Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Introducción a los Sistemas Estratificantes

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

MINDY YANELI HUERTA PÉREZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. EDITH CORINA SÁENZ VALADEZ

2013

1. Datos del alumno
Huerta
Pérez
Mindy Yaneli
58 73 61 50
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
409010741

2. Datos del tutor
Dra.
Edith Corina
Sáenz
Valadez

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Octavio
Mendoza
Hernández

4. Datos del sinodal 2
Dra.
Diana
Avella
Alaminos

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Clotilde
García
Villa

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Alejandro
Alvarado
García

7. Datos del trabajo escrito
Introducción a los Sistemas Estratificantes
90 p
2013

Dedicado a mis padres
Guillermo y Nidia

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a Dios; por llenar mi vida de bendiciones.
A mis padres; por todo el apoyo que me han brindado, por ser los héroes de mi vida y los mejores consejeros.
A mi hermano; por darme las mejores lecciones de nobleza a pesar de su corta edad.
A mis abuelos; por acompañarme durante el tiempo permitido y darme el enorme honor de mostrarme el lado paciente de la vida.
A mi asesora; gracias por su apoyo, su confianza y su paciencia.
A mis amigos; Kary, Dalid, Jorge, Leo, José, Erick y Germán. Gracias por compartir conmigo momentos buenos y apoyarme en los momentos difíciles.
En especial, gracias a ti Germán.

Índice general

Introducción

En el presente trabajo damos una introducción a los Sistemas Estratificantes $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ de talla t. Dicho concepto fue introducido, en [2], en el 2003.

Los sistemas estratificantes son una generalización de los R-módulos estándar, donde R es una k-álgebra de dimensión finita estandarmente estratificada sobre un campo k algebraicamente cerrado.

El objetivo del presente trabajo es demostrar que dado un sistema estratificante $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ de talla t, donde $\underline{Y} = \{Y(j)_{j=1}^{t}\}$ es un conjunto de R-módulos inescindibles satisfaciendo ciertas propiedades, se tiene que la k-álgebra $A = End_R(\bigoplus_{j=1}^{t} Y(j))$ es una k-álgebra estandarmente estratificada a la derecha. (Ver el Teorema 3.3.12). Dicho resultado se encuentra enunciado en [2].

El trabajo consta de tres capítulos. En el primer capítulo hemos incluido un resumen de la "Teoría de Módulos" elemental. No hemos incluido las demostraciones de los resultados, ya que pueden ser consultadas en el libro [4]. En el segundo capítulo hemos hecho un resumen de los teoremas centrales de la Teoría de Módulos que son indispensables para el desarrollo del capítulo 3. Con el propósito de hacer este resumen compacto omitimos la mayoría de las demostraciones, las cuales pueden consultarse en [4] y [5].

En el capítulo 3 enunciamos y demostramos las principales propiedades del concepto de Sistema Estratificante de talla t y el Teorema 3.3.12.

Capítulo 1

Módulos

En este capítulo hacemos un resumen de la teoría básica de R-módulos, donde R es un anillo asociativo con uno, denotado por $1_R \in R$.

Los resultados expuestos en este capítulo se estudian en el curso denominado Algebra Moderna III que se imparte en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Por ello, sólo hemos expuesto los resultados y los hemos ilustrado con ejemplos. El lector interesado puede consultar las demostraciones correspondientes en el libro [4].

1.1. Módulos

La teoría de R-módulos generaliza la noción de espacio vectorial. En esta sección se incorporarán varias definiciones como la de R-submódulo y la de R-módulo cociente. Un R-módulo importante es el R-módulo generado por un conjunto X, del cual se desprende tratar con R-módulos finitamente generados y conjuntos generadores. Para concluir esta sección se trabajará con un tipo especial de R-módulos, llamados R-módulos simples, para los cuales daremos una caracterización que involucra al R-módulo cociente.

Definición 1.1.1. *Sea R un anillo. Un R-módulo izquierdo es un grupo abeliano M que tiene una multiplicación escalar $\sigma : R \times M \longrightarrow M$ denotada por $\sigma(r,m) = rm$ tal que:*

1) $r(m+m') = rm + rm', \quad \forall\, r \in R, \quad \forall\, m, m' \in M.$

2) $(r + r')m = rm + r'm, \quad \forall\, r, r' \in R, \quad \forall\, m \in M.$

3) $(rr')m = r(r'm), \quad \forall\, r, r' \in R, \quad \forall\, m \in M.$

4) $1_R m = m, \quad \forall\, m \in M.$

Notación: ${}_RM$ denota que M es un R-módulo izquierdo.

Ejemplos 1.1.2.

(1) *Si V es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial, V es un $\mathbb{R}$-módulo izquierdo.*

(2) *Los grupos abelianos son $\mathbb{Z}$-módulos izquierdos.*

(3) *Si R es un anillo, entonces R es un R-módulo izquierdo con la multiplicación escalar $R \times R \longrightarrow R$ definida por la propia multiplicación del anillo. Se le conoce como el R-módulo regular.*

Ahora bien, sea $(M, +)$ un grupo abeliano. Recordemos que el conjunto:

$$End(M) = \{f : M \longrightarrow M \mid \text{ es un homomorfismo de grupos}\}$$

es un anillo con las operaciones:

$$+ : End(M) \times End(M) \longrightarrow End(M)$$
$$(f, g) \longmapsto f + g$$

donde $(f + g)(m) = f(m) + g(m), \quad \forall\, m \in M$ y

$$\circ : End(M) \times End(M) \longrightarrow End(M)$$
$$(g, f) \longmapsto g \circ f$$

donde $(g \circ f)(m) = g(f(m)), \quad \forall m \in M.$

Las siguientes dos proposiciones nos proporcionan una caracterización de la definición de R-módulo izquierdo en términos de homomorfismos de anillos.

Proposición 1.1.3. *Sean R un anillo, M un grupo abeliano y*

$$\varphi : R \longrightarrow End(M)$$

$$r \longmapsto \varphi_r$$

un homomorfismo de anillos. Definimos $\sigma : R \times M \longrightarrow M$ dada por $\sigma(r, m) = \varphi_r(m)$. Entonces σ es una multiplicación escalar que hace de M un R-módulo izquierdo.

Proposición 1.1.4. *Sean M un R-módulo izquierdo y*

$$\sigma : R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \longmapsto rm$$

su multiplicación escalar. Entonces la función:

$$\varphi : R \longrightarrow End(M)$$

$$r \longmapsto \varphi_r$$

donde $\varphi_r : M \longrightarrow M$ está dada por $\varphi_r(m) = rm$, es un homomorfismo de anillos.

A continuación se introducirá el concepto de R-submódulo izquierdo de un R-módulo M.

Definición 1.1.5. *Sea M un R-módulo izquierdo. Decimos que N es un R-submódulo izquierdo de M si se satisface:*

(1) N es un subgrupo de $(M, +)$.

(2) $rn \in N$ para todo $r \in R$ y para todo $n \in N$.

Notación: $N \leqslant M$ denota que N es un R-submódulo izquierdo de M.

Lema 1.1.6. *Sea M un R-módulo izquierdo. Si N es un R-submódulo izquierdo de M entonces N es un R-módulo izquierdo.*

Ejemplos 1.1.7.

(1) Consideremos a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo, $2\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} : n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ es un $\mathbb{Z}$-submódulo de $2\mathbb{Z}$.

(2) Si V es un F-espacio vectorial donde F es un campo y W es un subespacio vectorial de V, entonces W es un F-submódulo de V.

(3) Si M es un R-módulo izquierdo, M y $\{0_M\}$ son R-submódulos de M. Al R-submódulo $\{0_M\}$ se le conoce como el R-módulo cero y se denota por 0.

El conjunto de A-combinaciones lineales de un conjunto X es indispensable para poder caracterizar al R-módulo izquierdo generado por un conjunto X. Para eso, tenemos lo siguiente.

Si $X \subseteq M$ y $A \subseteq R$ entonces cualquier elemento de M de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

con $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ es una combinación lineal de X con coeficientes en A o simplemente una A-combinación lineal de X. Denotamos al conjunto de todas las A-combinaciones lineales de X por AX y tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.8. *Sean M un R-módulo izquierdo y N un subconjunto no vacío de M. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) N es un submódulo izquierdo de M.

(2) $RN = N$.

(3) Para todo $a, b \in R$ y todo $x, y \in N$

$$ax + by \in N.$$

Por comodidad, diremos que N es un submódulo de M, en el caso de que N sea un R-submódulo izquierdo de M. Análogamente, algunas veces diremos sólo R-módulo o módulo para referirnos a un R-módulo izquierdo.

Proposición 1.1.9. *Si M es un R-módulo y X es un subconjunto no vacío de M, entonces RX es un submódulo de M.*

Si M es un R-módulo izquierdo y $X = \varnothing$, convenimos que $R\varnothing = 0$.

La siguiente proposición nos proporciona otra descripción del submódulo RX.

Proposición 1.1.10. *Sean M un R-módulo y $X \subset M$. Sea $\mathcal{A} = \{N \leqslant M : X \subseteq N\}$. Entonces $\bigcap\limits_{N\in\mathcal{A}} N$ es un submódulo de M que contiene a X. Más aún, $\bigcap\limits_{N\in\mathcal{A}} N = RX$.*

Definición 1.1.11. *Sean M un R-módulo izquierdo y $X \subset M$, $\mathcal{A} = \{N \leqslant M : X \subseteq N\}$, el R-módulo izquierdo $\bigcap\limits_{N\in\mathcal{A}} N$ se le llama el R-submódulo generado por X. Se denota por RX o bien $\langle X\rangle$.*

Ejemplo 1.1.12. *Consideremos a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo, $X = \{2\}$. Entonces $\langle X\rangle = 2\mathbb{Z}$.*

Definición 1.1.13. *Sea M un R-módulo izquierdo;*

(1) *Si X es un subconjunto de M tal que $RX = M$ se dice que X genera a M o bien que X es un conjunto generador de M.*

(2) *Si M tiene un conjunto generador finito se dice que es un R-módulo finitamente generado.*

(3) *Si M tiene un conjunto generador que consta de un solo elemento se dice que M es cíclico.*

Ejemplos 1.1.14.

(1) *Sea $F[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes en F, donde F es un campo. El conjunto $X = \{1, x, x^2, \ldots\}$ es un conjunto generador del F-módulo $F[x]$.*

(2) *Si V es un F-espacio vectorial de dimensión finita y β es una base de V, β es un conjunto generador finito de V.*

(3) *Sea R un anillo asociativo con 1_R. Entonces R es cíclico, ya que $R = R1_R =< 1_R >$.*

Otro concepto importante a tratar es la suma finita de R-submódulos izquierdos de un R-módulo M.

Definición 1.1.15. *Sean $M_1, M_2, \ldots, M_n$ subconjuntos no vacíos de M y M un R-módulo izquierdo. Definimos la suma de $M_1, M_2, \ldots, M_n$ y la denotaremos por $M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ como:*

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_n : x_i \in M_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Ejemplo 1.1.16. *Consideremos a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo. Si $M_1 = 2\mathbb{Z}$ y $M_2 = 3\mathbb{Z}$*

$$M_1 + M_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in 2\mathbb{Z}, x_2 \in 3\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

ya que $(2, 3) = 1$.

Lema 1.1.17. *Si M es un R-módulo izquierdo y $M_1, M_2, \ldots, M_n$ son submódulos de M, entonces $M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ es un submódulo de M. De hecho,*

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n = R(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n).$$

En base al resultado anterior, podemos dar la definición de suma de una familia, no necesariamente finita, de R-submódulos de M.

Definición 1.1.18. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de submódulos izquierdos de un R-módulo izquierdo M. Definimos la suma de dicha familia, o bien el R-módulo generado por $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$, denotado por $\sum\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$ como*

$$\sum_{\alpha \in A} M_\alpha = R(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha).$$

Recordemos que

$$R\left(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha\right) = \left\{r_{\alpha_1} x_{\alpha_1} + r_{\alpha_2} x_{\alpha_2} + \cdots + r_{\alpha_n} x_{\alpha_n} : x_{\alpha_j} \in \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha \text{ y } r_{\alpha_j} \in R\right\}.$$

Ejemplo 1.1.19. *Consideremos a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo y $\{M_\alpha = \alpha\mathbb{Z}\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}}$. Observemos que $M_2 = 2\mathbb{Z}$ y $M_3 = 3\mathbb{Z}$ pertenecen al conjunto y se tiene que*

$$\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \subseteq \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}} M_\alpha \subseteq \mathbb{Z}.$$

Por lo que $\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}} M_\alpha = \mathbb{Z}$.

El inciso *(2)* del siguiente lema es conocido como la ley modular.

Lema 1.1.20. *Sean M un R-módulo izquierdo y H, K, L submódulos de M. Entonces*

(1) $H \cap (K + L) \geqslant H \cap K + H \cap L$.

(2) Si $K \leqslant H$ *entonces* $H \cap (K + L) = K + (H \cap L)$.

A continuación abordaremos un tipo especial de R-módulos izquierdos llamados R-módulos simples.

Definición 1.1.21. *Un R-módulo izquierdo M es simple si $M \neq 0$ y no tiene submódulos izquierdos distintos de M y 0.*

Ejemplos 1.1.22.

(1) Si V es un F-espacio vectorial de dimensión finita y $x \in V \backslash \{0_V\}$, entonces $\langle x \rangle = F\{x\}$ es un F-módulo simple.

(2) $\mathbb{Z}_p$ con p primo es un $\mathbb{Z}$-módulo simple.

Una consecuencia inmediata de la definición de R-módulo simple es el siguiente lema.

Lema 1.1.23. *Si un R-módulo izquierdo M es simple, entonces $M = R\{x\}$ para cualquier $x \in M \backslash \{0\}$. En particular, un R-módulo simple es cíclico.*

Notemos que si M es un R-módulo cíclico, éste no necesariamente es un R-módulo simple, ya que si consideramos a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo sabemos que $\mathbb{Z} = \langle 1_{\mathbb{Z}} \rangle$ y que $2\mathbb{Z}$ es un submódulo de $\mathbb{Z}$.

Un concepto también importante es el siguiente.

Definición 1.1.24. *Sean M un R-módulo izquierdo y N un submódulo propio ($N \neq M$). Decimos que N es un R-submódulo maximal de M si para todo $L \leqslant M$ tal que $N \leqslant L$ implica $L = N$ o $L = M$.*

Dualmente tenemos.

Definición 1.1.25. *Sean M un R-módulo izquierdo y $N \neq 0$ un submódulo de M. Decimos que N es un R-submódulo minimal si dado $L \leqslant M$ tal que $L \leqslant N$ implica $L = 0$ o $L = N$.*

Ejemplos 1.1.26.

(1) *Consideremos a* $\mathbb{Z}$ *como* $\mathbb{Z}$*-módulo izquierdo,* N *es un* $\mathbb{Z}$*-submódulo maximal de* $\mathbb{Z}$ *si* $N = p\mathbb{Z}$ *con* p *primo, y* $\mathbb{Z}$ *no tiene* $\mathbb{Z}$*-submódulos minimales.*

(2) *Si* S *es un* R*-módulo simple,* 0 *es un submódulo maximal y* S *es un submódulo minimal de* S*.*

El siguiente resultado establece que los R-módulos finitamente generados tienen submódulos maximales.

Teorema 1.1.27. *Sea* $M \neq 0$ *un* R*-módulo con un conjunto generador finito* X*. Entonces, cada submódulo propio de* M *está contenido en un* R*-submódulo maximal de* M*. En particular,* M *tiene un* R*-submódulo maximal.*

El siguiente ejemplo muestra que dado un submódulo K de un R-módulo M, se tiene que el submódulo maximal L que contiene a K puede no ser único.

Ejemplo 1.1.28. *Consideremos a* $\mathbb{Z}$ *como* $\mathbb{Z}$*-módulo izquierdo. Sean* $K = 15\mathbb{Z}$ *y* $\mathcal{P} = \{N \leqslant \mathbb{Z} \,|\, K \subseteq N\} = \{\,15\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\}$*. Tenemos que* $15\mathbb{Z} \subset 3\mathbb{Z}$ *y* $15\mathbb{Z} \subset 5\mathbb{Z}$ *con* $3\mathbb{Z}$ *y* $5\mathbb{Z}$ *maximales.*

A continuación describiremos el módulo cociente M/K.

Proposición 1.1.29. *Si* M *es un* R*-módulo izquierdo y* $K \leqslant M$*, entonces*

$$M/K = \{x + K \,:\, x \in M\}$$

es un R*-módulo izquierdo con las operaciones*

$$(x + K) + (y + K) = (x + y) + K \quad y \quad a(x + K) = (ax) + K$$

para todas $x, y \in M$ *y toda* $a \in R$*.* M/K *es llamado el* R*-módulo cociente izquierdo de* M *módulo* K*.*

La siguiente proposición describe a los módulos cocientes simples a través de R-submódulos maximales.

Corolario 1.1.30. *El* R*-módulo cociente* M/K *es simple si, y sólo si,* K *es un submódulo maximal de* M*.*

Observación 1.1.31. *Sea* R *un anillo no trivial. Dado que* R *es diferente de cero y está generado por el* 1_R*, tenemos que* R *tiene un ideal maximal* I*. (ver Teorema 1.1.27). Por lo tanto,* R/I *es simple. Es decir, los* R*-módulos simples existen.*

1.2. Homomorfismos de Módulos

En esta sección estudiaremos las funciones entre R-módulos que respetan la estructura de R-módulos, es decir los llamados R-homomorfismos. Abordaremos algunos conceptos y caracterizaremos varios tipos de R-homomorfismos. Terminaremos esta sección con el Teorema del Factor para comprender los Teoremas de Isomorfismo, que son parte esencial de este capítulo.

Definición 1.2.1. *Sean M y N R-módulos izquierdos. Una función $f : M \longrightarrow N$ es un R-homomorfismo si:*

(1) $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in M$.

(2) $f(ax) = af(x), \quad \forall\, a \in R$ *y* $\forall\, x \in M$.

Por comodidad, algunas veces diremos simplemente homomorfismo en lugar de R-homomorfismo.

Ejemplos 1.2.2.

(1) $I : M \longrightarrow M$, *donde* $I(x) = x$ *para todo* $x \in M$, *es un R-homomorfismo.*

(2) $0 : M \longrightarrow N$, *donde* $0(x) = 0$ *para todo* $x \in M$ *es un R-homomorfismo.*

(3) $\pi_K : M \longrightarrow M/K$, *donde K es un submódulo de M y* $\pi_K(x) = x + K$ *para todo* $x \in M$, *es un R-homomorfismo. Se le conoce como la proyección canónica de M sobre M/K.*

(4) Si K es un submódulo de M, $i_K : K \longrightarrow M$ *el R-homomorfismo dado por* $i_K(x) = x$ *para todo* $x \in K$. *Se le conoce como la inclusión canónica de K en M.*

Definición 1.2.3. *Sean M y N R-módulos izquierdos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Definimos los siguientes conjuntos:*

(1) $Im\, f = \{f(m) \in N : m \in M\}$ *es la imagen de f.*

(2) $Ker\, f = \{m \in M : f(m) = 0\}$ *es el núcleo de f.*

(3) $Coimg\, f = (M/Ker\, f)$ *es la coimagen de f.*

(4) $Coker\, f = (N/Im\, f)$ *es el conúcleo de f.*

Observación 1.2.4. *Observemos que el conjunto* $Im\, f$ *es un submódulo de* N *y* $Ker\, f$ *es un submódulo de* M*.*

Ejemplos 1.2.5.

(1) *Sean* $M_2 = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$, $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_2$ *donde* $\pi_2(a, b) = (0, b)$*, se tiene que* $Im\, \pi_2 = M_2$*,* $Ker\, \pi_2 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$*.*

(2) *Sean* $M_1 \leqslant M$*,* $i_{M_1} : M_1 \longrightarrow M$ *donde* $i_{M_1}(m) = m$ *para todo* $m \in M_1$*, se tiene que* $Coimg\, i_{M_1} = (M_1/Ker\, i_{M_1}) = (M_1/0)$*, y* $Coker\, i_{M_1} = (M/Im\, i_{M_1}) = (M/M_1)$*.*

La siguiente proposición establece una relación entre conjuntos generadores y la imagen de ellos a través de R-homomorfismos.

Proposición 1.2.6. *Sean* M*,* N R*-módulos izquierdos,* X *un conjunto generador de* M*,* $f : M \longrightarrow N$ *un* R*-homomorfismo. Entonces:*

(1) $Im\, f$ *está generado por* $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$*.*

(2) *Sea* $g : M \longrightarrow N$ *un* R*-homomorfismo. Entonces* $g = f$ *si, y sólo si,* $g(x) = f(x)$ *para todo* $x \in X$*.*

Corolario 1.2.7. *Si* $f : M \longrightarrow N$ *es un* R*-homomorfismo y* M *es un* R*-módulo finitamente generado,* $Im\, f$ *es un* R*-módulo finitamente generado.*

A continuación describiremos algunos tipos de R-homomorfismos.

Definición 1.2.8. *Sea* $f : M \longrightarrow N$ *un* R*-homomorfismo. Se dice que:*

(1) f *es un monomorfismo si* f *es inyectiva.*

(2) f *es un epimorfismo si* f *es suprayectiva.*

(3) f *es un isomorfismo si* f *es biyectiva. En este caso, se dice que* M *y* N *son isomorfos y se denota* $M \cong N$*.*

Ejemplos 1.2.9.

(1) *Sea* $K \leqslant M$*,* $\pi_K : M \longrightarrow M/K$ *es un epimorfismo.*

(2) *Si* $K \leqslant M$*,* $i_K : K \longrightarrow M$ *es un monomorfismo.*

La siguiente proposición nos proporciona una caracterización del concepto de epimorfismo.

Proposición 1.2.10. *Sean M y N R-módulos izquierdos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *f es un epimorfismo.*

(2) *$Im\, f = N$.*

(3) *Para cada K y $g, h : N \longrightarrow K$ R-homomorfismos si $gf = hf$ entonces $g = h$.*

(4) *Para cada K y cada R-homomorfismo $g : N \longrightarrow K$ si $gf = 0$ entonces $g = 0$.*

La siguiente proposición nos proporciona una caracterización del concepto de monomorfismo.

Proposición 1.2.11. *Sean M, N R-módulos izquierdos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *f es un monomorfismo.*

(2) *$Ker\, f = 0$.*

(3) *Para cada K y $g, h : K \longrightarrow M$ R-homomorfismos si $fg = fh$ entonces $g = h$.*

(4) *Para cada K y cada R-homomorfismo $g : K \longrightarrow N$ si $fg = 0$ entonces $g = 0$.*

La siguiente proposición nos proporciona una caracterización del concepto de isomorfismo.

Proposición 1.2.12. *Sean M y N R-módulos izquierdos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces f es un isomorfismo si, y sólo si, existe $g : N \longrightarrow M$ un R-homomorfismo tal que $gf = I_M$ y $fg = I_N$.*

Notación: Considerando la notación usada en la Proposición 1.2.12 denotamos por f^{-1} a g y lo llamamos el inverso de f.

El siguiente resultado es crucial en la Teoría de R-homomorfismos ya que de este podemos desprender, como corolario, los Teoremas de Isomorfismo.

Teorema 1.2.13 (Teorema del Factor)**.** *Sean M, M', N, N' R-módulos izquierdos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo.*

1) Si $g : M \longrightarrow M'$ es un epimorfismo y cumple $Ker\, g \subseteq Ker\, f$ entonces existe un único homomorfismo $h : M' \longrightarrow N$ tal que $f = hg$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & M' \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Más aún, $Ker\, h = g(Ker\, f)$ e $Im\, h = Im\, f$, de donde h es un monomorfismo si, y sólo si, $Ker\, g = Ker\, f$ y h es un epimorfismo si, y sólo si, f es un epimorfismo.

2) Si $g : N' \longrightarrow N$ es un monomorfismo y cumple $Im\, f \subseteq Im\, g$ entonces existe un único homomorfismo $h : M \longrightarrow N'$ tal que $f = gh$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & & N \\ & N' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Más aún, $Ker\, f = Ker\, h$ e $Im\, h = g^{-1}(Im\, f)$, de donde h es un monomorfismo si, y sólo si, f es un monomorfismo y h es un epimorfismo si, y sólo si, $Im\, g = Im\, f$.

Corolario 1.2.14 (Teoremas de Isomorfismo)**.** *Sean M y N R-módulos izquierdos.*

(1) Si $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo y $K = Ker\, f$ entonces existe un único isomorfismo

$$\eta : M/K \longrightarrow N \quad \text{tal que} \quad \eta(m + K) = f(m).$$

(2) Si $K \leqslant L \leqslant M$ entonces

$$M/L \cong {}^{M/K}/_{L/K}.$$

(3) Si $H \leqslant M$ y $K \leqslant M$ entonces

$$^{H+K}/_{K} \cong {}^{H}/_{H\cap K}.$$

Demostración:

(1) Consideremos el módulo cociente M/K y $\pi_K : M \longrightarrow M/K$ la proyección canónica. Tenemos que $Ker\,\pi_K = K = Ker\,f$ y con π_K un epimorfismo. Aplicando el Teorema del Factor se tiene que existe un único homomorfismo $\eta : M/K \longrightarrow N$ tal que $f = \eta\pi_K$. Por lo que $f(m) = \eta\pi_K(m) = \eta(m+K)$ para todo $m \in M$. Además, como f es un epimorfismo η lo es y como $Ker\,\pi_K = Ker\,f$, η es un monomorfismo.

Omitimos las demostraciones de los incisos 2) y 3).

∎

Terminamos esta sección con el siguiente resultado.

Teorema 1.2.15 (Teorema de la Correspondencia)**.** *Si K es un submódulo de un R-módulo izquierdo M, entonces existe una biyección entre los submódulos N de M que contienen a K y los submódulos de M/K. Más aún, $K \subseteq N \subseteq N'$ si, y sólo si, $N/K \subseteq N'/K$ en M/K.*

1.3. Exactitud y Suma Directa Interna

En esta sección veremos la relación existente entre el concepto de exactitud y el de suma directa.

Definición 1.3.1. *Sean M', M, M'' R-módulos izquierdos.*

(1) Un par de R-homomorfismos

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacto en M si $Im\,f = Ker\,g$.

(2) Una sucesión de R-homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

es exacta, si es exacta en cada M_i, es decir, $Im\,f_i = Ker\,f_{i+1}$ para cada i.

Ejemplos 1.3.2.

(1) Sea M un R-módulo izquierdo. El par de R-homomorfismos

$$M \xrightarrow{Id} M \xrightarrow{0} 0$$

es exacto en M.

(2) La sucesión de homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{Id} M \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta.

Lema 1.3.3. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces:*

(1) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ es exacta si, y sólo si, f es un monomorfismo.

(2) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ es exacta si, y sólo si, f es un epimorfismo.

(3) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ es exacta si, y sólo si, f es un isomorfismo.

Proposición 1.3.4. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces*

$$0 \longrightarrow Ker\, f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/Im\, f \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Corolario 1.3.5. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces*

(1) f es un monomorfismo si, y sólo si,

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/Im\, f \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

b) f es un epimorfismo si, y sólo si,

$$0 \longrightarrow Ker\, f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Definición 1.3.6. *Una sucesión exacta de la forma*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

Ejemplo 1.3.7.

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/K \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, donde $K \leqslant M$ e i y π son la inclusión y la proyección canónica respectivamente.

A continuación introduciremos el concepto de suma directa.

Definición 1.3.8. *Sean M_1 y M_2 submódulos de M.*

(1) Si $M = M_1 + M_2$ se dice que M_1 y M_2 generan a M.

(2) Si $M_1 \cap M_2 = 0$ se dice que M_1 y M_2 son independientes.

(3) Decimos que M es la suma directa interna de M_1 y M_2, la cual denotamos por $M = M_1 \oplus M_2$, en caso de que el R-homomorfismo $i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ dado por $(m_1, m_2) \longmapsto m_1 + m_2$ para todo $m_1 \in M_1$ y todo $m_2 \in M_2$ sea un isomorfismo.

Obsérvese que en la definición anterior se está usando el hecho de que $M_1 \times M_2$ es un R-módulo (ver la Definición 1.5.1) .

Ejemplo 1.3.9. *Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2, $\beta = \{v_1, v_2\}$ una base de V, $M_1 = \langle v_1 \rangle$ y $M_2 = \langle v_2 \rangle$ se tiene que $V = \langle v_1, v_2 \rangle = M_1 + M_2$ y $M_1 \cap M_2 = \{0_V\}$, ya que β es un conjunto linealmente independiente. Además, la función $i : M_1 \times M_2 \longrightarrow V$ dada por $(m_1, m_2) \longmapsto m_1 + m_2$ es suprayectiva ya que para todo $v \in V$ existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $v = r_1 v_1 + r_2 v_2$, por ser β base de V, y si $r_1 v_1 + r_2 v_2 = 0$ con $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ se tiene que $r_1 = 0 = r_2$, por lo que i es inyectiva, por tanto $V = M_1 \oplus M_2$.*

El siguiente resultado caracteriza el concepto de suma directa en términos de submódulos que generan y que son linealmente independientes.

Lema 1.3.10. *$M = M_1 \oplus M_2$ si, y sólo si, M_1 y M_2 generan a M y son independientes.*

Definición 1.3.11. *Sea M un R-módulo izquierdo. Decimos que M_1 es un sumando directo de M si $M = M_1 \oplus M_2$ para algún R-módulo M_2. Al R-módulo M_2 se le conoce como sumando directo complementario de M_1 y se dice que M_1 y M_2 son sumandos directos complementarios.*

Ejemplo 1.3.12. *Sean $M_1 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ y $M_2 = \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$ se tiene que $\mathbb{R}^2 = M_1 \oplus M_2$ por lo que M_1 y M_2 son sumandos directos complementarios.*

En la sección 1.6 abordaremos el concepto de suma directa interna de manera más general. El siguiente resultado nos da una descomposición en suma directa de un R-módulo M.

Lema 1.3.13. *Sean $f : M \longrightarrow N$, $f' : N \longrightarrow M$ R-homomorfismos tales que $f \circ f' = I_N$. Entonces f es un epimorfismo, f' es un monomorfismo y $M = Ker\, f \oplus Im\, f'$.*

Debido al resultado anterior tenemos las siguientes definiciones.

Definición 1.3.14. *Si $f : M \longrightarrow N$, $f' : N \longrightarrow M$ son R-homomorfismos tales que $f \circ f' = I_N$ decimos que:*

(1) f es un epimorfismo que se escinde, el cual denotaremos por

$$M - \oplus^{f} \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

(2) f' es un monomorfismo que se escinde, el cual denotaremos por

$$0 \longrightarrow N - \oplus^{f'} \longrightarrow M.$$

Ejemplo 1.3.15. *Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x,y) = x$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}$, y $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donde $f'(x) = (x,0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que $f \circ f' = I_{\mathbb{R}}$ por lo que f es un epimorfismo que se escinde y f' es un monomorfismo que se escinde. Observemos que $\mathbb{R}^2 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} = Im\, f' \oplus Ker\, f$.*

Definición 1.3.16. *Una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

se escinde si f es un monomorfismo que se escinde y g es un epimorfismo que se escinde.

Ejemplo 1.3.17. *Sean* $M_1 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ *y* $M_2 = \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$-*módulos izquierdos. La sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \longrightarrow 0$$

donde $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_2$ *está dada por* $\pi_2(a,b) = (0,b)$, $i_1 : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *está dada por* $i_1(a,0) = (a,0)$ *es una sucesión exacta que se escinde. Para ver esto, consideremos* $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_1$ *donde* $h(a,b) = (a,0)$ *y* $t : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *donde* $t(0,b) = (0,b)$ *se tiene que* $hi_1 = I_{M_1}$ *y* $\pi_2 t = I_{M_2}$.

La siguiente proposición caracteriza el concepto de sucesión exacta corta que se escinde.

Proposición 1.3.18. *Dada la sucesión exacta corta*

$$\eta : \qquad 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0,$$

los siguientes enunciados son equivalentes.

(1) La sucesión η *se escinde.*

(2) f *es un monomorfismo que se escinde.*

(3) g *es un epimorfismo que se escinde.*

(4) $Im\, f = Ker\, g$ *es un sumando directo de* M.

(5) Cada R-*homomorfismo* $h : M_1 \longrightarrow N$ *se factoriza a través de* f.

(6) Cada R-*homomorfismo* $h : N \longrightarrow M_2$ *se factoriza a través de* g.

1.4. Endomorfismos Idempotentes

En esta sección repasaremos algunos conceptos que involucran elementos idempotentes de un anillo R. Utilizaremos el concepto del homomorfismo proyección para dar una relación entre sumandos directos e imágenes de elementos idempotentes del anillo de endomorfismos de M. Por último, trabajaremos con los R-módulos inescindibles dando una caracterización de ellos a través de su anillo de endomorfismos.

Definición 1.4.1. *Sea K un sumando directo de M y sea K' un sumando directo complementario, es decir, se tiene que $M = K \oplus K'$. Tenemos que*

$$P_K(k + k') = k \quad (k \in K, k' \in K')$$

define un epimorfismo

$$P_K : M \longrightarrow K$$

llamado la proyección de M sobre K a lo largo de K'.

Ejemplo 1.4.2. *Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0,b) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$-módulos izquierdos. Se sabe que $\mathbb{R}^2 = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0,b) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{R}\}$. Entonces P_{W_1} la proyección de V sobre W_1 a lo largo de W_2 :*

$$P_{W_1} : V \longrightarrow W_1$$

está dada por $P_{W_1}(a,b) = (a,0)$.

La siguiente proposición establece que los sumandos directos complementarios de un sumando directo K' de M son isomorfos.

Proposición 1.4.3. *Sea $M = K \oplus K'$, y P_K la proyección de M sobre K a lo largo de K', y L un submódulo de M. Entonces*

$$M = L \oplus K'$$

si, y sólo si,

$$(P_K|_L) : L \to K$$

es un isomorfismo.

Ejemplo 1.4.4. *Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(0,b) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{R}\}$ y $W_3 = \{(a,a) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$-módulos izquierdos. Se sabe que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ y también que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_3$. Entonces $P_{W_2}|_{W_3} : W_3 \longrightarrow W_2$, dada por $P_{W_2}(a,a) = (0,a)$, es un isomorfismo.*

Definición 1.4.5. *Sea R un anillo. Se dice que un elemento $e \in R$ es idempotente si $e^2 = e$.*

Ejemplo 1.4.6. *Sea F un campo. Se tiene que 0_F y 1_F son elementos idempotentes.*

Definición 1.4.7. *Sea R un anillo.*

(1) Si e_1 *y* e_2 *son idempotentes en* R*, se dice que* e_1 *y* e_2 *son idempotentes ortogonales si* $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$.

(2) Se dice que un idempotente $0 \neq e \in R$ *es primitivo si* $e = e_1 + e_2$ *con* e_1 *y* e_2 *idempotentes ortogonales implica que* $e_1 = 0$ *o* $e_2 = 0$.

Ejemplo 1.4.8. *Si* $e \in R$ *y* $e = e^2$*, se tiene que:*

a) $1 - e$ *es un idempotente.*

b) e, $1 - e$ *son idempotentes ortogonales.*

Definición 1.4.9. *Un conjunto de idempotentes* $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *de un anillo* R *es ortogonal en caso de sus elementos sean ortogonales dos a dos, es decir,*

$$e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha \quad \forall\, \alpha, \beta \in A$$

donde δ *es la delta de Kronecker.*

Ejemplo 1.4.10. *Considere el anillo* $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\pi_1((a,b)) = (a,0)$ *y* $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\pi_2((a,b)) = (0,b)$*. Se tiene que* π_1 *y* π_2 *son idempotentes de* $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ *y el conjunto de idempotentes* $\{\pi_i\}_{i \in \{1,2\}}$ *es ortogonal, ya que* $\pi_i \pi_j = \delta_{ij} \pi_i$ *con* $i, j \in \{1, 2\}$.

Definición 1.4.11. *Un conjunto finito de idempotentes ortogonales* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *en un anillo* R *es completo si* $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1_R$.

Ejemplo 1.4.12. *Considere el anillo* $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\pi_1((a,b)) = (a,0)$ *y* $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\pi_2((a,b)) = (0,b)$*. El conjunto* $\{\pi_i\}_{i \in \{1,2\}}$ *es un conjunto finito de idempotentes ortogonales y además es completo ya que* $\pi_1 + \pi_2 = 1_{End(\mathbb{R}^2)}$.

La siguiente definición será muy útil para describir a los sumandos directos de un R-módulo M.

Definición 1.4.13. *Supongamos que* $M = K \bigoplus K'$ *y* P_K *es la proyección de* M *sobre* K *a lo largo de* K'*. Se define* $e_K \in End_R(M)$ *por*

$$e_K : m \longmapsto P_K(m) \quad (m \in M).$$

Se sigue que $(P_K|_K) = I_K$ y e_K es un endomorfismo idempotente de M,

$$e_K = e_K^2 \in End_R(M).$$

Además, $K = Im\, e_K$ lo cual denotaremos como $K = Me_K$. Por lo que cada sumando directo de M es la imagen de un endomorfismo idempotente de M.

Ejemplo 1.4.14. *Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0,b) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$-módulos izquierdos. Se sabe que $\mathbb{R}^2 = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\} \bigoplus \{(0,b) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{R}\}$. Entonces*

$$e_{W_1} : V \longrightarrow V$$

está dada por $e_{W_1}(a,b) = (a,0)$.

El siguiente lema establece que la imagen de un endomorfismo idempotente $e \in End_R(M)$ es un sumando directo de M.

Lema 1.4.15. *Sea e un idempotente en $End_R(M)$. Entonces $1-e$ es un idempotente en $End_R(M)$. Además se cumple que:*

(1) $Ker\, e = \{m \in M | m = m(1-e)\} = Im\,(1-e)$,

(2) $Im\, e = \{m \in M | m = me\} = Ker\,(1-e)$,

(3) $M = Me \bigoplus M(1-e)$.

Con la notación del lema anterior, denotaremos algunas veces a la $Im\, e$ por Me.

Proposición 1.4.16. *Sea e un idempotente en $End_R(M)$. Entonces, existe un isomorfismo de anillos*

$$\phi : eEnd_R(M)e \longrightarrow End_R(Me)$$

dado por $\phi(ese) : Me \longrightarrow Me$, donde $\phi(ese)(me) = m(ese)$ para todo $me \in Me$.

Proposición 1.4.17. *Si $M = K \bigoplus K'$ entonces existe un único idempotente $e_K \in End_R(M)$ tal que*

$$K = Me_K \quad y \quad K' = M(1-e_K).$$

Un resultado inmediato del Lema 1.4.15 y la Proposición 1.4.17 es el siguiente corolario.

Corolario 1.4.18. *Un submódulo $K \leqslant M$ es un sumando directo de M si, y sólo si, $K = Me$ para algún endomorfismo idempotente e de M.*

Un tipo de R-módulos que trataremos en esta sección son los R-módulos inescindibles. De hecho estos módulos jugarán un papel importante en la seccion 1.11.

Definición 1.4.19. *Un R-módulo M, distinto de cero, se dice que es inescindible si sus únicos sumandos directos son 0 y M.*

Usaremos la siguiente definición en la sección 1.11.

Definición 1.4.20. *Sea M un R-módulo distinto de cero y sea K un sumando directo de M. Decimos que K es un sumando directo máximo de M si K tiene un sumando directo complementario N inescindible.*

Ejemplo 1.4.21.

(1) $\mathbb{R}^2$ *no es un* $\mathbb{R}$*-módulo inescindible ya que* $\mathbb{R}^2 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$.

(2) $\mathbb{Z}$ *como* $\mathbb{Z}$*-módulo es un módulo inescindible, ya que si* $\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} \bigoplus m\mathbb{Z}$ *con* $m, n \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $0 = n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = [nm]\,\mathbb{Z}$, *donde* $[nm]$ *es el mínimo común múltiplo de* m *y* n, *por lo que* $[nm] = 0$ *lo cual implica que* $m = 0$ *o* $n = 0$.

La siguiente proposición da una caracterización de los R-módulos inescindibles.

Proposición 1.4.22. *Sea M un R-módulo, distinto de cero, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *M es inescindible.*

(2) *0 y 1 son los únicos idempotentes en $End_R(M)$.*

(3) *1 es un idempotente primitivo en $End_R(M)$.*

El siguiente resultado caracteriza a los módulos inescindibles en términos de los endomorfismos idempotentes primitivos.

Corolario 1.4.23. *Sea $e \in End_R(M)$ un elemento idempotente distinto de cero. Entonces Me es inescindible si, y sólo si, e es un idempotente primitivo.*

1.5. Producto Directo

En esta sección se definirá el producto directo de un conjunto de R-módulos y se dará la propiedad universal de este, con el fin de notar que cualesquiera dos productos directos de un conjunto de R-módulos son isomorfos.

Definición 1.5.1. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de R-módulos. El producto cartesiano*

$$\bigtimes_{\alpha\in A} M_\alpha$$

es un R-módulo izquierdo con las operaciones definidas coordenada a coordenada. Es decir, $(x_\alpha)_{\alpha\in A}+(y_\alpha)_{\alpha\in A}=(x_\alpha+y_\alpha)_{\alpha\in A}$ y $r(x_\alpha)_{\alpha\in A}=(rx_\alpha)_{\alpha\in A}$ para cada $(x_\alpha)_{\alpha\in A},(y_\alpha)_{\alpha\in A}\in \bigtimes_{\alpha\in A} M_\alpha$ y $r\in R$. Se acostumbra denotar

$$\bigtimes_{\alpha\in A} M_\alpha=\prod_{\alpha\in A} M_\alpha.$$

Ejemplo 1.5.2. *Considere $\mathbb{R}$ como $\mathbb{R}$-módulo izquierdo. $M_i={}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ con $i\in\{1,2\}$. Entonces*

$$\prod_{i\in\{1,2\}} M_i={}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}\times{}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}.$$

El siguiente resultado establece la propiedad universal del producto directo.

Teorema 1.5.3 (Propiedad Universal)**.** *Sean $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de R-módulos izquierdos, N un R-módulo izquierdo y $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ R-homomorfismos donde $f_\alpha:N\longrightarrow M_\alpha$ para cada $\alpha\in A$. Entonces, existe un único R-homomorfismo $f:N\longrightarrow\prod_{\alpha\in A}M_\alpha$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & \prod_{\alpha\in A} M_\alpha \arrow[dl, "\pi_\alpha"] \\
& M_\alpha &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi_\alpha:\prod_{\alpha\in A}M_\alpha\longrightarrow M_\alpha$ está dada por $\pi_\alpha((x_\beta)_{\beta\in A})=x_\alpha,\quad\forall\,\alpha\in A$. Es decir, $\pi_\alpha f=f_\alpha$.

En la siguiente definición usamos la notación y propiedades del teorema anterior.

Definición 1.5.4. *A este único R-homomorfismo $f : N \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ se le conoce como el producto directo de $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ con $f_\alpha : N \longrightarrow M_\alpha$ para cada $\alpha \in A$ y se denota por $f = \prod_{\alpha \in A} f_\alpha$. Está caracterizado por $\pi_\alpha(\prod_{\alpha \in A} f_\alpha) = f_\alpha \quad \forall\, \alpha \in A$, a esta propiedad se le llama la propiedad universal del producto directo. Además, las funciones π_α, para $\alpha \in A$, definidas en el Teorema 1.5.3 son R-homomorfismos y se les conoce como las proyecciones naturales. Ver la Definición 1.6.4.*

Ejemplo 1.5.5. *Sean V un F-espacio vectorial de dimensión 2 y $\beta = \{v_1, v_2\}$ una base de V. Considere $\pi_1 : \langle v_1 \rangle \prod \langle v_2 \rangle \longrightarrow \langle v_1 \rangle$ y $\pi_2 : \langle v_1 \rangle \prod \langle v_2 \rangle \longrightarrow \langle v_2 \rangle$. Sean W un F-espacio vectorial, $f_1 : W \longrightarrow \langle v_1 \rangle$ y $f_2 : W \longrightarrow \langle v_2 \rangle$ transformaciones lineales. Se define $f : W \longrightarrow \langle v_1 \rangle \prod \langle v_2 \rangle$ dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ para todo $x \in W$. Observe que f es una transformación lineal que hace conmutar el siguiente diagrama para $i \in \{1, 2\}$:*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \langle v_1 \rangle \prod \langle v_2 \rangle \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & \langle v_i \rangle & \end{tikzcd}$$

Además, si $g : W \longrightarrow \langle v_1 \rangle \prod \langle v_2 \rangle$ es una transformación lineal que también hace conmutar el diagrama anterior, entonces tenemos que $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ donde $g_1(x) = \pi_1(g(x)) = f_1(x)$ y también $g_2(x) = \pi_2(g(x)) = f_2(x)$ lo cual implica $f(x) = g(x)$ para todo $x \in W$. Por lo tanto f es única.

La siguiente noción establece el concepto general de producto directo.

Definición 1.5.6. *Un par $(M, \{p_\alpha\}_{\alpha \in A})$ que consiste de un R-módulo M y de una familia de R-homomorfismos $p_\alpha : M \longrightarrow M_\alpha$, con $\alpha \in A$, es un producto directo de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de R-módulos, en caso de que para cada R-módulo N y cada familia $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de R-homomorfismos $f_\alpha : N \longrightarrow M_\alpha$ con $\alpha \in A$, exista un único R-homomorfismo $f : N \longrightarrow M$ tal que $f_\alpha = p_\alpha f$ para toda $\alpha \in A$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & M \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.5.7. *Sean V un F-espacio vectorial de dimensión 2 y $\beta = \{v_1, v_2\}$ una base de V. Considere $p_1 : V \longrightarrow \langle v_1 \rangle$ donde $p_1(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1v_1$ y $p_2 : V \longrightarrow \langle v_2 \rangle$ donde $p_2(a_1v_1 + a_2v_2) = a_2v_2$. Sean W un F-espacio vectorial, $g_1 : W \longrightarrow \langle v_1 \rangle$ y $g_2 : W \longrightarrow \langle v_2 \rangle$ transformaciones lineales. Se define $g : W \longrightarrow V$ dada por $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$. Observe que g hace conmutar el siguiente diagrama para cada $i \in \{1, 2\}$*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g_i"'] & & V \arrow[dl, "p_i"] \\ & \langle v_i \rangle & \end{tikzcd}$$

Por lo que, $(V, (p_i)_{i\in\{1,2\}})$ es un producto directo de $(\langle v_i \rangle)_{i\in\{1,2\}}$.

El siguiente resultado muestra que cualesquiera dos productos directos de una familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de R-módulos son isomorfos.

Teorema 1.5.8. *Sea $(M, \{p_\alpha\}_{\alpha\in A})$ un producto directo de $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Entonces un par $(M', \{p'_\alpha\}_{\alpha\in A}))$ donde $p'_\alpha : M' \longrightarrow M_\alpha$ es un R-homomorfismo ($\alpha \in A$) es también un producto directo de $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ si, y sólo si, existe un único isomorfismo $p : M' \longrightarrow M$ tal que $p_\alpha p = p'_\alpha$ para cada $\alpha \in A$,es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p'_\alpha"'] & & M \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd}$$

La siguiente definición será muy útil en la próxima sección.

Definición 1.5.9. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de R-módulos y sea $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha in A} M_\alpha$ y π_α con $\alpha \in A$ las proyecciones naturales.*

(1) Definimos el soporte de x denotado por $s(x)$ como:

$$s(x) = \{\alpha \in A : \pi_\alpha(x) = x_\alpha \neq 0\}.$$

(2) Se dice que x es cero para casi toda $\alpha \in A$ si su soporte $s(x)$ es finito.

Ejemplo 1.5.10. *Considere $\mathbb{R}_1 \prod \mathbb{R}_2$ como $\mathbb{R}$-módulo izquierdo, donde $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}$ para $i = \{1, 2\}$. Sea $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}_1 \prod \mathbb{R}_2 : s((a, b))$ es finito$\}$, observemos que para todo $(a, b) \in \mathbb{R}_1 \prod \mathbb{R}_2$ se tiene que $s((a, b))$ a lo más tiene dos elementos, por lo que $A = \mathbb{R}_1 \prod \mathbb{R}_2$.*

1.6. Sumas Directas

En esta sección estudiaremos el concepto dual del producto directo. Esto es, la suma directa.

Definición 1.6.1. *Un par* $(M, \{j_\alpha\}_{\alpha\in A})$ *que consiste de un R-módulo* M *y de una familia de R-homomorfismos* $j_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$, *con* $\alpha \in A$, *se dice que es una suma directa (coproducto) de la familia de* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *de R-módulos, en caso de que para cada R-módulo* N *y cada familia* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *de R-homomorfismos* $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N$ *con* $\alpha \in A$, *exista un único R-homomorfismo* $f : M \longrightarrow N$ *tal que* $f_\alpha = fj_\alpha$ *para toda* $\alpha \in A$. *Es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} N & & M \arrow[ll, "f"'] \\ & M_\alpha \arrow[ul, "f_\alpha"] \arrow[ur, "j_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Análogamente a lo hecho para el producto directo se tiene que si la suma directa de un conjunto indexado $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ existe, esta es única (salvo isomorfismo).

Ejemplo 1.6.2. *Sea* $\{M_j\}_{j\in\{1,2\}}$ *la familia de* $\mathbb{R}$*-módulos izquierdos donde* $M_j = \mathbb{R}$ *para* $j \in \{1,2\}$. *Considere el par* $(\mathbb{R}^2, (i_j)_{j\in\{1,2\}})$ *donde* $i_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $i_1(r) = (r, 0)$ *y* $i_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $i_2(r) = (0, r)$. *Sea* N *un* $\mathbb{R}$*-módulo izquierdo y* $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow N$ *para* $i \in \{1,2\}$. *Se define* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow N$ *dada por* $f(a,b) = f_1(a) + f_2(b)$. *Observemos que* $f(i_1(r)) = f(r,0) = f_1(r) + f_2(0) = f_1(r)$ *y también* $f(i_2(r)) = f(0,r) = f_1(0) + f_2(r) = f_2(r)$, *es decir,* f *hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} N & & \mathbb{R}^2 \arrow[ll, "f"'] \\ & M_j \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, "i_j"'] & \end{tikzcd}$$

para cada $j \in \{1,2\}$. *Además si* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow N$ *es un* $\mathbb{R}$*-homomorfismo que también hace conmutar el diagrama anterior, se tiene que* $g(a,b) = g(i_1(a) + i_2(b)) = g(i_1(a)) + g(i_2(b)) = f_1(a) + f_2(b) = f(a,b)$ *por lo que el* $\mathbb{R}$*-homomorfismo* f *que hace conmutar el diagrama es único.*

El siguiente resultado nos ayudará a establecer de forma concreta que el conjunto $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha = \{x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} M_\alpha : s(x) \text{ es finito } \}$ es una suma directa de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de R-módulos.

Lema 1.6.3. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de R-módulos izquierdos. Entonces*

$$\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha = \{x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} M_\alpha : s(x) \text{ es finito } \}$$

es un submódulo de $\prod_{\alpha\in A} M_\alpha$.

Definición 1.6.4. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de R-módulos izquierdos. Se define para $\beta \in A$*

(1)

$$i_\beta : M_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$$

dada por $i_\beta(x) = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ donde $x_\alpha = 0$ para $\alpha \neq \beta$ y $x_\beta = x$. Se le conoce como la β-ésima inclusión natural.

(2)

$$\pi_\beta : \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \longrightarrow M_\beta$$

dada por $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in A}) = x_\beta$. Se le conoce como la β-ésima proyección natural.

Notemos que i_β es un monomorfismo y π_β es un epimorfismo.

Ejemplo 1.6.5. *Sean $M_1 = \mathbb{R}$ y $M_2 = \mathbb{R}$ considerados como $\mathbb{R}$-módulos izquierdos. Entonces $i_1 : M_1 \longrightarrow \bigoplus_{i\in\{1,2\}} M_i$ está dada por $i_1(a) = (a, 0)$ y $\pi_2 : \bigoplus_{i\in\{1,2\}} M_i \longrightarrow M_2$ está dada por $\pi_2(a, b) = b$.*

Corolario 1.6.6. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de R-módulos izquierdos. Entonces*

$$\left(\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha, \{i_\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$$

es una suma directa de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$, donde $i_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ es la α-ésima inclusión natural $\forall\, \alpha \in A$.

El corolario anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.6.7. *Sea una familia* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *de* R*-módulos izquierdos se define la suma directa externa de* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *como el* R*-módulo izquierdo* $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$.

Ejemplo 1.6.8. *Considere* $\mathbb{Z}$ *como* $\mathbb{Z}$*-módulo izquierdo. Sea* $\{M_i\}_{i\in\{1,2\}}$ *la familia de* $\mathbb{Z}$*-módulos donde* $M_i = \mathbb{Z}$ *para cada* $i \in \{1,2\}$*. Entonces*

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \bigoplus_{i\in\{1,2\}} M_i.$$

Observación 1.6.9. *Sea* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *una familia de* R*-módulos izquierdos donde* A *es finito. Observemos que para cada* $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ *se tiene que* $s(x)$ *a lo más tiene el número de elementos de* A*, por lo que en este caso*

$$\prod_{\alpha\in A} M_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha.$$

Definición 1.6.10. *Sean* N *un* R*-módulo izquierdo,* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *una familia de* R*-módulos izquierdos,* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *un conjunto indexado de* R*-homomorfismos* $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N$ *para* $\alpha\in A$ *y* $\pi_\beta : \bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha$ *las proyecciones naturales para* $\beta\in A$*. Definimos la función:*

$$f : \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \longrightarrow N$$

dada por $f(x) = \sum\limits_{\alpha\in s(x)} f_\alpha(\pi_\alpha(x))$ *si* $s(x) \neq \varnothing$ *y si* $s(x) = \varnothing$ *se define* $f(x) = 0$*. Se dice que* f *es la suma directa de* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *y se denota por*

$$f = \bigoplus_{\alpha\in A} f_\alpha$$

Para cada $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ *se tiene que* $f(x) = \sum\limits_{\alpha\in A} f_\alpha(x_\alpha)$*.*

Notemos que f es un R-homomorfismo ya que tanto π_α como f_α lo son. Más aún, la siguiente proposición muestra la propiedad que cumple el R-homomorfismo $f = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$.

Proposición 1.6.11. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de submódulos izquierdos. Sea N un R-módulo izquierdo y $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de R-homomorfismos $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N$ con $\alpha \in A$. Entonces el R-homomorfismo $f = \bigoplus_{\alpha\in A} f_\alpha : \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \longrightarrow N$ es tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \arrow[rr, "f"] & & N \\ & M_\alpha \arrow[ul, "i_\alpha"] \arrow[ur, "f_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $\alpha \in A$. Donde $i_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ es la inclusión natural para cada $\alpha \in A$. Más aún, $f = \bigoplus_{\alpha\in A} f_\alpha$ es único con esta propiedad.

La proposición anterior muestra que

$$\left(\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha, \{i_\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$$

es una suma directa de $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Ver la Definición 1.6.1.
Para terminar esta sección tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.6.12. *Si $f = \bigoplus_{\alpha\in A} f_\alpha$ entonces $Imf = \sum_{\alpha\in A} Imf_\alpha$ donde*

$$\sum_{\alpha\in A} Imf_\alpha = \{f_{\alpha_1}(x_1) + \cdots + f_{\alpha_n}(x_n) : \alpha_i \in A\}.$$

Ejemplo 1.6.13. *Considere $M_i = \mathbb{Z}$ con $i \in \{1,2\}$ como $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo, a $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\pi_i : \bigoplus_{j=1}^{2} M_j \longrightarrow M_i$ las proyecciones naturales para cada $i \in \{1,2\}$ y los $\mathbb{Z}$-homomorfismos $f_i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ las proyecciones canónicas para cada $i \in \{1,2\}$. Sea $x = (x_j)_{j\in\{1,2\}} \in \bigoplus_{j=1}^{2} M_j$, se tiene que $f : \bigoplus_{j=1}^{2} M_j \longrightarrow N$ está dada por $f(x) = \sum_{j=1}^{2} f_j\pi_j(x) = f_1\pi_1(x) + f_2\pi_2(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) = (x_1 + 2\mathbb{Z}) + (x_2 + 2\mathbb{Z}) = (x_1 + x_2) + 2\mathbb{Z}$.*

1.6.1. Suma Directa Interna

En esta sección abordamos el concepto de suma directa interna y damos una caracterización de ella a través de endomorfismos idempotentes.

Definición 1.6.14. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de submódulos de M. Decimos que M es la suma directa interna de $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ si*

$$i = \bigoplus_{\alpha\in A} i_\alpha : \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \longrightarrow M$$

es un isomorfismo, donde $i_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$ es la inclusión canónica de M_α en M para cada $\alpha \in A$. Ver el Ejemplo 1.2.2.

Ejemplo 1.6.15. *Sean F un campo, V un F-espacio vectorial de dimensión 2 y $\beta = \{v_1, v_2\}$ una base para V. Se tiene que $\langle v_1\rangle$ y $\langle v_2\rangle$ son submódulos de V y además $i : \langle v_1\rangle \oplus \langle v_2\rangle \longrightarrow V$ es un isomorfismo ya que para todo $v \in V$ se tiene que que existen $k_1, k_2 \in F$ tales que $v = k_1v_1 + k_2v_2$ y si $i_1(k_1v_1, k_2v_2) = 0$ para $k_1, k_2 \in F$ se tiene que $k_1 = 0 = k_2$, luego $k_1v_1 + k_2v_2 = 0$.*

El siguiente lema nos da una caracterización de la suma directa interna. Este lema se desprende directo de la Definición 1.6.14 usando que i es un isomorfismo.

Lema 1.6.16. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de submódulos de M. Entonces M es la suma directa interna de $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ si, y sólo si, cada $m \in M$ se puede escribir de manera única como $m = \sum_{\alpha\in A} m_\alpha$, con $m_\alpha \in M_\alpha$ para toda $\alpha \in A$ y sólo un número finito de m_α es distinto de cero.*

El concepto de suma directa está intimamente relacionado con el concepto de un conjunto de R-módulos independiente. Así pues, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.6.17. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de submódulos de M. Decimos que $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es independiente si para cada $\alpha \in A$ se tiene que $M_\alpha \cap (\sum_{\beta\neq\alpha} M_\beta) = 0$.*

Ejemplo 1.6.18. *Sean $M = \mathbb{R}^3$, $M_1 = \{(a,0,0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$, $M_2 = \{(0,b,0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}$ y $M_3 = \{(0,0,c) \in \mathbb{R}^3 : c \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$-módulos izquierdos. Se tiene que $\{(0,0,0)\} = M_1 \cap (M_2 + M_3) = M_2 \cap (M_1 + M_3) = M_3 \cap (M_1 + M_2)$ por lo que $\{M_i\}_{i\in\{1,2,3\}}$ es independiente.*

La siguiente proposición caracteriza a la suma de una familia de R-submódulos independientes $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M. Ver la Definición 1.1.18.

Proposición 1.6.19. *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de submódulos de M, sean $i_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$ los R-homomorfismos inclusión canónica. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\sum\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ *es la suma directa interna de* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

(2) $i = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} i_\alpha : \bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha \longrightarrow M$ *es un monomorfismo, donde* $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ *es la suma directa externa de* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

(3) $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *es un conjunto independiente.*

Corolario 1.6.20. *Un R-módulo M es la suma directa interna de sus submódulos $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ si, y sólo si, $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es independiente y M es el R-módulo generado por $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (Ver la Definición 1.1.18).*

Como vimos en la sección 1.4 el concepto de suma directa está intimamente relacionado con el concepto de endomorfismo idempotente. Así pues, supongamos que M es la suma directa interna de $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ entonces $M = M_\alpha \oplus \sum\limits_{\beta\neq\alpha} M_\beta$ y sabemos que existe un único $e_\alpha \in End_R(M)$ tal que $M_\alpha = Me_\alpha$ y $Ker\, e_\alpha = \sum\limits_{\beta\neq\alpha} M_\beta$ (Ver la Proposición 1.4.17). Con esta notación tenemos la siguiente definición.

Definición 1.6.21. *Llamamos a la familia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ los idempotentes para la descomposición $M = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$. Para cada $\alpha \in A$ decimos que e_α es el idempotente para M_α en esta descomposición.*

Ejemplo 1.6.22. *Sean $M = \mathbb{R}^3$, $M_1 = \{(a,0,0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$, $M_2 = \{(0,b,0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}$ y $M_3 = \{(0,0,c) \in \mathbb{R}^3 : c \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$-módulos izquierdos. Observemos que $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ y $e_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $e_1((a,b,c)) = (a,0,0)$, $e_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $e_2((a,b,c)) = (0,b,0)$, $e_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $e_3((a,b,c)) = (0,0,c)$ son elementos idempotentes en $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ que cumplen que $Me_1 = M_1$, $Me_2 = M_2$ y $Me_3 = M_3$.*

Para terminar la sección tenemos la siguiente caracterización de la suma directa interna.

Proposición 1.6.23. *Sea* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *una familia de* R*-submódulos de un módulo* M*. Entonces* $M = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ *si, y sólo si, existe una familia* $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ *de endomorfismos idempotentes de* M *tales que para todo* $\alpha \in A$

$$M_\alpha = Me_\alpha \quad y \quad \sum_{\beta\neq\alpha} M_\beta = Ker\, e_\alpha$$

Más aún, si tales endomorfismos idempotentes de M *existen entonces* e_α *es el idempotente de* M_α *en la descomposición* $M = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$.

Corolario 1.6.24. *Los idempotentes* $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *para una descomposición* $M = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ *son ortogonales. Más aún, si* $m \in M$*, entonces* $me_\alpha = 0$ *para casi todo* $\alpha \in A$ *y*

$$m = \sum_A me_\alpha.$$

En particular, tenemos el siguiente resultado cuando el conjunto de R-módulos es finito.

Corolario 1.6.25. *Sean* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ R*-submódulos de* M*. Entonces* $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ *si, y sólo si, existe un conjunto completo de idempotentes ortogonales* $e_1, e_2, \ldots, e_n \in End_R(M)$ *tales que* $M_i = Me_i$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Capítulo 2

Tópicos Avanzados de la Teoría de Módulos

En este capítulo estudiamos los teoremas centrales de la teoría de módulos que son necesarios en el desarrollo de la teoría de sistemas estratificantes.

2.1. Módulos Semisimples

En esta sección se trabajará con R-módulos semisimples, veremos algunas propiedades de ellos y se dará un caracterización que involucra a sumandos directos y sucesiones exactas que se escinden.

Recordemos que un R-módulo izquierdo T, $T \neq 0$ es un R-módulo simple si sus únicos submódulos son T y 0. Por la Observación 1.1.31 los R-módulos simples existen.

Definición 2.1.1. *Sea $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de R-submódulos simples de un R-módulo M.*

(1) Si M es la suma directa interna de $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$, se dice que $M = \bigoplus_{\alpha\in A} T_\alpha$ es una descomposición semisimple de M.

(2) Un R-módulo M es semisimple si tiene una descomposición semisimple.

Ejemplo 2.1.2.

(1) Si M es un R-módulo simple, entonces M es un R-módulo semisimple.

(2) $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-módulo semisimple ya que $\mathbb{R}^2 = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0,b) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{R}\}$ donde tanto $\{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ y $\{(0,b) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{R}\}$ son $\mathbb{R}$-módulo simples.

(3) $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-módulo semisimple.

El siguiente resultado muestra que si un módulo M es la suma de módulos simples, entonces todo submódulo de M es un sumando directo de M.

Lema 2.1.3. *Sea $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de submódulos simples de un R-módulo M. Si $M = \sum\limits_{\alpha\in A} T_\alpha$. Entonces para cada submódulo K de M existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\{T_\beta\}_{\beta\in B}$ es independiente y*

$$M = K \oplus (\bigoplus_{\beta\in B} T_\beta).$$

La siguiente proposición muestra que todo submódulo y todo módulo cociente de un R-módulo semisimple es semisimple.

Proposición 2.1.4. *Sea M un R-módulo izquierdo semisimple con descomposición semisimple $M = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} T_\alpha$. Dada la sucesión exacta corta*

$$\eta : \qquad 0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

se tiene que:

(1) La sucesión η se escinde.

(2) K y N son R-módulos semisimples.

(3) Exite $B \subseteq A$ tal que

$$N \cong \bigoplus_{\beta\in B} T_\beta \qquad y \qquad K \cong \bigoplus_{\alpha\in A\setminus B} T_\alpha.$$

Corolario 2.1.5. *Sea $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de submódulos simples de un R-módulo M. Si T es un submódulo simple de M tal que $T \cap (\sum\limits_{\alpha\in A} T_\alpha) \neq 0$ entonces existe $\alpha \in A$ tal que $T_\alpha \cong T$.*

El siguiente teorema da una caracterización para los R-módulos semisimples.

Teorema 2.1.6. *Sea M un R-módulo izquierdo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) M es un R-módulo semisimple.

(2) M es generado por R-módulos simples.

(3) M es la suma de una familia de R-módulos simples.

(4) M es la suma de sus submódulos simples.

(5) Cada submódulo de M es un sumando directo de M.

(6) Cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

se escinde.

2.2. El Soclo y el Radical

Otros conceptos importantes son el soclo y el radical de un R-módulo izquierdo. En esta sección abordaremos estos conceptos. Terminaremos caracterizando al soclo y al radical de un R-módulo a través de R-módulos esenciales y R-módulos superfluos.

Definición 2.2.1. *Sea M un R-módulo izquierdo, el soclo de M, es la suma de todos los submódulos simples de M, es decir*

$$Soc(M) = \sum_{\alpha \in A} S_\alpha$$

donde S_α es un submódulo simple de M para toda $\alpha \in A$.

Observamos que por el Teorema 2.1.6 tenemos que el soclo de un R-módulo M es semisimple.

Ejemplo 2.2.2.

(1) Conside $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Tenemos que $N = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ es el único submódulo simple de $\mathbb{Z}_4$, por lo que $Soc(\mathbb{Z}_4) = \{\overline{0}, \overline{2}\}$.

(2) Conside $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$*, sus* $\mathbb{Z}$*-módulos simples son* $M = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ *y* $N = \{\overline{0}, \overline{3}\}$ *y como* $\mathbb{Z}_6 = M \oplus N$ *tenemos que* $\mathbb{Z}_6$ *es semisimple. Por tanto* $Soc\,(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6$*.*

Proposición 2.2.3. *Sean* M*,* N R*-módulos izquierdos y* $f : M \longrightarrow N$ *un* R*-homomorfismo. Entonces*

$$f(Soc\,(M)) \leqslant Soc\,(N).$$

Corolario 2.2.4. *Sean* M *un* R*-módulo izquierdo y* $K \leqslant M$*. Entonces*

$$Soc\,(K) = K \cap Soc\,(M)$$

En particular, $Soc\,(Soc\,(M)) = Soc\,(M)$*.*

Ejemplo 2.2.5. *Consideremos* $\mathbb{Z}_6$ *como* $\mathbb{Z}$*-módulo izquierdo y* $N = \{\overline{0}, \overline{3}\}$*. Se tiene que* $Soc\,(\mathbb{Z}_6) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} + N$ *(ver el Ejemplo 2.2.2), como* N *es un* $\mathbb{Z}$*-módulo simple,* $Soc\,(N) = N$*. Por lo que* $Soc\,(N) = N = N \cap Soc\,(\mathbb{Z}_6)$*.*

A continuación estudiaremos el concepto de radical de un R-módulo M.

Definición 2.2.6. *Sea* M *un* R*-módulo izquierdo, se define el radical de* M *como*

$$Rad\,(M) = \bigcap \{K < M : K \text{ es un submódulo máximal de } M\}.$$

Ejemplo 2.2.7. *Sea* $M = \mathbb{Z}$ *considerado como* $\mathbb{Z}$*-módulo, se sabe que los submódulos maximales de* M *son los* $p\mathbb{Z}$ *donde* p *es primo, por lo que* $Rad\,(M) = \bigcap \{p\mathbb{Z} : p \text{ primo }\} = 0$*.*

La siguiente proposición involucra al radical de un R-módulo N y la imagen del radical de un R-módulo M a través de un R-homomorfismo $f : M \longrightarrow N$.

Proposición 2.2.8. *Sean* M*,* N R*-módulos izquierdos y* $f : M \longrightarrow N$ *un* R*-homomorfismo. Entonces*

$$f(Rad\,(M)) \leqslant Rad\,(N).$$

En particular, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.9. *Sean* M*,* N R*-módulos izquierdos y* $f : M \longrightarrow N$ *un epimorfismo tal que* $Ker\, f \leqslant Rad\,(M)$*. Entonces* $Rad\,(N) = f(Rad\,(M))$*. En particular*

$$Rad\,((M/Rad\,(M))) = 0.$$

Ejemplo 2.2.10. *Considere* $\mathbb{Z}_6$ *como* $\mathbb{Z}$*-módulo izquierdo, se sabe que* $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ *y* $\{\overline{0}, \overline{3}\}$ *son todos los submódulos maximales de* $\mathbb{Z}_6$ *por lo que* $Rad\,(\mathbb{Z}_6) = \{\overline{0}\}$.

Los siguientes conceptos serán de gran utilidad para describir de otra manera al soclo y al radical de un R-módulo M.

Definición 2.2.11. *Sea* M *un* R*-módulo izquierdo*

(1) Un submódulo $K \leqslant M$ *es esencial en* M*, lo cual se denotará por* $K \trianglelefteq M$*, si para cada submódulo* $L \leqslant M$ *que cumpla* $K \cap L = 0$ *se tiene* $L = 0$.

(2) Un submódulo $K \leqslant M$ *es superfluo en* M*, lo cual se denotará por* $K \ll M$*, si para cada submódulo* $L \leqslant M$ *que cumpla* $K + L = M$ *se tiene que* $L = M$.

Ejemplo 2.2.12. *Considere* $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ *como* $\mathbb{Z}$*-módulo, se tiene que* $N = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ *es un submódulo esencial y superfluo de* $\mathbb{Z}_4$.

Terminamos esta sección dando el siguiente resultado, el cual nos da una caracterización del soclo y del radical de un R-módulo izquierdo M.

Proposición 2.2.13. *Sea* M *un* R*-módulo izquierdo se tiene que*

(1) $Soc\,(M) = \bigcap\{L \leqslant M : L \text{ es esencial en } M\}$.

(2) $Rad\,(M) = \sum\{L \leqslant M : L \text{ es superfluo en } M\}$.

2.3. Condiciones de Cadena

En esta sección introduciremos los conceptos de R-módulo noetheriano y artiniano. Veremos la relación que existe entre ellos con las sucesiones exactas cortas. Por último, daremos un resultado que involucra a los R-módulos inescindibles.

Definición 2.3.1. *Sea* M *un* R*-módulo izquierdo.*

(1) Un conjunto $\mathcal{L}$ *de submódulos de* M *satisface la condición ascendente de cadena, si para cualquier cadena*

$$L_1 \leqslant L_2 \leqslant \cdots \leqslant L_i \leqslant \cdots$$

donde $L_i \in \mathcal{L}$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$*, existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $L_{n_0+j} = L_{n_0}$ *para* $j \in \{1, 2, \ldots\}$*;*

(2) Un conjunto $\mathcal{L}$ de submódulos de M satisface la condición descendente de cadena, si para cualquier cadena

$$L_1 \geqslant L_2 \geqslant \cdots \geqslant L_i \geqslant \cdots$$

donde $L_i \in \mathcal{L}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_{n_0+j} = L_{n_0}$ para $j \in \{1, 2, \ldots\}$.

Ejemplo 2.3.2. *Sea $M = \mathbb{Z}$ considerado como $\mathbb{Z}$-módulo. Se tiene que $\mathcal{L} = \{\mathbb{Z}n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface la condición ascendente de cadena. Para ver esto, observemos que si $m\mathbb{Z} \leqslant n\mathbb{Z}$ implica que $n \mid m$ y como m tiene un número finito de divisores enteros para todo $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, sólo hay una cantidad finita de $K \in \mathcal{L}$ tales que $m\mathbb{Z} \leqslant K$. Ahora bien, sea*

$$n_1\mathbb{Z} \leqslant n_2\mathbb{Z} \leqslant \cdots \leqslant n_i\mathbb{Z} \leqslant \cdots$$

cualquier cadena en $\mathcal{L}$. Si $n_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ la condición se cumple. Supongamos que no es el caso; consideremos $n_j\mathbb{Z}$ en la cadena tal que $n_j\mathbb{Z} \neq 0$. Si no se satisface la condición ascendente de cadena existe un conjunto de subíndices $\{j_1, j_2, \ldots\}$ tales que

$$n_j\mathbb{Z} \lneqq n_{j_1}\mathbb{Z} \lneqq \cdots \lneqq n_{j_i}\mathbb{Z} \lneqq \cdots$$

lo cual contradice la observación anterior.

Además, $\mathcal{L}$ no cumple la condición descendente de cadena. Si consideramos la cadena

$$2\mathbb{Z} \geqslant (2^2)\mathbb{Z} \geqslant \cdots \geqslant (2^i)\mathbb{Z} \geqslant \cdots$$

es claro que no existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(2^{n_0})\mathbb{Z} = (2^{n_0+j})\mathbb{Z}$ para $j \in \{1, 2, \ldots\}$.

Definición 2.3.3. *Sea M un R-módulo.*

(1) M es noetheriano si para cualquier cadena de submódulos de M

$$L_1 \leqslant L_2 \leqslant \cdots \leqslant L_i \leqslant \cdots$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ que cumpla $m \geqslant n_0$ se tiene que $L_m = L_{n_0}$. Es decir, si el conjunto $\mathcal{L}$ de los submódulos de M satisface la condición ascendente de cadena.

(2) *M es artiniano si para cualquier cadena de submódulos de M*

$$L_1 \geqslant L_2 \geqslant \cdots \geqslant L_i \geqslant \cdots$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ que cumpla $m \geqslant n_0$ se tiene que $L_m = L_{n_0}$. Es decir, si el conjunto $\mathcal{L}$ de los submódulos de M satisface la condición descendente de cadena.

Ejemplos 2.3.4.

(1) *$\mathbb{Z}$ es noetheriano y no es artiniano.*

(2) *Sean F un campo y V un F-espacio vectorial de dimensión infinita entonces ${}_FV$ no es noetheriano ni artiniano.*

(3) *Si S es un R-módulo simple entonces S es noetheriano y artiniano.*

A continuación se da una caracterización de los módulos finitamente generados, la cual es necesaria para probar la caracterización de módulo noetheriano dada en la Proposición 2.3.6.

Lema 2.3.5. *Sea M un R-módulo izquierdo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(1) *Para todo conjunto $\mathcal{A}$ de submódulos de M tal que*

$$M = \sum_{N \in \mathcal{A}} N$$

existe un subconjunto finito $F \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$M = \sum_{N \in F} N.$$

(2) *M es finitamente generado.*

Proposición 2.3.6. *Sea M un R-módulo izquierdo, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *M es noetheriano.*

(2) *Cada submódulo de M es finitamente generado.*

(3) Cada conjunto $\mathcal{L}$ no vacío de submódulos de M tiene un elemento maximal.

Denotamos por $R - Mod$ a la categoría de los R-módulos izquierdos sobre un anillo R. Un elemento $K \in R - Mod$ es un elemento maximal (minimal) en $R - Mod$ si para cada $M \in R - Mod$ que cumpla $K \leqslant M$ $(K \geqslant M)$ se tiene que $K = M$.

El Lema 2.3.5 motiva la siguiente definición, la cual establece el concepto dual de R-módulo finitamente generado.

Definición 2.3.7. *Un R-módulo izquierdo M se dice que es finitamente cogenerado en caso de que para cualquier subconjunto $\mathcal{A}$ de submódulos de M con*

$$\bigcap_{N \in \mathcal{A}} N = 0$$

existe un subconjunto finito $F \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$\bigcap_{N \in F} N = 0.$$

Ejemplo 2.3.8. *Sea S un R-módulo simple. Entonces S es finitamente cogenerado.*

Los módulos artinianos pueden ser caracterizados a través del concepto de R-módulo finitamente cogenerado como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.3.9. *Sea M un R-módulo izquierdo, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) M es artiniano.

(2) Cada módulo cociente de M es finitamente cogenerado.

(3) Cada conjunto $\mathcal{L}$ no vacío de submódulos de M tiene un elemento mínimal.

El siguiente resultado será importante.

Corolario 2.3.10. *Sea M un R-módulo no cero. Se tiene que:*

(1) Si M es artiniano, entonces M tiene un submódulo simple.

(2) Si M es noetheriano, entonces M tiene un submódulo maximal.

La siguiente proposición establece una relación entre los módulos artinianos o noetherianos y las sucesiones exactas cortas que nos será de gran utilidad.

Proposición 2.3.11. *Sean K, M, N, R-módulos izquierdos, y*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Entonces M es artiniano (noetheriano) si, y sólo si, K y N son artinianos (noetherianos).

De la proposición anterior se tiene de forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 2.3.12. *Sea M un R-módulo izquierdo. Si*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Entonces M es artiniano (noetheriano) si, y sólo si, cada M_i $(i = 1, \ldots, n)$ es artiniano (noetheriano).

Terminamos esta sección con el siguente resultado, el cual retomaremos en la sección 1.11 .

Proposición 2.3.13. *Sea M un R-módulo izquierdo no cero. Si M es artiniano o noetheriano entonces M es la suma directa*

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

de un conjunto finito de submódulos inescindibles.

2.4. Módulos de Longitud finita

Retomaremos parte de la sección anterior para caracterizar a los R-módulos que tienen series de composición. Resulta que dichos módulos son precisamente aquellos módulos no cero que son artinianos y noetherianos. Ver la Proposición 2.4.4. Después demostraremos que la longitud $l(M)$ de un módulo no depende de la serie de composición. Esto es, probaremos el Teorema de Jordan-Hölder.

Definición 2.4.1.

(1) *Un R-módulo M es de longitud finita si existe una filtración (cadena) finita de submódulos*

$$F: \quad M = M_0 \geqslant M_1 \geqslant \cdots \geqslant M_n = 0$$

tal que (M_i/M_{i+1}) *es cero o es simple para* $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(2) *Decimos que dicha filtración F de M es una serie de composición generalizada y a los módulos cocientes no cero* (M_i/M_{i+1}) *se les llama los factores de composición de la filtración F.*

(3) *Si todo módulo cociente* (M_i/M_{i+1}) *es diferente de cero para* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *entonces se dice que F es una serie de composición para M de longitud n.*

(4) *Para un R-módulo simple S definimos* $m_S^F(M)$ *como el número de factores de composición de F que son isomorfos a S.*

(5) *Para* $M \neq 0$ *y F una serie de composición de M se define la longitud* $l_F(M)$ *como*

$$\sum_S m_S^F(M)$$

donde la suma se toma sobre todos los R-módulos simples.

(6) *Para* $M \neq 0$. *Se define la longitud* $l(M)$ *de M como el mínimo de* $l_F(M)$. *Esto es,*

$$l(M) = min\{l_F(M) : F \text{ es filtración de } M\}$$

y $m_S(M)$ *como el mínimo de* $m_S^F(M)$. *Esto es,*

$$m_S(M) = min\{m_S^F(M) : F \text{ es filtración de } M\}$$

(7) *Para* $M = 0$ *definimos* $l(M) = 0$.

Ejemplos 2.4.2.

(1) *Sean* $N_1 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ *y* $N_2 = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$. *Se sabe que* $\mathbb{R}^2 = N_1 \oplus N_2$ *y tenemos que*

$$F: \quad \mathbb{R}^2 = M_0 \geqslant N_1 \geqslant 0$$

es una serie de composición generalizada donde sus factores de composición son $\mathbb{R}^2/N_1 \cong N_2$ *y* $N_1/0 \cong N_1$*, y dado que* $N_1 \cong N_2$ *es un* $\mathbb{R}$*-módulo simple tenemos que* $m^F_{N_1}(\mathbb{R}^2) = 2$ *y por lo tanto* $l_F({}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2) = 2$.

(2) *Sean* F *un campo y* V *un* F*-espacio vectorial. Sea* $x \in V\backslash\{0_V\}$ *se tiene que* $F\{x\} = \{kx : k \in F\}$ *es un* F*-módulo simple y*

$$G: \quad F\{x\} = M_0 \geqslant M_1 = 0$$

es una serie de composición para $F\{x\}$, $m^G_{F\{x\}}(F\{x\}) = 1$ *y* $l_G(F\{x\}) = \sum_{\mathcal{K}S} m^G_S(F\{x\}) = 1$.

(3) *Sea* F *un campo y* V *un* F*-espacio vectorial de dimensión finita. Sea* $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una* F*-base para* V*. Como* $V = Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus \cdots \oplus Fv_n$ *se tiene que:*

$$G: \quad V > Fv_2 \oplus Fv_3 \oplus \cdots \oplus Fv_n > Fv_3 \oplus Fv_4 \oplus \cdots \oplus Fv_n > \cdots > Fv_n > 0$$

es una serie de composición para V *y* $l_G(V) = n$.

En lo que sigue enunciaremos y probaremos el Teorema de Jordan-Hölder. Para ello, consideremos primero

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta y sea F una serie de composición generalizada para B:

$$B = B_0 \geqslant B_1 \geqslant \cdots \geqslant B_{n-1} \geqslant B_n = 0$$

La filtración F induce filtraciones F' para A y F'' para C dadas por:

$$A = f^{-1}(B) \geqslant f^{-1}(B_1) \geqslant \cdots \geqslant f^{-1}(B_{n-1}) \geqslant f^{-1}(B_n) = 0$$

y

$$C = g(B) \geqslant g(B_1) \geqslant \cdots \geqslant g(B_{n-1}) \geqslant g(B_n) = 0$$

denotaremos $f^{-1}(B_i) = A_i$ y $g(B_i) = C_i$. Se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.4.3.

(1) Las filtraciones F' de A y F'' de C son series de composición generalizadas.

(2) Para cada módulo simple S se tiene que

$$m_S^{F'}(A) + m_S^{F''}(C) = m_S^F(B).$$

(3) $l_{F'}(A) + l_{F''}(C) = l_F(B)$.

El siguiente resultado muestra que los R-módulos de longitud finita son justamente los R-módulos artinianos y noetherianos.

Proposición 2.4.4. *Un módulo no cero M es de longitud finita si, y sólo si, M es artiniano y noetheriano.*

Corolario 2.4.5. *Sean K, M, N R-módulos no cero y supongamos que existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

de homomorfismos. Entonces M es un R-módulo de longitud finita si, y sólo si, K y N son R-módulos de longitud finita.

Demostración:

Se sigue de la Proposición2.3.11 y la Proposición 2.4.4 de forma inmediata.

∎

Teorema 2.4.6 (Jordan-Hölder)**.** *Sean M un R-módulo de longitud finita, F y G dos series de composición para M. Entonces para cada R-módulo izquierdo simple S se tiene que:*

$$m_S^F(M) = m_S^G(M)$$

y por tanto

$$l_F(M) = l_G(M) = l(M).$$

Demostración:
Por inducción sobre $l(M)$. Si $l(M) = 0$ veamos primero que $M = 0$. Supongamos que $M \neq 0$ y sea F una filtración de M tal que $l_F(M) = l(M) = 0$. Esto es,

$$F: \quad M = M_0 \geqslant M_1 \geqslant \cdots \geqslant M_n = 0$$

De donde $m_S^F(M) = 0$ para todo R-módulo simple. Es decir, $(M_i/M_{i+1}) = 0$ para $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ entonces $M = M_0 = M_1 = \cdots = M_n = 0$. Por lo tanto $M = 0$.

Sean F y G series de composición de M

$$F: \quad M = M_0 \geqslant M_1 \geqslant \cdots \geqslant M_n = 0$$

$$G: \quad M = M_0' \geqslant M_1' \geqslant \cdots \geqslant M_m' = 0$$

Como $M = 0$ todos los cocientes son cero y se tiene que $m_S^F(M) = 0 = m_S^G(M)$ para todo S R-módulo simple, por lo que $m_S(M) = 0$ y $l_F(M) = 0 = l_G(M)$.

Supongamos $l(M) = 1$, entonces existe una serie de composición H de M tal que $l_H(M) = 1 = l(M)$.
Sea $K \leqslant M$ consideremos

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/K \longrightarrow 0$$

Como H es una serie de composición de M, la Proposición 2.4.3 induce series de composición generalizadas H', H'' de K y de M/K respectivamente y se tiene

$$l_{H'}(K) + l_{H''}(M/K) = l_H(M) = 1$$

lo cual implica $l_{H'}(K) = 0$ y $l_{H''}(M/K) = 1$ o $l_{H'}(K) = 1$ y $l_{H''}(M/K) = 0$. Veamos que ambos casos, implican que M es un R-módulo simple.

Si $l_{H'}(K) = 0$ entonces $l(K) = 0$ y por tanto $K = 0$ de donde M es un R-módulo simple. Si $l_{H''}(M/K) = 0$ entonces $l(M/K) = 0$ lo cual implica $M = K$y por tanto M es un R-módulo simple.
Sean F y G dos series de composición de M

$$F: \quad M = M_0 \geqslant M_1 \geqslant \cdots \geqslant M_n = 0$$

$$G: \quad M = M'_0 \geqslant M'_1 \geqslant \cdots \geqslant M'_m = 0$$

Como M es simple entonces existen i, j tales que $M = M_k$ para todo $k \leqslant i$ y $M_k = 0$ para todo $k > i$ y $M = M'_l$ para todo $l \leqslant j$ y $M'_l = 0$ para todo $l > j$. Lo cual implica $m^F_M(M) = 1 = m^G_M(M)$. Para todo S un R-módulo simple no isomorfo a M se tiene $m^F_S(M) = 0 = m^G_S(M)$, por tanto $l_F(M) = 1 = l_G(M) = l(M)$.

Supongamos que el teorema se cumple para R-módulos izquierdos N tales que $0 \leqslant l(N) \leqslant n$. Sea M un R-módulo izquierdo tal que $l(M) = n + 1$ y supóngase que $l(M) > 1$. Como $l(M) > 1$ se tiene que existe un K submódulo de M tal que $0 \neq K \neq M$. Considérese la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/K \longrightarrow 0$$

y F una serie de composición de M tal que $l_F(M) = l(M)$. Por la Proposición 2.4.3 tenemos las series de composición generalizadas F' y F'' para K y $C = M/K$ respectivamente. Además,

$$l(K) + l(C) \leqslant l_{F'}(K) + l_{F''}(C) = l_F(M) = l(M).$$

De la ecuación anterior, y dado que $0 \neq K$ y $0 \neq C$ se tiene que $l(K) < l(M)$ y $l(C) < l(M)$. De donde el teorema se cumple para K y para C.
Sean F y G dos series de composición para M por la Proposición 2.4.3 se tiene que

$$m^F_S(M) = m^{F'}_S(K) + m^{F''}_S(C)$$

y

$$m^G_S(M) = m^{G'}_S(K) + m^{G''}_S(C)$$

para todo R-módulo simple S. Por hipótesis de inducción $m^{F'}_S(K) = m^{G'}_S(K)$ y $m^{F''}_S(C) = m^{G''}_S(C)$ lo cual implica $m^F_S(M) = m^G_S(M)$ y $l_F(M) = l_G(M)$.

∎

Como consecuencia inmediata de el Teorema de Jordan-Hölder y de la Proposición 2.4.4 podemos dar la siguiente definición de la longitud $l(M)$ de un R-módulo M.

Definición 2.4.7. *Sea M un R-módulo de longitud finita. Definimos $l(M) = 0$ si $M = 0$ y $l(M) = n$ si M tiene una serie de composición de longitud n.*

Un resultado inmediato del Teorema 2.4.6 y de la Proposición 2.4.3 es el siguiente.

Corolario 2.4.8. *Sea*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de R-módulos izquierdos de longitud finita. Entonces

$$l(K) + l(N) = l(M).$$

Corolario 2.4.9 (El Teorema de la dimensión)**.** *Sean M un R-módulo izquierdo de longitud finita y N, K submódulos de M. Entonces*

$$l(K + N) + l(K \cap N) = l(K) + l(N).$$

El siguiente lema establece una relación entre un R-homomorfismo $f : M \longrightarrow M$ y los R-módulos artinianos (noetherianos).

Lema 2.4.10. *Sean M un R-módulo izquierdo y f un endomorfismo de M*

(1) Si M es artiniano, entonces $Im\, f^n + Ker\, f^n = M$ para algún $n \in \mathbb{N}$, además f es un isomorfismo si, y sólo si, f es un monomorfismo.

(2) Si M es noetheriano, entonces $Im\, f^n \cap Ker\, f^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, además f es un isomorfismo si, y sólo si, f es un epimorfismo.

Proposición 2.4.11. *Sean M un R-módulo de longitud finita y f un endomorfismo de M. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$M = Im\, f^n \oplus Ker\, f^n.$$

Terminaremos esta sección con el siguiente corolario.

Corolario 2.4.12. *Sean M un R-módulo de longitud finita y f un endomorfismo de M. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) f es un monomorfismo.

(2) f es un epimorfismo.

(3) f es un isomorfismo.

Además, si M es un R-módulo inescindible son equivalentes:

(1) f es un isomorfismo.

(2) f no es nilpotente.

2.5. Teorema de Krull-Schmidt

En esta sección probaremos el Teorema de Krull-Schmidt. Este teorema muestra la importancia de los módulos inescindibles.

Definición 2.5.1. *Sea M un R-módulo izquierdo, una descomposición directa*

$$M = \bigoplus_A M_\alpha$$

de un módulo M como suma directa de submódulos inescindibles es una descomposición en inescindibles de M.

Ejemplos 2.5.2.

(1) Sea S un R-módulo semisimple

$$S = \bigoplus_{i \in I} S_i$$

como cada S_i es simple, S_i es inescindible. Por tanto, $\bigoplus\limits_{i \in I} S_i$ es una descomposición en inescindibles de S.

(2) Sea M un R-módulo izquierdo y además artiniano o noetheriano, por la Proposición 2.3.13 M es la suma directa de una familia finita de submódulos inescindibles $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$. Por tanto, $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$ es una descomposición en inescindibles de M.

Definición 2.5.3. *Sea M un R-módulo izquierdo, dos descomposiciones directas*

$$M = \bigoplus_A M_\alpha = \bigoplus_B N_\beta$$

de M son equivalentes en caso de que exista $\sigma : A \longrightarrow B$ una biyección tal que

$$M_\alpha \cong N_{\sigma(\alpha)} \quad (\forall\, \alpha \in A)$$

Ejemplo 2.5.4. *Considere $N_1 = \{(a, 0) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$, $N_2 = \{(0, b) \,|\, b \in \mathbb{R}\}$ y $N_3 = \{(b, b) \,|\, b \in \mathbb{R}\}$ como $\mathbb{R}$-módulos izquierdos. Se sabe que*

$$\mathbb{R}^2 = N_1 \oplus N_2 = N_1 \oplus N_3.$$

Se define $\sigma : \{1, 2\} \longrightarrow \{1, 3\}$ dada por $\sigma(1) = 1$ y $\sigma(2) = 3$ como $N_1 \cong N_1$ y $N_2 \cong N_3$ se tiene que son descomposiciones equivalentes.

Recordemos que dado M un R-módulo izquierdo, se tiene que K es un sumando directo máximo de M si, y sólo si, K tiene un sumando directo complementario, N, inescindible en M.

Definición 2.5.5. *Sea M un R-módulo izquierdo. Una descomposición*

$$M = \bigoplus_A M_\alpha$$

de un módulo M como suma directa de submódulos no cero complementa sumandos directos (complementa sumandos directos máximos) si para cada sumando directo (máximo) $K \leqslant M$ existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que

$$M = \left(\bigoplus_B M_\beta \right) \bigoplus K$$

Ejemplo 2.5.6. *Sea S un R-módulo semisimple por el Lema 2.1.3 se tiene que complementa sumandos directos.*

El siguiente resultado nos muestra la importancia de las descomposiciones que complementan sumandos directos máximos.

Lema 2.5.7. *Sea*

$$M = \bigoplus_A M_\alpha$$

una descomposición que complementa sumandos directos máximos. Si

$$M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n \oplus K$$

con $N_1, \ldots, N_n$ inescindibles entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ tales que

$$M_{\alpha_i} \cong N_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y para cada $1 \leqslant l \leqslant n$

$$M = M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_l} \oplus N_{l+1} \oplus \cdots \oplus N_n \oplus K.$$

Proposición 2.5.8. *Si un R-módulo izquierdo M tiene una descomposición en inescindibles que complementa sumandos directos máximos entonces todas las descomposiciones en inescindibles de M son equivalentes.*

El siguiente resultado es crucial en la teoría de módulos.

Recordemos que un anillo R es local en caso de que para cada par $a, b \in R$, si $a+b$ es invertible entonces a o b es invertible. Se sabe que si R es un anillo local los únicos idempotentes son el 1_R y el 0_R y que si $f : R \longrightarrow S$ es un homomorfismo de anillos y R es local entonces S también lo es. Así pues, si $M \neq 0$ es un R-módulo y su anillo de endomorfismos $End_R(M)$ es local se tiene que M es inescindible. Ver la Proposición 1.4.22. Tenemos pues el siguiente resultado.

Teorema 2.5.9 (Teorema de Azumaya)**.** *Si un R-módulo M tiene una descomposición directa*

$$M = \bigoplus_A M_\alpha$$

donde cada $End_R(M_\alpha)$ es local entonces es una descomposición en inescindibles. Más aún, cada sumando directo no cero de M tiene un sumando directo inescindible.

Corolario 2.5.10. *Si M tiene una descomposición directa*

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

donde $End_R(M_i)$ es local para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces esta descomposición complementa sumandos directos.

Dado un R-módulo M sabemos que si 0 y 1 son los únicos idempotentes en $End_R(M)$ entonces M es inescindible (ver la Proposición 1.4.22). De lo anterior se desprende que si $End_R(M)$ es local, entonces M es inescindible.

Lema 2.5.11. *Si M es un R-módulo izquierdo inescindible de longitud finita entonces $End_R(M)$ es un anillo local.*

Teorema 2.5.12 (Teorema de Krull-Schmidt)**.** *Sea M un R-módulo izquierdo no cero de longitud finita. Entonces M tiene una descomposición en inescindibles*

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

tal que para cada descomposición en inescindibles

$$M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k,$$

$n = k$ y existe una permutación σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$M_{\sigma(i)} \cong N_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

y para cada $1 \leqslant l \leqslant n$

$$M = M_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus M_{\sigma(l)} \oplus N_{l+1} \oplus \cdots \oplus N_n$$

De hecho, la descomposición $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ complementa sumandos directos.

Demostración:
Como M tiene longitud finita por la Proposición 2.4.4 y 2.3.13 M tiene una descomposición finita en inescindibles.

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

Por el Corolario 2.4.5 tenemos que cada M_i es de longitud finita para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Además cada M_i es inescindible y aplicando el Lema 2.5.11 se tiene que $End_R(M_i)$ es local para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De donde usando el Corolario 2.5.10 tenemos que esta descomposición complementa sumandos directos.

Ahora bien, si

$$M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$$

es otra descomposición en inescindibles de M por la Proposición 2.5.8 estas descomposiciones son equivalentes, por lo que existe una biyección σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en $\{1, 2, \ldots, k\}$, lo cual implica que $n = k$, tal que $M_{\sigma(i)} \cong N_i$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Considerando $K = 0$ y aplicando el Lema 2.5.7 se tiene que para cada $1 \leqslant l \leqslant n$

$$M = M_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus M_{\sigma(l)} \oplus N_{l+1} \oplus \cdots \oplus N_n$$

.

∎

En particular, el resultado anterior nos dice que cualesquiera dos descomposiciones en inescindibles de un R-módulo M son equivalentes.

2.6. Módulos Libres, Proyectivos e Inyectivos

En esta sección abordaremos varios tipos de R-módulos entre los cuales están los R-módulos libres, proyectivos e inyectivos. Mostraremos las propiedades más importantes de dichos módulos y haremos ver que tienen una relación con las sucesiones exactas cortas que se escinden. Terminaremos esta sección dando una caracterización de los R-módulos inyectivos.

Definición 2.6.1. *Un R-módulo izquierdo F es un R-módulo libre si F es isomorfo a una suma directa de copias de R, esto es, si existe un conjunto de índices (finito o infinito) B con*

$$F = \bigoplus_{b \in B} R_b$$

donde $R_b = \langle x_b \rangle \cong R$ para todo $b \in B$. Decimos que $X = \{x_b : b \in B\}$ es una base de F.

Ejemplo 2.6.2.

(1) Sea $M = \mathbb{R}^2$ considerado como $\mathbb{R}$-módulo izquierdo, es un $\mathbb{R}$-módulo libre.

(2) Sean $B = \mathbb{N}$ y $M = \mathbb{Z}$ considerado como $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo. Entonces $F = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre donde $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_\alpha$ con $\mathbb{Z}_\alpha = \mathbb{Z}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}$.

Observación 2.6.3. *Usando la Definición 1.6.14 y el Lema 1.6.16 tenemos que $F = \bigoplus_{b \in B} R_b$ si, y sólo si, cada $m \in F$ tiene una única expresión de la forma*

$$m = \sum_{b \in B} r_{x_b} x_b$$

donde $r_{x_b} \in R$ y casi todo $r_{x_b} = 0$. Se denota por $F = \langle X \rangle$ donde $X = \{x_b : b \in B\}$.

Proposición 2.6.4. *Sea R un anillo. Dado cualquier conjunto X existe un R-módulo izquierdo libre F con base X, es decir,*

$$F = \langle X \rangle = \left\{ \sum_{x_b \in X} r_{x_b} x_b : r_{x_b} \in R \text{ y casi todo } r_{x_b} = 0 \right\}.$$

El siguiente resultado generaliza la idea de extender por linealidad a una transformación lineal T. Esto es, dada una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial V y $w_1, \ldots, w_n$ vectores en otro espacio vectorial W, tenemos que la función $T : V \longrightarrow W$ dada por $T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$ es una transformación lineal.

Proposición 2.6.5. *Sean R un anillo y F el R-módulo izquierdo libre con base $X = \{x_b : b \in B\}$. Si M es un R-módulo izquierdo y si $f : X \longrightarrow M$ es cualquier función, entonces existe un único R-homomorfismo $\bar{f} : F \longrightarrow M$ tal que $\bar{f}\mu = f$ donde $\mu : X \longrightarrow F$ es la inclusión. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, dashed, "\bar{f}"] & \\
X \arrow[u, hook, "\mu"] \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

El siguiente resultado muestra la importancia de los R-módulos libres.

Teorema 2.6.6. *Cada R-módulo izquierdo M es isomorfo a un cociente de un R-módulo izquierdo libre. Más aún, M es finitamente generado si, y sólo si, F puede escogerse finitamente generado.*

El siguiente resultado establece una propiedad fundamental que satisfacen los R-módulos libres.

Teorema 2.6.7. *Sea F un R-módulo izquierdo libre. Si $p : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo, entonces para cada R-homomorfismo $h : F \longrightarrow N$, existe un R-homomorfismo $g : F \longrightarrow M$ tal que $pg = h$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\
M \arrow[r, "p"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

2.6.1. Proyectivos

La propiedad mencionada en el Teorema 2.6.7, que satisfacen los R-módulos libres, motiva la siguiente definición.

Definición 2.6.8. *Un R-módulo izquierdo P es proyectivo si para cualquier epimorfismo $p : M \longrightarrow N$ y cualquier R-homomorfismo $h : P \longrightarrow N$, existe $g : P \longrightarrow M$ un R-homomorfismo tal que $pg = h$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "p"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.6.9. *Si F es un R-módulo izquierdo libre, entonces por el Teorema 2.6.7 F es un R-módulo proyectivo.*

La siguiente proposición es inmediata de la definición de R-módulo proyectivo.

Proposición 2.6.10. *Un R-módulo izquierdo P es proyectivo si, y sólo si, cada sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} P \longrightarrow 0$$

se escinde.

El siguiente resultado caracteriza a los R-módulos proyectivos.

Teorema 2.6.11.

(1) Un R-módulo izquierdo P es proyectivo si, y sólo si, P es un sumando directo de un R-módulo libre.

(2) Un R-módulo finitamente generado P es proyectivo si, y sólo si, P es un sumando directo de R^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 2.6.12.

(1) Cada sumando directo de un módulo proyectivo es por sí mismo proyectivo.

(2) Cada suma directa de módulos proyectivos es proyectivo.

El siguiente ejemplo muestra que no todo R-módulo proyectivo es un R-módulo libre.

Ejemplo 2.6.13. *Se tiene que $\mathbb{Z}_6$ es la suma directa interna de dos ideales*

$$\mathbb{Z}_6 = \mathcal{J} \oplus \mathcal{I}$$

donde $\mathcal{J} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$ e $\mathcal{I} = \{\overline{0}, \overline{3}\} \cong \mathbb{Z}_2$. Además, $\mathbb{Z}_6$ es un $\mathbb{Z}_6$-módulo libre por sí mismo y $\mathcal{J}$, $\mathcal{I}$ por ser sumandos directos de un módulo libre son $\mathbb{Z}_6$-módulos proyectivos. Sin embargo, ni $\mathcal{J}$ ni $\mathcal{I}$ pueden ser libres ya que un $\mathbb{Z}_6$-módulo libre finitamente generado F es una suma directa de n copias de $\mathbb{Z}_6$, entonces F debe tener 6^n elementos, pero $\mathcal{J}, \mathcal{I}$ tienen menos elementos que 6.

2.6.2. Inyectivos

A continuación abordaremos otro tipo de R-módulos llamados R-módulos inyectivos. De hecho, la noción de R-módulo inyectivo es la noción dual de R-módulo proyectivo.

Definición 2.6.14. *Un R-módulo izquierdo E es inyectivo si para cualquier $i : M \longrightarrow N$ monomorfismo y $f : M \longrightarrow E$ un R-homomorfismo, existe $g : N \longrightarrow E$ R-homomorfismo tal que $gi = f$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & N \arrow[ul, dashed, "g"]
\end{tikzcd}$$

Un resultado inmediato de la Definición 2.6.14 y de la Proposición 1.3.18 es el siguiente.

Proposición 2.6.15. *Si un R-módulo E es inyectivo, entonces cada sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

se escinde.

Corolario 2.6.16. *Si un módulo inyectivo E es un submódulo de un módulo M, entonces E es un sumando directo de M; es decir, existe $S \leqslant M$ tal que $M = E \oplus S$.*

La siguiente proposición muestra como obtener otros R-módulos inyectivos en términos de R-módulos inyectivos ya dados.

Proposición 2.6.17.

(1) Si $\{E_k\}_{k\in K}$ es una familia de R-módulos izquierdos inyectivos, entonces $\prod\limits_{k\in K} E_k$ es también un R-módulo izquierdo inyectivo.

(2) Cada sumando directo de un R-módulo inyectivo E es un R-módulo inyectivo.

Corolario 2.6.18. *Una suma directa finita de R-módulos izquierdos inyectivos es un R-módulo izquierdo inyectivo.*

El siguiente resultado brinda una caracterización de los R-módulos inyectivos a través del anillo R.

Teorema 2.6.19 (Criterio de Baer)**.** *Un R-módulo izquierdo E es inyectivo si, y sólo si, cada R-homomorfismo $f : I \longrightarrow E$, donde I es un ideal de R, puede ser extendido a R, es decir, existe un R-homomorfismo $g : R \longrightarrow E$ tal que $gi = f$ donde $i : I \longrightarrow R$ e $i(x) = x$ para todo $x \in I$.*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.6.20. $\mathbb{Q}$ *es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.*

Sea I un ideal de $\mathbb{Z}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{Q}$ un $\mathbb{Z}$-homomorfismo. Si $I = 0$ se define $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ como $g(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Si I es un ideal no cero de $\mathbb{Z}$, se tiene que $I = n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ se define $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ como $g(k) = k(f(n)/n)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, en ambos casos es claro que g es un $\mathbb{Z}$-homomorfismo y que $f = gi$ donde $i : n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es la inclusión canónica. Por el Teorema 2.6.19 se sigue que $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q} & \\
0 \arrow[r] & n\mathbb{Z} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & \mathbb{Z} \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

Capítulo 3

Sistemas Estratificantes

En este capítulo enunciamos y demostramos las principales propiedades del concepto de sistema estratificante $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ de talla t, donde $\theta = \{\theta(i)\}_{i=1}^{t}$ es un conjunto de R-módulos no cero y $\underline{Y} = \{Y(j)\}_{j=1}^{t}$ es un conjunto de R-módulos inescindibles. Dichos conjuntos satisfacen ciertas propiedades. Ver la Definición 3.2.3.

El objetivo de esta sección es demostrar que la k-álgebra $A = End_R(\bigoplus_{j=1}^{t} Y(j))$ es estandarmente estratificada.

En el desarrollo de los sistemas estratificantes el concepto de homomorfismo minimal izquierdo es relevante. Por ello iniciamos este capítulo estudiando este tema.

3.1. Homomorfismos minimales izquierdos

En esta sección introduciremos el concepto de homomorfimo minimal izquierdo y sus principales propiedades. Dicho concepto será utilizado en la sección 3.2. Cabe mencionar que los conceptos de homomorfismo minimal izquierdo y derecho están enunciados en el libro [1]. En dicho libro se desarrolla la teoría de homomorfismo minimal derecho con todo detalle y sólo se menciona que la teoría para el concepto de homomorfismo minimal izquierdo es dual. Por ello, hemos decidido desarrollar la teoría de homomorfismo minimal izquierdo con todo detalle. En esta sección M denotará un R-módulo (no necesariamente finitamente generado) fijo.

Definición 3.1.1. *Sean R un anillo y M un R-módulo fijo. Consideremos la categoría $R - Mod\backslash M$ donde los objetos son los R-homomorfismos $f : M \longrightarrow B$ y donde un morfismo $g : f \longrightarrow f'$ de $f : M \longrightarrow B$ a $f' : M \longrightarrow B'$ es un R-homomorfismo $g : B \longrightarrow B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & B' \end{tikzcd}$$

Es decir, $f' = gf$

Lema 3.1.2. *Se tiene que $g : f \longrightarrow f'$ es un isomorfismo en $R - Mod\backslash M$ si y solamente si $g : B \longrightarrow B'$ es un isomorfismo en $R - Mod$.*

Demostración:

Consideremos $I_f = I_B : B \longrightarrow B$ el homomorfismo identidad en B e $I_{f'} = I_{B'} : B' \longrightarrow B'$ el homomorfismo identidad en B'. Como $g : f \longrightarrow f'$ es un isomorfismo en $R - Mod\backslash M$ existe $h : f' \longrightarrow f$ tal que $hg = I_f$ y $gh = I_{f'}$. Es decir, para $g : B \longrightarrow B'$ existe $h : B' \longrightarrow B$ tal que $hg = I_B$ y $gh = I_{B'}$. Por lo tanto, g es un isomorfismo en $R - Mod$.

Por otra parte, si g es un isomorfismo en $R - Mod$ existe un R-homomorfismo $h : B' \longrightarrow B$ tal que $hg = I_B$ y $gh = I_{B'}$. Es decir, existe un morfismo $h : f' \longrightarrow f$ tal que $I_f = hg : f \longrightarrow f$ e $I_{f'} = gh : f' \longrightarrow f'$.

∎

Definición 3.1.3. *Un R-homomorfismo $f : M \longrightarrow B$ decimos que es un homomorfismo minimal izquierdo si cada morfismo $g : f \longrightarrow f$ es un automorfismo. Es decir, si para cada R-homomorfismo $g : B \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Se tiene que g es un automorfismo.

Con el propósito de seguir con el desarrollo de esta teoría necesitamos enunciar la Proposición 3.1.4. Para poder hacer esto introduciremos la siguiente relación de equivalencia en los objetos de la categoría $R - Mod\backslash M$. Sean $f : M \longrightarrow B$ y $f : M \longrightarrow B' \in Ob(R - Mod\backslash M)$. Decimos que $f \sim f'$ si $Hom(f, f') \neq \varnothing$ y $Hom(f', f) \neq \varnothing$. Es decir, si existen $g : B \longrightarrow B'$ y $h : B' \longrightarrow B$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & B' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & B' \arrow[d, "h"] \\ & B \end{tikzcd}$$

A continuación veremos que dicha relación es de equivalencia. Como $I_B : B \longrightarrow B$ es tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "I_B"] \\ & B \end{tikzcd}$$

se tiene que esta relación es reflexiva. Además, una consecuencia de la misma definición es que la relación es simétrica. Veamos que esta relación es transitiva. Sea $h : M \longrightarrow B''$ un R-homomorfismo y supongamos que $f \sim h$ y $h \sim f'$ entonces existe $g : B \longrightarrow B''$ tal que $gf = h$ y existe $g' : B'' \longrightarrow B$ tal que $g'h = f'$.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"'] \arrow[dr, "f'"'] & B'' \arrow[d, "g'"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Se tiene que $g'g : B \longrightarrow B'$ es tal que $g'gf = f'$ y por lo tanto $Hom(f, f') \neq \emptyset$. Análogamente $Hom(f', f) \neq \emptyset$.

Recordemos que dado B un R-módulo de longitud finita, denotamos por $l(B)$ a su longitud.

Proposición 3.1.4. *Sea un anillo R y M un R-módulo fijo, se tiene que en cada clase de equivalencia de un objeto $g : M \longrightarrow B$ de la categoría $R-Mod\backslash M$ con B de longitud finita existe un homomorfismo minimal izquierdo que es único salvo isomorfismo.*

Demostración:

Sean $h : M \longrightarrow B$ con B de longitud finita y $f : M \longrightarrow X$ tal que $f \sim h$ y $l(X)$ es la menor posible. Veamos que $f : M \longrightarrow X$ es un homomorfismo minimal izquierdo. Para esto, supongamos que $g : X \longrightarrow X$ es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Veamos que g es un automorfismo. Como X es de longitud finita basta ver por la Proposición 2.4.12 que es un epimorfismo. Como $gf = f$ entonces $Im\, f \subseteq Im\, g$, y tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & Im\, g \arrow[d, hook, "i"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Im\, g \end{tikzcd}$$

Por lo que si denotamos a $\bar{f} : M \longrightarrow Img$ dada por $\bar{f}(m) = f(m)$ se tiene que $\bar{f} \sim f$. Como $Im\, g$ es un submódulo de X se tiene que $l(Im\, g) \leqslant l(X)$ lo cual implica que $l(Im\, g) = l(X)$ por la minimalidad de $l(X)$. Por lo que se tiene $X = Im\, g$. Lo cual prueba que g es un automorfismo.

Si $h' : M \longrightarrow X'$ es también minimal izquierdo y $h' \sim f$ entonces existen $s : X' \longrightarrow X$ y $t : X \longrightarrow X'$ R-homomorfismos tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "s"] \\ M \arrow[ur, "h'"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h'"'] & X \arrow[d, "t"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "t"] \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h'"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[d, "s"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Entonces ts es un isomorfismo. Análogamente st es un isomorfismo lo cual implica que t y s son isomorfismos. Por lo tanto h' es isomorfo a f.

∎

Definición 3.1.5. *Sea $f : M \longrightarrow B$ un R-homomorfismo con B de longitud finita. El único R-homomorfismo minimal izquierdo (salvo isomorfismo) en la clase de equivalencia de f se le llama la versión minimal izquierda de f.*

Teorema 3.1.6. *Sean R un anillo y M un R-módulo fijo. Sea $f : M \longrightarrow Y$ un objeto de $R - Mod\backslash M$ con Y de longitud finita. Entonces existe una descomposición $Y = Y' \bigoplus Y''$ tal que $p'f : M \longrightarrow Y'$ es un R-homomorfismo minimal izquierdo y $p''f : M \longrightarrow Y''$ es cero, donde $p' : Y \longrightarrow Y'$ y $p'' : Y \longrightarrow Y''$ son las proyecciones naturales de acuerdo a la descomposición $Y = Y' \bigoplus Y''$. Más aún, $p'f$ es la versión minimal izquierda de f.*

Demostración:

Por la Proposición 3.1.4 existe $g : M \longrightarrow B$ con B de longitud finita tal que $g \sim f$ y g es un R-homomorfismo minimal izquierdo. Como $g \sim f$ existen $s : B \longrightarrow Y$ y $t : Y \longrightarrow B$ R-homomorfismos tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "s"] \\
M \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, "t"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Como g es un R-homomorfismo minimal izquierdo ts es un isomorfismo. Veamos que $Y = Im\,s \oplus Ker\,t$. Sea $y \in Y$ entonces $t(y) \in B$ y como ts es un isomorfismo existe $x \in B$ tal que $ts(x) = t(y)$. Observemos que $y = s(x) + y - s(x)$ y que $t(y - s(x)) = t(y) - ts(x) = 0$ por lo que se tiene $Y = Im\,s + Ker\,t$. Además, si $x \in Im\,s \cap Ker\,t$ se tiene que $x = s(y)$ para algún $y \in B$ y $0 = t(x) = ts(y)$ como ts es un isomorfismo $y = 0$ lo cual implica que $x = 0$. Por lo tanto $Y = Im\,s \oplus Ker\,t$. Denotemos por $Y' = Im\,s$ y $Y'' = Ker\,t$. Sea $m \in M$, como $f = sg$ entonces $p''f(m) = p''(s(g(m))) = 0$. Veamos que $p'f$ es un homomorfismo minimal izquierdo. Sea $h : Y' \longrightarrow Y'$ un R-homomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "p'f"] \arrow[dr, "p'f"'] & Y' \arrow[d, "h"] \\
 & Y'
\end{tikzcd}$$

Como Y es de longitud finita entonces Y' es de longitud finita. Por la Proposición 2.4.12 basta ver que es un monomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "s"] \\
 & Y \arrow[d, "p'"] \\
M \arrow[uur, "g"] \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p'f"] \arrow[dr, "p'f"] \arrow[ddr, "g"'] & Y' \arrow[d, "h"] \\
 & Y' \arrow[d, "t"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Como g es un R-homomorfismo minimal izquierdo $thp's$ es un isomorfismo. Sea $x \in Y'$ tal que $0 = h(x)$ con $x \in Y' = Im\, s$ entonces existe $y \in B$ tal que $x = s(y)$. Observemos que $p'(s(y)) = s(y)$ entonces $0 = hs(y) = hp's(y)$ por lo que se tiene $thp's(y) = 0$ como $thp's$ es un isomorfismo se tiene que $y = 0$ y por lo tanto $x = 0$. Además, los siguientes diagramas muestran que $p'f \sim f$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p'f"'] & Y \arrow[d, "p'"] \\ & Y' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p'f"'] & Y \\ & Y' \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

∎

Corolario 3.1.7. *Sean R un anillo y M un R-módulo fijo. Sea $f : M \longrightarrow Y$ un objeto en $R - Mod\backslash M$ distinto del R-homomorfismo cero, con Y un R-módulo inescindible y de longitud finita. Entonces $f : M \longrightarrow Y$ es un R-homomorfismo minimal izquierdo.*

Demostración:

Por el Teorema 3.1.6 existe una descomposición $Y = Y' \oplus Y''$ tal que $p'f : M \longrightarrow Y'$ es un R-homomorfismo minimal izquierdo y $p''f : M \longrightarrow Y''$ es cero, donde $p' : M \longrightarrow Y'$ y $p'' : M \longrightarrow Y''$ son las proyecciones naturales de acuerdo a la descomposición $Y = Y' \oplus Y''$. Como f es distinto del R-homomorfismo cero entonces existe $m \in M$ tal que $0 \neq f(m) = p'f(m)$, entonces $Y' \neq 0$. Además, como Y es inescindible $Y' = Y$ y se tiene que $p'f : M \longrightarrow Y$ y $p'f(m) = f(m)$ por lo que $p'f = f$, como $p'f$ es un R-homomorfismo minimal izquierdo se tiene que f es un homomorfismo minimal izquierdo.

∎

3.2. Sistemas Estratificantes

En esta sección introduciremos el concepto de sistema estratificante y sus principales propiedades. Para ello enunciaremos primero el concepto de k-

álgebra de dimensión finita y trabajaremos con k-álgebras de dimensión finita sobre campos algebraicamente cerrados. Por comodidad algunas veces nos referiremos a ella sólo como k-álgebras.

Definición 3.2.1. *Sea k un campo.*

(1) Una k-álgebra es un anillo R (asociativo con 1_R) que posee estructura de k-espacio vectorial de tal forma que $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ para cualesquiera $\alpha \in k, a \in R, b \in R$.

(2) Diremos que R es una k-álgebra de dimensión finita si R es de dimensión finita como k-espacio vectorial.

A partir de ahora supondremos que nuestro campo k es algebraicamente cerrado. Más aún, supondremos que R es una k-álgebra de dimensión finita. Por comodidad algunas veces nos referiremos a ella sólo como k-álgebras.

Observación 3.2.2. *Si R es una k-álgebra de dimensión finita, se tiene que todo R-módulo izquierdo M es un k-espacio vectorial. Además, si M es finitamente generado entonces M es un k-espacio vectorial de dimensión finita y por lo tanto M es de longitud finita.*

Denotamos por $R - mod$ a la categoría de los R-módulos izquierdos finitamente generados sobre un álgebra R y a $mod - R$ a la categoría de los R-módulos derechos finitamente generados sobre un álgebra R. A partir de ahora trabajaremos únicamente en la categoría de $R-mod$ o bien en $mod-R$. Por comodidad, algunas veces sólo diremos que M es un R-módulo, en lugar de un R-módulo finitamente generado. Dada una clase $\mathcal{C}$ de R-módulos denotamos por $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ a la subcategoría completa de $R - mod$ que contiene al módulo cero y a todos los R-módulos que son filtrados por módulos en $\mathcal{C}$. Esto es, un R-módulo no cero M está en $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ si existe una cadena finita

$$M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0 \tag{3.1}$$

de R-submódulos de M tales que M_i/M_{i+1} es isomorfo a un módulo en $\mathcal{C}$ para todo $i = 0, 2, \ldots, n-1$. A la cadena finita de M dada en (3.1) se le conoce como una $\mathcal{C}$-filtración de M. En particular, si $\mathcal{C} = \varnothing$ entonces $\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \{0\}$. En resumen,

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \{X \in R - mod : X \text{ tiene una } \mathcal{C} - \text{filtración}\}$$

Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dos subcategorías completas de $R-mod$. Decimos que

$$Ext_R^1(\mathcal{X},\mathcal{Y})=0$$

si $Ext_R^1(X,Y)=0$ para todo $X\in\mathcal{X}$ y $Y\in\mathcal{Y}$. Otras categorías relacionadas a $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ son las siguientes:

$$\mathcal{I}(\mathcal{C})=\{X\in R-mod: Ext_R^1(\mathcal{F}(\mathcal{C}),X)=0\}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{C})=\{X\in R-mod: Ext_R^1(X,\mathcal{F}(\mathcal{C}))=0\}$$

Para poder dar la definición de sistema estratificante consideremos el siguiente contexto.

Sean R una k-álgebra de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado, $\theta=\{\theta(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de R-módulos finitamente generados no cero y $\Omega_t=\{1,2,\ldots,t\}$ el subconjunto de los primeros t números naturales con el orden total natural $\leqslant$, es decir, $1\leqslant 2\leqslant\cdots\leqslant t$. Consideremos a la subcategoría completa de $R-mod$, $\mathcal{F}(\theta)$.

Definición 3.2.3. *Sean $\theta=\{\theta(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de R-módulos (no cero) y $\underline{Y}=\{Y(i)\}_{i=1}^t$ un conjunto de R-módulos inescindibles. El sistema $(\theta,\underline{Y},\leqslant)$ es un sistema estratificante de talla t si se cumple lo siguiente:*

(1) $Hom_R(\theta(j),\theta(i))=0$ para $j>i$.

(2) Para cada $i\in\Omega_t$ existe una sucesión exacta

$$0\longrightarrow\theta(i)\xrightarrow{\alpha_i}Y(i)\longrightarrow Z(i)\longrightarrow 0$$

tal que $Z(i)\in\mathcal{F}(\{\theta(j):j<i\})$.

(3) $Ext_R^1(\mathcal{F}(\theta),Y)=0$, donde $Y=\bigoplus_{i=1}^t Y(i)$.

Definición 3.2.4. *Una $\mathcal{I}(\theta)$-aproximación izquierda de $\theta(i)$ es un R-homomorfismo $\beta:\theta(i)\longrightarrow X$ con $X\in\mathcal{I}(\theta)$ tal que para cualquier homomorfismo $\beta':\theta(i)\longrightarrow X'$ con $X'\in\mathcal{I}(\theta)$ existe un homomorfismo $\xi:X\longrightarrow X'$ que satisface $\beta'=\xi\beta$.*

$$\begin{tikzcd} \theta(i) \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta'"'] & X \arrow[d, "\xi"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

Lema 3.2.5. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante. Para cada $i \in \Omega$ sea $\alpha_i : \theta(i) \longrightarrow Y(i)$ el homomorfismo dado en 3.2.3. Entonces α_i es un homomorfismo minimal izquierdo y una $\mathcal{I}(\theta)$-aproximación izquierda de $\theta(i)$.*

Demostración:

Como $Y(i)$ es inescindible por el Corolario 3.1.7 α_i es un homomorfismo minimal izquierdo. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \longrightarrow Z(i) \longrightarrow 0$$

Consideremos $X \in \mathcal{I}(\theta)$. Como $Ext^1_R(Z(i), X) = 0$ se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Hom_R(Z(i), X) \longrightarrow Hom_R(Y(i), X) \xrightarrow{\alpha_i^*} Hom_R(\theta(i), X) \longrightarrow 0$$

De donde α_i^* es un epimorfismo, entonces para todo homomorfismo $f : \theta(i) \longrightarrow X$ existe $g : Y(i) \longrightarrow X$ tal que $g\alpha_i = \alpha_i^*(g) = f$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \theta(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "f"'] & Y(i) \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

∎

Definición 3.2.6. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t, $M \in \mathcal{F}(\theta)$ y F una θ-filtración de M*

$$F : \qquad M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

para cada $i \in \Omega_t = \{1, 2, \ldots, t\}$, definimos la multiplicidad de $\theta(i)$ en la filtración F de M como el número de cocientes que son isomorfos a $\theta(i)$. Denotamos la multiplicidad de cada $\theta(i)$ en M con respecto a la filtración F por $[M : \theta(i)]$.

Vamos a probar que para cada $i \in \Omega_t = \{1, 2, \ldots, t\}$ y para cada $M \in \mathcal{F}(\theta)$ la multiplicidad $[M : \theta(i)]$ no depende de la θ-filtración de M (ver la Proposición 3.2.10). Para ello, requerimos los siguientes lemas.

Lema 3.2.7. *Con la notación de la Definición 3.2.3. Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t. Entonces $Hom_R(\theta(i+s), Z(i)) = 0$ para todo $s \geqslant 0$.*

Demostración:

Sea F una θ-filtración de $Z(i)$.

$$F: \qquad Z(i) = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

Sea $\alpha : \theta(i+s) \longrightarrow Z(i)$ un R-homomorfismo con $s \geqslant 0$. Como $Z(i)/M_1 \cong \theta(j_1)$ para algún $j_1 < i$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \theta(i+s) \arrow[r, "\alpha"] & Z(i) \arrow[d, "\varphi_1 \pi_{M_1}"] \\ & \theta(j_1) \end{tikzcd}$$

donde π_{M_1} es la proyección canónica de $Z(i)$ sobre M_1 y φ_1 es un isomorfismo de $Z(i)/M_1$ a $\theta(j_1)$. Como $Hom_R(\theta(i+s), \theta(j_1)) = 0$ ya que $j_1 < i < i+s$ se tiene que $\varphi_1 \pi_{M_1} \alpha = 0$, además φ_1 es un isomorfismo entonces $\pi_{M_1} \alpha = 0$ lo cual implica $Im\, \alpha \subseteq M_1$. Dado que $M_1/M_2 \cong \theta(j_2)$ para algún $j_2 < i$. Consideremos

$$\begin{tikzcd} \theta(i+s) \arrow[r, "\alpha"] & M_1 \arrow[d, "\varphi_2 \pi_{M_2}"] \\ & \theta(j_2) \end{tikzcd}$$

donde π_{M_2} es la proyección canónica de M_1 sobre M_2 y φ_2 es un isomorfismo de M_1/M_2 a $\theta(j_2)$. Por el argumento anterior $Im\, \alpha \subseteq M_2$. Inductivamente se tiene que $Im\, \alpha \subseteq M_{n-1}$, además $M_{n-1} \cong \theta(j_n)$ lo cual implica $Im\, \alpha = 0$ y por lo tanto $\alpha = 0$.

∎

Lema 3.2.8. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t. Entonces $Hom_R(\theta(i+s), Y(i)) = 0$ para todo $s \geqslant 1$.*

Demostración:

Por la Definición 3.2.3 tenemos que existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \longrightarrow Z(i) \longrightarrow 0$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j < i\})$. Aplicando el funtor $Hom_R(\theta(i+s), \_)$ para $s \geqslant 1$ se tiene:

$$0 \longrightarrow Hom_R(\theta(i+s), \theta(i)) \longrightarrow Hom_R(\theta(i+s), Y(i)) \longrightarrow$$
$$Hom_R(\theta(i+s), Z(i)) \longrightarrow Ext^1_R(\theta(i+s), \theta(i)) \longrightarrow \cdots$$

Por el Lema 3.2.7 $Hom_R(\theta(i+s), Z(i)) = 0$ y por la Definición 3.2.3 se tiene que $Hom_R(\theta(i+s), \theta(i)) = 0$. Por lo tanto $Hom_R(\theta(i+s), Y(i)) = 0$.

∎

Lema 3.2.9. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante. Entonces $Hom_R(\_, Y(i))$ es un funtor exacto en $\mathcal{F}(\theta)$.*

Demostración:

Sea

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\theta)$. Es decir, $N, M, K \in \mathcal{F}(\theta)$. Tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Hom_R(K, Y(i)) \longrightarrow Hom_R(M, Y(i))$$
$$\longrightarrow Hom_R(N, Y(i)) \longrightarrow Ext^1_R(K, Y(i)) \longrightarrow \cdots$$

Como $Ext^1_R(K, Y) = 0$ se tiene que $Ext^1_R(K, Y(i)) = 0$. Por lo que la sucesión anterior es de la forma

$$0 \longrightarrow Hom_R(K, Y(i)) \longrightarrow Hom_R(M, Y(i))$$
$$\longrightarrow Hom_R(N, Y(i)) \longrightarrow 0$$

Esto es, el funtor $Hom_R(\_, Y(i))$ es exacto.

∎

Proposición 3.2.10. *Sea* $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ *un sistema estratificante de talla* t*. Para* $M \in \mathcal{F}(\theta)$ *la multiplicidad de cada* $\theta(i)$ *en una* θ*-filtración de* M *es independiente de la filtración.*

Demostración:

Como $\mathcal{F}(\theta) \subseteq R{-}mod$ y R es una k-álgebra de dimensión finita, si $M \in \mathcal{F}(\theta)$, M en particular es un k-espacio vectorial de dimensión finita y por lo tanto $Hom_R(M, Y(i))$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita. Denotamos por $d_{ij} = dim\, Hom_R(\theta(i), Y(j))$ (como k-espacio vectorial). Sea $D = (d_{ij})$ la matriz con entradas d_{ij}. Por el Lema 3.2.8 se tiene que es D una matriz triangular superior y $d_{ii} \neq 0$ ya que $0 \neq \alpha_i \in Hom_R(\theta(i), Y(i))$. Sea F una θ-filtración de M

$$F: \qquad M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow M_{n-2}/M_{n-1} \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor $Hom_R(\,\_\,, Y(i))$ a la sucesión anterior y usando el Lema 3.2.10 tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Hom_R(M_{n-2}/M_{n-1}, Y(i)) \longrightarrow Hom_R(M_{n-2}, Y(i)) \longrightarrow$$
$$Hom_R(M_{n-1}, Y(i)) \longrightarrow 0$$

Por la Proposición 2.4.6 se tiene que

$dim\, Hom_R(M_{n-2}, Y(i)) =$

$$dim\, Hom_R(M_{n-2}/M_{n-1}, Y(i)) + dim\, Hom_R(M_{n-1}, Y(i))$$

Como $M_{n-1} \cong \theta(j_1)$ y $M_{n-2}/M_{n-1} \cong \theta(j_2)$ con $j_1, j_2 \in \{1, 2, \ldots, t\}$ se tiene que

$$dim\, Hom_R(M_{n-2}, Y(i)) = d_{j_2 i} + d_{j_1 i}$$

Consideremos ahora la sucesión exacta corta.

$$0 \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow M_{n-3} \longrightarrow M_{n-3}/M_{n-2} \longrightarrow 0$$

Por el argumento anterior se tiene

$$dim\, Hom_R(M_{n-3}, Y(i)) = d_{j_3 i} + d_{j_2 i} + d_{j_1 i}$$

Inductivamente usando que m_j es el número de cocientes isomorfos a $\theta(j)$ en la filtración F se tiene que $Hom_R(M, Y(i)) = \sum_{j=1}^{n} m_j d_{ji} = (m_1, \ldots, m_n)D_i$ donde D_i es la i-ésima columna de D.

Ahora bien, si $j = 1$ tenemos que $dim\, Hom_R(M, Y(1)) = m_1 d_{11}$ ya que $d_{k1} = 0$ para todo $k > 1$. Como d_{11} y $dim\, Hom_R(M, Y(1))$ son fijos y $d_{11} \neq 0$ se tiene que $m_1 = dim\, Hom_R(M, Y(1))/d_{11}$ por lo que m_1 está en términos de $dim\, Hom_R(M, Y(1))$ y d_{11}.

Continuando por inducción sobre el conjunto de índices

$$dim\, Hom_R(M, Y(k)) = \sum_{j=1}^{n} m_j d_{jk} = m_k d_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} m_j d_{jk}$$

Como m_j esta determinado para $1 \leqslant j \leqslant k-1$ y $d_{kk} \neq 0$, se tiene que $m_k = (dim\, Hom_R(M, Y(k)) - \sum_{j=1}^{k-1} m_j d_{jk})/d_{kk}$.

∎

Observación 3.2.11. *De la Definición 3.2.3 y de la Proposición 3.2.10 tenemos que* $[Y(i) : \theta(i)] = 1$ *y* $[Y(i) : \theta(j)] = 0$ *para* $j > i$*. Por lo tanto,* $Y(i) \ncong Y(j)$ *si* $i \neq j$*.*

Definición 3.2.12. *Sean* $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ *un sistema estratificante de talla* t *y* $M \in \mathcal{F}(\theta)$*. Definimos la* θ*-longitud de* M *y la denotamos por* $l_\theta(M)$ *como:*

$$l_\theta(M) = \sum_{i=1}^{t} [M, \theta(i)].$$

Definición 3.2.13. *Sean* $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ *un sistema estratificante de talla* t *y* $M \in \mathcal{F}(\theta)$*. Definimos* $max(M)$ *como el mayor índice* j *tal que* $[M : \theta(j)] \neq 0$*.*

Dado $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t y $M \in \mathcal{F}(\theta)$ queremos probar que existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_k \longrightarrow 0.$$

donde $Y_r \in add(Y)$ (ver la Definición 3.2.17) y $k < max(M)$. Para ello necesitamos los siguientes lemas.

Lema 3.2.14. *Sean $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t, $M, N, K \in \mathcal{F}(\theta)$ y consideremos la siguiente sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Entonces $max(M) =$ máximo $\{max(K), max(N)\}$.

Demostración:

Como $N \cong M/K$ bastará demostrar que el lema se cumple para la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

Sea F una θ-filtración de K

$$F: \qquad K = K_0 > K_1 > \cdots K_{s-1} > K_s = 0$$

donde $K_p/K_{p+1} \cong \theta(j_p)$ con $j_p \leqslant max(K)$ para $p = 0, 1, 2, \ldots, s-1$.

Sea G una θ-filtración de M/K

$$G: \qquad M/K = M_0/K > M_1/K > \cdots > M_{n-1}/K > M_n/K = 0$$

donde ${}^{M_q/K}/_{M_{q+1}/K} \cong \theta(j_q)$ con $j_q \leqslant max(M/K)$ para $q = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Consideremos la siguiente θ-filtración de M dada por:

$$H: \qquad M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = K >$$
$$K_1 > \cdots > K_{s-1} > K_s = 0.$$

se tiene que $M_q/M_{q+1} \cong \theta(j_q)$ para $q = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ y $K_p/K_{p+1} \cong \theta(j_p)$ para $p = 1, 2, \ldots, s-1$. Por lo tanto,

$$max(M) = \text{ máximo } \{max(K), max(M/K)\}.$$

∎

Lema 3.2.15. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t y $M \in \mathcal{F}(\theta)$. Si $max(M) = i$ entonces $Ext^1_R(\theta(i+s), M) = 0$ para $s \geqslant 0$.*

Demostración:

Sea F una θ-filtración de M

$$F: \qquad M = M_0 > M_1 > M_2 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

Consideremos la sucesión

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow M_{n-2}/M_{n-1} \longrightarrow 0$$

donde $M_{n-1} \cong \theta(j_1)$ y $M_{n-2}/M_{n-1} \cong \theta(j_2)$ donde $j_1, j_2 \leqslant i$. Aplicando el funtor $Hom_R(\theta(i+s), \_)$ a la sucesión exacta corta anterior obtenemos:

$$0 \longrightarrow Hom_R(\theta(i+s), M_{n-1}) \longrightarrow Hom_R(\theta(i+s), M_{n-2}) \longrightarrow$$

$$Hom_R(\theta(i+s), M_{n-2}/M_{n-1}) \longrightarrow Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-1}) \longrightarrow$$

$$Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-2}) \longrightarrow Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-2}/M_{n-1}) \longrightarrow$$

Como $Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-1}) \cong Ext_{R^1}(\theta(i+s), \theta(j_1)) = 0$ ya que $j_1 \leqslant i$ y dado que $Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-2}/M_{n-1}) \cong Ext_{R^1}(\theta(i+s), \theta(j_2)) = 0$ ya que $j_2 \leqslant i$ se tiene que $Ext^1_R(\theta(i+s), M_{n-2}) = 0$. Inductivamente llegamos a que $Ext^1_R(\theta(i+s), M) = 0$.

∎

Proposición 3.2.16. *Sean $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t y $M \in \mathcal{F}(\theta)$. Entonces existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow \theta(i)^a \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

donde $i = max(M)$ y $N \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j < i\})$.

Demostración:

Inducción sobre $l_\theta(M)$. Si $l_\theta(M) = 1$ se tiene que $M \cong \theta(i)$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ y por lo tanto la sucesión buscada es:

$$0 \longrightarrow \theta(i) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Supongamos que el lema es cierto para módulos $N' \in \mathcal{F}(\theta)$ y tales que $l_\theta(N') < n$. Sea $M \in \mathcal{F}(\theta)$ tal que $l_\theta(M) = n$. Esto es, existe F una θ-filtración de M

$$F: \qquad M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

donde $M_s/M_{s+1} \cong \theta(j_s)$ para $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Por hipótesis de inducción existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \theta(j)^{a_{M_1}} \longrightarrow M_1 \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

donde $j = max(M_1)$ y $M_1/\theta(j)^{a_{M_1}} \cong M' \in \mathcal{F}\{\theta(l) : l < j\}$. Se tienen los siguientes casos:

(1) $M/M_1 \cong \theta(j_1)$ donde $j_1 < j$. Como $j_1 < j$ se tiene que $max(M) = j$. Consideremos las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow \theta(j)^{a_{M_1}} \longrightarrow M \longrightarrow M/\theta(j)^{a_{M_1}} \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

$$0 \longrightarrow M_1/\theta(j)^{a_{M_1}} \longrightarrow M/\theta(j)^{a_{M_1}} \longrightarrow M/M_1 \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

Como $max(M_1/\theta(j)^{a_{M_1}}) < j$ y $max(M/M_1) < j$, por el Lema 3.2.14 se tiene que $M/\theta(j)^{a_{M_1}} \in \mathcal{F}\{\theta(l) : l < j\}$. Por lo tanto la sucesión exacta (3.2) es la sucesión buscada.

(2) $M/M_1 \cong \theta(j_1)$ donde $j_1 = j$. Como $j_1 = j$ se tiene que $max(M) = j = max(M_1)$.

Usando el Lema 3.2.15 se tiene que la siguiente sucesión exacta se escinde

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 \longrightarrow 0$$

de donde $M = M_1 \oplus \theta(j)$ y $M/\theta(j)^{a_{M_1}+1} \cong (M_1 \oplus \theta(j))/\theta(j)^{a_{M_1}+1} \cong M_1/\theta(j)^{a_{M_1}} \in \mathcal{F}\{\theta(l) : l < j\}$. Es decir,

$$0 \longrightarrow \theta(j)^{a_{M_1}+1} \longrightarrow M \longrightarrow M/\theta(j)^{a_{M_1}+1} \longrightarrow 0$$

es la sucesión exacta buscada.

(3) $M/M_1 \cong \theta(j_1)$ donde $j_1 > j$. Como $j_1 > j$ se tiene que $max(M) = j_1$.

Como $max(M_1) = j$ usando el Lema 3.2.15 se tiene que la siguiente sucesión exacta corta se escinde.

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 \longrightarrow 0$$

Es decir, $M \cong M_1 \oplus \theta(j_1)$ y $M/\theta(j_1) \cong (M_1 \oplus \theta(j_1))/\theta(j_1) \cong M_1 \in \mathcal{F}\{\theta(l) : l \leqslant j\}$.

De donde la sucesión exacta corta buscada es

$$0 \longrightarrow \theta(j_1) \longrightarrow M \longrightarrow M/\theta(j_1) \longrightarrow 0.$$

∎

Definición 3.2.17. *Sea M en $R-mod$. Definimos*

$$add(M) = \{X \in R-mod : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ y } Y \in R-mod \text{ tal que } X \oplus Y \cong M^n\}.$$

Lema 3.2.18. *Sea $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t, $M \in \mathcal{F}(\theta)$ y $max(M) = i$. Entonces existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y' \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

donde $M' \in \mathcal{F}(\theta)$, $max(M') < i$ y $Y' \in add(Y)$.

Demostración:

Hacemos la demostración por inducción sobre el $max(M)$. Supongamos que $max(M) = 1$ y sea F una θ-filtración de M

$$F : \qquad M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

donde $M_i/M_{i+1} \cong \theta(1)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Por el Lema 3.2.15 se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow M_{n-2}/M_{n-1} \longrightarrow 0$$

se escinde por lo que $M_{n-2} \cong \theta(1) \oplus \theta(1)$ se sigue inductivamente que $M \cong \theta(1)^n$. Como $\theta(1) = Y(1)$ tenemos que

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y(1)^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

es la sucesión buscada. Supongamos que el lema se cumple para $L \in \mathcal{F}(\theta)$ tal que $max(L) < i$. Sea $M \in \mathcal{F}(\theta)$ tal que $max(M) = i$. Usando el Lema 3.2.16 tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \theta(i)^a \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

donde $N \in \mathcal{F}(\theta)$ y $max(N) < i$. Por hipótesis de inducción existe una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} \bar{Y} \longrightarrow \bar{N} \longrightarrow 0$$

donde $\bar{Y} \in add(Y)$ y $max(\bar{N}) < max(N)$. Consideremos el diagrama conmutativo push-out

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \theta(i)^a \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y(i)^a \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & Z(i)^a \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z(i)^a \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $N \in \mathcal{F}(\theta)$ y $Ext^1_R(\mathcal{F}(\theta), Y) = 0$ el segundo renglón se escinde. De donde se tiene que $W \cong Y(i)^a \oplus N$. Tomando las inclusiones f y g se tiene una inclusión $h = fg : M \longrightarrow Y(i)^a \oplus \bar{Y}$ donde $Y(i)^a \oplus \bar{Y} \in add(Y)$. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow W/M \longrightarrow (Y(i)^a \oplus \bar{Y})/M \longrightarrow Y(i)^a \oplus \bar{Y}/W \longrightarrow 0$$

Como $W/M \cong Z(i)^a$ y $(Y(i)^a \oplus \bar{Y}/W) \cong \bar{N}$ por el Lema 3.2.14 se tiene que $max((Y(i)^a \oplus \bar{Y})/M) < i$. Por lo que la sucesión

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y(i)^a \oplus \bar{Y} \longrightarrow (Y(i)^a \oplus \bar{Y})/M \longrightarrow 0$$

cumple con las condiciones del lema.

∎

Terminamos esta sección con el siguiente resultado.

Proposición 3.2.19. *Sean $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t y $M \in \mathcal{F}(\theta)$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_k \longrightarrow 0$$

donde $Y_r \in add(Y)$ y $k < max(M)$.

Demostración:

Por el Lema 3.2.18 se tienen las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{h} Y_0 \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{g} Y_1 \xrightarrow{h'} M'' \longrightarrow 0$$

donde $Y_0, Y_1 \in add(Y)$, $M', M'' \in \mathcal{F}(\theta)$ y $max(M'') \leqslant maxM' < max(M)$. Veamos que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{h} Y_0 \xrightarrow{gf} Y_1 \xrightarrow{h'} M'' \longrightarrow 0$$

Como $Im\, f = M'$ se tiene que $Im\, gf = Im\, g = Ker\, h'$. Sea $x \in Ker\, gf$ como g es un monomorfismo se sigue que $f(x) = 0$ de donde $x \in Ker\, f = Im\, h$. Además se tiene que $Im\, h = Ker\, f \leqslant Ker\, gf$ por lo que $Im\, h = Ker\, gf$. Como h' es un epimorfismo y h es un monomorfismo se tiene que la sucesión anterior es exacta. Se sigue inductivamente que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_k \longrightarrow 0$$

donde $Y_r \in add(Y)$ y $k < max(M)$.

∎

3.3. Álgebras Estandarmente Estratificadas

En esta sección A denotará una k-álgebra de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado. Por comodidad nos referiremos a A sólo como una k-álgebra. Por el Teorema 2.5.12 sabemos que A tiene una descomposición:

$$A = P(1) \oplus P(2) \oplus \cdots \oplus P(n) \tag{3.4}$$

donde cada $P(i)$ es un A-módulo derecho proyectivo inescindible. Además esta descomposición es única (salvo isomorfismo). Por ello, diremos que (3.4) es la descomposición de A en suma directa de A-módulos proyectivos inescindibles. O bien la descomposición de A. Así mismo, a lo largo de toda la sección fijamos la notación $P(1), P(2), \dots, P(n)$ para los A-módulos derechos proyectivos inescindibles.

Definición 3.3.1. *Una k-álgebra A (de dimensión finita) es básica si los proyectivos inescindibles que aparecen en su descomposición "no se repiten". Es decir, que $P(i) \cong P(j)$ sólo si $i = j$.*

A partir de aquí sólo consideramos k-algebras básicas (de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado). Pero por conveniencia sólo diremos que A es una k-ágebra. De manera análoga a la sección anterior trabajaremos sólo con A-módulos finitamente generados.

Consideremos la descomposición de A en proyectivos inescindibles

$$A = P(1) \oplus P(2) \oplus \cdots \oplus P(n)$$

Se tiene que:

(1) $P(i) = e_i A$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Es decir,

$$A = e_1 A \oplus e_2 A \oplus \cdots \oplus e_n A$$

donde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos.

(2) Los A-módulos derechos $S(i) = e_iA/Rad\,(e_iA)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ son una lista completa de todos los A-módulos derechos simples (salvo isomorfismo).

(3) Fijamos el orden total natural $\leqslant$ en el conjunto $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(4) Sabemos que $e_iA = P(i)$ es la cubierta proyectiva del simple $S(i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(5) Se tiene que $Rad\,(P(i))$ es un submódulo maximal de $P(i)$, de donde se sigue que $Rad\,(P(i))$ es el único submódulo maximal de $P(i)$.

Algunos conceptos que serán de utilidad son los siguientes:

Definición 3.3.2. *Sea A una k-álgebra y sea $A = P(1) \oplus P(2) \oplus \cdots \oplus P(n)$ su descomposición en suma directa de proyectivos inescindibles.*

(1) Denotamos por $U(i)$ a la suma de todas las imágenes de R-homomorfismos $f : P(j) \longrightarrow P(i)$ con $j > i$. Es decir,

$$U(i) = \sum_{f:P(j)\longrightarrow P(i)} Im\, f, \qquad con\ j > i.$$

(2) Para $i = 1, 2, \ldots, n$ denotamos por $\Delta(i) = P(i)/U(i)$. Para cada i decimos que $\Delta(i)$ es el i-ésimo A-módulo derecho estándar.

(3) Denotamos por $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i=1}^{n}$. A este conjunto se le conoce como el conjunto de los A-módulos derechos estándar.

(4) Denotamos por $\mathcal{F}(\Delta)$ a la subcategoría de $mod - A$ que consta del A-módulo derecho cero y de todos los $0 \neq M$ que tienen una Δ-filtración. A la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ se le conoce como la categoría de los A-módulos derechos buenos.

Observación 3.3.3. *Se tiene que $\Delta(n) = P(n)$.*

Definición 3.3.4. *Sea A una k-álgebra. Decimos que A es un álgebra estandarmente estratificada a la derecha si $A \in \mathcal{F}(\Delta)$.*

El objetivo de esta sección es demostrar que dado un sistema estratificante $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ de talla t, la k-álgebra $A = End_R(\bigoplus_{j=1}^{t} Y(j))$ es una k-álgebra estandarmente estratificada a la derecha.

En los siguientes lemas, establecemos algunas de las propiedades que satisface la categoría $\mathcal{F}(\Delta)$.

Lema 3.3.5. *Sea $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i=1}^{n}$ el conjunto de A-módulos derechos estándar. Si $X \in mod - A$, entonces $Ext^1_R(\mathcal{F}(\Delta), X) = 0$ si, y sólo si, $Ext^1_R(\Delta(i), X)$ $= 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Demostración:

Supongamos que $Ext^1_R(\Delta(i), X) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $M \in \mathcal{F}(\Delta)$ y F una Δ-filtración de M

$$F: \qquad M = M_0 > M_1 > \cdots > M_{n-1} > M_n = 0$$

donde $M_i/M_{i+1} \cong \Delta(j_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Consideremos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow M_{n-2}/M_{n-1} \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor $Hom_R(\_, X)$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow\ & Hom_R(M_{n-2}/M_{n-1}, X) \longrightarrow Hom_R(M_{n-2}, X) \longrightarrow \\ & Hom_R(M_{n-1}, X) \longrightarrow Ext^1_R(M_{n-2}/M_{n-1}, X) \longrightarrow \\ & Ext^1_R(M_{n-2}, X) \longrightarrow Ext^1_R(M_{n-1}, X) \longrightarrow \end{aligned}$$

Como $Ext^1_R(M_{n-2}/M_{n-1}, X) = 0$ y $Ext^1_R(M_{n-1}, X) = 0$ se tiene que $Ext^1_R(M_{n-2}, X) =$ 0. Se sigue inductivamente que

$$Ext^1_R(M, X) = 0.$$

Por otra parte, si $Ext^1_R(\mathcal{F}(\Delta), X) = 0$ entonces en particular se tiene que

$$Ext^1_R(\Delta(i), X) = 0$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

∎

Corolario 3.3.6. *Sea A un álgebra de dimensión finita, $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i=1}^n$ el conjunto de A-módulos derechos estándar. Si $\Delta(i) = P(i)$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces $\mathcal{I}(\Delta) = mod - A$.*

Demostración:

Sea $M \in mod - A$. Como $P(i)$ es proyectivo se tiene $Ext_R^1(P(i), X) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, lo cual implica $Ext_R^1(\Delta(i), M) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por el Lema 3.3.5 se tiene que $Ext_R^1(\mathcal{F}(\Delta), M) = 0$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{I}(\Delta)$.

∎

Se puede ver que para el conjunto $\Delta = \{\Delta_i\}_{i=1}^n$ podemos encontrar módulos inescindibles $\underline{Y} = \{Y_i\}_{i=1}^n$ tales que $(\Delta, \underline{Y}, \leqslant)$ es un sistema estratificante (Ver el Lema 1.8.2 de [2]) Con esto, se tiene la siguiente proposición.

Corolario 3.3.7. *Sean A una k-algebra de dimensión finita y $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i=1}^n$ el conjunto de A-módulos derechos estándar. Si $\Delta(i) = P(i)$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces $\Delta(i) = Y(i)$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Demostración:

Se sigue de la Caracterización 1.6 en [3] y del Corolario 3.3.6.

∎

Observación 3.3.8. *Con la notación dada en la Definición 3.3.2 tenemos que $U(i)$ es un submódulo propio de $P(i)$*

Para enunciar la siguiente proposición consideremos para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto $\mathcal{Q}^i = \{P(i)/L : L \leqslant P(i)$ y $P(i)/L$ sólo tiene factores de composición $S(j)$ con $j \leqslant i\}$. Notemos que $S(i) = P(i)/Rad\, P(i) \in \mathcal{Q}^i$. En $\mathcal{Q}^i$ definimos el orden parcial $\preceq$ dado por $P(i)/L \preceq P(i)/T$ si $L \geqslant T$. Con el orden definido en $\mathcal{Q}^i$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.3.9. *Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos que $\Delta(i)$ es el cociente maximal de $P(i)$ que tiene sólo factores de composición $S(k)$ con $k \leqslant i$.*

Demostración:

Sea F una serie de composición de $\Delta(i) = P(i)/U(i)$.

$$F : \qquad P(i)/U(i) > M_1/U(i) > \cdots > M_s/U(i) > 0$$

donde $\{M_l\}_{l=1}^s$ son A-submódulos de $P(i)$ y supongamos, para llegar a una contradición, que existe j tal que

$$^{M_j/U(i)}\!\big/_{M_{j+1}/U(i)} \overset{\varphi}{\cong} S(k)$$

con $k > i$ y $j \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P(k) \arrow[dlll, "\alpha"'] \arrow[d, "\Pi_{Rad\,P(k)}"'] & \\
M_j \arrow[r, "\Pi_{U(i)}"'] & M_j/U(i) \arrow[r, "\Pi_{M_{j+1}/U(i)}"'] & ^{M_j/U(i)}\!\big/_{M_{j+1}/U(i)} \arrow[r, "\varphi"'] & S(k) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde α está dado por la proyectividad de $P(k)$. Como $M_j \leqslant P(i)$ se tiene que $Im\,\alpha \leqslant U(i)$, lo cual implica $\pi_{Rad\,P(k)} = \varphi\pi_{M_{j+1}/U(i)}\pi_{U(i)}\alpha = 0$. Esto contradice que $S(k)$ es un A-módulo simple. La maximalidad de $\Delta(i)$ se deja como ejercicio al lector.

$\blacksquare$

Terminamos esta sección demostrando que dado un sistema estratificante $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ de talla t, se tiene que la k-álgebra $A = End_R(\bigoplus_{j=1}^{t} Y(j))$ es estandarmente estratificada a la derecha (ver el Teorema 3.3.12). Cabe aclarar que para $A = End_R(\bigoplus_{j=1}^{t} Y(j))$ estamos considerando A-módulos derechos. En particular, dado un R-homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow L$ la composición $fg : M \longrightarrow L$ la estamos haciendo a la derecha. Adoptamos esta convención para ser coherentes con la notación en [2].

Lema 3.3.10. *Sean $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t y $Y = Y(1) \oplus \cdots \oplus Y(t)$. Si $Hom_R(Y(i), Y) \cong Hom_R(Y(j), Y)$ entonces $Y(i) \cong Y(j)$, donde $A = End_R(Y)$.*

Demostración:

Si $h : Hom_R(Y(i), Y) \longrightarrow Hom_R(Y(j), Y)$ es un A-isomorfismo se tiene que existe $h' : Hom_R(Y(j), Y) \longrightarrow Hom_R(Y(i), Y)$ tal que $hh' = I_{Hom_R(Y(i),Y)}$ y $h'h = I_{Hom_R(Y(j),Y)}$. Se sabe que (ver [6] 1.1.3)

$$Hom(Hom_R(Y(i),Y),Hom_R(Y(j),Y)) \cong Hom_R(Y(j),Y(i)).$$

por lo que existen $g : Y(j) \longrightarrow Y(i)$ y $g' : Y(j) \longrightarrow Y(i)$ R-homomorfismos tales que $F(g) = h$ y $F(g') = h'$ donde $F = Hom_R(\_,Y)$. Como $hh' = I_{Hom_R(Y(i),Y)} = F(g)F(g') = F(g'g)$ entonces

$$F(g'g) : Hom_R(Y(i),Y) \longrightarrow Hom_R(Y(j),Y)$$
$$F(g'g)(f) \longmapsto g'gf = f$$

para todo $f \in Hom_R(Y(i),Y)$, en particular para $i_i : Y(i) \longrightarrow Y$ la i-ésima inclusión natural se tiene $g'gi_i = i_i = I_{Y(i)}i_i$. Como i_i es un monomorfismo se tiene que $g'g = I_{Y(i)}$. Análogamente $gg' = I_{Y(j)}$ por lo que $Y(i) \cong Y(j)$.

∎

Lema 3.3.11. *Sean $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ un sistema estratificante de talla t, $M \in \mathcal{F}(\theta)$ y $F(M) = Hom_R(M,Y)$. Entonces $F(M)$ tiene una $F(\theta)$-filtración de A-módulos donde $A = End_R(Y)$. Además, si $max(M) = i$ se tiene que $max(F(M)) = i$.*

Demostración:

Se demostrará por inducción sobre el $max(M)$. Si $max(M) = 1$ tenemos que $M = \theta(1)^a$. Consideremos la siguiente cadena de A-módulos derechos

$$F(M) > F(\theta(1)^{a-1}) > \cdots > F(\theta(1)) > 0$$

donde cada cociente es isomorfo a $F(\theta(1))$, lo cual demuestra el caso para $max(M) = 1$. Supongamos que el lema se cumple para $N \in \mathcal{F}(\theta)$ tal que $max(N) < i$. Sea $M \in \mathcal{F}(\theta)$ tal que $max(M) = i$. Sabemos que existe una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow \theta(i)^a \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

donde $M' \in \mathcal{F}\{\theta(j) : j < i\}$. Aplicando $F = Hom_R(\_,Y)$ a la sucesión anterior se tiene

$$0 \longrightarrow F(M') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(\theta(i)^a) \longrightarrow 0$$

Como $F(M')$ (por hipótesis de inducción) y $F(\theta(i)^a)$ tienen una $F(\theta)$-filtración se sigue que $F(M)$ también.

∎

Un concepto importante que se necesitará en el Teorema 3.3.12 es el siguiente.

Teorema 3.3.12. *Sea* $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ *un sistema estratificante de talla* t. *Entonces* $A = End_R(Y)$ *es estandarmente estratificada derecha, con* $\Delta(i) = Hom_R(\theta(i), Y)$ *con respecto a* $(\Omega_t, \leqslant^{op})$ *donde* $\leqslant^{op}$ *es el orden natural opuesto.*

Demostración:

Denotamos por $P(i) = Hom_R(Y(i), Y)$ a los A-módulos proyectivos inescindibles. Por el Lema 3.3.10 se tiene que A es básica. Tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \longrightarrow Z(i) \longrightarrow 0$$

donde $Z(i) \in \mathcal{F}\{\theta(j) : j < i\}$. Aplicando el funtor $F = Hom_R(\_, Y)$ a la sucesión exacta anterior tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Hom_R(Z(i), Y) &\xrightarrow{l} Hom_R(Y(i), Y) \\ &\xrightarrow{F(\alpha_i)} Hom_R(\theta(i), Y) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.3.11 se tiene que $Hom_R(Z(i), Y)$ tiene una $F(\theta)$-filtración y por lo tanto $P(i)$ tiene una $F(\theta)$-filtración. Así que es suficiente probar que $F(\theta(i)) = \Delta(i)$ con respecto al orden opuesto.

Esto es, vamos a probar que $Hom_R(\theta(i), Y)$ es el cociente maximal de $P(i)$ con factores de composición $S(j)$ con $j \geqslant i$.

Como $Hom(P(j), F(\theta(i))) \cong Hom_R(\theta(i), Y(j))$ (ver [6] 1.1.3) por el Lema 3.2.8 se tiene que $Hom(P(j), F(\theta(i))) = 0$ para $j < i$. Por lo tanto, por la Proposición 2.5 en [8] se tiene que $[F(\theta(i)), S(j)] = 0$ para $j < i$. Consideremos las sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow U(i) \longrightarrow P(i) \longrightarrow \Delta(i) \longrightarrow 0$$

donde $U(i) = \sum_{f:P(j)\longrightarrow P(i)} Im\, f$ donde $j < i$.

Sea $j < i$ y $g : P(j) \longrightarrow P(i)$. Mostraremos que $Im\, g \subseteq F(Z(i))$. Como $Hom(P(j), P(i)) \cong Hom_R(Y(i), Y(j))$ (ver [6] 1.1.3), entonces existe $h : Y(i) \longrightarrow Y(j)$ tal que $F(h) = g$.

Por el Lema 3.2.8 se tiene que $Hom_R(\theta(i), Y(j)) = 0$. Por lo tanto, $\alpha_i h = 0$ y $0 = F(\alpha_i h) = F(h)F(\alpha_i) = gF(\alpha_i)$ y se sigue que $Im\, g \subseteq F(Z(i))$ ya que $F(Z(i)) \cong Im\, l = KerF(\alpha_i)$. Por lo tanto, $U(i) \subseteq F(Z(i))$ de donde $F(\theta(i)) \subseteq \Delta(i)$.

Veamos que $Im\, l \subseteq U(i)$. Sea F una $F(\theta)$-filtración de $F(Z(i))$

$$F : \qquad F(Z(i)) = M_0 > M_1 > \ldots > M_m = 0$$

donde $M_s/M_{s+1} \cong F(\theta(j_s))$ para $s \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P(j_{m-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{F(Z(j_{m-1}))}"'] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"'] & P(j_{m-2}) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_{F(Z(j_{m-2}))}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{m-1} \arrow[r, "i_1"] & M_{m-2} \arrow[r] & M_{m-2}/M_{m-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $M_{m-1} \cong F(\theta(j_{m-1}))$, $M_{m-2}/M_{m-1} \cong F(\theta(j_{m-2}))$ y $P_2 = P(j_{m-1}) \oplus P(j_{m-2})$. Es fácil ver que $\beta_2 := (\pi_{F(Z(j_{m-1}))} i_1, \pi_2) : P_2 \longrightarrow M_{m-2}$ es un epimorfismo. Además $j_{m-1} < i$ y $j_{m-2} < i$. De manera análoga obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"'] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"'] & P(j_{m-3}) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\pi_3"'] \arrow[d, "\pi_{F(Z(j_{m-3}))}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{m-2} \arrow[r, "i_2"] & M_{m-3} \arrow[r] & M_{m-3}/M_{m-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$P_3 = P_2 \oplus P(j_{m-3})$. Donde $\beta_3 = (\beta_2 i_2, \pi_3) : P_3 \longrightarrow M_{m-3}$ es un epimorfismo y $j_{m-3} < i$.

Continuando con este procedimiento se tiene $P_m = \bigoplus\limits_{k=1}^{m} P(j_{m-k})$ con $j_{m-k} < i$ para toda $k \in \{1, \ldots, m\}$ y un epimorfismo $\beta_m : P_m \longrightarrow F(Z(i))$. Tenemos el morfismo $\beta_m l : P_m \longrightarrow P(i)$ donde $Im\, \beta_m l = Im\, l$, lo cual implica que $F(Z(i)) \cong Im\, l \subseteq U(i)$. Podemos concluir que $F(Z(i)) \cong U(i)$. Por lo tanto $\Delta(i) = Hom_R(\theta(i), Y)$.

∎

Ejemplo 3.3.13. *Consideremos el siguiente carcaj*

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "\alpha"] & 1 & 2 \arrow[l, "\beta"'] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

y el ideal admisible $I = \langle \beta\gamma \rangle$. Sea $R = kQ/I$ se tiene que los R-módulos proyectivos inescindibles son:

$$P(1): \quad 1 \qquad P(2): \quad \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad P(3): \quad \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\alpha"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad P(4): \quad \begin{tikzcd} 4 \arrow[d, "\gamma"] \\ 2 \end{tikzcd}$$

Como k-espacios vectoriales:

$$P(1) = ke_1 \quad P(2) = ke_2 \oplus k\beta \quad P(3) = ke_3 \oplus k\alpha \quad P(4) = ke_1 \oplus k\gamma$$

Dado que el R-submódulo propio de $P(2)$, $k\beta \cong S(1)$ tenemos que no existen R-homomorfismos $f : P(j) \longrightarrow P(2)$ con $j > 2$ y por tanto $P(2) = \Delta(2)$. Por el Corolario 3.3.7 se tiene que $\Delta(i) = Y(i)$ para $i = \{1, 2, 3, 4\}$.
De donde el k-álgebra $End_R(\bigoplus_{j=1}^{4} Y(j))$ esta dada por el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 & 3 \arrow[ll, bend right, "c"'] & 4 \arrow[l, "a"] \arrow[ll, bend right, "b"'] \end{tikzcd}$$

e $I = \langle ca \rangle$ (donde la multiplicación está dada a la derecha) se tiene que

$$P(1): \quad 1 \qquad P(2): \quad 2 \qquad P(3): \quad \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "c"'] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad P(4): \quad \begin{tikzcd} & 4 \arrow[dl] \arrow[dr, "b"] & \\ 3 & & 2 \end{tikzcd}$$

Son los A-módulos proyectivos derechos. Por el argumento anterior se tiene que $\Delta(1) = Y(1), \Delta(2) = Y(2),\ \Delta(3) = Y(3), \Delta(4) = Y(4)$*. Por lo tanto A es una k-álgebra estandarmente estratificada a la derecha con el orden opuesto.*

Bibliografía

[1] M. Auslander, I. Reiten & S.O. Smalo. Representation Theory of Artin Algebras, *Cambridge University Press*, New York USA, ISBN: 0-521-41134-3, 1995.

[2] K. Erdmann & C. Sáenz. *On Standardly Stratified Algebras*, Communications in Algebra, Vol 31, No. 7, 3429-3446, 2003.

[3] E. Do N. Marcos, O. Mendoza & C. Sáenz. *Stratifying systems via relative simple modules*, Journal and Pure and Applied Algebra, 208, 472-487, 2004.

[4] Frank W. Anderson & Kent R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York USA, ISBN: 0-387-97845-3, 1992.

[5] Joseph J.Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, New York USA, ISBN: 978-0-387-24527-0, 2009.

[6] E. Cline, B. Parshall & L. Scott. *Stratifying Endomorphism Algebras*, AMS memoirs, 591, ISBN: 0-8218-0488-X, 1996.

[7] C. Xi. *Standardly stratified algebras and cellular algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 133, 37-53, 2002.

[8] M. Sandoval. *Sistemas Estratificantes Lineales*, Tesis para obtener el grado de Maestra en Ciencias Matemáticas, dirigida por el Dr. Octavio Mendoza Hernández. Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2011.

[9] C. Cibils, F. Larrion & L. Salmeron. *Métodos diagramáticos en Teoría de Representaciones.* Monografía 11 del Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 1982.