



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

**INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS**

**CONDICIONES PARA LA EMERGENCIA DE ORDEN  
COLECTIVO EN EL MODELO DE VOTANTES**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRA EN CIENCIAS FÍSICAS**

**P R E S E N T A:**

**BERTHA VÁZQUEZ RODRÍGUEZ**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**DR. MAXIMINO ALDANA GONZÁLEZ**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

L.C. Bertha Vázquez Rodríguez, Cuenta: 510020400  
*Condiciones para la emergencia de orden colectivo en el modelo de votantes.*  
MAESTRO EN CIENCIAS, FÍSICA.  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS.  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO. © 2012

SINODALES:

Dr. Maximino Aldana González. INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UN-  
AM  
Dr. Hernán Larralde Ridaura. INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM  
Dr. David Sanders. FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

PRESENTADO EN LA CIUDAD DE CUERNAVACA, MOR. MÉXICO, ABRIL  
2012

## RESUMEN

---

Uno de los fenómenos más interesantes en sistemas compuestos por muchos elementos, es la emergencia de estados ordenados en los que miles de partículas se sincronizan a pesar de que las interacciones entre ellas son, presumiblemente, de corto alcance. Como ejemplos consideremos el movimiento colectivo de los cardúmenes de peces o parvadas de pájaros. La presencia de este tipo de estados ordenados en sistemas tan distintos ha generado un interés creciente en la investigación de las propiedades que permiten a un sistema compuesto por muchos elementos exhibir un orden colectivo.

En este trabajo usamos un *modelo de votantes* conocido también como red neuronal para analizar las características esenciales para que un sistema pueda presentar orden colectivo.

El trabajo está dividido como sigue:

- El capítulo 1 proporciona una introducción al tema de emergencia de orden colectivo, la importancia de su estudio y el ejemplo más usado en física estadística: el modelo de Ising, que presenta emergencia de estados colectivos ordenados.
- El capítulo 2 describe el modelo de votantes o de red neuronal, mismo que usaremos para estudiar la emergencia de orden colectivo en sistemas compuestos por muchos elementos.
- El capítulo 3 muestra los antecedentes teóricos del modelo de votantes y presenta algunos resultados numéricos y analíticos existentes.
- El capítulo 4 presenta la primera parte de resultados de este trabajo: cuando los líderes de opinión influyen en la toma de decisiones de los miembros de la red, la transición de fase puede desaparecer.
- El capítulo 5 describe el modelo de votantes determinista y presenta la segunda parte de resultados de esta tesis: la simetría de la función de distribución de pesos influye de manera directa sobre el grado de orden que puede alcanzar el sistema. La importancia de este resultado radica en que la simetría es un parámetro de control interno que afecta la jerarquización de los elementos de la red.
- El capítulo 6 contiene las conclusiones de este trabajo de tesis a partir de los resultados analíticos y numéricos presentados en los capítulos anteriores sobre el papel fundamental de la distribución de pesos de las conexiones entre los elementos de la red, en la emergencia de estados ordenados en el sistema. También presenta una posible aplicación de la transición de fase

respecto a la simetría de la función de pesos en el funcionamiento del cerebro.

## ÍNDICE GENERAL

---

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Modelo Ferromagnético	2
1.2	Transiciones de fase	4
1.2.1	Transiciones de primer orden	5
1.2.2	Transiciones de segundo orden	6
1.2.3	Universalidad	8
1.2.4	Escalamiento	8
1.2.5	Renormalización	9
2	MODELO DE VOTANTES	13
2.1	Regla dinámica	14
2.2	Orden en el sistema	14
3	ANTECEDENTES	17
3.1	Resultados analíticos	17
3.1.1	Aproximación de campo medio	17
3.1.2	Cálculo de la probabilidad de que la suma de <i>inputs</i> sea positiva con transformadas de Fourier	18
3.1.3	Ejemplos de la solución analítica	20
3.1.4	Conectividad mínima para la transición	23
3.2	Teorema de límite central	24
3.3	Resultados numéricos	25
3.3.1	Topología homogénea uniforme	26
3.3.2	Topología de <i>inputs</i> libre de escala	26
4	LA INFLUENCIA DE LOS LÍDERES DE OPINIÓN	29
4.1	Topología de <i>outputs</i> libre de escala	29
4.1.1	Líderes sincronizados	31
4.2	Líderes de opinión como campo externo	32
5	MODELO DE VOTANTES DETERMINISTA	35
5.1	Condición sobre la función de distribución de pesos sinápticos	35
5.2	Modelo determinista	36
5.2.1	Resultados numéricos	37
5.2.2	Resultados analíticos	37
5.3	Dos tipos de transiciones	39
6	CONCLUSIONES	41
	BIBLIOGRAFÍA	47

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

- Figura 1 Estructuras emergentes en dos y tres dimensiones, en sistemas vivos e inertes. Izquierda: estructura de tornado en peces (arriba) y vapor de agua (abajo). Centro y derecha: espirales y toroides en galaxias, peces, hormigas y vapor de agua. Figura de S. V. Viscido [22]. 1
- Figura 2 Arriba: Configuración inicial del modelo de Ising unidimensional. En un inicio todos los espines apuntan en la misma dirección. Abajo: Perturbación al estado ordenado. La línea punteada muestra la «pared» que divide los dos dominios. Si el estado ordenado fuera un estado de equilibrio, ante cualquier perturbación del sistema el cambio en la energía libre sería positivo, sin embargo Peierls mostró que es negativo.[24] 3
- Figura 3 La red bidimensional de espines, en un inicio totalmente ordenada se perturba formando un dominio con una frontera de longitud  $L$ . Peierls mostró que el cambio en la energía interna que esta perturbación implica no siempre es negativa, por lo que existe una temperatura crítica a la que el sistema exhibirá una transición de fase.[12] 4
- Figura 4 Transición de fase en un sistema ferromagnético. Un punto negro representa un spin apuntando hacia abajo, un punto verde representa un spin apuntando hacia arriba. Izquierda: fase totalmente ordenada, para temperaturas bajas. Centro: fase crítica en la que podemos observar formación de dominios, aquí se da la transición de fase orden-desorden. Derecha: fase desordenada para temperaturas altas. 5
- Figura 5 Bimodalidad de la función de distribución de probabilidad. Cerca del punto crítico la PDF muestra un comportamiento bimodal, sin embargo a medida que se aleja del punto de transición la PDF se vuelve unimodal. 6
- Figura 6 Datos experimentales de cinco materiales magnéticos diferentes:  $CrBr_3$ ,  $EuO$ ,  $Ni$ ,  $YIG$  y  $Pd_3Fe$ . Al escalar los datos de estos materiales todos se superponen en una sola función que coincide con el modelo de Heisenberg tridimensional.[25] 8

- Figura 7 Percolación unidimensional. El tamaño lineal característico  $S(p) = -1/\ln(p)$  diverge cuando  $p \rightarrow p_c = 1$ . [5] 10
- Figura 8 Percolación en un sistema bidimensional de  $150 \times 150$ . La probabilidad de ocupación para cada cuadro de arriba a abajo es  $p = 0.45, 0.55, 0.59, 0.65$  y  $0.75$  respectivamente. El valor crítico de la probabilidad de ocupación es  $p_c = 0.59$ , valor para el cual se forma por primera vez un cúmulo que atraviesa al sistema. [5] 10
- Figura 9 La transformación de Kadanoff aplicada al problema de percolación unidimensional. Arriba: la probabilidad de que uno de los sitios esté ocupado está dada por el parámetro  $p$ . Abajo: la probabilidad de que un bloque esté ocupado está dado por el parámetro  $p'$ . La relación entre los parámetros  $p$  y  $p'$  es la transformación de renormalización. 11
- Figura 10 Representación esquemática de la estructura de la red. Cada elemento  $v_i$  se conecta con otros  $k$  elementos  $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$  que son elegidos aleatoriamente del conjunto de  $N$  elementos que conforman la red. La contribución que cada *input* tiene sobre  $v_i$  está pesada por  $w_{ij}$  13
- Figura 11 Serie temporal del parámetro de orden. Después de un tiempo transitorio es evidente que el sistema alcanza un estado estacionario pues el valor del parámetro de orden se estabiliza alrededor de un valor promedio. 15
- Figura 12 Transición de fase en el modelo de votantes del parámetro de orden  $\psi$  en función del ruido  $\eta$  para un sistema donde los pesos sinápticos son  $w_{ij} = 1 \forall i, j$  y conectividad  $k = 11$ . La transición ocurre en  $\eta_c \simeq 0.3153$ . La pequeña discrepancia entre los resultados analíticos y numéricos cerca del punto crítico se debe a efectos de tamaño finito. [2] 20
- Figura 13 Transición de fase en el modelo de votantes del parámetro de orden  $\psi$  en función del ruido  $\eta$  para un sistema en donde la función de pesos sinápticos es una distribución uniforme entre  $(0, 1)$  y conectividad  $k = 11$ . El valor crítico del ruido al cual ocurre la transición es  $\eta_c \simeq 0.2838$ . [2] 21

- Figura 14 Predicción de las transiciones de fase del parametro de orden  $\psi$  respecto al ruido  $\eta$  usando las transformadas de Fourier para sistemas con conectividad  $k = 5, 10$  y  $15$ . El valor del ruido al que ocurre la transición de fase aumenta con la conectividad de la red. Los valores de  $\eta_c$  correspondientes a estas gráficas se muestran en la tercera columna de la tabla 1 22
- Figura 15 Valor del ruido crítico  $\eta_c$  para diferentes valores de conectividad  $k$  y dos distintas distribuciones de pesos sinápticos:  $w_{ij} = 1 \forall i, j$  (círculos) y  $w_{ij}$  uniformemente distribuidos entre  $[0, 1]$  (cuadros). A medida que la conectividad aumenta la cantidad de ruido necesario para desordenar al sistema es mayor. Para valores de  $k$  mayores el valor crítico tiene asintóticamente al valor máximo del ruido  $1/2$ . Para  $k \leq 2$  en ambos casos  $\eta_c = 0$  y el sistema se desordena para cualquier valor de ruido  $\eta > 0$ . [2] 22
- Figura 16 Parámetro de orden  $\psi$  en función de la intensidad del ruido  $\eta$  para diferentes valores del exponente  $\gamma$  de una distribución de *inputs* libre de escala  $P(k) = k^{-(\gamma-1)} - (k+1)^{-(\gamma-1)}$ . [17] 27
- Figura 17 Representación esquemática de una red con topología de *outputs* libre de escala. El número de *outputs* se obtiene de una distribución libre de escala y ya determinada la conectividad de cada nodo, se asignan las conexiones al azar. Los nodos rojos representan a los líderes de la red, que son aquellos que tienen el mayor número de *outputs*. Por estar altamente conectados, tendrán un papel importante en la dinámica del sistema. 30
- Figura 18 Parámetro de orden  $\psi$  en función de la intensidad del ruido  $\eta$  para diferentes valores del exponente  $\gamma$  de una distribución de *outputs* libre de escala  $P(k) = k^{-(\gamma-1)} - (k+1)^{-(\gamma-1)}$  30
- Figura 19 Transiciones de fase de la red de votantes para sistemas con diferente número de líderes: 0, 1, 2, 7 y 10. Los líderes además de tener todos el mismo estado, no lo cambian a lo largo de toda la dinámica. Estos resultados se obtuvieron de una red compuesta por  $N = 100000$ , con una topología de *outputs* libre de escala con exponente  $\gamma = 2.1$ . En base a estos resultados vemos que basta un número muy pequeño de líderes para que no haya transición de fase. 31

- Figura 20 Variación en la transición de fase del modelo de votantes para redes uniformes de  $N = 100000$  elementos, con conectividad  $K = 3$  y pesos sinápticos  $w_{i,j} = 1 \forall i, j$ . Al cambiar el intervalo de la función de distribución que representa a los líderes de opinión la dinámica del sistema se altera. Podemos ver que para valores menores de  $\delta$  la transición de fase se aproxima más a una de segundo orden. 33
- Figura 21 Transiciones de fase del modelo de votantes para redes uniformes de 100000 elementos, con conectividad  $K = 3$  y pesos sinápticos aleatorios en el intervalo  $(0, 1)$ . Las diferentes curvas presentan el resultado de variar  $\delta$ , que representa el peso asignado a los líderes de opinión. Podemos observar que basta una pequeña influencia para que la transición de fase se pierda. 33
- Figura 22 Representación esquemática de la simetría de la función de distribución de pesos sinápticos. Al variar el parámetro  $\delta$  de 0 a 1 cambiamos la simetría de la función respecto al eje  $y$ , de modo que cuando  $\delta = 0$  obtenemos pesos negativos y positivos con la misma probabilidad, y cuando  $\delta = 1$  sólo obtenemos pesos positivos. 36
- Figura 23 Transición de fase del parámetro de orden  $\psi$  respecto a la simetría de la función de pesos  $\delta$  para una red de  $N = 100000$ , con conectividad  $K = 25$ . Al aumentar la asimetría de la función de pesos se propaga el orden en el sistema. 37
- Figura 24 Transición de fase del parámetro de orden  $\psi$  respecto a la simetría de la función de pesos  $\delta$  para una red de  $N = 100000$  y distribución de pesos uniforme. Al variar la conectividad  $K$  de la red el valor del punto crítico al que ocurre la transición es cada vez menor. 38
- Figura 25 Comparación de los resultados analíticos (gráfica roja) y numéricos (gráfica negra) para la transición de fase del parámetro de orden  $\psi$  respecto a la simetría de la función de pesos  $\delta$  para una red de  $N = 100000$ , con conectividad  $K = 3$  y distribución de pesos uniforme. 38

- Figura 26 Transición de fase del parámetro de orden  $\psi$  respecto al ruido  $\eta$  para una red uniforme de  $N = 100000$  elementos,  $K = 25$  y distribución de pesos homogénea entre  $(-1 + \delta, 1 + \delta)$ . Al variar la simetría de la función de pesos podemos ver que para valores  $\delta < \delta_c$  el sistema nunca alcanza un estado de orden, mientras que para valores  $\delta > \delta_c$  el sistema exhibe una transición de fase continua. 40
- Figura 27 Serie temporal de la magnetización en el modelo de Ising para una red de  $300 \times 300$  elementos. La evolución del sistema está dada por el algoritmo de Monte Carlo. Podemos ver que cuando el sistema se encuentra en la temperatura crítica  $T_c = 2.3$  el sistema tarda más en recuperarse de la perturbación. 43
- Figura 28 Serie temporal del parámetro de orden para el modelo de votantes determinista para una red de  $300 \times 300$  elementos. Podemos ver que cuando el sistema está en el punto crítico  $\delta_c = 0.5$  el parámetro de orden se aproxima a cero de manera más lenta. 44
- Figura 29 Serie temporal del parámetro de orden para el modelo de votantes determinista para una red de  $300 \times 300$  elementos. Al aumentar el porcentaje de conexiones aleatorias en la red, el sistema se recupera con mayor rapidez de la perturbación. 45

## INTRODUCCIÓN

La emergencia de orden colectivo puede observarse en casi todas las escalas en la naturaleza. Desde el ordenamiento de espines en un material magnético hasta en fenómenos sorprendentes como el acoplamiento de miles de organismos vivos en parvadas de pájaros y bancos de peces, y aún en escalas mayores como en huracanes y galaxias espirales.[22] En todos estos casos, la materia no está simplemente repartida de modo uniforme a través del sistema, sino que forma estructuras complejas cuya emergencia todavía no cuenta con explicaciones satisfactorias.

Una de las características más importantes de este tipo de sistemas es la emergencia de estados en los que miles de elementos se ordenan sobre grandes distancias, a pesar de que las interacciones entre ellos son, aparentemente, de corto alcance. Además, estos estados de orden colectivo se dan en ausencia de líderes, es decir, de elementos específicos que guíen el movimiento de todo el grupo.[23]

En física existen diversos modelos de sistemas en equilibrio que presentan orden colectivo en ausencia de líderes y con interacciones de corto alcance. Un ejemplo es el modelo de Ising, que reproduce las transiciones de fase orden-desorden que presentan los ferromagnetos al variar la temperatura. En este contexto, el modelo de Ising con algunas variaciones es el modelo prototipo para estudiar fenómenos de orden colectivo, interacción social, procesos de auto-organización, cooperación, dispersión de epidemias, formación de opiniones, propagación de información, intercambios económicos y evolución de estructuras sociales.[13]

En este trabajo estudiamos la emergencia de orden colectivo en el modelo de votantes o de red neuronal con el fin de determinar algunas de las propiedades indispensables para que los elementos de la red sean capaces de actuar de manera colectiva. Este modelo incluye

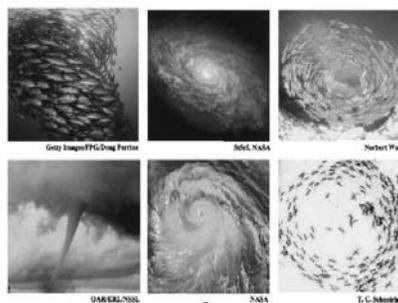


Figura 1: Estructuras emergentes en dos y tres dimensiones, en sistemas vivos e inertes. Izquierda: estructura de tornado en peces (arriba) y vapor de agua (abajo). Centro y derecha: espirales y toroides en galaxias, peces, hormigas y vapor de agua. Figura de S. V. Viscido [22].

herramientas de sistemas dinámicos y mecánica estadística, de manera que permite analizar sistemas compuestos por muchos elementos que interactúan de manera no lineal.

### 1.1 MODELO FERROMAGNÉTICO

A nivel microscópico, los imanes están compuestos de miles de átomos, cada uno de los cuales puede apuntar en cualquier dirección, pero también es afectado por el campo magnético generado por sus vecinos. Las interacciones entre espines favorecen que los espines cercanos se alineen, sin embargo, el movimiento térmico puede destruir éste alineamiento. Pierre Curie descubrió que al aumentar la temperatura de un material ferromagnético, después de cierta temperatura, específica para cada material, éste pierde sus propiedades magnéticas.

Con el fin de estudiar fenómenos ferromagnéticos, en 1924 fue propuesto el modelo de Ising, que consiste en un conjunto de variables discretas que representan el momento magnético dipolar de los átomos. Cada variable puede tomar dos valores (+1 o -1) y el hamiltoniano para el caso unidimensional está dado por

$$H = -\frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N J_{ij} s_i s_j, \quad (1.1)$$

donde  $J_{ij}$  representa la interacción entre vecinos cercanos y tiene un valor positivo en el caso ferromagnético. La regla de evolución del sistema, para temperatura cero, consiste en que cada átomo cambiará su estado sólo si al hacerlo disminuye la energía del sistema. Cuando la temperatura es diferente de cero se agrega un término al hamiltoniano dominante para temperaturas altas.[12]

Peierls en 1944 mostró que el modelo de Ising unidimensional no exhibe una transición de fase, no obstante el caso bidimensional si. El argumento usado por Peierls fue el siguiente. Para probar si el estado ordenado es un estado de equilibrio del sistema para una temperatura finita, consideremos una cadena compuesta por  $N$  espines que, como estado inicial, se encuentran alineados en una dirección. Al perturbar al sistema, el cambio en la energía libre será

$$\Delta F = T - US, \quad (1.2)$$

donde  $U$  es la energía interna,  $T$  la temperatura y  $S$  la entropía del estado. Si la fase ordenada fuere un estado de equilibrio, entonces su energía libre debe incrementarse ante cualquier cambio,  $\Delta F > 0$ . Por otro lado, si existiera una configuración que disminuyera la energía libre, el sistema preferiría esa configuración al estado ordenado.

Si excitamos al sistema ordenado formando dos dominios de alineaciones opuestas, es decir, si a la izquierda de una «pared» todos los espines apuntan hacia arriba y a la derecha apuntan hacia abajo (ver figura 2); la energía que le cuesta al sistema formar esta perturbación es  $U = 2J$ . Al considerar que la cadena está compuesta por  $N$  espines, hay  $N - 1$  posibles posiciones para colocar dicha pared, por lo que la

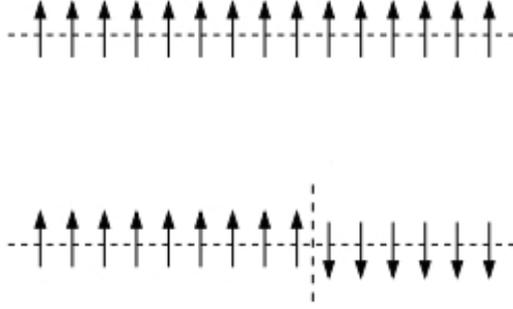


Figura 2: Arriba: Configuración inicial del modelo de Ising unidimensional. En un inicio todos los espines apuntan en la misma dirección. Abajo: Perturbación al estado ordenado. La línea punteada muestra la «pared» que divide los dos dominios. Si el estado ordenado fuera un estado de equilibrio, ante cualquier perturbación del sistema el cambio en la energía libre sería positivo, sin embargo Peierls mostró que es negativo.[24]

entropía del sistema será:  $S = k_B \ln(N - 1)$ . Por lo tanto, el cambio en la energía libre será:

$$\Delta F = 2J - k_B T \ln(N - 1). \quad (1.3)$$

En el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ , el cambio en la energía libre  $\Delta F$  para cualquier temperatura será negativo, por lo que la fase ordenada no es un estado de equilibrio y no puede existir a una temperatura finita. Las fluctuaciones térmicas siempre superan la tendencia de la energía de crear estados ordenados. Esta misma conclusión es válida para sistemas unidimensionales con interacciones de corto alcance, por lo que sabemos que en ellos no podremos observar transiciones de fase.[24]

Ising supuso que su modelo había fracasado pues en una dimensión no presentaba transición de fase y concluyó que lo mismo ocurriría para dimensiones mayores. Sin embargo la situación cambia. Partiendo de un estado ordenado bidimensional, en el que todos los espines apuntan en la misma dirección, formamos un dominio con la orientación opuesta cuya frontera tenga una longitud  $L$  (ver figura 3). Para formar este dominio, el sistema debe cambiar su energía interna por un factor  $U = 2LJ$ . Partiendo de un punto de la frontera del dominio, en el primer paso hay 4 posibles direcciones a seguir, pero los siguientes pasos,  $L - 1$ , sólo tendrán 3. Si además consideramos que todos los nodos sobre el contorno son equivalentes, cada uno de ellos puede ser el posible punto de inicio. Entonces existen, aproximadamente,  $3^L$  distintas configuraciones que nos permiten formar un dominio con una frontera de longitud  $L$ . Por lo tanto la entropía es aproximadamente  $k_B \ln 3$  y el cambio en la energía libre será

$$\Delta F = 2NJ - k_B TN \ln 3. \quad (1.4)$$

En este caso, el cambio en la energía libre permite que haya estados de orden aún a temperaturas diferentes de cero. Haciendo  $\Delta F = 0$  pode-



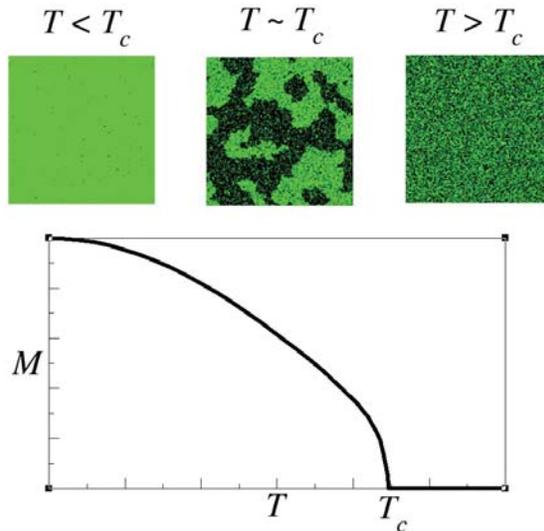


Figura 4: Transición de fase en un sistema ferromagnético. Un punto negro representa un spin apuntando hacia abajo, un punto verde representa un spin apuntando hacia arriba. Izquierda: fase totalmente ordenada, para temperaturas bajas. Centro: fase crítica en la que podemos observar formación de dominios, aquí se da la transición de fase orden-desorden. Derecha: fase desordenada para temperaturas altas.

comunes son: transiciones de primer orden o discontinuas y transiciones de segundo orden o continuas.

### 1.2.1 Transiciones de primer orden

Una transición de fase es de primer orden cuando para cualquier valor de los parámetros de control ninguna de las funciones respuesta en el sistema diverge.[1]. En este tipo de transiciones se observan dos características principales: la discontinuidad del parámetro de orden respecto al parámetro de control, y la multiestabilidad del parámetro de orden. Por ejemplo, en la transición sólido-líquido del agua, el parámetro de orden es la densidad del material, mientras que el parámetro de control es la temperatura. Al variar la temperatura, el agua se convierte de sólido a líquido cambiando discontinuamente su densidad.

En el punto crítico de una transición de fase de primer orden, por lo general coexisten dos (o más) fases metaestables. A lo largo de la dinámica, el sistema transita entre estas fases, por lo que la serie temporal del parámetro de orden muestra un comportamiento multiestable. La distribución de probabilidad (PDF) de esta serie temporal es entonces multimodal, reflejando que diferentes fases coexisten y el sistema transita entre ellas. Por ejemplo, en la transición sólido-líquido del agua, cuando sólo coexisten dos fases, el parámetro de orden es biestable y la PDF correspondiente es *bimodal*. La Fig. 5 ilustra el comportamiento de la PDF en una transición de primer orden, como la esquematizada con la curva  $\psi(\eta)$ , donde  $\psi$  es el parámetro de orden y  $\eta$  el parámetro de

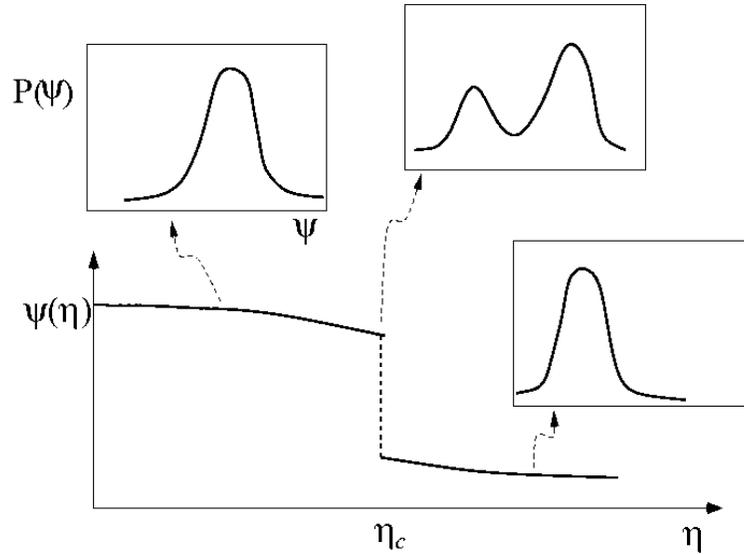


Figura 5: Bimodalidad de la función de distribución de probabilidad. Cerca del punto crítico la PDF muestra un comportamiento bimodal, sin embargo a medida que se aleja del punto de transición la PDF se vuelve unimodal.

control. Para valores de  $\eta$  menores que el valor  $\eta_c$  donde ocurre la transición, la función de probabilidad  $P(\psi)$  es unimodal, lo que refleja que dentro de la región «ordenada» sólo existe una fase (como la fase sólida del agua). Lo mismo ocurre dentro de la región «desordenada»  $\eta > \eta_c$  (como la fase líquida). Sin embargo, cerca del punto de transición  $\eta_c$  la función de probabilidad  $P(\psi)$  presenta una estructura bimodal, lo que indica que el sistema transita entre las dos fases, la ordenada y la desordenada. Vale la pena enfatizar que el comportamiento mostrado en la Fig. 5 es característico de las transiciones de primer orden.

### 1.2.2 Transiciones de segundo orden

Las transiciones de fase de segundo orden tienen tres características principales:

1. El parámetro de orden varía continuamente con el parámetro de control (por eso también se les llama transiciones «continuas»);
2. Algunas de sus funciones de respuesta divergen cerca del punto crítico;
3. Cerca del punto crítico, tanto el parámetro de orden como las funciones de respuesta que caracterizan el estado macroscópico del sistema se comportan como leyes de potencia respecto del parámetro de control.

Consideremos como ejemplo el sólido ferromagnético 2D, cuyo parámetro de orden es la magnetización  $M$  y los parámetros de control son la

temperatura  $T$  y el campo magnético externo  $B$ . Entonces, la magnetización es una función tanto de la temperatura como del campo externo:  $M = M(T, B)$ . Dos funciones de respuesta de fundamental importancia son la susceptibilidad magnética  $\chi = (\partial M / \partial B)$ , y la capacidad calorífica  $C = (\partial U / \partial T)$  (donde  $U$  es la energía interna del sistema). Para este sistema es bien conocido que, cuando  $B = 0$ , existe una temperatura crítica  $T_c$  tal que si  $T < T_c$  entonces  $M \neq 0$ , mientras que si  $T > T_c$  entonces  $M = 0$  (ver panel inferior de la Fig. 4). Además, cerca de la temperatura crítica, la magnetización, la susceptibilidad magnética y la capacidad calorífica se comportan como

$$\begin{aligned} M(T, 0) &\sim |T - T_c|^\beta \\ \chi(T, 0) &\sim |T - T_c|^{-\mu} \\ C(T, 0) &\sim |T - T_c|^{-\alpha} \end{aligned}$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\mu$  se conocen como *exponentes críticos*. [8, 16]

Otra cantidad importante es la longitud de correlación  $\xi$ . Como muestra la Fig. 4, cerca de la temperatura crítica se forman dentro del material dominios de magnetización en una dirección particular y dominios de magnetización en la dirección contraria. La longitud de correlación puede interpretarse intuitivamente como el tamaño de los dominios de magnetización más grandes. Cerca de la transición de fase la longitud de correlación se comporta como una ley de potencia respecto de la temperatura,

$$\xi(T, 0) \sim |T - T_c|^{-\gamma}.$$

El hecho de que esta longitud diverja para  $(T - T_c) \sim 0$  significa que en el punto crítico las correlaciones son de largo alcance, y lo que ocurre en una parte del sistema (como una fluctuación pequeña en uno de los dominios), se va a propagar afectando el estado global de magnetización. Por otro lado, si consideramos a  $M$  como una función del campo externo aplicado  $B$ , justo cuando  $T = T_c$  se tiene que

$$M(T_c, B) \sim B^{1/\delta}, \quad (1.5)$$

es decir, en la isoterma crítica  $T = T_c$  la magnetización decrece como una ley de potencias en función del campo.

Los exponentes críticos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\mu$  y  $\gamma$  no son independientes unos de otros. Widom, Kadanoff y Fisher mostraron que estos exponentes están relacionados por medio de

$$\mu = \beta(\delta - 1); \quad \alpha + \beta(\delta + 1) = 2; \quad d\gamma - 2\beta = \mu \quad (1.6)$$

donde  $d$  es la dimensión del espacio. Las primeras dos relaciones se llaman *leyes de escalamiento*, y la tercer relación se conoce como *relación de hiper-escalamiento*. [21] La importancia de estas relaciones radica en que siempre se satisfacen en transiciones de fase de segundo orden que ocurren en sistemas, aparentemente, muy diferentes, sin importar la particularidad de las interacciones moleculares. Más aún, en muchas de estas transiciones los exponentes críticos adquieren los mismos valores.

Como ejemplo, consideremos una familia de graficas de la magnetización  $M$  en función de la temperatura  $T$ , para diferente valores del

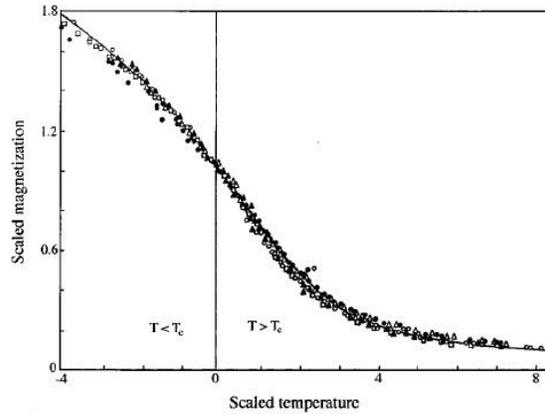


Figura 6: Datos experimentales de cinco materiales magnéticos diferentes:  $CrBr_3$ ,  $EuO$ ,  $Ni$ ,  $YIG$  y  $Pd_3Fe$ . Al escalar los datos de estos materiales todos se superponen en una sola función que coincide con el modelo de Heisenberg tridimensional.[25]

campo magnético  $B$ . Se encontró que todas las curvas de esta familia colapsan en una sola al escalar las variables respecto al campo magnético, es decir, al dividir  $M$  y  $T$  por alguna potencia de  $B$  (las potencias no son las mismas para  $M$  y  $T$ ). De manera aún más sorprendente, se encontró que las funciones escaladas de cinco materiales magnéticos diferentes cerca de su punto crítico son «iguales» (Fig. 6).

Ejemplos como este originaron el desarrollo de el concepto de universalidad, las leyes de escalamiento y la teoría de renormalización.[25]

### 1.2.3 Universalidad

De manera análoga a la tabla de Mendeleev, los sistemas críticos pueden ser clasificados en *clases de universalidad* de acuerdo a los exponentes de sus funciones respuesta cerca del punto crítico. Si los exponentes críticos de dos sistemas tienen el mismo valor pertenecen a la misma clase de universalidad.

### 1.2.4 Escalamiento

La Fig. 4 muestra que cerca de la transición de fase se forman dominios de magnetización positiva y de magnetización negativa dentro del material. Estos dominios tienen diferentes tamaños, desde dominios muy chicos formados por unos cuantos espines, hasta dominios enormes que atraviesan el sistema entero. De hecho, en el límite termodinámico,  $N \rightarrow \infty$ , la probabilidad de encontrar un dominio de tamaño  $s$  es una ley de potencias:  $P(s) \sim s^{-\eta}$ . Lo anterior significa que hay dominios de todos los tamaños y que si reescalamos al sistema, la estructura de dominios no cambiará en el sistema reescalado. Ésta es precisamente la propiedad más importante de las transiciones de fase de segundo

orden: cerca de la transición de fase todas las funciones termodinámicas son escalables.

La hipótesis de escalamiento para funciones termodinámicas está, por lo general, dada por el potencial de Gibbs por espín  $G$  y establece que cerca del punto crítico, la parte singular del potencial de Gibbs  $G_s(B, T)$  es una función homogénea generalizada. Es decir, cerca del punto crítico existen dos números,  $a_B$  y  $a_T$  (llamados potencia de escalamiento del campo y de la temperatura respectivamente) tales que para cualquier  $\lambda$  positivo

$$G_s(\lambda^{a_B}, \lambda^{a_T} T) = \lambda G_s(B, T). \quad (1.7)$$

Esta propiedad significa que un cambio de escala en la variable independiente solo tiene el efecto de cambiar la escala de la función, pero no su forma. En otras palabras, ante cambios de escala, la función se ve igual.[21, 25]

### 1.2.5 Renormalización

El hecho de que el sistema presente la misma estructura a todas las escalas llevó, de manera independiente, a Widom, Domb y Hunter, Kadanoff, Patashinskii y Pokrovskii, y Fisher a proponer un mecanismo de reescalamiento, perfeccionado posteriormente por K. Wilson, conocido como grupo de renormalización.[21, 25] La idea esencial de Wilson se basa en que el punto crítico puede ser visto como un punto fijo, bajo una transformación adecuada, del hamiltoniano del sistema. Para conocer someramente cómo se lleva a cabo la transformación de renormalización, consideremos el ejemplo de la transformación de Kadanoff sobre el problema unidimensional de percolación.

El problema de percolación es el siguiente. Supongamos que una fracción  $p$  de sitios de una red infinita  $d$ -dimensional están ocupados. Para  $p$  pequeña, la mayor parte de los sitios ocupados estarán rodeados de sitios desocupados. Sin embargo, a medida que  $p$  aumenta, los lugares vecinos se van ocupando y se forman grupos o cúmulos. Estos grupos pueden ser descritos por su tamaño lineal característico  $S(p)$  que crece como función de  $p$ , pero al llegar a un valor crítico  $p_c$  diverge (Fig. 7) como

$$\xi(p) \sim |p - p_c|^{-\nu}. \quad (1.8)$$

Para  $p \geq p_c$  aparece, además de los cúmulos finitos, uno que abarca a todo el sistema. El valor crítico de la probabilidad de ocupación  $p_c$  es el que definirá la existencia de este grupo que conecta a todos los sitios de la red (Fig. 8).

La transformación de Kadanoff funciona de la siguiente forma. Si agrupamos dos sitios de la red en un bloque y  $p$  es la probabilidad de que un sitio de la red esté ocupado, ¿cuál será el parámetro  $p'$  que denote que un bloque está ocupado? (ver Fig. 9). Este es el punto esencial en la aproximación del grupo de renormalización, la construcción

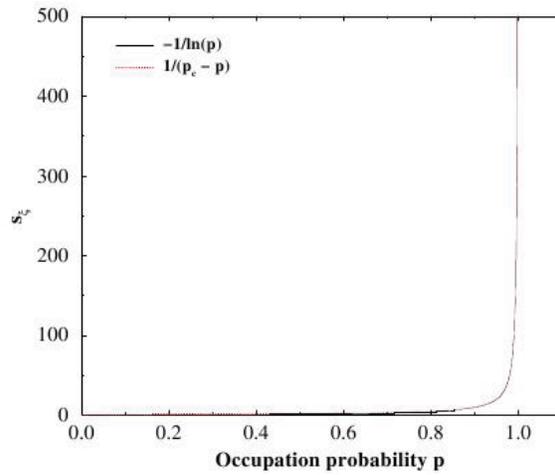


Figura 7: Percolación unidimensional. El tamaño lineal característico  $S(p) = -1/\ln(p)$  diverge cuando  $p \rightarrow p_c = 1$ . [5]

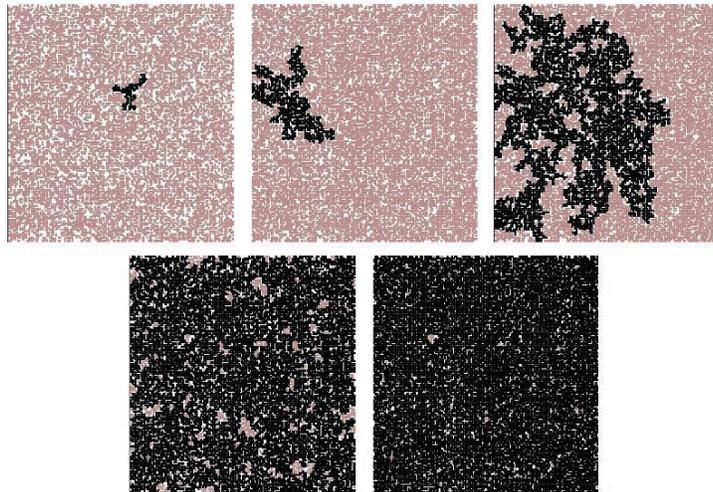


Figura 8: Percolación en un sistema bidimensional de  $150 \times 150$ . La probabilidad de ocupación para cada cuadro de arriba a abajo es  $p = 0.45, 0.55, 0.59, 0.65$  y  $0.75$  respectivamente. El valor crítico de la probabilidad de ocupación es  $p_c = 0.59$ , valor para el cual se forma por primera vez un cúmulo que atraviesa al sistema. [5]

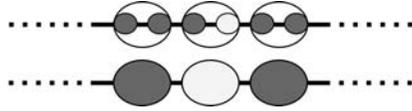


Figura 9: La transformación de Kadanoff aplicada al problema de percolación unidimensional. Arriba: la probabilidad de que uno de los sitios esté ocupado está dada por el parámetro  $p$ . Abajo: la probabilidad de que un bloque esté ocupado está dado por el parámetro  $p'$ . La relación entre los parámetros  $p$  y  $p'$  es la transformación de renormalización.

de una relación funcional entre el parámetro original  $p$  y el parámetro «renormalizado»  $p'$ , es decir, encontrar

$$p' = R_b(p), \quad (1.9)$$

donde  $R_b(p)$  es la transformación de renormalización. Esta función es de fundamental importancia, pues una vez que conocemos la transformación de renormalización podemos conocer los puntos críticos (estos son los puntos fijos  $p' = p$ ) y las potencias de escalamiento del sistema. [25]



## MODELO DE VOTANTES

El modelo de votantes es, posiblemente, el sistema más sencillo para el estudio de difusión de opiniones y aparición de un consenso en una población. Este modelo consiste en una red compuesta por un conjunto de variables que representan a los individuos que conforman una sociedad. Además, cada sitio cuenta con una variable que representa la opinión del individuo respecto a un tema, por ejemplo, el voto a favor de uno de dos candidatos en alguna elección. Partiendo de una configuración desordenada, el modelo sigue una regla dinámica simple: cada elemento del sistema considera la opinión de sus vecinos y con base en ello asigna un nuevo valor a su opinión. De esta manera el modelo imita la dinámica de homogenización de opiniones en una sociedad, pues cada individuo decide su voto electoral con base en las opiniones de sus amigos.

El modelo que usaremos es una red compuesta por un conjunto de  $N$  variables binarias  $v_1, v_2, \dots, v_N$ , cada una con un estado  $+1$  ó  $-1$ , que cambia en cada paso de tiempo. El valor de  $v_n(t+1)$  está determinada por un conjunto de  $k_n$  elementos  $I_n = \{v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_k}\}$  que a lo largo de este trabajo llamaremos conjunto de *inputs* (Fig. 10). El número de elementos  $k_n$  que conformarán al conjunto de *inputs* quedará determinado por una distribución de conexiones  $P_k(x)$  pues más adelante consideraremos redes en las que el número de *inputs* varía de elemento a elemento. En un paso de tiempo, el nodo  $v_n$  recibe una señal de entrada de su conjunto  $I_n$  y cambia su valor de acuerdo a esta señal.

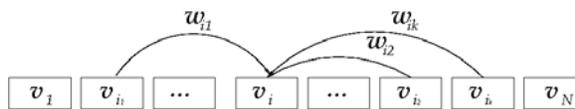


Figura 10: Representación esquemática de la estructura de la red. Cada elemento  $v_i$  se conecta con otros  $k$  elementos  $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$  que son elegidos aleatoriamente del conjunto de  $N$  elementos que conforman la red. La contribución que cada *input* tiene sobre  $v_i$  está pesada por  $w_{ij}$

## 2.1 REGLA DINÁMICA

La dinámica del sistema queda dada por la actualización de los elementos de la red siguiendo la regla

$$v_n(t+1) = \begin{cases} \text{Sgn} \left[ \sum_{j=1}^K w_{nj} v_{n_j}(t) \right] & \text{con probabilidad } 1 - \eta \\ -\text{Sgn} \left[ \sum_{j=1}^K w_{nj} v_{n_j}(t) \right] & \text{con probabilidad } \eta \end{cases} \quad (2.1)$$

en donde para cada  $v_n$ , la suma se hace sobre los  $k$  vecinos  $\{v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_k}\}$  a los que está conectado. Las variables  $w_{nj}$  son variables aleatorias escogidas de una distribución  $P_w(x)$  y fijas a lo largo de la dinámica que representan el peso de las conexiones entre elementos de la red, por lo que las denotaremos como *pesos sinápticos*. Llamaremos *señal de entrada* a la suma ponderada de los *inputs*, que es argumento de la función  $\text{Sgn}[x]$ . Esta función  $\text{Sgn}[x]$  toma un  $-1$  si  $x < 0$  y un  $+1$  en caso contrario. En la regla dinámica dada por la ecuación anterior los elementos  $v_n$  tienden a adquirir el mismo estado que la mayoría de sus  $k$  vecinos (cuando los pesos sinápticos son todos positivos). Sin embargo, con una probabilidad  $\eta$ , pueden adquirir el estado contrario. El parámetro  $\eta$ , que es la probabilidad de ir en contra de la mayoría, juega un papel parecido al de la temperatura en el modelo de Ising, en el sentido de que es el parámetro externo que regula la transición de fase. [17] Los parámetros más importantes en este modelo son: la amplitud del ruido  $\eta$ , el número de partículas  $N$ , la conectividad  $k$ , que queda determinada por la topología de la red; el promedio y la varianza de la función de distribución de pesos sinápticos  $P(w)$ .

En palabras, este sistema representa una sociedad de  $N$  individuos, en la cual cada individuo  $v_n$  puede tener una de dos opiniones sobre algún tema ( $+1$  ó  $-1$ ). La opinión de cada uno de los miembros de este grupo está influenciada por sus  $k$  amigos (*inputs*) que son elegidos de manera aleatoria de entre los  $N$  elementos que conforman a la sociedad. Por lo general cada individuo tiene la misma opinión que la mayoría de sus amigos, con una probabilidad de tener la opinión opuesta.[11].

Es importante notar que esta red es dirigida, pues el que  $v_n$  sea *input* de  $v_m$  no implica necesariamente que  $v_m$  lo sea de  $v_n$ . La manera en la que asignamos el conjunto de *inputs* y *outputs* de cada elemento genera redes con diferentes topologías y por lo tanto con comportamientos muy distintos.

## 2.2 ORDEN EN EL SISTEMA

En cada instante de tiempo se puede cuantificar el orden en el sistema mediante el *parámetro de orden* que se define de la siguiente manera:

$$\psi(\eta, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n(t). \quad (2.2)$$

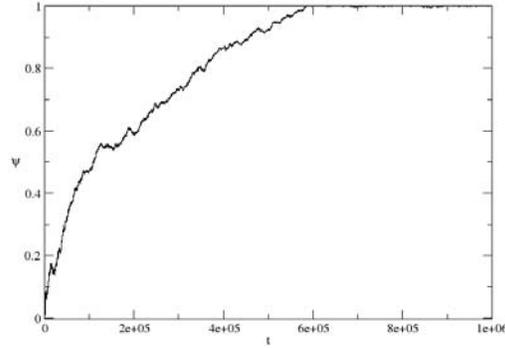


Figura 11: Serie temporal del parámetro de orden. Después de un tiempo transitorio es evidente que el sistema alcanza un estado estacionario pues el valor del parámetro de orden se estabiliza alrededor de un valor promedio.

Después de un tiempo transitorio, el sistema alcanza un estado estacionario. (Fig. 11). Es en este estado donde podemos promediar  $\psi(\eta, t)$  sobre un ensemble de sistemas, o sobre el tiempo (asumiendo que el sistema es ergódico), para obtener el parámetro de orden estacionario  $\psi(\eta)$  que se define como

$$\psi(\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi(\eta, t) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau} |\psi(\eta, t)|. \quad (2.3)$$

Este parámetro de orden es aproximadamente cero ( $\psi(\eta) \approx 0$ ) si existen el mismo número de opiniones a favor que en contra, mientras que para la fase en la que se alcanza un consenso es aproximadamente uno ( $\psi(\eta) \approx 1$ ).

Dada la regla dinámica podemos observar que el comportamiento del parámetro de orden dependerá de tres factores: la distribución de conexiones  $P_k(x)$ , la distribución de pesos sinápticos  $P_w(x)$  y el ruido  $\eta$ .



## ANTECEDENTES

## 3.1 RESULTADOS ANALÍTICOS

En esta sección nuestro objetivo es determinar el mapeo dinámico que genera la evolución temporal del parámetro de orden tal que  $\psi(t+1) = M(\psi(t))$ , para así encontrar las condiciones sobre la estructura del sistema de manera que  $M(\psi)$  tenga puntos fijos estables.

Definimos  $\phi_n(t)$  como la probabilidad de que  $v_n(t) = 1$ . Entonces el parámetro de orden instantáneo  $\psi(t)$  está dado por

$$\psi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [2\phi_n(t) - 1]. \quad (3.1)$$

De manera análoga, definimos  $P_n^+(t, k_n)$  como la probabilidad de que la suma de los  $k_n$  *inputs* del elemento  $v_n$  sea positiva. Partiendo de estas definiciones encontramos que  $\phi_n(t)$  tiene la siguiente regla dinámica

$$\phi_n(t+1) = \sum_{k_n=1}^{\infty} P(k_n) \{ (1 - \eta) P_n^+(t, k_n) + \eta [1 - P_n^+(t, k_n)] \}. \quad (3.2)$$

El primer término de la derecha de esta ecuación puede interpretarse como la probabilidad de que al tiempo  $t$  la suma de *inputs* sea positiva y la regla de la mayoría se obedezca; mientras que el segundo término es la probabilidad de que la suma de *inputs* sea negativa, pero que la regla de la mayoría no se siga. Ambos casos resultarán en que  $v_n(t+1) = 1$ . Es importante notar que  $P_n^+(t)$  es función de  $(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots, \phi_{n_{k_n}})$ , lo cual nos lleva a un conjunto de ecuaciones no lineales acopladas imposibles de resolver sin el uso de alguna aproximación.

## 3.1.1 Aproximación de campo medio

La aproximación de campo medio consiste en dos suposiciones:

1. Los nodos  $v_n$  son estadísticamente independientes.
2. Los nodos  $v_n$  son estadísticamente equivalentes.

La primera condición se cumple si los  $k_n$  *inputs* son seleccionados de manera aleatoria de cualquier parte del sistema con una probabilidad uniforme. Al hacer esto, la probabilidad de que dos elementos diferentes compartan el mismo conjunto de *inputs* se vuelve despreciable, lo cual implica una independencia estadística. La equivalencia estadística se cumple si la probabilidad  $\phi_n(t)$  es la misma para cada elemento de la red y alcanza un valor constante en su estado estacionario. De esta manera el valor estacionario  $\phi$  alcanzado por cada elemento será independiente del sitio que ocupe en la red.

A partir de estas suposiciones el valor estacionario de  $P_n^+(t)$  es sólo función de  $\phi$  y del número de *inputs*  $k_n$ , es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n^+(t, k_n) = P^+(\phi, k_n), \quad (3.3)$$

transformando la ecuación 3.2 en

$$\phi = \sum_{k_n=1}^{\infty} P(k_n)[(1 - 2\eta)P^+(\phi, k_n) + \eta]. \quad (3.4)$$

Podemos reescribir esta ecuación en función del valor estacionario del parámetro de orden  $\psi = 2\phi - 1$ , que al ser sustituido nos da la siguiente ecuación de punto fijo

$$\psi = -1 + 2 \sum_{k_n=1}^{\infty} P(k_n)[(1 - 2\eta)P^+(\psi, k_n) + \eta] \quad (3.5)$$

En este punto dada la necesidad de una expresión exacta para  $P^+(\psi, k)$ , usamos las aproximaciones de campo medio para poder obtenerla.

### 3.1.2 Cálculo de la probabilidad de que la suma de *inputs* sea positiva con transformadas de Fourier

Definimos  $Q_k(\xi)$  como la función de distribución de probabilidad de la señal de entrada  $\xi_k = [\sum_{j=1}^k w_{n_j} v_{n_j}]$ . La probabilidad  $P^+(\phi, k)$  de que  $\xi_k > 0$  quedará determinada por

$$P^+(\phi, k) = \int_0^{\infty} Q_k(\xi) d\xi. \quad (3.6)$$

La función de distribución de probabilidad (PDF) de los elementos de la suma de  $\xi_k$  está dada de la siguiente manera. Por un lado, los pesos sinápticos  $w_{n_j}$  son variables aleatorias con una función de probabilidad  $P_w(x)$ . Por otro lado, en el estado estacionario cada nodo adquiere los valores  $+1$  ó  $-1$  con probabilidades  $\phi$  y  $1 - \phi$  respectivamente. Considerando esto, la PDF del producto  $w_{n_j} v_{n_j}$  está dada por

$$P_{wv}(x) = \phi P_w(x) + (1 - \phi) P_w(-x). \quad (3.7)$$

Si asumimos que el sistema cumple con las condiciones de campo medio, cada termino  $w_{n_j} v_{n_j}$  que aparece en la suma  $\xi_k$  será una variable aleatoria independiente con función de probabilidad  $P_{wv}(x)$ , por lo que  $Q_k(\xi)$  es la  $k$ -ésima convolución de  $P_{wv}(x)$

$$Q_k(\xi) = \overbrace{P_{wv} * P_{wv} * \dots * P_{wv}}^{k \text{ veces}}(\xi). \quad (3.8)$$

Tomando la transformada de Fourier de la ecuación anterior tenemos

$$\hat{Q}_k(\lambda) = [P_{wv}(\lambda)]^k = [\phi \hat{P}_w(\lambda) + (1 - \phi) \hat{P}_w(-\lambda)]^k. \quad (3.9)$$

Si denotamos las partes real e imaginaria de  $\hat{P}_w(\lambda)$  por  $g(\lambda)$  y  $h(\lambda)$  respectivamente, la última ecuación queda como

$$\hat{Q}_k(\lambda, \psi) = [g(\lambda) + i\psi h(\lambda)]^k. \quad (3.10)$$

Haciendo la transformada de Fourier inversa de esta ecuación y sustituyendo su resultado en 3.6 obtenemos

$$P^+(\psi, k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [g(\lambda) + i\psi h\lambda]^k e^{-i\lambda\zeta} d\lambda d\zeta. \quad (3.11)$$

Usando el teorema binomial podemos desarrollar el término  $[g(\lambda) + i\psi h(\lambda)]^k$  y de esta manera la última ecuación queda como

$$P^+(\psi, k) = \sum_{m=0}^k a(k, m) \psi^m, \quad (3.12)$$

donde los coeficientes  $a(k, m)$  son

$$a(k, m) = \frac{i^m}{2\pi} \binom{k}{m} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [g(\lambda)]^{k-m} [h(\lambda)]^m e^{-i\lambda\zeta} d\lambda d\zeta \quad (3.13)$$

Podemos cambiar el orden de integración para  $m > 0$  y realizar la integral sobre  $\zeta$  al multiplicar el integrando por  $e^{-\delta\zeta}$  y tomando el límite  $\delta \rightarrow 0$ . Haciendo esto, finalmente los coeficientes  $a(k, m)$  quedan como

$$a(k, m) = \frac{-i^{m+1}}{2\pi} \binom{k}{m} \int_0^\infty [g(\lambda)]^{k-m} [h(\lambda)]^m \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (3.14)$$

y la ecuación 3.5, que determina el mapeo del parámetro de orden temporal, resulta

$$\psi = -1 + 2 \sum_{k=0}^\infty P(k) \sum_{m=0}^k a(k, m) \psi^m. \quad (3.15)$$

Es importante notar que  $g(\lambda)$  es una función par, pues es la parte real de la transformada de Fourier, por lo que  $a(k, 0) = 1/2$  para cualquier  $k$ . Para comprobar este resultado basta sustituir  $m = 0$  en la ecuación 3.13,

$$a(k, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [g(\lambda)]^k e^{-i\lambda x} d\lambda dx. \quad (3.16)$$

Definiendo  $G_k(x)$  como la transformada inversa de  $[g(\lambda)]^k$ , podemos ver que

$$a(k, 0) = \int_0^\infty G_k(x) dx, \quad (3.17)$$

pero  $\int_{-\infty}^\infty G_k(x) dx = 1$  pues es la parte real de la transformada de Fourier de la función de probabilidad de los pesos sinápticos. Esto nos

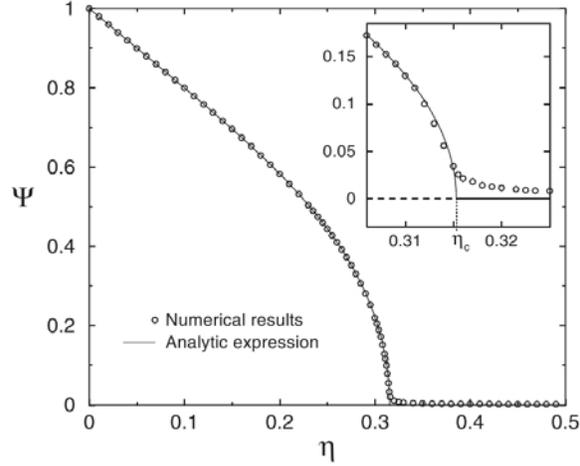


Figura 12: Transición de fase en el modelo de votantes del parámetro de orden  $\psi$  en función del ruido  $\eta$  para un sistema donde los pesos sinápticos son  $w_{ij} = 1 \forall i, j$  y conectividad  $k = 11$ . La transición ocurre en  $\eta_c \simeq 0.3153$ . La pequeña discrepancia entre los resultados analíticos y numéricos cerca del punto crítico se debe a efectos de tamaño finito. [2]

permite concluir que  $a(k, 0) = 1/2$ , por lo que la ecuación 3.15 queda como

$$\psi = 2(1 - 2\eta) \sum_{k=1}^{\infty} P(k) \sum_{m=1}^k a(k, m) \psi^m. \quad (3.18)$$

Ahora analicemos la parte imaginaria de la transformada de Fourier de la distribución de pesos. De la ecuación 3.14 podemos ver que como  $h(\lambda)$  es una función impar, entonces  $a(k, m) = 0$  para valores impares de  $m$ , por lo que sólo contribuirían a la suma los términos pares.

Por otro lado, si  $P_w(x)$  es una función par, entonces  $h(\lambda) = 0$ , lo cual hace que  $P^+(\psi, k) = 1/2$ . Por lo tanto, para distribuciones de peso simétricas  $\psi = 0$  y no existe un valor de ruido  $\eta$  tal que haya orden en el sistema.

### 3.1.3 Ejemplos de la solución analítica

Para probar el resultado obtenido anteriormente consideremos una red con una distribución de pesos  $P_w(x) = \delta(x - 1)$ , cuya transformada de Fourier es

$$\hat{P}_w(\lambda) = \cos(\lambda) + i \sin(\lambda), \quad (3.19)$$

por lo que los coeficientes  $a(k, m)$  quedan como

$$a(k, m) = \frac{-i^{m+1}}{2\pi} \binom{k}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} [\cos(\lambda)]^{k-m} [\sin(\lambda)]^m d\lambda. \quad (3.20)$$

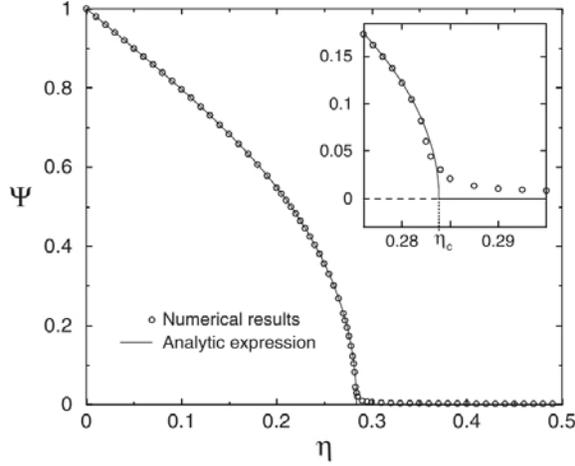


Figura 13: Transición de fase en el modelo de votantes del parámetro de orden  $\psi$  en función del ruido  $\eta$  para un sistema en donde la función de pesos sinápticos es una distribución uniforme entre  $(0, 1)$  y conectividad  $k = 11$ . El valor crítico del ruido al cual ocurre la transición es  $\eta_c \simeq 0.2838$ . [2]

El segundo caso corresponde a una red con pesos sinápticos obtenidos de una distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ , con transformada de Fourier

$$\hat{P}_w(\lambda) = \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} + i \frac{1 - \cos(\lambda)}{\lambda}, \quad (3.21)$$

y coeficientes de la forma

$$a(k, m) = \frac{-i^{m+1}}{2\pi} \binom{k}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} [\sin(\lambda)]^{k-m} [1 - \cos(\lambda)]^m d\lambda. \quad (3.22)$$

Evaluando para  $P_k(x) = \delta(x - 1)$ , podemos ver que los resultados numéricos y analíticos coinciden de manera excelente (ver figuras 12 y 13). Además, que independientemente de la distribución de pesos utilizada el exponente de la transición sigue correspondiendo al de campo medio. Lo único que afecta este cambio es el valor del ruido crítico al que la red se desordena.

En la figura 14 están las transiciones de fase analíticas predichas por este método para una red con pesos uniformemente distribuidos entre 0 y 1. Es claro que al ir aumentando el grado de conectividad en el sistema, éste permanece en la fase ordenada para una región mayor de valores de  $\eta$ , dando como resultado un aumento en el valor crítico del ruido.

Confirmando este comportamiento, la figura 15 muestra el valor crítico del ruido  $\eta_c$  en función de la conectividad  $k$ . Podemos observar que a medida que la conectividad aumenta, la transición de fase aparece en valores del ruido mayores, aproximándose cada vez más al valor asintótico de  $1/2$ . Esto podría interpretarse de la siguiente manera, entre más correlacionada esté una red es más difícil desordenarla [2].

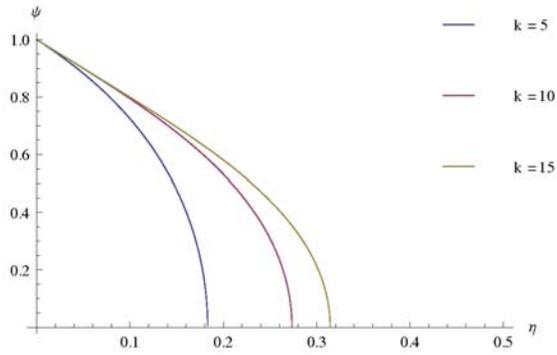


Figura 14: Predicción de las transiciones de fase del parámetro de orden  $\psi$  respecto al ruido  $\eta$  usando las transformadas de Fourier para sistemas con conectividad  $k = 5, 10$  y  $15$ . El valor del ruido al que ocurre la transición de fase aumenta con la conectividad de la red. Los valores de  $\eta_c$  correspondientes a estas gráficas se muestran en la tercera columna de la tabla 1

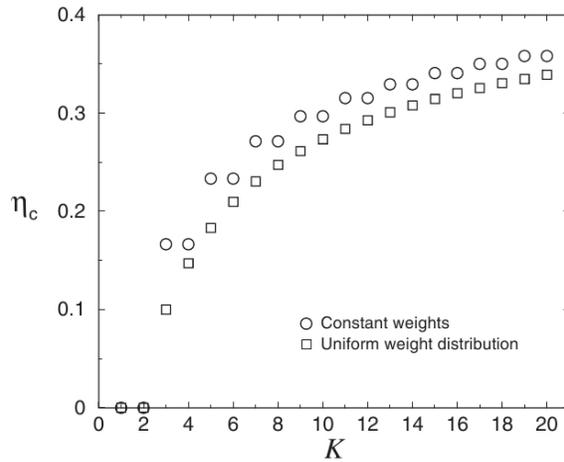


Figura 15: Valor del ruido crítico  $\eta_c$  para diferentes valores de conectividad  $k$  y dos distintas distribuciones de pesos sinápticos:  $w_{ij} = 1 \forall i, j$  (círculos) y  $w_{ij}$  uniformemente distribuidos entre  $[0, 1]$  (cuadros). A medida que la conectividad aumenta la cantidad de ruido necesario para desordenar al sistema es mayor. Para valores de  $k$  mayores el valor crítico tiene asintóticamente al valor máximo del ruido  $1/2$ . Para  $k \leq 2$  en ambos casos  $\eta_c = 0$  y el sistema se desordena para cualquier valor de ruido  $\eta > 0$ . [2]

Sobre esta misma figura, vale la pena enfatizar dos cosas más. La primera es el número mínimo de conexiones necesarias para que haya orden. La gráfica 15 muestra que para redes con conectividad menor a tres el valor crítico del ruido es cero, es decir, basta una cantidad infinitesimal de ruido para desordenar completamente la red. La segunda es la degeneración en los resultados de la red con pesos sinápticos iguales. Podemos observar que para valores de conectividad pares, el valor crítico del ruido es el mismo que el de su conectividad impar predecesora. La razón de este comportamiento es que la regla de la mayoría no queda bien definida para conectividades pares. Consideremos como ejemplo una red con conectividad  $k = 2$  con todos los pesos sinápticos iguales. En este ejemplo la regla de la mayoría no queda bien definida, pues si un nodo recibe el mismo número de opiniones a favor que en contra, su estado quedará determinado únicamente por el ruido del sistema y no por la sincronización que este elemento tenga con el resto de la red.

#### 3.1.4 Conectividad mínima para la transición

Como lo muestra la sección anterior en la figura 15, existe una conectividad mínima para que el sistema exhiba una transición de fase de segundo orden, pero ¿cuál es esta conectividad?

De la ecuación 3.18 podemos escribir

$$\psi = 2(1 - 2\eta) \sum_{m=1}^{\infty} b_m \psi^m, \quad (3.23)$$

donde los coeficientes  $b_m$  son

$$b_m = \sum_{k=m}^{\infty} P(k) a(k, m). \quad (3.24)$$

Consideremos una red cuyos elementos pueden tener una, dos o tres conexiones con probabilidad  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  respectivamente. Entonces la distribución de conectividades es

$$P(k) = p_1 \delta_{k,1} + p_2 \delta_{k,2} + p_3 \delta_{k,3}. \quad (3.25)$$

Sustituyendo la expresión de la distribución de conectividades podemos obtener la ecuación  $\psi = b_1 \psi + b_3 \psi^3$  donde

$$b_1 = 2(1 - 2\eta) [a(1, 1)p_1 + a(2, 1)p_2 + a(3, 1)p_3] \quad (3.26)$$

$$b_3 = 2(1 - 2\eta) a(3, 3) p_3. \quad (3.27)$$

De esta última ecuación podemos ver que si  $p_3 = 0$  el coeficiente  $b_3$  se anula para cualquier valor de ruido, quedando así como única solución la trivial  $\psi = 0$ . Este resultado es importante pues indica que para que un sistema exhiba una transición de fase deben existir elementos con conectividad tres ( $p_3 \neq 0$ ).

## 3.2 TEOREMA DE LÍMITE CENTRAL

Los resultados numéricos y analíticos ya han mostrado que este modelo presenta una transición de un estado desordenado a uno ordenado al variar el valor del ruido  $\eta$  de la regla de la mayoría. Sin embargo, aún no es muy claro cuáles son las propiedades básicas que debe tener la distribución de pesos para que la transición de fase exista.

Para encontrar cuál es el papel que juegan los pesos sinápticos, aproximaremos el problema usando el teorema de límite central. El teorema de límite central determina las condiciones bajo las cuales la función de distribución de la suma  $S_N$  de un número  $N$ , *grande*, de variables *aleatorias independientes* puede aproximarse por una distribución gaussiana. En la descripción analítica  $P^+(\psi, k)$  es la probabilidad de que la suma  $\xi_k = \sum_{j=1}^k w_{n_j} v_{n_j}$  sea positiva. Estos  $k$  términos son variables aleatorias generadas por una distribución  $P_{wv}$ . Si la distribución de pesos sinápticos  $P_w(x)$  tiene media  $\mu_w$  y varianza  $\sigma_w^2$ , entonces cada término de la suma  $w_{n_j} v_{n_j}(t)$  tendrá un promedio  $\mu_{wv}(t) = \psi(t)\mu_w$  y varianza  $\sigma_{wv}^2(t) = \sigma_w^2 + (1 - [\psi(t)]^2)\mu_w^2$ . Por lo tanto  $\xi_k$  tendrá un promedio  $\mu_\xi(t)$  y varianza  $\sigma_\xi^2(t)$  dadas por

$$\begin{aligned}\mu_\xi(t) &= k\psi(t)\mu_w \\ \sigma_\xi^2(t) &= k(\sigma_w^2 + (1 - [\psi(t)]^2)\mu_w^2).\end{aligned}$$

Para redes en las que todos los elementos tienen un número grande de conexiones, de modo que  $P(k) \approx 0$  para valores pequeños de  $k$  podemos aplicar el teorema de límite central y aproximar a  $P^+(\psi, k)$  por una distribución gaussiana de la siguiente manera

$$P_k^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2(t)}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{[x - \mu_\xi(t)]^2}{2\sigma_\xi^2(t)}\right) dx \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\operatorname{Sgn}(\mu_w)\sqrt{k/2}\psi(t)}{\sqrt{\lambda_w^2 + 1 - [\psi(t)]^2}} \right) \right\} \quad (3.29)$$

donde  $\lambda_w = \sigma_w/\mu_w$  y  $\operatorname{erf}(x)$  es la función error. Sustituyendo este resultado en la ecuación 3.5 obtenemos una ecuación de mapeo para  $\psi$

$$\psi(t+1) = F_\eta(\psi(t)) \quad (3.30)$$

donde

$$F_\eta(\psi) = (1 - 2\eta) \sum_{k=1}^{\infty} P(k) \operatorname{erf} \left( \frac{\operatorname{Sgn}(\mu_w)\sqrt{k/2}\psi}{\sqrt{\lambda_w^2 + 1 - \psi^2}} \right) \cdot [17] \quad (3.31)$$

Es claro que  $\psi_0 = 0$  es un punto fijo para cualquier valor de  $\eta$ ,  $\lambda_w$ , y cualquier distribución de conectividad  $P(k)$ . Más aún,  $\psi_0 = 0$  es el único punto fijo cuando  $\operatorname{Sgn}(\mu_w) = -1$ ; por lo tanto, no hay ningún estado ordenado cuando  $\mu_w < 0$ . Sin embargo, cuando  $\operatorname{Sgn}(\mu_w) = 1$  otros puntos fijos, además del trivial, aparecen. De la ecuación 3.31 podemos ver que cuando  $\mu_w > 0$ ,  $F_\eta(\psi)$  es una función monótona creciente, en el intervalo  $\psi \in [-1, 1]$ , y antisimétrica, tal que  $F_\eta(-\psi) = -F_\eta(\psi)$ ; por lo que en este intervalo deben existir por lo menos tres puntos fijos.

k	TLC	TF	TF-TLC
5	0.176395681	0.183168	$6.7723 \times 10^{-3}$
10	0.271177191	0.273501	$2.3238 \times 10^{-3}$
15	0.313166959	0.314426	$1.2590 \times 10^{-3}$

Cuadro 1: Comparación de los valores analíticos del ruido crítico obtenidos por el método que usa la aproximación del Teorema de Límite Central (TLC) y el método de Transformadas de Fourier (TF) para sistemas con diferentes valores de conectividad  $k$ . La diferencia entre los valores críticos se hace menor a medida que la conectividad aumenta.

Un análisis más detallado de la ecuación 3.31 muestra que  $\psi_0 = 0$  es el único punto fijo y además es estable cuando  $|dF_\eta(\psi)/d\psi|_{\psi=0} < 1$ . Sin embargo, cuando  $|dF_\eta(\psi)/d\psi|_{\psi=0} > 1$  este punto fijo  $\psi_0 = 0$  se vuelve inestable y otros dos puntos fijos ( $\psi_+$  y  $\psi_-$ ) aparecen, tales que  $\psi_+ = -\psi_-$ . Esta bifurcación ocurre cuando  $|dF_\eta(\psi)/d\psi|_{\psi=0} = 1$ , y es esta condición la que determina el valor crítico del ruido  $\eta_c$ , dando

$$\eta_c = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{\lambda_w^2 + 1}}{\langle \sqrt{k} \rangle}} \right), \quad (3.32)$$

donde  $\langle \sqrt{k} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} P(k)$ . Entonces, si  $\eta > \eta_c$  el sistema permanece en un estado desordenado caracterizado por un parámetro de orden  $\psi = 0$ , es decir, la sociedad nunca alcanzará un consenso. Por el contrario, cuando  $\eta < \eta_c$  la mayor parte del sistema tendrá un mismo estado  $\psi_+$  o  $\psi_-$  llegando así a un orden colectivo.

La tabla 1 muestra los valores de ruido críticos para las transiciones de fase de redes con topología uniforme  $P_k(x) = \delta(x - k_0)$ , donde  $k_0$  toma los valores 5, 10 y 15; y pesos sinápticos uniformemente distribuidos entre 0 y 1. En la segunda columna se muestran los valores obtenidos con la ecuación 3.32 que se deriva del teorema del límite central. La tercera columna muestra el ruido crítico predicho por las transformadas de Fourier (ver Fig. 14). La cuarta columna muestra la diferencia entre estos dos valores, de donde podemos concluir que al aumentar el grado de conectividad de la red la aproximación de límite central se acerca al resultado de Fourier.

### 3.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

La sección anterior mostraba que la existencia y naturaleza de la transición de fase están fuertemente relacionadas con la distribución de probabilidad de los *inputs*  $P(k)$ . Veámos los resultados numéricos de las transiciones de fase de redes con distintas topologías: homogénea uniforme y libre de escala en inputs.

### 3.3.1 Topología homogénea uniforme

Huepe y Aldana [2] utilizando el modelo de votantes, para una red homogénea uniforme de  $N = 100,000$  elementos, con conectividad  $k = 11$ , condiciones iniciales aleatorias, y función de distribución de pesos  $P_w(x) = \delta(x - 1)$ , es decir  $w_{ij} = 1 \forall i, j$ ; encontraron que el parámetro de orden en función del ruido presenta una transición de segundo orden (Fig. 12) en  $\eta_c \approx 0.3153$ . Podemos ver en la figura que para valores de ruido  $\eta < \eta_c$  una fracción (cada vez mayor) de elementos en el sistema se alinean tomando valores de  $+1$  o  $-1$ , mientras que para ruidos  $\eta > \eta_c$  los valores quedan distribuidos de manera aleatoria.

Para el caso en el que la función de probabilidad que determina los pesos sinápticos  $w_{ij}$  es de la forma

$$P_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.33)$$

la transición de fase es cualitativamente igual a la anterior, como podemos ver en la figura 13, la única diferencia es el valor crítico del ruido, que en este caso es  $\eta_c \approx 0.28$ .

### 3.3.2 Topología de inputs libre de escala

Si todos los momentos de la distribución de conectividad son finitos -como es el caso de una topología aleatoria uniforme, la transición de fase es continua, esto es  $\psi \sim (\eta_c - \eta)^\beta$  con  $\beta = 1/2$ . ¿Qué pasa si  $P(k)$  tiene momentos divergentes, como en las distribuciones libres de escala? Para responder esto Aldana y Larralde [17] analizaron la dinámica de un modelo de votantes con topología de *inputs* libre de escala.

La figura 16 muestra el parámetro de orden  $\psi$  en función de la intensidad del ruido  $\eta$  para distribuciones de *inputs* libres de escala con distintos valores del exponente  $\gamma$ , para una red de  $N = 100000$  elementos y distribución de pesos  $P(w) = \delta(w - 1)$ . Podemos observar que existe una transición de fase, pero varía con el exponente de la distribución  $\gamma$ . Es decir, cerca de la transición de fase el parámetro de orden se comporta como  $\psi \sim (\eta_c - \eta)^\beta$ , donde el valor de  $\beta$  (que determina la clase de universalidad a la que pertenece la transición) es función de  $\gamma$ .

Es importante notar que una red con topología libre de escala en *inputs* no es realista, lo que se observa en sistemas reales (redes sociales, internet, redes genéticas, etc) es la topología libre de escala en *outputs*, caso que será analizado en el siguiente capítulo.

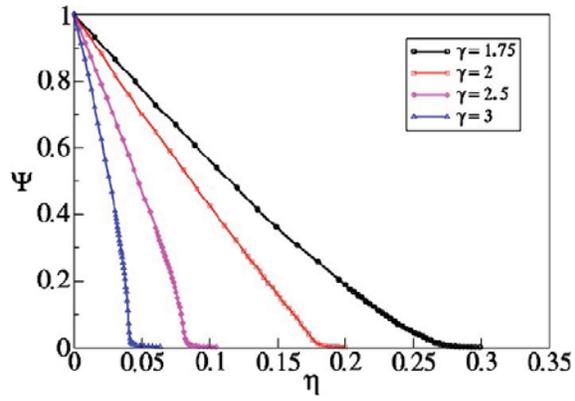


Figura 16: Parámetro de orden  $\psi$  en función de la intensidad del ruido  $\eta$  para diferentes valores del exponente  $\gamma$  de una distribución de *inputs* libre de escala  $P(k) = k^{-(\gamma-1)} - (k+1)^{-(\gamma-1)}$ . [17]



Todos estamos expuestos a una gran cantidad de información que nos llega a través de diferentes medios: periódicos, televisión, radio e internet. La pregunta es, si esta información influye de manera directa sobre la postura que adoptamos respecto a algún hecho en particular. Hasta el momento, en el modelo de votantes se ha supuesto que cada individuo interactúa y cambia su opinión con base en una fracción de la población, sin tomar en cuenta la contribución que tienen los líderes de opinión. No obstante, sabemos que en la realidad, la cultura, educación y ambiente en el que se desarrollan las personas son factores importantes que contribuyen en la formación de opiniones. Por ejemplo, la opinión a favor o en contra de la guerra contra el narcotráfico en México varía notablemente dependiendo del nivel económico y del entorno social de la persona.

El propósito de este capítulo es estudiar cómo se afecta el orden en el sistema por la presencia de los líderes de opinión. Modelaremos a los líderes de dos maneras: la primera, por medio de una topología libre de escala en *outputs*; la segunda será con un campo externo constante sumado a la señal de entrada de cada nodo.

#### 4.1 TOPOLOGÍA DE *outputs* LIBRE DE ESCALA

Las redes con topología libre de escala tienen la propiedad de tener pocos elementos altamente conectados. Para este tipo de redes la probabilidad  $P(k)$  de que un elemento arbitrario esté conectado con  $k$  elementos es de la forma  $P(k) = Ck^{-\gamma}$ , donde  $\gamma$  es el exponente de la distribución y  $C$  es una constante de normalización. En años recientes se han publicado una gran cantidad de trabajos donde se muestra que muchas redes asociadas a sistemas reales tienen una topología libre de escala. Por ejemplo, internet[20], redes sociales[18], redes metabólicas[9] y genéticas[14].

Cuando la topología de *outputs* es libre de escala, existirán pocos elementos que influirán en la opinión de muchos nodos. Este tipo de redes describen, por ejemplo, una sociedad en la cual existen pocas personas con influencia sobre una gran parte del sistema (medios de comunicación, líderes religiosos o políticos, etc.) a los cuales llamaremos *líderes* (Ver figura 17). En una red con este tipo de topología se vuelve más probable que dos elementos compartan un mismo *input*, rompiendo así la independencia estadística. Los nodos con muchos *outputs* introducen correlaciones en el sistema, pues su opinión influirá a una fracción de nodos, y por lo tanto no se espera que en este tipo de redes se cumplan las hipótesis de la teoría de campo medio. Además, podría pensarse que los líderes facilitarían la propagación de orden en el sistema, sin embargo, no debemos olvidar que la opinión de cada uno

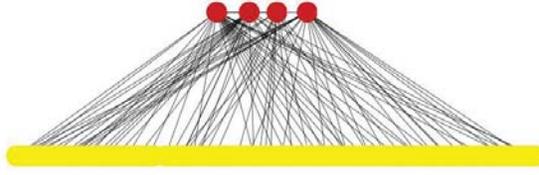


Figura 17: Representación esquemática de una red con topología de *outputs* libre de escala. El número de *outputs* se obtiene de una distribución libre de escala y ya determinada la conectividad de cada nodo, se asignan las conexiones al azar. Los nodos rojos representan a los líderes de la red, que son aquellos que tienen el mayor número de *outputs*. Por estar altamente conectados, tendrán un papel importante en la dinámica del sistema.

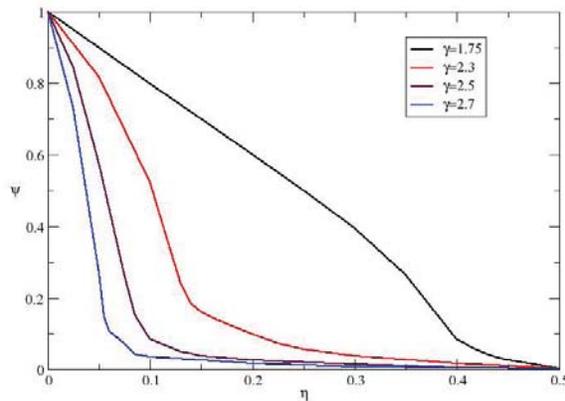


Figura 18: Parámetro de orden  $\psi$  en función de la intensidad del ruido  $\eta$  para diferentes valores del exponente  $\gamma$  de una distribución de *outputs* libre de escala  $P(k) = k^{-(\gamma-1)} - (k+1)^{-(\gamma-1)}$

de ellos queda definida por sus propios *inputs*. Esto hace posible que algunas veces los líderes estén en estados opuestos y ejerzan influencias contrarias sobre el resto de la población.

De manera similar al caso anterior, en el que el número de *inputs* era obtenido de una distribución libre de escala, la figura 18 muestra el cambio en el comportamiento de la transición de fase en función del exponente  $\gamma$  de la función de distribución de *outputs*.

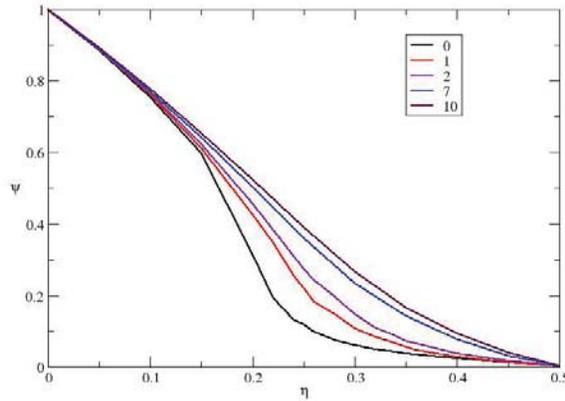


Figura 19: Transiciones de fase de la red de votantes para sistemas con diferente número de líderes: 0, 1, 2, 7 y 10. Los líderes además de tener todos el mismo estado, no lo cambian a lo largo de toda la dinámica. Estos resultados se obtuvieron de una red compuesta por  $N = 100000$ , con una topología de *outputs* libre de escala con exponente  $\gamma = 2.1$ . En base a estos resultados vemos que basta un número muy pequeño de líderes para que no haya transición de fase.

#### 4.1.1 Líderes sincronizados

Las redes con topología de *outputs* libre de escala son una herramienta muy versátil pues nos permiten modelar situaciones cercanas a las reales. En el caso particular en el que los líderes se ponen de acuerdo para adoptar el mismo estado, el grado de orden en el sistema se vuelve dependiente del estado que estos líderes adopten. En una votación, si los comunicadores, empresarios, líderes políticos y religiosos se pusieran a favor de un candidato, nuestro modelo nos da una idea cualitativa del nivel de organización que el resto de la población podría alcanzar. Para establecer en el modelo a los nodos líderes, diremos que un votante  $v_i$  es líder solamente si su número de *outputs* es mayor a cierto valor  $k_c$ , es decir, si  $k_i \geq k_c$ , donde  $k_i$  es el número de *outputs* que tiene. Al resto de la población los llamaremos votantes normales y serán aquellos que cumplan  $k_i < k_c$ . Para estudiar lo que ocurre cuando los líderes de opinión se ponen de acuerdo, a todos los líderes se les asignará el mismo estado (+1 ó -1) de forma arbitraria sin permitir que éste cambie a lo largo de toda la dinámica.

La figura 19 muestra varias curvas que describen al parámetro de orden  $\psi$  en función del ruido  $\eta$  para una misma red, lo que varía es el número de líderes «necios» que tiene el sistema. Podemos observar que a medida que aumenta el número de líderes sincronizados la transición de fase en el sistema desaparece. Por lo tanto, la decisión electoral siempre beneficiará al candidato de los líderes, como intuitivamente sabemos.

## 4.2 LÍDERES DE OPINIÓN COMO CAMPO EXTERNO

En esta segunda manera de abordar el problema, la influencia de los líderes de opinión será representada a través de un campo externo uniforme que se sumará a la señal de entrada de cada uno de los nodos de la red. Este campo estará pesado por una variable aleatoria. La razón de usar una variable aleatoria es porque la influencia que los líderes ejercen sobre los miembros de una población varía de persona a persona. Este cambio se ve reflejado en la regla dinámica 2.1 de la siguiente manera,

$$v_n(t+1) = \begin{cases} \text{Sgn} \left[ \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K w_{nj} v_{n_j}(t) + \xi_n \right] & \text{con probabilidad } 1 - \eta \\ -\text{Sgn} \left[ \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K w_{nj} v_{n_j}(t) + \xi_n \right] & \text{con probabilidad } \eta \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $\xi_n$  es una variable aleatoria, con una distribución uniforme en el intervalo  $(0, \delta)$ , que representará la influencia de los líderes de opinión sobre el  $n$ -ésimo nodo.

Modelamos dos casos para una red. Las figuras 20 y 21 muestran los resultados numéricos para una red uniforme de  $N = 100000$ ,  $K = 3$  y diferentes valores de  $\delta$ , con distribución de pesos sinápticos (pesos asignados a los amigos)  $P_w = (\delta - 1)$  y uniforme entre 0 y 1 respectivamente. En ambos casos podemos observar que si acotamos a valores menores la variable que representa la influencia de los líderes de opinión ( $\delta$  pequeña) la transición de fase logra mantenerse. Es decir, puede existir una influencia de los líderes, siempre y cuando ésta no sea muy grande para que la dinámica de la población se mantenga en una transición de fase de segundo orden. Es importante mencionar que en el modelo de Ising incluso un pequeño campo externo rompe completamente la transición de fase, por lo que el resultado mostrado en estas figuras es notable.

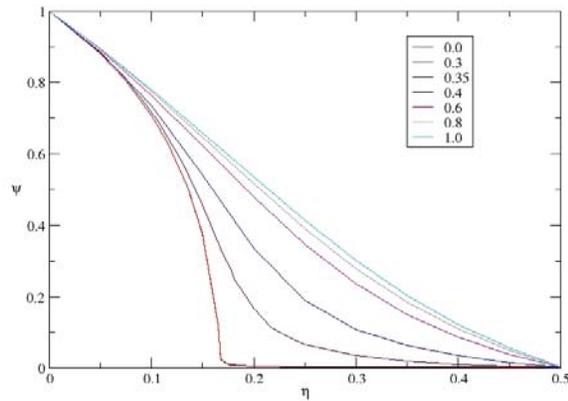


Figura 20: Variación en la transición de fase del modelo de votantes para redes uniformes de  $N = 100000$  elementos, con conectividad  $K = 3$  y pesos sinápticos  $w_{i,j} = 1 \forall i, j$ . Al cambiar el intervalo de la función de distribución que representa a los líderes de opinión la dinámica del sistema se altera. Podemos ver que para valores menores de  $\delta$  la transición de fase se aproxima más a una de segundo orden.

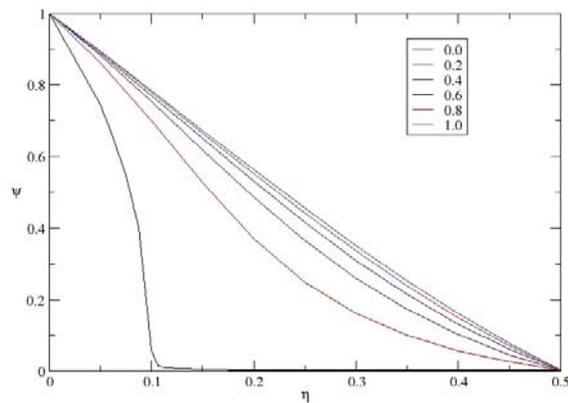


Figura 21: Transiciones de fase del modelo de votantes para redes uniformes de 100000 elementos, con conectividad  $K = 3$  y pesos sinápticos aleatorios en el intervalo  $(0,1)$ . Las diferentes curvas presentan el resultado de variar  $\delta$ , que representa el peso asignado a los líderes de opinión. Podemos observar que basta una pequeña influencia para que la transición de fase se pierda.



Como hemos visto en los capítulos anteriores, la variedad de comportamientos que se presentan en redes de votantes se relacionan directamente con la distribución de conectividad y la distribución de pesos sinápticos que la red posee.

Los pesos sinápticos son una medida de la influencia que el nodo  $v_{n_j}$  tiene sobre la opinión del nodo  $v_n$  y refleja el hecho de que no todos los *inputs* influyen de la misma manera. Es decir, el nodo  $v_n$  puede tomar de una manera más seria la opinión de algunos de sus *inputs* que de otros. Más aún, puede ocurrir que  $w_{nj} < 0$  para algunas conexiones, lo que denotaría el caso de una persona que vaya en contra de la opinión de otra. Cuando los pesos  $w_{nj}$  pueden ser tanto positivos como negativos, cada término que aparece como argumento de la regla de la mayoría tendrá un signo determinado no sólo por el estado del vecino  $v_{n_j}$ , sino también por el peso de la conexión  $w_{nj}$ .

Conocemos por un lado que cuando los pesos sinápticos están uniformemente distribuidos en un intervalo simétrico, como el  $(-1, +1)$  no hay transición de fase; por otro lado cuando los pesos sinápticos están distribuidos en un intervalo totalmente asimétrico, como el  $(0, 1)$ , el sistema sí exhibe transición de fase. Esto muestra que la simetría de la función de pesos juega un papel crucial en la existencia de la transición de fase. Entonces surge la pregunta ¿en qué momento aparece la transición de fase respecto de la asimetría de la función de pesos sinápticos? Para contestar esta pregunta introduciremos un nuevo parámetro: la *simetría* de la función de distribución de pesos sinápticos  $\delta$ , que nos permitirá cambiar el dominio de la función de pesos, de modo que la función pase de ser simétrica (con la misma probabilidad de tener pesos positivos y negativos), a ser totalmente asimétrica (únicamente con pesos positivos).

Fijando la varianza (el ancho) de la función de pesos, cambiamos los límites del dominio de la función permitiendo que en un principio ésta vaya de  $(-1, 1)$  cuando  $\delta = 0$ , hasta el intervalo de  $(0, 2)$  cuando  $\delta = 1$ . Al hacer esto cambiamos la simetría de la función respecto al eje  $y$  y disminuimos cada vez más la posibilidad de tener pesos sinápticos negativos, como podemos ver en la figura 22.

### 5.1 CONDICIÓN SOBRE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PESOS SINÁPTICOS

En la sección 3.1 haciendo uso del teorema de límite central encontramos el valor crítico del ruido  $\eta_c$  en el cual ocurre la transición de fase (ver ecuación 3.32). Esta ecuación además de fijar  $\eta_c$ , determina una condición que la función de distribución de pesos debe cumplir para que el sistema presente transición. Al recordar que  $\eta_c$  es una

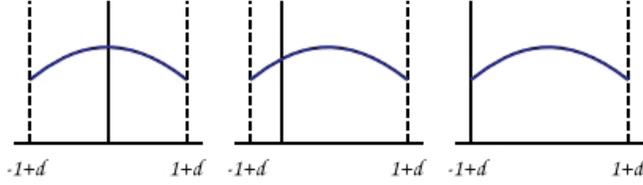


Figura 22: Representación esquemática de la simetría de la función de distribución de pesos sinápticos. Al variar el parámetro  $\delta$  de 0 a 1 cambiamos la simetría de la función respecto al eje  $y$ , de modo que cuando  $\delta = 0$  obtenemos pesos negativos y positivos con la misma probabilidad, y cuando  $\delta = 1$  sólo obtenemos pesos positivos.

probabilidad, ésta debe satisfacer que  $\eta_c \geq 0$ , lo cual sustituido en la ecuación para determinar el valor del ruido crítico en la aproximación del límite central 3.32 genera la siguiente desigualdad

$$\sigma_w \leq \left( \frac{2\langle \sqrt{k} \rangle^2}{\pi} - 1 \right)^{1/2} \mu_w, \quad (5.1)$$

donde  $\sigma_w$  y  $\mu_w$  son la varianza y media de la función de distribución de pesos sinápticos.

Esta última expresión establece una condición sobre las propiedades de la función de distribución de pesos (media y varianza) para que el sistema pueda presentar transición de fase. Cabe recordar que el resultado de la ecuación 3.32 fue obtenido para sistemas con conectividad grande.

Entonces, existen dos condiciones importantes para que en el sistema puedan emerger estados de orden colectivo, esto depende tanto de la distribución de conectividad  $P_k(x)$  (sección 3.1.4), como de las propiedades de la distribución de pesos  $P_w(x)$ . Si el número de nodos con conectividad  $k < 3$  es muy grande el sistema nunca podrá alcanzar un orden. De igual forma, si la distribución de pesos no cumple con la condición 5.1, como veremos con detalle más adelante, el sistema tampoco podrá alcanzar estados de orden colectivo.

## 5.2 MODELO DETERMINISTA

Para analizar con mayor detalle la influencia de la simetría de la función de pesos sinápticos, usaremos una versión determinista del modelo de votantes. Para este caso, la regla dinámica queda como

$$v_n(t+1) = \text{Sgn} \left[ \sum_{j=1}^K w_{nj} v_{n_j}(t) \right], \quad (5.2)$$

en donde para cada  $v_n$ , la suma se hace sobre los  $k$  vecinos  $\{v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_k}\}$  a los que está conectado. En un principio no queda claro qué es lo que ocurrirá para el caso en el que los pesos puedan tomar valores positivos y negativos, pues la competencia entre las contribuciones positivas y negativas a la regla de la mayoría nos pueden hacer pensar que el

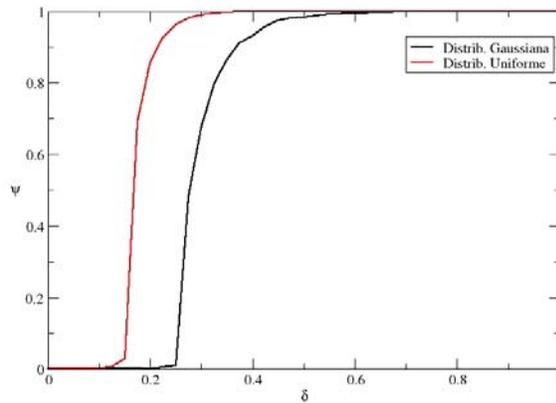


Figura 23: Transición de fase del parámetro de orden  $\psi$  respecto a la simetría de la función de pesos  $\delta$  para una red de  $N = 100000$ , con conectividad  $K = 25$ . Al aumentar la asimetría de la función de pesos se propaga el orden en el sistema.

sistema se quedará en un estado frustrado, sin embargo el resultado obtenido es sorprendente, pues muestra la existencia de otra transición de fase de segundo orden, pero ahora, respecto al parámetro de simetría  $\delta$ .

### 5.2.1 Resultados numéricos

Cuando hacemos las simulaciones para este nuevo sistema, el parámetro de orden exhibe una transición de fase respecto a la simetría de la función de pesos como podemos ver en la figura 23.

Si comparamos las gráficas del parámetro de orden en función de la simetría para sistemas con diferente número de conexiones, como muestra la figura 24 la transición de fase ocurre para valores más pequeños de  $\delta$  a medida que la red está más conectada. Esto es, si la conectividad aumenta, el grado de orden en el sistema también.

### 5.2.2 Resultados analíticos

Sustituyendo  $\eta = 0$  en la ecuación de mapeo del parámetro de orden para la aproximación de campo medio 3.18 y usando una red de conectividad  $K = 3$  encontramos que los datos numéricos y analíticos concuerdan, confirmando así la existencia de una transición de fase de segundo orden respecto al parámetro de simetría  $\delta$  (ver Fig. 25).

Podemos asociar  $\mu_w$  y  $\sigma_w$  con la simetría de la función de pesos  $\delta$  y sustituirla en la ecuación 5.1 para encontrar el valor crítico de la simetría  $\delta_c$  a partir del cual habrá transición de fase. Por ejemplo para una red cuya distribución de pesos sea una función uniforme entre

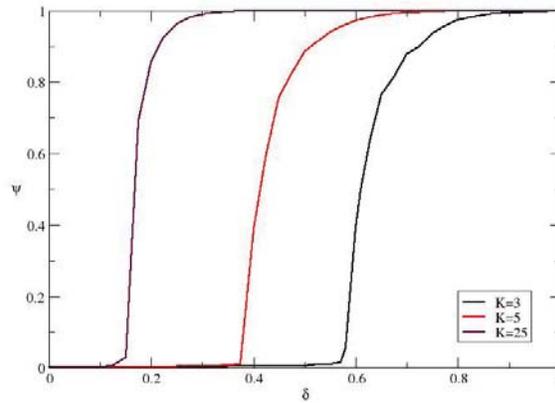


Figura 24: Transición de fase del parámetro de orden  $\psi$  respecto a la simetría de la función de pesos  $\delta$  para una red de  $N = 100000$  y distribución de pesos uniforme. Al variar la conectividad  $K$  de la red el valor del punto crítico al que ocurre la transición es cada vez menor.

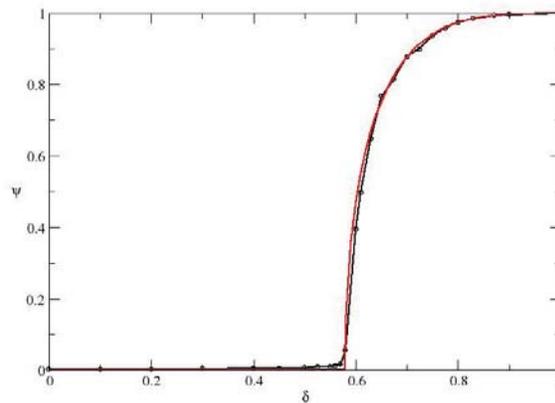


Figura 25: Comparación de los resultados analíticos (gráfica roja) y numéricos (gráfica negra) para la transición de fase del parámetro de orden  $\psi$  respecto a la simetría de la función de pesos  $\delta$  para una red de  $N = 100000$ , con conectividad  $K = 3$  y distribución de pesos uniforme.

k	$\delta_c$ :límite central	$\delta_c$ :numérico
3	0.6052	0.5850
5	0.3907	0.3898
25	0.1494	0.1502

Cuadro 2: Aproximación del valor crítico de la simetría para un sistema con distribución de pesos uniforme entre  $(-1 + \delta, 1 + \delta)$ . La conectividad y el valor de la simetría son inversos, por lo que al aumentar la conectividad la transición de fase ocurre para valores menores de simetría. Para obtener los valores de la segunda columna usamos la aproximación del teorema de límite central, el cual requiere que los valores de conectividad sean grandes. Esto se ve reflejado en que la diferencia entre la aproximación analítica y el resultado numérico se hace menor al aumentar la conectividad.

$(-1 + \delta, 1 + \delta)$ , la media  $\mu_w = \delta$  y la varianza  $\sigma_w = 1/\sqrt{3}$ . Sustituyendo esto en la ecuación anterior encontramos que el valor crítico de la simetría de la función de pesos al que ocurre la transición es:

$$\delta_c = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{2}{\pi} \langle \sqrt{k} \rangle^2 - 1 \right]^{-1/2}. \quad (5.3)$$

En la tabla 2 podemos observar que a medida que el grado de conectividad en la red aumenta, el valor crítico de la simetría  $\delta_c$  disminuye, como lo habíamos visto en los resultados numéricos de la figura 24.

### 5.3 DOS TIPOS DE TRANSICIONES

En los capítulos 3 y 4 se presentaron resultados numéricos y analíticos que muestran que en el modelo de votantes el parámetro de orden  $\psi$  exhibe una transición de fase continua respecto al valor del ruido  $\eta$ . El ruido toma el papel de parámetro de control, sin embargo es importante notar que es un factor *externo* pues sólo actúa cuando los elementos de la red deben hacer la toma de desición sobre seguir o no la opinión de la mayoría.

En este capítulo hemos presentado evidencia, tanto analítica como numérica, que muestra que en el caso determinista del modelo de votantes, el parámetro de orden presenta una transición de fase de segundo orden en función de la simetría de la función de pesos  $\delta$ . Contrario al ruido, la simetría es un parámetro de control *interno* pues afecta la jerarquización de los elementos de la red. Es importante señalar que para que exista una transición de fase respecto al ruido, la red debe tener una distribución de pesos con un valor de simetría mayor al valor crítico  $\delta_c$ , de no ser así el sistema nunca alcanzará un estado ordenado. En la figura 26 podemos observar que para sistemas con  $\delta < \delta_c$  el sistema nunca alcanza un estado ordenado, es decir  $\psi \approx 0$  para cualquier nivel de ruido. Sin embargo, para sistemas con un valor

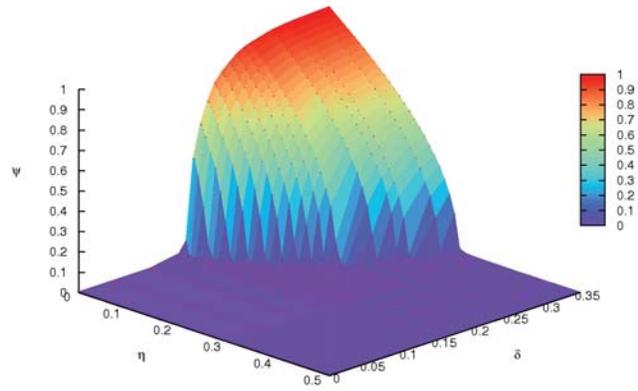


Figura 26: Transición de fase del parámetro de orden  $\psi$  respecto al ruido  $\eta$  para una red uniforme de  $N = 100000$  elementos,  $K = 25$  y distribución de pesos homogénea entre  $(-1 + \delta, 1 + \delta)$ . Al variar la simetría de la función de pesos podemos ver que para valores  $\delta < \delta_c$  el sistema nunca alcanza un estado de orden, mientras que para valores  $\delta > \delta_c$  el sistema exhibe una transición de fase continua.

de simetría  $\delta > \delta_c$  el sistema alcanza estados ordenados y exhibe una transición de fase de segundo orden respecto al ruido. Basándonos en estos resultados, podemos afirmar que la simetría de la función de pesos sinápticos determina la existencia de una transición de fase en el modelo de votantes.

## CONCLUSIONES

La aparición de estados ordenados en sistemas tan diversos nos hace pensar en que la capacidad de organización colectiva debe depender de algunos factores básicos y no de las propiedades específicas de los elementos que componen al sistema (pájaros, peces, votantes). Estos factores básicos pueden ser: la regla de interacción, la topología de la red, la distribución de los pesos sinápticos, la presencia de ruido y la formación de interacciones de largo alcance durante el desarrollo de la dinámica. Considerando estos factores perdemos de vista los detalles particulares de cada sistema y podemos concentrarnos en la búsqueda de las condiciones necesarias para la emergencia de orden colectivo.

De nuestros resultados se puede concluir que:

1. Entre los efectos que la distribución de pesos tiene sobre la dinámica del sistema, para el modelo de votantes determinista destaca la transición de fase desordenada ( $\psi \approx 0$ ) a una ordenada ( $\psi > 0$ ) al variar la simetría de la función de distribución de pesos. Al cambiar el valor del parámetro de simetría  $\delta$  la función de pesos puede generar pesos positivos y negativos, admitiendo así la consideración de influencias tanto positivas como negativas sobre la formación de opiniones. Sin embargo no cualquier valor de  $\delta$  permitirá que el sistema llegue a estados colectivos ordenados. Por lo tanto, para cada red es importante encontrar el valor  $\delta_c$  a partir del cual el sistema podrá ordenarse, pues si un sistema tiene un gran número de influencias negativas ( $\delta < \delta_c$ ), incluso con ruido  $\eta \approx 0$ , nunca podrá alcanzar un estado ordenado.
2. Estudiamos dos tipos de transiciones en el modelo de votantes, una es respecto a un parámetro interno: la simetría de la función de pesos  $\delta$  y otra es respecto a un parámetro externo: el ruido  $\eta$ . Si el sistema no se encuentra en el régimen ordenado de la primera transición nunca podrá alcanzar estados de orden colectivo por lo que la transición en función del ruido desaparece.
3. Al agregar una variable aleatoria positiva al modelo de votantes para representar la influencia de la opinión de los medios de comunicación sobre cada elemento de la red, observamos que la transición de fase desaparece. En este punto surge la siguiente línea de investigación: si la variable aleatoria que representa a los medios de comunicación tomara valores negativos, con el fin de representar medios de comunicación con la opinión opuesta, ¿se recuperaría la transición de fase?.

Finalmente, quisiera terminar este trabajo discutiendo dos aspectos importantes de nuestros resultados. El primero tiene que ver con una posible aplicación de la transición de fase respecto a los pesos sinápticos,

y el otro aspecto tiene que ver con una crítica general que siempre se hace a los sistemas operando en punto crítico.

Respecto a la posible aplicación de nuestro trabajo, los resultados de numerosos experimentos y modelos teóricos proponen que el cerebro trabaja al borde de la criticalidad. A continuación presentamos una lista de algunos de estos resultados.

1. A gran escala presenta estructuras espaciales intermitentes que denotan correlaciones de largo alcance, incluso cuando las interacciones son de corto alcance.[4]
2. A una menor escala muestra avalanchas neuronales. Las avalanchas neuronales son una actividad observada en la superficie cortical del cerebro con propiedades estadísticas del mismo tipo que las mostradas por redes operando cerca de un punto crítico. Algunos experimentos muestran que las redes corticales que presentan avalanchas neuronales tienen la capacidad de responder a una gama más amplia de estímulos, lo cual ha llevado a suponer que este tipo de fenómenos optimizan el procesamiento de las señales de entrada.([26], [27], [6],[15])
3. A nivel conductual, el comportamiento adaptativo y el aprendizaje continuo son índices de criticalidad, pues todo el tiempo el ambiente y por lo tanto las metas están cambiando y generando un desarrollo de habilidades.[7]
4. Kinouchi y Copelli muestran que una red de elementos excitables colocados en el borde de una transición de fase, pueden ser lo suficientemente sensibles tanto a perturbaciones pequeñas, como capaces de detectar señales de entrada enormes sin saturarse.[19] Ejemplos de esto pueden ser el espectro de doce décadas de intensidades auditivas, o la percepción del cambio de intensidades luminosas en un rango de diez décadas que pueden detectar nuestros ojos. Las neuronas trabajando de manera independiente no podrían abarcar todos estos intervalos, lo cual sugiere que nuestros sentidos operan en un punto crítico.[3]

Esta lista presenta algunos de los argumentos más importantes que muestran que el funcionamiento del cerebro puede ser el resultado de un sistema dinámico trabajando en un punto crítico. Si consideramos el modelo de Ising, la temperatura es el parámetro externo que coloca al sistema en un punto crítico. Si el cerebro funcionara de la misma manera, inmediatamente surge la pregunta: ¿cuál es la «temperatura» del cerebro?, es decir, ¿cuál es el parámetro de control?, ¿cuál es el parámetro en el cerebro, equivalente a la temperatura en el modelo de Ising, que hace que la dinámica pase de un régimen a otro?. Los resultados mostrados en el capítulo 5 muestran que la simetría  $\delta$  de la función de pesos asignados a las conexiones sinápticas es un parámetro, *interno*, que determina la existencia de un punto crítico en el sistema. ¿Podría ser este el parámetro que determina la dinámica del cerebro? Esta es una línea nueva de investigación que vale la pena explorar.

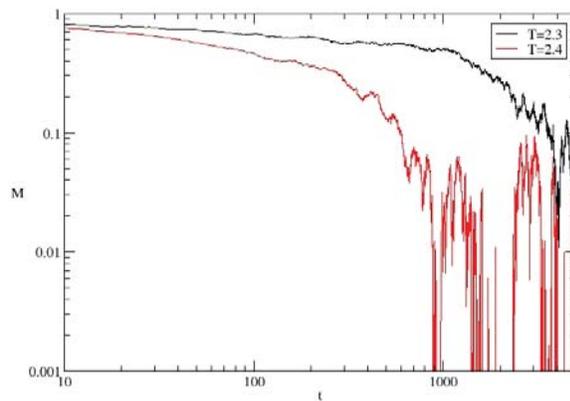


Figura 27: Serie temporal de la magnetización en el modelo de Ising para una red de  $300 \times 300$  elementos. La evolución del sistema está dada por el algoritmo de Monte Carlo. Podemos ver que cuando el sistema se encuentra en la temperatura crítica  $T_c = 2.3$  el sistema tarda más en recuperarse de la perturbación.

Pero uno de los grandes problemas que surgen cuando se plantea que el cerebro opera cerca de una transición de fase orden/desorden es: ¿cuál es la capacidad de respuesta del cerebro?. La respuesta colectiva de nuestro cerebro a los impulsos externos a los que nos encontramos expuestos debe ser muy rápida (ya que estos estímulos cambian constantemente y en escalas de tiempo muy pequeñas). Por lo tanto, la respuesta del cerebro debe ocurrir también en escalas de tiempo pequeñas.

No obstante, existe un fenómeno llamado «critical slowing down», que predice que los sistemas en punto crítico tardan mucho tiempo en responder a perturbaciones externas. Entonces, ¿cómo es posible compaginar la criticalidad del cerebro con las respuestas cortas y coordinadas que queremos que tenga? La respuesta podría radicar en las conexiones aleatorias de largo alcance.

El critical slowing down se observa en sistemas como el modelo de Ising, donde los nodos se encuentran en una red cuadrada y el estado de cada elemento depende de sus vecinos cercanos y de la temperatura a la cual se encuentra el sistema. Usando el algoritmo de Monte Carlo, para una red de  $300 \times 300$  nodos encontramos que la temperatura crítica está a  $T_c = 2.3$ . Colocando al sistema en un estado inicial  $M = 1$ , es decir, todos los espines apuntando hacia arriba, para diferentes temperaturas, podemos ver en la fig. 27 que la magnetización en la temperatura crítica decae a cero casi dos ordenes de magnitud más lenta que para una temperatura cercana de  $T = 2.4$ .

Para el caso del modelo de votantes determinista sobre una red cuadrada, para un sistema de  $300 \times 300$  nodos, el valor crítico de la simetría es  $\delta_c = 0.5$ . Partiendo de un sistema con  $\psi = 1$  la serie

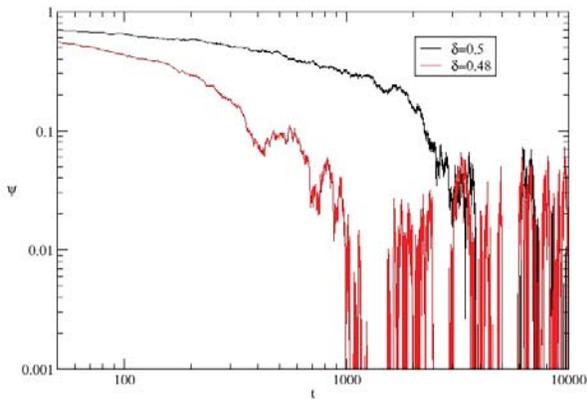


Figura 28: Serie temporal del parámetro de orden para el modelo de votantes determinista para una red de  $300 \times 300$  elementos. Podemos ver que cuando el sistema está en el punto crítico  $\delta_c = 0.5$  el parámetro de orden se aproxima a cero de manera más lenta.

temporal del parámetro de orden muestra también un decaimiento a cero más lento cuando el sistema está en  $\delta_c$ . (Fig. 28)

Mediante estos dos ejemplos podemos observar que es la topología de la red la que provoca el *critical slowing down*. ¿Cómo eliminar este fenómeno? Metiendo conexiones aleatorias al sistema. Manteniendo las conexiones a los 4 vecinos cercanos, creamos un porcentaje de conexiones simétricas al azar entre los elementos de la red (las conexiones son simétricas, los pesos sinápticos asignados a ellas no). En la figura 29 podemos ver que a medida que el número de conexiones aleatorias aumenta, el sistema se recupera más rápido de las perturbaciones, eliminando así este fenómeno.

Por lo tanto, podemos concluir que cambiando la topología de la red es posible eliminar el *critical slowing down* y con ello lograr que, incluso estando en punto crítico, el sistema responda de manera colectiva y rápida a las perturbaciones externas, tal como se necesita para representar al cerebro.

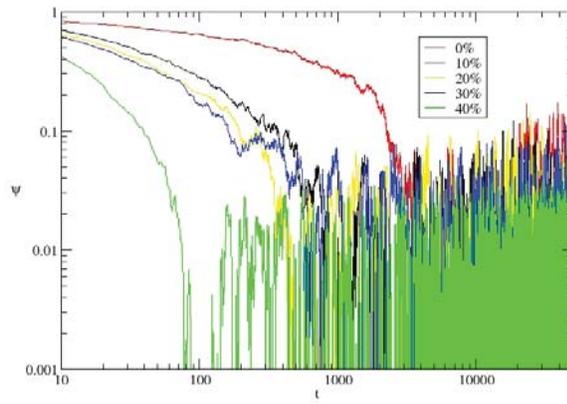


Figura 29: Serie temporal del parámetro de orden para el modelo de votantes determinista para una red de  $300 \times 300$  elementos. Al aumentar el porcentaje de conexiones aleatorias en la red, el sistema se recupera con mayor rapidez de la perturbación.



## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] K. Binder. Theory of first order phase transitions. *Rep. Prog. Phys.*, 50:783–859, 1987. (Citado en la página 5.)
- [2] M. Aldana C. Huepe. Dynamical phase transition in a neural network model with noise: An exact solution. (Citado en las páginas vii, viii, 20, 21, 22, y 26.)
- [3] D. R. Chialvo. Psychophysics: Are our senses critical? *Nature Physics*, 2:301–302, 2006. (Citado en la página 42.)
- [4] D. R. Chialvo. The brain near the edge. *AIP Conference Proceedings*, 887(1):1–12, 2007. (Citado en la página 42.)
- [5] K. Christensen. *Percolation Theory*. Blackett Laboratory, Imperial College London, 2002. (Citado en las páginas vii y 10.)
- [6] T. C. Thiagarajan D. Plenz. The organizing principles of neuronal avalanches: cell assemblies in the cortex? *Trends in Neurosciences*, 30(3):101 – 110, 2007. (Citado en la página 42.)
- [7] D. Fraiman D. R. Chialvo, P. Balenzuela. The brain: What is critical about it? *AIP Conference Proceedings*, 1028(1):28–45, 2008. (Citado en la página 42.)
- [8] P. Davis. *The New Physics*. Cambridge University Press, 1989. (Citado en la página 7.)
- [9] R. Albert Z. N. Oltvai A. L. Barabási H. Jeong, B. Tombor. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 407(6804): 651–654, 2000. (Citado en la página 29.)
- [10] T. Vicsek I. Daruka, M. Nagy. New aspects of the continuous phase transition in the scalar noise model (snm) of collective motion. *ELSEVIER Physica A*, 373:445–454, 2007. (Citado en la página 4.)
- [11] C. Huepe H. Larralde J. A. Pimentel, M. Aldana. Intrinsic and extrinsic noise effects on the phase transition of swarming systems and related network models. *Physical Review E*, 77(061138), 2008. (Citado en la página 14.)
- [12] D. Markham V. Vedral J. Anders, M. Hajdusek. How much of one-way computation is just thermodynamics. *arXiv:quant-ph/0702020v220*, 2008. (Citado en las páginas vi, 2, y 4.)
- [13] K. Tucci J. C. González-Avella, M. G. Cosenza. Nonequilibrium transition induced by mass media in a model for social influence. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*, 72(6 Pt 2):4, 2005. (Citado en la página 1.)

- [14] C. C. Hill J. J. Fox. From topology to dynamics in biochemical networks. *Chaos*, pages 809–815, 2001. (Citado en la página 29.)
- [15] D. Plenz J. M. Beggs. Neuronal avalanches in neocortical circuits. *The Journal of Neuroscience*, 23(35):11167–11177, 2003. (Citado en la página 42.)
- [16] A.J. Fisher M.E.J. Newman J.J. Binney, N.J. Dowrick. *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group*. Oxford University Press, 1992. (Citado en la página 7.)
- [17] H. Larralde M. Aldana. Phase transitions in scale-free neural networks: Departure from the standard mean-field universality class. *Phys. Rev. E*, 70:066130, Dec 2004. (Citado en las páginas viii, 14, 24, 26, y 27.)
- [18] M. E. J. Newman. The structure of scientific collaboration networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 98(2):404–409, 2001. (Citado en la página 29.)
- [19] M. Copelli O. Kinouchi. Optimal dynamical range of excitable networks at criticality. *Nature Physics*, 2:348–352, 2006. (Citado en la página 42.)
- [20] A. L. Barabási R. Albert, H. Jeong. Diameter of the world-wide web. *Nature*, 401:130–131, 1999. (Citado en la página 29.)
- [21] L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics - 2nd ed.* John wiley & Sons, Inc., 1998. (Citado en las páginas 7 y 9.)
- [22] D. Grünbaum S. V. Viscido, J. K. Parrish. Self-organized fish schools: An examination of emergent properties. *Biology Bulletin*, 202:269–305, 2002. (Citado en las páginas vi y 1.)
- [23] B. Schechter. Birds of a feather. *New Scientist*, 1999. (Citado en la página 1.)
- [24] M. Sigrist. *Statistical Physics*. Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 2010. (Citado en las páginas vi y 3.)
- [25] H. E. Stanley. Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 71, 1999. (Citado en las páginas vi, 8, 9, y 11.)
- [26] M. A. Lebedev M. A. Nicolelis D. R. Chialvo D. Plenz T. Petermann, T. C. Thiagarajan. Spontaneous cortical activity in awake monkeys composed of neuronal avalanches. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(37):15921–15926, 2009. (Citado en la página 42.)
- [27] T. Petermann R. Roy D. Plenz W. L. Shew, H. Yang. Neuronal avalanches imply maximum dynamic range in cortical networks at criticality. *The Journal of Neuroscience*, 29(49):15595–15600, 2009. (Citado en la página 42.)