



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

MATERIA OSCURA ESCALAR:  
IMPLICACIONES ASTRONÓMICAS  
Y FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS  
CÓSMICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

PRESENTA

JUAN ALDEBARÁN MAGAÑA ZAPATA

DIRECTORES DE TESIS

TONATIUH MATOS CHASSIN  
FRANCISCO JAVIER SÁNCHEZ SALCEDO



instituto de astronomía

UNAM

MÉXICO, D.F.

OCTUBRE 2012



A mis padres  
María del Carmen y Juan



## Agradecimientos

A mis directores de tesis, los doctores Tonatiuh Matos y Javier Sánchez. A Tonatiuh le agradezco haber aceptado dirigirme esta tesis de doctorado, por su paciencia y asesoría en los diversos tópicos de la Cosmología. A Javier le agradezco su amistad, confianza y apoyo en todo momento del desarrollo de mi tesis doctoral, las incontables y provechosas discusiones de física y astrofísica, el apoyo económico que siempre me ofreció en mis tiempos de vacas flacas y el espacio en su oficina que amablemente me compartió en los últimos dos años de mi tesis doctoral.

A mis sinodales, los doctores Xavier Hernández, Miguel Alcubierre y Darío Núñez por haber leído la tesis en un tiempo considerablemente corto. A Xavier y Miguel les agradezco haber aceptado formar parte de mi comité tutorial y estar siempre al pendiente de mis avances de tesis.

A la UNAM, al Instituto de Astronomía y su planta académica, administrativa y técnica, por proporcionarme una excelente formación científica, por brindarme todos sus espacios, particularmente su biblioteca y una oficina, y por los servicios necesarios que todo estudiante de doctorado requiere.

Al CONACyT por haberme otorgado una beca de doctorado para realizar mis estudios de posgrado.

Al Instituto Avanzado de Cosmología por los recursos otorgados para asistir a los congresos *Cosmology on the beach*.

A mis papás, María del Carmen y Juan, y mis hermanos, Anabelle, Rigel y Giseth, por su amor y apoyarme siempre, en todos los aspectos, en el largo y pesado camino del doctorado. A mis tíos, Mario y Lilia (q.e.p.d), y mis primas, Citlali, Zahzil, Nadia y Mariana, mi segunda familia, por su constante apoyo.

A la casa del estudiante yucateco por brindarme un espacio donde sobrevivir en la caótica ciudad de México y a mis roomies, Diana, Karen, Pool y Cruz, por compartir este espacio conmigo.

A mis tíos, Aida y Raúl, Nide y Nacho, Socorro y Toño, por brindarme su apoyo y cariño durante todas las etapas de mi vida, en particular durante mi estancia en el D.F.

A los doctores Vladimir Ávila, Octavio Valenzuela, Francisco Guzmán, Luis Ureña, Ricardo Becerril, por las constantes discusiones sobre Cosmología y particularmente sobre el modelo de materia oscura escalar desarrollado en esta tesis.

A la banda pava, Alenka, Andrés, Ary, Liliana, Lucía, Mario, Tomás, Verónica, y Virgilio por compartir casi toda mi vida dentro y fuera en el Instituto de Astronomía durante aproximadamente nueve años. A Alenka por su compañía virtual en varias noches que pasé en vela por escribir esta tesis. A Ary por sus atinados comentarios sarcásticos que de una u otra manera sirvieron como presión para terminar con el doctorado. A Lucía por compartir sus conocimientos acerca de este macro, por todas las desveladas virtuales en las que siempre me presionaba, mediante dibujos obscenos, a terminar la tesis, por todas las curiosidades virtuales que me compartió y que hicieron tomarme un tiempo de descanso. A Liliana, la primera pava que conocí, por ayudarme a familiarizarme con la Astronomía, por todas las tertulias que compartimos en su depa ya que sin ellas hubiera terminado en el manicomio. A Mario por su ayuda con la divulgación científica, por sus exquisitos platillos gourmet y por sus martes que mejoraron mi desempeño académico. A Tomás por proporcionarme el macro de esta tesis, por todas las discusiones académicas pero sobre todo por las no académicas, por las juergas que relajaron la maestría y el doctorado, por la compu y por la recomendación al postdoc. A Verónica, Pavo, por su ayuda con la carátula de tesis, por compartir muchas noches de trabajo en el IA, por ser colegas, por siempre estar dispuesta a brindar conmigo y por compartir muchas discusiones acerca de la vida. A Virgilio por compartir mucho tiempo de estudio y por esos juegos de ajedrez eternos pero relajantes. Gracias pav@s por chutarse mis más bochornosas vivencias.

A mis compañeros de oficina, Marisol, Nancy, Eric, Eduardo, Daniel, Giovanni, Mamadou; a mis amigos del posgrado Diana, NahIELy, Primž, Diego, etc.

A Bertha y Malú por su eficiencia y disponibilidad en cada trámite burocrático.

A mis colegas y amigos del Cinvestav, los doctores Iván, Miguel y el maestro Arturo, por las interesantes discusiones de los diversos tópi-

cos de la Cosmología, por asesorarme y ayudarme a sortear algunos obstáculos en los cálculos de este trabajo de tesis y por compartir el trayecto de nuestras respectivas tesis de doctorado.

A los postdoctorantes, Elías, Nadiezdha y la maestra Abril, por compartir los seminarios de Cosmología del Cinvestav y los tardados almuerzos en la casa blanca con sus respectivas sobremesas.

A mis amigos de la licenciatura Juan (tobe), Filiberto (fli), Jhonny (topo), Gustavo (tixco), Miguel (bubu), Geovanni (bob), Mario (roca), Emmanuel (reos), etc., por compartir el trayecto de mis estudios de posgrado.

A mis amigos Pinto, Benjamín, Julio, Juan Carlos, Pablo, Adrián y Claudio, por compartir innumerables jolgorios, noches bohemias, fiestas, vivencias y anécdotas de todo tipo en la casa yuca que me aliviaron los altos niveles de estrés derivados del doctorado.

A mis amigas Amaranta, Beatriz, Brisa, Marina, Mayra, Mery Ann, Nadiezdha y Susana por sus ánimos persistentes, por compartir fiestas, viajes, comidas y pláticas que aligeraron la carga del doctorado.

A mis amigas del CELE, Samanta, Lysis, Gabriela y Erika por ayudarme a masticar el spanglish, por su constante apoyo en el trayecto de mi doctorado y por alentarme, en constantes chats, a terminar la tesis.

A mis amigos de Ticul, Aaron, Argelia, Carol, Cuauhtémoc, Enrique, Gloria, José Hauer, Juan, Vanesa, Xochitl, Manuel González y Manuel Ojeda, por su apoyo en cada proyecto académico que he emprendido y por sus casi 20 años de amistad.

A mis amigas Fátima, Gaby y Margarita por su constante apoyo desde la blanca Mérida. y por todos esos cafés que nos tomamos juntos.

A mi amigas Idalia, Isabel, Leticia Alejandra, Marisol, Mireya, Norma y Patricia por brindarme su amistad incondicional, por todos esos vinos que nos tomamos juntos, por ser mis confidentes y cómplices, por estar siempre al pendiente de mi vida, por compartir sus ideas revolucionarias y por echarme porras para terminar la tesis de doctorado.

A mis amigos y amigas que conocí en el D.F., Joel, Bety, Carmen, Kim, Kin y todos los que se me olviden porque siempre que nos reuníamos me preguntaban cómo iba esta tesis.

Finalmente agradezco a Alejandra por insistirme a cada tiempo  $t$  en terminar la eterna tesis, por desvelarse conmigo en la escritura de este

manuscrito, por su comprensión en estos últimos meses de estrés, por enseñarme a tener una visión más amplia y social de la ciencia, por motivarme siempre a alcanzar mis objetivos, por ayudarme a superar todos mis obstáculos. También agradezco su paciencia con mi difícil disperso estilo de vida, y por último por su cariño y por quererme a pesar de toda mi inconstancia y locura.



# Resumen

La materia oscura es responsable de la formación de estructuras a gran escala en el Universo y constituye aproximadamente el 23 % de su contenido total. El modelo más aceptado para explicar la naturaleza de la materia oscura es el modelo de materia oscura fría. En esta tesis proponemos la hipótesis que la materia oscura es un campo escalar real con potencial cuadrático y cuyo bosón asociado tiene una masa ultra ligera  $m \sim 10^{-23} - 10^{-22}$  eV. Este modelo alternativo es conocido como el modelo de materia oscura escalar.

En la primera parte de este trabajo, estudiamos la evolución cosmológica de un Universo isotrópico, homogéneo y plano compuesto de, además de un campo escalar como materia oscura, bariones, fotones, neutrinos, constante cosmológica. Encontramos que la densidad de energía del campo escalar evoluciona emulando lo que hace la de materia oscura fría, por lo que, la dinámica del Universo con el modelo de materia oscura escalar es casi idéntica a la resultante con el modelo de materia oscura fría.

El segundo aspecto que se estudió, fue la evolución de las perturbaciones del campo escalar en el régimen lineal. Encontramos que las perturbaciones escalares tienen un comportamiento creciente en la época de recombinación similar al que se obtiene para las perturbaciones de materia oscura fría. También, investigamos la evolución de las perturbaciones del campo escalar en el régimen no lineal. Encontramos que las perturbaciones escalares tiene un crecimiento súbito en la época de la recombinación, por lo que, colapsan y virializan mucho más temprano que las perturbaciones de materia oscura fría. Por lo tanto, el modelo de materia oscura escalar predice la formación de halos oscuros, y posiblemente galaxias, a altos corrimientos al rojo.

Se estudió también el espectro de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo suponiendo que la materia oscura está compuesta por un gas de bosones con masa ultra ligera. Encontramos que con este modelo se pueden ajustar las observaciones del WMAP si la masa de los bosones es  $\sim 10^{-22}$  eV. Además, encontramos que la temperatura actual de estos bosones ultra ligeros está por debajo de la temperatura crítica de condensación de Bose-Einstein; este resultado sugiere que la materia oscura bosónica ultra ligera está en un estado de condensado de Bose-Einstein.

Finalmente, concluimos que el modelo de materia oscura escalar es plausible para explicar la naturaleza de la materia oscura en el Universo.

# Abstract

The dark matter plays an important role in the formation of large-scale structures in the Universe. It makes up about 23% of its total content. The most accepted model to explain the dark matter nature is the called cold dark matter model. In this Thesis, we explore the hypothesis that the dark matter is a real scalar field endowed with a quadratic scalar potential whose associated boson has an ultra light mass  $m \sim 10^{-23} - 10^{-22}$  eV. This alternative scenario is called scalar field dark matter model.

In the first part of this work, we study the cosmological evolution of an isotropic, homogeneous and flat Universe composed by a scalar field as dark matter, plus baryons, photons, neutrinos and a cosmological constant. We find that the energy density of the scalar field evolves as that of non-relativistic matter or dust. Therefore, the dynamics of the Universe with a scalar field as dark matter mimics an Universe with cold dark matter. We also study the evolution of the perturbations of the scalar field in the linear regime. We find that the scalar perturbations have a growing behavior similar to that obtained for the cold dark matter model. Later on, we investigate the evolution of the scalar field perturbations in the non-linear regime. We find that the scalar perturbations have a sudden growth after the recombination era and (these) collapse and virialize earlier than those of the cold dark matter model. Therefore, the scalar field model predicts the formation of dark haloes, and possibly galaxies, at higher redshifts. On the other hand, we study the power spectrum of the anisotropies in the cosmic microwave background radiation under the hypothesis that the dark matter is composed by ultra light bosonic particles. We find that this model is able to fix the WMAP observations if the boson mass is  $10^{-22}$  eV. In addition, we obtain that the temperature of these ultra light bosons today is below the critical temperature of Bose-Einstein condensation; this result suggests that ultra light bosonic dark matter is forming a BoseEinstein condensate.

Finally, we conclude that the scalar field dark matter is a viable model account for the dark matter nature.

---

# Índice general

Índice general	XI
Índice de figuras	XV
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Marco cosmológico básico	2
1.1.1. Principio cosmológico	2
1.1.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	3
1.1.3. Ecuaciones de Friedmann	4
1.1.4. Densidad crítica, corrimiento al rojo y radio de Hubble	6
1.2. El modelo de concordancia	7
1.2.1. Historia del Universo	8
1.3. Materia oscura	9
1.3.1. Evidencia observacional	10
1.3.1.1. Dinámica de cúmulos de galaxias	10
1.3.1.2. Curvas de rotación	10
1.3.1.3. Anisotropías de la radiación cósmica de fondo	11
1.3.1.4. Choques de cúmulos de galaxias	12
1.3.2. Candidatos a materia oscura	12
1.3.2.1. Candidatos bariónicos	12
1.3.2.2. Candidatos no bariónicos	13
1.4. Materia oscura fría	15
1.4.1. Aciertos	15
1.4.2. Dificultades	16
1.5. Materia oscura escalar	17
1.5.1. Marco teórico de campos escalares	17
1.5.1.1. Sistema Schrödinger-Poisson	20
1.5.2. Un campo escalar como materia oscura: reseña histórica	22
1.5.3. Aciertos	27
1.5.4. Dificultades	28
1.5.5. Motivación y objetivos de la tesis	28

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>2. Universo FLRW con materia oscura fría</b>	<b>29</b>
2.1. Introducción . . . . .	29
2.2. Ecuaciones de Friedmann para el modelo de concordancia . . . . .	29
2.2.1. Sistema de ecuaciones adimensional . . . . .	30
2.3. Solución analítica . . . . .	34
2.3.1. Resultados . . . . .	36
2.4. Solución numérica . . . . .	38
2.4.1. Análisis de convergencia y resultados . . . . .	38
<b>3. Universo FLRW con materia oscura escalar</b>	<b>47</b>
3.1. Introducción . . . . .	47
3.2. Ecuaciones de Friedmann para el modelo de materia oscura escalar	48
3.2.1. Sistema de ecuaciones adimensional . . . . .	49
3.3. Modelo A: Potencial escalar $V = 0$ . . . . .	52
3.3.1. Sistema de ecuaciones adimensional . . . . .	52
3.3.2. Resultados . . . . .	54
3.4. Modelo B: Potencial escalar $V = m^2\Phi^2/2$ . . . . .	56
3.4.1. Sistema de ecuaciones adimensional . . . . .	56
3.4.2. Propuesta I . . . . .	57
3.4.3. Propuesta II . . . . .	59
3.4.4. Propuesta III . . . . .	63
3.4.4.1. Resultados . . . . .	64
<b>4. Formación de estructuras: perturbaciones escalares en el régimen lineal</b>	<b>73</b>
4.1. Introducción . . . . .	73
4.2. Perturbaciones escalares en el régimen lineal . . . . .	73
4.3. Solución numérica de la evolución de las perturbaciones lineales escalares . . . . .	80
<b>5. Formación de estructuras: perturbaciones escalares en el régimen no lineal</b>	<b>87</b>
5.1. Introducción . . . . .	87
5.2. El modelo de colapso esférico . . . . .	88
5.3. Virialización del cúmulo . . . . .	91
5.4. Solución numérica de la evolución de las perturbaciones no lineales escalares . . . . .	93
<b>6. Anisotropías de temperatura en la radiación cósmica de fondo con materia oscura bosónica ultra ligera</b>	<b>99</b>
6.1. Introducción . . . . .	99

## ÍNDICE GENERAL

---

6.2. Materia oscura bosónica y condensación de Bose-Einstein . . . . .	100
6.2.1. Condensación de Bose-Einstein . . . . .	101
6.2.2. Teoría cinética en expansión . . . . .	102
6.3. Anisotropías de la radiación cósmica de fondo . . . . .	104
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>111</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	111
7.2. Trabajo futuro . . . . .	114
<b>Apéndice A</b>	
<b>Publicaciones</b>	<b>117</b>
<b>Apéndice B</b>	
<b>Método Adams-Bashforth-Moulton</b>	<b>119</b>
<b>Apéndice C</b>	<b>121</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>123</b>

## ÍNDICE GENERAL

---

# Índice de figuras

1.1.	Representación esquemática de las inconsistencias entre las curvas de rotación observadas y teóricas. . . . .	11
1.2.	Perfil de densidad de un halo oscuro escalar en el régimen Newtoniano	21
2.1.	Evolución de los parámetros de densidad de las componentes del Universo obtenidas con las funciones (2.38)-(2.42) para el modelo CDM. . . . .	37
2.2.	Evolución de $F$ obtenido al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo RK4. . . . .	39
2.3.	Evolución numérica del error $\varepsilon$ al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo RK4. . . . .	40
2.4.	Evolución de la función $\Pi$ al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo RK4. . . . .	41
2.5.	Evolución cosmológica de los parámetros de densidad de las componentes del Universo obtenida con un algoritmo RK4. . . . .	41
2.6.	Solución analítica y numérica de $\Omega_x$ . . . . .	42
2.7.	Evolución de $F$ al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo ABM. . . . .	43
2.8.	Evolución numérica del error $\varepsilon$ al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo ABM. . . . .	44
2.9.	Evolución cosmológica de los parámetros de densidad de las componentes del Universo obtenida con un algoritmo ABM. . . . .	45
2.10.	Comparación de la evolución obtenida para $\Omega_x$ con el método RK4, el método ABM y el caso analítico,. . . . .	45
3.1.	Solución analítica (panel y numérica de la evolución cosmológica de un Universo de fondo con un modelo de materia oscura escalar con potencial escalar $V = 0$ . . . . .	55



## ÍNDICE DE FIGURAS

---

3.2. Solución numérica del sistema de ecuaciones (3.34) que describe la evolución de un Universo de fondo con un modelo de materia oscura escalar con potencial escalar $V = m^2\Phi^2/2$ con $m = 1 \times 10^{-28}$ eV. . . . .	58
3.3. Solución numérica del sistema de ecuaciones (3.39) de un Universo de fondo con materia oscura escalar con potencial escalar $V = m^2\Phi^2/2$ con $m = 1 \times 10^{-28}$ eV con $k = 0$ y $k = 1$ . . . . .	61
3.4. Solución numérica del sistema de ecuaciones (3.39), con la función $\Pi$ (ec. 3.41), de un Universo de fondo con un modelo de materia oscura escalar con potencial escalar $V = m^2\Phi^2/2$ con $m = 1 \times 10^{-28}$ eV. . . . .	62
3.5. Evolución de $F$ (ec. 3.31) obtenida al resolver el sistema de ecuaciones (3.44) usando un método semi-implícito de extrapolación. . . . .	65
3.6. Evolución cosmológica del campo escalar con potencial escalar $V = m^2\Phi^2/2$ . . . . .	66
3.7. Evolución cosmológica de la energía cinética y energía potencial del campo escalar $\Phi$ con potencial escalar $V = m^2\Phi^2/2$ . . . . .	67
3.8. Parámetro de densidad de materia oscura para el modelo de materia oscura fría y para el modelo de materia oscura escalar . . . . .	68
3.9. Solución numérica del sistema (3.44) que describe la evolución de un Universo de fondo con un modelo de materia oscura escalar con potencial escalar $V = m^2\Phi^2/2$ con $m = 1 \times 10^{-23}$ eV. . . . .	68
3.10. Evolución, con respecto al factor de escala $a$ , de la presión escalar y de la ecuación de estado de un campo escalar con potencial cuadrático. . . . .	70
3.11. Evolución de la función $\Pi$ , con respecto al factor de escala $a$ , para el modelo de materia oscura escalar. . . . .	71
3.12. Evolución de $s$ con respecto al factor de escala $a$ . . . . .	71
4.1. Evolución de la perturbación escalar $\delta\Phi$ como función del factor de escala $a$ . . . . .	81
4.2. Evolución del potencial gravitacional $\phi$ como función del factor de escala $a$ . . . . .	82
4.3. Evolución cosmológica de la densidad de campo escalar perturbada $\delta\rho_\Phi$ y presión escalar perturbada $\delta P_\Phi$ . . . . .	83
4.4. Evolución, con respecto al factor de escala, del término $\delta P_\Phi/\delta\rho_\Phi$ . . . . .	84
4.5. Evolución del término $\langle F_\Phi \rangle$ de la ecuación (4.30). . . . .	84
4.6. Evolución del término $\langle G_\phi \rangle$ de la ecuación (4.30). . . . .	85
4.7. Evolución del contraste de densidad lineal $\delta$ de materia oscura escalar para una perturbación con $\lambda_k \sim 2$ Mpc. . . . .	85

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

5.1. Evolución del campo escalar perturbado $\Phi_P$ en el régimen no lineal	94
5.2. Evolución del radio de una perturbación escalar con tamaño inicial de 2 Mpc en el régimen no lineal. . . . .	95
5.3. Evolución del contraste de densidad no lineal de materia oscura escalar. . . . .	96
6.1. Espectro de anisotropías para las estadísticas de Bose-Einstein y de Fermi-Dirac. . . . .	105
6.2. Respuesta del espectro de anisotropías de la CMB para valores de $\alpha$ en el intervalo ( $\geq 10^{-26}, 10^{-30}$ ). . . . .	106
6.3. Respuesta del espectro de la CMB a pequeñas variaciones de $\alpha$ en el intervalo ( $0.6 \times 10^{-27}, 0.8 \times 10^{-27}$ ). . . . .	107
6.4. Espectro de potencias de la CMB para diferentes contenidos de ULBDM y CDM. . . . .	108
6.5. Espectro de potencias de la CMB para tres profundidades ópticas de reionización, $\tau_r = 0.05, 0.13, 0.19$ . . . . .	109

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

# Capítulo 1

## Introducción

La Cosmología moderna está basada en el principio cosmológico que supone que nuestro Universo es isotrópico y homogéneo a grandes escalas y la formación de estructuras es jerárquica. En la última década, se han realizado muchos avances en esta ciencia gracias a las observaciones cosmológicas de gran precisión como las hechas por el satélite WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), que ha medido las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo de microondas (CMB, por sus siglas en inglés: cosmic microwave background), el proyecto SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*), que ha realizado un censo de las galaxias que conforman nuestro Universo local, y las observaciones de las supernovas tipo Ia, cuyo brillo intrínseco como función del corrimiento al rojo sugiere que el Universo se expande aceleradamente. Estas observaciones son consistentes con el principio cosmológico, y llevan a la construcción del modelo de concordancia que indica que el Universo es plano y que sus componentes principales son: bariones, fotones, neutrinos, materia oscura y energía oscura. Además, este modelo estima que la materia oscura constituye el 23% del contenido total del Universo y la energía oscura el 73%, siendo así sus componentes dominantes. Sin embargo, la naturaleza de ambas permanece desconocida.

Suponiendo que la teoría de la Relatividad General de Einstein y la ley de Gravitación de Newton son válidas, se conjetura que la energía oscura es la entidad responsable de la expansión acelerada del Universo. Actualmente, hay una gran diversidad de hipótesis acerca de la naturaleza de la energía oscura en el Universo, siendo una de las más favorecidas la llamada constante cosmológica que originalmente fue propuesta por Albert Einstein para describir un Universo estático. En esta tesis, por simplicidad, supondremos que la energía oscura en el Universo es una constante cosmológica.

Asimismo, se supone que la materia oscura es la responsable de la formación de las estructuras a gran escala del Universo, es decir, halos oscuros que albergan las galaxias y los cúmulos de galaxias del Universo. La hipótesis más aceptada en



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# 1. INTRODUCCIÓN

---

el escenario cosmológico actual es el del modelo de materia oscura fría (CDM, por sus siglas en inglés: *cold dark matter*). No obstante, en esta tesis se estudiará un modelo alternativo que supone que un campo escalar fundamental con potencial escalar cuadrático podría hacer el rol de la materia oscura en el Universo. Este modelo ha sido llamado materia oscura escalar (SFDM, por sus siglas en inglés: *scalar field dark matter*).

## 1.1. Marco cosmológico básico

En esta sección se presentará una breve descripción del modelo de concordancia así como el lenguaje físico-matemático que lo describe, esto es, la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, las consecuentes ecuaciones de Friedmann y la ecuación de continuidad para la dinámica de una componente del Universo correspondiente a alguna de las especies de partículas presentes al día de hoy como los fotones, bariones, etc. Denominaremos especie cosmológica “ $e$ ” a cualquiera de estas especies cuyas propiedades físicas como su densidad de energía dependan solamente del tiempo, es decir,  $\rho_e(\mathbf{x}, t) = \rho_e(t)$ .

### 1.1.1. Principio cosmológico

Antes de enunciar el principio cosmológico, es necesario hacer alusión al Principio Copernicano. Este principio postula que nosotros no estamos en una posición especial o privilegiada del Universo. Basado en el Principio Copernicano, el Principio Cosmológico postula que el Universo es espacialmente isotrópico y homogéneo a escalas suficientemente grandes, no obstante, la naturaleza de la escala de transición hacia la isotropía y homogeneidad fue un problema complicado.

La isotropía del Universo se puede observar directamente, siendo el mejor ejemplo las observaciones de la CMB que es isotrópica con muy pequeñas variaciones de  $\sim 10^{-5}$ . No obstante, las observaciones de la RCF no son suficientes para deducir la isotropía de la geometría del espacio-tiempo ya que aunque las observaciones de la distribución de galaxias no muestran evidencia de anisotropía esta no se puede descartar. Así, para asegurar la isotropía de la geometría, es necesario asumir el Principio Copernicano o exigir la isotropía de la distribución geométrica de la materia. Esta última se puede asegurar si un observador fundamental comóvil mide isotropía en los siguientes cuatro observables (Maartens 2011) independientes:

- Distancia de diámetro angular  $d_A$ . Es la distancia a un objeto, medida desde nuestro marco de referencia, determinada por el ángulo  $\theta$  subtendido por el objeto de tamaño físico  $l$ , es decir,  $d_A \equiv l/\theta$ .

- 
- **Conteos de número de galaxias.** Es la estimación del número de galaxias presentes en un determinado volumen a una distancia  $d_r$  (o corrimiento al rojo) de nosotros.
  - **Velocidades peculiares.** En un Universo FLRW, las velocidades de objetos comóviles están determinadas por la ley de Hubble. No obstante, las pequeñas inhomogeneidades gravitacionales presentes en el Universo inducen velocidades peculiares en los objetos. Así, la medición de las velocidades peculiares de las galaxias determinan la distribución de materia en el Universo. Por lo tanto, el campo de velocidades peculiares a grandes escalas del Universo proporciona una estimación del espectro primordial de perturbaciones y por ende de la isotropía del Universo.
  - **Lenteo gravitacional.** Es la deflexión o distorsión de la luz cuando pasa por grandes distribuciones de materia.

Por otra parte, la homogeneidad del Universo no se puede inferir directamente de la CMB o la distribución de galaxias, sin embargo, hay evidencia de que a escalas mayores a 100 Mpc se alcanza la homogeneidad estadística. No obstante, esto no es suficiente para concluir que nuestro Universo es homogéneo. Si se tiene isotropía en las cuatro observables de la materia ya mencionadas y asumiendo el Principio Copernicano la homogeneidad del Universo está garantizada. Por otra parte, también se puede asegurar la homogeneidad del Universo si todos los observadores ven distancias angulares isotrópicas hasta tercer orden en corrimiento al rojo. Finalmente, la evidencia observacional más robusta de la homogeneidad se tiene al combinar el Principio Copernicano con la isotropía de la CMB ([Maartens 2011](#)).

### 1.1.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Para la descripción de la física de un Universo homogéneo e isotrópico, se considera una métrica general del espacio-tiempo en el sistema coordenado  $(t, x^i)$  dada por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.1)$$

donde los índices griegos van como  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  y los índices latinos como  $i = 1, 2, 3$ . Suponiendo válido el Principio Cosmológico, si el espacio es isotrópico, entonces  $g_{0i}$  se hace cero. Además, en el sistema de coordenadas de los observadores fundamentales es posible etiquetar las hipersuperficies con la coordenada temporal  $t$  que implica que  $g_{00} = 1$ , por lo tanto la métrica (1.1) con  $c = 1$  resulta (de aquí en adelante se usará el sistema natural de unidades donde  $c = \hbar = k_B = 1$ )

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.2)$$

## 1. INTRODUCCIÓN

---

Ahora debemos determinar la métrica espacial  $g_{ij}$  para un Universo isotrópico, homogéneo. Recuérdese que hay tres diferentes geometrías que cumplen las condiciones de isotropía y homogeneidad. Estas geometrías se pueden escribir

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.3)$$

donde  $K$  es una constante. La ecuación (1.3) es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) (Friedmann 1922, Lemaître 1927, Robertson 1936, Walker 1936). En esta métrica se ha considerado la expansión del Universo a través del factor de escala  $a$  que depende sólo de la coordenada temporal (siendo así una constante espacial),  $(r, \theta, \phi)$  son las coordenadas esféricas usuales comóviles.  $K$  es la curvatura del espacio que, con una elección adecuada de unidades para la coordenada radial  $r$ , puede tomar los valores adimensionales  $K = -1$  (geometría hiperbólica),  $0$  (geometría plana), o  $1$  (geometría esférica). Es común hacer el cambio de variable  $r = f_K(\tilde{r})$ , donde  $f_K(\tilde{r})$  está dada por

$$f_K(\tilde{r}) = \begin{cases} \sin \tilde{r} & \text{si } K = 1 \\ \tilde{r} & \text{si } K = 0 \\ \sinh \tilde{r} & \text{si } K = -1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Por lo tanto, la métrica FLRW resulta

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\tilde{r}^2 + f_K^2(\tilde{r}) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (1.5)$$

Finalmente, a veces es necesario escribir la métrica en términos del tiempo conforme  $\eta$  relacionado con el tiempo cosmológico  $t$  mediante  $d\eta = dt/a(t)$ . En el sistema de coordenadas  $(\eta, \tilde{r}, \theta, \phi)$ , la métrica FLRW resulta

$$ds^2 = -a^2(\eta) [-d\eta^2 + d\tilde{r}^2 + f_K^2(\tilde{r}) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (1.6)$$

### 1.1.3. Ecuaciones de Friedmann

Para estudiar la dinámica del Universo, es decir, su origen, evolución, y destino, es necesario resolver las ecuaciones de campo de Einstein (Weinberg 1972) con constante cosmológica dadas por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{R}/2 - g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

siendo  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $G_{\mu\nu}$  el tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu}$  el tensor de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio-tiempo,  $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  el escalar de Ricci y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento para un campo o especie cosmológica dada y  $\Lambda$  es la constante cosmológica.



---

Si la especie se puede modelar como un fluido perfecto, entonces su tensor de energía-momento está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía del fluido perfecto (en este caso, también se puede interpretar como densidad de materia),  $P$  es su presión y  $u_\mu$  es su 4-velocidad (recuérdese que en el sistema natural de unidades  $c = 1$ ) que cumple con  $u^\mu u_\mu = -1$  y que en coordenadas comóviles resulta  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ .

Así, para estudiar la dinámica de un Universo isotrópico y homogéneo que contiene una especie cosmológica  $e$  (fluido perfecto) se resuelven las ecuaciones de Einstein (1.7), junto con el tensor de energía-momento (1.8). Para la métrica de FLRW (1.3), sólo hay dos componentes del tensor de Ricci distintos de cero, uno con los índices  $\mu = \nu = 0$  y otro con  $\mu = \nu = i$  (ver Dodelson 2003, Durrer 2008, para la obtención de todas las cantidades geométricas de interés) resultando

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (1.9)$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} [2(\dot{a}^2 + K) + a\ddot{a}]. \quad (1.10)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $\dot{a}$  es la velocidad de expansión del Universo y  $\ddot{a}$  su aceleración. Con estas componentes, el escalar de Ricci resulta

$$\mathcal{R} = -R_{00} + \frac{1}{a^2} R_{ii} = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right]. \quad (1.11)$$

Dado que  $T_{00} = \rho$  y  $T_{ij} = \delta_{ij} P$ , las componentes  $G_{00} = \kappa^2 T_{00}$  y  $G_{ii} = \kappa^2 T_{ii}$  del tensor de Einstein (1.7) para el fluido  $e$  respectivamente son

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3} \rho_e + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.12a)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} = -\kappa^2 P_e + \Lambda, \quad (1.12b)$$

donde  $H \equiv \dot{a}/a$  es el parámetro de Hubble que describe la tasa de expansión del Universo,  $\rho_e$  y  $P_e$  son la densidad de energía y la presión de la especie cosmológica  $e$  respectivamente. El punto sobre una variable indica la derivada con respecto al tiempo cosmológico. El sistema de ecuaciones (1.12) se conoce como ecuaciones de Friedmann. La ecuación (1.12a) usualmente se conoce como ecuación de Friedmann y (1.12b) como ecuación de Raychauduri o ecuación de aceleración.

## 1. INTRODUCCIÓN

---

El tensor de energía-momento de  $e$  obedece la condición de conservación de energía-momento,  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  (donde  $;$  denota derivada covariante), de la cual se obtiene la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho}_e + 3H(\rho_e + P_e) = 0. \quad (1.13)$$

Esta última expresión también se puede obtener combinando las ecuaciones (1.12a) y (1.12b).

### 1.1.4. Densidad crítica, corrimiento al rojo y radio de Hubble

De la ecuación de Friedmann (1.12a), se puede ver que existe una densidad particular, conocida como la densidad crítica, para la cual el Universo es espacialmente plano en ausencia de constante cosmológica. Esta se define como

$$\rho_{cri} \equiv \frac{3H^2}{\kappa^2}, \quad (1.14)$$

y es una función del tiempo. Su valor al día de hoy es  $\rho_{cri} \approx (3 \times 10^{-3} \text{eV})^4 h^2$ , donde  $h$  es el parámetro de Hubble al día de hoy parametrizado como  $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Usualmente, la densidad de energía de una especie cosmológica  $e$  se mide como una fracción de la densidad crítica, esta fracción se denomina parámetro de densidad y es definida como  $\Omega \equiv \rho_e / \rho_{cri}$ .

Por otra parte, en Cosmología, es común expresar las distancias en términos del corrimiento al rojo  $z$ . Este puede definirse en términos del factor de escala como

$$1 + z = \frac{a(t_{ob})}{a(t_{em})}. \quad (1.15)$$

donde  $t_{em}$  es el tiempo en el cual se emitió el fotón y  $t_{ob}$  es el tiempo en el cual es observado ( $t_{em} < t_{ob}$ ). Así, para un observador en la Tierra en la época actual  $t_{ob} = t_0$  la distancia a una galaxia distante que emitió un fotón a un tiempo  $t_{em} = t$  se puede determinar a partir de  $1 + z = a(t_0)/a(t)$ . Por convención, el factor de escala al día de hoy se toma como  $a(t_0) = 1$ , por lo tanto, la ecuación anterior resulta

$$1 + z = \frac{1}{a(t)}. \quad (1.16)$$

Finalmente, el radio de Hubble o radio del horizonte  $r_H$  se define como la distancia recorrida por un fotón emitido a  $t = 0$ , hasta el límite observable del Universo a un tiempo  $t$  y está dado por

$$r_H \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = H(t)^{-1}. \quad (1.17)$$

---

Esta distancia es típicamente la escala en la cual los procesos físicos están conectados causalmente. Así, las regiones separadas por una distancia  $l > r_H$  no están en contacto causal. El radio de Hubble también es la escala en la que los efectos relativistas llegan a ser importantes, de tal manera que, para longitudes  $l \ll r_H$ , la gravedad Newtoniana describe adecuadamente los distintos fenómenos físicos.

Proponer un modelo cosmológico implica suponer que el Universo está constituido por determinadas especies cosmológicas. Por lo tanto, para estudiar la dinámica y evolución de un hipotético Universo, es necesario resolver las ecuaciones de Friedmann (1.12) y la ecuación de continuidad (1.13) para todas las especies consideradas con sus correspondientes ecuaciones de estado. En general, las especies cosmológicas pueden ser relativistas o no relativistas. Las especies relativistas, comúnmente llamadas radiación, son los fotones y los neutrinos y su densidad evoluciona como  $\rho_r \sim a^{-4}$ . Por otra parte, la densidad de las especies no relativistas, como la materia bariónica, evoluciona como  $\rho_{nr} \sim a^{-3}$ . La hipotética materia oscura fría es una especie no relativista como se verá más adelante.

## 1.2. El modelo de concordancia

En la última sección se desarrolló el marco teórico-matemático para describir un Universo isotrópico y homogéneo. A partir de las crecientes y cada vez mejores observaciones astronómicas, como las hechas por el WMAP de las anisotropías de la CMB y los grandes censos de galaxias, se ha podido determinar con gran precisión las densidades de las distintas especies del Universo así como también el valor de los diversos parámetros cosmológicos como la edad del Universo  $t_0$ , el parámetro de Hubble  $H_0$ , la temperatura de la radiación cósmica de fondo  $T_{z_0}$ , etc. Estas observaciones cosmológicas favorecen un modelo cosmológico de concordancia de un Universo en expansión, isotrópico, homogéneo, plano (modelo de la gran explosión) y que está constituido por fotones ( $z$ ), neutrinos ( $\nu$ ), bariones ( $b$ ), materia oscura fría exótica ( $x$ ) y energía oscura exótica en forma de constante cosmológica  $\Lambda$ . Dentro del modelo de concordancia, el Universo tuvo una época inflacionaria que resuelve algunos de los problemas (problema de planitud y del horizonte) del modelo de la gran explosión (ver [Kolb & Turner 1990](#), [Padmanabhan 1993](#), [Liddle & Lyth 2000](#), para la discusión de estos problemas). Las mejores estimaciones de los parámetros cosmológicos al día de hoy del modelo de concordancia, a partir de los datos obtenidos por WMAP después de 7 años de observaciones (WMAP-7a) son

$$\begin{aligned} \Omega_{x_0} &= 0.226, & \Omega_{b_0} &= 0.0455, \\ \Omega_{z_0} &\sim 4 \times 10^{-5}, & \Omega_{\nu_0} &\sim 2.7 \times 10^{-5}, \end{aligned}$$

## 1. INTRODUCCIÓN

---

$$\begin{aligned}\Omega_{\Lambda_0} &= 0.728, & H_0 &= 70.4 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \\ T_{z_0} &= 2.702 \text{ K}, & t_0 &= 13.76 \text{ años.}\end{aligned}\tag{1.18}$$

donde los subíndices 0 denotan que los parámetros cosmológicos están dados en el momento actual del Universo.

### 1.2.1. Historia del Universo

En el modelo de concordancia, a épocas muy tempranas del Universo, todas las especies ya mencionadas estuvieron térmicamente acopladas en el gas primigenio. Conforme el Universo se expande, su temperatura disminuye y las diversas especies se desacoplan del gas, dando lugar a épocas con propiedades muy particulares las cuales a grandes rasgos son ([Liddle & Lyth 2000](#), [Knobel 2012](#))

- **Universo muy temprano**, ( $10^{-42} < t \lesssim 10^{-14}$  s). A esta época, la energía del Universo es  $\gtrsim 10 \text{ TeV}$ . Estas escalas de energía no se han podido alcanzar en los aceleradores de partículas y por lo tanto no se tienen indicios claros de cómo se llevan a cabo las interacciones físicas. Así que, todos los procesos (y las hipótesis para explicarlos) que ocurren en esta fase del Universo tales como el inicio de la gran explosión, inflación, bariogénesis, etc, son especulativos.
- **Universo temprano**, ( $\sim 10^{-5} - 1$  s). A esta época del Universo, su energía decae a  $200 \text{ MeV}$  por lo que ocurre la transición de fase quark-gluón: los quarks y los gluones libres se confinan en bariones y mesones. En esta era, el Universo es un plasma caliente en el cual todas las especies (electrones, fotones, neutrinos, bariones, etc) están en equilibrio térmico. Conforme el Universo se expande, su temperatura y energía disminuyen, por lo tanto, la tasa de interacción de una determinada especie disminuye, se enfría y se desacopla del plasma. Posteriormente continúa su evolución como una reliquia térmica del Universo temprano. Cuando la energía del Universo alcanza  $\sim 0.5 \text{ MeV}$ , solamente los electrones, protones, neutrones y los fotones permanecen acoplados en el plasma, mientras el resto de las especies, como los neutrinos ( $\sim 1 \text{ MeV}$ ), ya se han desacoplado.
- **Nucleosíntesis**, ( $t_{nuc} \sim 3 - 5$  min). Cuando la energía del Universo alcanza  $\sim 0.05 \text{ MeV}$  las reacciones nucleares llegan a ser eficientes por lo tanto, los protones y neutrones libres forman elementos ligeros como el helio, litio, deuterio. Las predicciones teóricas de la nucleosíntesis primigenia ajustan bastante bien los datos observacionales concluyendo que la densidad bariónica en el Universo es  $\sim .05$  de la densidad crítica fundamentando así la presencia de materia no bariónica en el Universo.

- 
- **Época de la igualdad materia-radiación**, ( $t_{ig} \sim 60,000$  años). En esta época, la energía del Universo es  $\sim 1\text{eV}$  y la densidad de materia es igual a la densidad de radiación  $\Omega_x(t_{ig}) = \Omega_z(t_{ig})$ . Antes de esta época el Universo estaba dominado por radiación y después de esta época el Universo comienza a ser dominado por la materia. Las observaciones de la CMB estiman esta época a un corrimiento al rojo  $z_{ig} \simeq 3100$ .
  - **Recombinación**, ( $t_{rec} \sim 380,000$  años). Antes de esta época, los fotones y los electrones estaban acoplados vía la dispersión de Compton y los electrones a los protones vía la dispersión de Coulomb. Cuando la energía del Universo disminuye a  $\sim 0.1\text{ eV}$ , los fotones se desacoplan de la materia. Como resultado, los electrones libres se recombinan con los protones, formando átomos, implicando que los fotones puedan viajar en el Universo como reliquias térmicas sin ser dispersados por los electrones y que hoy podemos observar como radiación cósmica de fondo. Esta era del Universo también se conoce como la época de desacople y ocurre a un corrimiento al rojo  $z_{rec} \sim 1090$ .
  - **Formación de estructuras**, ( $\sim 0.1 - 13.7$  Gaños). En esta época, la materia domina la evolución del Universo. Las pequeñas perturbaciones en la distribución de la materia oscura comienzan a crecer debido a la acción de la fuerza de gravedad dando lugar a la formación de grandes estructuras en el Universo. Los pozos gravitacionales de estas estructuras gravitacionales atraen a su vez a la materia bariónica dando a lugar a las galaxias y cúmulos de galaxias. Este proceso de formación de estructuras es uno de los temas a estudiar en esta tesis en el esquema de un modelo de materia oscura escalar.
  - **Expansión acelerada**, (época actual). De acuerdo a las observaciones de las curvas luminosas de las supernovas tipo Ia, el Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada. Estas observaciones junto con las de la radiación cósmica de fondo sugieren la existencia de un tipo de energía cuya densidad es  $\sim 0.73$  la crítica. Se cree que esta componente exótica, llamada energía oscura es la responsable de esta expansión acelerada siendo la constante cosmológica  $\Lambda$  la más favorecida por las observaciones cosmológicas.

### 1.3. Materia oscura

Uno de los problemas más importantes a los que se enfrenta la Cosmología actual, desde la perspectiva de la Teoría de la Relatividad General y el modelo estándar de partículas es determinar la naturaleza de la materia oscura. Esta hipotética materia oscura es la responsable de la formación de estructuras de

## 1. INTRODUCCIÓN

---

gran escala en el Universo. La dinámica del Universo, y de sus objetos, es afectada significativamente por este tipo de materia vía interacción gravitacional, siendo estos efectos gravitacionales la única evidencia de su existencia debido a que no se ha observado su influencia de ninguna otra manera ya que no interactúa electromagnéticamente. A continuación se describirán brevemente las diversas observaciones que soportan la existencia de materia oscura.

### 1.3.1. Evidencia observacional

La necesidad de considerar la existencia de materia oscura en el Universo ha sido establecida por diversas observaciones astronómicas a muy variadas escalas, desde el nivel galáctico hasta escalas cosmológicas, algunas de las más conocidas son: curvas de rotación, dinámica de cúmulos de galaxias, anisotropías de la radiación cósmica de fondo, oscilaciones acústicas bariónicas, choques de cúmulos de galaxias, lentes gravitatorias, etc.

#### 1.3.1.1. Dinámica de cúmulos de galaxias

El astrónomo suizo Zwicky fue uno de los primeros en sugerir la existencia de materia faltante al estudiar la dinámica del cúmulo de coma. Zwicky midió las velocidades radiales de 7 galaxias pertenecientes a Coma y encontró que estas diferían de la velocidad promedio del cúmulo con una dispersión *rms* de  $\sim 700$  km s<sup>-1</sup>. A partir de sus mediciones, Zwicky estimó la masa dinámica total del cúmulo usando el teorema del virial. Posteriormente, comparó esta masa dinámica con la masa luminosa obtenida de la curva de rotación de algunas galaxias cercanas encontrando que había una discrepancia entre ellas por un factor de 400 (Zwicky 1933, Binney & Tremaine 1994) concluyendo así la existencia de materia no visible, al que llamó materia oscura, que afecta considerablemente la dinámica del cúmulo de Coma.

#### 1.3.1.2. Curvas de rotación

Por otra parte, Rubin fue una de las pioneras en medir curvas de rotación de galaxias espirales con una alta resolución (Rubin & Ford, W. K., Jr. 1970, Rubin et al. 1985). Ella encontró que las curvas de rotación de estas galaxias son planas a radios muy exteriores. Las inconsistencias surgen al aplicar un análisis Newtoniano para explicar la velocidad circular del gas considerando solamente la presencia de materia luminosa. De acuerdo con la mecánica Newtoniana, la velocidad circular debería decrecer conforme nos alejamos del centro galáctico, lo cual no sucede (ver figura 1.1). Nuevamente, estas observaciones sugieren la

---

existencia de un halo esférico de materia oscura que contribuye significativamente, vía la fuerza de gravedad, al comportamiento plano de las curvas de rotación.

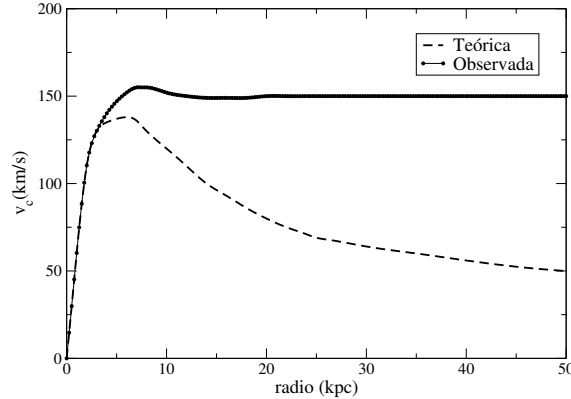


Figura 1.1: Representación esquemática de las inconsistencias entre las curvas de rotación observadas y la esperada de la teoría Newtoniana sin materia oscura.

En esta misma dirección, [Ostriker & Peebles \(1973\)](#) encontraron, realizando simulaciones numéricas, que los discos galácticos de galaxias espirales son inestables si se considera únicamente materia bariónica. El problema de la inestabilidad de los discos galácticos se puede corregir si se considera la presencia de un halo de materia oscura.

### 1.3.1.3. Anisotropías de la radiación cósmica de fondo

A escalas cosmológicas, una de las evidencias más robustas de la existencia de materia oscura viene del espectro de las anisotropías de temperatura de la CMB. Cuando los fotones se desacoplan de la materia, estos siguen su evolución cosmológica. Sin embargo, las pequeñas perturbaciones en el potencial gravitacional debido a las sobredensidades de materia provocan pequeñas fluctuaciones a la temperatura de la radiación cósmica de fondo. Estas fluctuaciones de temperatura de la radiación cósmica de fondo pueden analizarse en términos de componentes multipolares  $l$  o potencias. La distribución de estas potencias versus los múltiplos es lo que se conoce como el espectro de potencias de la CMB. La primera medición de las anisotropías de la CMB fueron realizadas por el satélite COBE ([Smoot et al. 1992](#)). Posteriormente, los globos MAXIMA y BOOMERANG midieron de manera convincente el primer pico de este espectro ([Hanany et al. 2000](#), [Mauskopf et al. 2000](#)) de picos acústicos Doppler. La posición de este primer pico es consistente con un Universo plano. Este resultado, combinado con las predicciones de la nucleosíntesis primigenia, implica que  $\sim 23\%$  del contenido es materia oscura.

## 1. INTRODUCCIÓN

---

Además, la razón de las amplitudes entre el segundo y el primer pico de estas anisotropías indican que  $\Omega_{b_0} = 0.0449 \pm 0.0028$  y  $\Omega_{x_0} = 0.222 \pm 0.026$  evidenciando nuevamente la existencia de materia oscura en el Universo.

### 1.3.1.4. Choques de cúmulos de galaxias

El choque de grandes cúmulos de galaxias es uno de los eventos más energéticos en el Universo. Debido a que la colisión es supersónica, se generan frentes de choque en el medio intracúmulo que emiten en rayos X. Para algunos cúmulos de galaxias también se ha podido estudiar la distribución de la masa mediante lentes gravitatorias. Uno de estos sistemas es el conocido cúmulo bala 1E0657 – 558 formado por un cúmulo principal con una masa  $\sim 1.5 \times 10^{15} M_{\odot}$  y un subcúmulo (cúmulo bala) con una masa  $\sim 1.5 \times 10^{14} M_{\odot}$  (Clowe et al. 2006, Clowe et al. 2004). Usando la técnica de lente gravitatoria débil se puede reconstruir el centro de masa del cúmulo principal y del subcúmulo revelando que estos están totalmente desplazados de la distribución espacial del gas. Este resultado sugiere la presencia de materia oscura, no colisional, que domina la dinámica gravitacional del sistema. Recientemente, se han llevado a cabo diversas simulaciones numéricas de este sistema resultando que las velocidades implicadas en esta colisión son bastante improbables, lo cual, representaría una dificultad a sortear por el modelo cosmológico estándar.

Finalmente, otra gran cantidad de evidencias observacionales, no menos importantes, que indican la presencia de materia se pueden consultar en Roos (2012). Así, por sus efectos gravitacionales podemos saber que una enorme cantidad de materia oscura está presente en el Universo (o lo debería estar), a menos que las leyes que conocemos de la naturaleza sean incorrectas, algo que realmente parecería extraño si ponemos como evidencia la gran cantidad de fenómenos que estas teorías describen exitosamente. Si aceptamos las evidencias de la presencia de la materia oscura en el Universo, faltaría saber cuál es su naturaleza. Varias de las propuestas que han surgido para tratar de explicar este hecho, sugieren la existencia de materia exótica, es decir, materia que interactúa muy débilmente con la materia ordinaria. En la siguiente subsección se hará una breve descripción de algunos candidatos plausibles a materia oscura.

### 1.3.2. Candidatos a materia oscura

#### 1.3.2.1. Candidatos bariónicos

En los primeros años de estudio del problema de la materia oscura en el Universo, se propuso que esta podría ser materia bariónica en forma de objetos compactos considerables pero con una emisión electromagnética muy débil. Dentro de estos candidatos bariónicos se encuentran (Padmanabhan 1993)



- 
- Enanas café.
  - Planetas tipo Júpiter.
  - Estrellas de neutrones.
  - Agujeros negros.
  - Gas, polvo, asteroides, cometas, etc.

Es posible detectar algunos de los objetos compactos mencionados, comúnmente llamados MACHOs (*Massive astrophysical compact halo objects*), por el efecto de microlente gravitacional que le producen a la luz de las estrellas de galaxias cercanas como la nube mayor de Magallanes. Sin embargo, los diversos estudios llevados a cabo para detectarlos han descartado que la materia oscura esté en forma de estos objetos ya que contribuyen muy poco a la densidad crítica del Universo ([Paczynski 1986](#)).

### 1.3.2.2. Candidatos no bariónicos

En general, la materia oscura se puede clasificar en caliente, fría o tibia. Esta clasificación se hace de acuerdo a la dispersión de velocidades de la partícula en el momento en que se desacopló del plasma primigenio. Así, el apelativo “caliente” hace referencia a una determinada partícula  $\chi$  de masa  $m_\chi$  con una velocidad relativista al momento de desacoplarse del plasma primigenio, por lo tanto, su temperatura  $T_\chi$  cumple con la condición  $T_\chi \gg m_\chi$  y su ecuación de estado  $P_\chi = \rho_\chi/3$ . Al contrario, una partícula se dice fría si su dispersión de velocidades al momento de desacoplarse es no relativista ( $v_\chi \simeq 0$ ), de tal manera que  $T_\chi \ll m_\chi$  y su ecuación de estado  $P_\chi \simeq 0$ . Una partícula tibia es una partícula con características intermedias de las frías y calientes, es decir, con dispersión de velocidades al momento de desacoplarse mayores a las de la materia oscura fría pero menores a las de la materia oscura caliente.

A continuación se enumeran algunos de los candidatos a materia oscura más populares en los modelos cosmológicos.

- **Neutrinos del modelo estándar.** En el Universo temprano, los neutrinos están en equilibrio con el baño térmico a través de reacciones  $\bar{\nu}\nu \leftrightarrow e^+e^-$ ,  $\nu e \leftrightarrow \nu e$ , etc. La sección cruzada  $\sigma$  de estas interacciones débiles está dada por  $\sigma \sim T^2$ , donde  $T$  es la temperatura del Universo. Asimismo, la densidad de número de los neutrinos es  $n \sim T^3$ , por lo que la tasa de estas interacciones  $\Gamma_\nu = \sigma n \sim T^5$ . Así, la razón de  $\Gamma_\nu$  con respecto a la tasa de expansión del Universo  $H \sim T^2$ , está dada por  $\Gamma_\nu/H \sim (T/1 \text{ MeV})^3$ . Cuando la temperatura del Universo  $T < 1 \text{ MeV}$ , la tasa de interacción

## 1. INTRODUCCIÓN

---

$\Gamma_\nu$  es menor que la tasa de expansión del Universo y las interacciones de los neutrinos son muy débiles para mantener el equilibrio térmico. Así, los neutrinos se desacoplan siendo relativistas cuando el Universo tiene una temperatura  $T \sim 1\text{Mev}$ , por lo tanto, caen en la clasificación de materia oscura caliente (Kolb & Turner 1990, Liddle & Lyth 2000). La densidad total de los neutrinos está relacionada a la masa  $i$  del neutrino- $i$  como

$$\Omega_\nu h^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{93} \text{ eV}. \quad (1.19)$$

Las observaciones del WMAP acotan la densidad cosmológica de neutrinos a  $\Omega_\nu h^2 < 0.0067$  (con un nivel de confianza de 95 %). Esto implica que, considerando tres especies de neutrinos degenerados, la masa  $m_\nu < 0.23$  eV (la diferencia de masa entre las 3 especies es muy pequeña). Los neutrinos, siendo partículas relativistas no colisionales, borran las fluctuaciones de escalas por debajo de  $\sim 40$  Mpc (Bond et al. 1980). Por lo tanto, la formación de estructuras se llevaría a cabo de manera anti-jerárquica, es decir, que las grandes estructuras se formarían primero y las estructuras pequeñas resultarían de la fractura de las estructuras más grandes. Este último hecho no está en concordancia con las observaciones cosmológicas, lo cual es un argumento muy fuerte en contra de los neutrinos como materia oscura del Universo.

- **Neutrinos estériles.** Estas partículas fueron propuestas como materia oscura por Dodelson & Widrow (1994). Los neutrinos estériles caen dentro de la clasificación de materia oscura tibia con masas  $\sim \text{KeV}$ . Dado que la materia oscura tibia podría resolver algunos de los problemas de la materia oscura fría empiezan a considerarse seriamente como candidatos a ser la materia oscura del Universo. Por ejemplo, Colín et al. (2000) desarrollaron simulaciones de  $N$ -cuerpos en un escenario de materia oscura tibia encontrando que hay una cantidad menor de subestructuras que las predichas en un modelo de materia oscura fría (ver Villaescusa-Navarro & Dalal 2011, para un estudio de los perfiles de densidad de halos de materia oscura tibia).
- **Axiones.** Esta partícula es el bosón pseudo-Goldstone que resulta del rompimiento espontáneo de la simetría Peccei-Quinn. Esta simetría se postula en las extensiones del modelo estándar para resolver el problema de la violación carga-paridad (CP) de la interacción fuerte. Las observaciones cosmológicas y las mediciones en los aceleradores de partículas acotan la masa del axiÓN a  $\lesssim 10^{-2}$  eV. Una de las características de los axiones es que dado que tiene interacciones extremadamente débiles con otras partículas, éstas podrían no estar en equilibrio térmico en el Universo temprano. El axiÓN es uno de los

---

mejores candidatos de materia oscura fría (ver por ejemplo [Kolb & Turner 1990](#), [Padmanabhan 1993](#), [Liddle & Lyth 2000](#)).

- **WIMPs ( *Weakly interacting massive particles* ).** Los WIMPs caen en la clasificación de materia oscura fría ya que se desacoplan siendo no relativistas cuando el Universo tenía una temperatura de  $T \sim 1$  GeV. Las masas de los WIMPs abarcan un intervalo de 10 GeV – 1 TeV y su densidad cosmológica se estima en  $\Omega_{WIMPs} \sim 1$  por lo tanto resultan buenos candidatos de materia oscura. Como su nombre lo indica, este tipo de partícula interactúa débilmente y gravitacionalmente con el resto de las especies del modelo estándar. Dado que los WIMPs no tienen interacción electromagnética con el resto de las partículas, hasta la fecha sólo se pueden detectar a través de sus efectos gravitacionales. El neutralino es uno de los WIMPs mejor motivados y es uno de los candidatos a ser la partícula supersimétrica más ligera del modelo estándar mínimo supersimétrico.

Además de los candidatos bariónicos y no bariónicos ya mencionados hay todo un “zoológico” de partículas exóticas candidatas a materia oscura como por ejemplo: sneutrinos, gravitinos, axinos, materia oscura auto interactuante, partículas masivas cargadas (ver [Bertone et al. 2005](#), para una revisión de los diversos candidatos).

## 1.4. Materia oscura fría

Como ya se mencionó, las observaciones cosmológicas de gran precisión han llevado a construir el modelo de concordancia que favorece un candidato de materia oscura fría, sin presión y no colisional, siendo los WIMPs los candidatos mejor posicionados. Este modelo ha resultado ser muy exitoso a todas las escalas del Universo y a continuación se mencionarán algunos de sus aciertos.

### 1.4.1. Aciertos

- Predice la densidades cosmológicas de todas las especies del Universo.
- Ajusta con gran exactitud las anisotropías de la radiación cósmica de fondo.
- Es consistente con las observaciones cosmológicas de los grandes censos de galaxias, como por ejemplo, el espectro de potencias de masas.
- Ajusta las curvas de rotación planas de las galaxias espirales.
- Las simulaciones numéricas de  $N$ -cuerpos están en concordancia con las observaciones de la estructura a gran escala del Universo.

## 1. INTRODUCCIÓN

---

### 1.4.2. Dificultades

A pesar de los éxitos obtenidos por el modelo de materia oscura fría en la descripción del Universo, no está exento de problemas tanto a escalas cosmológicas como galácticas. A continuación se mencionan algunos de estas dificultades que este modelo tiene que enfrentar para llegar a ser un modelo cosmológico convincente.

- **Detección directa.** El primer conflicto al que se enfrenta el modelo CDM es que a pesar de los grandes esfuerzos realizados aún no hay una detección directa, ni en las observaciones astronómicas ni en los aceleradores de partículas, de partículas de materia oscura.
- **Exceso de galaxias satélites.** Las simulaciones numéricas de  $N$ -cuerpos desarrolladas para los escenarios de materia oscura fría indican que este modelo predice una estructura a gran escala filamental bastante consistente con las observaciones cosmológicas. No obstante, estas mismas simulaciones predicen un número mayor de subestructuras, un orden de magnitud mayor, que las observadas. Esta sobrepoblación de subestructuras inherente de los modelos de materia oscura fría se conoce como el problema del exceso de galaxias satélites (Klypin et al. 1999, Ostriker & Steinhardt 2003). Este problema se ha enmendado construyendo modelos mucho más realistas que consideran retroalimentación debido a núcleos activos de galaxias, supernovas y efectos de la reionización en los cuales se concluye que en el paradigma del modelo estándar no todos los subhalos son capaces de formar galaxias, sin embargo, deberían poder ser observados por efectos de lentes gravitatorias.
- **Perfiles de densidad picudos.** A escalas galácticas, el modelo CDM exhibe una discrepancia cuando se comparan los perfiles de densidad de los halos oscuros obtenidos por las simulaciones numéricas con los perfiles derivados de las observaciones de las curvas de rotación de las galaxias enanas y de bajo brillo superficial. Mientras que las simulaciones predicen un perfil de densidad universal picudo (generalmente un perfil Navarro-Frenk-White) en los centros galácticos, las observaciones de este tipo de galaxias favorecen perfiles de densidad suavizados (van den Bosch et al. 2000, de Blok & Bosma 2002, Kleyna et al. 2003).

Además de los problemas mencionados arriba hay otras discrepancias importantes, aunque menos conocidas, que el modelo de materia oscura fría debe dilucidar. Por ejemplo, las recientes observaciones cosmológicas del “hueco local” muestran que este contiene menos galaxias que las esperadas del modelo (no confundir con el problema de las galaxias satélites). Este problema podría resolverse

---

suponiendo que las grandes estructuras crecen más rápido de lo que predice el modelo estándar (Peebles & Nusser 2010). Por otra parte, Lee & Komatsu (2010) encontraron que la velocidad de colisión 3000 km/s del cúmulo bala es bastante improbable dentro de las simulaciones numérica del modelo estándar. Thomas et al. (2011) también han encontrado pequeñas anomalías en el espectro de potencia de masas obtenidas por las observaciones del *SDSS* y el predicho por el modelo CDM. Finalmente, posibles dificultades del modelo de materia oscura se pueden encontrar en Kroupa (2012).

Así, con todos estos problemas del modelo de materia oscura fría, que aún siguen en discusión, han surgido una gran cantidad de alternativas que intentan resolverlos. Por ejemplo, la existencia de dimensiones extras y mundos branas en el Universo (García-Aspeitia, Magaña, & Matos 2011), inclusive modificaciones a la mecánica Newtoniana (Milgrom 1983). En esta tesis se abordará un modelo donde la materia oscura del Universo es un campo escalar. Este modelo se denomina modelo de materia oscura escalar y se describirá a continuación.

## 1.5. Materia oscura escalar

La Cosmología moderna y la Física de partículas han recurrido a los campos escalares para explicar principalmente la fase inflacionaria del Universo. Estos también se han explorado ampliamente en modelos de energía oscura y materia oscura. Antes de describir el modelo de materia oscura escalar se hará una breve revisión de las ecuaciones que rigen su dinámica.

### 1.5.1. Marco teórico de campos escalares

En el modelo estándar de partículas, los campos se clasifican de acuerdo al spin de sus partículas correspondientes. Los campos con spin-0 son llamados campos escalares. Un campo puede ser real o complejo. Un campo escalar complejo tiene dos tipos de partículas asociadas, ambas con la misma masa y spin-0, interpretadas como su partícula y anti-partícula. En el caso de un campo escalar real sólo hay un tipo de partícula asociada por lo que la partícula es su propia anti-partícula. La densidad lagrangiana de un campo escalar real  $\Phi$  no acoplado con otros campos del Universo está dado por

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2} \left( \dot{\Phi}^2 - \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi \right) - V(\Phi), \quad (1.20)$$

donde  $\nabla$  es el operador nabla. El primer término del lado derecho de la ecuación  $K_\Phi \equiv \left( \dot{\Phi}^2 - \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi \right) / 2$ , se conoce como el término cinético del campo escalar, siendo  $\dot{\Phi}^2/2$  la energía cinética escalar y  $\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi/2$  es el gradiente de energía.

## 1. INTRODUCCIÓN

---

La función  $V = V(\Phi)$  es el potencial escalar y los puntos sobre las variables denotan una derivada con respecto al tiempo cosmológico. Note que  $[\Phi] = [\text{energía}]$  y  $[V] = [\text{energía}]^4$  y que se han acuñado los términos cinético y el potencial escalar en analogía con el lagrangiano de una partícula libre. La ecuación (1.20) en relatividad general se puede escribir como

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - V(\Phi), \quad (1.21)$$

donde  $g^{\mu\nu}$  es la métrica del espacio-tiempo. Así la interacción gravitacional solamente entra en el formalismo a través de esta métrica. La densidad lagrangiana para la métrica es

$$\mathcal{L}_H = \frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2}, \quad (1.22)$$

donde  $\kappa^2 = 8\pi G$  y  $\mathcal{R}$  es la curvatura de la métrica. La ecuación (1.22) es la densidad lagrangiana para la acción de Einstein-Hilbert. Nótese que el campo escalar no está acoplado a la curvatura, por ejemplo  $\Phi\mathcal{R}$ , por lo que  $\Phi$  está acoplado mínimamente a la gravedad. La densidad lagrangiana total es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_\Phi. \quad (1.23)$$

La acción  $S$  asociada a  $\mathcal{L}$  está dada por

$$S = \int_M \mathcal{L}\sqrt{-g}dx^4, \quad (1.24)$$

donde  $M$  es la variedad y  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$  es el determinante de la métrica. La evolución del sistema Lagrangiano está dado por el principio de mínima acción  $\delta S = 0$ . Así, variando la acción (1.24) con respecto al campo escalar  $\Phi$  se llega a la ecuación de evolución para el campo escalar

$$\square\Phi + V_{,\Phi} = 0, \quad (1.25)$$

donde  $\square$  es el operador d'Alembertiano, así

$$\square\Phi = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right], \quad (1.26)$$

la coma en la ecuación (1.25) denota una derivada con respecto al campo escalar  $\Phi$ . La ecuación (1.26) es la ecuación de Klein-Gordon en relatividad general. Variando la acción (1.24) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se llega a las ecuaciones de Einstein  $G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\Phi\mu\nu}$  donde  $T_{\Phi\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento para el campo escalar definido como

$$T_{\Phi\mu\nu} \equiv \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi + V(\Phi)\right]. \quad (1.27)$$

---

Esta última ecuación se puede escribir en forma análoga a la de un fluido perfecto como

$$T_{\Phi\mu\nu} = (\rho_\Phi + P_\Phi)u_{\Phi\mu}u_{\Phi\nu} + P_\Phi g_{\mu\nu}, \quad (1.28)$$

donde se ha definido la densidad de energía efectiva  $\rho_\Phi$ , la presión efectiva  $P_\Phi$  y la 4-velocidad  $u_\Phi$  para el campo escalar como

$$\rho_\Phi = -\frac{1}{2}\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi + V(\Phi), \quad (1.29a)$$

$$P_\Phi = -\frac{1}{2}\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi - V(\Phi), \quad (1.29b)$$

$$u_{\Phi}{}^\mu = \frac{\partial^\mu\Phi}{\sqrt{-\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi}}. \quad (1.29c)$$

Para un campo escalar cosmológico  $\Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi(t)$  se tiene que  $\partial_i\Phi = 0$  ya que  $\Phi$  no depende de las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$ . Por lo tanto, en la métrica de Minkowsky  $\eta_{\mu\nu}$  con signatura  $(-1, 0, 0, 0)$ , las ecuaciones (1.25) y (1.29) resultan

$$\ddot{\Phi} = -V_{,\Phi}, \quad (1.30a)$$

$$\rho_\Phi = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi), \quad (1.30b)$$

$$P_\Phi = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi), \quad (1.30c)$$

$$u_{\Phi}{}^\mu = u_{\Phi\mu} = (1, 0, 0, 0). \quad (1.30d)$$

Recuérdese que en el sistema natural de unidades  $c = 1$ , por lo tanto, la componente  $u_{\Phi_0}$  es igual a la velocidad de la luz. Las ecuación de Klein-Gordon (1.30a) para un campo escalar cosmológico  $\Phi(t)$  en un Universo plano, isotrópico, homogéneo y en expansión resulta

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V_{,\Phi} = 0. \quad (1.31)$$

Con las ecuaciones para la densidad de energía escalar (1.30b) y la presión escalar (1.30c), la ecuación de estado para el campo escalar  $P_\Phi = \omega_\Phi \rho_\Phi$  se escribe como

$$\omega_\Phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V}. \quad (1.32)$$

Siguiendo con la analogía de un fluido perfecto, la ecuación de continuidad para el campo escalar se obtiene con la conservación del tensor de energía-momento  $T_{\Phi}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$

$$\dot{\rho}_\Phi + 3H(\rho_\Phi + P_\Phi) = 0. \quad (1.33)$$

## 1. INTRODUCCIÓN

---

También es posible obtener la ecuación de Klein-Gordon (1.31) al sustituir las ecuaciones (1.30b) y (1.30c) en (1.33)

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_\Phi + 3H(\rho_\Phi + P_\Phi) &= 0, \\
 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V\right) + 3H\left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V + \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V\right) &= 0, \\
 \dot{\Phi}\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi}^2 + \dot{\Phi}V_{,\Phi} &= 0, \\
 \ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V_{,\Phi} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Así, la dinámica de un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad está dado por las ecuaciones (1.7) y (1.25) conocidas como el sistema de Einstein-Klein-Gordon.

### 1.5.1.1. Sistema Schrödinger-Poisson

Los estudios numéricos del sistema Einstein-Klein-Gordon han mostrado que los campos escalares pueden formar configuraciones gravitacionales estables y virializadas. Estas configuraciones gravitacionales son llamadas estrellas de bosones para un campo escalar complejo (Ruffini & Bonazzola 1969, Colpi et al. 1986) y oscilaciones para un campo escalar real (Seidel & Suen 1991, Alcubierre et al. 2003). Las configuraciones gravitacionales escalares tienen una masa crítica, análoga a la masa crítica de las estrellas de neutrones, para la cual dejan de ser estables. Esta masa crítica, tanto para estrellas de bosones como para oscilaciones, está dada por

$$M_{cri} \sim 0.6 \frac{M_{Pl}^2}{m}, \tag{1.35}$$

siendo  $m$  la masa del bosón asociado al campo escalar y  $M_{Pl}$  la masa de Planck. Así, las configuraciones escalares con masas  $M > M_{cri}$  son inestables. El sistema Einstein-Klein-Gordon también se ha estudiado numéricamente en el régimen Newtoniano, para esto, se requiere hacer un tratamiento Post-Newtoniano de las ecuaciones (1.7) y (1.25) (Weinberg 1972). En este tratamiento, se considera que las partículas de prueba se mueven a velocidades bajas alrededor de campos gravitacionales débiles. En el régimen de campos gravitacionales débiles, la métrica de Minkowsky  $\eta_{\mu\nu}$  tiene pequeñas perturbaciones  $h_{\mu\nu}$  por lo tanto el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  resulta

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \tag{1.36}$$

Las perturbaciones  $h_{\mu\nu}$  se pueden describir en términos del potencial gravitacional Newtoniano  $\phi_N \ll 1$ , por lo que la métrica  $g_{\mu\nu}$  se expande en potencias de  $\phi_N$ . Así, la componente 00 de la métrica resultaría

$$g_{00} \simeq -(1 + 2\phi_N) + \mathcal{O}(\phi_N^2), \tag{1.37}$$



las otras componentes de la métrica se expanden de manera análoga. El tensor de energía-momento del campo escalar también se puede expandir en potencias de tal manera que la densidad de energía del campo escalar sea mucho mayor a la presión escalar ( $T_{00} \gg T_{ij}$ ) asegurando así el régimen de “velocidades bajas”. Por otra parte, el campo escalar relativista  $\Phi$  puede relacionarse a un campo escalar no relativista  $\psi_N$  como

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \exp(-imt)\psi_N(\mathbf{x}, t). \quad (1.38)$$

Con estas prescripciones, el régimen Newtoniano del sistema Einstein-Klein-Gordon (1.7) y (1.25) para el campo escalar (1.38) con un potencial escalar de la forma  $V(\Phi) = m^2\Phi^2 + \lambda\Phi^4/2$ , siendo  $\lambda$  el parámetro de auto-interacción de  $\Phi$ , resulta

$$i\partial_t\psi_N = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi_N + \phi_N m\psi_N + \frac{\lambda}{2m}|\psi_N|^2\psi_N, \quad (1.39)$$

$$\nabla^2\phi_N = 4\pi Gm^2\psi_N\psi_N^*, \quad (1.40)$$

donde  $\psi_N^*$  es el complejo conjugado de  $\psi_N$ . Las ecuaciones (1.39) y (1.40) son conocidas como el sistema Schrödinger-Poisson (SP) (Guzmán & Ureña-López 2003, Bernal 2007). Las configuraciones gravitacionales del sistema SP tienen un perfil de densidad,  $\rho_{\psi_N} = |\psi_N|^2$ , suavizado en el centro (figura 1.2) por lo que han sido propuestos como halos de materia oscura galácticos.

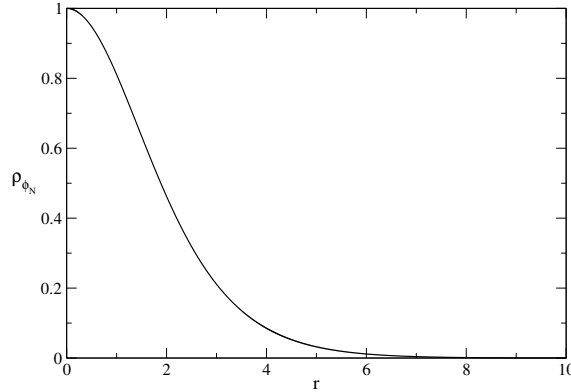


Figura 1.2: Perfil de densidad de un halo oscuro escalar en el régimen Newtoniano. La normalización es arbitraria.

La ecuación (1.39) es muy similar a la ecuación de Gross-Pitaevskii que describe la condensación de Bose-Einstein de gases fríos y diluidos (Pitaevskii & Stringari 2004).

Ahora que se ha proporcionado el marco teórico de los campos escalares se introducirá el modelo de materia oscura escalar en el contexto cosmológico.

## 1. INTRODUCCIÓN

---

### 1.5.2. Un campo escalar como materia oscura: reseña histórica

Los problemas del paradigma de materia oscura fría han llevado a plantear modelos alternativos como el que propone que la materia oscura es de naturaleza escalar. Una de las principales motivaciones de proponer la hipótesis de que la materia oscura podría ser un campo escalar está directamente relacionada con el hecho de que los campos con spin-0 están presentes en el modelo estándar de partículas, en sus extensiones, así como también en las teorías de gran unificación. No obstante, estos campos escalares no han sido detectados. Este último hecho impone la necesidad de encontrar mecanismos para disipar tales campos. Otra opción menos drástica podría ser mantener estos campos pero asociarlos a fases o componentes oscuras del Universo tales como inflación, energía oscura e inclusive materia oscura. Así, resulta natural preguntarse si la materia oscura en el Universo podría ser un campo escalar; esta es la pregunta que se pretende responder en esta tesis.

En el modelo de materia oscura escalar se propone que la materia oscura del Universo se puede describir por un campo escalar cosmológico real (o complejo)  $\Phi$ , con un potencial escalar  $V(\Phi)$  (Matos et al. 2000b). Turner (1983) realizó uno de los primeros estudios de la dinámica de campos escalares en un Universo en expansión. Encontró que la densidad de energía de un campo escalar con un potencial escalar cuártico  $V(\Phi) \sim \Phi^4$  evoluciona como  $\rho_\Phi \sim a^{-4}$ , es decir, como materia relativista. Asimismo, encontró que si  $\Phi$  tiene un potencial cuadrático  $V(\Phi) \sim \Phi^2$  evoluciona como  $\rho_\Phi \sim a^{-3}$ , es decir, como materia no relativista o polvo. Sin embargo, Turner no asoció directamente este campo con la materia oscura del Universo. Posteriormente, Khlopov et al. (1985) investigaron las inestabilidades gravitacionales, lineales y no lineales, de un campo escalar real o complejo con un potencial cuadrático y con uno con autointeracción  $V(\Phi) = m^2|\Phi|^2/2 - \lambda^2|\Phi|^4/4$ , siendo  $m$  la masa de la partícula asociada al campo escalar y  $\lambda$  el parámetro de auto-interacción. Khlopov et al. obtuvieron una longitud efectiva para el campo escalar  $\lambda_\Phi$ , similar a la longitud de Jeans para materia no relativista. Así, las inestabilidades con escalas mayores a esta longitud efectiva podían crecer y formar estructuras gravitacionales que ellos relacionaron con agujeros negros primordiales. Otro estudio de interés es el realizado por (Hills et al. 1989) en el cual encontraron que bosones pseudo-Goldstone con masas ultra ligeras  $\sim 10^{-24}$ eV pueden llegar a formar estructuras de relevancia astrofísica.

Unos años después, Sin (1994) y Ji & Sin (1994) consideraron que la materia oscura está compuesta de bosones ultra ligeros con  $m \sim 10^{-23} - 10^{-24}$  eV, de tal manera que su longitud de Compton  $\lambda_C \equiv m^{-1}$  tiene escalas astrofísicas  $\sim 10$ pc, para modelar los halos oscuros de algunas galaxias. Por otra parte, dada la naturaleza bosónica de las partículas, estas podrían enfriarse por debajo de

---

una temperatura crítica sobrepoblando los niveles más bajos de energía formando Condensados de Bose-Einstein (CBE). Con todo esto, Sin (1994) y Ji & Sin (1994) hicieron las siguientes consideraciones a su modelo: i) la mayoría de los bosones están en un estado de condensación y una pequeña fracción en estados excitados, ii) describen este sistema a través de las ecuaciones de Gross-Pitaevskii sin autointeracción. Con estos ingredientes, pudieron construir un halo gravitacional para la galaxia NGC2998 y ajustaron, en buena medida, su curva de rotación con 5 estados excitados. Además, ellos encontraron que la densidad de este halo de materia oscura bosónica es de  $\rho \sim 10^{-25} g/cm^3$  con una alta densidad de número de partículas  $N \sim 10^{40}$ , siendo consistente con la suposición de que los bosones están en un estado de condensación. Este modelo ha sido llamado materia oscura bosónica ultra ligera o materia oscura como condensado de Bose-Einstein y tiene una estrecha relación con el modelo de materia oscura escalar dado que un campo escalar tiene asociado una partícula con spin-0. Así, en esta tesis se usarán estas denominaciones indistintamente. Siguiendo estos trabajos previos, Lee & Koh (1996) estudiaron el caso relativista del modelo de Sin (1994) y Ji & Sin (1994) pero con un campo escalar complejo con auto interacción como la posibilidad de formar los halos oscuros. Ellos también obtienen curvas de rotación consistentes con las observaciones. Sin embargo, ellos se enfrentan con el hecho que las soluciones con varios estados excitados, o nodos, podrían ser inestables.

Otro trabajo interesante fue llevado a cabo por Peebles & Vilenkin (1999). Ellos proponen que un campo escalar con un potencial de la forma (motivado por inflación)  $V(\Phi) = m^2\Phi^2/2 + \lambda^2\Phi^4/4$  es dominado por el término cuártico a épocas muy tempranas comportándose así como materia relativista y que a épocas tardías la parte cuadrática del potencial domina la dinámica del campo escalar provocando que este se comporte como materia no relativista y, por lo tanto, como la materia oscura del Universo. A este modelo se le acuñó el nombre de materia oscura fluida (*fluid dark matter*) (Peebles 2000a,b). Independientemente, Matos & Guzmán (1999) propusieron un campo escalar proveniente de alguna teoría de unificación cuyos bosones asociados tienen una masa ultra ligera a diferencia de la materia oscura fluida. Ellos encontraron que este campo escalar se comporta como un fluido perfecto pero debido a la masa ultra ligera de las partículas, este campo puede formar estructuras gravitacionales a épocas muy tempranas del Universo. Además, también encontraron una solución exacta a las ecuaciones de Einstein para ajustar las curvas de rotación de algunas galaxias (Guzmán & Matos 2000, Matos & Guzmán 2000, Matos et al. 2000a). Al mismo tiempo, Matos & Ureña-López (2000) y Matos & Ureña-López (2001) realizaron un primer y minucioso estudio de la dinámica de la materia oscura escalar con un potencial de la forma  $V(\Phi) = V_0 [\cosh(\xi\Phi) - 1]$  para el cual la masa de los bosones asociados resulta  $m \equiv \frac{d^2V}{d\Phi^2} = V_{,\Phi\Phi} = \xi V_0$ . Este potencial escalar tiene dos comportamientos; a épocas muy tempranas del Universo tiene forma exponencial

## 1. INTRODUCCIÓN

---

mientras que a épocas tardías tiene la forma de un potencial cuadrático. Ellos encontraron que la dinámica de este campo escalar en un Universo FLRW sigue la evolución de la radiación cuando su potencial escalar tiene forma exponencial y que imita la evolución cosmológica del Universo del modelo estándar cuando tiene la forma cuadrática. Este fue uno de los primeros aciertos del modelo SFDM. Además, investigaron la evolución de las perturbaciones de este campo escalar en el régimen lineal en la norma sincrónica. Con este análisis, determinaron que las fluctuaciones escalares evolucionan igual que las perturbaciones de la CDM a partir de la época de la recombinación. A partir de estos resultados encontraron que la longitud efectiva a determinado factor de escala  $a$ , similar a la encontrada por [Khlopov et al.](#), para las perturbaciones escalares es  $\lambda_\Phi = 2\pi/ma$ . Con esta expresión y con la longitud de Jeans de CDM encontrada por [Kamionkowski & Liddle \(2000\)](#) para resolver el problema de las galaxias satélites, [Matos & Ureña-López](#) fijaron el valor de la masa del campo escalar a  $m \simeq 1.1 \times 10^{-23}$  eV, la cual es consistente con la encontrada por [Sin](#) con dinámica galáctica. Por lo tanto, fijando la masa del campo escalar se obtiene un corte natural en el espectro de potencias de masa (o viceversa) evitando así un exceso de subestructuras en el Universo. Este es uno de los principales méritos del modelo SFDM que lo posicionó como un modelo plausible para explicar la naturaleza de la materia oscura. A la par de estos trabajos, [Hu et al. \(2000\)](#) formularon el modelo de materia oscura difusa (*fuzzy dark matter*) que nuevamente propone que la materia oscura está compuesta de bosones ultra ligeros con una masa  $\sim 10^{-22}$  eV en un estado condensado e identifican la longitud efectiva de Jeans con la longitud de onda de de Broglie  $\lambda_{dB}$  del estado base de una partícula en un pozo de potencial. Al igual que [Matos & Ureña-López](#), encontraron un corte natural en el espectro de potencias suprimiendo de esta manera la formación de halos oscuros de baja masa. Además, realizando una simulación numérica en 1-D concluye que las fluctuaciones de este tipo de materia difusa con tamaños  $L_{dif} \sim \lambda_{dB}$  darían lugar a halos con perfiles de densidad suavizados mientras que si  $L_{dif} \gg \lambda_{dB}$  se recuperan los perfiles picudos, tipo NFW, del modelo CDM. Como puede verse, el modelo SFDM en sus diferentes “sabores” empezó a competir seriamente con el modelo CDM, inclusive ofreciendo algunas ventajas sobre este, por lo que empezó una numerosa serie de estudios numéricos de este tipo de modelos a escalas galácticas.

[Lescougues et al. \(2002\)](#), [Arbey et al. \(2003\)](#), [Arbey \(2006\)](#) usaron un campo escalar complejo con un potencial cuártico  $m^2\Phi\Phi^\dagger + \lambda(\Phi\Phi^\dagger)^2$  y resolvieron las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon en la aproximación de campo débil para ajustar las curvas de rotación de galaxias enanas con una buena exactitud acotando la relación entre la masa de los bosones asociados a este campo y su parámetro de auto interacción a  $m^4/\lambda \sim 50 - 75$  eV<sup>4</sup>. Por otra parte, [Alcubierre et al. \(2002\)](#) desarrollaron un estudio numérico de las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon para el potencial escalar tipo-cosh propuesto por [Matos & Ureña-López \(2001\)](#)

---

encontrando que para la masa escalar ultra ligera  $m \sim 10^{-23}$  eV la masa crítica (1.35) de las configuraciones gravitacionales escalares resulta ser  $M_{cri} \sim 10^{12} M_{\odot}$  que es el tamaño típico de una galaxia como la Vía Láctea. Por otra parte, Guzmán & Ureña-López (2003, 2004), Guzmán & Ureña-López (2006) realizaron estudios con el sistema de ecuaciones SP resultantes de un tratamiento Post-Newtoniano a las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon. Encontraron las condiciones iniciales para las cuales un campo escalar puede formar una configuración gravitacional virial y estable. A través de su estudio, confirmaron que el proceso de virialización se lleva a cabo por un interesante proceso de “estallido” de campo escalar. Siguiendo estos estudios, Bernal & Guzmán (2006a,b) y Bernal et al. (2008) concluyeron que las configuraciones gravitacionales escalares en el estado base son estables bajo pequeñas perturbaciones no esféricas y que además resultan ser atractores a tiempos tardíos. Basados en este resultado, pudieron desarrollar simulaciones numéricas 2-D de la colisión frontal de dos de estas configuraciones encontrando que las halos escalares viriales tienen un comportamiento solitónico, es decir, durante la colisión las configuraciones de equilibrio interactúan gravitacionalmente durante un tiempo y posteriormente se atraviesan mutuamente sin modificar significativamente su perfil de densidad inicial. Este último resultado sugiere que la colisión de halos oscuros escalares podría explicar las observaciones del cúmulo bala que muestra una dinámica similar (Lee et al. 2008). Finalmente, Bernal et al. también pudieron ajustar las curvas de rotación de algunas galaxias con estas configuraciones escalares (ver también Böehmer & Harko 2007).

Podemos decir que el modelo de materia oscura escalar ha demostrado ser un modelo consistente y robusto tanto a escalas cosmológicas como galácticas (ver Magaña, Matos, Robles, & Suárez 2012, y sus referencias para una exhaustiva revisión de este modelo). Entre la amplia variedad de estudios recientes se pueden destacar los siguientes. Matos, Vázquez-González, & Magaña (2009) retomaron el potencial cuadrático y el potencial tipo cosh para investigar la dinámica cosmológica de un Universo FLRW conteniendo materia oscura escalar. A diferencia del estudio publicado por Matos & Ureña-López, evolucionaron numéricamente el sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon con la masa ultra ligera  $m \sim 10^{-23}$  eV a través de un *ansatz* para el parámetro de Hubble. Con esta aproximación encontraron que para ambos potenciales escalares, el Universo tiene una dinámica similar a la encontrada para el modelo CDM. Además, realizaron un primer estudio de la estabilidad de este modelo cosmológico a través del formalismo de sistemas dinámicos. Asimismo, en Rodríguez-Montoya, Magaña, Matos, & Pérez-Lorenzana (2010) se realizó un primer estudio de los efectos de la SFDM en las anisotropías de la CMB. Para realizar este estudio, los autores consideraron que la materia oscura puede ser descrita por un gas de bosones y mostraron, cualitativamente, que no hay diferencias significativas en el espectro de temperaturas debido a la naturaleza bosónica de estas partículas. Asimismo, encontraron que

## 1. INTRODUCCIÓN

---

una masa bosónica ultra ligera  $m \sim 10^{-22}$  eV es capaz de ajustar con buena precisión las anisotropías de la CMB y concluyeron que las variables físicas de estos bosones ultra ligeros son consistentes con un estado de condensación de Bose-Einstein. Este estudio fue extendido en [Rodríguez-Montoya et al. \(2011\)](#), en el cual plantearon que los efectos de la materia oscura fría y la caliente sobre las anisotropías de la CMB podrían ser explicados por un CBE y su nube de bosones térmicos. Para investigar esta hipótesis, consideraron que el condensado puede estar formado por un gas de bosones o de antibosones y realizaron un robusto análisis estadístico, usando las últimas observaciones del WMAP y las esperadas del satélite Planck, para imponer cotas sobre la masa de una partícula bosónica genérica. Para el caso de un gas de bosones obtuvieron que la masa bosónica debe cumplir  $m \lesssim 0.14$  eV y para un gas de antibosones  $m \lesssim 0.26$  eV.

En otro estudio reciente realizado por [Matos & Suárez \(2011a\)](#), nuevamente se consideró un potencial cuadrático con un término de auto interacción para estudiar la evolución cosmológica de la materia oscura escalar y sus fluctuaciones en el régimen lineal. A diferencia de los trabajos previos, ellos derivaron una versión hidrodinámica de las ecuaciones Einstein-Klein-Gordon a través de las transformaciones de Madelung. [Matos & Suárez](#) encontraron que para el caso sin auto interacción las perturbaciones escalares se comportan como las de materia oscura fría. Asimismo, mostraron que cuando el término de auto interacción es positivo las fluctuaciones escalares se amortiguan mientras que para el caso negativo sus resultados sugieren que las fluctuaciones escalares podrían colapsar y formar un CBE.

Por otra parte, [Robles & Matos \(2012\)](#) estudiaron el modelo SFDM a escalas galácticas usando la descripción hidrodinámica de las ecuaciones Einstein-Klein-Gordon. A partir de este formalismo matemático, derivaron expresiones para los perfiles de densidad de halos oscuros escalares y, por lo tanto, para la velocidad circular, con los cuales pudieron ajustar con buena precisión las curvas de rotación de varias galaxias de bajo brillo superficial y de baja masa. En esta misma dirección, [Lora et al. \(2012\)](#) desarrollaron simulaciones de  $N$ -cuerpos para modelar el sistema de la galaxia enana Osa Menor y su grupo estelar. Mediante el sistema de ecuaciones SP construyeron configuraciones gravitacionales escalares, con y sin auto interacción, para modelar el halo oscuro de Osa menor mientras que el grupo estelar fue modelado con un sistema de  $N$  partículas con y sin auto gravedad. Como ya se mencionó, los halos escalares tienen un perfil de densidad suavizado y su radio de *core* está estrechamente relacionado con la masa de la partícula bosónica. Dado que el cúmulo estelar está sumergido en el halo de Osa Menor, este sufrirá efectos de mezclado y eventualmente podría ser destruido. Así, investigaron los tiempos de destrucción del grupo estelar de la Osa Menor para proporcionar cotas a la masa de los bosones asociados con las configuraciones gravitacionales escalares. Además desarrollaron un novedoso estudio de la

---

fricción dinámica de los cúmulos de la galaxia Fornax debido a la presencia de un campo escalar. Finalmente, de estos efectos dinámicos a escalas galácticas, [Lora et al.](#) encontraron que la masa del bosón campo escalar para el caso sin auto interacción debe cumplir  $0.3 \times 10^{-22} \text{ eV} < m < 3 \times 10^{-22} \text{ eV}$  y para el caso de auto interacciones grandes  $m^4/\lambda \lesssim 0.55 \times 10^3 \text{ eV}^4$  que es consistente con los valores encontrados por otros autores.

Finalmente, todos estos resultados obtenidos con el modelo SFDM sugieren que el potencial escalar cuadrático es el más favorecido y que la masa del bosón asociado al campo escalar debe ser ultra ligera en un intervalo  $10^{-24} < m < 10^{-22} \text{ eV}$  siendo este el único parámetro libre a fijar en el modelo. Así, una vez fijada la masa  $m$  debe ser posible explicar los fenómenos astrofísicos tanto a escalas galácticas como cosmológicas.

### 1.5.3. Aciertos

De los diversos estudios descritos en la breve reseña histórica del modelo de materia oscura escalar se pueden resumir los siguientes aciertos del modelo

- Escalas Cosmológicas
  - La evolución cosmológica del Universo es similar a la del paradigma estándar y las densidades de las diferentes especies cosmológicas son consistentes con las estimaciones de las observaciones.
  - En el régimen lineal, las fluctuaciones escalares tiene un comportamiento creciente igual al de las perturbaciones de materia oscura fría.
  - El espectro de potencias de masas tiene un corte natural a escalas pequeñas por lo que se evita el problema del exceso de galaxias satélites propio del modelo CDM.
  - Ajusta con muy buena precisión el espectro de temperaturas de las anisotropías de la CMB.
  
- Escalas galácticas
  - Los halos escalares tienen una masa preferencial de virialización que corresponde a la masa de las galaxias espirales típicas.
  - Las curvas de rotación de galaxias de baja masa y de bajo brillo superficial se ajustan con muy buena precisión.

## 1. INTRODUCCIÓN

---

### 1.5.4. Dificultades

Aunque el modelo SFDM tiene los mismos aciertos que el paradigma estándar, inclusive resolviendo alguno de sus problemas, este podría acarrear algunas desventajas que por el momento no han sido exploradas. Algunas posibles son

- Las grandes estructuras escalares podrían ser inestables a tiempos menores a la edad del Universo.
- Dado que se desconoce como se llevarían a cabo otras posibles interacciones, además de la gravitacional, de este campo escalar con el resto de la materia y aunado al valor ultra ligero de su masa, podría resultar difícil hacer una detección directa.
- El hecho de que los halos escalares tienen un comportamiento solitónico cuando colisionan con otro podría implicar que haya un ajuste fino en las condiciones iniciales para lograr una fusión de dos halos escalares.

### 1.5.5. Motivación y objetivos de la tesis

Una gran cantidad de estudios muy diversos han explorado el modelo SFDM y lo posicionan como una alternativa viable al modelo CDM. Todavía, muchos aspectos del modelo no se han analizado a detalle. Por lo tanto, en esta tesis se profundiza sobre algunos aspectos cosmológicos del modelo. En el capítulo 2 revisamos brevemente la dinámica cosmológica de un Universo con materia oscura fría. Si bien en los estudios previos de la evolución de un Universo FLRW con materia oscura escalar se han derivado y/o ajustado las cotas de la masa bosónica, esta no se ha usado en las simulaciones numéricas. Por lo tanto, en el capítulo 3 retomamos el estudio de la dinámica cosmológica del modelo SFDM a través de simulaciones numéricas que consideran explícitamente la masa ultra ligera preferencial. En base al estudio realizado por [Suárez \(2008\)](#), en el capítulo 4 revisamos las ecuaciones que describen el crecimiento de perturbaciones escalares en el régimen lineal y las resolveremos numéricamente, nuevamente considerando el valor ultra ligero de la masa, con el objetivo de corroborar y confirmar los resultados previos de otros autores. En el capítulo 5 estudiamos el modelo de colapso esférico con materia oscura escalar para investigar los tiempos de colapso y virialización de los halos oscuros escalares. En el capítulo 6 realizamos el primer estudio de los efectos de la materia oscura escalar en las anisotropías de la CMB mediante la evolución de las ecuaciones acopladas de Einstein-Vlasov.

Finalmente, en el capítulo 7 presentamos las conclusiones de esta tesis así como también los posibles trabajos futuros que se pueden desarrollar con el modelo de materia oscura escalar.



# Capítulo 2

## Universo FLRW con materia oscura fría

### 2.1. Introducción

En este capítulo se estudiará la evolución cosmológica de un Universo FLRW para el modelo estándar CDM. Se considerará que el Universo de fondo contiene, además de materia oscura, las siguientes componentes de materia y energía: bariones, radiación, neutrinos y una constante cosmológica como energía oscura por simplicidad. Para realizar este análisis se hará uso del formalismo de sistemas dinámicos y se resolverán las ecuaciones de evolución analítica y numéricamente.

### 2.2. Ecuaciones de Friedmann para el modelo de concordancia

En esta sección se analizará la dinámica de un Universo de fondo para el modelo de concordancia donde la materia oscura es fría. Se considera un Universo de fondo plano, homogéneo e isotrópico que puede ser descrito por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (1.3) con curvatura  $K = 0$  y factor de escala  $a(t)$  (ver §1.1.2). Este Universo de fondo contiene materia oscura fría ( $x$ ), radiación ( $z$ ), neutrinos ( $\nu$ ), bariones ( $b$ ), y constante cosmológica ( $\Lambda$ ) como energía oscura. Se supondrá que cada especie de este Universo se puede modelar por un fluido perfecto con una ecuación de estado barotrópica de la forma  $P = (\gamma - 1)\rho$ . Recuérdese que  $\rho$  es la densidad de energía de la especie cosmológica,  $P$  su presión y  $\gamma$  es una constante llamada índice barotrópico, cuyos valores se encuentran en el intervalo  $0 \leq \gamma \leq 2$ . Por ejemplo, para la materia oscura fría y bariones  $\gamma_x = \gamma_b = 1$ , para radiación y neutrinos  $\gamma_z = \gamma_\nu = 4/3$ , y finalmente

## 2. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA FRÍA

---

para una constante cosmológica  $\gamma_\Lambda = 0$ .

El sistema que describe este Universo está dado por la ecuación de Friedmann (1.12a) para diversas especies cosmológicas

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \sum_{\gamma} \rho_{\gamma}, \quad (2.1)$$

y la ecuación de conservación de energía

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\gamma} + 3H(\rho_{\gamma} + P_{\gamma}), \\ \dot{P}_{\gamma} + 3H\gamma\rho_{\gamma} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

siendo  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $H \equiv \dot{a}/a$  es el parámetro de Hubble, y el punto sobre una variable indica la derivada con respecto al tiempo cosmológico. La dinámica de este Universo queda determinada al encontrar el parámetro de Hubble y la densidad de energía de las 5 especies cosmológicas en términos del factor de escala  $a$ . Así, tomando los valores correspondiente de  $\gamma$  en la ecuación de continuidad, las ecuaciones (2.1) y (2.2) que describen la dinámica del Universo de fondo resultan

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (\rho_x + \rho_b + \rho_z + \rho_\nu + \rho_\Lambda), \quad (2.3)$$

$$\dot{\rho}_x + 3H\rho_x = 0, \quad (2.4a)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0. \quad (2.4b)$$

$$\dot{\rho}_z + 4H\rho_z = 0, \quad (2.4c)$$

$$\dot{\rho}_\nu + 4H\rho_\nu = 0, \quad (2.4d)$$

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0. \quad (2.4e)$$

En las siguientes subsecciones se explicará con detalle como resolver el sistema de ecuaciones anterior y así obtener el comportamiento de cada componente del Universo a lo largo de toda su evolución cosmológica.

### 2.2.1. Sistema de ecuaciones adimensional

En el sistema natural de unidades, la densidad de energía tiene unidades  $[\rho] = [\text{eV}^4]$ , el parámetro de Hubble  $[H] = [\text{eV}]$  y  $[\kappa] = [\text{eV}^{-1}]$ , por lo tanto, para resolver el sistema de ecuaciones (2.3) y (2.4) se proponen las siguientes variables adimensionales

---


$$\begin{aligned}
x &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_x}}{H}, & b &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_b}}{H}, \\
z &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_z}}{H}, & \nu &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_\nu}}{H}, \\
l &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_\Lambda}}{H}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Con estas nuevas variables, la ecuación de evolución (2.4) para cada especie del Universo de fondo se puede escribir como una de ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Para obtener este sistema adimensional, primeramente se calcula la derivada temporal de las variables propuestas, en este caso se iniciará con la variable  $x$ . Así tenemos que

$$\dot{x} = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \left( \frac{\dot{\rho}_x}{2\sqrt{\rho_x}H} - \sqrt{\rho_x} \frac{\dot{H}}{H^2} \right). \tag{2.6}$$

Ahora, de la ecuación (2.4a) tenemos que  $\dot{\rho}_x = -3H\rho_x$ , que sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$\dot{x} = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \left( -\frac{3}{2}\sqrt{\rho_x} - \sqrt{\rho_x} \frac{\dot{H}}{H^2} \right). \tag{2.7}$$

De la definición  $x = \kappa\sqrt{\rho_x}/\sqrt{3}H$  (ec. 2.5) se tiene que  $\sqrt{\rho_x} = \sqrt{3}xH/\kappa$ , por lo que la ecuación (2.7) resulta

$$\dot{x} = -\frac{3}{2}xH - xH \frac{\dot{H}}{H^2}. \tag{2.8}$$

El término  $\dot{H}/H^2$  se puede calcular derivando la ecuación de Friedmann (2.3) con respecto al tiempo

$$2H\dot{H} = \frac{\kappa^2}{3} (\dot{\rho}_x + \dot{\rho}_z + \dot{\rho}_\nu + \dot{\rho}_b), \tag{2.9}$$

donde las derivadas temporales de cada componente están dadas por el sistema de ecuaciones (2.4). Si se sustituyen en la ecuación anterior se llega a

$$2H\dot{H} = \frac{\kappa^2}{3} (-3H\rho_x - 4H\rho_z - 4H\rho_\nu - 3H\rho_b). \tag{2.10}$$

Eliminando el factor común  $H$  en ambos lados de la igualdad anterior y dividiendo entre  $H^2$  se obtiene

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\kappa^2}{3} \left( -\frac{3}{2}\rho_x - \frac{4}{2}\rho_z - \frac{4}{2}\rho_\nu - \frac{3}{2}\rho_b \right). \tag{2.11}$$

## 2. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA FRÍA

---

Ahora, si en la última ecuación se sustituyen las definiciones dadas en (2.5), se obtiene que

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}\Pi, \quad (2.12)$$

donde se ha definido la función  $\Pi$  como

$$\Pi \equiv x^2 + b^2 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{4}{3}\nu^2. \quad (2.13)$$

Finalmente, la ecuación (2.8) se puede escribir como

$$\dot{x} = \frac{3}{2}\Pi xH - \frac{3}{2}xH = \frac{3}{2}(\Pi - 1)xH. \quad (2.14)$$

Nótese que la ecuación anterior aún no es adimensional debido a la presencia del parámetro de Hubble  $H$  que tiene unidades de  $\text{T}^{-1}$ . Para eliminar  $H$  de esta ecuación cambiamos las derivadas con respecto al tiempo por derivadas con respecto al número de *e-foldings*  $N$  definido como  $N \equiv \ln a$ . Las derivadas con respecto a  $N$  se denotarán con una prima ' sobre las variables, es decir  $\xi' \equiv \frac{d\xi}{dN}$ . Es fácil mostrar que  $\frac{d}{dt} = H\frac{d}{dN}$ . Por lo tanto, la ecuación diferencial adimensional para la variable  $x$  está dada por

$$x' = \frac{3}{2}(\Pi - 1)x. \quad (2.15)$$

Análogamente, se puede obtener una ecuación diferencial para cada variable definida en (2.5). Por lo tanto, el sistema de ecuaciones adimensional para el Universo de fondo resulta

$$x' = \frac{3}{2}(\Pi - 1)x, \quad (2.16a)$$

$$b' = \frac{3}{2}(\Pi - 1)b, \quad (2.16b)$$

$$z' = \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)z, \quad (2.16c)$$

$$\nu' = \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)\nu, \quad (2.16d)$$

$$l' = \frac{3}{2}\Pi l, \quad (2.16e)$$

$$\Pi = x^2 + b^2 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{4}{3}\nu^2. \quad (2.16f)$$

Nótese que las ecuaciones diferenciales del sistema anterior son ecuaciones de primer orden no lineales acopladas. La no linealidad es debida a que la función

---

$\Pi$  contiene términos cuadráticos de las variables del sistema. Como ejemplo, en la ecuación (2.16a) se tendría un término cúbico en  $x$ . Además, el sistema de ecuaciones (2.16) es un sistema dinámico autónomo, es decir, el lado derecho de las ecuaciones del sistema no contiene términos que dependan explícitamente de la variable independiente, en este caso  $N$ . Dado que (2.16) es un sistema dinámico autónomo, se puede resolver analíticamente y numéricamente sin mucha dificultad.

Recuérdese que el parámetro de densidad para una componente  $i$  se define como  $\Omega_i \equiv \rho_i / \rho_{cri}$ , donde  $\rho_{cri}$  es la densidad crítica definida como  $\rho_{cri} \equiv 3H^2 / \kappa^2$ . Así, en términos de las variables adimensionales, los parámetros de densidad para las especies cosmológicas del Universo resultan

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= x^2, \\
\Omega_b &= b^2, \\
\Omega_z &= z^2, \\
\Omega_\nu &= \nu^2, \\
\Omega_\Lambda &= l^2.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Dado que se ha supuesto que el Universo es plano, el contenido total de materia energía en el Universo a cada tiempo cosmológico debe cumplir la igualdad

$$\Omega_{Tot} = \Omega_x + \Omega_b + \Omega_z + \Omega_\nu + \Omega_\Lambda = 1. \tag{2.18}$$

Por lo tanto, la ecuación de Friedmann (2.3) se puede reescribir como una ecuación de conservación que en términos de las nuevas variables resulta

$$F \equiv x^2 + b^2 + z^2 + \nu^2 + l^2 = 1. \tag{2.19}$$

Esta ecuación de conservación será de gran importancia al momento de obtener una solución numérica del sistema (2.16), ya que ésta se tiene que satisfacer a lo largo de toda la evolución. Así, para una evolución numérica con cierta resolución se tiene que cumplir que  $F \approx 1$ . Mientras mayor sea la resolución menor será el error numérico y  $F$  se acercara más a 1. Por otra parte, para que una solución numérica obtenida con determinado algoritmo sea confiable, es necesario realizar pruebas de convergencia. Una prueba de convergencia consiste en realizar evoluciones numéricas con diferentes resoluciones revisando que alguna ecuación de conservación se satisfaga cada vez con menor error numérico. Por lo tanto, se usará la ecuación de conservación (2.19) para realizar las pruebas de convergencia de los diferentes algoritmos usados en esta tesis.

### 2.3. Solución analítica

Dado que se ha obtenido el sistema dinámico (2.16) para la evolución del Universo de fondo, se puede encontrar una solución analítica de la siguiente manera. Si se toma la ecuación (2.12) y se cambia al espacio de *e-folding*  $N$  se tiene que

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}\Pi \rightarrow \frac{H'}{H} = -\frac{3}{2}\Pi. \quad (2.20)$$

Esta última ecuación se puede expresar como

$$(\ln H)' = -\frac{3}{2}\Pi. \quad (2.21)$$

Ahora, si se sustituye la ecuación (2.21) en la ecuación diferencial (2.16a) para la materia oscura fría se obtiene que

$$x' = -(\ln H)'x - \frac{3}{2}x, \quad (2.22)$$

la cual, también se puede escribir como

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dN} = -\frac{d(\ln H)}{dN} - \frac{3}{2}. \quad (2.23)$$

Integrando la ecuación anterior se tiene que

$$\ln x = -\ln H - \frac{3}{2}N + C_1, \quad (2.24)$$

donde  $C_1$  es una constante que se puede determinar tomando como referencia la época actual. Dado que por convención se tiene que el factor de escala al día de hoy,  $a_0$ , es igual a la unidad, entonces el número de *e-foldings*  $N|_{a_0} = 0$ ,  $x|_{a_0} = x_0$  y  $H|_{a_0} = H_0$ , donde  $x_0$  y  $H_0$  están dados por las observaciones cosmológicas más recientes, como por ejemplo, las de WMAP-7a. Así,  $C_1$  se puede calcular como

$$C_1 = \ln x_0 + \ln H_0 = \ln(x_0 H_0). \quad (2.25)$$

Una vez determinada la constante  $C_1$ , la ecuación (2.24) resulta como

$$\begin{aligned} \ln x &= -\ln H - \frac{3}{2}N + \ln(x_0 H_0), \\ \ln x &= \ln\left(\frac{x_0 H_0}{H}\right) - \frac{3}{2}N. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aplicando las leyes de los logaritmos y exponenciales, la expresión para calcular  $x$  finalmente es

$$x = \frac{x_0 H_0}{H} e^{-3N/2}. \quad (2.27)$$

---

Análogamente, se pueden obtener expresiones para cada una de las variables de las componentes del Universo de fondo y resultan como

$$b = \frac{b_0 H_0}{H} e^{-3N/2}, \quad (2.28)$$

$$z = \frac{z_0 H_0}{H} e^{-2N}, \quad (2.29)$$

$$\nu = \frac{\nu_0 H_0}{H} e^{-2N}, \quad (2.30)$$

$$l = \frac{l_0 H_0}{H}. \quad (2.31)$$

Nótese que las expresiones (2.27)-(2.31) aún dependen del parámetro de Hubble  $H$ , por lo que es necesario obtener una expresión analítica para  $H$  en función de  $N$ . Esto se puede hacer de la siguiente manera. Primeramente, partamos de la ecuación (2.20)  $H'/H = -3\Pi/2$  y usemos que  $\Pi = x^2 + b^2 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{4}{3}\nu^2$  (ec. 2.13)

$$\frac{H'}{H} = -\frac{3}{2} \left( x^2 + b^2 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{4}{3}\nu^2 \right). \quad (2.32)$$

Ahora, sustituyamos  $x(N, H)$ ,  $b(N, H)$ ,  $z(N, H)$  y  $\nu(N, H)$  (ecs. 2.27-2.30) en la ecuación (2.32)

$$\begin{aligned} \frac{H'}{H} &= -\frac{3}{2} \frac{H_0^2}{H^2} \left( x_0^2 e^{-3N} + b_0^2 e^{-3N} + \frac{4}{3} z_0^2 e^{-4N} + \frac{4}{3} \nu_0^2 e^{-4N} \right), \\ H dH &= -\frac{3}{2} H_0^2 \left( x_0^2 e^{-3N} + b_0^2 e^{-3N} + \frac{4}{3} z_0^2 e^{-4N} + \frac{4}{3} \nu_0^2 e^{-4N} \right) dN. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Integrando la ecuación anterior, se llega a la expresión

$$H^2 = H_0^2 \left( x_0^2 e^{-3N} + b_0^2 e^{-3N} + z_0^2 e^{-4N} + \nu_0^2 e^{-4N} \right) + C_2, \quad (2.34)$$

donde  $C_2$  es una constante que se puede determinar al evaluar la expresión al día de hoy, donde  $N|_{a_0} = 0$ , resultando

$$H_0^2 = H_0^2 \left( x_0^2 + b_0^2 + z_0^2 + \nu_0^2 \right) + C_2, \quad (2.35)$$

usando la ecuación de conservación (ec. 2.19) evaluada al día de hoy  $x_0^2 + b_0^2 + z_0^2 + \nu_0^2 + l_0^2 = 1$ , se obtiene que  $C_2 = H_0^2 l_0^2$ . Por lo tanto, la ecuación (2.34) se puede escribir como

$$H^2 = H_0^2 \left( x_0^2 e^{-3N} + b_0^2 e^{-3N} + z_0^2 e^{-4N} + \nu_0^2 e^{-4N} + l_0^2 \right). \quad (2.36)$$

## 2. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA FRÍA

---

Finalmente, se puede hacer uso de que  $\Omega_x = x^2$ ,  $\Omega_b = b^2$ ,  $\Omega_z = z^2$ ,  $\Omega_\nu = \nu^2$  y  $\Omega_l = l^2$  (ec. 2.17) para escribir (2.36) en términos de los parámetros de densidad de cada componente al día de hoy resultando

$$H = H_0 \left( \Omega_{x_0} e^{-3N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0} \right)^{1/2}. \quad (2.37)$$

La relevancia de esta última ecuación reside en que permite calcular la tasa de expansión de nuestro Universo para cualquier época en términos de cantidades que se pueden determinar mediante observaciones cosmológicas al día de hoy. Por lo tanto, ahora que se tiene una expresión analítica para  $H$ , es posible escribir la expresión completa de la evolución de cada una de las variables adimensionales propuestas en (2.5). Así las ecuaciones (2.27)-(2.31) llegan a ser

$$x = \frac{\sqrt{\Omega_{x_0}} e^{-3N/2}}{(\Omega_{x_0} e^{-3N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}, \quad (2.38)$$

$$b = \frac{\sqrt{\Omega_{b_0}} e^{-3N/2}}{(\Omega_{x_0} e^{-3N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}, \quad (2.39)$$

$$z = \frac{\sqrt{\Omega_{z_0}} e^{-2N}}{(\Omega_{x_0} e^{-3N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}, \quad (2.40)$$

$$\nu = \frac{\sqrt{\Omega_{\nu_0}} e^{-2N}}{(\Omega_{x_0} e^{-3N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}, \quad (2.41)$$

$$l = \frac{\sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}}{(\Omega_{x_0} e^{-3N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}. \quad (2.42)$$

### 2.3.1. Resultados

En la subsección anterior se pudieron obtener soluciones analíticas para el caso de un Universo de fondo donde se ha supuesto que cada componente de materia energía se comporta como un fluido perfecto. Esta solución será de gran importancia para las secciones posteriores ya que con esta se pueden poner a prueba los diferentes algoritmos que se desarrollarán para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales que describen los diversos modelos cosmológicos que se pretenden estudiar. Para obtener la evolución de los parámetros de densidad de cada componente, basta con evaluar las funciones  $x$ ,  $b$ ,  $z$ ,  $\nu$  y  $l$  desde épocas muy tempranas del Universo hasta el día de hoy. Cuando el factor de escala es  $a \sim 10^{-5}$ , la radiación es la componente dominante del Universo. Para  $a < 10^{-5}$ , la componente dominante del Universo sigue siendo la radiación y no hay cambios significativos en la evolución cosmológica del Universo. Por lo tanto, se evaluarán las ecuaciones (2.38)-(2.42) desde  $a = 1 \times 10^{-6}$ . Para los parámetros de densidad



al día de hoy  $\Omega_{x_0}$ ,  $\Omega_{b_0}$ ,  $\Omega_{z_0}$ ,  $\Omega_{\nu_0}$ ,  $\Omega_{\Lambda_0}$  y el parámetro de Hubble actual  $H_0$ , se usarán las mejores estimaciones dados por los resultados del satélite WMAP después de 7 años (Komatsu et al. 2009, 2011) de mediciones. Usando los valores (1.18) de la sección §1.2, la evolución de las componentes del Universo con respecto al factor de escala se muestra en la figura 2.1.

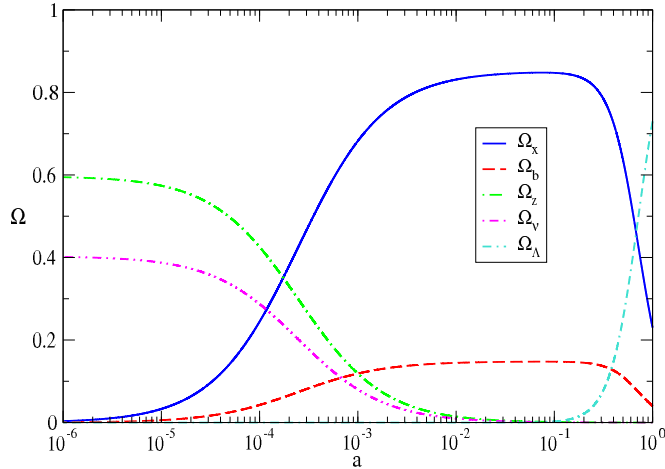


Figura 2.1: Evolución de los parámetros de densidad de las componentes del Universo obtenidas con las funciones (2.38)-(2.42) para el modelo CDM.

De esta gráfica, se puede concluir que la hipótesis de que todas las componentes del Universo se comportan como fluidos perfectos es una buena suposición ya que se obtiene el comportamiento esperado de la historia de expansión del Universo (Padmanabhan 1993, Liddle & Lyth 2000). Para épocas tempranas, cuando  $a \sim 10^{-6}$ , la componente dominante del Universo es la radiación, y en segundo lugar los neutrinos. Esta etapa de la evolución del Universo es conocida como la época de la radiación dominante. La expansión general del Universo continúa y entonces hay una época donde la densidad de energía de la radiación es igual a la de la materia oscura fría ( $\Omega_{x,ig} = \Omega_{z,ig}$ ). Este tiempo es conocido como la época de la igualdad (*ig*) y ocurre aproximadamente cuando el factor de escala es  $a \sim 10^{-4}$ . Después de la época de la igualdad, la densidad de la materia oscura empieza a dominar la expansión del Universo. Esta era es conocida como la época dominada por materia. Durante la época dominada por materia se da el proceso de formación de estructuras en el Universo, dando lugar a la formación de halos oscuros, que posteriormente atraerán gravitacionalmente a la materia bariónica para dar origen a las galaxias y cúmulos de galaxias que se observan al día de hoy. Otra etapa de gran interés en la evolución cosmológica de nuestro Universo es conocida como la época de la recombinación, durante la cual, los electrones se recombinan (después

## 2. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA FRÍA

---

de la última dispersión entre fotones y electrones) con la núcleos atómicos libres, dejando como huella de esta interacción fluctuaciones en la temperatura de la CMB. Esta época ocurre alrededor de  $a \sim 10^{-3}$ . Finalmente, la evolución del Universo empieza a ser dominada por la constante cosmológica que se supone como la responsable de su expansión acelerada observada actualmente. Esta época inicia en  $a \sim 10^{-1}$  hasta el día de hoy y es conocida como la época dominada por la constante cosmológica  $\Lambda$ .

### 2.4. Solución numérica

Para el modelo CDM se pudo obtener una solución analítica, sin embargo, esto no es posible para la mayoría de los modelos cosmológicos y es necesario recurrir a los métodos numéricos. Aprovechando que tenemos la solución analítica del sistema (2.16), ahora se obtendrá su solución numérica para comparar ambas soluciones y determinar si los métodos implementados funcionan correctamente. El sistema que se quiere resolver se reduce a un problema numérico de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. Debido a que en Cosmología comúnmente se obtienen sistemas dinámicos no lineales se adoptarán el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) (Press et al. 2002) y el método Adams-Bashforth-Moulton (ABM) (apéndice B) que son algoritmos adecuados para resolver este tipo de sistemas. Las condiciones iniciales se fijan en la época actual, es decir, desde  $a_0 = 1$  y se integra hacia épocas tempranas del Universo hasta  $a = 1 \times 10^{-6}$ . Las condiciones iniciales requeridas son los parámetros de densidad de cada componente del Universo, así como también el parámetro de Hubble por lo que se tomarán nuevamente los valores (1.18) recomendados por las observaciones del satélite WMAP-7a dadas en §1.2

#### 2.4.1. Análisis de convergencia y resultados

Una vez que se han dado las condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones (2.16), se resuelve numéricamente con dos métodos de cuarto orden, el método RK4 y el método ABM. La integración numérica se llevará a cabo desde  $N = 0$  ( $a_0 = 1$ ) hasta épocas tempranas del Universo donde  $N = -13.80$  ( $a = 1 \times 10^{-6}$ ).

Antes de realizar cualquier evolución numérica, es necesario realizar una prueba de convergencia de nuestros algoritmos para tener la certeza de que nuestro código lleva la solución numérica a la solución analítica en el límite continuo. Con esta prueba de convergencia se pretende estimar el ritmo con el cual decrece el error numérico de nuestro código, ya que no es suficiente saber que al aumentar la resolución  $\Delta_N$ , el error en nuestra solución numérica decrece. El ritmo con el que decrece el error conforme aumenta la resolución debe ser el esperado en

términos de la resolución. Por ejemplo, para un algoritmo de segundo orden los errores esperados son de este mismo orden y para un algoritmo de cuarto orden, los errores deben ser de orden cuatro.

Para realizar la prueba de convergencia, primeramente definimos el error global numérico  $\varepsilon$  a cierta resolución  $\Delta_N$  como

$$\varepsilon_{\Delta_N} = \|f_{\Delta_N} - f_0\|, \quad (2.43)$$

donde  $f_0$  es la solución analítica y  $f_{\Delta_N}$  es una solución numérica calculada con cierta resolución  $\Delta_N$ . Con lo anterior, el factor de convergencia  $f_c$  se puede definir como

$$f_c = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad (2.44)$$

donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son los errores de dos soluciones numéricas calculadas con una resolución de  $\Delta_N$  y  $\Delta_{N/2}$  respectivamente. Para un algoritmo de segundo orden, el factor de convergencia  $f_c$  es igual a 4 y para algoritmos de cuarto orden  $f_c = 16$ .

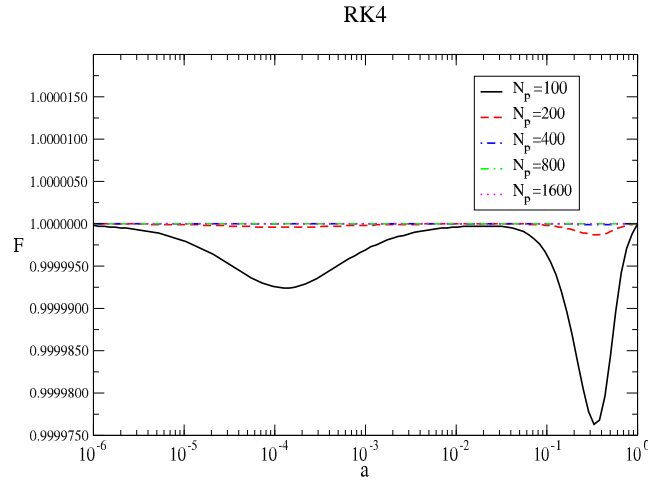


Figura 2.2: Valor de  $F$  (ec. 2.19) obtenido al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo RK4 para cinco diferentes resoluciones.

Comúnmente, para realizar la prueba de convergencia se calcula numéricamente la evolución de una ecuación de ligadura (o una cantidad escalar) para diferentes resoluciones. Para nuestro problema, usaremos la ecuación de conservación (2.19). Se usarán cinco resoluciones para ilustrar el orden de los errores encontrados tanto en el algoritmo RK4 como en el ABM y posteriormente realizar la prueba de convergencia para ambos. Para la primera resolución se usará un número de puntos de integración  $N_p = 100$  correspondiente a  $\Delta_N = 0.138155$ , la segunda con un número de puntos de integración  $N_p = 200$ , que corresponde a  $\Delta_N = 0.069078$ , la tercera con  $N_p = 400$ , cuya  $\Delta_N = 0.034539$ , la cuarta con

## 2. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA FRÍA

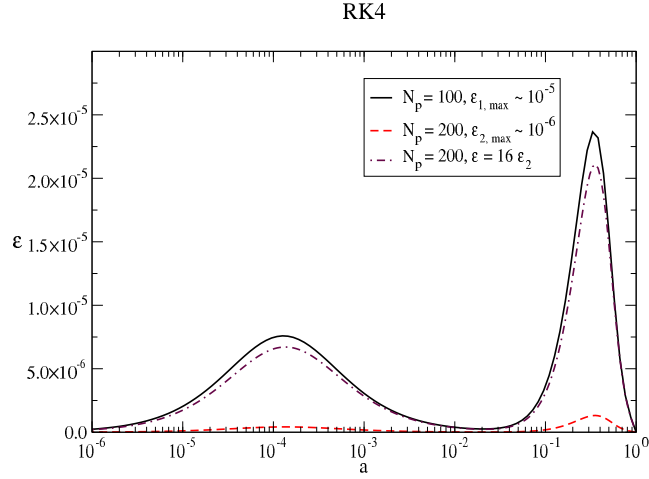


Figura 2.3: Evolución numérica del error  $\varepsilon$  dado en la ecuación (2.43) al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo RK4 para dos diferentes resoluciones. Se puede observar que al multiplicar el error obtenido con el doble de resolución por un factor 16 se obtiene la curva con la resolución más baja.

$N_p = 800$ , cuya  $\Delta_N = 0.017269$  y finalmente con  $N_p = 1600$ , cuya  $\Delta_N = 0.008635$ . Primeramente, se hará la prueba de convergencia del método RK4. El valor de  $F$  para estas diferentes cinco resoluciones con el método RK4 se muestran en la figura 2.2. En la gráfica se puede observar que al aumentar el número de puntos, es decir, la resolución, el error en la ecuación de conservación disminuye. También se puede notar que a partir de  $N_p \sim 1000$ , la solución numérica para  $F$  converge al valor esperado 1. Por lo tanto, para que el resultado numérico sea confiable, se tiene que usar un número de puntos mayor a 1000. El factor de convergencia  $f_c$  se puede calcular tomando las dos primeras integraciones numéricas con  $N_p = 100$  ( $f_1$ ) y  $N_p = 200$  ( $f_2$ ) y posteriormente calcular los errores  $\varepsilon$  correspondientes. Los errores numéricos para estas dos integraciones se muestran en la figura 2.3. De la gráfica se puede notar que el error máximo para la resolución más baja ( $N_p = 100$ ) es del orden de  $\sim 10^{-5}$  y para el doble de resolución ( $N_p = 200$ ) el error máximo es del orden de  $\sim 10^{-6}$ . Si se multiplican los errores obtenidos con esta última resolución por un factor 16, se obtiene la curva de la evolución del error llevada a cabo con la primera resolución. Por lo tanto se puede concluir que el factor de convergencia es 16 como se esperaba para un integrador numérico de cuarto orden. Con el estudio de convergencia del código numérico con el algoritmo RK4, ahora se sabe que los resultados serán confiables si se realiza la integración numérica con un número de puntos  $N_p > 1000$ . Así, para el cálculo numérico de las cantidades físicas del sistema (2.16), se realiza una integración numérica con un número de puntos  $N_p = 500,000$  que se traduce en una resolución  $\Delta_N \sim 2.8 \times 10^{-5}$ . En la

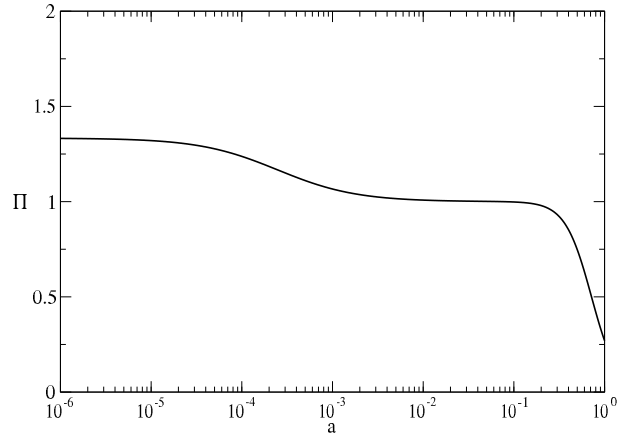


Figura 2.4: Evolución de la función  $\Pi$  al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo RK4.

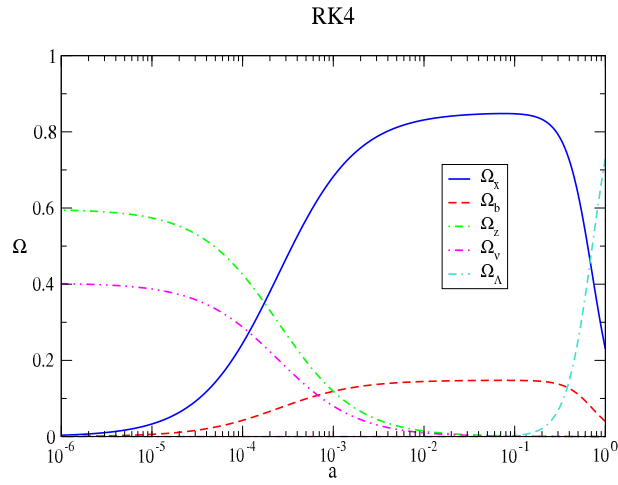


Figura 2.5: Evolución cosmológica de los parámetros de densidad (2.17) de las componentes del Universo obtenida al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo RK4.

## 2. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA FRÍA

---

figura 2.4 se muestra la evolución de la función  $\Pi = x^2 + b^2 + 4(z^2 + \nu^2)/3$  (eq. 2.13). En esta gráfica se observa que  $\Pi$  tiene un comportamiento decreciente conforme el factor de escala  $a$  aumenta. Esto es un reflejo de que, a épocas tempranas la radiación es la componente dominante del Universo por lo que  $\Pi \sim 4(z^2 + \nu^2)/3$ . Cuando  $a = 1$ , la radiación es subdominante y aunque la materia no es la componente dominante, esta contribuye significativamente a la evolución del Universo por lo que  $\Pi \sim x^2 + b^2$ . Los resultados numéricos obtenidos para los parámetros de densidad  $\Omega$  se muestran en la figura 2.5. De esta gráfica se puede observar que la evolución, con respecto al factor de escala  $a$ , de los parámetros de densidad de las componentes del Universo obtenida con la integración numérica es casi idéntica a la evolución obtenida con la solución analítica mostrada en la figura 2.1. Al comparar la evolución de una sola componente en una misma gráfica, por ejemplo, para la evolución del parámetro de densidad de la materia oscura fría,  $\Omega_x$ , se puede ver que las dos curvas se superponen debido a que son casi iguales como se muestra en la figura 2.6. Esto mismo se puede hacer para cualquiera de las otras componentes y se obtendrá el mismo resultado. La evolución numérica converge a la solución analítica. Este hecho proporciona confiabilidad y certeza de que el algoritmo está funcionando adecuadamente. Con esto se puede concluir que el método RK4 se puede usar para resolver este tipo de sistemas dinámicos autónomos.

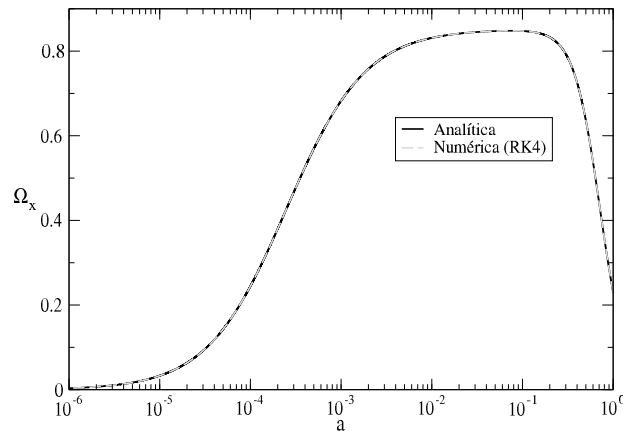


Figura 2.6: Solución analítica y numérica de  $\Omega_x$ . La línea continua en color negro es la obtenida con la solución analítica y la línea discontinua en color gris es la obtenida al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo RK4. Las dos curvas coinciden.

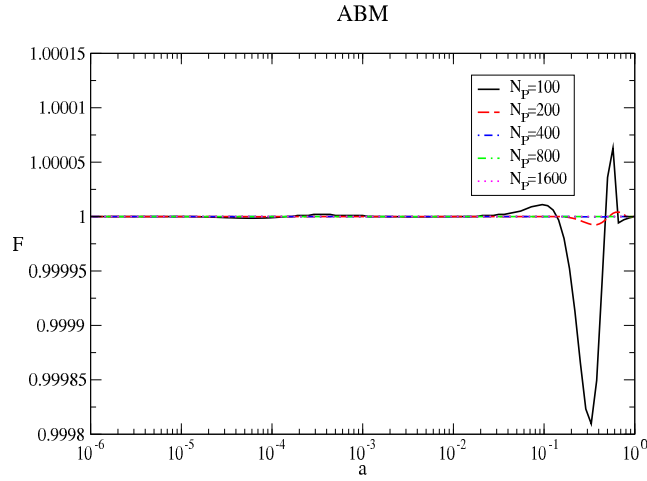


Figura 2.7: Evolución de  $F$  dada en la ecuación (2.19) al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo ABM para cinco diferentes resoluciones.

Análogamente, se puede realizar el estudio de convergencia para el método ABM. Para esto, se usarán las mismas resoluciones que para el caso del método RK4. La evolución de  $F$  para cinco resoluciones con el método ABM se muestran en la figura 2.7. Igualmente que para el caso del método RK4, se puede observar que al aumentar el número de puntos, es decir, la resolución, el error en la ecuación de conservación disminuye. También se puede notar que a partir de  $N_p \sim 1000$ , la solución numérica para  $F$  converge al valor esperado 1. Por lo tanto, para que el resultado numérico sea confiable, se tiene que usar un número de puntos mayor a 1000. Para este método, ABM, se tomarán las integraciones numéricas con número de puntos  $N_p = 200$  ( $f_1$ ) y  $N_p = 400$  ( $f_2$ ) para calcular el factor de convergencia  $f_c$  (en el caso de RK4 se usaron  $N_p = 100$  y  $N_p = 200$ ). Los errores numéricos para estas dos integraciones se muestran en la figura 2.8. De la gráfica se puede notar que el error máximo para la resolución más baja ( $N_p = 200$ ) es del orden de  $\varepsilon_1 \sim 10^{-6}$  y para el doble de resolución ( $N_p = 400$ ) el error máximo es del orden de  $\varepsilon_2 \sim 10^{-7}$ . Al multiplicar el error numérico obtenido con  $N_p = 400$  por un factor 16, se obtiene aproximadamente la curva del error obtenido con  $N_p = 200$ . Por lo tanto se puede concluir que el factor de convergencia es 16 como se esperaba para este integrador numérico de cuarto orden.

Una vez realizado el correspondiente estudio de convergencia para el método ABM, se puede llevar a cabo la evolución numérica de las ecuaciones que describen el Universo de fondo dado por las ecuaciones (2.16). Al igual que para el caso del método RK4, se toman como condiciones iniciales los valores dados en (1.18). Para asegurar que la integración numérica converga se usará un número de puntos  $N_p = 500,000$ , el resultado se muestra en la figura 2.9. Se puede ver que la

## 2. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA FRÍA

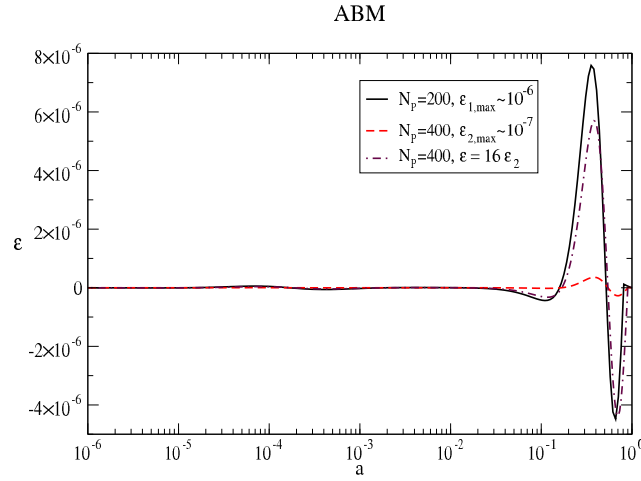


Figura 2.8: Evolución numérica del error  $\varepsilon$  dado en la ecuación (2.43) al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo ABM para dos diferentes resoluciones. Se puede observar que al multiplicar el error obtenido con el doble de resolución por un factor 16 se obtiene la curva con la resolución más baja.

evolución numérica obtenida con el método ABM para los parámetros de densidad  $\Omega$  de las componentes del Universo con respecto al factor de escala  $a$  es casi idéntica a la obtenida con el caso analítico y con el método RK4. La comparación de los tres casos para el parámetro de densidad de materia oscura se muestra en la figura 2.10. Se observa que no hay diferencia significativa para los parámetros de densidad obtenidos con los algoritmos RK4 y ABM, por lo que la dinámica de la función  $\Pi$  con el método ABM es igual a la mostrada en la figura 2.4. Para el caso del método ABM se observa que la evolución de la ecuación de conservación dada por  $F$  ofrece menos errores para factores de escala pequeños, que los obtenidos con el método RK4. Sin embargo, esto no es concluyente acerca de que método es mejor por lo cual se pueden usar indistintamente para el caso del modelo de materia oscura fría. Dado que los sistemas de ecuaciones que rigen las dinámica del Universo con otros modelos cosmológicos (por ejemplo, el modelo de materia oscura escalar) podrían ser complicados y altamente no lineales, se usarán los dos métodos para intentar obtener una solución numérica y para corroborar los resultados.

En la siguiente sección se hará el estudio de la dinámica de un Universo de fondo con un modelo de materia oscura escalar y se aplicarán los métodos descritos en esta sección para obtener soluciones numéricas de las ecuaciones.



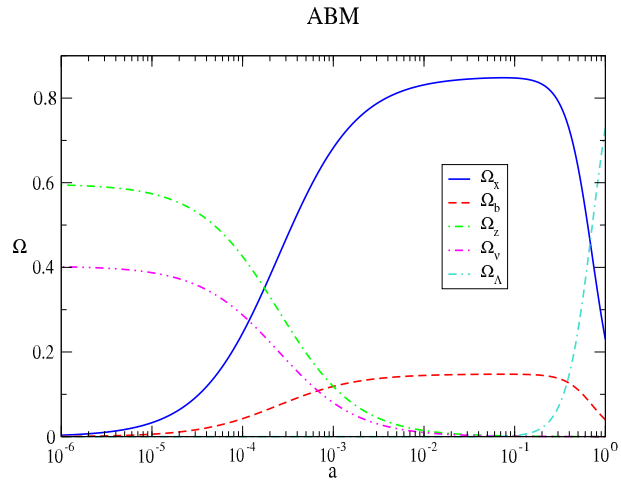


Figura 2.9: Evolución cosmológica de los parámetros de densidad (2.17) de las componentes del Universo obtenida al resolver numéricamente el sistema (2.16) con un algoritmo ABM.

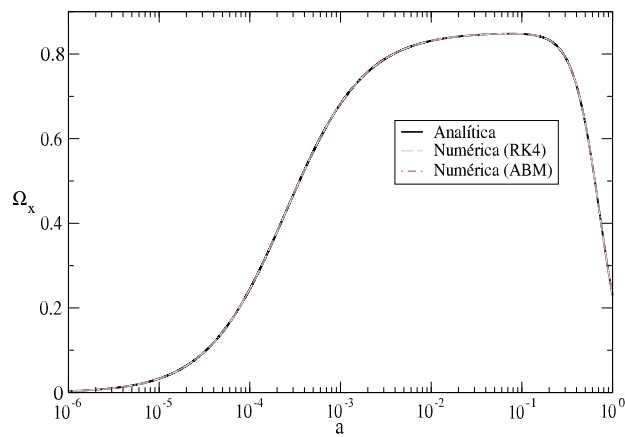


Figura 2.10: Comparación de la evolución obtenida para  $\Omega_x$  con el método RK4, el método ABM y el caso analítico. Se observa que las soluciones se superponen, es decir, son aproximadamente idénticas.

## 2. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA FRÍA

---

# Capítulo 3

## Universo FLRW con materia oscura escalar

### 3.1. Introducción

En el capítulo anterior se revisó la evolución de un Universo de fondo con el modelo estándar CDM. También se hizo un análisis sobre los algoritmos empleados para resolver numéricamente el sistema dinámico autónomo no lineal que surge de las ecuaciones de Friedmann y de las ecuaciones de continuidad de las distintas especies cosmológicas.

En este capítulo se estudiará la evolución cosmológica de un Universo de fondo para el modelo SFDM y se comparará con el modelo estándar CDM. Se considerará que el Universo de fondo contiene, además de un campo escalar  $\Phi$  como materia oscura, las siguientes especies cosmológicas: bariones, radiación, neutrinos y una constante cosmológica como energía oscura por simplicidad. Se estudiarán dos casos del modelo SFDM. En el primer caso se propone un campo escalar sin potencial escalar, es decir  $V(\Phi) = 0$ , en el segundo se explorará un campo escalar con potencial cuadrático  $V(\Phi) = m^2\Phi^2/2$ . Para realizar este análisis se hará uso del formalismo de sistemas dinámicos y para el caso con potencial escalar nulo se resolverán las ecuaciones de evolución analítica y numéricamente. Para el caso del potencial escalar cuadrático, se obtendrá sólo una solución numérica Finalmente se discutirán las implicaciones cosmológicas del modelo de materia oscura escalar.

## 3.2. Ecuaciones de Friedmann para el modelo de materia oscura escalar

Como ya se describió en la sección 1.5, en el modelo SFDM se propone que un campo escalar  $\Phi$  acoplado mínimamente a la gravedad y con potencial escalar  $V(\Phi)$  es la materia oscura. Para estudiar la evolución cosmológica del Universo con este modelo se considera, al igual que para el modelo CDM, un Universo de fondo plano (con  $K = 0$ ), homogéneo e isótropico descrito por la métrica FLRW con factor de escala  $a(t)$ . Las especies cosmológicas de este Universo son: un campo escalar  $\Phi = \Phi(t)$  como materia oscura con un potencial escalar  $V = V(\Phi)$ , fotones (radiación) ( $z$ ), neutrinos ( $\nu$ ), bariones ( $b$ ) y por simplicidad suponemos que la energía oscura es una constante cosmológica  $\Lambda$ .

Para iniciar el análisis, se hace énfasis en las ecuaciones que describen las propiedades físicas de un campo escalar dadas en la sección §1.5.1. A partir del tensor de energía-momento  $T_\Phi$ , la densidad de energía escalar  $\rho_\Phi$  y la presión escalar  $P_\Phi$  están dados por las ecuaciones (1.30b) y (1.30c) respectivamente. Por otra parte, la evolución de la ecuación de estado (1.32) para un campo escalar será de gran relevancia para determinar cómo se comporta este tipo de materia. Si este campo escalar se comportara como materia oscura fría, la evolución temporal de  $\omega_\Phi$ , en promedio, tendería a cero. Por lo tanto, el estudio de esta cantidad será de gran interés.

Por otra parte, al igual que en el capítulo anterior, se considera que los bariones, los fotones, los neutrinos y la constante cosmológica se pueden modelar como fluidos perfectos con una ecuación de estado barotrópica de la forma  $P_\gamma = (\gamma - 1)\rho_\gamma$ , donde  $\gamma$  es una constante. Para los bariones  $\gamma_b = 1$ , para los fotones y los neutrinos  $\gamma_z = \gamma_\nu = 4/3$  y para la constante cosmológica  $\gamma_\Lambda = 0$ . La dinámica del campo escalar  $\Phi$  con potencial escalar  $V$  en un Universo con tasa de expansión  $H$  está regida por la ecuación de Klein-Gordon (1.31).

Así, la ecuación de Friedmann (2.1) para varias especies cosmológicas junto con la ecuación de Klein-Gordon y las ecuaciones de estado para todas las especies del Universo conforman el sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon que describe la dinámica del Universo con un modelo de materia oscura escalar y está dado por

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (\rho_\Phi + \rho_b + \rho_z + \rho_\nu + \rho_\Lambda), \quad (3.1a)$$

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V_{,\Phi} = 0, \quad (3.1b)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0, \quad (3.1c)$$

$$\dot{\rho}_z + 4H\rho_z = 0, \quad (3.1d)$$

$$\dot{\rho}_\nu + 4H\rho_\nu = 0, \quad (3.1e)$$

---


$$\dot{\rho}_\Lambda = 0, \quad (3.1f)$$

donde  $\kappa^2 \equiv 8\pi G$ ,  $H \equiv \dot{a}/a$  el parámetro de Hubble y la coma en el potencial escalar denota derivada con respecto al campo escalar. Sustituyendo la expresión para la densidad de energía escalar  $\rho_\Phi = \dot{\Phi}^2/2 + V(\Phi)$  (ec. 1.30b) en la ecuación de Friedmann (3.1a) el sistema resulta

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V + \rho_z + \rho_\nu + \rho_b + \rho_\Lambda \right). \quad (3.2a)$$

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V_{,\Phi} = 0, \quad (3.2b)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0, \quad (3.2c)$$

$$\dot{\rho}_z + 4H\rho_z = 0, \quad (3.2d)$$

$$\dot{\rho}_\nu + 4H\rho_\nu = 0, \quad (3.2e)$$

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0. \quad (3.2f)$$

La derivada temporal de la ecuación de Friedmann (3.2a) dividida entre  $H^2$  está dada por

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{\kappa^2}{2H^2} \left( \dot{\Phi}^2 + \frac{4}{3}\rho_z + \frac{4}{3}\rho_\nu + \rho_b \right). \quad (3.3)$$

Es interesante notar que la ecuación (3.3) es independiente del potencial escalar  $V$ . En la siguiente sección se definirán variables adimensionales con el propósito de obtener una solución numérica del sistema de ecuaciones (3.2) y (3.3).

### 3.2.1. Sistema de ecuaciones adimensional

Para obtener una solución numérica al sistema de ecuaciones (3.2) y (3.3), se proponen las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{\dot{\Phi}}{H}, & u &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{V}}{H}, \\ b &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_b}}{H}, & z &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_z}}{H}, \\ \nu &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_\nu}}{H}, & l &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_\Lambda}}{H}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Usando las definiciones (3.4), las ecuaciones (3.2) para la evolución del Universo de fondo se pueden reescribir como un sistema dinámico autónomo. Para esto, se calcula la derivada temporal de cada variable. Por ejemplo, para obtener la

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

---

ecuación diferencial adimensional para la variable  $x$  se tiene que

$$\dot{x} = \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \left( \frac{\ddot{\Phi}}{H} - \dot{\Phi} \frac{\dot{H}}{H^2} \right). \quad (3.5)$$

Si se usa la ecuación (3.2b) para despejar la segunda derivada temporal del campo escalar,  $\ddot{\Phi}$ , y después se sustituye en la ecuación anterior se obtiene

$$\dot{x} = \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \left( -3\dot{\Phi} - \frac{V_{,\Phi}}{H} - \dot{\Phi} \frac{\dot{H}}{H^2} \right), \quad (3.6)$$

$$\dot{x} = -3xH - \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{V_{,\Phi}}{H} - \frac{\dot{H}}{H^2} xH, \quad (3.7)$$

donde el primero y el último términos de la ecuación anterior se obtuvieron usando la definición de  $x = \kappa \dot{\Phi} / \sqrt{6}H$ . El factor  $\dot{H}/H^2$  está dado en la ecuación (3.3) y en términos de las variables adimensionales resulta

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2} \left( 2x^2 + b^2 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{4}{3}\nu^2 \right) \equiv \frac{3}{2}\Pi. \quad (3.8)$$

Dado que la ecuación (3.3) no depende del potencial escalar, la función  $\Pi = 2x^2 + b^2 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{4}{3}\nu^2$  estará definida de la misma manera para cualquier potencial. Finalmente, la ecuación (3.7) para  $x$  se puede escribir como

$$\dot{x} = -3xH - \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{V_{,\Phi}}{H} + \frac{3}{2}\Pi xH. \quad (3.9)$$

Igualmente que para el caso de materia oscura fría, es común cambiar las derivadas con respecto al tiempo de las ecuaciones dinámicas a derivadas con respecto al número de *e-foldings* definido como  $N = \ln a$ . Las derivadas con respecto a  $N$  se denotarán con una prima ' sobre las variables, es decir  $\xi' \equiv \frac{d\xi}{dN}$ . Así, la ecuación (3.9) se puede escribir como

$$x' = -3x - \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{V_{,\Phi}}{H^2} + \frac{3}{2}\Pi x. \quad (3.10)$$

Al calcular las derivadas con respecto al tiempo para cada variable como se hizo para la variable  $x$ , y cambiando al espacio de *e-foldings*, se obtiene el siguiente sistema dinámico

$$x' = -3x - \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{V_{,\Phi}}{H^2} + \frac{3}{2}\Pi x, \quad (3.11a)$$

---


$$u' = \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{V_{,\Phi}}{H^2} \frac{x}{u} + \frac{3}{2} \Pi u, \quad (3.11b)$$

$$z' = \frac{3}{2} \left( \Pi - \frac{4}{3} \right) z, \quad (3.11c)$$

$$\nu' = \frac{3}{2} \left( \Pi - \frac{4}{3} \right) \nu, \quad (3.11d)$$

$$b' = \frac{3}{2} (\Pi - 1) b, \quad (3.11e)$$

$$l' = \frac{3}{2} \Pi l. \quad (3.11f)$$

Por otra parte, dado que se supone que el Universo de fondo es plano, es evidente que al dividir la ecuación de Friedmann (3.2a) entre  $H^2$  se tiene la ecuación de conservación

$$F \equiv x^2 + u^2 + b^2 + z^2 + \nu^2 + l^2 = 1. \quad (3.12)$$

Igualmente que en el caso de materia oscura fría, el cálculo de  $F$  a lo largo de toda la evolución numérica dará información acerca de la convergencia del algoritmo usado. Si numéricamente no se satisface que  $F \approx 1$ , es indicativo de que la resolución numérica es muy baja o que el método numérico no converge. Esta ecuación de conservación se puede escribir en términos de los parámetros de densidad  $\Omega_i = \rho_i/\rho_{cri}$ , donde la densidad crítica  $\rho_{cri} = 3H^2/\kappa^2$ , para cada componente del Universo como

$$F = \Omega_{\Phi} + \Omega_b + \Omega_z + \Omega_{\nu} + \Omega_{\Lambda} = 1, \quad (3.13)$$

donde  $\Omega_{\Phi}$  es el parámetro de densidad de la materia oscura escalar,  $\Omega_b$  es el parámetro de densidad de bariones,  $\Omega_z$  es el parámetro de densidad de la radiación,  $\Omega_{\nu}$  es el parámetro de densidad de los neutrinos, y  $\Omega_{\Lambda}$  es el parámetro de densidad de la constante cosmológica y están definidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Omega_{\Phi} &\equiv x^2 + u^2, \\ \Omega_b &\equiv b^2, \\ \Omega_z &\equiv z^2, \\ \Omega_{\nu} &\equiv \nu^2, \\ \Omega_{\Lambda} &\equiv l^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como ya se dijo, otro parámetro importante a calcular es la ecuación de estado (1.32) para el campo escalar ya que es de gran interés conocer si se comporta en algún régimen como el caso de materia oscura fría, es decir, que  $\omega_{\Phi} \sim 0$ . En

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

---

términos de las variables adimensionales, la ecuación de estado escalar resulta

$$\omega_{\Phi} = \frac{x^2 - u^2}{x^2 + u^2}. \quad (3.15)$$

Dado que la ecuación de Klein-Gordon (3.1b) es una ecuación tipo oscilador armónico, tanto el campo escalar  $\Phi$  como  $\dot{\Phi}$  oscilan temporalmente por lo que  $x$  y  $u$  son cantidades que varían como función del tiempo. Así, la ecuación de estado  $\omega_{\Phi}$  también es una función dependiente del tiempo a diferencia de la ecuación de estado de la materia oscura fría que es una constante igual a cero. En las siguientes secciones se estudiará la dinámica del Universo para diferentes modelos de materia oscura escalar.

### 3.3. Modelo A: Potencial escalar $V = 0$

#### 3.3.1. Sistema de ecuaciones adimensional

En el primer modelo que se estudiará, se considera que la materia oscura escalar tiene un potencial escalar  $V = 0$ . Así, la densidad de energía  $\rho_{\Phi}$  (ec. 1.30b) y la presión escalar (ec. 1.30c)  $P_{\Phi}$  están dados por

$$\rho_{\Phi} = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2, \quad P_{\Phi} = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2. \quad (3.16)$$

Por lo tanto, aunque  $\dot{\Phi}$  es una cantidad que varía con el tiempo, la ecuación de estado,  $\omega_{\Phi}$ , es una constante igual a la unidad. Además  $P_{\Phi} = \rho_{\Phi}$  por lo que  $\gamma = 2$ .

Es evidente que con este tipo de materia oscura escalar ( $V = 0$ ) no es posible reproducir la evolución cosmológica predicha por el modelo estándar donde la materia oscura tiene una ecuación de estado de materia no relativista o polvo, es decir,  $\omega = 0$ . Sin embargo, es interesante estudiar la dinámica del Universo de fondo con este modelo de materia oscura escalar. Dado que no hay potencial escalar,  $u = 0$ , y de las ecuaciones (3.11) se obtiene el siguiente sistema dinámico

$$x' = \frac{3}{2}(\Pi - 2)x, \quad (3.17a)$$

$$b' = \frac{3}{2}(\Pi - 1)b, \quad (3.17b)$$

$$z' = \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)z, \quad (3.17c)$$

$$\nu' = \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)\nu, \quad (3.17d)$$

$$l' = \frac{3}{2}\Pi l. \quad (3.17e)$$



---

donde la función  $\Pi$  está dada por la ecuación (3.8), ya que como se mencionó con anterioridad, esta función no depende del potencial escalar  $V$ . Los parámetros de densidad para cada componente de este modelo se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\Omega_\Phi &\equiv x^2, & \Omega_b &\equiv b^2, \\ \Omega_\nu &\equiv \nu^2, & \Omega_z &\equiv z^2, \\ \Omega_\Lambda &\equiv l^2.\end{aligned}\tag{3.18}$$

A cada tiempo de la evolución cosmológica se tiene que satisfacer la ecuación de conservación  $F = 1$ .

Al igual que para el sistema dinámico (2.16) del modelo estándar, se puede obtener una solución analítica del sistema (3.17). Para esto, se siguen los pasos descritos en §2.3 ya que la única ecuación que cambia en el sistema, es la de la variable  $x$  dada por la ecuación (3.17a). En el caso de CDM era  $x' = 3(\Pi - 1)x/2$ . Así, la solución analítica para la variable  $x$  resulta como

$$x = \frac{x_0 H_0}{H} e^{-3N},\tag{3.19}$$

donde  $x_0$  está relacionado con el valor del término cinético del campo escalar en la época actual y  $H_0$  es el parámetro de Hubble al día de hoy. Elevando al cuadrado la ecuación (3.19) y dado que  $\Omega_\Phi = x^2$  (ec. 3.18) se llega a que  $\rho_\Phi \sim a^{-6}$ . Por lo tanto, la densidad de energía de materia oscura escalar con  $V = 0$  no evoluciona como la de materia oscura fría donde  $\rho_{CDM} \sim a^{-3}$ . Por otra parte, la densidad de energía de la radiación evoluciona como  $\rho_z \sim a^{-4}$ , por lo tanto, a épocas tempranas del Universo ( $a \sim 10^{-6}$ ) la componente dominante será la materia oscura escalar y no la radiación. Esto último tiene varias implicaciones cosmológicas como se verá más adelante. Así, se puede inferir anticipadamente que un modelo de materia oscura escalar con  $V = 0$  no es plausible para explicar la dinámica cosmológica del Universo. Para corroborar este resultado continuamos el análisis del modelo.

Las expresiones analíticas para el resto de las variables de las componentes del Universo de fondo resultan iguales que para el modelo estándar y están dadas por las ecuaciones (2.28)-(2.31). El parámetro de Hubble,  $H$ , para un determinado valor del número de *e-foldings*,  $N$ , está dado por

$$H = H_0 \left( \Omega_{\Phi_0} e^{-6N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0} \right)^{1/2}.\tag{3.20}$$

donde el subíndice 0 en los parámetros de densidad  $\Omega$  denota que están evaluados en la época actual. Finalmente, la solución analítica para un modelo de materia oscura escalar con  $V = 0$  descrito por el sistema de ecuaciones (3.17) es

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

---

$$x = \frac{\sqrt{\Omega_{\Phi_0}} e^{-3N}}{(\Omega_{\Phi_0} e^{-6N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}, \quad (3.21)$$

$$b = \frac{\sqrt{\Omega_{b_0}} e^{-3N/2}}{(\Omega_{\Phi_0} e^{-6N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}, \quad (3.22)$$

$$z = \frac{\sqrt{\Omega_{z_0}} e^{-2N}}{(\Omega_{\Phi_0} e^{-6N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}, \quad (3.23)$$

$$\nu = \frac{\sqrt{\Omega_{\nu_0}} e^{-2N}}{(\Omega_{\Phi_0} e^{-6N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}, \quad (3.24)$$

$$l = \frac{\sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}}{(\Omega_{\Phi_0} e^{-6N} + \Omega_{b_0} e^{-3N} + \Omega_{z_0} e^{-4N} + \Omega_{\nu_0} e^{-4N} + \Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}. \quad (3.25)$$

A continuación se calculará la evolución de las funciones anteriores y se obtendrá una solución numérica del sistema de ecuaciones (3.17).

#### 3.3.2. Resultados

Primero, se evaluará la solución analítica dada por el sistema de ecuaciones (3.21-3.25) que corresponde a un Universo de fondo con materia oscura escalar donde el potencial escalar  $V = 0$ . Para evaluar el sistema de ecuaciones, es necesario dar los valores de los parámetros de densidad al día de hoy para el campo escalar,  $\Omega_{\Phi_0}$ , y de las demás especies ( $\Omega_{b_0}$ ,  $\Omega_{z_0}$ ,  $\Omega_{\nu_0}$ ,  $\Omega_{\Lambda_0}$ ). Los valores de los parámetros de densidad (1.18) dados en la sección 1.2 se obtienen para el modelo CDM, no es completamente válido usarlos como condiciones iniciales para el modelo SFDM. Sin embargo, es posible usarlos como una primera aproximación ya que se espera que el modelo SFDM con algún potencial escalar  $V$  imite la dinámica del modelo CDM.

La evolución cosmológica de un Universo de fondo con materia oscura escalar con potencial escalar nulo calculada con las funciones (3.25) se muestra en el panel izquierdo de la figura 3.1. En esta gráfica se confirma que la dinámica del Universo no es igual a la que se obtiene con el modelo CDM. En contraste con el paradigma estándar, en este modelo de materia oscura escalar la radiación nunca llega a ser la especie dominante a épocas tempranas del Universo. De hecho, la componente dominante en el Universo temprano es la SFDM por lo que podría resultar en un sobrecrecimiento de las fluctuaciones de densidad de este tipo de materia. Por lo tanto, las fluctuaciones escalares podrían colapsar antes que las perturbaciones de materia oscura fría. Así, el proceso de formación de las estructuras en el Universo se llevaría a cabo desde épocas muy tempranas. Por lo

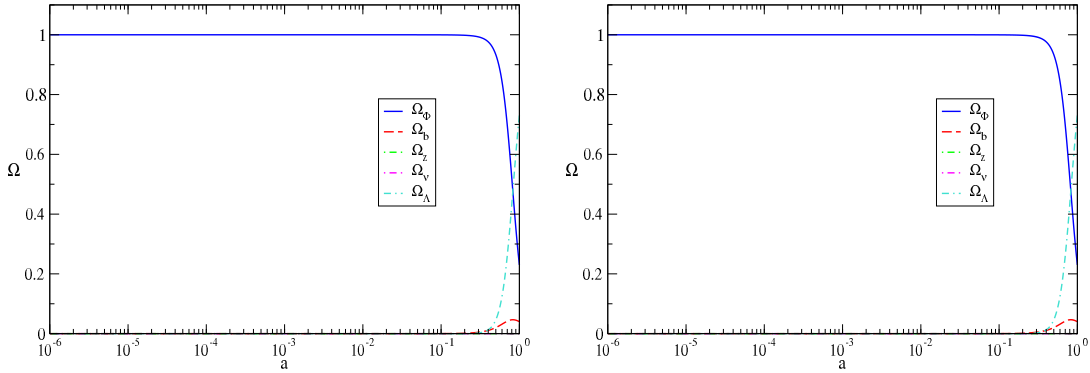


Figura 3.1: Solución analítica (panel izquierdo) y numérica (panel derecho) de la evolución cosmológica del Universo de fondo con un modelo de materia oscura escalar con potencial escalar  $V = 0$ .

tanto, si este modelo resultara válido, las observaciones cosmológicas mostrarían una importante sobrepoblación de estructuras a altos corrimientos al rojo, lo cual no se observa. Además, si la materia oscura escalar domina la dinámica del Universo temprano, la radiación sería incapaz de suprimir la formación de átomos y habría una sobreabundancia de elementos primigenios.

Por otra parte, en la gráfica también se observa que no hay una época de igualdad entre materia y radiación. Esto implica que tampoco existe la época de la recombinación y la CMB no se originaría. Por lo tanto, un modelo de campo escalar sin potencial escalar no es un candidato plausible de materia oscura ya que no es posible reproducir la evolución cosmológica del Universo. Por completitud, también se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones (3.17) para este modelo con  $V = 0$ . Dicho sistema se integra con los métodos RK4 y ABM desde el día de hoy ( $a = 1$ ) hasta épocas tempranas del Universo ( $a \sim 10^{-6}$ ) tomando como condiciones iniciales, al igual que en el caso analítico, los valores (1.18) de la sección §1.2. Los resultados numéricos obtenidos se muestran en el panel derecho de la figura 3.1. Como se observa, la dinámica obtenida mediante la integración numérica es casi igual a la obtenida con la solución analítica. Por lo tanto se corrobora que el código usado funciona apropiadamente.

### 3.4. Modelo B: Potencial escalar $V = m^2\Phi^2/2$

#### 3.4.1. Sistema de ecuaciones adimensional

El segundo caso de interés es un modelo de campo escalar como materia oscura donde el potencial escalar es cuadrático de la forma

$$V(\Phi) = m^2\Phi^2/2, \quad (3.26)$$

donde  $m$  es la masa de los bosones asociados al campo escalar  $\Phi$ . Para este potencial se tiene que  $\rho_\Phi$  (ec. 1.30b) y  $P_\Phi$  (ec. 1.30c) están dados por

$$\rho_\Phi = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2, \quad P_\Phi = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2}m^2\Phi^2, \quad (3.27)$$

Por lo tanto, la ecuación de estado para este potencial cuadrático es

$$\omega_\Phi = \frac{\dot{\Phi}^2 - m^2\Phi^2}{\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2} = \frac{x^2 - u^2}{x^2 + u^2}. \quad (3.28)$$

Así, las ecuaciones adimensionales para este modelo se pueden deducir a partir del sistema (3.11) y están dadas por

$$x' = -3x - \frac{m}{H}u + \frac{3}{2}\Pi x, \quad (3.29a)$$

$$u' = \frac{m}{H}x + \frac{3}{2}\Pi u, \quad (3.29b)$$

$$b' = \frac{3}{2}(\Pi - 1)b, \quad (3.29c)$$

$$z' = \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)z, \quad (3.29d)$$

$$\nu' = \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)\nu, \quad (3.29e)$$

$$l' = \frac{3}{2}\Pi l, \quad (3.29f)$$

donde la función  $\Pi$  está dada por la ecuación (3.8):  $\Pi = 2x^2 + b^2 + 4(z^2 + \nu^2)/3$ . Los parámetros de densidad,  $\Omega_i = \rho_i/\rho_{cri}$ , de las diversas componentes de este modelo de materia oscura escalar en términos de las variables adimensionales se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \Omega_\Phi &\equiv x^2 + u^2, & \Omega_b &\equiv b^2, \\ \Omega_z &\equiv z^2, & \Omega_\nu &\equiv \nu^2, \\ \Omega_\Lambda &\equiv l^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

---

Además, recuérdese que a lo largo de toda la evolución del Universo se tiene que cumplir la ecuación de conservación de Friedmann

$$F = \Omega_{\Phi} + \Omega_b + \Omega_z + \Omega_{\nu} + \Omega_{\Lambda} = 1. \quad (3.31)$$

Con lo anterior, se tienen todos los elementos necesarios para hacer un estudio de la evolución cosmológica del Universo. Es importante notar que el sistema de ecuaciones (3.29) no es un sistema dinámico autónomo ya que las ecuaciones (3.29a) y (3.29b) tienen un término con el factor  $m/H$ , siendo el parámetro de Hubble  $H$  una cantidad que tiene una dependencia explícita de la variable de evolución  $N = \ln(a)$ . Por lo tanto, para obtener sin dificultad una solución numérica de este sistema hay que manipularlo hasta transformarlo en un sistema autónomo, lo cual se hará a continuación.

### 3.4.2. Propuesta I

Como propuesta preliminar, se puede tomar una de las variables adimensionales definidas en (3.4) para transformar el sistema de ecuaciones (3.29) en un sistema dinámico autónomo. Dado que la densidad de energía  $\rho_{\Lambda}$  es una constante durante toda la evolución cosmológica del Universo es conveniente tomar la variable  $l$  para obtener  $H$  y posteriormente sustituir en el sistema (3.29). Por lo tanto se tiene que

$$H = \frac{\kappa\sqrt{\rho_{\Lambda}}}{\sqrt{3}l}. \quad (3.32)$$

Así el término  $m/H$  puede ser escrito como

$$\frac{m}{H} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\rho_{\Lambda}}} \frac{ml}{\kappa} = Al, \quad (3.33)$$

donde se ha definido la constante  $A \equiv \sqrt{3}m/\kappa\sqrt{\rho_{\Lambda}}$  cuyo coeficiente puede ser calculado tomando los valores dados en (1.18) de la sección 1.2, resultando  $A \simeq 7.80 \times 10^{32} (m/\text{eV})$ . Con lo anterior, se puede reescribir (3.29) como un sistema dinámico autónomo dado por

$$x' = -3x - Alu + \frac{3}{2}\Pi x, \quad (3.34a)$$

$$u' = Alx + \frac{3}{2}\Pi u, \quad (3.34b)$$

$$b' = \frac{3}{2}(\Pi - 1)b, \quad (3.34c)$$

$$z' = \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)z, \quad (3.34d)$$

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

$$\nu' = \frac{3}{2} \left( \Pi - \frac{4}{3} \right) \nu, \quad (3.34e)$$

$$l' = \frac{3}{2} \Pi l. \quad (3.34f)$$

Este sistema de ecuaciones ahora se puede resolver tomando diversos valores para la masa del bosón asociado al campo escalar lo cual se traduce en diferentes valores de la constante  $A$ . Para ejemplificar, primero tomamos un valor ultra ligero para la masa del bosón  $m = 1 \times 10^{-28}$  eV, por lo cual  $A \simeq 7.8 \times 10^4$ . Usando los métodos ABM y RK4 y tomando las condiciones iniciales ya mencionadas, la integración numérica del sistema (3.34) arroja los parámetros de densidad mostrados en la figura 3.2.

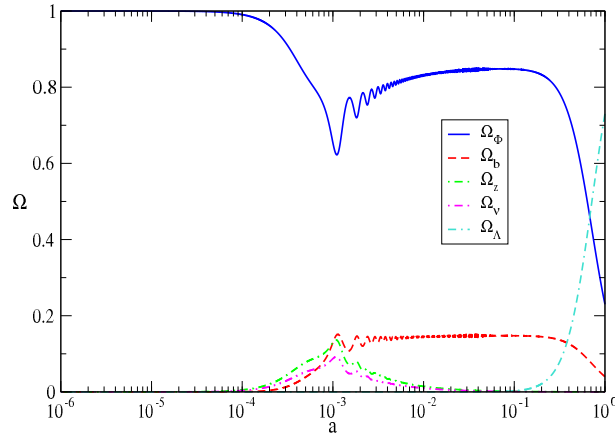


Figura 3.2: Solución numérica del sistema de ecuaciones (3.34) que describe la evolución de un Universo de fondo con un modelo de materia oscura escalar con potencial escalar  $V = m^2 \Phi^2 / 2$  con  $m = 1 \times 10^{-28}$  eV.

Como se observa en esta figura, la dinámica de los parámetros de densidad de las componentes del Universo cuando el bosón tiene una masa  $m = 1 \times 10^{-28}$  eV es diferente a la inferida por el modelo estándar CDM. Lo primero que se puede notar es que, al igual que en el caso cuando  $V = 0$ , la materia oscura escalar llega a ser la componente dominante a épocas tempranas del Universo y nunca hay una época en la cual domine la radiación. De hecho, cuando el factor de escala es  $a \sim 10^{-3}$ , el parámetro de densidad de la materia oscura escalar (radiación) presenta un ligero decremento (incremento) con oscilaciones hacia épocas tempranas. Sin embargo, cuando el factor de escala es  $a < 10^{-3}$  el parámetro de densidad de la materia oscura escalar incrementa nuevamente hasta llegar a ser la componente dominante. Este comportamiento en la evolución

---

cosmológica del Universo era el esperado, ya que los diversos estudios que se han realizado con este potencial escalar cuadrático (ver por ejemplo [Turner 1983](#)) sugieren que la masa de los bosones debe cumplir que  $m \gg H$  y debe tener un valor aproximado de  $m \gtrsim 10^{-23}$  eV ([Matos & Ureña-López 2001](#)).

Este último valor para la masa de los bosones del campo escalar resulta en un valor de la constante  $A = 7.80 \times 10^9$ . Este valor tan grande de  $A$  implica un problema computacional que consiste en que el sistema dinámico ahora contiene dos escalas muy diferentes de resolución  $\Delta N_1$  y  $\Delta N_2$  para que haya convergencia en la solución numérica. Es decir, considerando solamente las variables  $x$ ,  $b$ ,  $z$ ,  $\nu$  y  $l$  del sistema de ecuaciones (3.34), que toman valores del orden de  $\lesssim 10^{-1}$ , se infiere que bastaría usar una resolución  $\Delta N_1 \sim 10^{-1}$  para garantizar la estabilidad y convergencia del método numérico. Sin embargo, dado que en las ecuaciones (3.34a) y (3.34b) aparecen los términos  $Alu$  y  $Alx$  cuyo coeficiente  $A$  es del orden  $10^9$ , la resolución  $\Delta N_1$  ya no es suficiente para seguir las variaciones en la solución numérica por lo que es necesario usar una segunda resolución  $\Delta N_2$  del orden  $1/A$ . Por lo tanto, para garantizar la convergencia de la solución numérica del sistema y la estabilidad del método es necesario usar un número de pasos de integración enorme para resolver la escala más pequeña del sistema. Este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales se les conoce como sistemas rígidos (*stiff*). Para este caso en particular, el número de puntos  $N_p$  (número de pasos en la integración) para obtener la solución numérica es de por lo menos  $10^9$  lo cual se traduce en un problema de tiempo computacional así como también de eficiencia. De hecho, se intentó resolver, con los métodos RK4 y ABM, el sistema (3.34) con  $A = 7.80 \times 10^9$  y el número de pasos de integración requerido para que la ecuación de conservación  $F = 1$  sea válida a cada tiempo resultó ser  $10^{12}$ . De esto, se puede concluir que estos dos métodos no son adecuados ni eficientes para resolver este tipo de sistemas rígidos, por lo tanto será necesario implementar un nuevo algoritmo para obtener soluciones numéricas precisas de los modelos de materia oscura escalar cuando resulten en un sistema rígido.

### 3.4.3. Propuesta II

La segunda propuesta para transformar las ecuaciones (3.29) en un sistema dinámico autónomo es proponer la siguiente variable adimensional

$$s \equiv \frac{m}{H}. \quad (3.35)$$

Debido a que la masa del bosón es una constante a lo largo de la evolución del Universo, la cantidad anterior se puede considerar como una medida del radio del horizonte  $r_H \equiv c/H$  por lo que  $s = m r_H$  (recuérdese que  $c = 1$ ). Si se toma el valor del parámetro de Hubble al día de hoy (1.18) dado en la sección 1.2,

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

---

el radio del horizonte actual es  $r_{H0} \sim 6.65 \times 10^{32} \text{ eV}^{-1}$  y considerando la masa más favorecida  $m = 1 \times 10^{-23} \text{ eV}$  se tiene que la condición inicial de esta nueva variable adimensional resulta en  $s \sim 6.65 \times 10^9$ . Este último valor representa nuevamente una dificultad al momento de intentar obtener una solución numérica con los métodos RK4 y ABM ya que como ya se ha mencionado el sistema de ecuaciones resulta rígido. Para eludir este obstáculo se propone el siguiente artificio. Observando que, para la época donde la radiación, la materia oscura y la constante cosmológica dominan, el parámetro de Hubble se comporta como

$$H_Z = \frac{1}{2t}, \quad H_X = \frac{2}{3t}, \quad H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (3.36)$$

se puede deducir que  $H$  tiene que ser una función monotónicamente decreciente en el tiempo hasta cuando la constante cosmológica llega a ser la componente dominante del Universo. Por lo tanto, se propone el siguiente ansatz para la dinámica del parámetro de Hubble

$$H \equiv \frac{t_0^{n-1}}{t^n}, \quad (3.37)$$

y así el radio del horizonte resulta  $r_H = t^n/t_0^{n-1}$  donde  $t_0$  es la edad del Universo. Nótese que  $n$  es un exponente que debe cumplir con la restricción  $0 \leq n \leq 1$  para poder reproducir las épocas donde dominan la radiación, materia oscura y constante cosmológica. Con lo anterior, la variable adimensional  $s$  resulta en

$$s \equiv \frac{mt^n}{t_0^{n-1}}, \quad (3.38)$$

por lo que el sistema (3.29) se puede escribir como

$$x' = -3x - su + \frac{3}{2}\Pi x, \quad (3.39a)$$

$$u' = sx + \frac{3}{2}\Pi u, \quad (3.39b)$$

$$b' = \frac{3}{2}(\Pi - 1)b, \quad (3.39c)$$

$$z' = \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)z, \quad (3.39d)$$

$$\nu' = \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)\nu, \quad (3.39e)$$

$$l' = \frac{3}{2}\Pi l, \quad (3.39f)$$

$$s' = s_0 s^{-k}, \quad (3.39g)$$



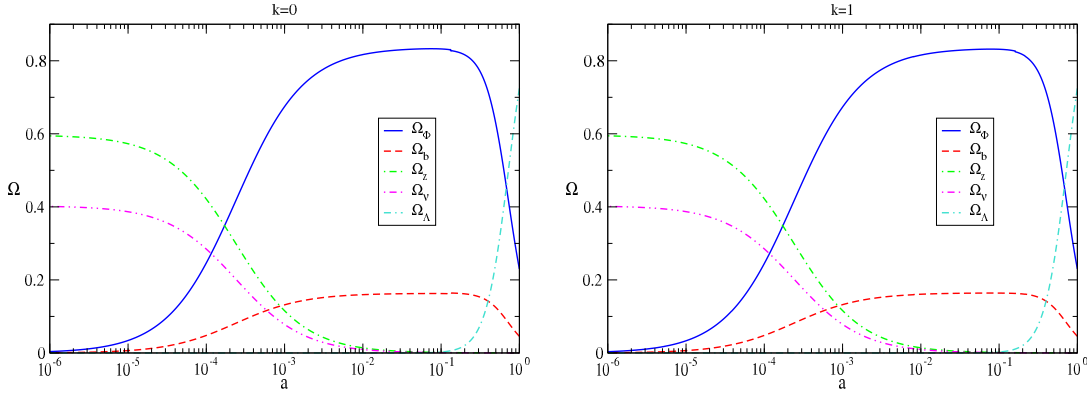


Figura 3.3: Solución numérica del sistema de ecuaciones (3.39) que describe la evolución de un Universo de fondo con un modelo de materia oscura escalar con un potencial escalar  $V = m^2\Phi^2/2$  con  $m = 1 \times 10^{-28}$  eV con  $k = 0$  (panel izquierdo) y con  $k = 1$  (panel derecho).

donde se ha definido la constante  $s_0 \equiv n(mt_0)^{\frac{1}{n}-1}$  y el exponente  $k \equiv \frac{1}{n} - 2$ . El sistema (3.39) ya es autónomo y se puede resolver numéricamente examinando diferentes valores de  $m$  ( $s_0$ ) y del exponente  $n$  ( $k$ ). Haciendo diversas corridas numéricas se pudo verificar que con esta aproximación y con los métodos RK4 y ABM no es posible llevar a cabo la evolución numérica para valores de la masa  $m \gtrsim 1 \times 10^{-26}$  eV ya que nuevamente el sistema de ecuaciones llega a ser rígido. Así, para investigar la dinámica de los parámetros de densidad de las componentes en el Universo tomaremos el valor  $m = 1 \times 10^{-28}$  eV lo cual resulta en la condición inicial  $s \sim 6.65 \times 10^4$  con un valor de  $s_0 \sim 32,938$  para  $k = 0$  y  $s_0 \sim 1,446,593,043$  para  $k = 1$ . Los resultados numéricos para estos dos exponentes no presentan ninguna diferencia apreciable en el comportamiento y magnitud de los parámetros de densidad como se muestra en la figura 3.3. Las gráficas sugieren que hemos encontrado un modelo de Universo con materia oscura escalar compatible con la dinámica predicha por el modelo estándar lo cual es uno de los objetivos de este trabajo (ver figura 2.1). Sin embargo, hay ciertas inconsistencias en estos resultados que se discutirán a continuación.

La primera de ellas es que la dinámica para el modelo SFDM con masa  $m = 1 \times 10^{-28}$  eV resuelto con esta propuesta II difiere a la encontrada en la propuesta I (compare las figuras 3.2 y 3.3). Una posible causa de esta inconsistencia es que en el ansatz (3.37) propuesto para  $H$  se ha considerado que el exponente  $n$  no depende del factor de escala, por lo que se está imponiendo un comportamiento monótono de  $r_H$  para toda la evolución cosmológica del Universo. Un ansatz más

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

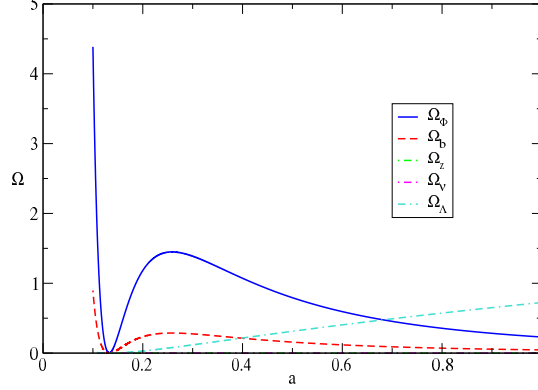


Figura 3.4: Solución numérica del sistema de ecuaciones (3.39), con la función  $\Pi$  (ec. 3.41), de un Universo de fondo con un modelo de materia oscura escalar con potencial escalar  $V = m^2\Phi^2/2$  con  $m = 1 \times 10^{-28}$  eV.

robusto para la dinámica de  $H$  que se podría considerar para trabajos futuros es

$$H \equiv \frac{C_H(a)t_0^{n(a)-1}}{t^{n(a)}}, \quad (3.40)$$

donde el exponente  $n(a)$  y el coeficiente  $C_{H(a)}$  varían dependiendo de la componente dominante en el Universo como puede verse en la ecuación (3.36). Otro aspecto fundamental es el relacionado con la función  $\Pi$  en las ecuaciones de evolución. De la ecuación (3.8) se tiene que  $\Pi \equiv -2\dot{H}/3H^2$ , por consiguiente, al proponer un ansatz para el parámetro de Hubble  $H$  es necesario sustituirlo en la expresión anterior para  $H$ , lo cual no se tomó en cuenta en el sistema de ecuaciones (3.39). Así que  $\Pi$  ya no puede ser  $2x^2 + b^2 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{4}{3}\nu^2$ ; ahora tiene que escribirse como

$$\Pi = \frac{2}{3}s_0s^{-k-1}. \quad (3.41)$$

Resolviendo numéricamente el sistema (3.39) con la expresión correcta para la función  $\Pi$  y tomando las mismas condiciones iniciales y exponentes ya explorados obtenemos que no es posible tener congruencia con los resultados anteriores ya que como se observa en la figura 3.4, la ecuación de conservación de Friedmann  $F = \Omega_\Phi + \Omega_b + \Omega_z + \Omega_\nu + \Omega_\Lambda = 1$  (ec. 3.13) deja de ser válida cuando el factor de escala es  $a \sim 0.5$  por lo que la integración arroja solamente error numérico para  $a < 0.5$ . Por lo tanto, se puede concluir que la aproximación planteada en este propuesta no resulta satisfactoria para reproducir los resultados predichos por el modelo estándar a expensas de proponer un ansatz más robusto para  $H$ . Dada la imposibilidad de los métodos RK4 y ABM para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales rígidos es necesario plantear una nueva propuesta para reescribir las

---

ecuaciones (3.29) en un sistema dinámico autónomo así como también implementar un nuevo método numérico idóneo para este tipo de sistemas, lo cual se hará a continuación.

### 3.4.4. Propuesta III

En esta tercera propuesta se plantea hacer uso de la variable  $s = m/H$  (ec. 3.35) sin introducir un *ansatz* para el parámetro de Hubble. Por lo tanto,  $H$  estará dado por la dinámica intrínseca del sistema. Para obtener la ecuación de evolución de la variable  $s$  primero se calcula su derivada temporal

$$\dot{s} = -m \frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2} \Pi m. \quad (3.42)$$

Cambiando al espacio de *e-foldings*, la última ecuación se puede escribir como

$$s' = \frac{3}{2} \frac{m}{H} \Pi = \frac{3}{2} \Pi s. \quad (3.43)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (3.29) se transforman en el siguiente sistema dinámico autónomo

$$x' = F_x = -3x - su + \frac{3}{2} \Pi x, \quad (3.44a)$$

$$u' = F_u = sx + \frac{3}{2} \Pi u, \quad (3.44b)$$

$$b' = F_b = \frac{3}{2} (\Pi - 1) b, \quad (3.44c)$$

$$z' = F_z = \frac{3}{2} \left( \Pi - \frac{4}{3} \right) z, \quad (3.44d)$$

$$\nu' = F_\nu = \frac{3}{2} \left( \Pi - \frac{4}{3} \right) \nu, \quad (3.44e)$$

$$l' = F_l = \frac{3}{2} \Pi l, \quad (3.44f)$$

$$s' = F_s = \frac{3}{2} \Pi s, \quad (3.44g)$$

Como se mencionó en la propuesta anterior, una masa escalar de  $m = 1 \times 10^{-23}$  eV implica que para resolver numéricamente la ecuación (3.44g) se requiere una condición inicial de  $s \sim 6.65 \times 10^9$ . Sin embargo, nótese que para la ecuación de evolución de la constante cosmológica (3.44f) se requiere, tomando los valores de WMAP-7, una condición inicial  $l \sim 0.84$ . Por lo tanto, es evidente que para resolver numéricamente la ecuación (3.44f) se necesita una resolución mucho

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

---

menor que la necesaria para integrar la ecuación (3.44g). Es decir, el sistema de ecuaciones (3.44) tiene dos tiempos característicos, uno lento y otro rápido. Como ya se mencionó, esto es una propiedad de los sistemas de ecuaciones rígidos. Por otra parte, los métodos explícitos multipasos como el RK4 y ABM tienen un error numérico intrínseco de cuarto orden. Por lo tanto, si queremos evolucionar la ecuación 3.44g con la condición inicial ya mencionada, se necesita una resolución mucho mayor al error inherente del método para garantizar su estabilidad. Esto implica que el método requiere un enorme número de pasos de integración, lo cual resulta ineficiente. Esta es otra característica de los sistema rígidos.

Se puede definir un sistema rígido de ecuaciones ordinarias como aquel que cumple las siguientes propiedades (Migoni 2010)

- El sistema de ecuaciones es estable pero los valores propios de su Jacobiano tienen partes reales negativas cuyo cociente entre ellas es muy grande. Esto se traduce a que algunas componentes de la solución varían mucho más rápido que las otras, es decir, hay modos muy rápidos y modos muy lentos de la variable independiente sobre la cual las variables dependientes están cambiando.
- Si al integrar el sistema con un método de orden  $n$  y tolerancia de error  $10^{-n}$ , el paso de integración del algoritmo debe hacerse más pequeño que este error para tener estabilidad numérica.

Con estas propiedades se puede concluir que el sistema de ecuaciones (3.44) resultante de un modelo de campo escalar con potencial escalar cuadrático y masa ultra ligera es rígido y es necesario implementar un método diferente a los algoritmos RK4 y ABM para resolverlo. Con este propósito, se implementó un algoritmo semi-implícito de extrapolación (descrito en *Numerical Recipes in C*, Press et al. 2002). Este método es de paso variable que se va ajustando de acuerdo al error estimado para cada paso de integración y además requiere el Jacobiano  $J$  del sistema de ecuaciones a resolver. Para el modelo de materia oscura escalar descrito por el sistema de ecuaciones (3.44), el Jacobiano se da en el apéndice C.

#### 3.4.4.1. Resultados

Primeramente, se aplica este nuevo método numérico para resolver el sistema de ecuaciones (2.16) resultante del modelo CDM. Los resultados obtenidos fueron casi idénticos a los obtenidos con los métodos RK4 y ABM. Asimismo, para el sistema de ecuaciones (3.34) y masa del bosón  $m \sim 1 \times 10^{-28}$  eV, el método semi-implícito también arrojó resultados consistentes con los mostrados en la figura 3.2. Con todo lo anterior, se infiere que el algoritmo funciona correctamente y nos da certeza para obtener la solución numérica del sistema de ecuaciones

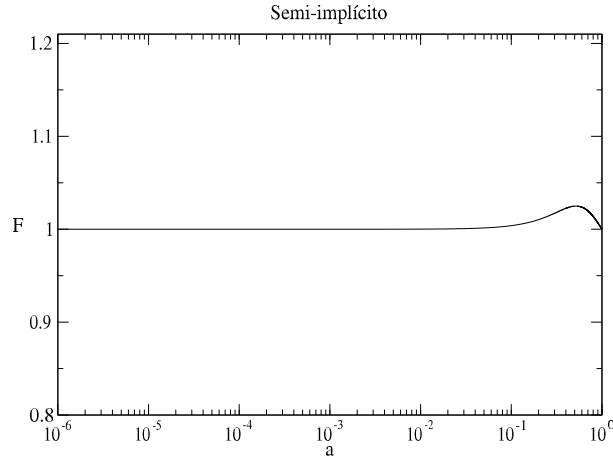


Figura 3.5: Evolución de  $F$  dada por la ecuación (3.31) obtenida al resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (3.44) usando un método semi-implícito de extrapolación con resolución  $\Delta_N \simeq 1 \times 10^{-10}$

(3.44) que describe la evolución cosmológica del Universo con un modelo SFDM. Nuevamente, se tomarán las condiciones iniciales al día de hoy y, como primera aproximación, los mejores valores obtenidos por las observaciones de WMAP-5 y WMAP-7 para los parámetros de densidad de bariones, radiación, neutrinos y constante cosmológica. Como ya se mencionó, la condición inicial para la ecuación (3.44g) es  $s_0 \sim 6.65 \times 10^9$  quedando como únicos parámetros libres las densidades de energía cinética ( $x^2$ ) y potencial ( $u^2$ ) del campo escalar. Sin embargo, dado que el campo escalar propuesto hace el rol de materia oscura en el Universo se debe tener que  $\Omega_\Phi = x^2 + u^2 \sim 0.23$ . Para el modelo que se presentará a continuación se tomaron arbitrariamente  $x \sim 0.001$  y  $u \sim 0.222$ . Para garantizar la convergencia de la solución numérica se realizaron diversas evoluciones numéricas (al igual que en el caso de los métodos RK4 y ABM) con diferentes resoluciones para verificar que la ecuación de conservación (3.31) se cumpla con un error numérico más pequeño para el caso de la resolución más alta. En la figura 3.5 se observa que la igualdad  $F = 1$  se satisface a lo largo de toda la evolución usando la resolución más alta  $\Delta_N \simeq 1 \times 10^{-10}$ .

Una vez asegurada la convergencia del método de integración numérica se analizan los resultados con la resolución más alta. En la figura 3.6 se muestra la evolución cosmológica del campo escalar que se desempeña como materia oscura en el Universo. Observe que cuando el factor de escala del Universo es  $a \sim 10^{-6}$  este campo escalar tiene un valor de  $\sim 0.1$ . Inmediatamente después, a partir de  $a \sim 5 \times 10^{-6}$ , el campo escalar experimenta un cambio en su amplitud y comienza a oscilar alrededor de 0, el mínimo del potencial escalar, hasta el día de

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

---

hoy (la línea continua aparente es debida a poca resolución en la gráfica). Este cambio abrupto en la dinámica del campo escalar se debe probablemente a un rompimiento de simetría a épocas muy tempranas del Universo como han sugerido diversos autores (Kolb & Turner 1990, Liddle & Lyth 2000, Matos & Suárez 2011b, Castellanos & Matos 2012, Matos & Castellanos 2012) Las oscilaciones del campo escalar alrededor de cero durante la época de la recombinación ( $a \sim 10^{-3}$ ) son las responsables de que se comporte como materia oscura fría como se verá más adelante.

La evolución cosmológica de la energía cinética del campo escalar ( $\dot{x}^2$ ) se muestra en el panel izquierdo de la figura 3.7. En esta gráfica se puede observar que a épocas tempranas del Universo la energía cinética del campo es despreciable y empieza a ser considerable cuando el factor de escala del Universo es  $a \sim 10^{-3}$ , es decir, cuando el campo escalar empieza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial escalar. Debido a estas oscilaciones del campo escalar, su energía cinética también presenta oscilaciones pero mucho más abruptas y con una frecuencia muy alta que inclusive no llegan a distinguirse completamente en la gráfica. El panel derecho de la figura 3.7 muestra la evolución cosmológica de la energía potencial del campo escalar. Al igual que la dinámica de la energía cinética escalar, la energía potencial del campo presenta oscilaciones abruptas que inician un poco más temprano (a partir de  $a \sim 10^{-4}$ ) que las oscilaciones de la energía cinética escalar. Durante la época de la recombinación del Universo, dichas oscilaciones llegan a ser más drásticas y presentan pequeñas regiones donde estas oscilaciones parecen aminorarse.

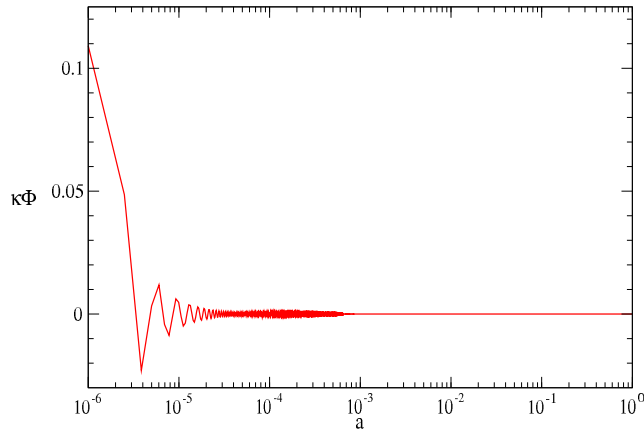


Figura 3.6: Evolución cosmológica del campo escalar con potencial escalar  $V = m^2\Phi^2/2$  en el modelo de materia oscura escalar.

Las oscilaciones abruptas presentes en la evolución de la energía cinética y la energía potencial del campo escalar son predecibles ya que la dinámica del campo escalar está dada por la ecuación de Klein-Gordon (3.1b). Esta última ecuación es tipo la ecuación de un oscilador armónico con un término de fricción debido a la expansión del Universo. La frecuencia de oscilación está determinada por la masa de la partícula escalar.

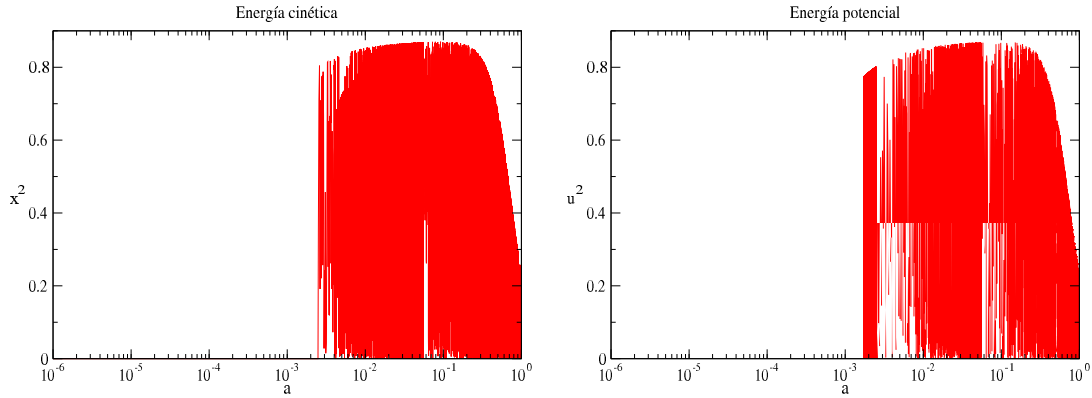


Figura 3.7: Evolución cosmológica de la energía cinética (panel izquierdo) y energía potencial (panel derecho) del campo escalar  $\Phi$  con potencial escalar  $V = m^2\Phi^2/2$ .

Al sumar las energías cinética y potencial del campo escalar se obtiene el parámetro de densidad de materia oscura escalar (ver ec. 3.30) la cual se muestra en la figura 3.8. Es interesante notar que aunque las energías cinética y potencial del campo escalar presentan oscilaciones muy abruptas, el parámetro de densidad de materia oscura escalar no presenta tales oscilaciones y evoluciona similarmente al parámetro de densidad de materia oscura fría (las pequeñas diferencias en la amplitud pueden disminuir cambiando las condiciones iniciales). Por lo tanto, a pesar de que el campo escalar presenta oscilaciones alrededor del mínimo de su potencial escalar, estas oscilaciones no afectan significativamente la dinámica cosmológica de la densidad de materia oscura escalar del Universo de fondo. En la figura 3.9 se muestra la solución numérica del sistema de ecuaciones (3.44) que describe la evolución cosmológica de las diversas componentes del Universo de fondo en un modelo SFDM. Al observar la dinámica de este Universo se puede notar que es casi idéntica a aquella obtenida con un modelo CDM mostrada en las figuras 2.1, 2.5, 2.9. De la gráfica 3.9 se pueden destacar los siguientes resultados interesantes. Se puede observar que, al igual que en el paradigma de materia oscura fría, las componentes dominantes a épocas muy tempranas del Universo, cuando  $a \sim 10^{-6}$ , son la radiación y los neutrinos. Este hecho es muy importante para el modelo de materia oscura escalar, ya que implica que todas las predicciones

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

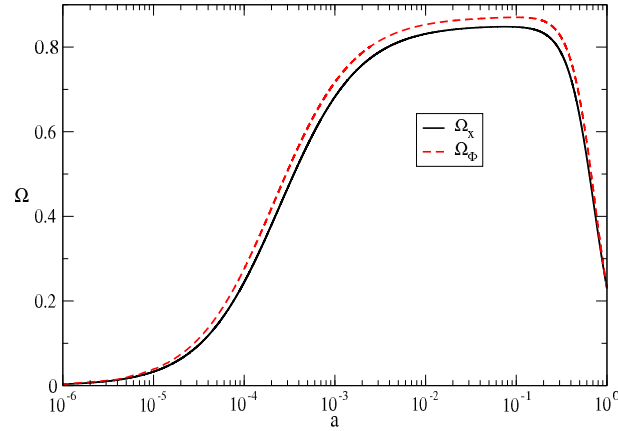


Figura 3.8: Parámetro de densidad de materia oscura para el modelo de materia oscura fría y para el modelo de materia oscura escalar

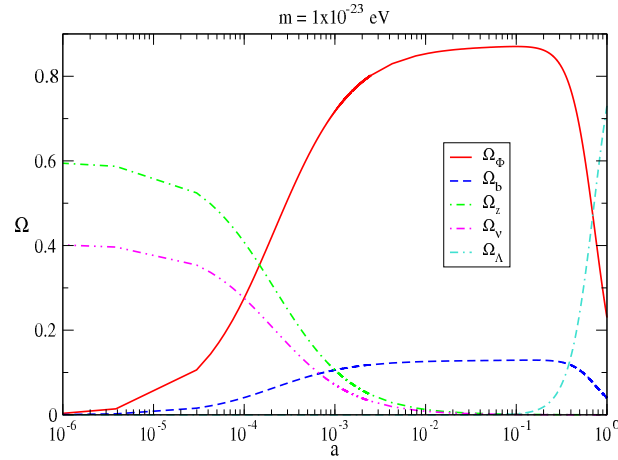


Figura 3.9: Solución numérica del sistema (3.44) que describe la evolución de un Universo de fondo con un modelo de materia oscura escalar con potencial escalar  $V = m^2\Phi^2/2$  con  $m = 1 \times 10^{-23}$  eV.



---

del modelo estándar acerca de la nucleosíntesis de los elementos primigenios no son alteradas. Conforme el Universo sigue evolucionando, las densidades de radiación y neutrinos empiezan a decrecer y la densidad de materia oscura escalar comienza a crecer. En algún momento del Universo, las densidades de materia oscura escalar y radiación llegan a ser iguales; a esta época se le conoce como la época de la igualdad. En el modelo de materia oscura escalar, esta época ocurre en  $a_{eq} \sim 1.6 \times 10^{-4}$  ( $z_{eq} \sim 6000$ ) que está dentro de las cotas obtenidas para el modelo estándar. Después de la época de la igualdad, la densidad de materia oscura escalar empieza a ser la componente dominante en la evolución del Universo y las densidades de radiación y neutrinos subdominantes. Es en esta época donde las pequeñas fluctuaciones de materia oscura, en este caso escalar, comienzan a crecer para dar origen a las grandes estructuras gravitacionales del Universo.

Después de la época de la igualdad, el Universo continúa expandiéndose, por lo que la temperatura de la radiación (fotones) disminuye y ya no es capaz de ionizar el medio, por lo que los electrones empiezan a recombinarse con los núcleos atómicos. Esta época se le conoce como la época de la recombinación y en el modelo SFDM ocurre en  $a \sim 10^{-3}$  ( $z \sim 1000$ ). La recombinación en el modelo SFDM ocurre a la misma época que en el modelo CDM. Este es otro de los resultados importantes de la presente tesis ya que es posible recuperar las predicciones del modelo estándar acerca de la CMB. Otro resultado interesante que se puede notar en la figura 3.9 es que durante la época de la recombinación el parámetro de densidad de los neutrinos,  $\Omega_\nu$ , es aproximadamente el 10% de la densidad total del Universo; esta cantidad es consistente con las estimaciones hechas por el satélite WMAP. Además, después de la recombinación, la radiación se desacopla del resto de la materia y evoluciona debido sólo a la expansión del Universo. A épocas tardías del Universo, la constante cosmológica llega a ser la componente dominante cuando  $z_\Lambda \sim 0.7$ .

Con todo lo anterior, se puede concluir que en general, un modelo de materia oscura escalar con potencial cuadrático puede imitar el compartamiento cosmológico del Universo de fondo obtenido con el modelo estándar de materia oscura fría. No obstante, es importante tener en cuenta que se tienen como parámetros libres la densidad de energía cinética y potencial del campo escalar que podrían llevar a pequeñas discrepancias con respecto a las predicciones del modelo estándar. El hecho de que el campo escalar se comporte cosmológicamente como materia oscura fría es consecuencia de que su presión oscile alrededor de cero, por lo tanto, su promedio temporal es  $\langle P_\Phi \rangle \approx 0$  como puede observarse en el panel izquierdo de la figura 3.10. Esto implica que la ecuación de estado (3.28) para un campo escalar con potencial cuadrático también debe oscilar alrededor de cero. En el panel derecho de la figura 3.10 se muestra la evolución de la ecuación de estado del campo escalar con respecto al factor de escala  $a$ . Observe que  $\omega_\Phi$  oscila con alta frecuencia alrededor de cero variando de  $-1$  a  $1$ . Por lo tanto, el

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

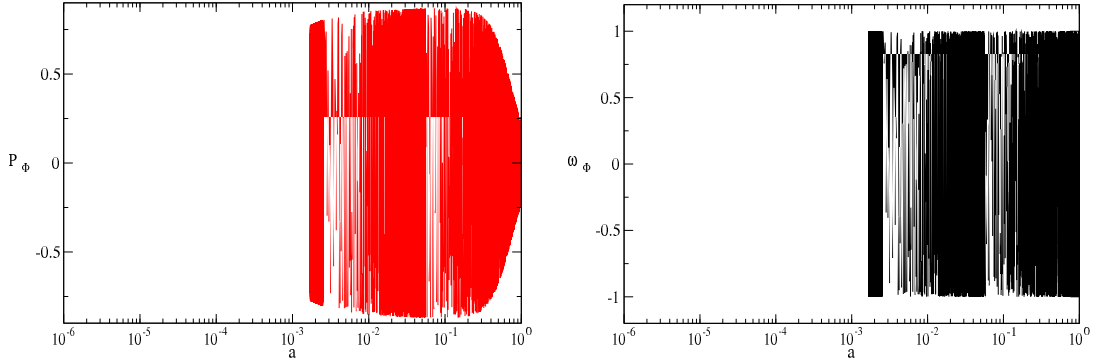


Figura 3.10: Evolución, con respecto al factor de escala  $a$ , de la presión escalar (panel izquierdo) y de la ecuación de estado (panel derecho) de un campo escalar con potencial cuadrático. Observe que  $\langle P_\Phi \rangle \approx 0$  por lo tanto  $\langle \omega_\Phi \rangle \approx 0$ .

promedio temporal  $\langle \omega_\Phi \rangle \approx 0$ . Así, dado que la ecuación de estado de un campo escalar tiende a cero, entonces, este campo escalar se comportará como un fluido tipo polvo o materia oscura fría y por lo tanto su densidad de energía  $\rho_\Phi \sim a^{-3}$  (Turner 1983, Matos et al. 2009).

Por completitud, en la figura 3.11 se compara la evolución, con respecto al factor de escala, de la función  $\Pi$  (eq. 3.8) del modelo de materia oscura escalar con la obtenida con el modelo de materia oscura fría (eq. 2.13). En la gráfica se observa que, a épocas tempranas del Universo, la evolución de  $\Pi$  para el modelo SFDM es casi idéntica a la del modelo CDM. Para  $a > 10^{-5}$ , la función  $\Pi$  del modelo de materia oscura escalar comienza a oscilar debido a la dinámica del campo escalar  $\Phi$ , sin embargo, el promedio temporal  $\langle \Pi_{SFDM} \rangle \sim \Pi_{CDM}$ . La figura 3.12 muestra la evolución de  $s$  (ec. 3.35) con respecto al factor de escala. Como ya se mencionó, esta cantidad es una medida del radio del horizonte del Universo y, por lo tanto, también del parámetro de Hubble. Finalmente, por consistencia, se calcula la edad del Universo con la expresión

$$t_o = \int_{N_o}^N \frac{1}{H} dN. \quad (3.45)$$

Usando la definición para  $l$  de (3.4) (o la ecuación para  $s$  dada por (3.35)), la ecuación (3.45) se escribe como

$$t_o = \frac{\sqrt{3}}{\kappa\sqrt{\rho_\Lambda}} \int_{N_o}^N l dN. \quad (3.46)$$

Calculando la ecuación (3.46) se obtiene que  $t_o \simeq 13.77$  Gyr. Este resultado es consistente con la edad y el parámetro de Hubble estimados con las observaciones del satélite WMAP.

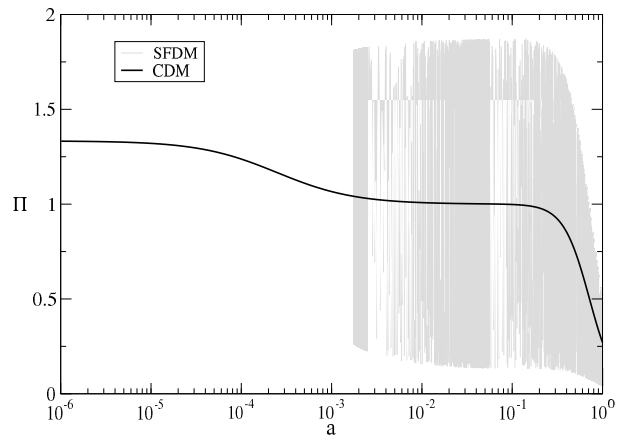


Figura 3.11: Evolución de la función  $\Pi$  con respecto al factor de escala  $a$ . El promedio temporal  $\langle \Pi_{SFDM} \rangle \sim \Pi_{CDM}$ .

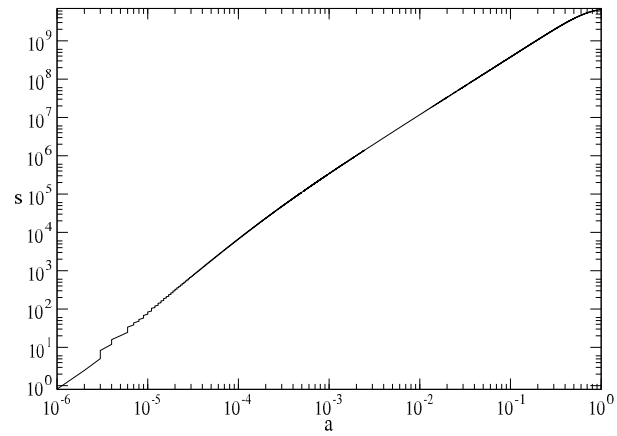


Figura 3.12: Evolución de  $s$  con respecto al factor de escala  $a$ .

### 3. UNIVERSO FLRW CON MATERIA OSCURA ESCALAR

# Capítulo 4

## Formación de estructuras: perturbaciones escalares en el régimen lineal

### 4.1. Introducción

En el capítulo previo se estudió la evolución de un Universo de fondo con el modelo de materia oscura escalar. A partir de ese estudio se pudo determinar la evolución de un campo escalar cosmológico con potencial escalar cuadrático así como también de sus energías cinética y potencial. Se encontró que este modelo alternativo puede imitar la dinámica del Universo obtenida con el modelo estándar de materia oscura fría. En este capítulo se estudiará la evolución cosmológica de las perturbaciones del campo escalar en el régimen lineal para determinar si estas tienen un comportamiento creciente como el encontrado para las perturbaciones de materia oscura fría. Al igual que en el capítulo anterior, se reescribirán las ecuaciones resultantes a través de un sistema dinámico y se resolverán numéricamente.

### 4.2. Perturbaciones escalares en el régimen lineal

En esta sección se calculará la evolución de las pequeñas fluctuaciones  $\delta\rho_\Phi$  de la densidad de campo escalar en el régimen lineal. De acuerdo al paradigma cosmológico estándar, las grandes estructuras gravitacionales del Universo se formaron a partir de perturbaciones de materia oscura. A épocas tempranas del Universo estas fluctuaciones son muy pequeñas, sin embargo, conforme el Univer-

## 4. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN LINEAL

---

so se expande, éstas comienzan a crecer y en la época donde domina la materia crecen proporcionalmente al factor de escala  $a$ . Posteriormente, debido a la fuerza de gravedad, colapsan dando lugar a la formación de estructuras en el Universo. En este régimen, las perturbaciones, en este caso de materia oscura escalar, son tan pequeñas de tal manera que el contraste de densidad de materia oscura escalar definida como

$$\delta \equiv \delta\rho_\Phi/\rho_\Phi, \quad (4.1)$$

resulta mucho menor a uno. Además, se consideran perturbaciones pequeñas a la métrica de FLRW y, por lo tanto, pueden estudiarse por medio de teoría de perturbaciones lineales. En este análisis, sólo se consideran perturbaciones escalares en el tensor métrico. Así, con las perturbaciones a la métrica y las perturbaciones al tensor de energía-momento del campo escalar se obtienen las ecuaciones de Einstein así como también la ecuación de conservación de energía-momento.

Primero, se escribe el tensor métrico como sigue

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + \delta g_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

donde  $g_{\mu\nu}^0$  es la métrica no perturbada de fondo. Las perturbaciones escalares a la métrica a primer orden pueden escribirse en términos de cuatro funciones escalares: la función lapso  $\psi$ , el potencial gravitacional  $\phi$ , la función de corrimiento  $B$  y el potencial anisotrópico  $E$ , así

$$\begin{aligned} \delta g_{00} &= -a(\eta)^2 2\psi, \\ \delta g_{0i} &= \delta g_{i0} = a(\eta)^2 B_{,i}, \\ \delta g_{ij} &= -2a(\eta)^2 (\phi\delta_{ij} - E_{,ij}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aquí, las perturbaciones a la métrica se han escrito en términos del tiempo conforme  $\eta$  dado que esto facilita su tratamiento matemático.

Con estas perturbaciones a la métrica, el elemento de línea perturbado más general se puede escribir como

$$\begin{aligned} ds^2 &= a(\eta)^2 [-(1 + 2\psi)d\eta^2 + 2B_{,i} d\eta dx^i \\ &+ [(1 - 2\phi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j], \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la métrica de fondo (Malik 2001). Para estudiar la evolución de las ecuaciones de las cantidades físicas, es necesario elegir una norma. Para el estudio de perturbaciones escalares es natural elegir la norma longitudinal o Newtoniana dado que  $\psi$  y  $\phi$  resultan invariantes de norma. Esta norma se define cuando  $B = 0$  y  $E = 0$ , y aplica sólo a los modos escalares de las perturbaciones a la métrica, lo que implica que los modos tensoriales y vectoriales no son tomados en cuenta. con ello, la métrica (4.4) resulta

$$ds^2 = a(\eta)^2 [-(1 + 2\psi)d\eta^2 + (1 - 2\phi)\delta_{ij} dx^i dx^j]. \quad (4.5)$$

---

El tensor de energía-momento perturbado para el campo escalar se puede escribir como la suma del tensor no perturbado  $\mathbf{T}_0 \equiv \mathbf{T}_0(t)$  más una perturbación  $\delta\mathbf{T} \equiv \delta\mathbf{T}(x^\mu)$  donde  $x^\mu = [t, x^i]$ , esto es

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \delta\mathbf{T}. \quad (4.6)$$

Las perturbaciones al tensor de energía-momento son

$$\delta T_0^0 = -\delta\rho_\Phi = -(\dot{\Phi}\delta\dot{\Phi} - \dot{\Phi}^2\psi + V_{,\Phi}\delta\Phi), \quad (4.7a)$$

$$\delta T_i^0 = -\frac{1}{a}(\dot{\Phi}\delta\Phi_{,i}), \quad (4.7b)$$

$$\delta T_j^i = \delta P_\Phi = (\dot{\Phi}\delta\dot{\Phi} - \dot{\Phi}^2\psi - V_{,\Phi}\delta\Phi)\delta_j^i, \quad (4.7c)$$

donde  $\delta\rho_\Phi$  es la densidad de energía escalar perturbada,  $\delta P_\Phi$  es la presión escalar perturbada y  $\delta\Phi$  es la perturbación al campo escalar. En las ecuaciones (4.7) los puntos sobre las variables, denotan derivadas con respecto al tiempo cosmológico  $t$  ( $\dot{\xi} \equiv \frac{d\xi}{dt}$ ), que está relacionado con el tiempo conforme por  $d/d\eta = a(d/dt)$ .

En la norma Newtoniana, el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  llega a ser diagonal y los potenciales escalares  $\psi$  y  $\phi$  son idénticos

$$\psi - \phi = 0, \quad (4.8)$$

resultando que el escalar  $\phi$  llega a ser el potencial gravitacional. Usualmente esta ecuación contiene el término del tensor de esfuerzo anisotrópico pero se ha despreciado para el campo escalar. Así, con la métrica (4.3) y el tensor de energía-momento (4.7) perturbados, las ecuaciones de campo de Einstein perturbadas a primer orden  $\delta G_j^i = \kappa^2\delta T_j^i$  para este campo escalar en la norma Newtoniana resultan

$$-8\pi G\delta\rho_\Phi = 6H(\dot{\phi} + H\phi) - \frac{2}{a^2}\nabla^2\phi, \quad (4.9a)$$

$$8\pi G\dot{\Phi}\delta\Phi_{,i} = 2(\dot{\phi} + H\phi)_{,i}, \quad (4.9b)$$

$$8\pi G\delta P_\Phi = 2[\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + (2\dot{H} + H^2)\phi], \quad (4.9c)$$

donde  $H$  es el parámetro de Hubble del Universo de fondo. Estas ecuaciones son iguales a las obtenidos previamente por [Malik \(2001\)](#) y [Ma & Bertschinger \(1995\)](#). Las ecuaciones (4.9) describen la evolución para las perturbaciones escalares en el régimen lineal. Sumando las ecuaciones (4.9a) y (4.9c) se llega a

$$\ddot{\phi} + 6H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi + (2\dot{H} + 4H^2)\phi = 4\pi G(\delta P_\Phi - \delta\rho_\Phi). \quad (4.10)$$

Restando (4.7c) y (4.7a) se tiene que  $\delta P_\Phi - \delta\rho_\Phi = -2V_{,\Phi}$ . Por lo tanto la ecuación (4.10) resulta en una ecuación diferencial de segundo orden para el potencial

## 4. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN LINEAL

---

gravitacional  $\phi$

$$\ddot{\phi} + 6H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi + (2\dot{H} + 4H^2)\phi + 8\pi G V_{,\Phi} \delta\Phi = 0. \quad (4.11)$$

La evolución cosmológica de las perturbaciones al campo escalar en el régimen lineal, está regida por la ecuación de Klein-Gordon perturbada que resulta

$$\delta\ddot{\Phi} + 3H\delta\dot{\Phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta\Phi + V_{,\Phi\Phi} \delta\Phi + 2V_{,\Phi} \phi - 4\dot{\Phi}\dot{\phi} = 0. \quad (4.12)$$

Así, resolviendo las ecuaciones (4.9), (4.11) y (4.12) obtenemos la dinámica de las perturbaciones escalares en el régimen lineal, sin embargo, estas ecuaciones contienen el término  $\nabla^2\phi$  que podría resultar tedioso al intentar obtener una solución numérica. Por lo tanto, es común transformar estas ecuaciones en el espacio de Fourier, en el cual, cada modo de Fourier se propaga independientemente. A primer orden, las componentes de Fourier se obtienen directamente. Por ejemplo, la perturbación  $\delta\Phi$  está relacionada a su transformada de Fourier  $\delta\Phi_k$  por

$$\begin{aligned} \delta\Phi(t, x^i) &= \int d^3k \delta\Phi(t, k^i) \exp(ik_i x^i), \\ &= \int d^3k \delta\Phi_k \exp(ik_i x^i), \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde  $k$  es el número de onda. El número de onda se define como  $k = 2\pi/\lambda_k$ , donde  $\lambda_k$  denota la longitud de escala de la perturbación escalar.

Así, sustituyendo las ecuaciones (4.7a) y (4.7c) en las ecuaciones perturbadas (4.9), estas se escriben en el espacio de Fourier como

$$8\pi G(3H\dot{\Phi}\delta\Phi_k) + \frac{2k^2}{a^2}\phi_k = -8\pi G(\dot{\Phi}\delta\dot{\Phi}_k - \phi_k\dot{\Phi}^2 + V_{,\Phi} \delta\Phi_k), \quad (4.14a)$$

$$2(H\phi_k + \dot{\phi}_k) = 8\pi G\dot{\Phi}\delta\Phi_k, \quad (4.14b)$$

$$2[\ddot{\phi}_k + 3H\dot{\phi}_k + (2\dot{H} + H^2)\phi_k] = 8\pi G(\dot{\Phi}\delta\dot{\Phi}_k - \phi_k\dot{\Phi}^2 - V_{,\Phi} \delta\Phi_k). \quad (4.14c)$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier correspondiente a la ecuación (4.11) resulta en

$$\ddot{\phi}_k + 6H\dot{\phi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + 2\dot{H} + 4H^2\right)\phi_k + 8\pi G V_{,\Phi} \delta\Phi_k = 0, \quad (4.15)$$

y la ecuación de Klein-Gordon perturbada (4.12) se transforma en

$$\delta\ddot{\Phi}_k + 3H\delta\dot{\Phi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,\Phi\Phi}\right)\delta\Phi_k + 2\phi_k V_{,\Phi} - 4\dot{\Phi}\dot{\phi}_k = 0. \quad (4.16)$$



---

El conjunto de ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.16) describen la evolución cosmológica, en el régimen lineal, para una perturbación de materia oscura escalar con número de onda  $k$ . La ec. (4.14a) está relacionada con la evolución cosmológica de la densidad de energía escalar; la ec. (4.14c) está relacionada con la dinámica de la presión escalar; la ec. (4.14b) describe la evolución del potencial gravitacional y finalmente las ecuaciones (4.15) y (4.16) describen la dinámica cosmológica de las perturbaciones al potencial gravitacional y al campo escalar respectivamente. Las ecuaciones (4.15) y (4.16) representan osciladores armónicos con términos de amortiguamiento debidos a la expansión del Universo que van como  $6H\dot{\phi}_k$  o  $3H\delta\dot{\Phi}_k$  respectivamente, más términos de una fuerza externa. Ahora, haciendo un análisis de la ecuación (4.15) se infiere que las fluctuaciones gravitacionales pueden crecer si se cumple la condición  $\frac{k^2}{a^2} + 2\dot{H} + 4H^2 < 0$ . Dado que el parámetro de Hubble es una función decreciente en el tiempo se tiene que  $\dot{H} < 0$  y, por lo tanto, el término  $2\dot{H}$  es negativo y así la última condición podría satisfacerse. En el caso de las perturbaciones de materia oscura escalar (ec. 4.16), la situación cambia dado que las perturbaciones solo pueden crecer si la condición  $\frac{k^2}{a^2} + V_{,\Phi\Phi} < 0$  se satisface. Esto sólo sucede si  $V_{,\Phi\Phi} < 0$  y  $k^2/a^2$  es suficiente pequeño. Esto último se puede dar en el siguiente escenario. Si suponemos que a épocas muy tempranas del Universo un campo escalar  $\tilde{\Phi}$  está acoplado al baño térmico con temperatura  $T$ , podemos considerar que su potencial escalar es tipo sombrero mexicano (Kolb & Turner 1990) corregido a un lazo dado por

$$V(\tilde{\Phi}) = -\frac{1}{2}\mathbf{m}^2\tilde{\Phi}^2 + \frac{\lambda}{4}\tilde{\Phi}^4 + \frac{\lambda}{8}T^2\tilde{\Phi}^2 - \frac{\pi}{90}T^4 + \frac{\mathbf{m}^4}{4\lambda}, \quad (4.17)$$

donde  $\mathbf{m}$  es un parámetro de masa y  $\lambda$  es una constante de auto interacción. Es importante notar que el término que contiene el parámetro de masa es negativo, por lo que, a cierta temperatura crítica el campo escalar puede experimentar un rompimiento de simetría. A esa temperatura crítica, el potencial escalar cumple con  $V_{,\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}} < 0$ . A una temperatura debajo de la crítica, el campo escalar experimenta una transición de fase y  $\tilde{\Phi} \rightarrow \Phi$ ,  $\mathbf{m} \rightarrow m$  y el potencial escalar resulta  $V(\Phi) = m^2\Phi^2/2$  (Magaña et al. 2012). Por lo tanto, una perturbación escalar sólo podría comenzar a crecer a partir de esta transición de fase del campo escalar. Después de esta transición, las fluctuaciones escalares podrían seguir creciendo hasta colapsar y formar estructuras gravitacionales que hagan el rol de halos de materia oscura.

Así, el término  $\left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,\Phi\Phi}\right)$  es muy importante en el estudio de las perturbaciones escalares ya que define un número de onda efectivo, equivalente al número de onda de Jeans para materia oscura fría, dado por

$$k_{efJ} \equiv \sqrt{a^2 V_{,\Phi\Phi}}, \quad (4.18)$$

## 4. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN LINEAL

---

de tal manera que una fluctuación  $\delta\Phi_k$  podrá crecer sólo si su número de onda satisface la relación  $k < k_{efJ}$ . Con lo anterior, es posible definir una longitud efectiva de Jeans (Ma et al. 1999, Hwang & Noh 2001, Mota & van de Bruck 2004, Khlopov et al. 1985) para el campo escalar con potencial cuadrático como

$$\lambda_{kefJ} \equiv 2\pi/a\sqrt{V_{,\Phi\Phi}} = 2\pi/ma. \quad (4.19)$$

Sólo las fluctuaciones escalares con escalas  $\lambda_k > \lambda_{kefJ}$  crecerán y formarán estructuras gravitacionales.

Es interesante que esta longitud efectiva de Jeans es inversamente proporcional al valor de la masa del bosón asociado al campo escalar. Por lo tanto, al fijar un valor para esta masa, se determina naturalmente un corte en el espectro de potencias de masa lo cual implica que en este modelo de materia oscura escalar es posible evitar el problema del exceso de subestructuras o galaxias satélites (Hu et al. 2000, Matos & Ureña-López 2001) del modelo estándar de materia oscura fría. Así, para la masa ultra ligera de  $\sim 10^{-23}$  eV, la longitud efectiva de Jeans para un campo escalar en la época de la recombinación ( $a \sim 10^{-3}$ ) es  $\lambda_{kefJ} \sim 4$  kpc.

Ya que es común que el crecimiento de una perturbación cosmológica se estudie mediante la evolución de la ecuación de su contraste de densidad, se derivará a continuación. Tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (4.7a), se obtiene

$$\delta\dot{\rho}_\Phi = (\ddot{\Phi} + V_{,\Phi})\delta\dot{\Phi} + (\delta\ddot{\Phi} + V_{,\Phi\Phi}\delta\Phi - \dot{\Phi}\dot{\phi})\dot{\Phi} - 2\phi\dot{\Phi}\ddot{\Phi}. \quad (4.20)$$

Desarrollando la transformada de Fourier de la ecuación (4.20) y sustituyendo las ecuaciones (1.31), (4.14) y (4.16), se llega a

$$\delta\dot{\rho}_\Phi = -6H\dot{\Phi}\delta\dot{\Phi}_k + 6\phi_k\dot{\Phi}^2H - \frac{2k^2}{a^2\kappa^2}(H\phi_k + \dot{\phi}_k) + 3\dot{\phi}_k\dot{\Phi}^2. \quad (4.21)$$

Además, de las ecuaciones (4.7a) y (4.7c), se tiene que

$$\delta P_\Phi + \delta\rho_\Phi = 2\dot{\Phi}\delta\dot{\Phi}_k - 2\dot{\Phi}^2\phi_k. \quad (4.22)$$

Así, sustituyendo (4.22) en la ecuación (4.21) se obtiene

$$\delta\dot{\rho}_\Phi = -3H(\delta P_\Phi + \delta\rho_\Phi) - \frac{2k^2}{a^2\kappa^2}(H\phi_k + \dot{\phi}_k) + 3\dot{\phi}_k\dot{\Phi}^2. \quad (4.23)$$

Además, del capítulo anterior, se sabe que

$$\dot{\rho}_\Phi = -3H(\rho_\Phi + P_\Phi). \quad (4.24)$$

---

Para obtener una ecuación de evolución para el contraste de densidad lineal de las perturbaciones al campo escalar se toma la derivada temporal de la definición de  $\delta = \delta\rho_\Phi/\rho_\Phi$  (ec. (4.1) obteniendo

$$\dot{\delta} = \frac{\delta\dot{\rho}_\Phi - \rho_\Phi\dot{\delta}}{\rho_\Phi}. \quad (4.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.30b), (4.23) y (4.24) en la ecuación (4.25) se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para el contraste de densidad lineal de la materia oscura escalar dada como

$$\dot{\delta} + 3H \left( \frac{\delta P_\Phi}{\delta\rho_\Phi} - \omega_\Phi \right) \delta = 3\dot{\phi}_k F_\Phi - G_\phi, \quad (4.26)$$

donde  $F_\phi$  se ha definido como

$$F_\Phi \equiv 1 + \omega_\Phi. \quad (4.27)$$

y la función  $G_\phi$  por

$$G_\phi \equiv \frac{2k^2}{a^2\kappa^2} \frac{\dot{\phi}_k + H\phi_k}{\rho_\Phi}. \quad (4.28)$$

La ecuación (4.26) resultante para materia oscura escalar difiere a la obtenida para el modelo de materia oscura fría dada por

$$\dot{\delta}_{CDM} = 3\dot{\phi}_{k,CDM}. \quad (4.29)$$

Además, dado que  $\delta\rho_\Phi$ ,  $\delta P_\Phi$ , y  $\omega_\Phi$  dependen de  $\Phi$  y  $\dot{\Phi}$ , que son funciones oscilatorias, entonces el contraste de densidad lineal de materia oscura escalar también presentará dichas oscilaciones. Sin embargo, tomando el promedio temporal de la ecuación (4.26) se tiene

$$\dot{\delta} + 3H \left( \left\langle \frac{\delta P_\Phi}{\delta\rho_\Phi} \right\rangle - \langle\omega_\Phi\rangle \right) \delta = 3\dot{\phi}_k \langle F_\Phi \rangle - \langle G_\phi \rangle. \quad (4.30)$$

De acuerdo a trabajos previos, en la época donde domina la radiación y en la época donde domina la materia, el término  $\langle\delta P_\Phi/\delta\rho_\Phi\rangle$  en la ec. (4.30) es  $\approx 0$  (ver por ejemplo Matos & Ureña-López 2001). Esto es porque  $\delta P_\Phi$  oscila muy rápido alrededor de cero, mientras que  $\delta\rho_\Phi$  permanece casi constante durante una oscilación  $\delta P_\Phi$ . Este comportamiento será confirmado numéricamente en §4.3. Sin embargo, el promedio temporal  $\left\langle \frac{\delta P_\Phi}{\delta\rho_\Phi} \right\rangle$  no necesariamente es idéntico a cero. Además, de la figura 3.10 del capítulo 3, se tiene que  $\langle\omega_\Phi\rangle \approx 0$ . Por otra parte, dado que se está usando una aproximación post-Newtoniana, el término  $G_\phi$  se puede ser despreciar, como los resultados numéricos confirmarán en la siguiente

## 4. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN LINEAL

---

sección. Así, la ecuación (4.30) del contraste de densidad para el campo escalar resulta

$$\dot{\delta} = 3\dot{\phi}_k. \quad (4.31)$$

Consecuentemente, no sólo el campo escalar  $\Phi$  se comporta muy similar a materia oscura fría en el Universo de fondo, las ecuaciones (4.30) y (4.31) indican que también las perturbaciones escalares  $y$ , por lo tanto, el comportamiento creciente de los modos  $k$  se recupera para el modelo de materia oscura escalar.

Ahora, ya tenemos todos los ingredientes para realizar un estudio numérico de las perturbaciones escalares.

### 4.3. Solución numérica de la evolución de las perturbaciones lineales escalares

En esta sección, se obtendrá una solución numérica para la evolución cosmológica de las fluctuaciones lineales escalares,  $\delta\rho_\Phi$ , así como del contraste de densidad lineal. Recuerde que las ecuaciones a resolver arrojarán resultados válidos sólo mientras se cumpla la condición  $\delta = \delta\rho_\Phi/\rho_\Phi \ll 1$ . Así, para resolver las ecuaciones (4.14), (4.15), (4.16) y (4.26) se definen las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned} l_1 &\equiv \phi_k, & l_2 &\equiv \dot{\phi}_k/H, & y_1 &= \delta, \\ z_1 &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{6}}\delta\Phi_k, & z_2 &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{6}}\frac{\delta\dot{\Phi}_k}{H}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Usando estas variables, las ecuaciones se pueden transformar en el siguiente sistema dinámico autónomo con respecto al número de *e-folding*

$$l'_1 = l_2, \quad (4.33a)$$

$$l'_2 = 3l_2 \left( \frac{\Pi}{2} - 2 \right) + l_1 (3\Pi - 4) - 6z_1 u s - \frac{k^2 s^2 l_1}{m^2 a^2}, \quad (4.33b)$$

$$z'_1 = z_2, \quad (4.33c)$$

$$z'_2 = 3z_2 \left( \frac{\Pi}{2} - 1 \right) - z_1 s^2 \left( \frac{k^2}{a^2 m^2} + 1 \right) - 2u s l_1 + 4l_2 x, \quad (4.33d)$$

$$y'_1 = -3 \left[ \left( \frac{xz_2 - x^2 l_1 - usz_1}{xz_2 - x^2 l_1 + usz_1} \right) - \omega_\Phi \right] y_1 + 3l_2 F_\Phi - \frac{G_\Phi}{H}, \quad (4.33e)$$

donde  $G_\Phi/H = 2k^2 s^2 (l_1 + l_2) / 3a^2 m^2 \Omega_\Phi$ . Estas ecuaciones de evolución dependen de las funciones  $s$ ,  $x$ ,  $u$ , y  $\Pi$  que fueron obtenidas numéricamente en la sección §3.4.4. Por otra parte, en vez de usar la ecuación diferencial (4.33e) para

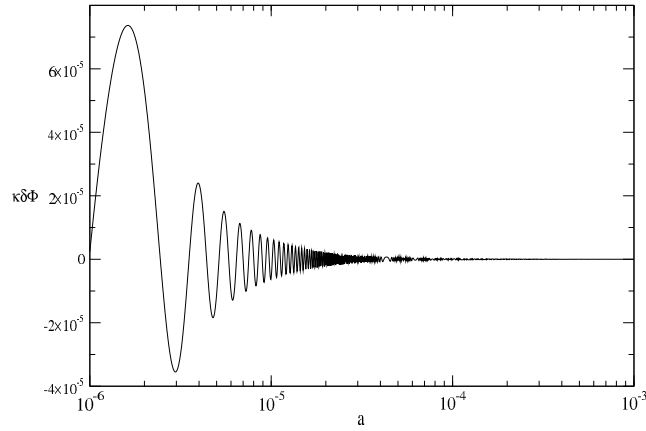


Figura 4.1: Evolución de la perturbación escalar  $\delta\Phi$  como función del factor de escala  $a$ .

el contraste de densidad lineal  $y_1$ , también es posible obtener una expresión algebraica para  $y_1$  usando las ecuaciones (1.30b) and (4.7a), que en términos de las variables adimensionales se escribe como

$$y_1 = \frac{2[x(z_2 - xl_1) + usz_1]}{\Omega_\Phi}. \quad (4.34)$$

Para obtener una solución numérica del sistema de ecuaciones (4.33) desde épocas muy tempranas del Universo hasta que  $y_1 \sim 1$ , se dan las condiciones iniciales en  $a_i = 10^{-6}$ . Dado que se pretende que las fluctuaciones de campo escalar crezcan de manera similar a las perturbaciones de materia oscura fría en la época donde domina la materia, se toma una longitud de la perturbación escalar de  $\lambda_k = 2$  Mpc, asegurando que  $\lambda_k \gg \lambda_{kefJ}$ . A esta época, se toma un contraste de densidad  $\delta = 1 \times 10^{-7}$ ,  $l_1 \sim 1 \times 10^{-5}$ ,  $l_2 \sim 5 \times 10^{-6}$ ,  $z_1 \sim 5 \times 10^{-5}$  y  $z_2 \sim 1 \times 10^{-4}$ . En el inicio de la integración numérica  $s \sim 8 \times 10^{-1}$ , por lo tanto, no es necesario usar el método semi-implícito para sistemas de ecuaciones rígidos y se usan los métodos RK4 y ABM.

En la figura 4.1 se muestra la evolución cosmológica del campo escalar perturbado como función del factor de escala  $a$ . A épocas muy tempranas del Universo, tanto el campo escalar como su perturbación están en equilibrio térmico con las demás componentes, por lo tanto, la amplitud de las oscilaciones de  $\delta\Phi$  es grande. Conforme el Universo se expande, el campo escalar se desacopla del resto de las diversas componentes del Universo alrededor de  $a \sim 10^{-4}$  y empieza a oscilar alrededor del mínimo del potencial escalar ( $\Phi_{min} = 0$ ). Su perturbación  $\delta\Phi$  también oscilará y se estabilizará alrededor de este mínimo, disminuyendo la amplitud de sus oscilaciones.

## 4. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN LINEAL

---

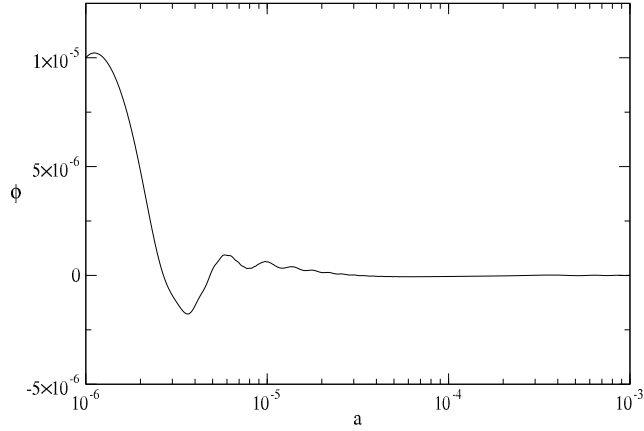


Figura 4.2: Evolución del potencial gravitacional  $\phi$  como función del factor de escala  $a$ .

La evolución del potencial gravitacional  $\phi$  de la fluctuación escalar se muestra en la figura 4.2. A épocas tempranas del Universo,  $\phi$  tiene una amplitud considerable ( $\sim 10^{-5}$ ) debido a las interacciones gravitacionales de la materia oscura escalar con la radiación. Con la expansión del Universo, las interacciones gravitacionales entre la radiación y el campo escalar disminuyen y, por lo tanto, también el potencial gravitacional. Cuando la materia oscura escalar se desacopla de la radiación, el potencial gravitacional permanece constante. La dinámica cosmológica de  $\phi$  es muy similar a la que se obtiene en el modelo de materia oscura fría (ver por ejemplo los resultados de [Ma & Bertschinger 1995](#)). En la figura 4.3 se muestra la evolución cosmológica de la sobredensidad  $\delta\rho_\Phi$  (panel izquierdo) y de la presión perturbada  $\delta P_\Phi$  (panel derecho).

En esta figura se puede observar que  $\delta P_\Phi$  presenta muchas oscilaciones en una sola oscilación de  $\delta\rho_\Phi$ . Además, también se puede observar que si se toma el promedio temporal de  $\langle\delta P_\Phi\rangle$  este es  $\approx 0$ . Esto resulta importante en la dinámica del contraste de densidad como se verá a continuación. En la figura 4.4 se muestra la evolución cosmológica de  $\delta P_\Phi/\delta\rho_\Phi$ . De esta gráfica se observa que el promedio temporal de este cociente  $\langle\delta P_\Phi/\delta\rho_\Phi\rangle$  es  $\approx 0$  (aunque no necesariamente es idéntico a cero). Como ya se mencionó, la razón principal de que este promedio tienda a cero, es el hecho de que  $\langle\delta P_\Phi\rangle \approx 0$ . Los pulsos que se observan, por ejemplo en  $a \sim 4 \times 10^{-6}$ , se deben a que  $\delta\rho_\Phi$  atraviesa su punto de equilibrio.

Ahora, se analizará el comportamiento de los términos extras  $F_\Phi$  y  $G_\phi$  de la ecuación (4.30). En la figura 4.5 se muestra que el promedio temporal de  $\langle F_\Phi\rangle$  tiende a 1. Por otra parte, en la figura 4.6 se muestra la evolución de  $G_\phi$  con respecto al factor de escala  $a$ . De esta gráfica se observa que  $G_\phi$  se mantiene casi alrededor de cero en toda la evolución numérica y presenta pequeñas oscilaciones

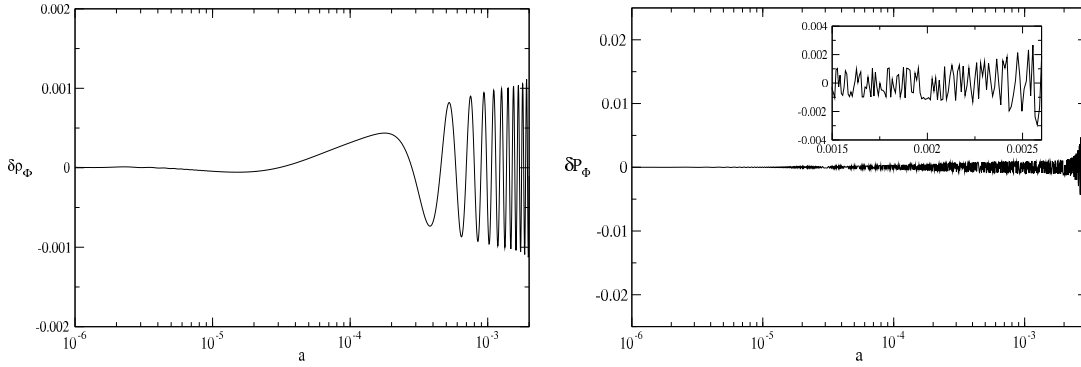


Figura 4.3: Evolución cosmológica de la densidad de campo escalar perturbada  $\delta\rho_\phi$  (panel izquierdo) y presión escalar perturbada  $\delta P_\phi$  (panel derecho). El recuadro de esta última gráfica muestra las oscilaciones de la presión escalar perturbada en el intervalo  $1.5 \times 10^{-3} < a < 2.5 \times 10^{-3}$ .

en la época de la recombinación debido a la expansión del Universo y por tanto del incremento de  $s$ . Así, el promedio temporal  $\langle G_\phi \rangle \approx 0$ , por lo que, el segundo término en el lado derecho de la ecuación (4.30) se puede despreciar. En el capítulo anterior se vió que  $\langle \omega_\phi \rangle \rightarrow 0$  (ver Fig. 3.10), por lo tanto, cuando se toma el promedio temporal de la ecuación (4.30) del contraste de densidad lineal para materia oscura escalar los resultados numéricos confirman que se reduce a la ecuación (4.29) la del modelo de materia oscura fría.

Finalmente, en la figura 4.7 se muestra la evolución del contraste de densidad de materia oscura escalar como función de  $a$ . Para corroborar la convergencia de la integración numérica, en esta gráfica se muestran los resultados obtenidos al resolver la ecuación diferencial (4.33e) y la expresión algebraica (4.34). Dado que las dos curvas se sobrepone, se puede concluir que la solución numérica converge. Así, se observa que el contraste de densidad evoluciona suavemente a épocas tempranas del Universo. Posteriormente,  $\delta$  comienza a crecer alrededor de  $a \sim 5 \times 10^{-4}$ . Las pequeñas fluctuaciones en el contraste de densidad de materia oscura escalar son suficientes para inducir la formación de estructuras gravitacionales en el Universo. Por lo tanto, la regiones con pequeñas sobredensidades y longitudes mayores a la longitud efectiva de Jeans para una determinada época, podrían formar los halos oscuros de las galaxias. Sin embargo, como se verá en el siguiente capítulo, las estructuras gravitacionales de campo escalar colapsan y virializan más temprano que las de materia oscura fría. Durante y después de la época de la recombinación, el contraste de densidad lineal de la materia oscura escalar parece crecer de la misma manera que la del modelo estándar de materia oscura fría como ya se ha visto analizando la ecuación (4.30) (Ma & Bertschinger 1995). Esto implica que si el campo escalar está oscilando alrededor del mínimo

## 4. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN LINEAL

---

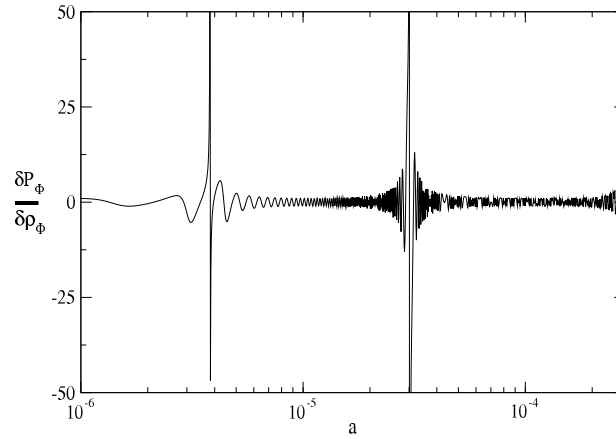


Figura 4.4: Evolución del término  $\frac{\delta P_\Phi}{\delta \rho_\Phi}$  vs.  $a$  que aparece en el lado izquierdo de la ecuación del contraste de densidad lineal (4.30).

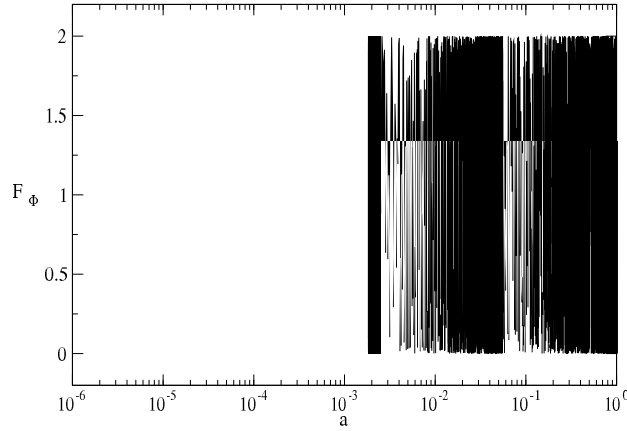


Figura 4.5: Evolución del término  $\langle F_\Phi \rangle$  de la ecuación (4.30).

del potencial escalar cuadrático, el campo escalar se comporta en un Universo FLRW como materia oscura fría y además sus perturbaciones crecen como las del modelo estándar. En resumen, a pesar de que la evolución numérica del sistema (4.33) es complicada debido a las oscilaciones del campo escalar, se pudo obtener una solución convergente. Tomando los promedios temporales de las diversas cantidades relacionadas con el campo escalar y sus perturbaciones, se concluye que el contraste de densidad de materia oscura escalar crece de la misma manera que el contraste de densidad de materia oscura fría. Esto último es otro de los resultados importantes de la presente tesis.



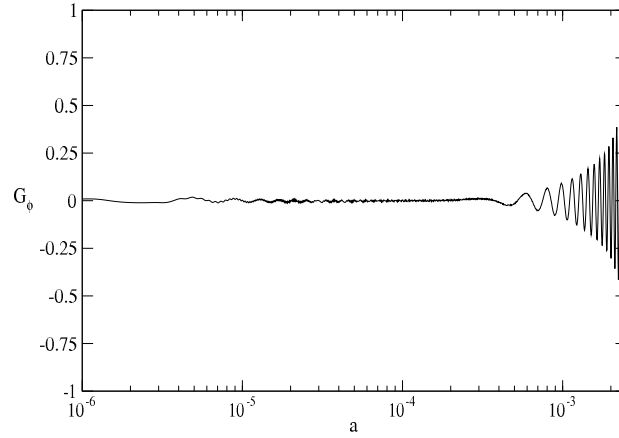


Figura 4.6: Evolución del término  $\langle G_\phi \rangle$  de la ecuación (4.30).

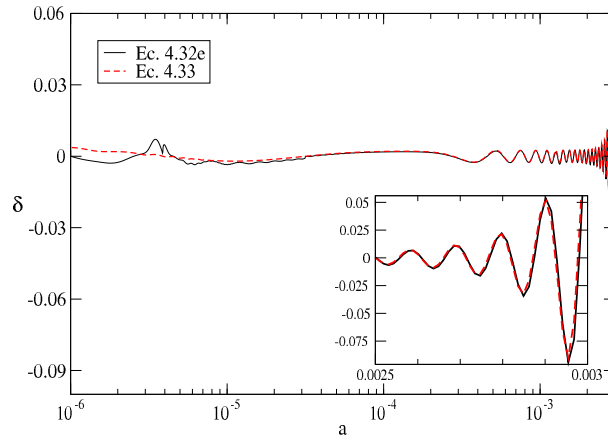


Figura 4.7: Evolución del contraste de densidad lineal  $\delta$  de materia oscura escalar para una perturbación con  $\lambda_k \sim 2$  Mpc calculada con la ecuación diferencial (4.33e) y la expresión algebraica (4.34). El recuadro muestra las oscilaciones del contraste de densidad cuando  $a > 10^{-3}$ .

#### **4. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN LINEAL**

---

# Capítulo 5

## Formación de estructuras: perturbaciones escalares en el régimen no lineal

### 5.1. Introducción

En el capítulo anterior, se estudió la dinámica de las perturbaciones de la materia oscura escalar en el régimen lineal. En este límite, las perturbaciones escalares tienen un comportamiento creciente similar al obtenido para el modelo CDM. En este capítulo se estudiará la evolución cosmológica de las perturbaciones de la materia oscura escalar en el régimen no lineal (NL), es decir, cuando el contraste de densidad es  $\delta \gg 1$ . El estudio de las fluctuaciones escalares en este régimen se ha abordado con enfoques analíticos y numéricos. Por ejemplo, un primer estudio realizado sobre la inestabilidades gravitacionales no lineales de un campos escalar cosmológico fue desarrollado por [Khlopov et al. \(1985\)](#). Recientemente, [Woo & Chiueh \(2009\)](#) desarrolló un estudio numérico de la formación de estructuras y del espectro de potencias de masa para un modelo de materia oscura como campo escalar y condensados de Bose-Einstein. Aquí, el estudio del proceso de formación de estructuras con un campo escalar se hará en el marco del modelo de colapso esférico ([Padmanabhan 1993](#)). Este análisis se desarrollará a partir del final de la integración numérica del régimen lineal, es decir, en la época de la recombinación cuando  $a \sim 10^{-3}$ . Nuevamente se considera un potencial escalar cuadrático y una masa escalar ultra ligera de  $m \sim 10^{-23}$  eV. Con el objetivo de investigar si las fluctuaciones escalares pueden colapsar a una estructura virial se reescribirán las ecuaciones como un sistema dinámico autónomo y se resolverá numéricamente.

## 5.2. El modelo de colapso esférico

El modelo de colapso esférico propuesto por [Gunn & Gott \(1972\)](#) es una herramienta simple pero fundamental para entender el crecimiento de las fluctuaciones de materia en el Universo. Este modelo considera que las estructuras gravitacionales en el Universo se pueden describir mediante la evolución de una región esférica con una pequeña sobredensidad cosmológica, es decir, que la sobredensidad sólo depende del tiempo y no de las coordenadas espaciales, este perfil de densidad se conoce como *top-hat*. A épocas muy tempranas del Universo, esta región esférica evoluciona junto con el Universo de fondo. Posteriormente, a una determinada época, debido a su sobredensidad, esta región se desacopla de la expansión general del Universo, empieza a frenarse, alcanza un radio máximo  $R_{max}$  y eventualmente comenzará a colapsarse virializándose y estabilizándose a una región de tamaño finito. A pesar de ser un esquema sencillo, con el modelo del colapso esférico se puede inferir, aceptablemente, la época del colapso de una perturbación así como su contraste de densidad a cada momento de su evolución. Es por esto que el modelo de colapso esférico se ha usado ampliamente para estudiar las fluctuaciones de campos escalares como energía oscura ([Wang & Steinhardt 1998](#), [Weinberg & Kamionkowski 2003](#), [Mota & van de Bruck 2004](#), [Horellou & Berge 2005](#), [Maor & Lahav 2005](#), [Nunes & Mota 2006](#), [Wang 2006](#)). No obstante, el modelo de colapso esférico con un modelo de materia oscura con campo escalar aún no se ha estudiado.

Para iniciar este estudio consideramos una región esférica sobredensa, que llamaremos cúmulo, embebida en el Universo de fondo descrito en la sección §3.4. Este cúmulo, se concibe como una pequeña perturbación escalar con perfil de densidad *top-hat*. Como ya se mencionó, este cúmulo eventualmente colapsará implicando que su curvatura no será constante, por lo que, la dinámica de esta región no puede ser descrita por la ecuación de Friedmann. Siguiendo el formalismo del modelo de colapso esférico, las ecuaciones que rigen la evolución del cúmulo con un campo escalar perturbado,  $\Phi_p$ , son la ecuación de Raychauduri y la ecuación de Klein-Gordon perturbada dadas respectivamente por

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{\kappa^2}{6} (\rho_{\Phi_p} + \rho_b + \rho_z + \rho_\nu + \rho_\Lambda + 3P_{\Phi_p} + 3P_z + 3P_\nu + 3P_\Lambda), \quad (5.1)$$

$$\ddot{\Phi}_p + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{\Phi}_p + V_{p,\Phi_p} = 0, \quad (5.2)$$

donde  $R$  es el radio del cúmulo,  $V_p \equiv V(\Phi_p)$  es el potencial escalar perturbado,  $\rho_b$ ,  $\rho_z$  ( $P_z$ ),  $\rho_\nu$  ( $P_\nu$ ),  $\rho_\Lambda$  ( $P_\Lambda$ ) son las densidades (presiones) no perturbadas de bariones, radiación, neutrinos y constante cosmológica respectivamente. Los puntos sobre las variables,  $\dot{\xi} \equiv \frac{d\xi}{dt}$ , denotan derivadas con respecto al tiempo cosmológico. Además, el campo escalar perturbado del cúmulo está dado por

---

$\Phi_p = \Phi + \delta\Phi(R_i, t)$ , donde  $\Phi = \Phi(t)$  es el campo escalar del Universo de fondo y  $\delta\Phi$  es una pequeña perturbación escalar. Es importante enfatizar que  $\delta\Phi$  no depende de las coordenadas espaciales. Por lo tanto, esta perturbación escalar es homogénea dentro del cúmulo (asegurando así un perfil de densidad *top-hat*) y ésta sólo depende del radio inicial  $R_i$  del cúmulo y del tiempo. La densidad escalar perturbada  $\rho_{\Phi_p}$  y la presión  $P_{\Phi_p}$  dentro del cúmulo están definidas como

$$\rho_{\Phi_p} \equiv \rho_{\Phi} + \delta\rho_{\Phi}, \quad (5.3)$$

$$P_{\Phi_p} \equiv P_{\Phi} + \delta P_{\Phi}, \quad (5.4)$$

donde  $\delta\rho_{\Phi}$  está dado por

$$\delta\rho_{\Phi} = \frac{1}{2}\delta\dot{\Phi}^2 + \dot{\Phi}\delta\dot{\Phi} + V_{,\Phi}\delta\Phi, \quad (5.5)$$

y  $\delta P_{\Phi}$  como

$$\delta P_{\Phi} = \frac{1}{2}\delta\dot{\Phi}^2 + \dot{\Phi}\delta\dot{\Phi} - V_{,\Phi}\delta\Phi. \quad (5.6)$$

Nótese que las ecuaciones (5.5) y (5.6) difieren de (4.7a) y (4.7c) en que aquí despreciamos los términos que dependen de las coordenadas espaciales pero no los términos de segundo orden. La ecuación de estado,  $\omega_{\Phi_p}$ , para el campo escalar perturbado  $\Phi_p$  del cúmulo se define como  $P_{\Phi_p}/\rho_{\Phi_p}$ . Al igual que la ecuación de estado  $\omega_{\Phi}$  para el Universo de fondo, esta también presentará oscilaciones.

Dado que el interés radica en el crecimiento de las perturbaciones escalares, en el análisis de la dinámica del cúmulo no se han tomado en cuenta las perturbaciones de los componentes de radiación dado que no tienen modos crecientes que afecten al proceso de formación de estructuras. Asimismo, tampoco se han incluido las perturbaciones bariónicas porque se supone que los bariones serán atraídos por el potencial gravitacional del halo escalar virializado. Por otra parte, las perturbaciones de energía oscura (constante cosmológica) no son importantes a escalas por debajo de 100 Mpc (Caldwell et al. 1998, Wang 2006). Además, los efectos de algún tipo de energía oscura sobre la virialización de la materia oscura todavía es un tema abierto.

Sustituyendo (5.5) y (5.6) en las expresiones para  $\rho_{\Phi_p}$  y  $P_{\Phi_p}$  y posteriormente en (5.1) y (5.2) se tiene que

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{\kappa^2}{6} \left( 2\dot{\Phi}^2 + 4\dot{\Phi}\delta\dot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi}^2 - 2V - 2\delta\Phi V_{,\Phi} + \rho_b + 2\rho_z + 2\rho_\nu - 2\rho_\Lambda \right), \quad (5.7)$$

$$\delta\ddot{\Phi} = -3\frac{\dot{R}}{R}\delta\dot{\Phi} - 3\dot{\Phi} \left( \frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{a}}{a} \right) - \delta\Phi V_{,\Phi\Phi}. \quad (5.8)$$

## 5. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN NO LINEAL

---

Ahora, asumiendo el potencial escalar cuadrático  $V = m^2\Phi^2/2$ , las ecuaciones que describen la dinámica del cúmulo resultan en

$$\delta\rho_\Phi = \frac{1}{2}\delta\dot{\Phi}^2 + \dot{\Phi}\delta\dot{\Phi} + m^2\Phi\delta\Phi, \quad (5.9a)$$

$$\delta P_\Phi = \frac{1}{2}\delta\dot{\Phi}^2 + \dot{\Phi}\delta\dot{\Phi} - m^2\Phi\delta\Phi, \quad (5.9b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{R}}{R} = & -\frac{\kappa^2}{6} \left( 2\dot{\Phi}^2 + 4\dot{\Phi}\delta\dot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi}^2 - m^2\Phi^2 - 2m^2\Phi\delta\Phi \right. \\ & \left. + \rho_b + 2\rho_z + 2\rho_\nu - 2\rho_\Lambda \right), \end{aligned} \quad (5.10a)$$

$$\delta\ddot{\Phi} = -3\frac{\dot{R}}{R}\delta\dot{\Phi} - 3\dot{\Phi}\left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{a}}{a}\right) - m^2\delta\Phi. \quad (5.10b)$$

Al igual que en el régimen lineal, es común estudiar las perturbaciones cosmológicas mediante la ecuación del contraste de densidad no lineal definida como

$$\delta_{nl} \equiv \delta\rho_\Phi/\rho_\Phi, \quad (5.11)$$

donde  $\rho_{\Phi_0}$  y  $\delta\rho_\Phi$  están dadas por las ecuaciones (1.30b) y (5.9a). Así, para obtener una ecuación de evolución para el contraste de densidad no lineal de las perturbaciones al campo escalar se toma la derivada temporal de la ecuación (5.11) obteniendo

$$\dot{\delta}_{nl} = \frac{\delta\dot{\rho}_\Phi - \dot{\rho}_\Phi\delta_{nl}}{\rho_\Phi}. \quad (5.12)$$

Tomando la derivada temporal de (5.9a) y combinando con la ecuación (1.31) se llega a

$$\delta\dot{\rho}_\Phi = \delta\ddot{\Phi}(\dot{\Phi} + \delta\dot{\Phi}) + \dot{\Phi}(m^2\delta\Phi - 3H\delta\dot{\Phi}). \quad (5.13)$$

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned} \rho_\Phi + P_\Phi &= \dot{\Phi}^2, \\ \delta\rho_\Phi + \delta P_\Phi &= \delta\dot{\Phi}^2 + 2\dot{\Phi}\delta\dot{\Phi}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Así, sustituyendo las ecuaciones (5.10b) y (5.14) en (5.13) se obtiene

$$\delta\dot{\rho}_\Phi = -3\frac{\dot{R}}{R}(\delta\rho_\Phi + \delta P_\Phi) + 3(\rho_\Phi + P_\Phi)\left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{a}}{a}\right) - m^2\delta\Phi\delta\dot{\Phi}. \quad (5.15)$$

---

Al sustituir la última ecuación (5.15) y (1.30b) en la ecuación (5.12), se obtiene la ecuación diferencial para el contraste de densidad no lineal para materia oscura escalar

$$\dot{\delta}_{nl} = -3 \left[ \frac{\dot{R}}{R} \left( 1 + \frac{\delta P_\Phi}{\delta \rho_\Phi} \right) + F_\Phi H \right] \delta_{nl} + 3F_\Phi \left( H - \frac{\dot{R}}{R} \right) - I_{\delta\Phi}. \quad (5.16)$$

Recuerde que la función  $F_\Phi$  está dada por (4.27) y se ha definido la función  $I_{\delta\Phi} \equiv m^2 \delta\Phi \dot{\delta\Phi} / \rho_\Phi$ .

### 5.3. Virialización del cúmulo

En esta sección se darán las relaciones de las cantidades físicas del cúmulo entre el punto de su máxima expansión y de su virialización. Como ya se mencionó, el cúmulo evoluciona con la expansión del Universo pero debido a su sobredensidad  $\delta\rho_\Phi$  empieza a desacoplarse lentamente del Universo de fondo alcanzando un radio máximo  $R_{max}$ . Posteriormente, el cúmulo continúa su evolución y comienza a colapsarse hasta que  $R = 0$ . Sin embargo, esto no sucede físicamente y resulta de nuestra suposición de colapso radial. En realidad, el cúmulo debe virializarse y formar una estructura gravitacional de tamaño finito. Para calcular el radio virial  $R_{vir}$  de esta configuración gravitacional escalar se usa el principio de conservación de la energía y del teorema virial aplicado para esta región esférica.

Primero, se considera que hay conservación de energía entre el punto de máxima expansión y el tiempo de virialización. Esta condición de equilibrio es

$$\begin{aligned} E_{Tot}|_{max} &= E_{Tot}|_{vir}, \\ U|_{max} &= (T + U)|_{vir}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde  $E_{Tot} = T + U$  es la energía total del cúmulo,  $T$  es su energía cinética y  $U$  su energía potencial. En el tiempo de máxima expansión se tiene que  $\dot{R}|_{max} = 0$ , por lo tanto,  $T_{max} = 0$ .

Por otra parte, aplicando el teorema del virial (para la validez del teorema del virial en subsistemas con campos escalares ver [Maor & Lahav 2005](#), [Caimmi 2007](#)) en el instante donde ocurre la virialización se tiene

$$2T_{vir} + U_{vir} = 0. \quad (5.18)$$

Es usual relacionar la energía cinética  $T$  a la energía potencial  $U$  mediante

$$2T_{vir} - \left( R \frac{\partial U}{\partial R} \right)_{vir} = 0. \quad (5.19)$$

## 5. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN NO LINEAL

---

Combinando las ecs. (5.17) y (5.19), se puede obtener el radio virial  $R_{vir}$  de la estructura gravitacional escalar. Para hacer esto, es necesario calcular la energía potencial para todo el sistema, incluyendo la energía potencial de la interacción entre la materia oscura escalar y todas las demás componentes del sistema (ver [Caimmi 2007](#), para una discusión). Sin embargo, aquí se asume que los efectos de las otras componentes se pueden despreciar dado que sus densidades son más pequeñas que la densidad de materia oscura escalar. Además, por simplicidad, el término debido a la constante cosmológica es despreciado. Así, solamente se calcula la auto energía potencial,  $U_{\Phi_p}$ , debido al campo escalar  $\Phi_p$  del cúmulo y está dada por ([Landau & Lifshitz 1975](#))

$$U_{\Phi_p} = 2\pi \int_0^R \rho_{\Phi_p} \phi r^2 dr, \quad (5.20)$$

donde  $\phi$  es el potencial gravitacional no lineal debido a la materia oscura escalar dentro del cúmulo y está dado por

$$\phi(r) = -\frac{\kappa^2}{4}(1 + 3\omega_{\Phi_p})\rho_{\Phi_p} \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right). \quad (5.21)$$

Un punto importante a notar en la última ecuación es que se ha tomado en cuenta la contribución de la presión escalar debido a  $\Phi_p$  dado que la ecuación de Poisson de  $\phi$ , con correcciones relativistas ([Mota & van de Bruck 2004](#), [Nunes & Mota 2006](#)), está dada por

$$\nabla^2 \phi = \frac{\kappa^2}{2} (\rho_{\Phi_p} + P_{\Phi_p}). \quad (5.22)$$

Sustituyendo la ecuación (5.21) en la ecuación (5.20) se tiene que

$$U_{\Phi_p} = -\frac{16}{15}\pi^2 (1 + 3\omega_{\Phi_p}) G\rho_{\Phi_p}^2 R^5. \quad (5.23)$$

Combinando las ecuaciones (5.23), (5.17) y (5.19) conduce a la relación

$$(1 + 3\omega_{\Phi_{p_{vir}}}) \rho_{\Phi_{p_{vir}}} \eta^5 = -\frac{2}{3} (1 + 3\omega_{\Phi_{pta}}) \rho_{\Phi_{pta}}, \quad (5.24)$$

donde se ha definido el radio fraccional  $\eta \equiv R_{vir}/R_{ta}$ . Puesto que el lado derecho de la ecuación anterior solamente depende de cantidades en el tiempo de máxima expansión, este resulta ser una constante que puede ser calculada numéricamente. Por lo tanto, la ecuación (5.24) permite encontrar  $R$ ,  $\rho_{\Phi_p}$  and  $\omega_{\Phi_p}$  al tiempo de virialización cuando esta se satisface.



---

## 5.4. Solución numérica de la evolución de las perturbaciones no lineales escalares

Para resolver el sistema de ecuaciones (5.10) y (5.16) se definen las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv mR, & r_2 &\equiv \dot{R}, & y_2 &= \delta_{nl}, \\ z_3 &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{m\delta\Phi}{H}, & z_4 &\equiv \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{\delta\dot{\Phi}}{H}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Usando estas variables, las ecuaciones que describen la evolución del cúmulo se pueden transformar en un sistema dinámico autónomo con respecto al número de *e-folding*,  $N$ , dado por

$$r_1' = sr_2, \quad (5.26a)$$

$$r_2' = \frac{r_1}{s} \left( -2x^2 - 4xz_4 - 2z_4^2 + u^2 + 2uz_3 + l^2 - \frac{b^2}{2} - z^2 - \nu^2 \right), \quad (5.26b)$$

$$z_3' = sz_4 + \frac{3}{2}\Pi z_3, \quad (5.26c)$$

$$z_4' = -3x \left( \frac{r_2}{r_1} s - 1 \right) - sz_3 - 3\frac{r_2}{r_1} sz_4 + \frac{3}{2}\Pi z_4, \quad (5.26d)$$

$$\begin{aligned} y_2' &= -3 \left[ \frac{r_2}{r_1} s \left( 1 + \frac{z_4^2 + 2xz_4 - 2uz_3}{z_4^2 + 2xz_4 + 2uz_3} \right) + F_\Phi \right] y_2 \\ &\quad + 3F_\Phi \left( 1 - \frac{r_2}{r_1} s \right) - \frac{I_{\delta\Phi}}{H}, \end{aligned} \quad (5.26e)$$

donde las funciones  $s$ ,  $x$ ,  $u$ ,  $l$ ,  $b$ ,  $z$ ,  $\nu$  y  $\Pi$  fueron determinadas en §3.4.4 y la función  $I_{\delta\Phi}$  queda expresada como  $I_{\delta\Phi}/H = 2sz_3z_4/\Omega_\Phi$ . Además, al igual que en el caso del régimen lineal, también es posible obtener una expresión algebraica para el contraste de densidad no lineal. Sustituyendo las ecuaciones (1.30b) y (5.9a) en (5.11), se obtiene la ecuación algebraica de  $y_2$  que en términos de las variables adimensionales se escribe como

$$y_2 = \frac{z_4^2 + 2xz_4 + 2uz_3}{\Omega_\Phi}. \quad (5.27)$$

Para determinar si las perturbaciones escalares pueden colapsar y formar estructuras gravitacionales se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones (5.26e) tomando las condiciones iniciales en la era de la recombinación cuando  $a_i = 10^{-3}$ . A esta época, la variable relacionada con el radio del horizonte (ec. 3.35) tiene un valor de  $s \approx 3.5 \times 10^5$ , por lo tanto, no es necesario usar el integrador semi-implícito dado que es posible realizar la integración numérica con los

## 5. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN NO LINEAL

---

métodos RK4 y ABM con una alta resolución, con número de pasos de integración del orden de  $N_p = 1 \times 10^8$ , asegurando así la convergencia de la solución.

Dado que el interés radica en estudiar el comportamiento de una perturbación escalar a lo largo de toda la evolución cosmológica del Universo, nuevamente consideramos una fluctuación escalar con radio inicial  $R_i = 2$  Mpc y contraste de densidad  $\delta_{nl} = y_2 = 1 \times 10^{-5}$ . Además se toma una masa del campo escalar ultra ligera  $m = 1 \times 10^{-23}$  eV. Así, resulta que  $r_1 \sim 3 \times 10^6$ ,  $r_2 \sim 0$ ,  $z_3 \sim 2.5 \times 10^{-5}$  y  $z_4 \sim 4 \times 10^{-6}$ .

En la figura 5.1 se muestra la evolución del campo escalar perturbado  $\Phi_P$  con respecto al factor de escala  $a$ . En la época de la recombinación,  $\Phi_P$  oscila alrededor de cero con amplitudes muy pequeñas, esto es debido a que en  $a = 10^{-3}$  la perturbación  $\delta\Phi$  también es pequeña (ver fig. 4.1). Sin embargo, la amplitud de las oscilaciones de  $\Phi_P$  crecen muy rápido en el intervalo  $5 \times 10^{-3} < a < 6 \times 10^{-3}$ .

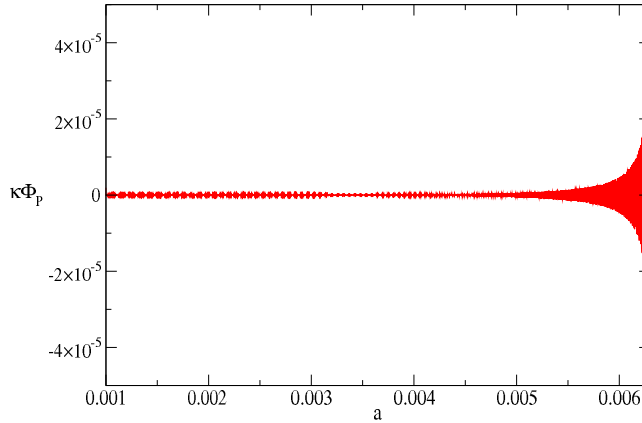


Figura 5.1: Evolución del campo escalar perturbado  $\Phi_P$ . Observe que la amplitud de las oscilaciones crecen en un intervalo de tiempo muy corto.

En la figura 5.2 se muestra la evolución con respecto al factor de escala  $a$  del radio del cúmulo  $R$ , normalizado al radio máximo, para el modelo SFDM y el modelo CDM. En esta gráfica se observa que inicialmente  $R$  evoluciona de acuerdo a la expansión del Universo de fondo. Posteriormente,  $R$  alcanza un máximo  $R_{max}$  (de tal manera que  $\dot{R} = 0$ ) y comienza a colapsar. Para la perturbación escalar, el punto de máxima expansión ocurre a  $a_{max} \sim 5.86 \times 10^{-3}$ , es decir, a un corrimiento al rojo de  $z_{max} \sim 170$ . Finalmente,  $R$  comienza a decrecer hasta colapsar a  $R = 0$ . Como se discutió en §5.3, esto no sucede físicamente y por lo tanto es necesario usar la relación (5.24) para determinar a qué tiempo ocurre la virialización. No obstante, se observa que el colapso de las fluctuaciones escalares ocurre a épocas

más tempranas que el de las perturbaciones de materia oscura fría. Las causas de este colapso temprano de la materia oscura escalar se discutirán más adelante.

En la figura 5.3 se muestra la evolución cosmológica para el contraste de densidad no lineal de materia oscura escalar. De la gráfica se puede observar que al inicio de la evolución  $\delta_{nl}$  es muy pequeña y aunque presenta oscilaciones, estas son imperceptibles. Sin embargo, el contraste de densidad escalar tiene un crecimiento súbito a partir de  $a \sim 0.006$  y sus oscilaciones se hacen notables.

Por otra parte, recuerde que la transición entre el régimen lineal ( $\delta \ll 1$ ) y el régimen no lineal ( $\delta \gg 1$ ) ocurre cuando el contraste de densidad es  $\delta = 1$ .

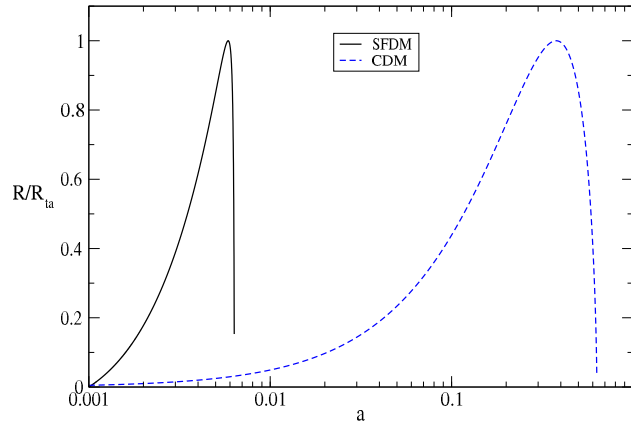


Figura 5.2: Evolución del radio de una perturbación (cúmulo) con tamaño inicial de 2 Mpc para materia oscura escalar (línea continua) y materia oscura fría (línea cortada). El radio  $R$  se ha normalizado al radio máximo  $R_{max}$ . Observe que  $R$  se expande, alcanza un máximo y eventualmente colapsa. El colapso hacia  $R = 0$  no es real dado que la región virializa al romperse la simetría radial. Un resultado importante del modelo de materia oscura escalar es que sus perturbaciones colapsan mucho más temprano que las fluctuaciones del modelo estándar.

De la gráfica (5.3), se obtiene que, para materia oscura escalar, esta transición ocurre cuando  $a_{tr} \sim 5.54 \times 10^{-3}$ . Asimismo, el contraste de densidad en el punto de máxima expansión es  $\delta_{max} \sim 49.94$ . En un modelo cosmológico Einstein-de Sitter donde el parámetro de densidad de materia oscura es  $\Omega_{CDM} = 1$ , el contraste de densidad en el punto de máxima expansión es  $\sim 4.6$ . Al comparar estos paradigmas, se concluye que en el punto de máxima expansión, las perturbaciones escalares son más densas que las fluctuaciones de materia oscura fría. El tiempo de virialización, el radio virial y el contraste de densidad no lineal virial se determinan analizando numéricamente la relación (5.24) hasta que la igualdad se satisface. Así, se obtiene que la perturbación escalar virializa cuando el factor de

## 5. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN NO LINEAL

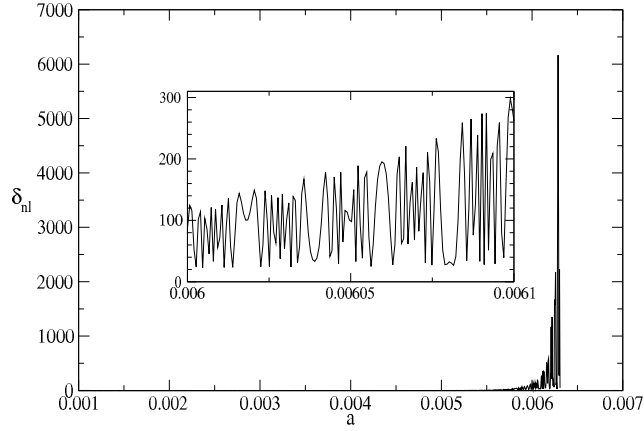


Figura 5.3: Evolución del contraste de densidad en el régimen no lineal de materia oscura escalar. El recuadro muestra las oscilaciones con alta frecuencia del contraste de densidad a tiempos cercanos a la virialización.

escala es  $a_{vir} \sim 6.3 \times 10^{-3}$ , esto es un corrimiento al rojo de  $z_{vir} \sim 158$ . Esto significa que las sobredensidades escalares colapsan y virializan más temprano que en el paradigma estándar y, por lo tanto, los halos oscuros se forman a épocas tempranas del Universo. Como ya se mencionó, el crecimiento en amplitud de las oscilaciones  $\Phi_P$  implica un incremento de la densidad de energía escalar perturbada  $\rho_{\Phi_p}$  y de la presión escalar perturbada  $P_{\Phi_p}$  en la ecuación (5.1) siendo así el responsable del colapso temprano. La razón de por qué la dinámica del campo escalar perturbado dentro de la región esférica contribuye significativamente a este colapso temprano es claro cuando se analiza la ecuación de Poisson (5.22) para el potencial gravitacional. En esta ecuación se observa que para el caso de un campo escalar, su presión tiene una contribución importante al potencial gravitacional  $\phi$ , en contraste con el caso de las perturbaciones de materia oscura fría donde la densidad es la única que contribuye al potencial gravitacional y la presión es despreciable. Así, la presión escalar  $P_{\Phi_p}$  tiene un papel muy importante en el proceso de formación de las estructuras gravitacionales en este modelo alternativo.

Por lo tanto, mientras en el régimen lineal las perturbaciones de materia oscura escalar se comportan como perturbaciones de materia oscura fría, en el régimen no lineal las perturbaciones escalares podrían formar estructuras gravitacionales a épocas tempranas del Universo. A pesar de ser una predicción controversial, diversos estudios sugieren que los halos oscuros se pudieron formar a altos corrimientos al rojo (Cimatti et al. 2004). Este resultado es uno de las conclusiones importantes de la presente tesis ya que confirma diversos estudios previos acerca de la formación de estructuras con materia oscura escalar y materia oscura como CBE en los cuales se llega a las mismas conclusiones.

---

Finalmente, el contraste de densidad escalar al tiempo de la virialización tiene un valor de  $\delta_{vir} \sim 240 - 3680$  (el intervalo es debido a las oscilaciones en el contraste de densidad que hacen difícil determinar un valor exacto). Este valor es mucho más grande que las predicciones del modelo Einstein-de Sitter en el cual resulta  $\delta_{vir} \sim 180$ . Asimismo, el radio fraccional  $\eta$  en el modelo SFDM es  $\eta = 0.43$ . Este último resultado también difiere al del modelo estándar donde  $\eta = 0.5$  implicando que las perturbaciones de materia oscura escalar pueden alcanzar el equilibrio virial con radios viriales más pequeños comparados con las estructuras gravitacionales formadas con materia oscura fría.

## 5. FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS: PERTURBACIONES ESCALARES EN EL RÉGIMEN NO LINEAL

---

# Capítulo 6

## Anisotropías de temperatura en la radiación cósmica de fondo con materia oscura bosónica ultra ligera

### 6.1. Introducción

. En los capítulos previos se mostró que la materia oscura escalar con  $m \sim 10^{-23}$  eV se comporta como materia oscura fría en un Universo FLRW así como en el régimen lineal de la evolución de sus fluctuaciones. No obstante, en el régimen no lineal, las fluctuaciones escalares colapsan mucho más temprano que las de materia oscura fría. Por otra parte, para que la hipótesis de materia oscura escalar sea un modelo plausible de materia oscura en el Universo tiene que ser confrontado con las observaciones. Como ya se mencionó, una de las observaciones cosmológicas más precisas es la medición de la CMB, por lo tanto, en este capítulo se investigará si el modelo de materia oscura escalar es capaz de ajustar el espectro de potencias de la CMB. Para esto, se plantea la hipótesis de que un campo escalar describe un sistema de partículas bosónicas ultra ligeras con spin-0 en equilibrio térmico obedeciendo la estadística de Bose-Einstein. Así, suponemos que la componente principal de materia oscura del Universo está compuesta por partículas bosónicas con masas ultra ligeras  $m_B \sim 10^{-22}$  eV. En esta aproximación, la materia oscura bosónica ultra ligera (ULBDM por sus siglas en inglés *ultra light bosonic dark matter*) está descrita por la función de distribución del espacio-fase cuya dinámica está regida por las ecuaciones de Boltzmann-Einstein. Con esta descripción, se estudiarán, a través del código de Boltzmann CMBFAST, los efectos de la ULBDM sobre las anisotropías de temperatura de

## 6. ANISOTROPÍAS DE TEMPERATURA EN LA RADIACIÓN CÓSMICA DE FONDO CON MATERIA OSCURA BOSÓNICA ULTRA LIGERA

---

la CMB así como su relación masa/temperatura requerida para ajustar dicho espectro de temperatura.

### 6.2. Materia oscura bosónica y condensación de Bose-Einstein

Antes de iniciar el estudio de la ULBDM se recordará el comportamiento cosmológico de los neutrinos ya que comparten algunas propiedades. A épocas muy tempranas del Universo, los neutrinos están en equilibrio térmico con el plasma primigenio (Dodelson 2003) y debido a que la relación entre masa y temperatura cumple  $m_\nu \ll T_\nu$ , éstos se desacoplan siendo relativistas. Después de desacoplarse, los neutrinos se enfrían solamente por la expansión del Universo y su temperatura evoluciona como  $T_\nu \propto a^{-1}$  y eventualmente se tiene que  $m_\nu \gg T_\nu$ , esta época es conocida como la transición no relativista (TNR). Después de este momento y de las aniquilaciones positrón-electrón (cuando la temperatura del Universo es  $T \ll 0.5$  MeV), los neutrinos podrían contribuir a la formación de estructuras en el Universo y su temperatura puede determinarse en términos de la temperatura de los fotones como  $T_\nu = (4/11)^{1/3}T_\gamma$ . Con esto, es posible determinar que la densidad de número de los neutrinos al día de hoy es  $n_\nu^{(0)} \sim 100$  cm<sup>-3</sup>. De aquí se deduce que si la TNR ocurre a épocas muy tempranas, los neutrinos pueden formar estructuras gravitacionales pero si la TNR ocurre a épocas tardías, la formación de estructuras no se lleva a cabo eficientemente y éstos permanecen como una componente oscura subdominante. La ULBDM tiene un comportamiento similar a los neutrinos ya que se asume que a épocas tempranas del Universo están en equilibrio térmico pero su acoplamiento con el resto de la materia es despreciable. La masa ultra ligera de la ULBDM sugiere que ésta se desacopla siendo relativista, después su función de distribución se congela y su temperatura disminuye sólo por la expansión del Universo. La diferencia de la ULBDM con los neutrinos radica en que los últimos son fermiones por lo que su densidad tiene una cota superior (principio de exclusión de Pauli). El contenido de los neutrinos  $\Omega_\nu$  está parametrizado por su masa, es decir,  $\Omega_\nu \approx m_\nu/51.01$  eV (Kolb & Turner 1990), mientras que para la ULBDM, su masa y abundancia no están correlacionados. Otra diferencia importante es que el acoplamiento de los neutrinos con el resto de la materia es bastante conocida de las interacciones débiles por lo que es posible determinar que se desacoplan a una temperatura  $T_\nu^{(d)} \sim 1$  MeV. Sin embargo, las escalas de energía de las posibles interacciones de la ULBDM no son conocidas por lo que aquí supondremos que su desacoplamiento ocurre mucho antes que el de los neutrinos y su temperatura  $T_B$  es un parámetro libre del modelo.



---

Motivados por la historia térmica de los neutrinos en el Universo y los resultados obtenidos con el modelo de materia oscura escalar planteamos que el Universo contiene dos componentes de materia oscura, una dominante en forma de ULBDM y una subdominante en forma de CDM (ver [Amendola & Barbieri 2006](#), para un modelo interesante con dos componentes de materia oscura). En este escenario, si la ULBDM está termalizada, su velocidad del sonido,  $c_{eff} \approx T_B^{(0)} a^{-1}/m_B$ , está definida bajo la condición de la TNR, es decir,  $a \gtrsim T_B^{(0)}/m_B$ . Además, siguiendo los preceptos de la teoría cinética relativista, consideramos a la ULBDM como un gas ideal de partículas individuales no interactuantes descrita a través de su función de distribución en el espacio-fase, por lo que su evolución está regida por las ecuaciones de Boltzmann acopladas a las ecuaciones de Einstein. Esta es una novedosa descripción del modelo de la materia oscura escalar. A épocas tempranas del Universo, suponemos que estas partículas bosónicas estaban termalizadas, cuando la temperatura del Universo disminuye debido a su expansión, la ULBDM se desacopla del resto del Universo. Dada la naturaleza de la ULBDM, la condensación de Bose-Einstein puede tener lugar. Por lo tanto, conjeturamos que la posible formación de un condensado de Bose-Einstein ocurre antes de la época del desacople. Con todas estas prescripciones investigamos si la contribución de la materia bosónica ultra ligera puede imitar los efectos de la materia oscura fría en el espectro de las anisotropías de la CMB (ver [Rodríguez-Montoya 2012](#), para una discusión exhaustiva de los CBE cosmológicos).

### 6.2.1. Condensación de Bose-Einstein

Inicialmente, la materia oscura bosónica ultra ligera con partículas de masa  $m_B \sim 10^{-22}$ eV estaba en equilibrio termodinámico local (ETL) con el plasma primigenio por lo que es posible definir su temperatura  $T_B$ . La dinámica de estas partículas bosónicas obedece la estadística de Bose-Einstein con una función de distribución  $f_0$  en el espacio-fase dada por

$$f_0(p) = \frac{g_s}{e^{(\sqrt{p^2+m_B^2}-\mu)/T_B} - 1}, \quad (6.1)$$

donde  $g_s$  es el número de grados de libertad relativista ( $g_s = 1$  en el caso de partículas bosónicas),  $\mathbf{p}$  es el momento y  $\mu$  es el potencial químico. De esta expresión se deduce que la condición para que  $f_0$  tenga valores positivos es  $\mu \leq m_B$ . La condensación de Bose-Einstein consiste en una cuantiosa ocupación del estado mínimo de energía que ocurre cuando el valor del potencial químico tiende a la masa de las partículas  $\mu \rightarrow m_B$ , lo cual se consigue cuando la temperatura del gas de bosones desciende por debajo de una temperatura crítica de condensación  $T_c$ . De la teoría cinética relativista de gases, se puede calcular la densidad de

## 6. ANISOTROPÍAS DE TEMPERATURA EN LA RADIACIÓN CÓSMICA DE FONDO CON MATERIA OSCURA BOSÓNICA ULTRA LIGERA

---

número  $n^{(1)}$  de las partículas bosónicas

$$n^{(1)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_0(p) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{(E^2 - m_B^2)^{1/2} E dE}{e^{(E-\mu)/T_B} - 1}, \quad (6.2)$$

donde  $E^2 = p^2 + m_B^2$  es la energía de cada partícula. Dada la masa ultra ligera de los bosones, es sensato suponer que al momento del desacople su razón masa-temperatura cumple  $m_B \ll T_B$ , por lo tanto, tomando el régimen ultra relativista la integral (6.2) resulta

$$n^{(1)} = (\zeta(3)/\pi^2) T_B^3, \quad (6.3)$$

donde  $\zeta(3) \approx 1.2$  es la función de Riemann. La temperatura crítica de condensación en el régimen ultra relativista está definida como

$$T_c = \left( \frac{\pi^2 n_B}{\zeta(3)} \right)^{1/3}. \quad (6.4)$$

En esta ecuación,  $n_B$  es la densidad de número total de partículas por unidad de volumen. Cuando la temperatura de la ULBDM cumple  $T_B > T_c$ ,  $n_B$  es igual a  $n^{(1)}$ . Cuando la temperatura del gas bosónico desciende por debajo de la temperatura crítica,  $T_B < T_c$ , la ocupación del estado de mínimo energía es sobrepoblado y la función de distribución se “dispara”, y la densidad de número total resulta

$$n_B = n_0 + \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_B^3, \quad T_B < T_c, \quad (6.5)$$

donde  $n_0$  es la densidad de número de partícula en el condensado de Bose-Einstein. La materia oscura bosónica cae en la clasificación de materia oscura caliente en el sentido que se comporta como materia relativista al momento de desacoplarse. Después, mantiene su distribución relativista y posteriormente  $f_0$  se enfría solamente por la expansión del Universo como  $T_B \propto a^{-1}$ . No obstante, el comportamiento relativista de la ULBDM no necesariamente impide la formación de un condensado de Bose-Einstein (Cercignani & Kremer 2002). Además, al enfriarse debido a la expansión del Universo, la ULBDM podría disminuir su temperatura hasta experimentar una TNR y entonces contribuir al proceso de formación de estructuras del Universo, así que en la siguientes secciones se investigará si esta transición ocurre a tiempos suficientemente tempranos para que la formación de estructuras a gran escala sea posible.

### 6.2.2. Teoría cinética en expansión

La evolución de la materia oscura bosónica está regida por la ecuación de Boltzmann sin colisiones o ecuación de Vlasov. Por otra parte, dado que el interés radica en describir las anisotropías de CMB, la geometría del Universo estará dada

---

por la métrica de Friedmann perturbada a primer orden (4.5) con factor de escala  $a(\eta)$

$$ds^2 = a(\eta)^2 [-(1 + 2\psi)d\eta^2 + (1 - 2\phi)\delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (6.6)$$

donde  $\eta$  es el tiempo conforme. Las partículas bosónicas se mueven a lo largo de geodésicas por lo que la ecuación de Vlasov se transforma en una ecuación diferencial para la función de distribución  $f(x^i, P_j, \eta)$  en el espacio-fase. Un espacio-fase es descrito por seis variables: tres posiciones  $x^i$  y sus respectivos momentos conjugados  $P_i$ . El momento conjugado  $P_i$  se puede relacionar al momento propio  $p_i$  medido por un observador en una coordenada espacial fija como  $P_i = a(1 - \psi)p_i$  (Ma & Bertschinger 1995). Es común reescribir el momento conjugado  $P_j$  en términos de  $q_j = ap_j$ , además, el 3-momento comóvil  $q_j$  se puede escribir en términos de su magnitud y dirección como  $q_j = q\hat{n}_j$  donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector unitario de dirección y  $n^i n_i = \delta_{ij}n^i n^j = 1$ . La energía propia comóvil está dada por  $\epsilon \equiv a(p^2 + m_B^2)^{1/2}$ . Con lo anterior,  $f(x^i, P_j, \eta)$ , se puede reemplazar por  $f(x^i, q, \hat{n}_j, \eta)$ . Debido a las perturbaciones a la métrica, se consideran pequeñas desviaciones de ETL, y la función de distribución  $f$  se puede escribir en términos de una distribución a orden cero más una parte perturbada en términos de las variables  $q$  y  $\hat{n}_j$  como

$$f(x^i, P_j, \eta) = f_0(q) [1 + \Psi(x^i, q, \hat{n}_j, \eta)], \quad (6.7)$$

donde  $f_0$  es la función de distribución del espacio-fase no perturbada en el límite ultra relativista

$$f_0(q) = \frac{1}{e^{q/T_B} - 1}. \quad (6.8)$$

$\Psi$  está relacionada con la temperatura  $T_B$  de la ULBDM y con su perturbación  $\delta T_B$  y está dada por

$$\Psi(x^i, q, \hat{n}_j, \eta) = -\frac{\partial \ln f_0}{\partial \ln q}(q) \frac{\delta T_B}{T_B}(x^i, q, \hat{n}_j, \eta). \quad (6.9)$$

La ecuación (6.7) se puede interpretar como una perturbación estadística lineal inducida por las perturbaciones lineales a la métrica. La distribución del espacio-fase evoluciona de acuerdo a la ecuación de Vlasov  $df/d\eta = 0$  que en el espacio de Fourier se escribe como

$$\dot{\Psi} - i\frac{q}{\epsilon}\Psi = -\left( (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}})\psi + i\frac{\epsilon}{q}(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}})\phi \right) \frac{\partial \ln f_0}{\partial \ln q}, \quad (6.10)$$

donde  $\mathbf{k}$  es el vector de onda del modo de Fourier. Nótese que la dependencia del vector de dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  está contemplada solamente en el término  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ . La ecuación (6.10) describe la respuesta de la función de distribución en el espacio-fase a las

## 6. ANISOTROPÍAS DE TEMPERATURA EN LA RADIACIÓN CÓSMICA DE FONDO CON MATERIA OSCURA BOSÓNICA ULTRA LIGERA

---

perturbaciones de la métrica. Comúnmente, el término  $\Psi$  se expande en términos de la series de Legendre

$$\Psi(x^i, q, \hat{n}_j, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \Psi_l(\mathbf{k}, q, \eta) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}), \quad (6.11)$$

donde  $P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})$  son los polinomios de Legendre cuyos argumentos son el ángulo subtendido entre el vector del número de onda y el vector de dirección. Así, para calcular el espectro de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo se resuelve el sistema jerárquico de ecuaciones diferenciales de Boltzmann para los coeficientes  $\Psi_l$  de la expansión de Legendre, llamados momentos multipolares. Esta jerarquía de Boltzmann se puede resolver con un código de Boltzmann conteniendo las ecuaciones de Boltzmann para la ULBDM y las demás componentes del Universo. El código que se usará en las siguientes secciones para resolver las ecuaciones de evolución es una versión modificada de CMBFAST ([Seljak & Zaldarriaga 1996](#)).

### 6.3. Anisotropías de la radiación cósmica de fondo

Lo primero que se quiere explorar es si la naturaleza bosónica de la ULBDM afecta significativamente el espectro de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo. Para esto, definimos la razón masa-temperatura,  $x_B$ , de la ULBDM evaluada al día de hoy como

$$x_B \equiv \frac{m_B}{T_B^{(0)}}. \quad (6.12)$$

Esta definición también aplica para partículas fermiónicas y se denota  $x_F$ . Así, para investigar el efecto de la estadística de Bose-Einstein y la de Fermi-Dirac en el espectro de las anisotropías se evolucionan las ecuaciones de Vlasov-Einstein con el mismo parámetro de densidad ( $\Omega_F$  para fermiones y  $\Omega_B$  para bosones) cambiando solamente la forma de la función de distribución. Los resultados se muestran en la figura 6.1. En esta figura se observa que para la estadística de Bose-Einstein la amplitud del primer pico y del segundo pico de las anisotropías es menor que la obtenida para la estadística de Fermi-Dirac, mientras que la amplitud del tercer pico es mayor para el caso de una estadística bosónica. Esta reducción de amplitud en el primer y en el segundo pico así como el incremento en el tercero, es similar al efecto ocasionado por un incremento de materia no relativista. En este caso es debido a que la densidad de energía de las partículas bosónicas es mayor que la de las partículas fermiónicas, lo que implica la presencia de una fuerza efectiva de amortiguamiento extra en las oscilaciones acústicas de

la CMB análogo a los pozos gravitacionales a la materia oscura no relativista. Así, esta es una clara manifestación del Principio de exclusión de Pauli. Para este conjunto particular de parámetros, se puede concluir que cualitativamente, la respuesta de la radiación cósmica de fondo al cambio de estadística es casi imperceptible.

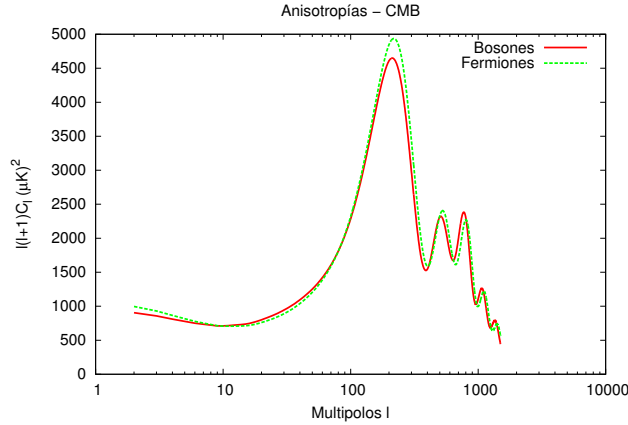


Figura 6.1: Espectro de anisotropías para una estadística de Bose-Einstein (línea continua) y de Fermi-Dirac (línea cortada). Se consideró  $\Omega_F = \Omega_B = 0.2$ ,  $x_F = x_B = 63109$ , con una profundidad óptica de reionización  $\tau_r = 0.13$ . Todos los demás parámetros cosmológicos son los mismos para ambas curvas.

Como ya se mencionó, una vez que la ULBDM se desacopla del plasma primigenio, su función de distribución se “congela” y su temperatura disminuye por la expansión del Universo como  $T_B \propto a^{-1}$ . Después de que los fotones se desacoplan, la temperatura de la ULBDM se puede determinar, como en el caso de los neutrinos, en términos de la temperatura de los fotones como

$$T_B = \alpha T_\gamma, \quad (6.13)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro libre constante a ser determinado y es una medida de la energía cinética de las partículas bosónicas. Sustituyendo la ecuación (6.13) en la relación (6.12) se tiene que  $x_B = m_B/\alpha T_\gamma^{(0)}$ . Dado que la temperatura  $T_\gamma^{(0)}$  de la CMB se conoce con muy buena precisión, al fijar el valor de  $\alpha$  con las observaciones y tomando  $m_B \sim 10^{-22}$  eV, la razón masa-temperatura de los bosones  $x_B$  queda completamente determinada. Así, si  $x_B \ll 1$ , la ULBDM se comportará como radiación con una ecuación de estado  $\omega_B = 1/3$ . Asimismo, si  $x_B \gg 1$ , la ULBDM se comportará como materia no relativista o polvo con ecuación de estado  $\omega_B = 0$ . Por lo tanto, para valores  $\alpha \sim 1$ , la temperatura de los bosones es cercana a la de los fotones  $T_B \approx T_\gamma$ , lo cual significa que la ULBDM debe ser ultra relativista al día de hoy y  $x_B \ll 1$ .

## 6. ANISOTROPIÁS DE TEMPERATURA EN LA RADIACIÓN CÓSMICA DE FONDO CON MATERIA OSCURA BOSÓNICA ULTRA LIGERA

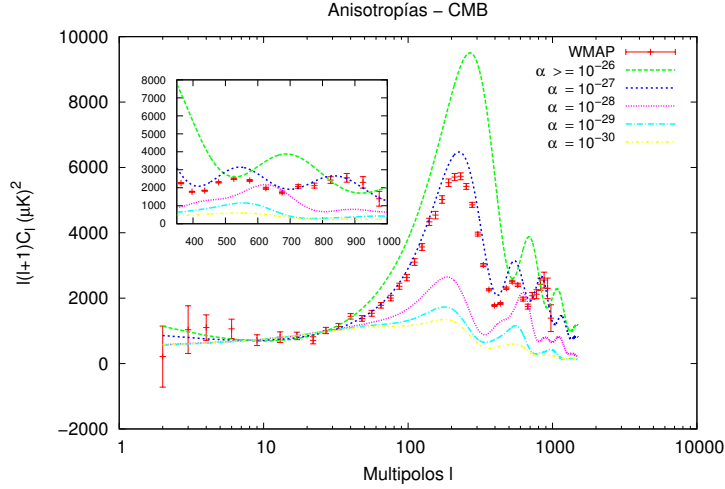


Figura 6.2: Respuesta del espectro de anisotropías de la CMB para valores de  $\alpha$  en el intervalo ( $\geq 10^{-26}, 10^{-30}$ ), con  $\Omega_{ULBDM} = 0.2$ ,  $\Omega_{CDM} = 0.02$ . Las curvas calculadas se comparan con los datos observacionales del WMAP-5

Para explorar los valores de  $\alpha$  que mejor ajustan el espectro de la CMB, primero se supone que la materia oscura bosónica ultra ligera es la componente dominante de materia oscura en el Universo por lo que la materia oscura fría es la componente subdominante. En la figura 6.2 se muestra el espectro de anisotropías con ULBDM para diversos valores de  $\alpha$  comparado con el de las observaciones del WMAP. Al incrementar el valor de  $\alpha$ , es decir, al hacer a la ULBDM más relativista, todo el espectro de las anisotropías se desplaza hacia arriba y hacia la derecha. Se encontró que para valores de  $\alpha \geq 10^{-26}$ , el espectro no tiene sensibilidad al cambio de  $\alpha$ , por lo tanto, para que la ULBDM tenga un comportamiento relativista se tiene que cumplir que  $x_B \lesssim 10^4$ . Cuando  $\alpha = 10^{-28}$ , la TNR ocurre a épocas muy tempranas del Universo por lo que las oscilaciones acústicas en el espectro tengan un amortiguamiento debido al incremento de los pozos de potencial gravitacional, este mismo efecto se amplifica para  $\alpha = 10^{-29}$  y  $\alpha = 10^{-30}$ . De la gráfica se observa que el orden de magnitud de la constante para ajustar el espectro es de  $\alpha \sim 10^{-27}$ , lo cual implica que la masa de la ULBDM debe ser cinco ordenes de magnitud mayor a su temperatura al día de hoy, esto es  $x_B \sim 10^5$ . En la figura 6.3 se muestra el espectro de potencias de la CMB para un intervalo entre  $\alpha = 0.6 \times 10^{-27}$  y  $\alpha = 0.8 \times 10^{-27}$  (de  $x_B = 73,367$  a  $x_B = 40,759$ ). De la gráfica se observa que la amplitud de los primeros dos picos se incrementa si la ULBDM es más relativista.

Finalmente, el mejor ajuste de las observaciones del WMAP se tiene para  $\alpha \sim 0.7 \times 10^{-27}$ . Estas cotas obtenidas para  $\alpha$  dependen de la fracción relativa

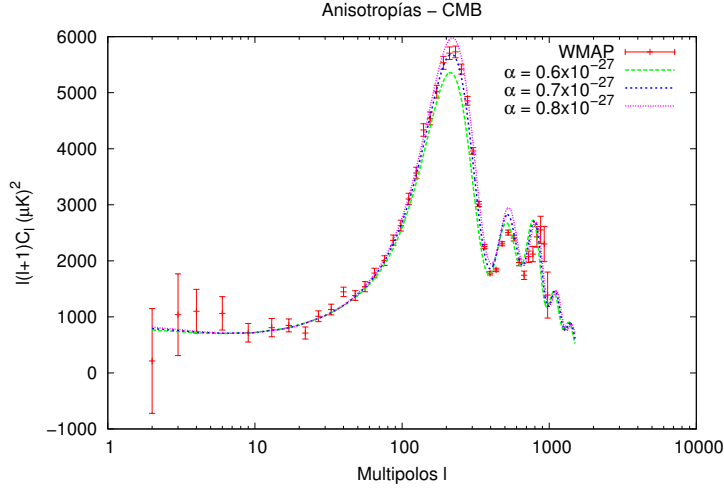


Figura 6.3: Respuesta del espectro de la CMB a pequeñas variaciones de  $\alpha$  en el intervalo  $(0.6 \times 10^{-27}, 0.8 \times 10^{-27})$ . Para las tres curvas  $\Omega_{ULBDM} = 0.2$ ,  $\Omega_{CDM} = 0.02$ .

de ULBDM y CDM. No obstante, si se toman valores muy diferentes de  $\Omega_{ULBDM}$  y  $\Omega_{CDM}$  a los ya usados, las cotas sobre  $\alpha$  se modifican menos de un orden de magnitud. Así, para investigar como se ve afectado el espectro de potencias de la CMB para diferentes contenidos de ULBDM y CDM se toma un valor de  $\alpha \sim 10^{-27}$ . Para esto, se explorarán dos casos extremos, un Universo donde la materia oscura es dominada por ULBDM y otro donde es dominado por CDM; los resultados se muestran en la figura 6.4. De la gráfica se observa que cuando se incrementa el contenido de CDM, la amplitud de las oscilaciones acústicas disminuye. Este es un efecto debido al incremento de los pozos gravitacionales de la materia no relativista.

Otro aspecto que se puede estudiar con las mediciones del WMAP es si el modelo ULBDM es consistente con las predicciones del modelo estándar acerca de una época de reionización en el Universo. Durante esta época, los fotones de la CMB se ven afectados por la profundidad óptica de reionización  $\tau_r$ , por lo que, el espectro de potencias dependerá del valor de  $\tau_r$ . Para el modelo ULBDM se consideraron diferentes valores de la profundidad óptica de reionización  $\tau_r$  manteniendo fijos todos los demás parámetros. En la figura 6.5 se muestra el espectro de la CMB para tres valores de  $\tau_r = 0.05, 0.13, 0.19$ . Las cotas sobre  $\tau_r$  del WMAP-5 para el modelo de materia oscura fría está en el intervalo 0.05 - 0.15 (95 %) (J. Dunkley et al. 2009). La mejor predicción para  $\tau_r$  con la ULBDM como componente dominante de la materia oscura se estimó en  $\tau_r \approx 0.13$ , este valor concuerda con las predicciones del modelo estándar. De estos resultados, se

## 6. ANISOTROPIÁS DE TEMPERATURA EN LA RADIACIÓN CÓSMICA DE FONDO CON MATERIA OSCURA BOSÓNICA ULTRA LIGERA

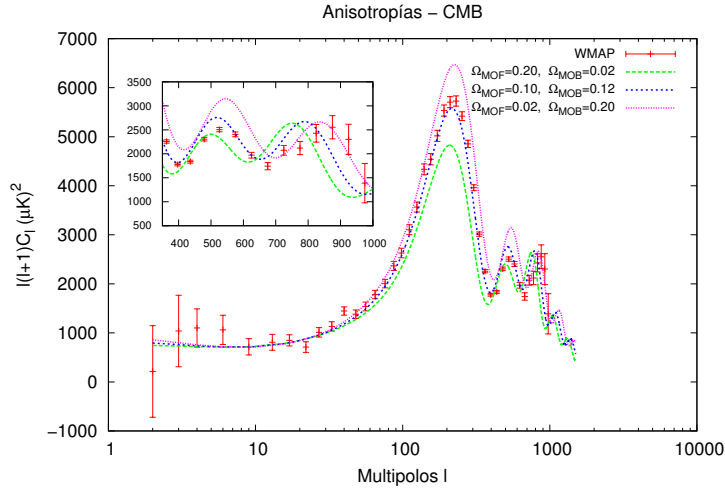


Figura 6.4: Espectro de potencias de la CMB para diferentes contenidos de ULBDM y CDM. Para las tres curvas mostradas  $\alpha \sim 10^{-27}$ .

puede concluir que el espectro de la CMB es consistente con un Universo cuya materia oscura dominante esté en forma de ULBDM con  $\Omega_B = 0.2$ ,  $x_B \sim 10^5$  y  $\tau_r$  entre 0.07 - 0.14.

Finalmente, se interpretarán los valores encontrados para la razón masa-temperatura  $x_B$ . Dado que para el caso de ULBDM dominante se encontró que  $x_B > \sim 10^4$ , se puede usar la expresión no relativista

$$m_B n_B = \Omega_B \rho_{cri}, \quad (6.14)$$

donde  $\rho_{cri}$  es la densidad crítica del Universo. Al fijar la masa de la ULBDM y el contenido  $\Omega_B$  se puede determinar la densidad de número  $n_B$ . Tomando  $m_B \sim 10^{-22}$  y  $\Omega_B = 0.2$ , se obtiene que  $n_B \sim 10^{25} \text{ cm}^{-3}$ . Esta enorme densidad resulta inusual para el caso de partículas fermiónicas (por ejemplo neutrinos) debida al principio de exclusión de Pauli. No obstante para la ULBDM, su naturaleza no limita la densidad de partículas. Con el valor de  $n_B$  se puede estimar la temperatura crítica de condensación  $T_c = (\pi^2 n_B / \zeta(3))^{1/3}$  (ec. 6.4) que resulta  $T_c \approx 2.15 \times 10^8 \text{ eV}$ . Del valor obtenido  $x_B \sim 10^5$  (o  $T_B^{(0)} \sim 10^{-27} \text{ eV}$ ) se encuentra que la condición de condensación  $T_B < T_c$  se satisface completamente. Esto implica que si la componente dominante de materia oscura es materia oscura bosónica ultra ligera, ésta debe estar necesariamente en un CBE. Sin embargo, para entender completamente la evolución cosmológica de este tipo de materia es necesario estudiar explícitamente su proceso de condensación de Bose-Einstein así como algún tipo de interacciones con el resto de la materia.

Con estos resultados podemos concluir que la existencia de una componente



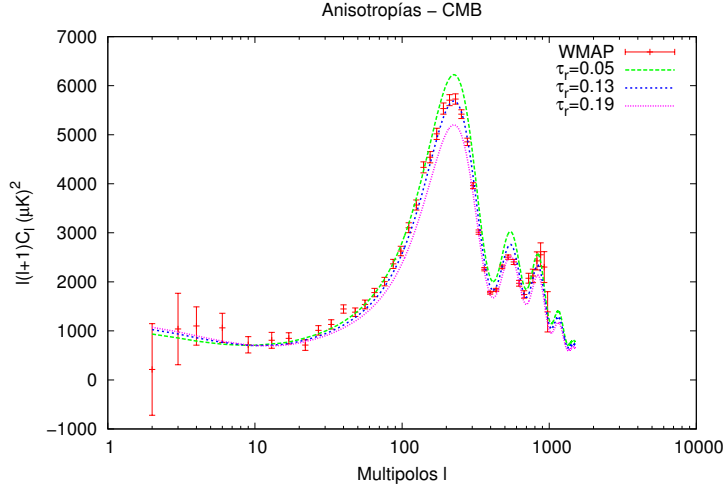


Figura 6.5: Espectro de potencias de la CMB para tres profundidades ópticas de reionización,  $\tau_r = 0.05, 0.13, 0.19$ . Los parámetros de densidad usados son  $\Omega_{ULBDM} = 0.2, \Omega_{CDM} = 0.02$ , con  $\alpha \sim 10^{-27}$ .

dominante en forma de materia oscura bosónica con masa del orden de  $\sim 10^{-22}$  eV es posible solamente si al día de hoy su densidad de número es  $\sim 10^{25} \text{ cm}^{-3}$  lo cual implica una temperatura crítica de condensación  $T_c \sim 10^8$  eV. Otra condición para que este tipo de ULBDM sea la componente dominante de materia oscura es que su razón masa-temperatura sea  $x_B \sim 10^5$  equivalente a una temperatura al día de hoy de  $\sim 10^{-27}$  eV. Este valor indica que la ULBDM está en un estado de condensación de Bose-Einstein. Así, los efectos causados por materia oscura fría sobre el espectro de la radiación cósmica de fondo se pueden imitar asumiendo la existencia de materia oscura bosónica en forma de un condensado de Bose-Einstein. Además, también es necesario incluir los efectos de reionización para que este tipo de materia bosónica esté en concordancia con los datos del WMAP-5. El mejor valor estimado para la profundidad óptica es  $\tau_r = 0.13$  (95%), el cual no difiere mucho de la predicción del modelo estándar.

Finalmente, este original tratamiento de la ULBDM con teoría cinética, nos proporciona sólo información cualitativa acerca de la anisotropías de la radiación cósmica de fondo. Sin embargo, para poder cuantificar los diferentes efectos de la ULBDM sobre el espectro de anisotropías es necesario realizar un estudio más profundo y robusto considerando interacciones, además de las gravitacionales, con el resto de la materia para determinar la temperatura de la transición no relativista. También es importante considerar las transiciones de fase del gas de bosones no degenerados relativistas a un estado clásico coherente (condensado), etc.

**6. ANISOTROPÍAS DE TEMPERATURA EN LA RADIACIÓN  
CÓSMICA DE FONDO CON MATERIA OSCURA BOSÓNICA  
ULTRA LIGERA**

---

# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajo futuro

### 7.1. Conclusiones

En esta tesis se propuso que la materia oscura en el Universo se puede describir con un campo escalar real  $\Phi$  con potencial escalar cuadrático  $V(\Phi) = m^2\Phi^2/2$ , donde la masa  $m$  del bosón asociado a este campo es ultra ligera  $m \sim 10^{-23}$  eV. Este modelo es llamado modelo de materia oscura escalar.

El primer objetivo de esta tesis fue determinar la evolución cosmológica de la densidad de energía de las especies del Universo con el modelo de materia oscura escalar. Para esto, supusimos un Universo homogéneo, isotrópico y plano con las siguientes componentes: campo escalar como materia oscura, bariones, fotones, neutrinos y constante cosmológica. La dinámica de este Universo está regida por el sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon, el cual se reescribió, usando variables adimensionales, como un sistema dinámico autónomo. Para resolver este sistema dinámico se desarrollaron los métodos numéricos RK4 y ABM. Sin embargo, dado que el sistema de ecuaciones resultó rígido (*stiff*), éstos algoritmos resultaron inadecuados por lo que se implementó un código semi-implícito de extrapolación. Con el método semi-implícito se pudo resolver completamente el sistema de ecuaciones que describe la dinámica de un Universo con materia oscura escalar.

El segundo objetivo de la tesis fue estudiar las perturbaciones del campo escalar en el régimen lineal para indagar si éstas pueden crecer como en el caso de las perturbaciones de materia oscura fría. Para esto, se consideraron perturbaciones al tensor de energía-momento del campo escalar y perturbaciones escalares a la métrica FLRW en la norma Newtoniana. Al resolver el sistema Einstein-Klein-Gordon perturbado se obtuvieron las ecuaciones de evolución para la perturbación del campo escalar, el campo gravitacional lineal y el contraste de densidad lineal escalar. Nuevamente, este sistema de ecuaciones se reescribió, en término de

## 7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---

variables adimensionales, como un sistema dinámico autónomo. Para investigar si las perturbaciones lineales escalares crecen o no, se resolvió numéricamente dicho sistema dinámico a través de los algoritmos ya mencionados.

Posteriormente, estudiamos la evolución de las perturbaciones escalares en el régimen no lineal para inferir los tiempos de colapso y virialización de las posibles estructuras gravitacionales escalares. Para realizar este análisis se recurrió al modelo de colapso esférico con un perfil de densidad *top-hat*. En este formalismo, se consideró una perturbación no lineal escalar inmersa en un Universo de fondo FLRW. Las ecuaciones que describen la dinámica de dicha perturbación son la ecuación de Raychauduri y la ecuación de Klein-Gordon perturbada, a partir de las cuales, se derivó la ecuación de evolución del contraste de densidad no lineal escalar. El sistema de ecuaciones se transformó a un sistema dinámico autónomo a través de un conjunto de variables adimensionales. Los tiempos de colapso y virialización se obtuvieron resolviendo el sistema dinámico mediante los métodos numéricos ya mencionados.

Finalmente estudiamos las anisotropías de la radiación cósmica de fondo con el modelo de materia oscura bosónica ultra ligera. Este modelo, estrechamente relacionado con el modelo de materia oscura escalar, supone que la componente principal de la materia oscura en el Universo es un gas de bosones con masa ultra ligera  $m \sim 10^{-22}$  eV. Para llevar a cabo este estudio, describimos a la materia oscura bosónica ultra ligera con una función de distribución de Bose-Einstein a orden cero más una pequeña perturbación, por lo que, la evolución de su espacio-fase queda completamente determinada por la ecuación de Boltzmann sin colisiones o ecuación de Vlasov. Para averiguar los efectos de este tipo de materia oscura sobre las anisotropías de la radiación cósmica de fondo se resolvieron las ecuaciones de Einstein-Vlasov a través de una versión modificada del código de Boltzmann CMBFAST.

Los resultados más importantes de esta tesis se resumen a continuación:

- **Universo de fondo FLRW**

- \* En un modelo cosmológico con un campo escalar como materia oscura, la evolución cosmológica de los parámetros de densidad de bariones, radiación, neutrinos y constante cosmológica es casi idéntica a la obtenida con el model estándar de materia oscura fría.
- \* Las energías cinética y potencial del campo escalar presentan abruptas oscilaciones. Sin embargo, la densidad de energía escalar evoluciona suavemente como  $\rho_{\Phi} \sim a^{-3}$ , es decir, como materia no relativista o polvo.

- 
- \* El promedio temporal de la ecuación de estado del campo escalar tiende a cero.
  - \* La historia de la tasa de expansión del Universo es la misma para el modelo de materia oscura escalar y el modelo de materia oscura fría.
  - \* La edad del Universo con el modelo de materia oscura escalar es consistente con las observaciones cosmológicas del WMAP.
  - \* En el modelo de materia oscura escalar, el contenido de neutrinos en la época de la recombinación es el 10% del contenido total del Universo, este porcentaje es consistente con las estimaciones hechas con las observaciones del WMAP.
  - \* Con todo lo anterior, se puede concluir que la evolución cosmológica de un Universo FLRW con materia oscura escalar es indistinguible de un Universo con materia oscura fría.

#### ■ **Perturbaciones escalares en el régimen lineal**

- \* La evolución cosmológica del potencial gravitacional debido a las perturbaciones escalares es similar a la obtenida con el modelo de materia oscura fría.
- \* El promedio temporal de  $\delta P_\Phi/\delta\rho_\Phi$  tiende a cero de manera análoga a la velocidad del sonido de las perturbaciones de materia oscura fría.
- \* El contraste de densidad de materia oscura escalar tiene un comportamiento creciente al inicio de la época de la recombinación, similar al obtenido con el modelo de materia oscura fría.
- \* Con todo lo anterior, se puede concluir que las perturbaciones de materia oscura escalar en el régimen lineal evolucionan de manera similar a las perturbaciones de materia oscura fría.

#### ■ **Perturbaciones escalares en el régimen no lineal**

- \* Las perturbaciones del campo escalar tienen un crecimiento súbito después de la época de recombinación, por lo que, estas colapsan mucho más temprano que las perturbaciones de materia oscura fría.
- \* La virialización de las perturbaciones de campo escalar ocurre cuando el factor de escala  $a \sim 150$ . Por lo tanto, los halos oscuros escalares se formarían mucho más temprano que las estructuras gravitacionales de materia oscura fría.
- \* La presión escalar contribuye considerablemente a que el colapso y virialización de las perturbaciones escalares ocurra mucho más temprano que las perturbaciones de materia oscura fría.

## 7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---

- \* Los halos oscuros escalares virializan con un radio más pequeño que los halos de materia oscura fría.
- \* Con todo lo anterior, se concluye que en el régimen no lineal, hay diferencias significativas entre los modelos de materia oscura escalar y fría. Las estructuras gravitacionales escalares colapsan y virializan mucho más temprano que las de materia oscura fría, por lo tanto, el modelo de materia oscura escalar predice la existencia de galaxias virializadas a altos corrimientos al rojo.

### ■ Anisotropías de la radiación cósmica de fondo

- \* El espectro de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo no muestra cambios significativos a las distribuciones de Bose-Einstein y Fermi-Dirac para la materia oscura bosónica ultra ligera.
- \* Se pudo ajustar el espectro de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo considerando una masa bosónica ultra ligera  $m \sim 10^{-22}$  eV. Esto implica que la razón masa-temperatura de la materia oscura bosónica ultra ligera al día de hoy es  $x = m/T^{(0)} \sim 10^5$ .
- \* La estimación de la temperatura crítica de condensación de Bose-Einstein para la masa  $m \sim 10^{-22}$  eV sugiere que la materia oscura bosónica debe estar en un estado de condensado de Bose-Einstein.

Se puede concluir que un campo escalar con potencial cuadrático y una masa del bosón asociado a este campo  $m \sim 10^{-23} - 10^{-22}$  eV es un modelo plausible para explicar la naturaleza de la materia oscura en el Universo.

## 7.2. Trabajo futuro

En esta tesis se ha estudiado la dinámica de un Universo de fondo FLRW, la evolución cosmológica de las perturbaciones escalares tanto en el régimen lineal como en el no lineal considerando un campo escalar como materia oscura con potencial cuadrático. Dichos estudios, se pueden extender considerando un potencial escalar con un término de auto-interacción. Además, se puede acotar la constante de auto-interacción usando las diversas observaciones cosmológicas.

Otro aspecto interesante del modelo de materia oscura escalar es el estudio de los choques y fusiones de los halos oscuros escalares galácticos. Los estudios preliminares que hemos realizado en esta dirección muestran que, en los choques

---

frontales de dos estructuras gravitacionales escalares, éstas tienen un comportamiento solitónico, es decir, que se atraviesan mutuamente sin cambios significativos en su perfil de densidad. Estos resultados sugieren que en el paradigma de materia oscura escalar no hay fusiones de halos oscuros. Sin embargo, estos resultados no son concluyentes ya que las fusiones de dos halos escalares podrían existir para choques no frontales y/o con diferentes velocidades de impacto. Estas simulaciones se están llevando a cabo.

Otros estudios que se pueden desarrollar para poner a prueba el modelo de materia oscura escalar son los concernientes a la dinámica de galaxias de bajo brillo superficial. Varias de estas galaxias presentan subestructuras. Estos sistemas se pueden modelar con halos oscuros escalares mediante simulaciones de  $N$ -cuerpos para acotar la masa del bosón asociado al campo escalar.

Finalmente, con las observaciones de alta precisión de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo obtenidas con el satélite Planck, los grandes sondeos de galaxias, las observaciones de las oscilaciones acústicas bariónicas, etcétera, se podrá discernir entre los diferentes modelos para explicar la naturaleza de la materia oscura en el Universo.

## 7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---



# Apéndice A

## Publicaciones

Los resultados de esta tesis fueron publicados en los siguientes artículos, capítulos de libro y memorias de congreso.

### Artículos

1. Matos, T., Vázquez-González, A. & **Magaña, J.** MNRAS, 393, 1359, 2009,  $\phi^2$  as Dark Matter, arXiv:astro-ph/0806.0683.
2. Rodríguez-Montoya, I., **Magaña, J.**, Matos, T. & Pérez-Lorezana, A. ApJ, 721, 1509, 2010, *Ultra light bosonic dark matter and cosmic microwave background*, arXiv:astro-ph/0908.0054.
3. García-Aspeitia, M., **Magaña, J.** & Matos, T. GReGr, 44, 581, 2012, *Braneworld model of dark matter: structure formation*, arXiv:1102.0825.
4. Lora V., **Magaña, J.**, Bernal, A., Sánchez-Salcedo, F. J. & Grebel, E. K. JCAP, 02, 011, 2012, *On the mass of ultra-light bosonic dark matter from galactic dynamics*, arXiv:1110.2684.
5. **Magaña, J.**, Matos, T., Suárez, A. & Sánchez-Salcedo, F. J. JCAP, 10, 003, 2012, *Structure formation with scalar field dark matter: the field approach*, arXiv:1204.5255.

### Capítulo en libro

1. Matos, T., **Magaña, J.** & Suárez, A. OA, 3, 94, 2010, *Accelerated Expansion and Structure Formation with a Single Scalar Field*.

## APÉNDICE A PUBLICACIONES

---

### Memorias de congreso

1. Matos, T., Vázquez, J. A. & **Magaña, J.** AIPC, 1083, 144, 2008, *Study of Several Potentials as Scalar Field Dark Matter Candidates.*
2. Rodríguez-Montoya, I., García-Aspeitia, M., **Magaña, J.** & Matos, T. AIPC, 1318, 224, 2010, *Cosmic Braneworld and Ultralight Bosonic Dark Matter.*
3. García-Aspeitia, M., **Magaña, J.**, Matos, T. & Rodriguez, P. AIPC, 1256, 275, 2010, *Primordial Perturbations Produced by a Self Interacting Scalar Field in the Braneworld: The Dynamical Systems Perspective.*
4. Matos, T., Suárez, A. & **Magaña, J.** AIPC, 1256, 283, 2010, *Structure Formation with Scalar Field Dark Matter.*
5. **Magaña, J.**, Matos, T., Robles, V. & Suárez, A. JPhCS, 378, 012012, 2012, *A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model*, arXiv:1201.6107.

# Apéndice B

## Método

### Adams-Bashforth-Moulton

Consideremos una ecuación diferencial de la forma  $\frac{du}{dt} = f(t, u)$  sobre un determinado intervalo de tiempo  $[t_i, t_f]$ . Para resolver numéricamente esta ecuación diferencial, se discretiza el intervalo total de tiempo sobre el cual se quiere obtener la solución en  $N_t$  pequeños intervalos de tamaño  $h = (t_f - t_i)/N_t$ . Así, el valor de  $u$  en un tiempo  $t_k$  lo etiquetamos como  $u_k$ , el valor de  $u$  a un tiempo posterior  $t = t_k + h$  como  $u_{k+1}$ , el valor de  $u$  a un tiempo anterior  $t = t_k - h$  como  $u_{k-1}$  y así sucesivamente.

El método de Adams-Bashforth de cuarto orden es un método explícito ya que para calcular el valor de  $u_{k+1}$  se utiliza la información de la función  $f(t, u)$  en cuatro puntos anteriores de tiempo, Los métodos explícitos se llaman a veces predictores. El algoritmo es el siguiente

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{24} (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}). \quad (1)$$

El método de Adams-Moulton de cuarto orden es un método implícito ya que para calcular el valor de  $u_{k+1}$  se utiliza la información de la función  $f(t, u)$  en el punto de tiempo  $t_{k+1}$  y en tres puntos anteriores de tiempo. Los métodos implícitos se llaman a veces correctores. El algoritmo es el siguiente

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{24} (9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}). \quad (2)$$

## APÉNDICE B

### MÉTODO ADAMS-BASHFORTH-MOULTON

---

El método de Adams-Bashforth-Moulton (ABM) de cuarto orden es un método multipaso totalmente explícito que usa el algoritmo de Adams-Bashforth para predecir el valor de  $u_{k+1}$  y este valor se emplea para aproximar  $f_{k+1}$  en el algoritmo Adams-Moulton que calcula el valor corregido para  $u_{k+1}$ . El algoritmo es el siguiente

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{k+1} &= u_k + \frac{h}{24} (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}), \\ \tilde{f}_{k+1} &= f(t_{k+1}, \tilde{u}_{k+1}), \\ u_{k+1} &= u_k + \frac{h}{24} (9\tilde{f}_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}).\end{aligned}\tag{3}$$

# Apéndice C

Jacobiano del sistema de ecuaciones (3.44) de la sección 3.4.4

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_x}{\partial x} &= -3 + 9x^2 + \frac{3}{2}b^2 + 2z^2 + 2\nu^2, & \frac{\partial F_x}{\partial u} &= -s, & \frac{\partial F_x}{\partial b} &= -3bx, \\
 \frac{\partial F_x}{\partial z} &= 4xz, & \frac{\partial F_x}{\partial \nu} &= 4x\nu, & \frac{\partial F_x}{\partial l} &= 0, \\
 \frac{\partial F_x}{\partial s} &= -u, & & & & 
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_u}{\partial x} &= s + 6xu, & \frac{\partial F_u}{\partial u} &= 3x^2 + \frac{3}{2}b^2 + 2z^2 + 2\nu^2, & \frac{\partial F_u}{\partial b} &= 3bu, \\
 \frac{\partial F_u}{\partial z} &= 4uz, & \frac{\partial F_u}{\partial \nu} &= 4u\nu, & \frac{\partial F_u}{\partial l} &= 0, \\
 \frac{\partial F_u}{\partial s} &= x, & & & & 
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_b}{\partial x} &= 6xb, & \frac{\partial F_b}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial F_b}{\partial b} &= 3x^2 + \frac{9}{2}b^2 + 2z^2 + 2\nu^2 - \frac{3}{2}, \\
 \frac{\partial F_b}{\partial z} &= 4bz, & \frac{\partial F_b}{\partial \nu} &= 4b\nu, & \frac{\partial F_b}{\partial l} &= 0, \\
 \frac{\partial F_b}{\partial s} &= 0, & & & & 
 \end{aligned} \tag{6}$$

## APÉNDICE C

---

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_z}{\partial x} &= 6xz, & \frac{\partial F_z}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial F_z}{\partial b} &= 3bz, \\
 \frac{\partial F_z}{\partial z} &= 3x^2 + \frac{3}{2}b^2 + 6z^2 + 2\nu^2 - 2, & \frac{\partial F_z}{\partial \nu} &= 4\nu z, & \frac{\partial F_z}{\partial l} &= 0, \\
 \frac{\partial F_z}{\partial s} &= 0, & & & & 
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_\nu}{\partial x} &= 6x\nu, & \frac{\partial F_\nu}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial F_\nu}{\partial b} &= 3b\nu, \\
 \frac{\partial F_\nu}{\partial z} &= 4z\nu, & \frac{\partial F_\nu}{\partial \nu} &= 3x^2 + \frac{3}{2}b^2 + 2z^2 + 6\nu^2 - 2, & \frac{\partial F_\nu}{\partial l} &= 0, \\
 \frac{\partial F_\nu}{\partial s} &= 0, & & & & 
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_l}{\partial x} &= 6xl, & \frac{\partial F_l}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial F_l}{\partial b} &= 3bl, \\
 \frac{\partial F_l}{\partial z} &= 4zl, & \frac{\partial F_l}{\partial \nu} &= 4\nu l, & \frac{\partial F_l}{\partial l} &= 3x^2 + \frac{3}{2}b^2 + 2z^2 + 2\nu^2 - 2, \\
 \frac{\partial F_l}{\partial s} &= 0, & & & & 
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_s}{\partial x} &= 6xs, & \frac{\partial F_s}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial F_s}{\partial b} &= 3bs, \\
 \frac{\partial F_s}{\partial z} &= 4zs, & \frac{\partial F_s}{\partial \nu} &= 4\nu s, & \frac{\partial F_s}{\partial l} &= 0, \\
 \frac{\partial F_s}{\partial s} &= 3x^2 + \frac{3}{2}b^2 + 2z^2 + 2\nu^2 - 2, & & & & 
 \end{aligned} \tag{10}$$

# Bibliografía

- Alcubierre, M., Becerril, R., Guzmán, F. S., et al. 2003, CQGra, 20, 2883
- Alcubierre, M., Guzmán, F. S., Matos, T., et al. 2002, CQGra, 19, 5017
- Amendola, L. & Barbieri, R. 2006, Phys. Lett. B, 642, 192
- Arbey, A. 2006, Phys. Rev. D, 74, 043516
- Arbey, A., Lesgourgues, J., & Salati, P. 2003, Phys. Rev. D, 68, 023511
- Bernal, A. 2007, Tesis de doctorado, Departamento de Física, Cinvestav
- Bernal, A. & Guzmán, F. S. 2006a, Phys. Rev. D, 74, 063504
- Bernal, A. & Guzmán, F. S. 2006b, Phys. Rev. D, 74, 103002
- Bernal, A., Matos, T., & Núñez, D. 2008, RMxAA, 44, 149
- Bertone, G., Hooper, D., & Silk, J. 2005, Physics Reports, 405, 279
- Binney, J. & Tremaine, S. 1994, Galactic Dynamics, 3era edn. (New Jersey, USA: Princeton University Press)
- Böehmer, C. G. & Harko, T. 2007, JCAP, 0706, 025
- Bond, J. R., Efstathiou, G., & silk, J. 1980, Phys. Rev. Lett., 45, 1980
- Caimmi, R. 2007, New Astron., 12, 327
- Caldwell, R. R., Dave, R., & Steinhardt, P. J. 1998, Phys. Rev. Lett., 80, 1582
- Castellanos, E. & Matos, T. 2012, arXiv:1202.3793
- Cercignani, C. & Kremer, G. 2002, The relativistic Boltzmann equation: Theory and Applications, ed. B. Birkhäuser

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Cimatti et al. 2004, *Nature*, 430, 184
- Clowe, D., González, A., & Markevitch, M. 2004, *ApJ*, 604, 596
- Clowe et al. 2006, *ApJ*, 648, L109
- Colín, P., Ávila-Reese, V., & Valenzuela, O. 2000, *ApJ*, 542, 622
- Colpi, M., Shapiro, S. L., & Wasserman, I. 1986, *Phys. Rev. Lett.*, 57, 2485
- de Blok, W. J. G. & Bosma, A. 2002, *A and A*, 385, 816
- Dodelson, S. 2003, *Modern Cosmology*, ed. N. Y. Academic Press
- Dodelson, S. & Widrow, L. M. 1994, *Phys. Rev. Lett.*, 72, 17
- Durrer, R. 2008, *The cosmic microwave background*, 1era edn. (New York USA: Cambridge University Press)
- Friedmann, A. 1922, *Z. Phys.*, 10, 377
- García-Aspeitia, M. A., Magaña, J., & Matos, T. 2011, *GeRG*, 44, 581
- Gunn, J. E. & Gott, J. R. 1972, *ApJ*, 176, 1
- Guzmán, F. S. & Matos, T. 2000, *CQGra*, 17, L9
- Guzmán, F. S. & Ureña-López, L. A. 2003, *Phys. Rev. D*, 68, 024023
- Guzmán, F. S. & Ureña-López, L. A. 2004, *Phys. Rev. D*, 69, 124033
- Guzmán, F. S. & Ureña-López, L. A. 2006, *ApJ*, 645, 814
- Hanany et al. 2000, *ApJ*, 545L, 1
- Hills, C. T., Schramm, D. N., & Fry, J. N. 1989, *Comments Nucl. Part. Phys.*, 19, 25, fermilab-Pub-88/120-A
- Horellou, C. & Berge, J. 2005, *MNRAS*, 360, 1393
- Hu, W., Barkana, R., & Gruzinov, A. 2000, *Phys. Rev. Lett.*, 85, 1158
- Hwang, J. C. & Noh, H. 2001, *Phys. Rev. D*, 64, 103509
- J. Dunkley et al. 2009, *ApJS*, 180, 306
- Ji, S. U. & Sin, S. J. 1994, *Phys. Rev. D*, 50, 3655



- Kamionkowski, M. & Liddle, A. 2000, *Phys. Rev. Lett.*, 84, 4525
- Khlopov, M. Y., Malomed, B. A., & Zeldovich, Y. B. 1985, *MNRAS*, 215, 575
- Kleyna, J. T., Wilkinson, M. I., Gilmore, G., & Evans, N. 2003, *ApJ*, 588, L21
- Klypin, A., Kravtsov, A., Valenzuela, O., & Prada, F. 1999, *ApJ*, 522, 82
- Knobel, C. 2012, arXiv:1208.5931
- Kolb, E. W. & Turner, M. S. 1990, *The Early Universe*, ed. F. in Physics; Addison-Wesley
- Komatsu et al. 2009, *ApJS*, 180, 330
- Komatsu et al. 2011, *ApJS*, 192, 18
- Kroupa, P. 2012, a ser publicado en PASA, arXiv:1204.2546
- Landau, L. & Lifshitz, E. 1975, *The Classical Theory of Fields*, 2da edn. (Oxford: Butterworth-Heinemann)
- Lee, J. & Koh, I. 1996, *Phys Rev D*, 53, 2236
- Lee, J. & Komatsu, E. 2010, *ApJ*, 718, 60
- Lee, J. W., Lim, S., & Choi, D. 2008, arXiv:astro-ph/0805.3827
- Lemaître, G. 1927, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, A47, 49, traducido en *MNRAS* 91, 483 (1931)
- Lesgourgues, J., Arbey, A., & Salati, P. 2002, *New Astronomy Reviews*, 46, 791
- Liddle, A. R. & Lyth, D. 2000, *Cosmological inflation and large-scale structure*, 1era edn. (New York, USA: Cambridge University Press)
- Lora, V., Magaña, J., Bernal, A., Sánchez-Salcedo, F. J., & Grebel, E. K. 2012, *JCAP*, 02, 011
- Ma, C. P. & Bertschinger, E. 1995, *ApJ*, 455, 7
- Ma, C. P., Caldwell, R., Bode, R., & Wang, L. 1999, *ApJ*, 521, L1
- Maartens, R. 2011, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 369, 5115
- Magaña, J., Matos, T., Robles, V., & Suárez, A. 2012, *Journal of Physics: Conference Series*, 378, 012012

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Magaña, J., Matos, T., Suárez, A., & Sánchez-Salcedo, F. J. 2012, JCAP, 10, 003
- Malik, K. A. 2001, Tesis de doctorado, University, arXiv:astro-ph/0101563
- Maor, I. & Lahav, O. 2005, JCAP, 07, 003
- Matos, T. & Castellanos, E. 2012, arXiv:1207.4416
- Matos, T. & Guzmán, F. S. 1999, F. Astron. Nachr.
- Matos, T. & Guzmán, F. S. 2000, Ann. Phys. (Leipzig), 9, SI
- Matos, T., Guzmán, F. S., & Núñez, D. 2000a, Phys. Rev. D, 62, 061301
- Matos, T., Guzmán, F. S., & Ureña-López, L. A. 2000b, CQGra, 17, 1707
- Matos, T. & Suárez, A. 2011a, MNRAS, 416, 87
- Matos, T. & Suárez, A. 2011b, arXiv:1103.5731
- Matos, T. & Ureña-López, L. A. 2000, CQGra, 17, L75
- Matos, T. & Ureña-López, L. A. 2001, Phys. Rev. D, 63, 063506
- Matos, T., Vázquez-González, A., & Magaña, J. 2009, MNRAS, 393, 1359
- Mauskopf et al. 2000, ApJL, 536, L59
- Migoni, G. 2010, Tesis de doctorado, Facultad de ciencias exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
- Milgrom, M. 1983, ApJ, 270, 365
- Mota, D. F. & van de Bruck, C. 2004, A & A, 421, 71
- Nunes, N. J. & Mota, D. F. 2006, MNRAS, 368, 751
- Ostriker, J. P. & Peebles, P. J. E. 1973, ApJ, 186, 467
- Ostriker, J. P. & Steinhardt, P. 2003, Science, 300, 1909
- Paczynski, B. 1986, ApJ, 304, 1
- Padmanabhan, T. 1993, Structure Formation in the Universe, 1era edn. (USA: Cambridge University Press)
- Peebles, P. J. E. 2000a, Phys. Rev. D, 62, 023502

- Peebles, P. J. E. 2000b, *ApJ*, 534, L127
- Peebles, P. J. E. & Nusser, A. 2010, *Nature*, 465, 565
- Peebles, P. J. E. & Vilenkin, A. 1999, *Phys. Rev. D*, 60, 103506
- Pitaevskii, L. & Stringari, S. 2004, *Bose-Einstein Condensation*, ed. O. U. Press
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 2002, *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*, 2da edn. (EUA: Cambridge University Press)
- Robertson, H. P. 1936, *ApJ*, 83, 187
- Robles, V. & Matos, T. 2012, *MNRAS*, 422, 282
- Rodríguez-Montoya, I. 2012, Tesis de doctorado, Departamento de Física, Cinvestav
- Rodríguez-Montoya, I., Magaña, J., Matos, T., & Pérez-Lorenzana, A. 2010, *ApJ*, 721, 1509
- Rodríguez-Montoya, I., Pérez-Lorenzana, A., De La Cruz-Burelo, E., Giraud-Héraud, Y., & Matos, T. 2011, arXiv:1110.2751
- Roos, M. 2012, arXiv:1208.3662
- Rubin, V. C., Burstein, D., Ford, W. K., Jr., & Thonnard, N. 1985, *ApJ*, 289, 81
- Rubin, V. C. & Ford, W. K., Jr. 1970, *ApJ*, 159, 379
- Ruffini, R. & Bonazzola, S. 1969, *Phys. Rev.*, 187, 1767
- Seidel, E. & Suen, W. 1991, *Phys. Rev. Lett.*, 66, 1659
- Seljak, U. & Zaldarriaga, M. 1996, *ApJ*, 469, 437
- Sin, S. J. 1994, *Phys. Rev. D*, 50, 3650
- Smoot et al. 1992, *ApJ.*, 396, L1
- Suárez, A. 2008, Tesis de maestría, Departamento de Física, Cinvestav
- Thomas, S. A., Abdalla, F., & Lahav, O. 2011, *Phys. Rev. Lett.*, 106, 241301
- Turner, M. S. 1983, *Phys. Rev. D*, 28, 1243

## BIBLIOGRAFÍA

---

van den Bosch, F. C., Robertson, B. E., Dalcanton, J. J., & de Blok, W. J. G. 2000, *AJ*, 119, 1579

Villaescusa-Navarro, F. & Dalal, N. 2011, *JCAP*, 03, 024

Walker, A. G. 1936, *Proc. London Math. Soc.*, 42, 90

Wang, L. & Steinhardt, P. J. 1998, *ApJ*, 508, 483

Wang, P. 2006, *ApJ*, 640, 18

Weinberg, N. N. & Kamionkowski, M. 2003, *MNRAS*, 341, 251

Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, 1era edn. (USA: John Wiley and Sons)

Woo, T. P. & Chiueh, T. 2009, *ApJ*, 697, 850

Zwicky. 1933, *Helvetica Physica Acta*, 6, 110