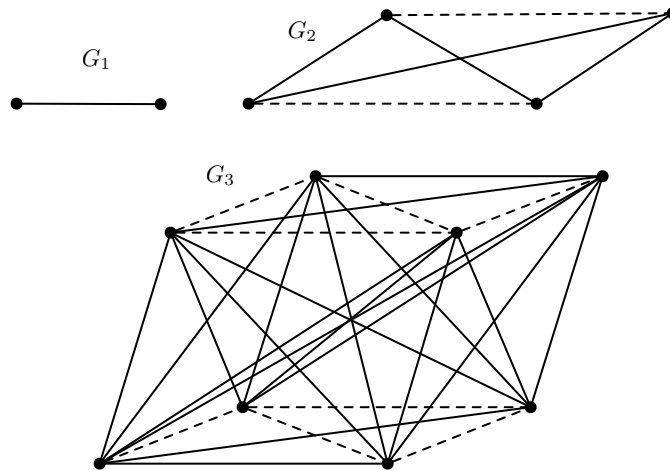


Figura 2.9: Construcción de G . Las líneas sólidas son las aristas de G_k y las aristas punteadas son las aristas eliminadas.

Mostraremos por inducción sobre k , que G_k no contiene triángulos vacíos. Para el caso base cuando $k = 1$, el resultado es cierto. Supongamos que G_{k-1} no contiene triángulos vacíos. Por construcción, si G_k contiene un triángulo vacío T , dicho triángulo debe tener dos vértices en H_{k-1}^+ y uno en H_{k-1}^- , o viceversa.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que T tiene dos vértices $p, q \in H_{k-1}^+$. Entonces por el paso 3 de la construcción de G_k , garantizamos que existen puntos de H_{k-1}^+ abajo del segmento \overline{pq} , por lo tanto, cualquier triángulo que contiene la arista pq contiene un punto en su interior. De manera similar, podemos garantizar lo mismo para el triángulo T con dos vértices en H_{k-1}^- . Por lo tanto G_k no contiene triángulos vacíos.

Ahora solo falta mostrar que G_k contiene $\binom{n}{2} - O(n \log n)$ aristas, observemos que por el lema 2.2.1 en el tercer paso de la construcción de G_k , borramos a lo más $2(2^k - (k+1))$ aristas de la gráfica completa en H_k . Dado que el número de vértices en H_k es $n = 2^k$, el número de aristas eliminadas de la gráfica completa de H_k es acotada por la recursión

$$g(n) \leq 2g\left(\frac{n}{2}\right) + 2n,$$

lo cual implica que $g(n)$ es acotada por arriba por $O(n \log n)$.

□

Como resultado de la Observación 2.2.3 y por eliminar las aristas de G_k de manera recursiva basándose en G_{k-1} (Figura 2.10) el número exacto de aristas eliminadas en la gráfica completa H_k es:

$$n \log_2 n - 2n + 2 = 2^k(k - 2) + 2.$$

Por otra parte, sabemos que para todo n debe existir un entero positivo $f(n)$ tal que $ET(n) = \binom{n}{2} - f(n)$. Entonces, cuando $n = 2^k$ con $k \geq 1$, $f(n) \leq n \log_2 n - 2n + 2$. Por lo tanto, ya que $f(n)$ es monótona creciente, para todo n tenemos que

$$f(n) \leq (2n) \log_2(2n) - 2(2n) + 2$$

lo cual implica el siguiente resultado:

Teorema 2.2.2. $\binom{n}{2} - O(n \log n) \leq ET(n)$.

Observemos que el Teorema 2.2.1 puede ser generalizado a cuadriláteros, pentágonos y hexágonos vacíos de H_k . Es decir G_k , no contiene cuadriláteros, pentágonos y hexágonos vacíos. Esto se deduce a partir de que cualquier polígono vacío con vértices en H_k debe tener vértices en H_{k-1}^+ y en H_{k-1}^- , porque no hay dos vértices adyacentes p y q ambos en H_{k-1}^+ o H_{k-1}^- , tal que \overline{pq} no tenga elementos de H_{k-1}^+ abajo de este o que \overline{pq} no tenga elementos de H_{k-1}^- arriba de este. Por lo tanto para polígonos con no más de 7 vértices, no es necesario eliminar más aristas de la gráfica completa en H_k , por lo tanto H_k no contiene tales polígonos convexos.

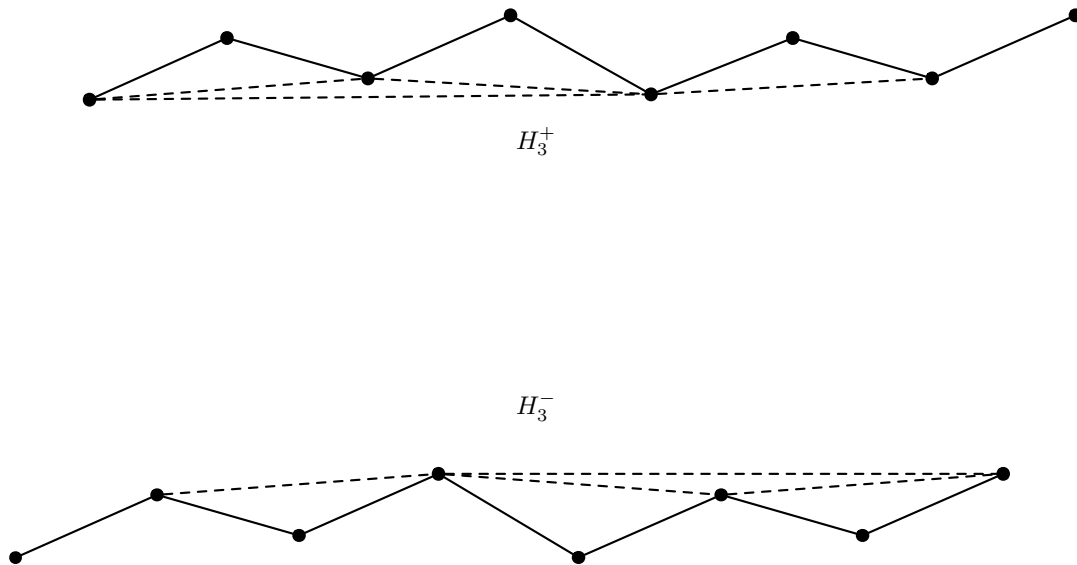


Figura 2.10: Aristas que son eliminadas para construir G_4 . Las aristas punteadas son aristas eliminadas en la construcción de G_3 .

2.3. Construcción de la cota superior

En esta sección mostraremos una cota superior para $ET(n)$. Observemos que para $n \geq 3$, $ET(n) < \binom{n}{2}$, porque la gráfica completa K_n sobre cualquier conjunto S de n puntos en posición general, siempre contiene al menos un triángulo vacío, dicho triángulo puede ser encontrado de la siguiente manera: Sean $p, q \in S$ y pq la arista en K_n que une a p y q , sea r el punto más cercano a pq , entonces p, q, r forman un triángulo vacío; Figura 2.11.

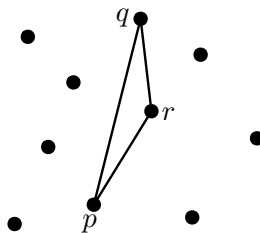


Figura 2.11: Siempre existe al menos un triángulo vacío.

La cota superior mostrada en este trabajo esta dada por el siguiente teorema:

Teorema 2.3.1. $ET(n) \leq \binom{n}{2} - (n - 2 + \lfloor \frac{n}{8} \rfloor)$

Demostración. Sean S cualquier conjunto de n puntos en posición general, y K_n la gráfica geométrica completa sobre S . Sean F un subconjunto de f aristas de K_n tal que, la gráfica $G = K_n \setminus F$ no contiene triángulos vacíos, y F' cualquier subconjunto de aristas de K^n con $|F'| < f$ tal que, la gráfica $G' = K_n \setminus F'$ contiene triángulos vacíos. Llamaremos a las aristas del conjunto F como aristas prohibidas. Claramente, $ET(S) = \binom{n}{2} - f$. Hacemos notar la siguiente observación:

Observación 2.3.1. *Existe al menos un punto $q \in S$ que pertenece a la envolvente convexa de S , tal que q es incidente a una arista prohibida $e \in F$.*

Esta observación es verdadera, ya que si no fuera así, implicaría que para cualesquiera 3 puntos p, q y r de la envolvente convexa, el triángulo $T(p, q, r)$ contiene al menos un punto dentro y esto implicaría que siempre existe un triángulo vacío. Una vez hecha esta observación, aplicamos lo siguiente: asignamos a la arista prohibida e al punto q . Entonces eliminamos a e y q de G y aplicamos este paso recursivamente a la gráfica $G \setminus \{q\}$ hasta que tengamos sólo 2 puntos. Con este proceso asociamos $n - 2$ aristas prohibidas a $n - 2$ puntos diferentes de S , con este proceso obtenemos el primer término de nuestra cota. Además las aristas asignadas forman un bosque de aristas prohibidas, denotado por \mathcal{B} ; Figura 2.12.

Ahora para obtener el término $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ de aristas prohibidas, consideramos lo siguiente: sean $p \in S$ el punto con coordenada y menor, y p_1, \dots, p_{n-1} los puntos de $S \setminus \{p\}$ ordenados radialmente con respecto al punto p en favor de las manecillas del reloj (Figura 2.13). Vamos a dividir al conjunto S en subconjuntos de cardinalidad 10 sobre el orden radial, de manera que las cuñas S_i y S_{i+1} formadas por esta partición compartan un punto además de p ; Figura 2.13.

Por [26] se sabe que para cualquier conjunto de puntos en el plano de cardinalidad 10 siempre contiene un pentágono vacío. Sea $P_i \subset S_i$ el subconjunto de vértices del pentágono vacío que esta en la cuña S_i .

Sean \mathcal{Q}_5 cualquier subconjunto de 5 puntos en posición convexa, y K_5 la gráfica geométrica completa sobre \mathcal{Q}_5 . Observemos que si eliminamos al menos 4 aristas de K_5 obtenemos una gráfica geométrica sin triángulos vacíos. De hecho existen sólo dos subconjuntos de aristas combinatoriamente diferentes que cumplen con esto y las aristas que fueron eliminadas contienen un ciclo de aristas prohibidas, donde dicho ciclo es un triángulo; Figura 2.14.

Además de esto, cualquier gráfica geométrica sobre \mathcal{Q}_5 con 5 o más aristas contiene un ciclo. Por lo tanto cada pentágono P_i debe tener al menos un ciclo C^i de aristas prohibidas y una de estas aristas no forma parte de \mathcal{B} , porque \mathcal{B} es un bosque. Observemos que nuestro resultado sería cierto si todos los ciclos C^i son ajenos por aristas; Figura 2.15.

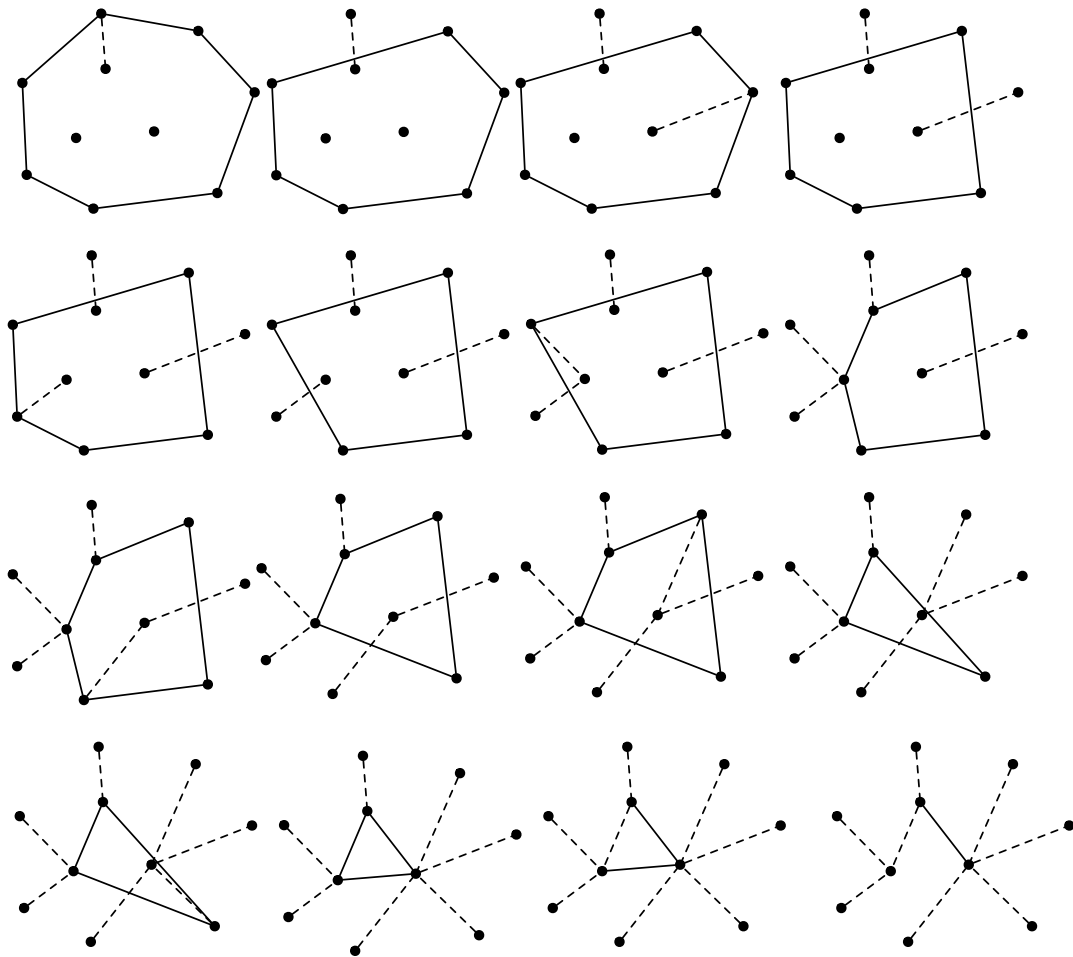


Figura 2.12: Proceso para eliminar $n - 2$ aristas prohibidas. Las aristas punteadas son las prohibidas y al final del proceso forman un bosque.

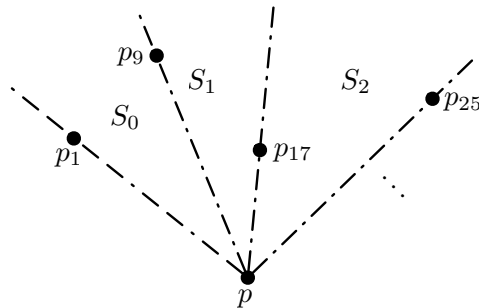


Figura 2.13: Partiendo el conjunto S en subconjuntos de 10 puntos.

Sean i y j dos valores enteros tal que $1 \leq i < j < \lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ y para cualquier valor r , $i \leq r < j$, C^r y C^{r+1} comparten una arista. Como comparten una arista, entonces com-

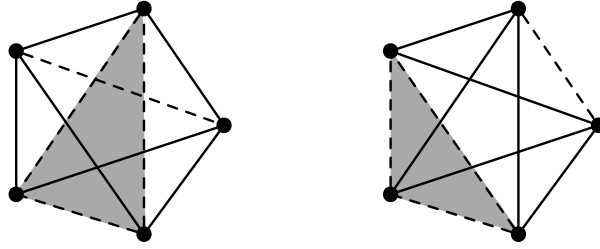


Figura 2.14: K_5 sin las aristas punteadas no contiene triángulos vacíos y las aristas punteadas contienen un ciclo de aristas prohibidas.

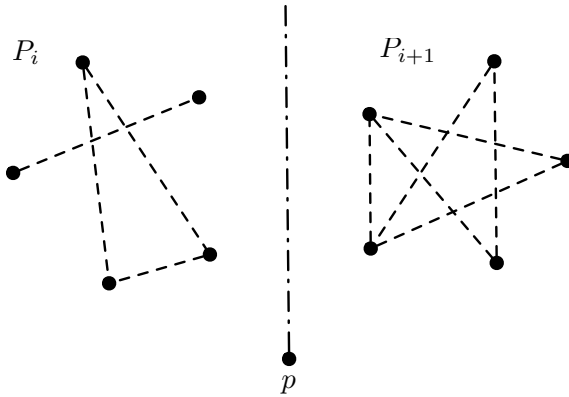


Figura 2.15: Cada ciclo de aristas prohibidas contiene al menos una arista que no ha sido contada antes.

parten dos vértices donde uno de ellos es p . En consecuencia, la gráfica $C^i \cup \dots \cup C^j$ contiene $(|C^i| - 2) + \dots + (|C^j| - 2) + 2$ vértices, y $(|C^i| - 1) + \dots + (|C^j| - 1) + 1$ aristas. Observemos que para eliminar a todos los ciclos en $C^i \cup \dots \cup C^j$, necesitamos quitar al menos una arista por ciclo, es decir $j - i + 1$ aristas, y considerando el valor máximo de j y el mínimo de i , nuestro segundo término $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ de aristas prohibidas se cumple. Dado lo anterior obtenemos:

$$f \geq n - 2 + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$$

Por lo tanto

$$ET(S) = \binom{n}{2} - f \leq \binom{n}{2} - (n - 2 + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor),$$

y

$$ET(n) \leq \binom{n}{2} - (n - 2 + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor),$$

□

Resumiendo lo mostrado hasta este momento, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.3.2.

$$\binom{n}{2} - O(n \log n) \leq ET(n) \leq \binom{n}{2} - \left(n - 2 + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor \right).$$

2.4. Conclusiones y problemas abiertos

Se obtuvo una cota inferior y superior del máximo número de aristas denotado por $ET(n)$, que una gráfica geométrica sobre un conjunto de n puntos en posición general puede tener, tal que no contenga triángulos vacíos. Además conjeturamos que la cota inferior

$$\binom{n}{2} - O(n \log n) \leq ET(n)$$

es justa. Una buena e interesante pregunta abierta es: ¿Se puede mejorar la cota superior? El problema de determinar $ET(n)$ puede ser visto como la versión geométrica del Teorema de Turán, excepto que nosotros nos centramos en encontrar triángulos vacíos en lugar de las gráficas geométricas completas de orden r . Una línea de investigación sustanciosa es considerar el problema pero para r -ágonos vacíos, con $3 < r \leq 6$, ya que para $r > 7$ la respuesta directa es: $\binom{n}{2}$ usando el conjunto de Horton.

3

4-hoyos balanceados en conjuntos de puntos bi-coloreados

En este capítulo estudiaremos un problema relacionado con el Teorema de Erdős-Szekeres, el enunciado de dicho teorema es el siguiente:

Teorema 3.0.1 (Teorema de Erdős-Szekeres). *Para todo entero positivo m , existe un entero positivo $N(m)$, tal que todo conjunto de $N(m)$ puntos en el plano en posición general contiene un m -ágono convexo.*

Existen diversas variantes sobre este teorema, por ejemplo: los m -ágonos no son necesariamente convexos, vacíos o no vacíos, que los puntos sean de distintas clases cromáticas y buscar m -ágonos monocromáticos, en fin, el interés de este tipo de problemas es muy grande. Sin embargo, una variante de este teorema que aún no ha sido estudiada es contemplar m -ágonos con el mismo número de puntos de cada clase cromática, por lo tanto el trabajo mostrado en este capítulo se refiere al estudio de 4-ágonos vacíos formados por 2 puntos de color S_1 y dos puntos de color S_2 , donde S_1 y S_2 son clases cromáticas distintas, es decir estudiaremos 4-hoyos balanceados.

Los resultados de este capítulo fueron publicados en actas del *28th. European Workshop on Computational Geometry* y el artículo ya fue enviado a una revista internacional para buscar su publicación. Además fueron obtenidos trabajando en conjunto con los siguientes coautores: Sergey Bereg, José Miguel Díaz, Ruy Fabila, Pablo Pérez, Toshinori Sakai, Jorge Urrutia e Inmaculada Ventura.

3.1. Introducción

El problema de encontrar conjuntos de n puntos que garanticen que al menos contiene un m -ágono convexo, ha sido ampliamente estudiado, dentro del área de la geometría com-

binatoria. En 1933 Esther Klein planteó la siguiente pregunta, misma que fue parcialmente resuelta por Erdős y Szekeres en 1935 [19]:

¿Podemos demostrar que para cualquier número m , existe un número $g(m)$ tal que, cualquier conjunto de $g(m)$ puntos contiene al menos un m -ágono convexo?

Paul Erdős llamó a este problema como "*Happy End Problem*", dado que el inicio de la colaboración para la solución de este problema, marco el inicio de una relación entre Klein y Szekeres que terminó en matrimonio en 1937. Tiempo después, Erdős planteó una variante del problema anterior, pero relacionado con el estudio de m -ágonos vacíos o m -hoyos [18], dicho problema es el siguiente:

¿Cuál es el mínimo número $h(m)$, tal que cualquier conjunto con $g(m)$ puntos en el plano contiene al menos un m -hoyo convexo?

La solución trivial para el caso $m = 3$ es $\binom{n}{3}$. Esther Klein demostró que cualquier conjunto de 5 puntos determinan un 4-hoyo convexo y Harborth mostró que 10 puntos siempre contienen un 5-hoyo convexo, para más detalles [25]. Sin embargo, en 1983 Horton mostró que existe un conjunto de puntos arbitrariamente grande tal que no contiene 7-hoyos convexos [27]. En 2007-2008 Nicolás y de manera independiente Gerken probaron que para un conjunto de puntos suficientemente grande siempre existe un 6-hoyo convexo [42, 22]. Ambas aproximaciones, fueron obtenidas a partir de observar la relación entre los 6-hoyos convexos en conjuntos de puntos suficientemente grandes y las capas convexas dentro de los m -ágonos convexos. Nicolás probó $h(6) \leq g(25)$, mientras que Genken mejoró esta cota haciendo un largo análisis de casos (57 casos) para mostrar $h(6) \leq g(9)$. De hecho, haciendo la demostración mostró que cualquier conjunto que contiene un 9-ágono también contiene un 6-hoyo convexo.

El estudio de los m -hoyos hoy en día es un tema muy estudiado dentro de la comunidad científica, ya que se han planteado muchas variantes sobre el problema planteado por Erdős, por ejemplo: la generalización a dimensiones superiores o que los puntos del conjunto pertenezcan a distintas clases cromáticas. En cuanto a la generalización a dimensiones superiores las únicas cotas que existen hasta ahora son mostradas en [34, 36].

3.1.1. Variantes cromáticas del problema de Erdős-Szekeres

En cuanto a variantes sobre conjuntos de puntos de distintas clases cromáticas, aparecieron por primera vez en el 2003 en [13]. En este trabajo, definieron que un m -hoyo es monocromático si todos sus vértices tienen el mismo color y mostraron que cualquier conjunto bi-coloreado de n puntos contiene al menos $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 2$ 3-hoyos monocromáticos con interiores ajenos. Además mostraron que la cota es justa y que todos los 3-hoyos encontrados coinciden ser del mismo color. Otro resultado mostrado en [13] es que para $k \geq 5$ y cualquier n , existen conjuntos de n puntos que no contienen k -hoyos monocromáticos convexos. Dado lo anterior, los casos que faltan por explorar sobre el problema de Erdős en conjuntos de puntos bi-coloreados son los 3 y 4 hoyos monocromáticos. La primer cota sobre el número de 3-hoyos monocromáticos fue mostrada en [1], en dicho trabajo muestra-

ron que existen $\Omega(n^{\frac{5}{4}})$ 3-hoyos monocromáticos, y la mejor mostrada hasta el momento fue dada en el 2011 por J. Pach y P. Valtr en [46] mostrando que existen $\Omega(n^{\frac{4}{3}})$ 3-hoyos monocromáticos. Sobre el número de 4-hoyos monocromáticos en [13] obtuvieron un conjunto bi-coloreado de 18 puntos tal que no contienen 4-hoyos monocromáticos convexos, ejemplos con conjuntos de puntos más grandes están dados en [9] con 20 puntos, en [21] con 30 puntos, en [23] con 32, en [30] con 36 y el más reciente es dado por Koshelev en [35] con conjuntos bi-coloreados de 46 puntos.

Lo anterior motivo para que en este trabajo nos preguntarnos sobre el número de 4-hoyos en conjuntos de puntos bi-coloreados, pero permitiendo que tengan el mismo número de puntos de las dos clases cromáticas, llamándolos 4-hoyos balanceados. Mostraremos que dado un conjunto de puntos bi-coloreado existen un número cuadrático de 4-hoyos balanceados no necesariamente convexos y dado que cualquier conjunto contiene un número cuadrático de 4-hoyos nos preguntamos sobre la caracterización de los conjuntos de puntos bi-coloreados que no contengan 4-hoyos convexos balanceados.

3.2. Número de 4-hoyos balanceados

Sean R y B dos conjuntos de n puntos en el plano en posición general y de distintas clases cromáticas, a los elementos de R y B les llamaremos puntos rojos y puntos azules respectivamente. Aseguramos que si $|R|, |B| \geq 2$ entonces S siempre contiene un 4-hoyo balanceado. Para probar esto, observemos que para todo conjunto H de cuatro puntos, siempre existe un polígono simple cuyos vértices son elementos de H . Sea S' un subconjunto de S que contiene exactamente dos puntos rojos y dos puntos azules, tal que el área del cierre convexo de S' es mínimo. Claramente, cualquier polígono cuyo conjunto de vértices es S' no contiene puntos en su interior, por lo tanto es un 4-hoyo balanceado de S .

Por otra parte, si S tiene exactamente dos puntos de la misma clase cromática y muchos de la otra, entonces S podría contener sólo un número constante de 4-hoyos balanceados. Por ejemplo la Figura 3.1 se observa un conjunto con sólo cinco 4-hoyos balanceados.

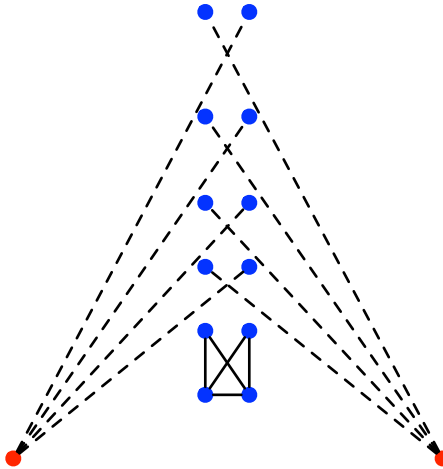


Figura 3.1: Conjunto de puntos con exactamente cinco 4-hoyos balanceados.

Para el caso cuando $|R| = |B| = n$, S tiene al menos un número lineal de 4-hoyos balanceados. De hecho podemos aplicar *Ham-sandwich* recursivamente, podemos dividir a S en un número lineal de subconjuntos ajenos de tamaño constante, cuyos cierres convexos son ajenos, y cada uno de estos contienen al menos dos puntos rojos y dos puntos azules y esto es justo un 4-hoyo balanceado.

En esta sección probaremos el siguiente problema:

Problema 3.2.1. *Sea $S = R \cup B$, S siempre contiene un número cuadrático de 4-hoyos balanceados, no necesariamente convexos.*

Supongamos que los elementos de S tienen coordenadas distintas. Denotaremos con \vec{pq} al rayo que sale del punto p y pasa por un punto q .

Coloración de aristas en la gráfica geométrica $G(S)$.

La coloración de las aristas en $G(S)$ que unen a puntos rojos y azules es la siguiente:

- Aristas de color verde. A la arista \overline{rb} que une a un punto rojo r y un punto azul b la coloreamos de *verde*, si dicha arista, es una arista o una diagonal de un 4-hoyo balanceado de S .
- Aristas de color negro. Si \overline{rb} no es coloreada de color verde y forma parte del cierre convexo de S , la coloreamos de negro; Figura 3.2.

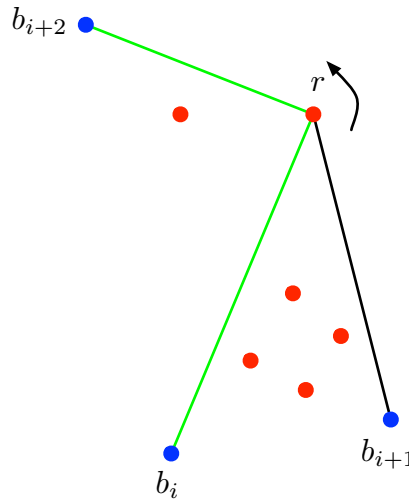


Figura 3.2: Aristas de color verde y negro.

- Aristas de color rojo. Si \overline{rb} no es coloreada de verde ni negro, entonces la coloreamos de *rojo* si al rotar el rayo \vec{rb} , sobre r a favor de las manecillas del reloj, el rayo \vec{rb} encuentra a un punto rojo r' , antes de encontrar un punto azul; Figura 3.3(a).
- Aristas de color azul. Si \overline{rb} no es coloreada de verde ni negro, entonces la coloreamos de *azul* si al rotar el rayo \vec{br} , sobre b a favor de las manecillas del reloj, el rayo \vec{br} encuentra a un punto azul b' , antes de encontrar un punto rojo.

Haremos algunas observaciones sobre las aristas de color rojo. Observamos que si rotamos al rayo \overrightarrow{rb} sobre r en contra de las manecillas del reloj, dicho rayo debe encontrar primero a un punto rojo r'' antes de encontrar a un punto azul b' , ya que si no fuera así, los puntos r, r', b y b' formarían un 4-hoyo balanceado y por lo tanto, la arista \overline{rb} tendría que ser de color verde; Figura 3.3(b). De hecho ocurre lo mismo si rotamos al rayo \overrightarrow{rb} sobre b . Con lo anterior podemos concluir la siguiente observación:

Observación 3.2.1. *Si la arista \overline{rb} es de color rojo, entonces al rotar el rayo \overrightarrow{rb} sobre r y sobre b en contra y a favor de la manecillas del reloj, siempre encuentra primero a un punto de color rojo antes de un punto azul; Figura 3.3(a).*

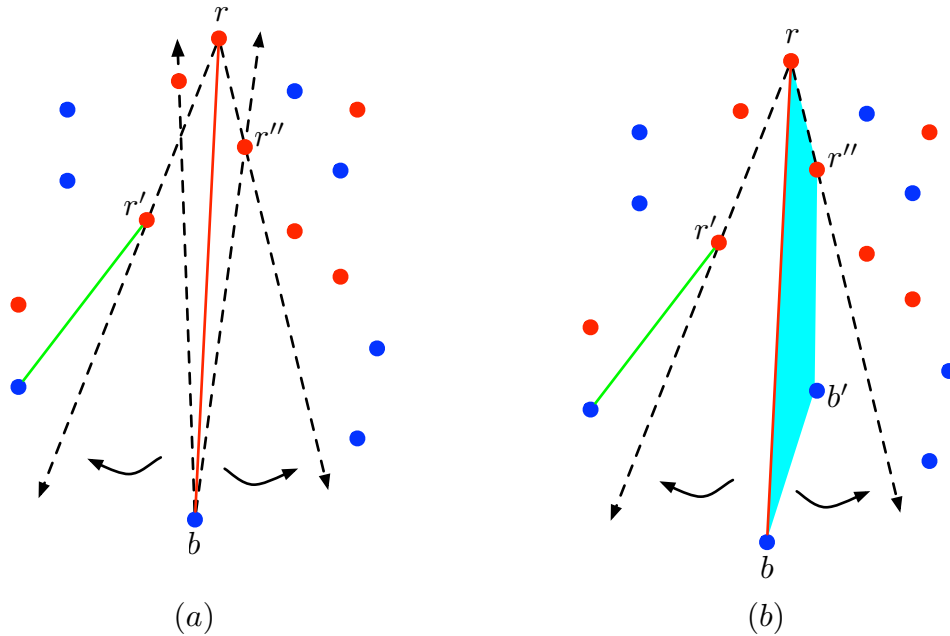


Figura 3.3: Coloración de aristas.

De manera similar, ocurre con las aristas \overline{br} de color azul, es decir, si rotamos a \overrightarrow{br} sobre b y sobre r , siempre encontramos a un punto azul antes que a un punto rojo. Dado lo anterior concluimos que la coloración de aristas está bien definida. A continuación mostraremos que existen un número cuadrático de aristas de color verde y con esto obtenemos la cota principal de esta sección.

Sea r un punto rojo. Ordenamos y etiquetamos a los puntos azules de izquierda a derecha, de acuerdo al orden marcado en contra de las manecillas del reloj sobre r como $\{b_1, \dots, b_n\}$; Figura 3.4.

A continuación mostraremos los siguientes lemas con respecto a la etiquetación de los puntos azules y a la coloración de aristas:

Lema 3.2.1. *No existen dos aristas consecutivas $\overline{rb_i}$ y $\overline{rb_{i+1}}$, tal que una arista es de color rojo y la otra es de color azul.*

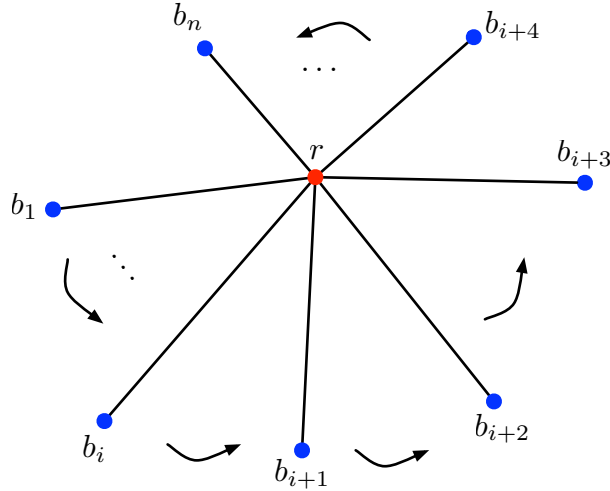


Figura 3.4: Orden de los puntos azules con respecto al punto r .

Demostración. Supongamos que sí existen dos aristas consecutivas $\overline{rb_i}$ y $\overline{rb_{i+1}}$, tal que una es de color rojo y la otra de color azul. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\overline{rb_i}$ es de color rojo y que $\overline{rb_{i+1}}$ es de color azul. Como la arista $\overline{rb_i}$ es de color rojo, entonces por la Observación 3.2.1 debe de existir a su derecha un punto rojo r' antes que un punto azul, por lo tanto r' está dentro del triángulo determinado por los puntos b_i, r, b_{i+1} . Por otra parte, como la arista $\overline{rb_{i+1}}$ es de color azul, por la Observación 3.2.1, debe existir un punto azul antes que un punto rojo al rotar el rayo $\overline{rb_{i+1}}$ sobre r a favor de las manecillas del reloj, sin embargo esto no es posible porque entre b_i y b_{i+1} no existen puntos azules, por lo tanto al girar el rayo $\overline{rb_{i+1}}$, este encontrará primero a un punto de color rojo, entonces la arista $\overline{rb_{i+1}}$ no puede ser de color azul. Dado lo anterior, no existen dos aristas consecutivas tal que una es de color rojo y otra es de color azul. \square

Con el Lema 3.2.1, podemos concluir que entre una arista de color rojo y una arista de color azul, existe una arista de color verde.

Lema 3.2.2. *Sea i tal que $\overline{rb_i}$ y $\overline{rb_{i+1}}$ son dos aristas de color rojo. El triángulo Δ acotado por $\overline{rb_i}$, $\overline{b_i b_{i+1}}$ y $\overline{rb_{i+1}}$ contiene al menos tres puntos rojos de S ; Figura 3.5.*

Demostración. Supongamos que el lema no es cierto, entonces el triángulo Δ contiene 0, 1 o 2 puntos de color rojo. El triángulo Δ no puede estar vacío porque si fuera así, las aristas $\overline{rb_i}$ y $\overline{rb_{i+1}}$ no serían de color rojo, ya que por la Observación 3.2.1 existe al menos un punto de color rojo r' a la derecha de la arista $\overline{rb_i}$ y un punto de color rojo r'' a la izquierda de la arista $\overline{rb_{i+1}}$. Ahora, si el triángulo Δ contiene un punto rojo entonces $r' = r''$, pero esto no es posible porque si fuera así, se formarían tres únicos 4-hoyos, y esto implicaría que al menos una de las dos aristas $\overline{rb_i}$ y $\overline{rb_{i+1}}$ deben ser de color verde; Figura 3.6. Finalmente, el triángulo Δ no puede contener sólo dos puntos rojos, porque para eliminar a los tres 4-hoyos, formados con un punto rojo se necesitan al menos dos puntos rojos más, uno arriba y otro abajo de la arista $\overline{b_i r'}$.

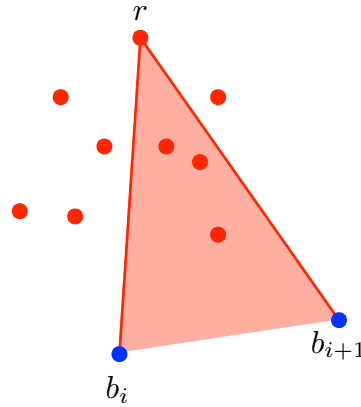


Figura 3.5: El triángulo Δ acotado por $\overline{rb_i}$, $\overline{b_i b_{i+1}}$ y $\overline{rb_{i+1}}$ contiene al menos tres puntos dentro.

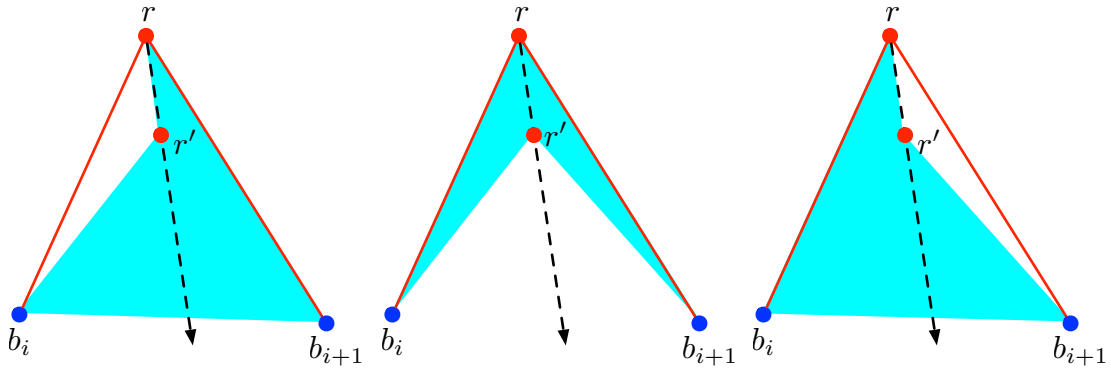


Figura 3.6: 4-hoyos formados con los puntos r, r', b y b'' .

□

Observación 3.2.2. *El Lema 3.2.2 implica que el conjunto $\{\overline{rb_i}; i = 1, \dots, n\}$ contiene a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ aristas rojas consecutivas.*

Lema 3.2.3. *Sean $\overline{rb_i}$ y $\overline{rb_{i+1}}$ dos aristas consecutivas tal que una es de color verde y la otra es de color rojo. El triángulo Δ_1 determinado por las aristas $\overline{rb_i}$, $\overline{b_i b_{i+1}}$ y $\overline{rb_{i+1}}$ debe de contener al menos tres puntos rojos de S .*

Demostración. Supongamos que el lema no es cierto entonces el triángulo Δ_1 contiene 0, 1 o 2 puntos de color rojo. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\overline{rb_i}$ es de color verde y $\overline{rb_{i+1}}$ es de color rojo. El triángulo Δ_1 no puede estar vacío ya que si fuera así la arista $\overline{rb_{i+1}}$ no sería de color rojo porque su primer punto al rotarla en contra de las manecillas del reloj sería de color azul, contradiciendo la Observación 3.2.1. El triángulo Δ_1 no puede tener un solo punto rojo r' porque si fuera así la arista $\overline{rb_{i+1}}$ y los puntos r' y b_i formarían a lo más dos 4-hoyos α y β , entonces la arista $\overline{rb_i}$ tendría que ser de color verde (Figura 3.7).

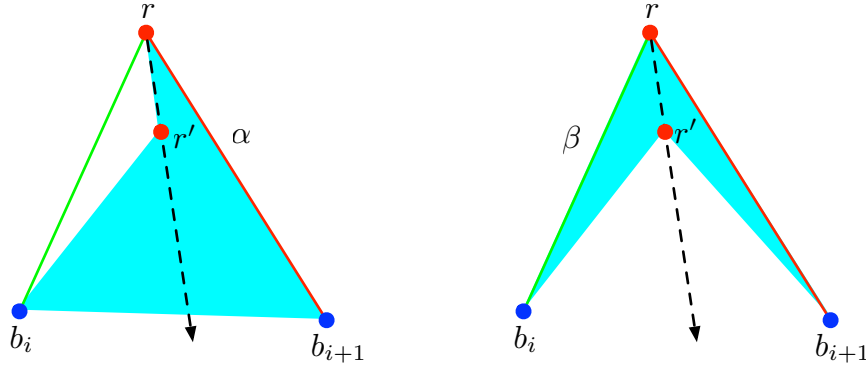


Figura 3.7: 4-hoyos posibles que contienen a la arista $\overline{rb_{i+1}}$

Si tuviéramos sólo otro punto rojo r'' , este punto tendría que estar dentro de α y β , para no contradecir la coloración de la arista $\overline{rb_{i+1}}$, entonces el punto rojo r'' debe estar dentro del triángulo determinado por los puntos $\{r, r', b_{i+1}\}$. Observemos que si r'' está arriba de la línea $\ell(b_i, r')$ determinada por los puntos b_i y r' entonces podemos formar el 4-hoyo balanceado con los puntos $\{r, b_i, r'', b_{i+1}\}$ y si está abajo de la línea $\ell(b_i, r')$, los puntos $\{r, r'', b_i, b_{i+1}\}$ forman un 4-hoyo balanceado, y en ambos casos la arista $\overline{rb_{i+1}}$ es parte de los 4-hoyos balanceados, entonces no puede ser de color rojo. por lo tanto es necesario tener al menos otros dos puntos rojos más dentro de Δ_1 . Lo anterior hace verdadero nuestro lema. \square

Supongamos que tenemos un bloque \mathcal{B} de k aristas rojas consecutivas $\overline{rb_i}, \dots, \overline{rb_{i+k-1}}$ incidentes en r , como no existen dos aristas consecutivas tal que una sea roja y otra azul entonces, las aristas que delimitan el bloque \mathcal{B} de aristas rojas deben ser de color verde, es decir $\overline{rb_{i-1}}$ y $\overline{rb_{i+k}}$ son de color verde. Observemos que usando el Lema 3.2.2 podemos asociar a \mathcal{B} al menos $3(k-1)$ puntos rojos que pertenecen al polígono delimitado por las aristas $\overline{rb_{i-1}}, \overline{b_j b_{j+1}}$ con $j = i-1, i, i+1, \dots, i+k-1$ y $\overline{b_{i+k} r}$ y por el Lema 3.2.3 asociamos al menos 6 puntos rojos más de los triángulos determinados por los puntos $\{r, b_{i-1}, b_i\}$ y $\{r, b_{i+k-1}, b_{i+k}\}$. Por lo tanto, podemos asociar a \mathcal{B} al menos $3(k+1)$ puntos rojos; Figura 3.8.

Si construimos los posibles s bloques de aristas rojas de S incidentes en r , observamos que por la construcción de cada bloque, los puntos rojos asociados a cada bloque son conjuntos ajenos. Supongamos que las aristas rojas incidentes a un punto r son agrupadas en s bloques de aristas rojas consecutivas. Como tenemos s bloques necesitamos s aristas verdes para delimitar cada bloque. Observemos que por el Lema 3.2.3, cada bloque necesita al menos 6 puntos rojos, ya que un bloque tiene al menos una arista roja. Entonces tenemos a lo más $n - 6s - 1$ puntos rojos para separar aristas rojas. Observemos que si tenemos pocos bloques el número de aristas rojas en el mejor de los casos se maximiza, porque para agregar una arista roja a un bloque que ya existe se requieren al menos tres puntos rojos, dado lo anterior podemos concluir la siguiente observación.

Observación 3.2.3. Cuando el número de bloques en S se minimiza el número de aristas rojas incidentes en r se maximiza.

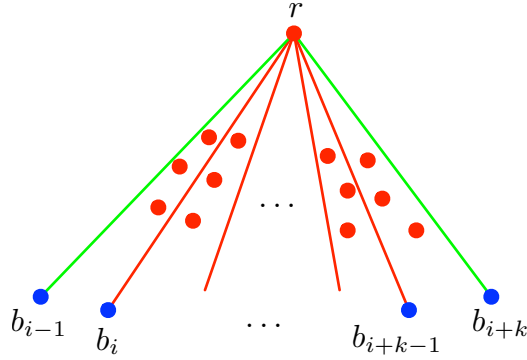


Figura 3.8: Bloque \mathcal{B} .

Para contar el máximo número de aristas, incidentes en un punto r , dada la observación anterior es cuando $s = 1$. De esto obtenemos lo siguiente:

Lema 3.2.4. *El número de aristas rojas incidentes a r , es a lo más $\frac{n-4}{3}$*

Demostración. Dada la Observación 3.2.3 concluimos que r alcanza el máximo número de aristas incidentes cuando el número de bloques es uno, entonces tenemos $n - 7$ puntos rojos para separar a las aristas rojas.

Por el Lema 3.2.2, por cada arista roja en el bloque, necesitamos al menos 3 puntos rojos, entonces el máximo número de arista incidentes a r es $\frac{n-7}{3}$, además el bloque en el peor de los casos tiene una sola arista roja. Dado lo anterior obtenemos que el máximo número de aristas rojas es:

$$\left\lfloor \frac{n-7}{3} \right\rfloor + 1 \leq \frac{n-7}{3} + 1 = \frac{n-4}{3}$$

Dado lo anterior, nuestro lema queda demostrado. \square

Usando el lema anterior obtenemos de manera directa el siguiente resultado:

Teorema 3.2.1. *Existen a lo más $\frac{n^2}{3} - \frac{4n}{3}$ aristas de color rojo.*

Demostración. Usando el Lema 3.2.4, sabemos que el máximo número de aristas rojas incidentes en un punto cualquiera r es a lo más $\frac{n-4}{3}$, por lo tanto para el conjunto de puntos rojos a lo más tenemos

$$n \left(\frac{n-4}{3} \right) = \frac{n^2}{3} - \frac{4n}{3}$$

aristas de color rojo. \square

Un argumento simétrico muestra que el número de aristas azules es a lo más $\frac{n^2}{3} - \frac{4n}{3}$.

Dado que hay exactamente n^2 aristas que unen a los puntos rojos con los puntos azules, podemos concluir que aproximadamente al menos se tiene una tercera parte de aristas son de color verde, de hecho se tienen al menos $n^2 - 2 \left(\frac{n^2}{3} - \frac{4n}{3} \right)$ aristas de color verde.

También observemos que un 4-hoyo balanceado es determinado por 4 aristas verdes, con esto obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.2. *El número de 4-hoyos balanceados de S es al menos $\lfloor \frac{n^2+8n}{12} \rfloor$.*

Demostración. Como en total se tienen a lo más $n^2 - 2 \left(\frac{n^2}{3} - \frac{4n}{3} \right)$ de aristas de color verde y 4 aristas de color verde son necesarias para formar un 4-hoyo balanceado, entonces el número total de 4-hoyos balanceados es:

$$\frac{n^2 - 2 \left(\frac{n^2}{3} - \frac{4n}{3} \right)}{4} = \frac{n^2 - \frac{2n^2}{3} + \frac{8n}{3}}{4} = \frac{\frac{n^2}{3} + \frac{8n}{3}}{4} = \frac{n^2 + 8n}{12}$$

□

Notemos que si R y B son conjuntos linealmente separables la cota puede ser mejorada, de la siguiente manera: Sin pérdida de generalidad supongamos que los puntos están divididos por una línea horizontal ℓ tal que los puntos rojos y azules están sobre y abajo de ℓ respectivamente. Etiqueta a los puntos rojos con r_1, r_2, \dots, r_n de abajo hacia arriba con respecto a su coordenada y . Recordemos que las condiciones mínimas para que exista un bloque \mathcal{B} , es necesario tener al menos una arista roja $\overline{r_i b_j}$, y dos aristas $r_i \overline{b_{j-1}}$ y $\overline{r_i b_{j+1}}$ de color verde que delimitan a \mathcal{B} , entonces usando el Lema 3.2.3 concluimos que en el mejor de los casos hasta el punto r_i con $i \geq 7$, se formara un bloque \mathcal{B} .

Lo anterior, nos lleva al siguiente resultado:

Lema 3.2.5. *El número de aristas rojas incidentes a r_i , es a lo más $\lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor - 1$.*

Dado el lema anterior podemos concluir el siguiente resultado

Teorema 3.2.3. *Si R y B son dos conjuntos separables entonces existen a lo más $\frac{n^2}{6} - \frac{7n}{6}$ aristas de color rojo.*

Demostración. Como cada punto r_i contiene a lo más $\lfloor \frac{i-1}{3} \rfloor - 1$ aristas rojas incidentes, entonces el número de aristas rojas en S es a lo más:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\frac{i-1}{3} \right] - 1 &\leq \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n i - 1 \right) - n = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) - n \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{(n-1)n}{2} \right) - n = \frac{n^2}{6} - \frac{n}{6} - n = \frac{n^2}{6} - \frac{7n}{6} \end{aligned}$$

□

De manera análoga podemos concluir que el número de aristas azules es a lo más $\frac{n^2}{6} - \frac{7n}{6}$. Dado que el número de aristas con un punto rojo y un punto azul es n^2 , concluimos que el máximo número de aristas de color verde es $n^2 - 2 \left(\frac{n^2}{6} - \frac{7n}{6} \right)$.

Dado lo anterior y sabiendo que son necesarias 4 aristas verdes para formar un 4-hoyo balanceado, concluimos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.4. *El número de 4-hoyos balanceados de $S = R \cup B$, cuando R y B son linealmente separables es al menos $\lfloor \frac{n^2}{6} + \frac{7n}{12} \rfloor$.*

Demostración.

$$\frac{n^2 - 2 \left(\frac{n^2}{6} - \frac{7n}{6} \right)}{4} = \frac{n^2 - \frac{2n^2}{6} + \frac{14n}{6}}{4} = \frac{\frac{2n^2}{3} + \frac{7n}{3}}{4} = \frac{2n^2 + 7n}{12} = \frac{n^2}{6} + \frac{7n}{12}$$

□

Observamos que nuestra cota es asintóticamente justa, en la Figura 3.9 mostramos un ejemplo con solo un número cuadrático de 4-hoyos balanceados.

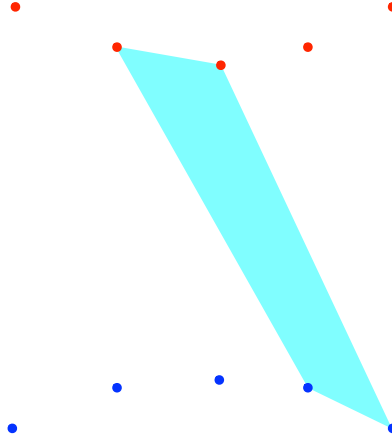


Figura 3.9: Cualquier 4-hoyo balanceado usa dos puntos consecutivos rojos y dos consecutivos azules.

Usando todos los resultados anteriores concluimos de manera directa el siguiente resultado:

Teorema 3.2.5. *Sea $S = R \cup B$ un conjunto de $2n$ puntos, n puntos de color rojo y n puntos de color azul. El conjunto S siempre tiene al menos un número cuadrático de 4-hoyos balanceados.*

3.3. 4-hoyos convexos balanceados

Para cualesquiera dos puntos p y q en el plano, \overline{pq} y $\ell(p, q)$ denotan, respectivamente, el segmento que une a los puntos p y q , y la línea que es determinada por estos. Si p y q son puntos rojos, \overline{pq} y $\ell(p, q)$ los llamaremos arista roja y línea roja respectivamente. Si p y q son puntos azules, los llamaremos arista azul y línea azul respectivamente. Denotaremos con $\mathcal{CH}(X)$ el cierre convexo del conjunto X .

Claramente no todos los conjuntos de puntos bi-coloreados contienen 4-hoyos convexos balanceados; Figura 3.10. El número de puntos azules dentro del triángulo y el hexágono en

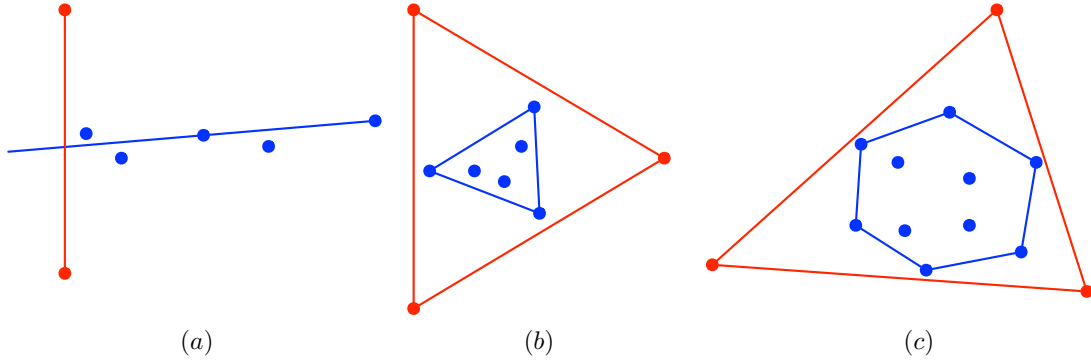


Figura 3.10: Conjuntos de puntos sin 4-hoyos convexos balanceados.

la Figura 3.10(b) y (c) pueden ser arbitrariamente grandes. A continuación comenzaremos con la caracterización de conjuntos de puntos que contienen 4-hoyos convexos balanceados. Asumiremos que $|R|, |B| \geq 2$.

3.4. Caracterización de conjuntos de puntos sin 4-hoyos convexos balanceados

Lema 3.4.1. *Si S contiene una arista roja y una arista azul que se intersectan, entonces S contiene un 4-hoyo convexo balanceado.*

Demostración. Suponemos que S contiene una arista roja y una arista azul que se intersectan. Elegimos a la arista roja \overline{ab} y a la arista azul \overline{cd} tal que el cuadrilátero convexo \mathcal{Q} con vértices $\{a, b, c, d\}$ es de área mínima. Si \mathcal{Q} no es un 4-hoyo convexo balanceado, entonces \mathcal{Q} contiene un punto en su interior, supongamos sin pérdida de generalidad que existe un punto rojo $r \in S$ en el interior de \mathcal{Q} . Entonces \overline{ar} o \overline{br} intersectan a \overline{dc} , y $\{a, r, c, d\}$ es el conjunto de vértices de un cuadrilátero convexo balanceado de menor área que \mathcal{Q} , lo cual es una contradicción; Figura 3.11. \square

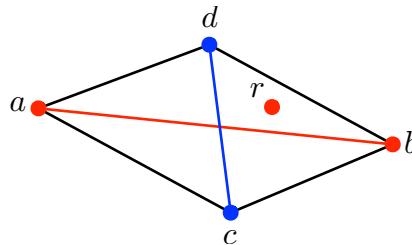


Figura 3.11: Segmentos que se intersectan. El segmento \overline{ab} puede ser reemplazado por el segmento \overline{ar} .

Para hacer el análisis de la caracterización de conjuntos de puntos que contienen 4-hoyos convexos balanceados, presentaremos dicho análisis en dos casos, cuando R y B son separables y cuando no lo son. Analizaremos primero el caso cuando R y B no son linealmente separables.

3.4.1. R y B no son linealmente separables

Ahora nuestro objetivo es probar el siguiente resultado:

Teorema 3.4.1. *Sea $S = R \cup B$, tal que R y B son dos conjuntos de puntos no linealmente separables. Entonces S tiene un 4-hoyo convexo balanceado si y sólo si cualquiera de las tres condiciones se cumple:*

1. $\mathcal{CH}(B) \subset \mathcal{CH}(R)$, $|R| \geq 4$, $|B| > 2$,
2. $\mathcal{CH}(R) \subset \mathcal{CH}(B)$, $|B| \geq 4$, $|R| > 2$,
3. $\mathcal{CH}(B)$ y $\mathcal{CH}(R)$ se traslapan.

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{CH}(B) \subset \mathcal{CH}(R)$, y R y B tienen al menos 4 y 2 elementos respectivamente. Consideramos una triangulación T de R . Por el Lema 3.4.1, concluimos que todos los puntos azules están dentro de un triángulo t de T , ya que si no fuera así existiría una arista roja y una arista azul en S que se intersectan. Si B tiene exactamente dos elementos, entonces es fácil ver que dos vértices de t , junto con los dos elementos de B , forman un 4-hoyo convexo balanceado. Por lo tanto B tiene al menos tres elementos.

Ya que R tiene al menos cuatro elementos, T tiene al menos dos triángulos, dichos triángulos los llamaremos t y t' y denotamos como \overline{ab} a la arista que comparten t y t' . Sea $\mathcal{Q} = t \cup t'$, y supongamos primero que \mathcal{Q} es convexo; Figura 3.12(a). Si la línea determinada por dos elementos consecutivos u y v del $\mathcal{CH}(B)$ intersectan a la arista \overline{ab} , entonces dos de los vértices de t' con u y v forman un 4-hoyo convexo balanceado; Figura 3.12(a).

Ahora supongamos que \mathcal{Q} no es un cuadrilátero convexo, y sea c el tercer vértice de t' ; Figura 3.12(b). Dado que B tiene al menos tres vértices, hay al menos dos vértices azules en uno de los semiplanos determinados por la línea $\ell(b, c)$. Observemos que siempre podemos elegir a dos de estos vértices, denotados por u y v , tal que el cuadrilátero \mathcal{Q}' con conjunto de vértices $\{u, v, b, c\}$ es convexo y no contiene puntos azules en su interior; Figura 3.12(b). Sin embargo \mathcal{Q}' podría contener puntos rojos en su interior. En tal caso, elegimos al punto c' dentro de \mathcal{Q}' más cercano a la arista \overline{bd} , donde d es el tercer punto del triángulo t , entonces con los vértices u, v, b y c' formamos un 4-hoyo convexo balanceado; Figura 3.12(c). Dado lo anterior el caso 1 queda probado. Vale la pena mencionar que si $\mathcal{CH}(B) \subset \mathcal{CH}(R)$, pero R tiene solo tres elementos, nuestro resultado no es verdadero. Los contraejemplos de esto, son los conjuntos de la Figura 3.10(b) y (c). El caso 2 es similar al 1.

Finalmente para el caso 3, observamos que el cierre convexo de B y R se traslapan entonces existe una arista azul que se intersecta con una arista azul. Por el Lema 3.4.1, concluimos que S contiene un 4-hoyo convexo balanceado, Figura 3.13. \square

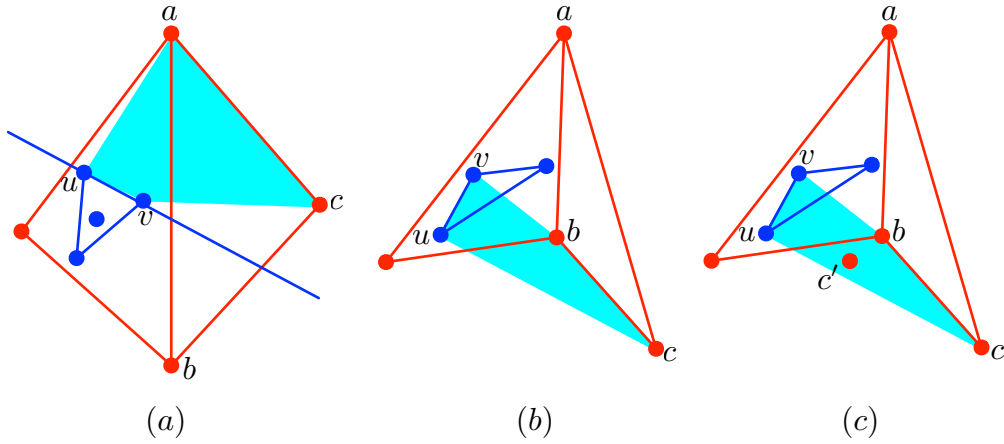


Figura 3.12: Dos cuadriláteros posibles que contienen los puntos azules: convexo y no convexo.

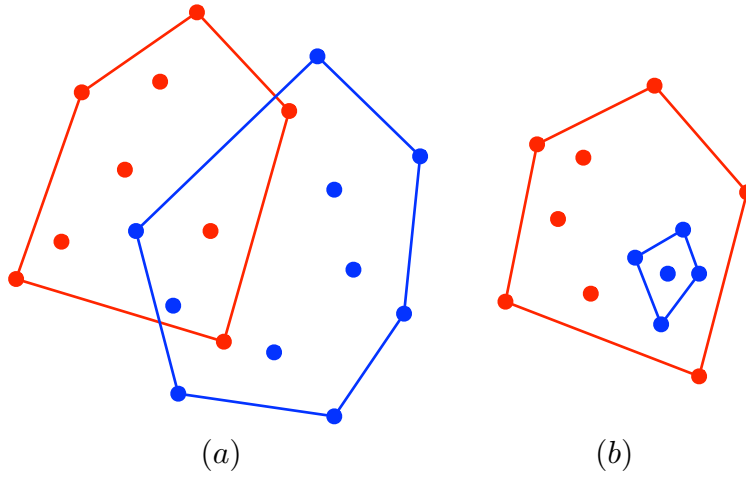


Figura 3.13: Los cierres convexos se traslapan o se contienen.

3.4.2. R y B son linealmente separables

Sean R y B dos conjuntos bicromáticos linealmente separables. Supongamos que $R \cup B$ no contienen 4-hoyos convexos balanceados. A continuación daremos la caracterización de $R \cup B$.

Dados tres puntos no colineales $a, b, c \in R \cup B$. Denotaremos por $w(a, b, c)$ a la región convexa abierta acotada por los rayos \vec{ba} y \vec{bc} . Tales regiones $w(a, b, c)$ son llamadas cuñas y el punto b es llamado ápice de $w(a, b, c)$; Figura 3.14.

Lema 3.4.2 (Lema 2-1). *Sean $a, b, c \in R \cup B$, tal que forman un triángulo vacío. Si sólo a, b pertenecen a un mismo conjunto R ó B , entonces la región determinada por*

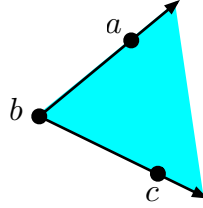


Figura 3.14: Cuña $w(a, b, c)$ con ápice en el punto b .

$w(b, a, c) \cup w(a, b, c)$ no contienen puntos del mismo conjunto que c .

Demostración. Supongamos que si existe un punto c' en $w(b, a, c) \cup w(a, b, c)$, tomemos el rayo \overrightarrow{bc} y lo giramos hasta el punto c' , con esto formaríamos un 4-hoyo convexo balanceado; Figura 3.15. \square

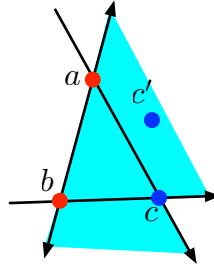


Figura 3.15: La región $w(b, a, c) \cup w(a, b, c)$ no contiene puntos del mismo conjunto que c .

Lema 3.4.3. $R \cup B$ no contiene un punto $r \in R$ y un punto $b \in B$ tal que, el segmento que une a r y b denotado por \overline{rb} , intersecta dos aristas $r_i r_{i+1}$ y $b_j b_{j+1}$ que pertenecen al $CH(R)$ y al $CH(B)$ respectivamente; Figura 3.16.

Demostración. Observemos primero que el cierre convexo formado por los puntos r_i, r_{i+1}, b_j y b_{j+1} es un triángulo, porque de no ser así formarían un 4-hoyo convexo balanceado. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el cierre convexo de los puntos r_i, r_{i+1}, b_j y b_{j+1} es el triángulo formado por los puntos r_{i+1}, b_j y b_{j+1} ; Figura 3.16. Dado que $r_i r_{i+1}$ y $b_j b_{j+1}$ son aristas del $CH(R)$ y $CH(B)$ respectivamente, los triángulos formados por los puntos (r_{i+1}, r_i, b_{j+1}) y (r_i, b_j, b_{j+1}) son vacíos. Si rotamos al rayo que sale del punto r_i y pasa por b_{j+1} a favor de la manecillas del reloj, hasta que le pegue a un punto b' dentro de la cuña determinada por los puntos b_{j+1}, r_i y b con ápice en r_i , o al punto b mismo, si es que el punto b' no existe, formamos un 4-hoyo convexo balanceado con los puntos r_i, r_{i+1}, b_{j+1} y b' ; Figura 3.17. \square

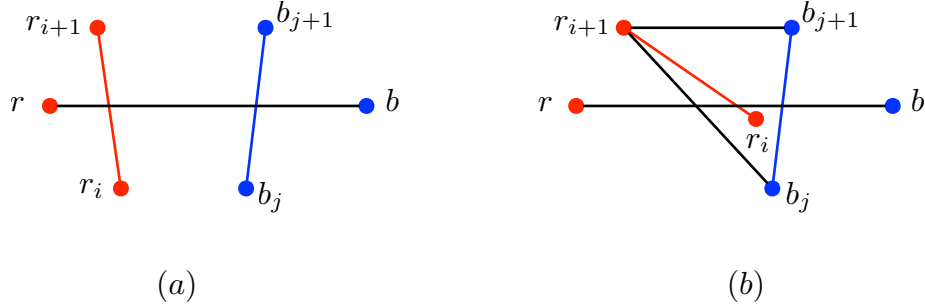


Figura 3.16: $R \cup B$ no tiene segmentos bi-coloreados que intersectan aristas del $CH(R)$ y del $CH(B)$ a la vez.

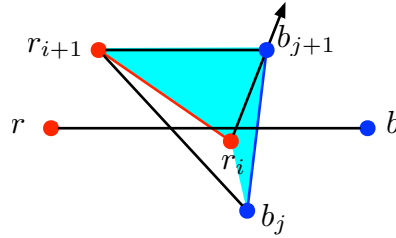


Figura 3.17: Siempre existe un 4-hoyo convexo balanceado.

Lema 3.4.4. *El interior del $CH(R)$ o el $CH(B)$ es vacío, esto es al menos R o B están en posición convexa.*

Demostración. Supongamos que no es cierto, esto implica que existen dos puntos r y b , con $r \in \text{Int}(CH(R))$ y $b \in \text{Int}(CH(B))$. Observamos que el segmento que une a r y b intersecta una arista del $CH(R)$ y una arista del $CH(B)$, usando el lema 3.4.3 concluimos que $R \cup B$ contiene 4-hoyos convexos balanceados. Por lo tanto, el lema es cierto. \square

Lema 3.4.5. *Sean $r_i r_{i+1}$ y $b_j b_{j+1}$ una arista roja y una arista azul del $CH(R)$ y $CH(B)$ respectivamente. Si existe un punto $r \in r_i r_{i+1}$ y un punto $b \in b_j b_{j+1}$ tal que, el interior relativo del segmento rb no intersecte una arista del $CH(R) \cup CH(B)$, entonces el cierre convexo de r_i, r_{i+1}, b_j y b_{j+1} es un triángulo.*

Demostración. Si no fuera así $R \cup B$ tendría un 4-hoyo convexo balanceado formado por los puntos r_i, r_{i+1}, b_j y b_{j+1} . \square

Lema 3.4.6. *Un fuelle no tiene 4-hoyos convexos balanceados.*

Demostración. La prueba se sigue usando los lemas 3.4.4 y 3.4.5. \square

No sólo los fuelles no contienen 4-hoyos convexos balanceados.

Demostración. Como R y B son conjuntos linealmente separables, el cierre convexo de $R \cup B$ contiene dos aristas bi-coloreadas. Sin pérdida de generalidad, supongamos que una de estas aristas, denotada por e_1 y formada por los puntos r_1 y b_1 es horizontal, y todos los puntos de $R \cup B$ están arriba de e_1 . Etiquetamos a los elementos de R como $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{m-1}, r_m$, en contra de las manecillas del reloj, sobre el $CH(R)$, empezando por r_1 y etiquetamos a los elementos de B por $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$ a favor de las manecillas del reloj y empezando por b_1 ; Figura 3.18.

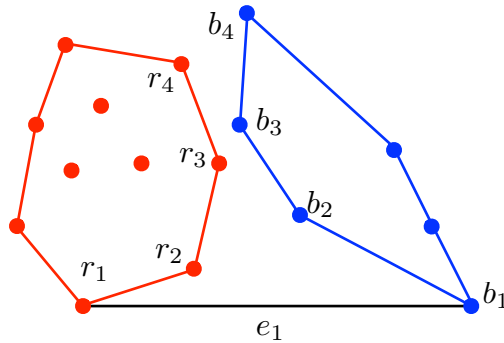


Figura 3.18: Etiquetado de los puntos con respecto a su cierre convexo.

Tomemos los primeros dos puntos del $CH(R)$ y del $CH(B)$, usando el lema 3.4.5, concluimos que el cierre convexo de r_1, r_2, b_1 y b_2 forman un triángulo, entonces tenemos que $\ell(r_1, r_2)$ intersecta al segmento $\overline{b_1 b_2}$ o $\ell(b_1, b_2)$ intersecta al segmento $\overline{r_1 r_2}$. Supongamos que $\ell(r_1, r_2)$ intersecta al segmento $\overline{b_1 b_2}$. Sea r_i el último punto en el $CH(R)$ tal que, la línea $\ell(r_1, r_i)$ intersecta al segmento $\overline{b_1 b_2}$, cabe aclarar que se puede dar el caso que $r_i = r_2$; Figura 3.19(a).

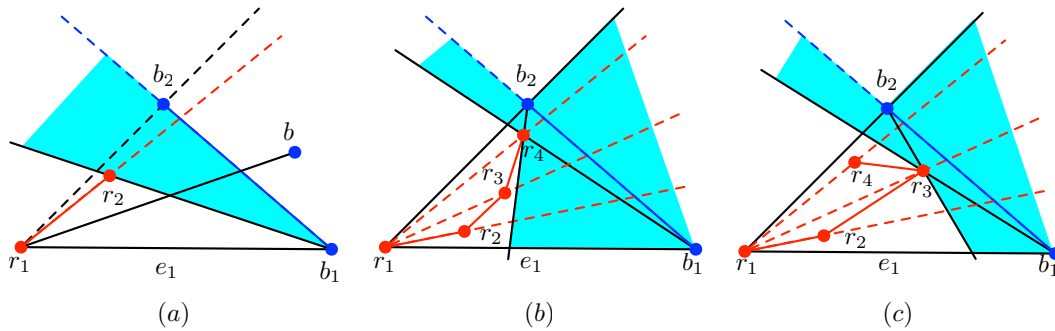


Figura 3.19: El segmento $\overline{b_1 b_2}$ puede ser intersectado por varias líneas rojas. El punto $r_i = r_4$ y el punto $r_j = r_4$ en (b) y $r_j = r_3$ en (c).

Dado que la línea $\ell(r_1, r_2)$ intersecta a la arista $b_1 b_2$, el triángulo formado por los puntos r_1, r_2 y b_1 es vacío, usando el lema 3.4.2, concluimos que no es posible tener puntos azules abajo de la línea $\ell(r_1, r_2)$. Observamos que no es posible que existan puntos azules dentro

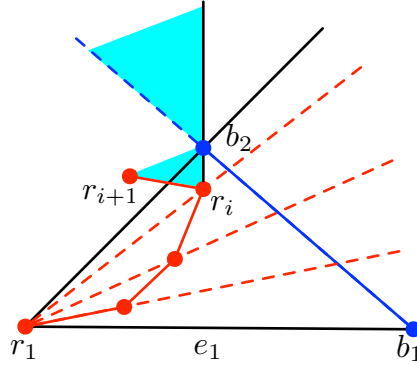


Figura 3.21: La línea $\ell(b_1, b_2)$ es la línea que separa a R y B .

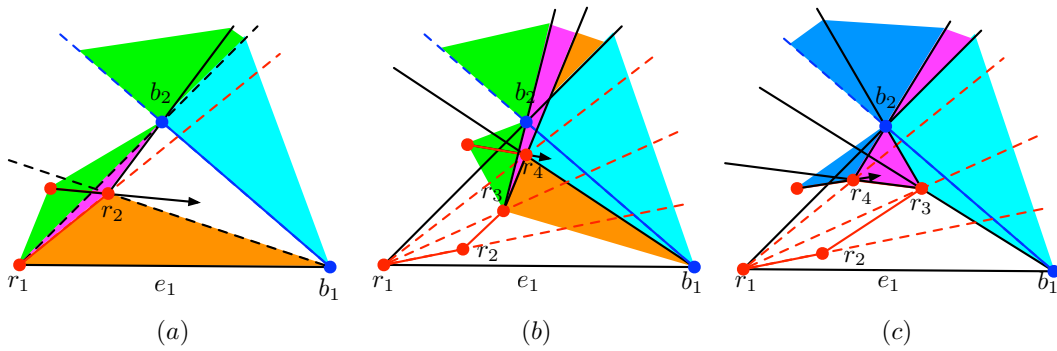


Figura 3.22: No es posible agregar más puntos azules. En (a) el punto $r = r_1$, en (b) y (c) el punto $r = r_3$.

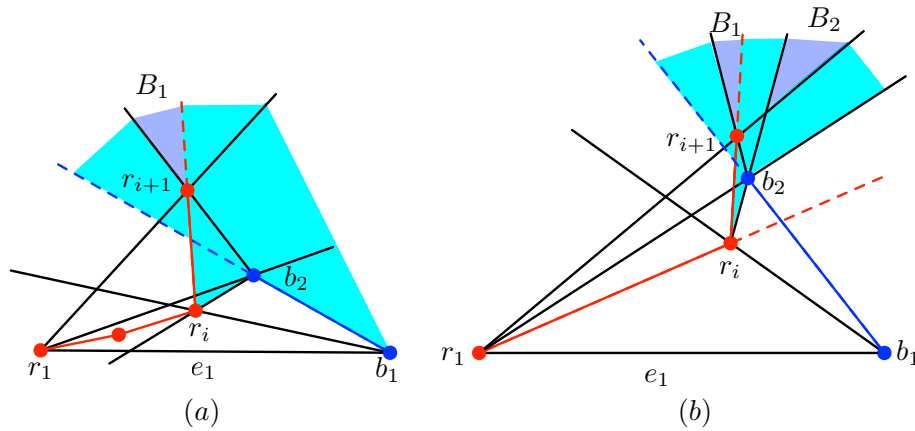


Figura 3.23: Siempre existen regiones que pueden contener sólo puntos azules.

4

Círculo y m-ágonos convexos sobre puntos coloreados

En este capítulo estudiaremos tres problemas con respecto al área de *facility location planning*. La pregunta más importante en la cual se desarrolla cualquier trabajo de esta área es: ¿Dónde colocar una residencia de manera que tenga todos los servicios disponibles?. El problema de la ubicación de servicios esta estrechamente ligado a lo siguiente:

- La necesidad de producir cerca de los clientes los servicios debido a la competencia basada en el tiempo, los acuerdos comerciales y los costos de envío.
- La necesidad de ubicar los servicios a la mano para aprovechar de la mejor manera el bajo salario con respecto al alto precio de los productos.

Hoy en día, el problema de la ubicación de una residencia la enfrentan grandes empresas dedicadas a la construcción de residencias y y la solución es fundamental para el éxito final de la empresa misma. Decidir dónde ubicar una residencia que tenga todos los servicios a la mano, depende de una variedad de criterios como son: el precio del terreno donde se construira, los costos de energía, etc. Sin embargo, lo más importante es reducir el costo total. En este capítulo se estudian aspectos de localización de residencias que tengan a la mano todos los servicios y se reduzca el costo del área del terreno, teniendo en cuenta la forma del terreno en el que queremos construir, dicha forma son el círculo, el triángulo y el polígono convexo

Los resultados de este capítulo fueron presentados en el Seminario de Computación en la Escuela de Ingenieros de la Universidad de Sevilla, España durante el 2008. Además fueron obtenidos trabajando en conjunto con los siguientes coautores: Crevel Bautista, José Miguel Díaz, Carlos Seara, Jorge Urrutia e Inmaculada Ventura.

4.1. Introducción

Durante los últimos años, uno de los temas más estudiados en el área de geometría computacional, ha sido la búsqueda de objetos k -cromáticos de área y/o perímetro mínimo, comúnmente llamados objetos *color-spanning*. Por ejemplo, supongamos que, somos asesores de casas GEO y nuestro deber es buscar vecindarios para la construcción de unidades habitacionales, que cumplan con las restricciones de que tengan cerca al menos uno de los siguientes servicios: escuelas, supermercados, bancos, cines, etc. y que sean de área mínima, con el fin de que las casas se vendan rápidamente.

En general este tipo de preguntas se originan en el área de *facility location planning*. Además hacemos notar que este tipo de problemas pueden ser planteados y resueltos haciendo uso de la geometría computacional. Por ejemplo, supongamos que tenemos k comodidades, las cuales pueden ser modeladas en el plano como puntos de colores, es decir las escuelas pueden ser puntos rojos, los supermercados puntos azules, los bancos puntos verdes, etcétera. Entonces buscar una área vecinal mínima que contenga al menos una comodidad, no es más que buscar un objeto geométrico de área mínima que contenga al menos un punto de cada color. Un problema bien conocido dentro de la literatura es el hallar el círculo k -cromático de área mínima, cuyo enunciado es:

Dado un conjunto S de n puntos en el plano en posición general k -coloreado, encontrar el círculo de área mínima tal que contenga al menos un punto de cada color; Figura 4.1.

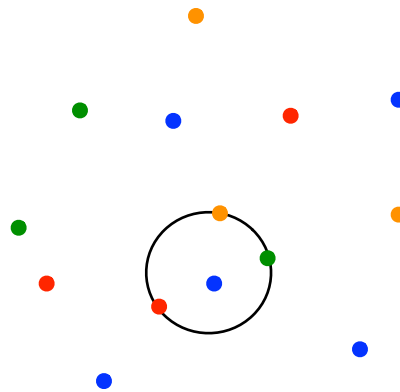


Figura 4.1: Círculo k -cromático de área mínima.

Este problema puede ser resuelto usando la *envolvente superior* del Diagrama de Voronoi de superficies, presentado en [33] en tiempo $O(kn \log kn)$.

Otro problema muy conocido dentro de la literatura es:

Dado un conjunto de n puntos en el plano k -coloreado. Encontrar el rectángulo isotético k -cromático de área mínima; Figura 4.2.

Este problema es estudiado en [38] y lo obtienen en tiempo $O(n^2 \log^2 n)$. Una generalización de este problema es estudiada en [11], ya que consideran el rectángulo k -cromático

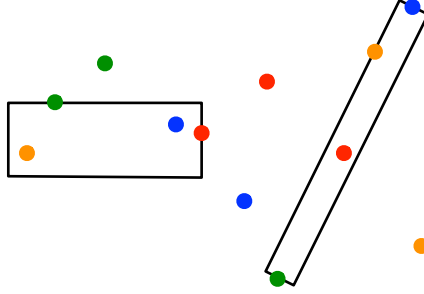


Figura 4.2: Rectángulos k -cromáticos de área mínima.

en una orientación arbitraria.

Por otra parte, una región estrechamente relacionada con el reconocimiento de patrones (*pattern recognition*) y sumamente utilizada, es el polígono convexo [17]. Al ver la utilidad de este tipo de regiones, decidimos hacerlas parte de mi trabajo de tesis sobre conjuntos de puntos coloreados. En particular las regiones con las que he trabajado son: el círculo, el triángulo y el polígono convexo, considerando algunas restricciones extras para complementar lo ya mostrado dentro del área.

4.2. Definición de problemas

Sean S un conjunto de n puntos en el plano en posición general y K un conjunto de k colores con $1 < k \leq n$. Decimos que S es un conjunto k -coloreado, si S esta particionado en k subconjuntos no vacíos y ajenos: s_1, s_2, \dots, s_k , llamados clases cromáticas de S . Si $Q \subseteq S$, se dice que Q es k -cromático si cada color de K aparece a lo más una vez en Q . Además si Q es k -cromático y respeta un orden de aparición de colores dado, se le considera un conjunto k -cromático ordenado.

Las definiciones formales de los problemas que son parte de este capítulo son:

Problema 4.2.1 (Círculo k -cromático con radio fijo.). *Dados un conjunto S de n puntos en el plano k -coloreado y un valor $r \in \mathbb{R}$. Encontrar el círculo de radio r tal que contenga exactamente un punto de cada color.*

Problema 4.2.2 (Triángulo k -cromático con vértices fijos.). *Dado un conjunto S de n puntos en el plano k -coloreado. Encontrar el triángulo de área mínima tal que contenga un punto de cada color y sus vértices sean puntos de S .*

Problema 4.2.3 (Polígono k -cromático ordenado.). *Dado un conjunto S de n puntos en el plano k -coloreado y en posición convexa. Encontrar el polígono de área mínima que contenga un punto de cada color en un orden de visita prefijado.*

4.3. Definiciones y trabajo previo relacionado

Los resultados que obtuvimos hacen uso de diferentes conceptos y técnicas del área de la Geometría Computacional como son: barrido de línea en el plano y dualidad. Además hacer uso de una estructura de datos geométrica para manipular de manera óptima la información sobre el conjunto de puntos. A continuación, se dará una breve introducción de cada concepto.

4.3.1. Algoritmo de barrido de línea

El algoritmo de barrido de línea, es una técnica fundamental en Geometría Computacional, las aplicaciones geométricas en donde casi siempre aparece, tienen que ver con la intersección de objetos. Por ejemplo, localizar las intersecciones de n segmentos de recta, imprimir circuitos integrados con cientos de componentes o desplegar una escena gráfica que involucren cientos de miles de vectores con los cuales representan un diseño arquitectónico. La idea principal de este algoritmo es imaginar que tenemos una línea vertical u horizontal (con frecuencia se usa la línea vertical) que se mueve de manera continua sobre el plano, deteniéndose en un conjunto discreto de puntos en los que ocurre un cambio. Además en todo momento del barrido se debe de mantener lo siguiente:

1. La solución parcial. La solución construida que se tiene a la izquierda o arriba de la línea de barrido, dependiendo si se barre con una línea vertical u horizontal respectivamente.
2. Estado actual. El estado actual de los objetos sobre la línea de barrido, es decir, saber que objetos están siendo intersectados por la línea de barrido y que orden tienen.

Por ejemplo, para obtener el número de intersecciones de un conjunto de n segmentos, es común aplicar la técnica de barrido para resolverlo. Suponiendo que usaremos una línea vertical para barrer el plano, el algoritmo de barrido para contar el número de intersecciones de un conjunto de n segmentos se aplica de la siguiente manera:

El barrido del plano se hará de izquierda a derecha de manera continua deteniéndose en un conjunto discreto de puntos en los que ocurre un cambio, dicho cambio ocurre cuando comienzas a barrer un segmento, cuando terminas de barrer un segmento o cuando dos segmentos intercambian el orden sobre la línea de barrido; Figura 4.3. Una vez discretizado los puntos de cambio, la eficiencia del algoritmo dependerá de la manera en que se almacenen y actualicen los cambios, ya que cada punto de cambio genera un nuevo proceso, por lo tanto para almacenar y actualizar los cambios, se usa una estructura comúnmente llamada línea de barrido, que no es mas que una lista ordenada de los segmentos que están siendo intersectados por la línea de barrido. Para tener una visión completa de la solución de este problema ver [12].

4.3.2. Dualidad

Un punto en el plano tiene dos parámetros: su coordenada x y su coordenada y . Una recta no vertical en el plano tiene dos parámetros: su pendiente y su intersección con el

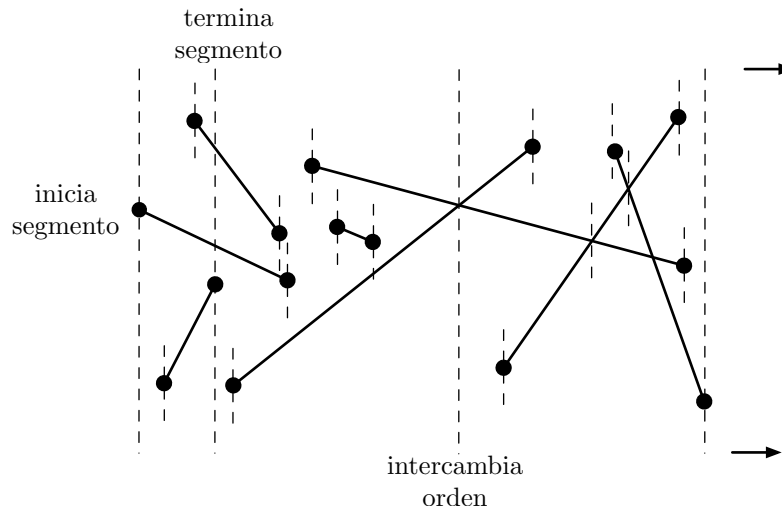


Figura 4.3: Algoritmo de barrido de línea.

eje de las y 's. Dado lo anterior, podemos mapear un conjunto de puntos a un conjunto de rectas y viceversa, a este tipo de mapeo se le conoce como *transformación dual* de un conjunto de puntos. La transformación dual entre puntos y rectas es la siguiente: sea $p = (p_x, p_y)$ un punto en el plano, la transformación dual de p , denotado por p^* , es la recta definida como $p^* = (p_x x - p_y = y)$. El dual de una recta $\ell = mx + b$ es un punto p tal que $p^* = \ell$, es decir $\ell^* = (m, -b)$; Figura 4.4.

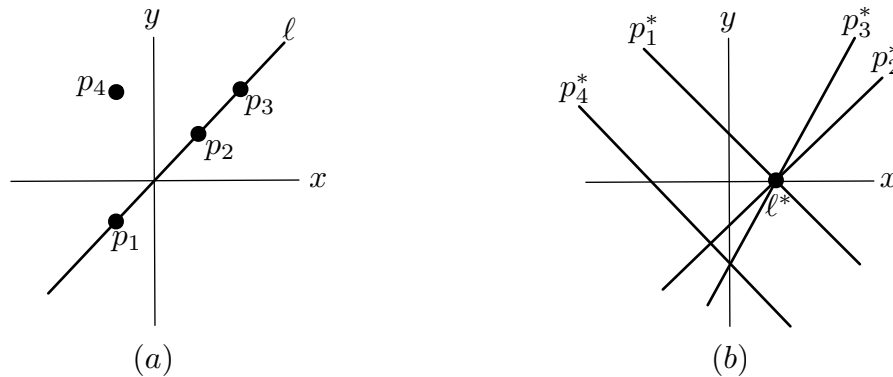


Figura 4.4: Espacio primal y dual.

Llamaremos al conjunto de puntos original como espacio primal y al conjunto de rectas obtenidas a partir de la transformación dual le llamaremos espacio dual. Al aplicar una transformación dual al espacio primal, algunas propiedades de los puntos se transforman en propiedades sobre las rectas, por ejemplo si en el espacio primal una recta pasa por tres puntos, en el espacio dual habrá tres rectas en que intersecten en un mismo punto. Otras

propiedades entre los puntos y las rectas son las siguientes:

Observación 4.3.1. *Sea p un punto en el plano y sea ℓ una línea no vertical en el plano. La transformación de dualidad tiene las siguientes propiedades:*

- *Preservación de incidencia: $p \in \ell$ si y solo si $\ell^* \in p^*$*
- *Preservación de orden: p esta abajo de ℓ si y solo si ℓ^* está abajo de p^**

En términos generales, la dualidad transforma un conjunto en otro, de manera que a cada elemento en el espacio primal le corresponda un elemento en el dual, por lo tanto al hablar de una transformación dual, dicha transformación puede ser aplicada a otros objetos no sólo a puntos y rectas, por ejemplo obtener la gráfica dual de una subdivisión plana en el plano. Dicha transformación es la siguiente: la gráfica dual de una subdivisión del plano P , es una gráfica cuyos vértices corresponden a cada región plana de P , y una arista une a dos regiones adyacentes por cada arista en P ; Figura 4.5.

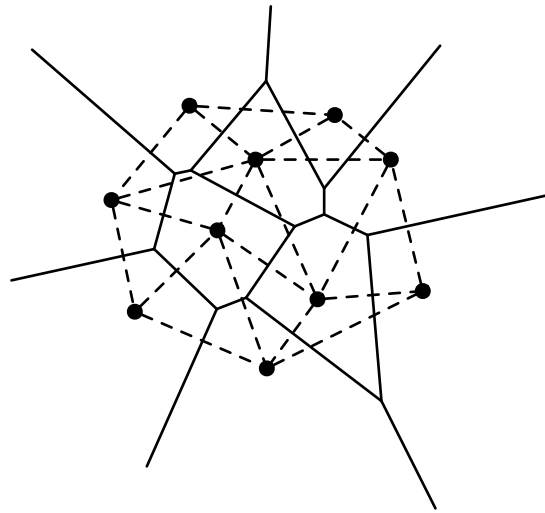


Figura 4.5: Las líneas sólidas forman una subdivisión del plano y las líneas punteadas determinan su gráfica dual.

Dado lo anterior, transformar un problema al espacio dual podría tener una ventaja muy importante, ya que esta transformación nos proporciona otra perspectiva del problema. Por lo tanto la utilidad de la transformación dual es muy bonita, ya que si resolvemos un problema en el espacio dual, también podríamos resolver el problema en el espacio primal, a fin de cuentas, el problema en el espacio primal y en el espacio dual es esencialmente el mismo.

4.3.3. Arreglos de subdivisiones planas

Las siguientes definiciones son dadas como en [51].

Definición 4.3.1. Una curva de Jordan es una curva simple y cerrada; Figura 4.6.

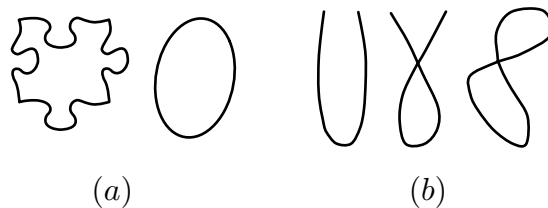


Figura 4.6: En (a) se muestran ejemplos de curvas de Jordan y en (b) las curvas no son de Jordan.

Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ un conjunto de n curvas de Jordan en el plano, con la propiedad que cada pareja se intersectan a lo más en s puntos, con s constante.

Definición 4.3.2. El arreglo $\mathcal{A}(\Gamma)$ de Γ es una subdivisión plana inducida por los arcos de Γ ; es decir, $\mathcal{A}(\Gamma)$ es un mapeo plano cuyos vértices son los extremos de los arcos de Γ y sus puntos de intersección, cuyas aristas son porciones conexas maximales abiertas de los γ_i 's que no contienen un vértice y cuyas caras son componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - \bigcup \Gamma$; Figura 4.7.

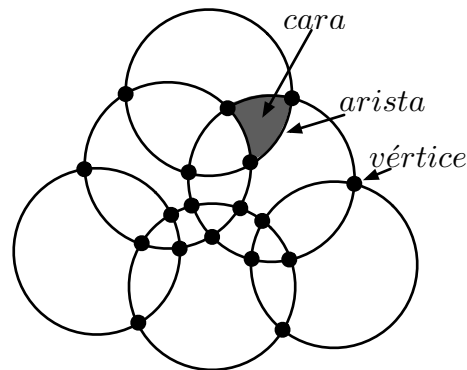


Figura 4.7: Subdivisión del plano determinada por un conjunto de círculos unitarios.

La *complejidad combinatoria* total de una subdivisión del plano es la suma del número de vértices, de aristas y de caras. Es fácil mostrar que la complejidad combinatoria de $\mathcal{A}(\Gamma)$, es a lo más $O(n^2)$. La estructura geométrica que usamos para almacenar $\mathcal{A}(\Gamma)$ es la *lista de aristas doblemente conexa*, comúnmente denotada por *DCEL*.

Lista de aristas doblemente conexa (DCEL).

La lista de aristas doblemente conexa es la más adecuada para representar una subdivisión plana, que consiste en tres colecciones de arreglos que almacenan la siguiente

información geométrica:

- Un arreglo de vértices. Almacena de cada vértice v sus coordenadas (v_{coord}) y un apuntador a una arista incidente a v (e_{inc}); Figura 4.8.
- Un arreglo de caras. Almacena de cada cara f una arista que pertenece a su límite exterior (e_{ex}) y otra que pertenece a su límite interior (e_{in}). Para las caras que no son acotadas se les asigna el valor nulo; Figura 4.8.
- Un arreglo de aristas. Es el arreglo principal de la DCEL, en dicho arreglo se almacena la siguiente información geométrica: vértice origen (v_o) y vértice destino (v_d) y de esta manera se fija una orientación, las caras izquierda (f_i) y derecha (f_d) con respecto a la orientación de la arista y las primeras aristas encontradas al girar en contra de las manecillas del reloj a la arista con respecto al vértice origen y el vértice destino, denotadas por (e_{no}) y (e_{nd}) respectivamente; Figura 4.8.

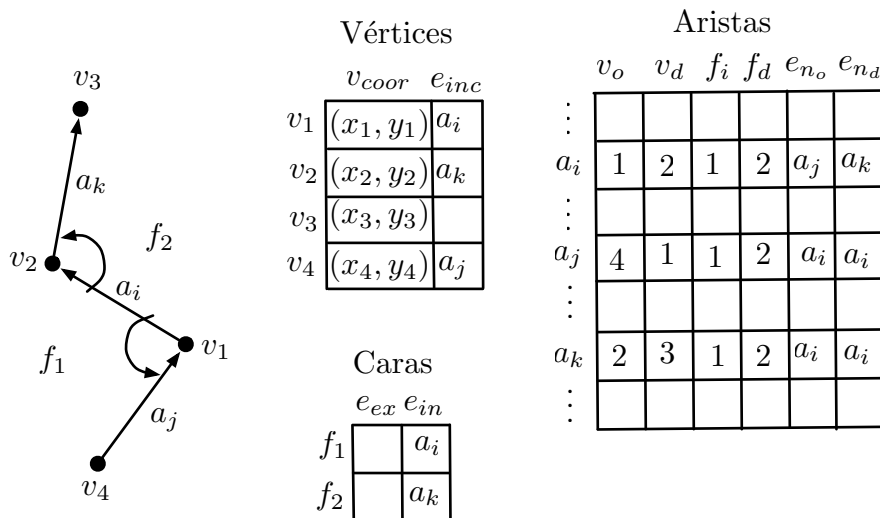


Figura 4.8: Ejemplo de una DCEL.

Finalmente, hay que remarcar que la construcción de una DCEL requiere $O(n^2)$, sin embargo obtener información sobre cada vértice, cara o arista requiere $O(1)$.

4.4. Círculo k -cromático de radio fijo

En esta sección mostraremos el algoritmo que resuelve el problema 4.2.1:

Dados un conjunto S de n puntos en el plano k -coloreado y un valor $r \in \mathbb{R}$. Encontrar el círculo de radio r tal que contenga exactamente un punto de cada color.

4.4.1. Preprocesamiento y algoritmo

Sin pérdida de generalidad supongamos que el valor de r es $\frac{1}{2}$. Como primer paso del preprocesamiento de nuestro algoritmo, centramos un círculo unitario en cada punto de S y dado que todos los círculos tienen el mismo radio, usando el resultado mostrado en [51] podemos construir un arreglo de círculos $\mathcal{A}(S)$ en tiempo $O(n^2)$ y garantizamos que la complejidad combinatoria de esta subdivisión es $O(n^2)$. Por lo tanto $\mathcal{A}(S)$ induce a una subdivisión con a lo más $O(n^2)$ caras.

El siguiente paso, consiste en asociar una tupla de longitud k (a_1, a_2, \dots, a_k) a cada cara $f \in \mathcal{A}(S)$, de manera que cada valor a_i indique el número de círculos de color i que cubre f . En la Figura 4.9 la cara f cubre un punto azul y dos puntos rojos.

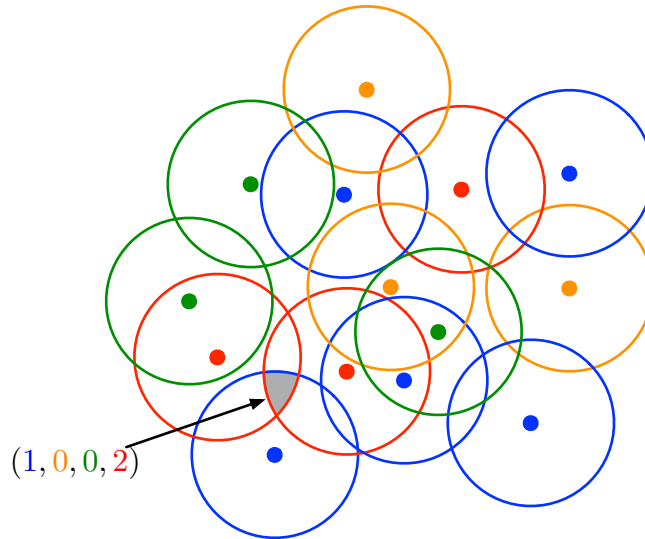


Figura 4.9: Cara de $\mathcal{A}(S)$ y su tupla.

A partir de la construcción anterior obtenemos los siguientes resultados, los cuales nos ayudarán a demostrar la correctez del algoritmo

Propiedad 4.4.1. *Todo círculo centrado en cualquier punto p dentro de alguna cara f cubre exactamente los mismos colores; Figura 4.10.*

Esta propiedad resulta verdadera porque si dos puntos p y p' en f no cubren los mismos colores, entonces f estaría determinada por dos conjuntos de círculos distintos y esto no es posible. Una propiedad que cumplen dos caras adyacentes $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(S)$ es la siguiente:

Propiedad 4.4.2. *Si el arco que separa a f_1 y f_2 es de color i , entonces sus respectivos arreglos difieren por un solo valor, en la i -ésima posición; Figura 4.11.*

Dada la construcción anterior, la información sobre nuestro conjunto de puntos con respecto a nuestro círculo buscado, puede ser fácilmente obtenida a partir de la gráfica dual de $\mathcal{A}(S)$.

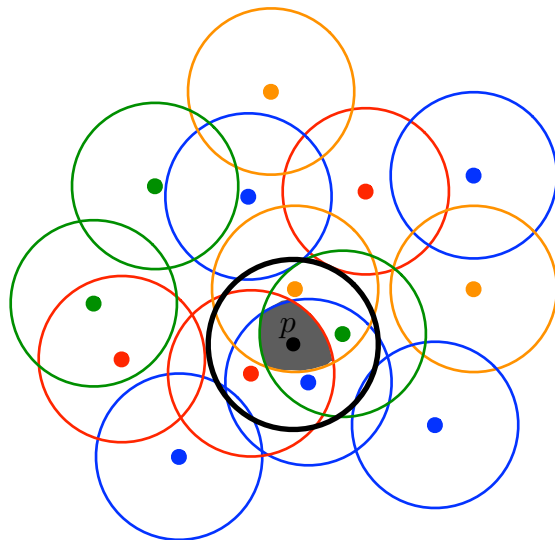


Figura 4.10: El círculo centrado en cualquier punto de la cara genera la misma tupla.

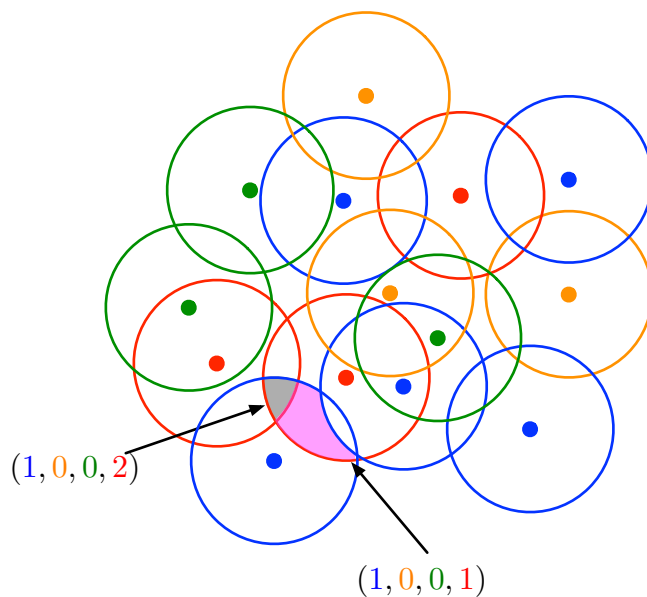


Figura 4.11: Dos caras adyacentes sólo difieren en una posición en la tupla asociada a cada cara.

Una vez construida nuestra gráfica dual, haremos un recorrido sobre ella, visitando todas las aristas de la gráfica y haciendo uso de la estructura que construimos y de la Propiedad 4.4.2 la actualización de cada cada paso se hace en $O(1)$ Por lo tanto, calcular los arreglos de todas las caras nos toma $O(n^2)$ tiempo.

4.4.2. Análisis de complejidad

El análisis de la complejidad de este algoritmo es el siguiente:

- Calcular y almacenar el arreglo de círculos en una lista doblemente ligada por aristas requiere $O(n^2)$.
- Calcular la tupla para una cara es un proceso lineal. Sin embargo dada la Propiedad 4.4.2, una vez calculada la tupla de una cara, calcular el resto de las tuplas es $O(1)$, pero se tiene un número cuadrático de caras, por lo tanto calcular las tuplas de todas las caras del arreglo requiere $O(n^2)$ tiempo.

Dado el proceso anterior podemos concluir el siguiente teorema:

Teorema 4.4.1. *Dados un conjunto S de n puntos en el plano k -coloreado y un valor $r \in \mathbb{R}$. Encontrar el círculo de radio r tal que contenga exactamente un punto de cada color, toma $O(n^2)$.*

4.5. Triángulo k -cromático con vértices fijos

Antes de mostrar el algoritmo que obtiene el triángulo k -cromático con vértices fijos. Observaremos las siguientes propiedades con respecto a los puntos interiores de un triángulo.

Propiedad 4.5.1. *Sean S un conjunto de n puntos en el plano, $T = \{p_i, p_j, p_k\}$ un triángulo formado por los vértices p_i, p_j y p_k y un punto $q \in S$, con $q \neq p_i, p_j$ y p_k . El punto q esta en el interior de T si q esta abajo del segmento $\overline{p_i p_j}$ y arriba de los segmentos $\overline{p_i p_k}$ y $\overline{p_k p_j}$ o viceversa; Figura 4.12 (a).*

Al aplicar la transformación dual punto-recta al conjunto de puntos S , es decir cada punto $p_i := (a_i, b_i)$ será mapeado a la recta $l_{p_i} := a_i x - b_i$, obtenemos la siguiente propiedad en el espacio dual:

Propiedad 4.5.2. *Si el punto q esta en el interior del triángulo $T = \{p_i, p_j, p_k\}$ en el espacio primal, entonces en el espacio dual la recta l_q esta arriba del punto de intersección r_{ij} formado por las rectas l_{p_i} y l_{p_j} y abajo de las intersecciones r_{ik} y r_{jk} generadas por las rectas l_{p_i}, l_{p_k} y l_{p_j}, l_{p_k} respectivamente; Figura 4.12 (b).*

4.5.1. Algoritmo y análisis de complejidad

Haciendo uso de la propiedad 4.5.2, los pasos de nuestro algoritmo son los siguientes:

1. Aplicar la transformación dual del conjunto S y ordenar a los puntos de intersección de todas las rectas, por coordenada x y por coordenada y . Hacer este proceso requiere $O(n^2 \log n)$ tiempo.

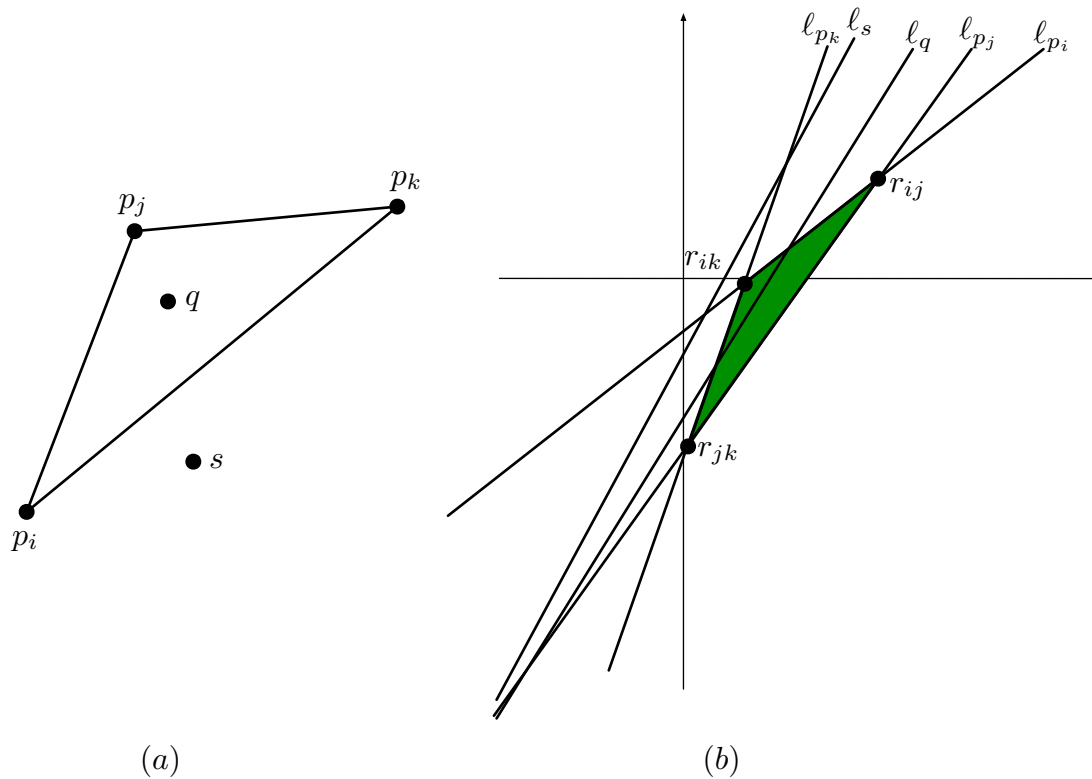


Figura 4.12: Representación del triángulo $T = \{p_i, p_j, p_k\}$ en el espacios primal y dual.

2. Aplicar un barrido de línea de izquierda a derecha en el espacio dual y nos detenemos en cada punto de intersección r_{ij} inducido por las rectas ℓ_{p_i} y ℓ_{p_j} . En cada punto de intersección hacemos lo siguiente:
 - 2.1 Tomar k rectas hacia abajo y k rectas hacia arriba de r_{ij} .
 - 2.2 Con las k rectas hacia abajo (simétricamente con las k rectas de arriba) tomar la k -ésima recta ℓ_k y considerar el triángulo formado con los puntos r_{ij} , r_{jk} y r_{ik} .
 - 2.3 Almacenar en un arreglo de longitud k , los colores de las rectas, de tal manera que el color i se almacene en la posición i -ésima del arreglo.
 - 2.4 Verificar que las rectas estén dentro del triángulo y el arreglo tenga el valor mayor o igual que uno en todas sus posiciones.

El paso anterior del algoritmo, requiere $O(kn^2)$ porque en el peor de los casos se tienen un número cuadrático de intersecciones.

Por el algoritmo anterior podemos concluir el siguiente teorema:

Teorema 4.5.1. *Dado un conjunto S de n puntos en el plano k -coloreado. Podemos encontrar el triángulo de área mínima tal que contenga un punto de cada color y sus vértices sean puntos de S , en tiempo $O(kn^2 + n^2 \log n)$.*

4.6. Polígono k -cromático ordenado

En esta sección mostraremos un algoritmo para obtener el polígono k -cromático ordenado de un conjunto de puntos en posición convexa. La definición del polígono k -cromático ordenado es la siguiente:

Definición 4.6.1. *Un polígono k -cromático, se dice que es ordenado, si sus vértices son recorridos de acuerdo a un orden de visita dado por sus distintas clases cromáticas; Figura 4.13.*

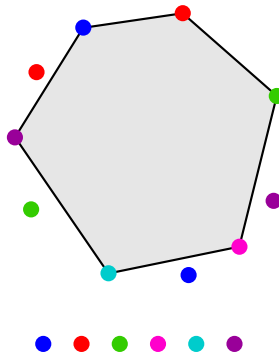


Figura 4.13: Polígono k -cromático ordenado.

Dado que nuestro conjunto de puntos está en posición convexa, decimos que un punto p está a la derecha de un punto q si al ordenar los puntos de manera radial q está más a la derecha que p . Denotaremos a un polígono P con la secuencia de sus vértices $p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^k$, ordenados según el orden de visita dado. Antes de describir el algoritmo que proponemos, haremos un paréntesis para explicar la siguiente propiedad que será usada por nuestro algoritmo:

Propiedad 4.6.1. *Si $(p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^{k-1}, p_i^k)$ es el polígono k -cromático ordenado de área mínima, con orden de visita $1, 2, \dots, k-1, k$ entonces el área del polígono $(p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^{k-1})$ más el área del polígono $(p_i^1, p_i^{k-1}, p_i^k)$ es mínima; Figura 4.14.*

La propiedad anterior sugiere hacer el uso de programación dinámica para encontrar el polígono k -cromático ordenado. La idea principal es la siguiente:

Dividir el proceso en k etapas, de manera que, en la j -ésima etapa, se considere cada punto p_i de color j , denotado por p_i^j y calcular el polígono ordenado de área mínima que contenga los primeros j colores y termine en el punto p_i^j . En cada etapa de aproximación puede ser aplicada la Propiedad 4.6.1, de manera que el polígono $j + 1$ -cromático está definido como:

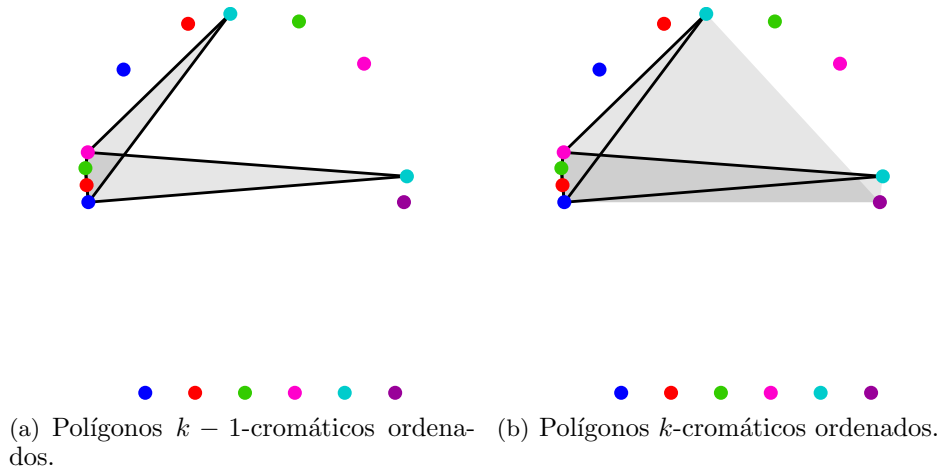


Figura 4.14: Polígonos $k - 1$ y k -cromáticos ordenados.

$$\min\{Area(p_i^1, p_l^2, \dots, p_m^{j-1}) + Area(p_i^1, p_m^{j-1}, p_s^j)\}$$

Como para cada punto p_i^j hay que verificar a lo más $O(n)$ polígonos $(j - 1)$ -cromáticos ordenados, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.6.1. *Dado un conjunto S de n puntos en el plano k -coloreado y en posición convexa. En tiempo $O(n^2)$ podemos encontrar el polígono de área mínima que contenga un punto de cada color en un orden de colores de visita prefijado.*

4.7. Conclusiones y problemas abiertos

Los resultados mostrados en este capítulo son puramente algorítmicos y hacen uso de técnicas casi omnipresentes dentro del área de la geometría computacional. Así como también hacen uso de estructuras de datos geométricas para el manejo y almacenamiento óptimo de las propiedades geométricas de nuestros objetos de estudio.

Una difícil e interesante línea de investigación es obtener el m -ágono de área mínima k -cromático considerando que el conjunto de puntos coloreado están en posición general.

Otro programa útil sería apoyar al médico a decidir lo siguiente:

- Es posible que el cáncer de mama sea extraído por completo, es decir, podemos separar todas las células sanas de las células malignas.
- Si se decide ir a cirugía, cuál es el mínimo número de cortes que tiene que hacer el médico, para separar a las células sanas de las células malignas.
- Si se considera hacer sólo un corte, qué corte separa el mayor número de células sanas de las células malignas.

Los problemas de análisis médicos, pueden verse en términos geométricos y en el contexto de cierres convexos rectilíneos como lo siguiente: supongamos que las células sanas son representadas por un conjunto de puntos de color rojo y las células malignas son representadas por un conjunto de puntos de color azul, entonces saber si el cáncer puede ser extirpado al 100%, no es más que preguntarnos en el plano: cuál es el máximo número de cortes ortogonales y cuál es el único corte que mejor separa a las células sanas de las malignas, y estas preguntas no son más que problemas de separabilidad entre puntos rojos y azules.

Dado lo anterior, y el propósito de continuar con el estudio de m -ágonos sobre puntos de colores decidimos hacer parte de mi trabajo de tesis un problema de separabilidad considerando como objeto geométrico a separar el cierre convexo rectilíneo y como separador el camino ortogonal. Encontramos el mínimo número de caminos ortogonales necesarios para separar dos cierres convexos rectilíneos y describimos un algoritmo para minimizar el número de puntos mal clasificados cuando sólo usamos un camino.

Los resultados de este capítulo fueron presentados en el congreso *XIV Spanish Meeting on Computational Geometry* celebrado en Alcalá de Henares, España, en 2011. Además fueron obtenidos trabajando en conjunto con los siguientes coautores: Canek Peláez, Carlos Seara y Jorge Urrutia.

5.1. Introducción

En problemas de discriminación y separabilidad es común tener separadores geométricos: un conjunto finito S_g de curvas en el plano es un separador geométrico para dos conjuntos R y B ajenos si cada componente en $\mathbb{R}^2 - S_g$ contiene sólo objetos de R o de B . El problema fundamental de separabilidad de objetos geométricos en el plano es el siguiente:

Dados dos conjuntos R y B ajenos en el plano, R contiene objetos rojos y B consiste de objetos azules. ¿Existe una superficie de algún tipo tal que separe los objetos geométricos de R y B ?

Este problema puede ser considerado bajo muchos aspectos distintos, el más natural y simple es: ¿Existe una línea tal que separe a R y B ?, es decir ¿ R y B son linealmente separables?. Dentro de la literatura se sabe que el problema de decidir si dos conjuntos

de puntos, segmentos, polígonos o círculos puede resolverse en $O(n)$, y que si R y B son linealmente separables entonces podemos encontrar la línea que los separa y que pasa por un punto $p \in R \cup B$ en $O(n \log n)$ tiempo [40, 28]. La relación entre separabilidad geométrica y convexidad también ha sido material de estudio, Stoer y Witzgall mostraron que dos conjuntos de puntos son linealmente separables si y sólo si sus cierres convexos son separables [52]; Figura 5.2.

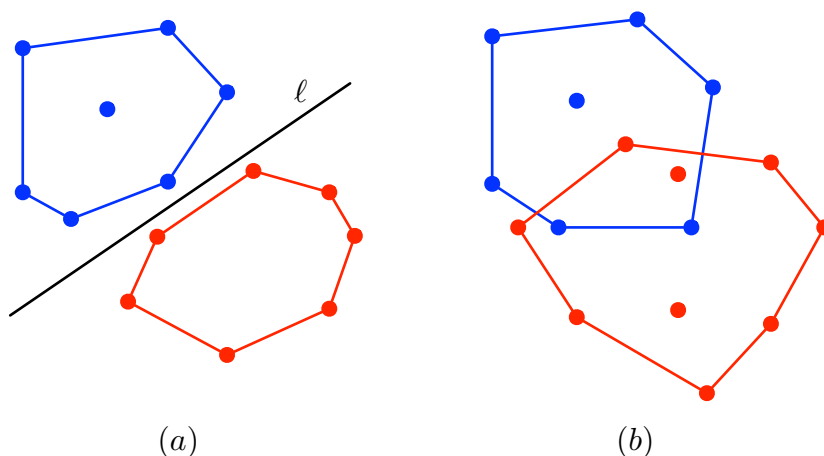


Figura 5.2: En (a) R y B son linealmente separables mientras que en (b) no lo son.

Sin duda la separabilidad geométrica lineal ha sido la variante de separabilidad más estudiada y eso se debe a su gran uso en reconocimiento de patrones y funciones de discriminantes, pero la noción de separabilidad y clasificación va más allá de la línea, por tal motivo en los últimos años los problemas de separabilidad han cambiado aspectos con respecto a distintos separadores que dividen a un conjunto de puntos, por ejemplo en [43] muestran algoritmos eficientes para encontrar separadores circulares. También Edelsbrunner y Preparata resolvieron el problema de separar a R y B usando polígonales convexas, obteniendo algoritmos para el problema de decisión y para el problema de minimizar el número de aristas de la poligonal.

Sin embargo, existen conjuntos de puntos tales que la separabilidad exacta no existe, es decir no es posible separar a todos los objetos. Por ejemplo, que no exista la separabilidad lineal, quiere decir que no existe una línea tal que separe a los conjuntos R y B . Para este caso se tiene la alternativa de estudio definida por Michael E. Houle en [29], dicha alternativa clasifica correctamente el mayor número de objetos en la unión de los dos conjuntos, a este tipo de separabilidad se le conoce como separabilidad débil; Figura 5.4. De hecho en el mismo trabajo se plantea el primer algoritmo que encuentra la recta que separa débilmente a dos conjuntos R y B en tiempo $O(n^2)$. Años más tarde en [20] se muestra un algoritmo sensible a la salida para este mismo problema, dicho algoritmo requiere $O(nm \log m + n \log n)$ tiempo donde m representa el número de puntos mal clasificados. Recientemente en [48] se muestra que la mejor cota para solucionar el problema de la separación débil requiere a lo más $\Theta(n^2)$.

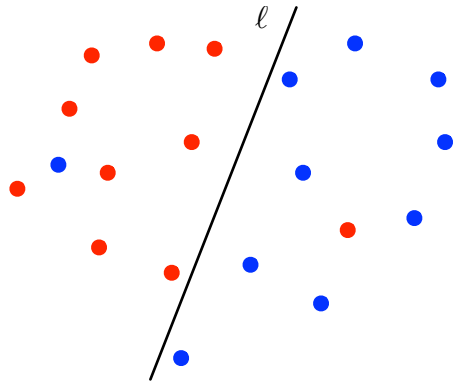


Figura 5.3: Ejemplo de separabilidad lineal débil.

A diferencia de la separación exacta, la separación débil ha sido poco estudiada; no obstante ya existe un compendio de problemas al respecto en [50]. En este trabajo decidimos hacer parte este tipo de problemas por lo interesante que resulta ser en el análisis de datos médicos y obtuvimos un algoritmo que requiere $O(n^2)$ tiempo para clasificar el mayor número de puntos.

5.2. Definiciones y trabajo relacionado

Algunas definiciones necesarias para complementar el planteamiento de los problemas a estudiar en esta sección son:

Definición 5.2.1 (Dominación.). *Sea S un conjunto de n puntos en el plano, se dice que un punto $p = (p_x, p_y) \in S$ es dominado por $q = (q_x, q_y) \in S$, con $p \neq q$, si $p_x \leq q_x$ y $p_y \leq q_y$.*

Definición 5.2.2 (Punto extremal.). *Sea S un conjunto de n puntos en el plano, se dice que un punto $p = (p_x, p_y) \in S$ es extremal si no existe un punto $q = (q_x, q_y) \in S$ tal que $q_x > p_x$ y $q_y > p_y$, es decir no existe un punto q tal que domine a p .*

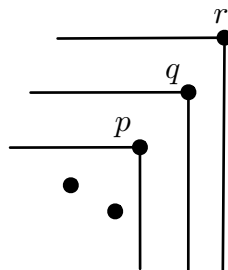


Figura 5.4: El punto p es dominado por q , pero r es punto extremal.

Definición 5.2.3 (Camino ortogonal monótono.¹). *Se dice que un camino es ortogonal monótono, si este consiste de una secuencia de segmentos horizontales y verticales y es monótono con respecto a los ejes x y y .*

Definición 5.2.4 (Conjunto convexo rectilíneo. [44]). *Un conjunto de puntos S en el plano es convexo rectilíneo, si su intersección con cualquier segmento horizontal o vertical es vacío o un conjunto conexo.*

Definición 5.2.5 (Cierre convexo rectilíneo. [44]). *El cierre convexo rectilíneo de un conjunto de puntos S en el plano, es el conjunto convexo rectilíneo más pequeño que contiene a S .*

Observemos que en conjunto convexo rectilíneo puede ser discontinuo; Figuras 5.5 (a) y (b).

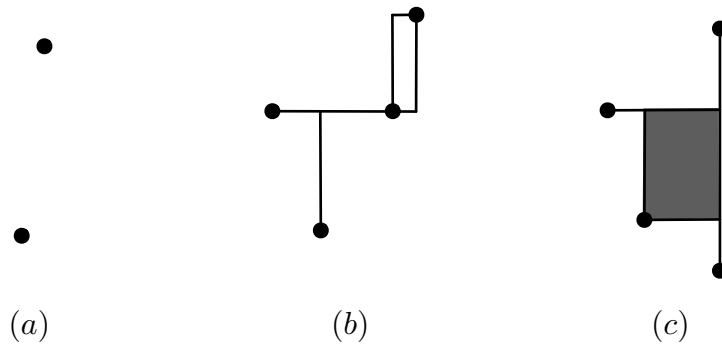


Figura 5.5: Ejemplos de cierres convexos rectilíneos.

Otra definición es:

Definición 5.2.6 (Cierre convexo rectilíneo. [6]). *Dado un conjunto S de n puntos en el plano, el cierre convexo rectilíneo se define como:*

$$\mathcal{RH}(S) = \mathbb{R}^2 - \bigcup_{Q \text{ is } S\text{-free quadrant}} Q$$

Una observación directa a partir de estas definiciones es que, el cierre convexo rectilíneo esta formado por 4 caminos ortogonales monótonos o escaleras y dichos caminos están formados por puntos extremales de S , de cada cuadrante.

Definición 5.2.7 (Punto $\frac{\pi}{2}$ -maximal [5]). *Sea un S un conjunto de n puntos en el plano, se dice que un punto $p \in S$ es $\frac{\pi}{2}$ -maximal con respecto a S , si y solo si existen dos rayos, R_1 y R_2 , emitidos de p con ángulo al menos $\frac{\pi}{2}$ entre ellos, tal que ningún punto de S esta adentro del cono definido por p , R_1 y R_2 ; Figura 5.6.*

Usando las definiciones anteriores podemos plantear los siguientes problemas de separabilidad en el contexto del cierre convexo rectilíneo:

¹En la literatura es comúnmente llamado escalera (*staircase*), por lo tanto en adelante lo llamaremos así.

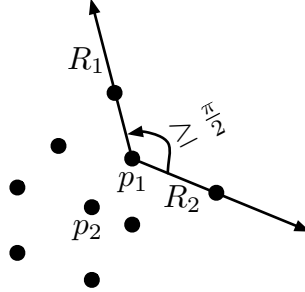


Figura 5.6: El punto p_1 es $\frac{\pi}{2}$ -maximal y el punto p_2 no lo es.

Problema 5.2.1 (Intersección vacía). *Dado un conjunto R de n puntos de color rojo y un conjunto B de n puntos de color azul. Determinar si $R \cap \mathcal{RH}(B) = \emptyset$.*

Problema 5.2.2 (Número mínimo de escaleras para separar.). *Sean R un conjunto de n puntos de color rojo, B un conjunto de n puntos de color azul, $\mathcal{RH}(R)$ y $\mathcal{RH}(B)$ son los cierres convexos rectilíneos de R y B respectivamente. ¿Cuántas escaleras se necesitan para separar a $\mathcal{RH}(R)$ y $\mathcal{RH}(B)$?*

Adelantando un poco el resultado obtenido, sabemos que se requieren un número lineal de cortes para separar las células sanas de las malignas, dado esto surgió el problema de suponer que, sólo se debe realizar un corte tratando de maximizar la separabilidad de células sanas más las células malignas. Entonces tenemos el siguiente problema:

Problema 5.2.3 (Clasificación de suma máxima). *Dados R un conjunto de n puntos rojos y B un conjunto de n puntos azules. Encontrar la escalera C tal que el número de puntos rojos abajo de C más el número de puntos azules arriba de C es máximo.*

5.3. Separabilidad en cierres convexos rectilíneos

5.3.1. Algoritmo para determinar si $R \cap \mathcal{RH}(B) = \emptyset$

Para obtener este resultado es necesario primero determinar cuándo un punto $r \in R$ está adentro del $\mathcal{RH}(B)$, para ello obtuvimos el siguiente resultado:

Lema 5.3.1 (Contención.). *Un punto $r \in R$ está adentro del $\mathcal{RH}(B)$ si y sólo si r está dominado por las cuatro escaleras que definen el $\mathcal{RH}(B)$; Figura 5.7.*

Dado lo anterior el algoritmo para determinar si $R \cap \mathcal{RH}(B) = \emptyset$ es muy simple.

1. Calculamos el $\mathcal{RH}(B)$ usando el algoritmo mostrado en [44].
2. Aplicamos un barrido de línea usando la línea horizontal ℓ_h , parando en cada punto rojo r_i y verificamos lo siguiente:

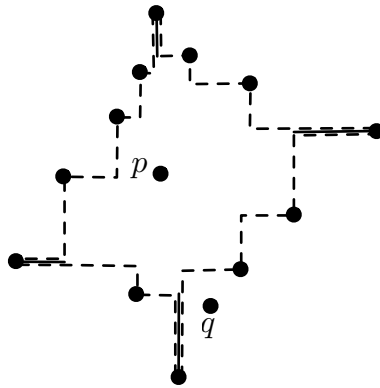


Figura 5.7: El punto p está dominado por las cuatro escaleras, mientras que q no.

- 2.1 Si ℓ_h tiene una intersección a la derecha y una a la izquierda con $\mathcal{RH}(B)$, entonces el punto r_i esta adentro de $\mathcal{RH}(B)$.
- 2.2 En otro caso r_i esta afuera de $\mathcal{RH}(B)$.

Una propiedad muy importante del cierre convexo rectilíneo es que es variante a la dirección con la que se calcula; Figura 5.8, por lo tanto nos hicimos la siguiente pregunta:

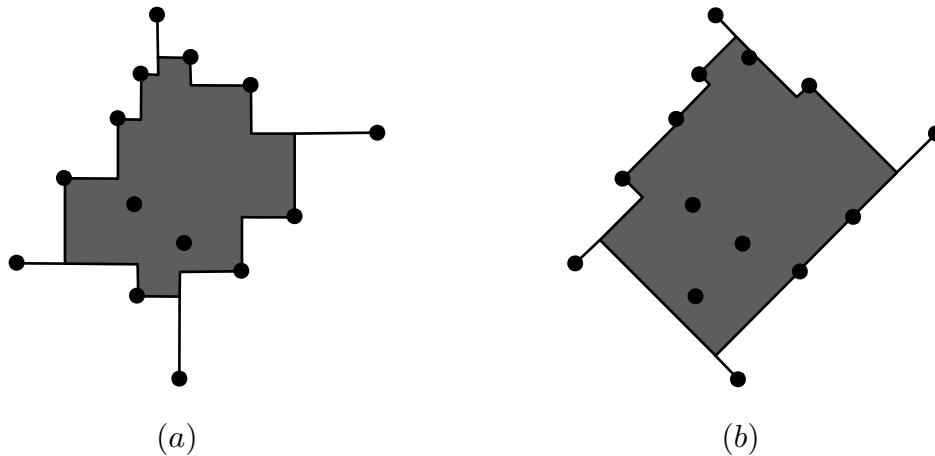


Figura 5.8: En (a) se muestra el cierre convexo rectilíneo con orientación de 0 grados y en (b) con orientación de 45 grados.

¿Existe alguna dirección en la que todos los puntos de R estén afuera del $\mathcal{RH}(B)$? Para hacer la búsqueda de esta dirección, si es que existe, hacemos lo siguiente:

1. Calculamos los intervalos para cada punto $b_i \in B$, en los cuales b_i es $\frac{\pi}{2}$ -maximal y los guardamos en una lista ordenada L_{max} . Esto se hace en tiempo $O(n \log n)$ usando [5].

2. Usando el algoritmo mostrado en [14], calculamos en tiempo $O(n \log n)$ los intervalos $\frac{\pi}{2}$ -maximales de todos los puntos de R que son $\frac{\pi}{2}$ -maximales con respecto a B y los insertamos en L_{max} .
3. Definimos 4 líneas verticales $\ell_1 = \alpha, \ell_2 = \alpha + \frac{\pi}{2}, \ell_3 = \alpha + \pi, \ell_4 = \alpha + \frac{3\pi}{2}$ y cuatro listas ordenadas con respecto a las coordenadas x de los intervalos guardados en L_{max} . En las listas denotadas por $L_\alpha(\ell_1), L_\alpha(\ell_2), L_\alpha(\ell_3)$ y $L_\alpha(\ell_4)$, almacenaremos las intersecciones de la líneas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 y ℓ_4 respectivamente con los puntos de inicio y fin de los intervalos de L_{max} . Ahora, para obtener dichas intersecciones, aplicaremos un barrido en el rango $[0, \pi]$, sobre L_{max} , usando las 4 líneas verticales, considerando que si alguna línea ℓ_i interseca un intervalo rojo de algún punto r_j , entonces agregamos a r_j a la lista $L_\alpha(\ell_i)$.

Finalmente, si al aplicar el barrido en la dirección α , obtenemos

$$|R| - |L_\alpha(\ell_1)| + |L_\alpha(\ell_2)| + |L_\alpha(\ell_3)| + |L_\alpha(\ell_4)| = 0$$

entonces el $\mathcal{RH}(B)$ no contiene puntos rojos en la dirección α , por lo tanto en la dirección α $\mathcal{RH}(R)$ y $\mathcal{RH}(B)$ son separables. Dado lo anterior podemos concluir el siguiente resultado:

Teorema 5.3.1. *Dado un conjunto R de n puntos de color rojo y un conjunto B de n puntos de color azul. Determinar si $R \cap \mathcal{RH}(B) = \emptyset$ en cualquier dirección puede resolverse en tiempo $O(n \log n)$.*

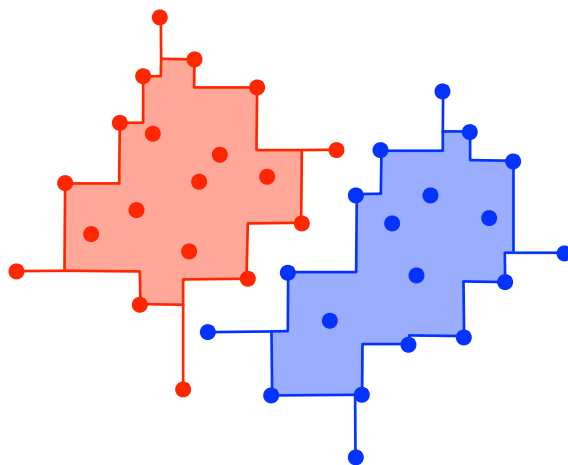
5.3.2. Determinar el mínimo número de escaleras para separar

Para determinar cuántas escaleras son necesarias para separar al $\mathcal{RH}(R)$ del $\mathcal{RH}(B)$, primero hay que recordar que el cierre convexo rectilíneo puede ser desconexo, es decir puede contener 1 o varias componentes conexas; Figura 5.9. Además, observemos que, podemos definir un orden entre las componentes de abajo hacia arriba. Dicho orden nos indica una secuencia para separar el $\mathcal{RH}(R)$ y $\mathcal{RH}(B)$, de manera que vamos a generar una escalera por cada conjunto de componentes conexas minimales del mismo color que separemos al mismo tiempo; Figura 5.10.

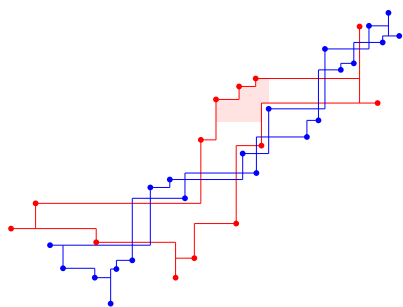
5.4. Clasificación máxima con caminos monótonos ortogonales

Antes de mostrar el algoritmo, mencionaremos que la escalera C que buscamos tiene la siguiente propiedad:

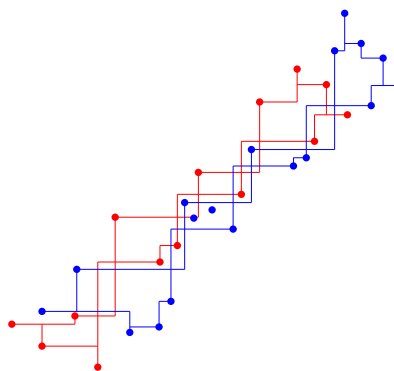
Propiedad 5.4.1. *La escalera C que mejor separa a R y B , considerando que la suma de los puntos de B arriba de C más los puntos de R abajo de C sea máxima es monocromática, es decir, todos sus vértices son de color rojo o de color azul.*



(a) Una componente roja y una componente azul.



(b) Una componente roja y varias componentes azules.



(c) Varias componentes rojas y varias componentes azules.

Figura 5.9: Cierres convexos rectilíneos bi-coloreados

5.4.1. Algoritmo

Sin pérdida de generalidad supongamos que C está definida por puntos de R . Entonces para encontrar a la escalera C usaremos un algoritmo de programación dinámica, con la idea de conservar para cada punto $r_i \in R$ la escalera que maximiza la suma de los puntos azules arriba de C más los puntos rojos abajo de C y que termina en el punto r_i . Los pasos del algoritmo son:

1. Ordenamos a los puntos rojos y azules por coordenada x .
2. Construimos a la matriz que contendrá el número de puntos rojos y azules que domina cada punto de R , esta estructura puede construirse en $O(n^2)$, usando el método mostrado en [47] en la sección 2.1; Figura 5.11.

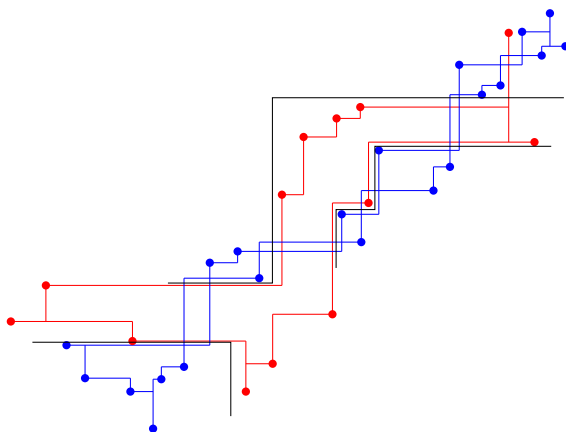


Figura 5.10: Escaleras separadoras.

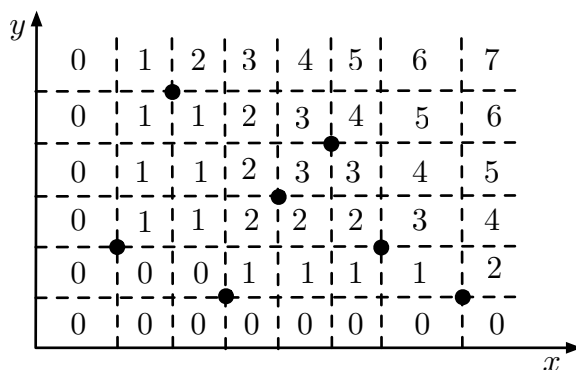


Figura 5.11: Matriz de dominación.

3. Aplicamos un barrido de izquierda a derecha con una línea vertical, empezando por el punto rojo con coordenada x menor, denotado por r_1 y parando en todos los puntos de R . Por cada punto $r_i \in R$, calcularemos la escalera que mejor separa a R y B que contiene al punto r_i como su último vértice. Observemos que para cada punto r_i se consideran a lo más $O(n)$ escaleras definidas por los puntos r_1, \dots, r_{i-1} .

Dado lo anterior podemos concluir el siguiente resultado:

Teorema 5.4.1. *Dados R un conjunto de n puntos rojos y B un conjunto de n puntos azules. Encontrar la escalera C tal que el número de puntos rojos abajo C más el número de puntos azules arriba de C es máximo, puede ser calculada en tiempo $O(n^2)$.*

5.5. Conclusiones y problemas abiertos

Podemos concluir la continuación de este trabajo trajo como resultado el diseño de una estructura que nos ayudará a mantener los puntos extremales en cada orientación y así obtener la escalera que maximiza el número de puntos bien clasificados en cualquier orientación en $O(n^2 \log n)$.

Como problemas abiertos se puede tratar el extender el estudio de cierres convexos rectilíneos en conjuntos de puntos bi-coloreados, por ejemplo mostrar si siempre existe y cómo obtener el ham-sandwich ortogonal. Además descubrir más propiedades de los cierres convexos rectilíneos ya que es un tema poco explorado, a pesar de su utilidad. Finalmente estamos considerando estudiarlo en conjuntos de puntos k -coloreados.

Bibliografía

- [1] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, and J. Urrutia. Empty monochromatic triangles. *Computational Geometry*, 42(9):934–938, 2009.
- [2] O. Aichholzer, T. Hack, C. Huemer, F. Hurtado, and B. Vogtenhuber. Large bichromatic point sets admit empty monochromatic 4-gons. *SIAM Journal on Discrete Mathematics (SIDMA)*, page page accepted, 2009.
- [3] O. Aichholzer, T. Hackl, M. Hoffmann, A. Pilz, G. Rote, B. Speckmann, and B. Vogtenhuber. Plane graphs with parity constraints. In *Proceedings of the 11th International Symposium on Algorithms and Data Structures, WADS '09*, pages 13–24, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag.
- [4] B. Aronov and S. Har-Peled. On approximating the depth and related problems. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 886–894. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [5] D. Avis, B. Beresford-smith, L. Devroye, H. Elgindy, E. Guévremont, F. Hurtado, and B. Zhu. Unoriented θ -maxima in the plane: Complexity and algorithms. *SIAM J. COMPUT.*, 28:278–296, 1994.
- [6] S. W. Bae, C. Lee, H.-K. Ahn, S. Choi, and K.-Y. Chwa. Computing minimum-area rectilinear convex hull and l-shape. *Computational Geometry*, 42(9):903–912, 11 2009.
- [7] A. Biswas, P. Bhowmick, M. Sarkar, and B. B. Bhattacharya. Finding the orthogonal hull of a digital object: a combinatorial approach. In *Proceedings of the 12th international conference on Combinatorial image analysis*, pages 124–135. Springer-Verlag, 2008.
- [8] B. Bollobás. *Extremal Graph Theory*. Academic Press, London, 2004.
- [9] P. Brass. Empty monochromatic fourgons in two-colored points sets. *Geombinatorics*, XIV(1):5–7, 2004.
- [10] I. Bárány and P. Valtr. Planar point sets with a small number of empty convex polygons. *Akadémiai Kiadó*, 41(2):243–266, 2004.

-
- [11] S. Das, P. Goswami, S. Nandy, O. Gervasi, M. Gavrilova, V. Kumar, A. Laganà, H. Lee, Y. Mun, D. Taniar, and C. Tan. *Recognition of Minimum Width Color-Spanning Corridor and Minimum Area Color-Spanning Rectangle*, volume 3480, pages 69–79. Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
- [12] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational geometry: algorithms and applications*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1997.
- [13] O. Devillers, F. Hurtado, G. Károlyi, and C. Seara. Chromatic variants of the erdős-szekeres theorem. *Computational Geometry, Theory and Applications*, 3(26):193–208, 2003.
- [14] J. M. Díaz-Báñez, M. A. López, M. Mora, C. Seara, and I. Ventura. Fitting a two-joint orthogonal chain to a point set. *Computational Geometry*, 44(3):135–147, 4 2011.
- [15] R. Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2005.
- [16] R. O. Duda and P. Hart. *Pattern Classification and Scene Analysis*. Wiley-Interscience, New York, 1973.
- [17] D. Eppstein, M. H. Overmars, G. Rote, and G. Woeginger. Finding minimum area k -gons. *Discrete and Computational Geometry*, 7:45–58, 1992.
- [18] P. Erdős. Some more problems on elementary geometry. *Austral. Math. Soc. Gaz*, 5:52–54, 1978.
- [19] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, pages 463–470, 1935.
- [20] H. Everett, J. Robert, and M. van Kreveld. An optimal algorithm for the ($\leq k$)-levels, with applications to separation and transversal problems. In *In Proceedings of the 9th Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 38–46, San Diego, CA, USA, 1993.
- [21] E. Friedmann. 30 two-colored points with no empty monochromatic convex fourgons. *Geombinatorics*, XIV(2):53–54, 2004.
- [22] T. Gerken. Empty convex hexagons in planar point sets. *Discrete and Computational Geometry*, 1-3(39):239 – 272, 2008.
- [23] R. V. Gulik. 32 two-colored points with no empty monochromatic convex fourgons. *Geombinatorics*, XV(1):32–33, 2005.
- [24] P. Hammer and T. Bonates. Logical analysis of data—an overview: From combinatorial optimization to medical applications. *Annals of Operations Research*, 148(1):203–225, 2006.
- [25] H. Harborth. Konvexe fünfecke in ebenen punktmengen. *Elemente Math.*, 33:116–118, 1978.

-
- [26] H. Harborth. Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen. *Elem. Math.*, 33:116–118, 1978.
- [27] J. D. Horton. Sets with no empty convex 7-gons. *Canad. Math. Bull.*, 26:482–484, 1983.
- [28] M. E. Houle. *Weak separation of sets*. PhD thesis, School of Computer Science McGill University Montréal, Canada, 1989.
- [29] M. E. Houle. Algorithms for weak and wide separation of sets. *Discrete Applied Mathematics*, 45:139 – 159, 1993.
- [30] C. Huemer and C. Seara. 36 two-colored points with no empty monochromatic convex fourgons. *To appear in Geombinatorics*, 2009.
- [31] F. Hurtado, M. Mora, P. A. Ramos, and C. Seara. Separability by two lines and by nearly straight polygonal chains. *Discrete Applied Mathematics*, 144(1-2):110–122, 2004.
- [32] F. Hurtado, M. Noy, P. A. Ramos, and C. Seara. Separating objects in the plane with wedges and strips. *Discrete Applied Mathematics*, 109:109–138, 2001.
- [33] D. Huttenlocher, K. Kedem, and M. Sharir. The upper envelope of voronoi surfaces and its applications. *Discrete & Computational Geometry*, 9(1):267–291, 1993-12-30.
- [34] G. Károlyi. Ramsey-remainder for convex sets and the erdős-szekeres theorem. *Discrete Appl. Math.*, 109:163–175, 2001.
- [35] V. Koshchelev. On erdős-szekeres problem and related problems. *ArXiv e-prints*, 2009.
- [36] G. Károlyi and P. Valtr. Point configurations in d -space without large subsets in convex position. *Discrete Comput. Geom.*, 30(2):277–286, 2003.
- [37] W. Mantel. Problem28, solution by h. gouwentak, j. teixeirademattes, f. schuh and w.a. wythoff. *Wiskundige Opgaven*, 10:60–61, 1907.
- [38] A. Manuel, H. Ferran, I. Christian, K. Rolf, L. Elmar, M. Lihong, P. Belén, and S. Vera. *Smallest Color-Spanning Objects*, volume 2161, pages 278–289. Springer Berlin / Heidelberg, 2001.
- [39] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., 2002.
- [40] N. Megiddo. Linear-time algorithms for linear programming in r^3 and related problems. *SIAM Journal on Computing*, 12(4):759 – 776, 1983.
- [41] C. Nara, T. Sakai, J. Urrutia, J. Akiyama, and M. Kano. *Maximal Number of Edges in Geometric Graphs without Convex Polygons*, volume 2866, pages 215–220. Springer Berlin / Heidelberg, 2003.

-
- [42] C. M. Nicolás. The empty hexagon theorem. *Discrete and Computational Geometry*, 2(38):389 – 397, 2007.
- [43] J. O’Rourke, S. R. Kosaraju, and N. Megiddo. Computing circular separability. *Discrete & Computational Geometry*, 1(1):105–113, 1986.
- [44] T. Ottmann, E. Soisalon-Soininen, and D. Wood. On the definition and computation of rectilinear convex hulls. *Information Sciences*, 33(3):157–171, 9 1984.
- [45] J. Pach, editor. *Towards a Theory of Geometric Graphs*, volume 342. American Mathematical Society, 2004.
- [46] J. Pach and G. Tóth. Monochromatic empty triangles in two-colored point sets. *Discrete Applied Mathematics*, 2011.
- [47] F. Preparata and M. Shamos. *Computational Geometry : An Introduction*. Springer-Verlag, 1985.
- [48] P. Pérez-Lantero. *Geometric optimization for classification problems*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, España, 2010.
- [49] M. Sato and T. Ohtsuki. Applications of computational geometry to vlsi layout pattern design. *Integration, the VLSI Journal*, 5(3–4):303–317, 12 1987.
- [50] C. Seara. *Geometric on Separability*. PhD thesis, Universitat Politècnica De Catalunya, 2002.
- [51] M. Sharir and P. Agarwal. *Davenport-Shinzel Sequences and Their Geometric Applications*. Cambridge, 1995.
- [52] J. Stoer and C. Witzgall. *Convexity and optimization in finite dimensions*. 1970.
- [53] P. Turán. On an extremal problem in graph theory. *Matematicko Fizicki Lapok*, 48:436–452, 1941.