



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

ACOPLAMIENTOS ELECTROMAGNÉTICOS DE
BARIONES EN EL UNQUENCHED QUARK MODEL

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

HUGO GARCÍA TECOCOATZI

DIRECTOR DE TESIS: DR. ROELOF BIJKER BIJKER

COMITÉ TUTORAL

DR. JOSÉ ALEJANDRO AYALA MERCADO

DR. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO DF. 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

El principal objetivo de esta tesis es estudiar los acoplamientos electromagnéticos de bariones en el marco de una extensión del modelo de cuarks constituyentes, el Unquenched Quark Model (UQM), donde consideran las contribuciones de pares cuark-anticuark $q\bar{q}$.

Se deriva el Hamiltoniano de interacción para el acoplamiento entre el fotón y los cuarks y anticuarks a partir de la Teoría Cuántica de Campos en el límite no relativista. El hamiltoniano incluye las transiciones electromagnéticas entre cuarks y entre anticuarks, así como las contribuciones de los procesos de creación y aniquilación de pares cuark-anticuark. Es la primera vez que se toma en cuenta procesos donde no se conservan el número de cuarks y anticuarks en el marco del UQM.

El Hamiltoniano total de interacción que se obtiene es relevante tanto para decaimientos electromagnéticos de bariones $A \rightarrow B + \gamma$, como para la foto ó electro-producción de resonancias bariónicas $B + \gamma^* \rightarrow A$.

Una primera aplicación del modelo es para el análisis de los decaimientos $\Delta^+ \rightarrow P\gamma$, $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$ y $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0\gamma$, los cuales no se pueden explicar satisfactoriamente en ningún modelo de cuarks constituyentes.

ABSTRACT

The main objective of this thesis is to study electromagnetic couplings of baryons in an extension of the quark model, the Unquenched Quark Model (UQM), where the contributions of the quark-antiquark pairs are taken into account.

The interaction Hamiltonian is obtained from quantum field theory with in the non relativistic limit and includes electromagnetic transitions between quarks or between antiquarks, plus creation and annihilation processes of quark-antiquark pairs. This is the first time the processes which do not conserve the number of the quarks and antiquarks has been taken into account in UQM.

The total interaction Hamiltonian is relevant for both electromagnetic decays of baryons $A \rightarrow B + \gamma$, and photo or electro-production of baryon resonances $\gamma^* + B \rightarrow A$.

A first application of the model is the analysis of the decays of $\Delta^+ \rightarrow P\gamma$, $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$ and $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0\gamma$, which can not be explained satisfactorily in the constituent quark model.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Hadrones y Quarks	1
1.2. QCD	2
1.3. Modelos de bariones	3
1.4. Grados de libertad efectivos de bariones	4
1.5. Modelo de oscilador armónico de Cuarks	4
1.6. Correcciones no-relativistas	6
1.7. Unquenched Quark Model	7
1.7.1. Cálculo de elementos de matriz	10
2. Acoplamientos electromagnéticos	12
2.1. Procesos radiativos	12
2.2. Procesos asociados a la corriente de los cuarks	13
2.3. Hamiltoniano de interacción total	14
2.3.1. Hamiltoniano de interacción de procesos elástico entre partículas . .	15
2.3.2. Hamiltoniano de interacción con procesos de creación	16
2.3.3. Hamiltoniano de interacción en procesos con aniquilación	16
2.3.4. Hamiltoniano de interacción en procesos elásticos entre anticuarks .	18
3. Acoplamientos electromagnéticos en Bariones	20
3.1. Formulación general	20
3.1.1. Decaimientos electromagnéticos en bariones	21
3.1.2. Foto-producción de resonancias	22
3.2. Decaimiento electromagnético con término elástico	22
3.3. Decaimiento electromagnético con aniquilación	26
3.4. Decaimiento electromagnético con creación	31

4. Decaimiento electromagnético de resonancias Δ^+, Σ^{*+} y Σ^{*0}	35
4.1. Funciones de onda	35
4.2. Contribución de los cuarks de valencia	37
4.3. Contribución de los procesos de aniquilación	41
4.4. Contribución de los procesos de creación	49
4.5. Helicidades	56
4.5.1. Cálculo de las Helicidades $\nu = 3/2, 1/2$	56
4.5.2. Anchuras parciales y espacio fase	59
5. Conclusiones	61
A. Convenciones	63
A.1. Funciones de onda Espín	63
A.2. Funciones de sabor	63
A.3. Matrices de Dirac y espinores	64
B. Desarrollos matemáticos	67
B.1. Cuantización del campo de Klein-Gordon	67
B.2. El campo Klein-Gordon en el espacio tiempo y la cuantización del campo electromagnético	69
B.2.1. Cuantización del campo electromagnético	71
B.3. Obtención del Hamiltoniano de interacción no relativista	71
B.4. Reducción de las corrientes de cuarks en el límite no relativista	73
C. Amplitud 3P_0	78
Bibliografía	82

Capítulo 1

Introducción

En el estudio de la física hadrónica se tiene un gran número de problemas abiertos, que no se han podido resolver teóricamente, como es el problema del confinamiento, razón por la cual se mantienen los hadrones ligados, así como el rompimiento espontáneo de la simetría quiral, con lo que las partículas fundamentales adquieren mucha más masa.

El desarrollo de aceleradores, cada vez a más altas energías tiene como fin estudiar las propiedades de las partículas elementales, cómo éstas interactúan para formar las partículas físicas, sus modos de decaimiento, entre otras propiedades. Diversos modelos efectivos han tratado de explicar su fenomenología, desde modelos no relativistas, basados en hechos empíricos observados experimentalmente, hasta modelos fundamentales basados en la Teoría Cuántica de Campos, como se describirán más adelante.

1.1. Hadrones y Quarks

Después de que se encontró que el protón era una partícula con estructura, el estudio de la espectroscopia de este sistema, condujo al descubrimiento de más resonancias, entre los años 50's y 60's, hasta incluso superar los cientos de resonancias [1]. Esto se pudo explicar mediante el modelo de quarks, donde se postuló que las partículas físicas eran constituidas por tres quarks (bariones) o por un quark y un anticuark (mesones).

Correcciones a este modelo llegaron mediante teorías de campos, basadas en analogías de la electrodinámica cuántica (QED, por sus siglas en inglés), donde las interacciones electromagnéticas son entendidas como interacciones mediadas por bosones, para este caso el fotón. Después las interacciones electromagnéticas y débiles se unificaron para ser descritas como interacciones electrodébiles por Glashow-Salam-Weinberg, basados en el grupo de norma $SU(2) \times U(1)$ que fue comprobado por la existencia de los bosones W^\pm

y Z^0 y las corrientes cargadas.

1.2. QCD

Los hadrones ahora son pensados como sistemas constituidos por cuarks con carga de color, que en conjunto tienen color neutro y están ligados por la interacción fuerte, la cual esta mediada por el intercambio gluones. El color es un conjunto de números cuánticos caracterizado por el grupo de norma $SU(3)_c$. Los cuarks y gluones son partículas que llevan carga de color y son afectados por la interacción fuerte. La Teoría de Campos Cuánticos de la interacción fuerte es conocida como Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés). La teoría que describe las interacciones electrodébiles y fuertes está basada en la simetría de norma $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ y es conocida como el Modelo Estándar.

Los cuarks q^a ($a = 1, 2, 3$) son fermiones del grupo de norma $SU(3)$. Los gluones A_μ^b ($b = 1, \dots, 8$) son un campo de norma en la representación de octete (adjunto). Los cuarks llevan otros grados de libertad que son independientes del color, que se describirán en la sección 1.4, tomando en cuenta solo los grados efectivos de libertad en modelos de cuarks constituyentes. Los sabores forman 3 generaciones, las cuales constan de dos componentes por cada generación, hoy solo se tienen seis sabores, (u, d) , (c, s) , (t, b) .

El Lagrangiano QCD está dado por

$$L_{QCD} = -\frac{1}{2} \text{tr} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \sum_{f=u, \dots, b} \bar{q}_f (i\mathbb{D} - M_f) q_f \quad (1.2.1)$$

donde

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \quad (1.2.2)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu \quad (1.2.3)$$

$$A_\mu = \sum_{b=1}^8 \frac{\lambda^b}{2} A_\mu^b \quad (1.2.4)$$

y λ^b son las matrices de Gell-Mann. Cuando solo se considera la interacción fuerte, la matriz de masa es diagonal en el espacio de sabor:

$$m = \text{diag}(M_f) = (m_u, m_d, \dots, m_b) \quad (1.2.5)$$

Si la interacción débil es tomada en cuenta, entonces los eigenestados de las interacciones fuerte y débil son distintas. Y como consecuencia, el término de masa involucra la matriz de mezcla de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa (CKM).

La teoría de norma de color $SU(3)$ requiere la invariancia de norma bajo la transformación de norma:

$$q_f \rightarrow U(\theta)q_f \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow U(\theta)A_\mu U^\dagger(\theta) + \frac{i}{g}U(\theta)\partial_\mu U^\dagger(\theta) \\ &= U(\theta)\left(A_\mu + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)U^\dagger(\theta) \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

aquí $U(\theta) = \exp(i\lambda^b\theta_b)$

También se puede demostrar que la derivada covariante \mathbb{D} y el tensor $G_{\mu\nu}$ se transforman de la misma manera

$$\mathbb{D} \rightarrow U(\theta)\mathbb{D}U^\dagger(\theta), \quad G \rightarrow U(\theta)GU^\dagger(\theta) \quad (1.2.8)$$

Las características de QCD pueden ser agrupadas en dos regímenes, el de altas energías donde se tienen la libertad asintótica y el de bajas energías donde se tiene el confinamiento, que están caracterizadas por la escala del momento dependiente de la constante de acoplamiento g cuando la teoría es renormalizada.

En particular la teoría de QCD se vuelve complicada a bajas energías, el régimen que no admite teorías perturbativas. En consecuencia se han desarrollado otros tipos de descripciones no perturbativas, como son los modelos de cuarks constituyentes, cuarks quirales, etc. ref. [2], para poder hacer estudios a bajas energías, donde la constante de acoplamiento es muy importante. En este trabajo se toma como base los modelos de cuarks constituyentes, donde solo se consideran los principales grados de libertad de los bariones, con una extensión a partir de tomar en cuenta la creación de pares cuark-anticuark.

1.3. Modelos de bariones

El estudio de los bariones en modelos no-relativistas de cuarks constituyentes (NRQM, por sus siglas en inglés), han tenido un gran éxito para la descripción de su espectroscopia. Tomando en cuenta los grados de libertad efectivos de los bariones, como son color, sabor, espín que son los grados de libertad internos; así como los espaciales. En particular, en este trabajo se consideran nuevas correcciones con inspiración de QCD, como es la creación y aniquilación de pares cuark-anticuark.

En la física de hadrones tenemos que los bariones son estados de tres cuarks qqq singuletes en color, con funciones de onda completamente antisimétricas con respecto a todos sus grados de libertad, como son de espín, sabor, color y los espaciales.

1.4. Grados de libertad efectivos de bariones

En modelos de cuarks constituyentes, un barión se trata como un problema de tres cuerpos, que para una descripción más sencilla, se puede restringir, al considerar solo los cuarks ligeros (u, d, s) que nos remite al álgebra de $SU(3)$ en el espacio de sabor. Al tomar en cuenta que son fermiones, cada uno tiene espín $S = 1/2$ con una descripción en el grupo $SU(2)$ y el triplete de color $SU(3)$, ver refs. [3, 4], que dan la descripción de los grados internos de libertad. Para los grados externos de libertad se toman los grados de libertad espaciales de tres cuerpos. Trabajando en la base acoplada de espín-sabor a la base desacoplada tenemos la siguiente álgebra asociada

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_r \otimes \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_r \otimes SU_c(3) \otimes SU_{sf}(6) \supset \mathcal{G}_r \otimes SU_c(3) \otimes SU_f(3) \otimes SU_s(2) \quad (1.4.1)$$

donde \mathcal{G}_i es el grupo asociado a los grados internos de libertad y \mathcal{G}_r es el grupo asociado a los grados externos de libertad asociados a la parte espacial, que se analiza en la siguiente sección.

1.5. Modelo de oscilador armónico de Cuarks

Se puede empezar la descripción de la parte espacial formada por los 3 cuarks de valencia, a partir de una interacción tipo cuerdas que los mantiene ligados, mediante un potencial de oscilador armónico, un problema ya bien conocido, el cual admite soluciones exactas, que simplifica mucho los cálculos [5].

El Hamiltoniano para el movimiento de tres cuarks no relativistas confinados en un potencial, tiene la siguiente forma:

$$H = \sum_i \left(m_i + \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} \right) + V_{conf}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (1.5.1)$$

El potencial de confinamiento está dado por la suma de todas las posibles combinaciones de la interacción de dos cuerpos.

$$V_{conf}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \sum_{i \neq j} V^{ij}(\vec{r}_{ij}) \quad (1.5.2)$$

con $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

En la aproximación de oscilador armónico se supone que las fuerzas de confinamiento tienen la siguiente forma:

$$V^{ij}(\vec{r}_{ij}) = \frac{1}{2} K r_{ij}^2 + U(r_{ij}^2) \quad (1.5.3)$$

El término anarmónico puede ser incluido mediante cálculos perturbativos, pero ahora solo consideramos

$$H_0 = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} K r_{ij}^2 \quad (1.5.4)$$

Si consideramos un modelo colectivo que representa configuraciones de resortes Figura 1.1. Los grados de libertad del movimiento de tres cuerpos, pueden ser descritos con las coordenadas relativas de Jacobi y el centro de masa (CM),

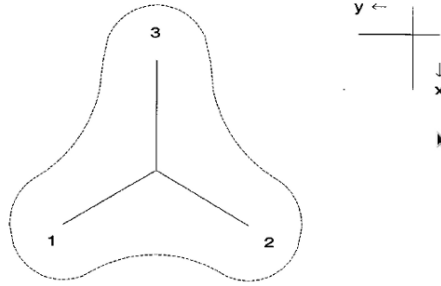


Figura 1.1: Modelo de oscilador armónico [6]

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (1.5.5)$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + (m_1 + m_2)^2}}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 - (m_1 + m_2) \vec{r}_3), \quad (1.5.6)$$

$$\vec{R} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3), \quad (1.5.7)$$

donde m_i y \vec{r}_i ($i = 1, 2, 3$) son la masa y el operador de posición del cuark i , respectivas.

Para los propósitos del estudio de los bariones, compuestos de los cuarks ligeros, en buena aproximación $m_u = m_d \neq m_s$. Entonces para la aproximación $m_1 = m_2 = m_u$ la ec. (1.5.6) se reduce a

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \quad (1.5.8)$$

En la aproximación armónica, se tiene la gran ventaja que H_0 es separable en términos de $\vec{\rho}$ y $\vec{\lambda}$, y se puede reescribir de la siguiente manera:

$$H_0 = H_{CM} + \frac{\vec{p}_\rho^2}{2m} + \frac{\vec{p}_\lambda^2}{2m} + \frac{3K}{2}(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2) \quad (1.5.9)$$

donde H_{CM} es la energía cinética del movimiento libre del centro de masa.

El espectro de niveles de energía es debido a los dos osciladores armónicos, en tres dimensiones, con tres grados de libertad por cada oscilador $\vec{\rho}$ y $\vec{\lambda}$. Con lo que tenemos 6 grados. Esto permite representar la parte orbital con el álgebra:

$$\mathcal{G}_r = U(6). \quad (1.5.10)$$

En general el momento angular \vec{l}_ρ y \vec{l}_λ asociados a cada oscilador se sumaran vectorialmente para dar el momento angular orbital total del barión

$$\vec{L} = \vec{l}_\rho + \vec{l}_\lambda. \quad (1.5.11)$$

El momento angular total \vec{J} es obtenido por la adición del espín total de los cuarks \vec{S} y el momento angular orbital total \vec{L}

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (1.5.12)$$

La paridad está dada por

$$P = (-1)^{l_\rho + l_\lambda} \quad (1.5.13)$$

1.6. Correcciones no-relativistas

En los modelos de cuarks constituyentes (CQM, por sus siglas en inglés) los hadrones son descritos de manera exitosa en términos de los grados efectivos de libertad, qqq para bariones y $q\bar{q}$ para mesones. A pesar de los éxitos de estos modelos de cuarks, hay mucha evidencia de la existencia de otros grados de libertad en los hadrones. Cada uno de estos modelos reproduce el espectro de masa de las resonancias de bariones razonablemente. Pero también se han observado muchas desviaciones sistemáticas para otras observables, como son en los acoplamientos electromagnéticos, al calcular las amplitudes de helicidad y en decaimientos fuertes.

En particular, para los acoplamientos electromagnéticos, que dependen principalmente de la estructura espín-sabor. Todos los modelos tienen en común la estructura $SU(6)$. Por lo que se muestran las mismas desviaciones, e.g. el acoplamiento $N\gamma \rightarrow \Delta(1232)$ donde las amplitudes de helicidad no son bien predichas, aunque su razón es reproducida correctamente. Estas desviaciones son un problema que ha sido ligado a la producción de pares cuark-anticuark [7, 8]. Como lo es para los factores de forma de la transición dipolar magnética, para valores pequeños de Q^2 , como se muestra en la figura 1.2.

Otras evidencias de componentes más altas de Fock en las funciones de onda de los bariones ($qqq - q\bar{q}$) vienen de los estudios de las anchuras de decaimientos fuertes de las

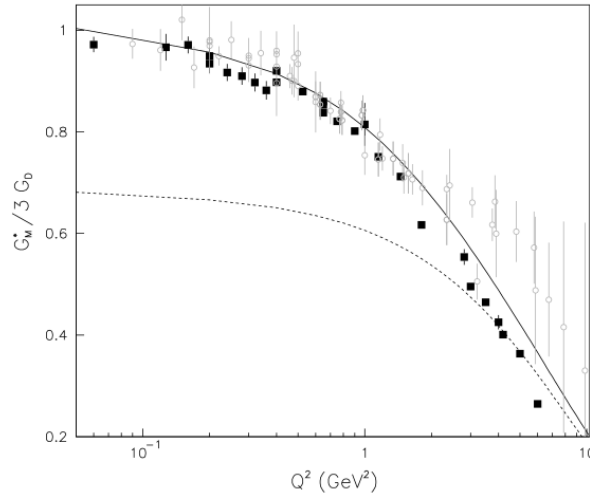


Figura 1.2: Factores de forma de la transición dipolar magnética para $N\gamma \rightarrow \Delta(1232)$. La línea continua muestra las correcciones con creaciones de pares y la línea punteada muestra los valores sin las contribuciones de la creación de pares. [9]

resonancias de bariones que no son bien reproducidas por los modelos de CQM, como el desdoblamiento espín-órbita de $\Lambda(1405)$ y $\Lambda(1520)$.

La importancia de las componentes altas de Fock en bariones ha sido estudiada por muchos autores en el contexto de nubes mesónicas y modelos quirales [10, 11]. En estos modelos, la asimetría de sabor se puede entender como un acoplamiento de componentes del barión con mesones.

Hay muchos intentos de estudiar la importancia de componentes altas de Fock en el contexto de modelos de cuarks constituyentes. Estas aproximaciones son inspiradas en mecanismo de creación de pares de QCD, lo cual abre la posibilidad de estudiar los pares $q\bar{q}$ en bariones y mesones.

1.7. Unquenched Quark Model

La importancia de los pares $q\bar{q}$ en la espectroscopía de bariones fue originalmente estudiada por Törnqvist y Zenczykowski en un modelo de cuarks extendido por 3P_0 [12]. Poco después, los efectos de “loops” hadrónicos en mesones fueron estudiados por Geiger e Isgur en un modelo “Flux-tube Breaking”, en el cual los pares $q\bar{q}$ son creados por el operador 3P_0 , con los números cuánticos del vacío [13, 14].

Una primera aplicación de estos modelos a los bariones fue presentada en [15] en donde

la importancia de los "loops" de $s\bar{s}$ en el protón fueron estudiados tomando en cuenta la contribución de seis diagramas, como observamos en la figura 1.3. En combinación con funciones de onda de oscilador armónico para bariones y mesones. Dentro de un mecanismo de creación de pares 3P_0

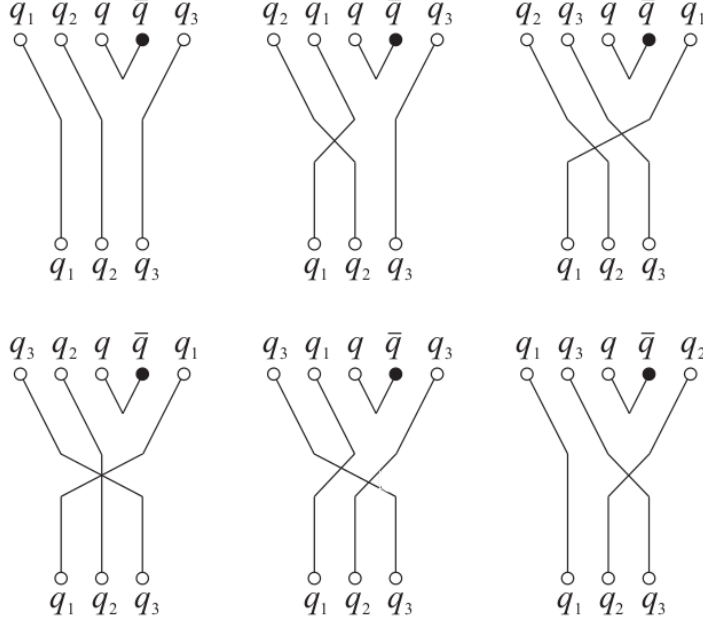


Figura 1.3: Diagramas de líneas de cuarks para $A \rightarrow BC$ con $q\bar{q} = s\bar{s}$ y $q_1q_2q_3 = uud$

En este trabajo se utiliza la aproximación unquenched propuesta por [16]. La cual es basada en CQM con la creación de pares cuark-anticuark con los números cuánticos del vacío, agregados como una perturbación. El mecanismo de creación del par es insertado al nivel de cuarks y los diagramas a un "loop"son calculados mediante la suma sobre un conjunto completo de estados intermedios barión-mesón (estados BC figura 1.4).

Bajo estas suposiciones, la función de onda del barión consiste en una configuración de orden-cero de tres cuarks $|A\rangle$ más una suma sobre todos los posibles componentes más altas de Fock, debido a la creación de pares mediante el operador 3P_0 . Con lo que el estado del barión puede ser escrito como:

$$|\psi_A\rangle = \mathcal{N} \left[|A\rangle + \sum_{BCl} \int d^3k |BC\vec{k}lJ\rangle \frac{\langle BC\vec{k}lJ|T^\dagger|A\rangle}{M_A - E_B - E_C} \right], \quad (1.7.1)$$

donde T^\dagger es el operador de creación de un par cuark-anticuark 3P_0 , A denota el estado del barión inicial, B y C representan los estados intermedios de barión y mesón. M_A ,



Figura 1.4: Diagrama a nivel de cuarks de un loop

E_B , E_C son sus respectivas energías. Así \vec{k} es el momento relativo entre el barión B y el mesón C y l es el momento angular relativo del sistema BC . J es le momento angular total $\vec{J} = \vec{J}_B + \vec{J}_C + \vec{l}$. Notando que el ket $|BC\vec{k}lJ\rangle$ está en una base acoplada barión-mesón.

El operador T^\dagger crea un par cuark-anticuark en el estado 3P_0 . Con números cuánticos del vacío $L = S = 1$ y $J = 0$ [18, 17]. Con la siguiente estructura

$$T^\dagger = -3\gamma \sum_{i,j,m} \int d^3p_i d^3p_j \delta(\vec{p}_i + \vec{p}_j) C_{ij} F_{ij} \Gamma(\vec{p}_i - \vec{p}_j) \times [\chi_{ij} \times \mathcal{Y}_{1m}(\vec{p}_i - \vec{p}_j)]^{(0)} b_i^\dagger(\vec{p}_i) d_j^\dagger(\vec{p}_j) \quad (1.7.2)$$

con

$$\mathcal{Y}_{lm}(\vec{p}) = |\vec{p}|^l Y_{lm}(\hat{p}). \quad (1.7.3)$$

En la ec. (1.7.2) $b_i^\dagger(\vec{p}_i)$ y $d_j^\dagger(\vec{p}_j)$ son los operadores de creación del cuark y anticuark con momento \vec{p}_i y \vec{p}_j , respectivamente. El par está caracterizado por una función de onda singlete en el espacio de color, C_{ij} , así como estado singlete en la función de sabor, F_{ij} , y estado triplete para la función de onda de espín χ_{ij} , ya que se tiene $S = 1$. El parámetro γ da la intensidad del operador. Es una constante sin dimensiones que ha sido determinada al fijar la asimetría del protón como $\gamma = 1,6$.

El armónico sólido $\mathcal{Y}_1(\vec{p}_i - \vec{p}_j)$ indica que el cuark y anticuark están en una onda relativa de estado P . La simetría de sabor $SU(3)$ de los cuarks de valencia de la configuración del estado $|A\rangle$ es rota por el par cuark-anticuark creado que lleva un denominador de energía,

pero la simetría $SU(2)$ de isoespín se sigue preservando. Cuando se trabaja en el límite de cerradura, donde el denominador de energía de la ec. (1.7.1) es una constante, la simetría de sabor de los cuarks de valencia es recuperada. Sin embargo en este trabajo no se usa, ya que es muy mala aproximación.

En operador T^\dagger crea un par de cuark-anticuark, en principio puntual. Pero en la referencia [16] se introduce $\Gamma(\vec{p}_i - \vec{p}_j)$ que es una función gaussiana del vértice de creación del par de cuark-anticuark. Con lo que el par creado es un objeto finito con un tamaño efectivo, más que un objeto puntual. En el espacio de momentos esta función gaussiana está dada por

$$\Gamma(\vec{p}_i - \vec{p}_j) = e^{-r^2(\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2/6} \quad (1.7.4)$$

La anchura ha sido calculada de los decaimientos de mesones y es del orden de $r_q = (0,25 - 0,35)fm$ [14, 15]. En la referencia [16] se usa un valor promedio de $r_q = 0,3fm$ que es la que se usa en el presente trabajo. El vértice de acoplamiento fuerte

$$\langle BC\vec{k}lJ|T^\dagger|A\rangle \quad (1.7.5)$$

que son los coeficientes de acoplamiento que están dentro de la ec. (1.7.1) se obtienen en forma explícita en la base del oscilador armónico [17].

1.7.1. Cálculo de elementos de matriz

En general los elementos de matriz de una observable \hat{O} , son expresados por

$$\mathcal{O} = \langle \hat{O} \rangle = \langle \psi_A | \hat{O} | \psi_A \rangle = \mathcal{O}_{val} + \mathcal{O}_{mar} \quad (1.7.6)$$

El primer término denota la contribución de los cuarks de valencia

$$\mathcal{O}_{val} = \mathcal{N}^2 \langle A | \hat{O} | A \rangle \quad (1.7.7)$$

El segundo término corresponde a la contribución del mar, que para este caso se consideramos solo la contribución de los pares $q\bar{q}$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{mar} = \mathcal{N}^2 & \left[\sum_{BCl} \int d^3k \langle A | \hat{O} | BC\vec{k}lJ \rangle \frac{\langle BC\vec{k}lJ | T^\dagger | A \rangle}{M_A - E_B - E_C} + \right. \\ & \sum_{B'C'l'} \int d^3k \langle B'C'\vec{k}'l'J' | \hat{O} | A \rangle \frac{\langle A | T | B'C'\vec{k}'l'J' \rangle}{M_A - E_{B'} - E_{C'}} + \\ & \left. \sum_{BClB'C'l'} \int d^3k d^3k' \langle B'C'\vec{k}'l'J' | \hat{O} | BC\vec{k}lJ \rangle \frac{\langle BC\vec{k}lJ | T^\dagger | A \rangle}{M_A - E_B - E_C} \frac{\langle A | T | B'C'\vec{k}'l'J' \rangle}{M_A - E_{B'} - E_{C'}} \right] \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

El primer término de la ec. (1.7.8) da la contribución de los operadores \hat{O} que involucren aniquilación de partículas. El segundo término da la contribución de los operadores \hat{O} que tengan procesos de creación de partículas. El último término de esta ecuación describe procesos entre estados de cinco componentes (diagonal).

Los elementos diagonales, ec. (1.7.7) y el último término de la ec. (1.7.8) ya se habían considerado en [16]. Tomar en cuenta las contribuciones de los dos primeros términos de la ec. (1.7.8) se hacen por primera ocasión en este trabajo.

Para calcular los efectos de los pares cuark-anticuark en un observable, se tiene que evaluar la contribución de todos los estados intermediarios posibles. Los cuales se evalúan numéricamente. Para lo cual también es necesario ser consistente con la regla de OZI (Okubo-Zweig-Iizuka) [18], y mantener los éxitos de los CQMs en la espectroscopía de hadrones.

Capítulo 2

Acoplamiento electromagnético

En este capítulo, se hace una revisión de los acoplamiento de los cuarks con un campo electromagnético, analizando procesos con emisión y absorción de un fotón, partiendo de la Teoría de Campos Cuántica. Se construyen los operadores relevantes para procesos electromagnéticos a nivel de cuarks. Al final se estudian aproximaciones no relativistas.

2.1. Procesos radiativos

Mediante el uso de la imagen de interacción, partimos por definir el Hamiltoniano de interacción como [18]

$$H = e \int d^3x j_{em}^\mu(\vec{x}) A_\mu(\vec{x}) \quad (2.1.1)$$

donde j^μ es la corriente de cuarks :

$$j_{em}^\mu(\vec{x}) = \bar{q}(\vec{x}) Q \gamma^\mu q(\vec{x}) \quad (2.1.2)$$

y $A_\mu(\vec{x})$ es el campo electromagnético, $q(\vec{x})$ es el campo de los cuarks. Q es la carga electromagnética, en unidades de e . El campo electromagnético y el campo de los cuarks se pueden descomponer en segunda cuantización mediante los operadores de creación y aniquilación de ondas planas de la siguiente forma:

$$A_\mu(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} [a_\mu(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] \quad (2.1.3)$$

$$q(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p^0}\right)^{1/2} \sum_{s,\alpha,\beta} [\omega_\alpha \phi_\beta u_s(\vec{p}) b_\tau(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \omega'_\alpha \phi'_\beta v_s(\vec{p}) d_\tau^\dagger(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}] \quad (2.1.4)$$

Las funciones ω_α denotan las funciones de onda de color y ϕ_β las funciones de onda en el espacio de sabor; u_s y v_s son los espinores de Dirac de los cuarks y anticuarks, respectivamente.

Los subíndices τ en los operadores de creación y aniquilación de los cuarks (b, b^\dagger) y anticuark (d, d^\dagger) corren sobre todos los números cuánticos s, α, β .

Las relaciones de conmutación y anticonmutación de los operadores están dadas por:

$$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')] = -g_{\mu\nu}\delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.1.5)$$

$$\{b_\tau(\vec{p}), b_{\tau'}^\dagger(\vec{p}')\} = \{d_\tau(\vec{p}), d_{\tau'}^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{\tau\tau'}\delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.1.6)$$

y las no-covariantes normalizaciones de las ondas planas

$$\langle \vec{k}, \mu | \vec{k}', \nu \rangle = -g_{\mu\nu}\delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.1.7)$$

$$\langle \vec{p}, \tau | \vec{p}', \tau' \rangle = \delta_{\tau\tau'}\delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.1.8)$$

Para el caso de los espinores se tiene una normalización covariante con la siguiente convención [18]

$$u_s^\dagger(\vec{p})u_{s'}(\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \frac{p^0}{m}\delta_{ss'}. \quad (2.1.9)$$

2.2. Procesos asociados a la corriente de los cuarks

Haciendo el desarrollo de la ec. (2.1.2) se obtiene que la corriente $j_{em}^\mu(\vec{x})$ se puede escribir en forma general como

$$\begin{aligned} j_{em}^\mu(\vec{x}) &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'^0}\right)^{1/2} \sum_{s', \alpha', \beta'} \left[\omega_{\alpha'}^* \phi_{\beta'}^* \bar{u}_{s'}(\vec{p}') b_{\tau'}^\dagger(\vec{p}') e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}} \right. \\ &+ \left. \omega_{\alpha'}^* \phi_{\beta'}^* \bar{v}_{s'}(\vec{p}') d_{\tau'}(\vec{p}') e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}} \right] \\ &\times Q\gamma^\mu \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p^0}\right)^{1/2} \sum_{s, \alpha, \beta} \left[\omega_\alpha \phi_\beta u_s(\vec{p}) b_\tau(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \omega'_\alpha \phi'_{\beta'} v_s(\vec{p}) d_{\tau'}^\dagger(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^4 j_i^\mu(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

con lo que podemos identificar los siguientes cuatro procesos, clasificados por los operadores de creación y aniquilación.

1. Proceso elástico entre cuarks, donde se aniquila un cuark de momento \vec{p} y se crea otro con momento \vec{p}' . Con esto se modela la transición de un cuark, debido a la absorción o emisión de un fotón.

$$\begin{aligned} j_1^\mu(\vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha, \alpha'} \omega_{\alpha'}^* \omega_\alpha \sum_{\beta, \beta'} \phi_{\beta'}^* Q \phi_\beta \\ &\times \sum_{s, s'} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^\mu u_s(\vec{p}) e^{i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} b_{\tau'}^\dagger(\vec{p}') b_\tau(\vec{p}) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

2. Proceso de creación de un par cuark-anticuark, el operador consta de los dos operadores de creación uno de cuark y otro de anticuark

$$j_2^\mu(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha,\alpha'} \omega_{\alpha'}^* \omega'_\alpha \sum_{\beta,\beta'} \phi_{\beta'}^* Q \phi'_\beta \quad (2.2.3)$$

$$\times \sum_{s,s'} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^\mu v_s(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} b_{\tau'}^\dagger(\vec{p}') d_\tau^\dagger(\vec{p})$$

3. Proceso de aniquilación de un par cuark-anticuark, este tiene la forma del operador adjunto conjugado del caso anterior

$$j_3^\mu(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha,\alpha'} \omega_{\alpha'}^* \omega_\alpha \sum_{\beta,\beta'} \phi_{\beta'}^* Q \phi_\beta \quad (2.2.4)$$

$$\times \sum_{s,s'} \bar{v}_{s'}(\vec{p}') \gamma^\mu u_s(\vec{p}) e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} d_{\tau'}(\vec{p}') b_\tau(\vec{p})$$

4. Proceso elástico entre anticuarks, que considera la posibilidad de transiciones de anticuark.

$$j_4^\mu(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha,\alpha'} \omega_{\alpha'}^* \omega'_\alpha \sum_{\beta,\beta'} \phi_{\beta'}^* Q \phi'_\beta \quad (2.2.5)$$

$$\times \sum_{s,s'} \bar{v}_{s'}(\vec{p}') \gamma^\mu v_s(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} d_{\tau'}(\vec{p}') d_\tau^\dagger(\vec{p})$$

2.3. Hamiltoniano de interacción total

El Hamiltoniano que describe el acoplamiento entre el campo electromagnético 2.1.3 con los campos de las corrientes de los cuarks y anticuarks de las ecs. (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) y (2.2.5), dan lugar 8 diferentes procesos, cuatro asociados con la emisión de un fotón y otros cuatro asociados con la absorción de un fotón.

Para estudiar con detalle lo que significa cada proceso podemos acoplar por separado las cuatro partes de la corriente con el campo electromagnético. Por lo que se trabajará el Hamiltoniano en cuatro partes distintas

$$H_{total} = \sum_{i=1}^4 H_i \quad (2.3.1)$$

donde se ha definido:

$$H_i = e \int d^3x j_i^\mu(\vec{x}) A_\mu(\vec{x}) \quad (2.3.2)$$

En las siguientes secciones se hará la aproximación no relativista.

2.3.1. Hamiltoniano de interacción de procesos elástico entre partículas

Aquí se da la expresión para el Hamiltoniano de interacción de procesos elástico entre cuarks con la absorción o emisión de un fotón Figura 2.1. Partiendo de la ec. (2.3.2), sustituimos el campo del fotón ec. (2.1.3) y la corriente elástica ec. (2.2.2)

$$H_1 = e \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \sum_{\alpha,\alpha'} \omega_{\alpha'}^* \omega_{\alpha} \sum_{\beta,\beta'} \phi_{\beta'}^* Q \phi_{\beta} \quad (2.3.3)$$

$$\times \sum_{s,s'} \left(\bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^{\mu} u_s(\vec{p}) e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} b_{\tau'}^{\dagger}(\vec{p}') b_{\tau}(\vec{p}) \right) [a_{\mu}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\mu}^{\dagger}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

Que al integrar sobre \vec{x} y tomando el límite no relativista

$$\left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 1 \quad (2.3.4)$$

$$\left(\frac{m}{p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 1 \quad (2.3.5)$$

se obtiene

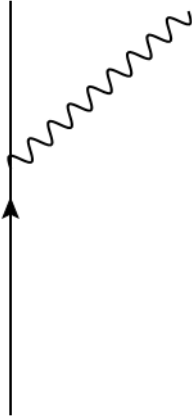


Figura 2.1: Diagrama a nivel de cuarks de la emisión de un fotón

$$H_1 = e \int d^3p \int d^3p' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \sum_{\alpha,\alpha'} \omega_{\alpha'}^* \omega_{\alpha} \sum_{\beta,\beta'} \phi_{\beta'}^* Q \phi_{\beta} \quad (2.3.6)$$

$$\times \sum_{s,s'} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^{\mu} u_s(\vec{p}) b_{\tau'}^{\dagger}(\vec{p}') b_{\tau}(\vec{p}) \left(a_{\mu}(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}'+\vec{k}) + a_{\mu}^{\dagger}(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}'-\vec{k}) \right)$$

El término acompañado con a_{μ} corresponde a un proceso de absorción de un fotón, mientras el término que lleva a_{μ}^{\dagger} corresponde a un proceso de emisión de un fotón.

En el límite no relativista, el término con los espinores de Dirac se reduce a (véase el apéndice B.4)

$$\bar{u}_{s'}(\vec{p}')\gamma^0 u_s(\vec{p}) \rightarrow \chi_{s'}^\dagger \chi_s \quad (2.3.7)$$

$$\bar{u}_{s'}(\vec{p}')\vec{\gamma} u_s(\vec{p}) \rightarrow \frac{1}{2m}\chi_{s'}^\dagger \left[(\vec{p} + \vec{p}') + i\vec{\sigma} \times (\vec{p}' - \vec{p}) \right] \chi_s \quad (2.3.8)$$

2.3.2. Hamiltoniano de interacción con procesos de creación

En el segundo término del Hamiltoniano se incluyen las contribuciones de los pares cuark-anticuark. El Hamiltoniano de interacción con procesos de creación de un par de cuark-anticuark, está dado por (usando las mismas aproximaciones descritas en la sección anterior)

$$H_2 = e \int d^3p \int d^3p' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \sum_{\alpha,\alpha'} \omega_{\alpha'}^* \omega'_\alpha \sum_{\beta,\beta'} \phi_{\beta'}^* Q \phi'_\beta \quad (2.3.9)$$

$$\times \sum_{s,s'} \bar{u}_{s'}(\vec{p}')\gamma^\mu v_s(\vec{p}) b_{\tau'}^\dagger(\vec{p}') d_\tau^\dagger(\vec{p}) \left(a_\mu(\vec{k})\delta^{(3)}(-\vec{p} - \vec{p}' + \vec{k}) + a_\mu^\dagger(\vec{k})\delta^{(3)}(-\vec{p} - \vec{p}' - \vec{k}) \right)$$

La primera parte de este Hamiltoniano corresponde a la aniquilación un fotón que se va a un par cuark anticuark virtual (Figura 2.2 a). La segunda parte del Hamiltoniano es el que nos da la transición de una línea de decaimiento de un cuark, que crea un par cuark-anticuark y nos da un fotón, (Figura 2.2 b).

En el límite no relativista $\bar{u}_{s'}(\vec{p}')\gamma^\mu v_s(\vec{p})$ se escribe como (ver apéndice B.4)

$$\bar{u}_{s'}(\vec{p}')\gamma^0 v_s(\vec{p}) \rightarrow \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{p}')}{2m} \chi_s \quad (2.3.10)$$

$$\bar{u}_{s'}(\vec{p}')\gamma^k v_s(\vec{p}) \rightarrow \chi_{s'}^\dagger \sigma^k \chi_s \quad (2.3.11)$$

2.3.3. Hamiltoniano de interacción en procesos con aniquilación

Al meter los pares cuark-anticuark, aparece otro proceso importante que es la aniquilación del par a un fotón. El Hamiltoniano que describe a los procesos con aniquilación de un par cuark-anticuark es el siguiente:

$$H_3 = e \int d^3p \int d^3p' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \sum_{\alpha,\alpha'} \omega_{\alpha'}^* \omega_\alpha \sum_{\beta,\beta'} \phi_{\beta'}^* Q \phi_\beta \quad (2.3.12)$$

$$\times \sum_{s,s'} \bar{v}_{s'}(\vec{p}')\gamma^\mu u_s(\vec{p}) d_{\tau'}(\vec{p}') b_\tau(\vec{p}) \left(a_\mu(\vec{k})\delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' + \vec{k}) + a_\mu^\dagger(\vec{k})\delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{k}) \right)$$

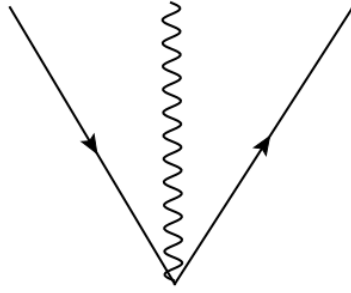


Figura 2.2: Diagrama a nivel de cuarks de la creación de un par cuark-anticuark y un fotón.

la segunda parte del este Hamiltoniano, que modela la aniquilación de un par a un fotón, está ilustrado en la Figura 2.3. Que es muy útil en la descripción de decaimientos electromagnéticos.

Al igual que en el caso de creación de un par cuark-anticuark, en el límite no relativista $\bar{v}_{s'}(\vec{p}')\gamma^\mu u_s(\vec{p})$ se escribe como (ver apéndice B.4)

$$\bar{v}_{s'}(\vec{p}')\gamma^0 u_s(\vec{p}) \rightarrow \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{p}')}{2m} \chi_s \quad (2.3.13)$$

$$\bar{v}_{s'}(\vec{p}')\gamma^k u_s(\vec{p}) \rightarrow \chi_{s'}^\dagger \sigma^k \chi_s \quad (2.3.14)$$

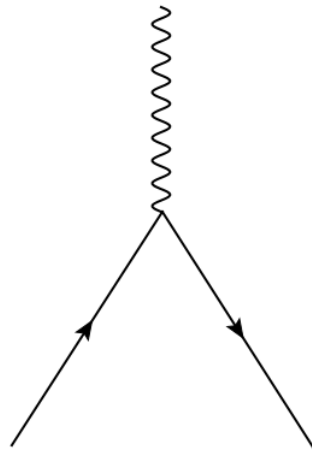


Figura 2.3: Diagrama a nivel de cuarks de la aniquilación de un par cuark-anticuark.

2.3.4. Hamiltoniano de interacción en procesos elásticos entre anticuarks

Aquí se incluyen las posibles transiciones entre las antipartículas. Para las cuales también se tiene la absorción o emisión de un fotón, el caso donde hay la radiación de un fotón se muestra en la fig. 2.4.

El Hamiltoniano de interacción de los procesos elásticos entre anticuarks se escribe a continuación:

$$H_4 = e \int d^3p \int d^3p' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \sum_{\alpha, \alpha'} \omega_{\alpha'}^* \omega_{\alpha} \sum_{\beta, \beta'} \phi_{\beta'}^* Q \phi_{\beta} \quad (2.3.15)$$

$$\times \sum_{s, s'} \bar{v}_{s'}(\vec{p}') \gamma^{\mu} v_s(\vec{p}) d_{\tau}^{\dagger}(\vec{p}) \left(a_{\mu}(\vec{k}) \delta^{(3)}(-\vec{p} + \vec{p}' + \vec{k}) + a_{\mu}^{\dagger}(\vec{k}) \delta^{(3)}(-\vec{p} + \vec{p}' - \vec{k}) \right)$$

En este caso $\bar{v}_{s'}(\vec{p}') \gamma^{\mu} v_s(\vec{p})$ coincide con la de los procesos elásticos de cuarks, en el límite no relativista.

$$\bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^0 u_s(\vec{p}) \rightarrow \chi_{s'}^{\dagger} \chi_s \quad (2.3.16)$$

$$\bar{u}_{s'}(\vec{p}') \vec{\gamma} u_s(\vec{p}) \rightarrow \frac{1}{2m} \chi_{s'}^{\dagger} \left[(\vec{p} + \vec{p}') + i\vec{\sigma} \times (\vec{p}' - \vec{p}) \right] \chi_s \quad (2.3.17)$$

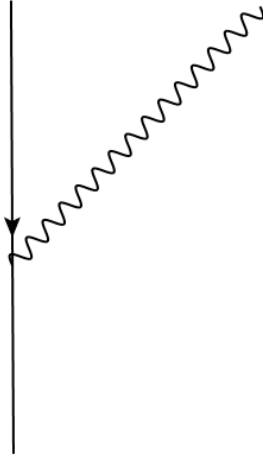


Figura 2.4: Diagrama de la radiación de un fotón por un anticuark.

Al juntar todas las partes se tiene el Hamiltoniano total de interacción, entre el campo electromagnético, cuarks y anticuarks, que incluye tanto los procesos de emisión de un fotón así como los de absorción. Hasta el momento se ha hecho una descripción general a nivel de cuarks. Al atacar problemas específicos habrán términos que no contribuyan, como se observa principalmente para la descripción de dos diferentes procesos electromagnéticos,

que son los decaimientos electromagnéticos de resonancias bariónicas o foto-producción de resonancias, en el primero solo contribuyen los términos acompañados de a_μ^\dagger y para los segundos solo los términos con a_μ . Estos procesos se analizan en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Acoplamientos electromagnéticos en Bariones

Llegamos a la parte fundamental de este trabajo, que es calcular la probabilidad de transición de los bariones en los acoplamientos electromagnéticos, donde se aplicarán los operadores que se obtuvieron en capítulo 2, que incluyen tanto los acoplamientos elásticos entre cuarks ó anticuarks, junto con procesos de creación y aniquilación de un par cuark-anticuark. Dichos acoplamientos son relevantes para describir procesos como fotoproducción de hadrones y decaimientos electromagnéticos de resonancias.

A continuación se describe la metodología general en forma esquemática para evaluar las amplitudes de transición de los acoplamientos electromagnéticos, considerando las correcciones debido a la creación y aniquilación de pares cuark-anticuark. Después se hace la formulación explícitamente de las contribuciones de los pares cuark-anticuark del Unquenched Quark Model para la descripción de los decaimientos electromagnéticos de los bariones.

3.1. Formulación general

Para obtener la probabilidad de la transición es necesario evaluar el elemento de matriz del Hamiltoniano de interacción, ec. (2.3.1) entre el estado inicial y final.

$$\langle \psi_f | H_{\text{total}} | \psi_i, \gamma \rangle \quad (3.1.1)$$

para la fotoproducción de bariones y

$$\langle \psi_f, \gamma | H_{\text{total}} | \psi_i \rangle \quad (3.1.2)$$

para el decaimiento electromagnético de los bariones. $|\psi_i\rangle$ es el estado del barión cuya expresión general está dada en la ec. (1.7.1), $|\gamma\rangle$ es el estado del fotón. El hamiltoniano se puede expresar de manera esquemática

$$H_{total} = \sum_{s,s'} \left[E_{s,s'}^\mu b_{s'}^\dagger b_s + C_{s,s'}^\mu b_{s'}^\dagger d_s^\dagger + A_{s,s'}^\mu d_{s'} b_s + D_{s',s}^\mu d_{s'}^\dagger d_s \right] \times \left[a_\mu \delta(F_{E,C,A,D}(p,p',k)) + a_\mu^\dagger \delta(F'_{E,C,A,D}(p,p',k)) \right] \quad (3.1.3)$$

aquí los subíndices s, s' refieren a todos los números cuánticos de los cuarks, las funciones de delta son correspondientes a cada uno de los procesos, porque en realidad no se pueden factorizar.

Para mostrar como obtener los elementos de matriz de los acoplamientos electromagnéticos de una forma esquemática reescribimos la ec. (1.7.1) con un cambio de base para la configuración barión-mesón

$$|\psi_A\rangle = |A\rangle + \sum_{i,j} \int \beta_{ij} |B_i\rangle |C_j\rangle \quad (3.1.4)$$

los coeficientes β_{ij} corresponden a los elementos de matriz del operador 3P_0 , divididos por el factor de masa de la ec. (1.7.1). Así en las siguientes secciones se hará una descripción esquemática de los procesos electromagnéticos en bariones.

3.1.1. Decaimientos electromagnéticos en bariones

Para los decaimientos electromagnéticos de bariones

$$A \rightarrow A' + \gamma \quad (3.1.5)$$

donde A y A' son los bariones iniciales y finales, respectivamente, el elemento de matriz de interés es el siguiente:

$$\langle \gamma | \left(\langle A' | + \sum_{n,m} \int \beta'_{nm} \langle B'_n | \langle C'_m | \right) H_{total} \left(|A\rangle + \sum_{i,j} \int \beta_{ij} |B_i\rangle |C_j\rangle \right) \rangle = \quad (3.1.6)$$

El estado final nos indica que tenemos un fotón por lo que solo nos quedamos con la parte de emisión del Hamiltoniano, por lo cual el elemento de matriz se reduce a

$$\begin{aligned}
\langle A'_T \gamma | H_{total} | A_T \rangle &= \sum_{s,s'} \left(\langle A'_T \gamma | E_{s,s'}^\mu b_s^\dagger b_s a_\mu^\dagger | A \rangle \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}' - \vec{k}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n,m} \int \beta'_{nm} \langle B'_n \gamma | \langle C'_m | C_{s,s'}^\mu b_s^\dagger d_s^\dagger a_\mu^\dagger | A \rangle \delta^{(3)}(-\vec{p} - \vec{p}' - \vec{k}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i,j} \int \beta_{ij} \langle A'_T \gamma | A_{s,s'}^\mu d_{s'} b_s a_\mu^\dagger | B_i \rangle | C_j \rangle \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{k}) + \sum_{i,j,n,m} \int \beta_{ij} \beta'_{nm} \langle B'_n \gamma | \right. \\
&\quad \left. \langle C'_m | \left(E_{s,s'}^\mu b_s^\dagger b_s \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}' - \vec{k}) + D_{s',s}^\mu d_s^\dagger d_s \delta^{(3)}(-\vec{p} + \vec{p}' - \vec{k}) \right) a_\mu^\dagger | B_i \rangle | C_j \rangle \right) \quad (3.1.7)
\end{aligned}$$

La suma sobre s y s' indican todos los números cuánticos, incluyendo el momento de los operadores del Hamiltoniano, y el momento del fotón. Las funciones de delta $\delta^{(3)}$ indican la conservación de momento.

3.1.2. Foto-producción de resonancias

La foto-producción de bariones

$$\gamma^* + A \rightarrow A' \quad (3.1.8)$$

corresponde a la absorción del fotón (a_μ). Así la expresión final a usar es:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_f | H_{total} | \psi_i \rangle &= \langle A'_T | H_{total} | A_T \gamma \rangle = \sum_{s,s'} \left(\langle A'_T | E_{s,s'}^\mu b_s^\dagger b_s a_\mu | A \gamma \rangle \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}' + \vec{k}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n,m} \int B'_{nm} \langle B'_n | \langle C'_m | C_{s,s'}^\mu b_s^\dagger d_s^\dagger a_\mu | A \gamma \rangle \delta^{(3)}(-\vec{p} - \vec{p}' + \vec{k}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i,j} \int B_{ij} \langle A'_T | A_{s,s'}^\mu d_{s'} b_s a_\mu | B_i \gamma \rangle | C_j \rangle \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' + \vec{k}) + \sum_{i,j,n,m} \int B_{ij} B'_{nm} \langle B'_n | \right. \\
&\quad \left. \langle C'_m | \left(E_{s,s'}^\mu b_s^\dagger b_s \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}' + \vec{k}) + D_{s',s}^\mu d_s^\dagger d_s \delta^{(3)}(-\vec{p} + \vec{p}' + \vec{k}) \right) a_\mu | B_i \gamma \rangle | C_j \rangle \right) \quad (3.1.9)
\end{aligned}$$

donde se usa la misma notación que en la ec. (3.1.7).

3.2. Decaimiento electromagnético con término elástico

Ahora se hace el análisis de las contribuciones de cada uno de los términos del decaimiento electromagnético de los bariones. Primero se consideran las contribuciones de los cuarks de valencia

$$\langle A'_T \gamma | H_1 | A \rangle \quad (3.2.1)$$

donde

$$H_1 = e \int d^3 p_7 \int d^3 p_8 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} g^\mu(\vec{p}_7, \vec{p}_8) b_7^\dagger(\vec{p}_7) b_8(\vec{p}_8) \left(a_\mu^\dagger(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{p}_8 - \vec{p}_7 - \vec{k}) \right) \quad (3.2.2)$$

$$g^\mu(\vec{p}_7, \vec{p}_8) = \sum_{\alpha, \alpha'} \omega_{\alpha'}^* \omega_\alpha \sum_{\beta, \beta'} \phi_{\beta'}^* Q \phi_\beta \sum_{s, s'} \bar{u}_{s'}(\vec{p}_7) \gamma^\mu u_s(\vec{p}_8) \quad (3.2.3)$$

Aquí los índices 7 y 8 nos indican todos los números cuánticos del cuark que se va a crear y el cuark que se aniquila respectivamente.

Ahora se considera la emisión de un fotón real de momento \vec{k}_1 y polarización ϵ_ν . El estado del fotón puede ser escrito como

$$|\gamma\rangle = |\vec{k}_1, \epsilon_\nu\rangle = \epsilon_\nu a_\nu^\dagger(\vec{k}_1) |0\rangle \quad (3.2.4)$$

en esta última expresión los índices ν no están sumados, son las etiquetas.

Antes de evaluar la amplitud de transición explícitamente tomaremos el elemento de matriz parcial en el espacio del fotón, es decir

$$\langle \gamma | H_1 | 0 \rangle = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \int d^3 p_7 \int d^3 p_8 g^\mu(\vec{p}_7, \vec{p}_8) b_7^\dagger(\vec{p}_7) b_8(\vec{p}_8) \epsilon_\mu^* \delta^{(3)}(\vec{p}_8 - \vec{p}_7 - \vec{k}_1) \quad (3.2.5)$$

donde $g^\mu(\vec{p}_7, \vec{p}_8)$ son los elementos de matriz de la corriente de los cuarks que se ven involucrados en el proceso, dados por la expresión en primera cuantización:

$$\begin{aligned} g^\mu(\vec{p}_7, \vec{p}_8) \epsilon_\mu^* &= \langle \vec{p}_7, 7 | Q j^\mu \epsilon_\mu | \vec{p}_8, 8 \rangle \\ &= Q_{7,8} \left(\epsilon_0 - \frac{\left[\vec{p}_8 \cdot \vec{\epsilon} + \vec{p}_7 \cdot \vec{\epsilon} + i \left(\vec{\sigma} \cdot (\vec{k}_1 \times \vec{\epsilon}) \right)_{7,8} \right]}{2m} \right) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Ahora escribimos los de estados de los bariones $|A'\rangle$ y $|A\rangle$ de la siguiente forma:

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \prod_{i=1}^3 d^3 p_i \Psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) |0\rangle \quad (3.2.7)$$

$$|A'\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \prod_{i=4}^6 d^3 p_i \Psi_A(\vec{p}_4, \vec{p}_5, \vec{p}_6) b_4^\dagger(\vec{p}_4) b_5^\dagger(\vec{p}_5) b_6^\dagger(\vec{p}_6) |0\rangle \quad (3.2.8)$$

en esta notación compacta de los $b_i(\vec{p}_i)$ y $b_i^\dagger(\vec{p}_i)$, los subíndices i denotan los números cuánticos discretos de los cuarks con momento \vec{p}_i . De esta manera la amplitud de transición se escribe

$$\langle A' \gamma | H_1 | A \rangle = \frac{e}{6(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\epsilon_\mu^*}{\sqrt{2k^0}} \int \prod_{i=1}^8 d^3 p_i \Psi_{A'}^*(\vec{p}_4, \vec{p}_5, \vec{p}_6) g^\mu(\vec{p}_7, \vec{p}_8) \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \quad (3.2.9)$$

$$\delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_7 - \vec{k}_1) \langle 0 | b_6(\vec{p}_6) b_5(\vec{p}_5) b_4(\vec{p}_4) b_7^\dagger(\vec{p}_7) b_8(\vec{p}_8) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle.$$

Ahora tenemos que encontrar todas las posibles contracciones para tener la amplitud de transición. A partir de las relaciones de anticonmutación de los operadores $b_i(\vec{p}_i)$ y $b_i^\dagger(\vec{p}_i)$.

$$\{b_i(\vec{p}_i), b_j^\dagger(\vec{p}_j)\} = \delta_{i,j} \delta^3(\vec{p}_i - \vec{p}_j), \quad (3.2.10)$$

donde la primera δ es sobre los números cuánticos discretos.

Primero empezaremos con la siguiente contracción

$$\begin{aligned} b_8(\vec{p}_8) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle &= \left(\delta_{8,1} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_1) - b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_8(\vec{p}_8) \right) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle \\ &= \left(\delta_{8,1} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) - \delta_{8,2} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_2) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_3^\dagger(\vec{p}_3) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{8,3} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_3) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) \right) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Ahora analizamos la ec. (3.2.11), que en una primera impresión nos da tres contribuciones y algo que también es que hay que notar es una fase entre uno de los términos y los otros dos. Sin embargo, recordamos que las funciones de onda de los bariones en el espacio de espín, sabor y orbital, son completamente simétricas. La antisimetría está solo en el espacio de color. Con lo que al hacer las diferentes contracciones se hacen intercambio de partículas, en el segundo término hay un intercambio entre el cuark "1" y el cuark "2" y como resultado la fase debido a la antisimetría pero solo en el espacio de color. Por lo que al factorizar la parte de color, recordando que $\omega^A(1, 2, 3) = -\omega^A(2, 1, 3)$ que nos pide la necesidad de la fase que aparece en para poder hacerlo, la contribución de los tres términos es la misma. En el tercer término no se ve la fase, pues como se hacen dos permutaciones el signo queda igual, pero también se usa el mismo tratamiento para poder aislar la parte de color. Debido a esto, concluimos que las tres contribuciones son las mismas. Sin pérdida de generalidad, tomaremos tres veces la contribución del tercer cuark, para así obtener

$$b_8(\vec{p}_8) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle \rightarrow 3 (\delta_{8,3} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_3)) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \quad (3.2.12)$$

Habiendo hecho el análisis de este proceso explícitamente nos simplificará el resto de las contracciones como se mostrará a continuación. Ya que de manera análoga a partir de $b_4^\dagger(\vec{p}_4) b_5^\dagger(\vec{p}_5) b_6^\dagger(\vec{p}_6) | 0 \rangle$ son los cuarks del barión $|A'\rangle$ ponemos obtener que:

$$\begin{aligned} \langle 0|b_6(\vec{p}_6)b_5(\vec{p}_5)b_4(\vec{p}_4)b_7^\dagger(\vec{p}_7) &= \left(b_7(\vec{p}_7)b_4^\dagger(\vec{p}_4)b_5^\dagger(\vec{p}_5)b_6^\dagger(\vec{p}_6)|0\rangle\right)^\dagger \\ \rightarrow \left(3\delta_{7,6}\delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_6)b_4^\dagger(\vec{p}_4)b_5^\dagger(\vec{p}_5)|0\rangle\right)^\dagger &= 3\langle 0|b_5(\vec{p}_5)b_4(\vec{p}_4)\delta_{7,6}\delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_6). \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Así la contracción total la podemos desarrollar con el siguiente proceso:

$$\begin{aligned} \langle 0|b_6(\vec{p}_6)b_5(\vec{p}_5)b_4(\vec{p}_4)b_7^\dagger(\vec{p}_7)b_8(\vec{p}_8)b_1^\dagger(\vec{p}_1)b_2^\dagger(\vec{p}_2)b_3^\dagger(\vec{p}_3)|0\rangle \\ \rightarrow 9 \cdot (2!)\delta_{8,3}\delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_3)\delta_{7,6}\delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_6)\delta_{4,1}\delta^3(\vec{p}_4 - \vec{p}_1)\delta_{5,2}\delta^3(\vec{p}_5 - \vec{p}_2) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

el (2!) viene de las posibles contracciones restantes.

Así la amplitud de transición se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \langle A'\gamma|H_1|A\rangle = \frac{3e}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{\epsilon_\mu^*}{\sqrt{2k^0}}\int\prod_{i=1}^4d^3p_i\Psi_{A'}^*(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_4)\langle\vec{p}_4,4|Qj^\mu|\vec{p}_3,3\rangle \\ \times\Psi_A(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)\delta^3(\vec{p}_3 - \vec{p}_4 - \vec{k}_1) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

En la ec. (3.2.15) se observa un factor *tres*, que nos indica la simetría de las funciones de onda, así solo se considera la contribución del tercer cuark, como se muestra en la figura 3.1. También se hizo un doble renombre, pues la etiqueta 4 ahora denota los números cuánticos del tercer cuark del barión final. Con $\langle\vec{p}_4,4|Qj^\mu\epsilon_\mu|\vec{p}_3,3\rangle\delta^3(\vec{p}_3 - \vec{p}_4 - \vec{k}_1)$ la representación del operador de corriente de los cuarks en el espacio de momentos.

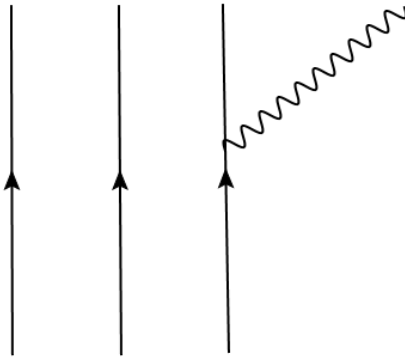


Figura 3.1: Diagrama de la radiación de un fotón por el tercer cuark del barión.

3.3. Decaimiento electromagnético con aniquilación

Ahora consideramos la parte de decaimiento electromagnético del Hamiltoniano de aniquilación (2.3.12), que da la contribución de los procesos virtuales de aniquilación de pares de partícula y antipartículas. Del cual tomamos la parte que contribuye a el decaimiento electromagnético, que escribimos de manera simbólica como:

$$H_3 = \int d^3k \int d^3p_9 \int d^3p_{10} F^\mu(\vec{p}_{10}, \vec{p}_9) b_9(\vec{p}_9) d_{10}(\vec{p}_{10}) a_\mu^\dagger(\vec{k}) \delta^3(\vec{p}_9 + \vec{p}_{10} - \vec{k}) \quad (3.3.1)$$

Aquí 9 y 10 nos indican los números cuánticos del cuark y el anticuark respectivamente. La función $F^\mu(\vec{p}_{10}, \vec{p}_9)$ nos indica los elementos de matriz del operador en primera cuantización.

El operador es $C_1 Q j_3^\mu$, con C_1 una constante, que al acoplar con el fotón de polarización ϵ_μ en primera cuantización, los elementos de matriz están dados por:

$$F^\mu(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \langle \vec{p}_i, i | C_1 Q j_3^\mu \epsilon_\mu | \vec{p}_j, j \rangle = C_1 Q_{i,j} \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_i + \vec{p}_j) \epsilon_0}{2m} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon})_{i,j} \right) \quad (3.3.2)$$

$$C_1 = \frac{e}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^0}} \quad (3.3.3)$$

donde el subíndice i se refiere al anticuark a eliminar y el subíndice j nos indica alguno de los cuarks de la configuración que será eliminado.

Por ende, para $i, j, \vec{k}_0, \vec{K}_0$ fijos solo necesitamos el siguiente elemento de matriz:

$$\langle A' \gamma | H_3 | B_i C_j, \vec{k}_0, \vec{K}_0, J, l \rangle \quad (3.3.4)$$

Las funciones de onda de los estados de bariones $|B\rangle$ y $|A'\rangle$ están dados por:

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \prod_{i=1}^3 d^3p_i \Psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) |0\rangle \quad (3.3.5)$$

$$|A'\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \prod_{i=6}^8 d^3p_i \Psi_{A'}(\vec{p}_6, \vec{p}_7, \vec{p}_8) b_6^\dagger(\vec{p}_6) b_7^\dagger(\vec{p}_7) b_8^\dagger(\vec{p}_8) |0\rangle, \quad (3.3.6)$$

para el mesón se tiene una forma muy similar:

$$|C\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \prod_{i=4}^5 d^3p_i \Psi_C(\vec{p}_4, \vec{p}_5) b_4^\dagger(\vec{p}_4) d_5^\dagger(\vec{p}_5) |0\rangle \quad (3.3.7)$$

El fotón de momento \vec{k}_1 y polarización ϵ^ν se representa como en la ec. (3.2.4).

Para hacer más comoda la descripción, usando las funciones de onda descopladas se necesita un cambio de base, dada por [17].

$$\begin{aligned} |BC, J_b, J_c, J_{bc} l; J_a M_a, \vec{K}_0, k_0\rangle &= \sum_{M_{bc}, m, M_b, M_c} \langle J_b M_b, J_c M_c | J_{bc} M_{bc} \rangle \\ &\times \int d^3K_b d^3K_c \langle J_{bc} M_{bc} l m | J_a M_a \rangle \langle \vec{K}_b \vec{K}_c | \vec{K}_0 l m k_0 \rangle |B, J_b M_b \vec{K}_b\rangle |C, J_c M_c \vec{K}_c\rangle \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Aquí los valores J_a y M_a dependen del momento angular del barión de valencia A . El cambio de base de ondas esféricas a ondas planas, está dado por [17].

$$\langle \vec{K}_b \vec{K}_c | \vec{K}_0 l m k_0 \rangle = \delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \frac{Y_l^m(\hat{k}_r)}{k_r^2} \delta(k_r - k_0), \quad (3.3.9)$$

en la ec. (3.3.9) se realizó un cambio de variables al centro de masa del sistema BC y el momento relativo entre B y C usando:

$$\vec{K} = \vec{K}_b + \vec{K}_c \quad (3.3.10)$$

$$\vec{k}_r = \frac{M_C \vec{K}_c - M_B \vec{K}_b}{M_B + M_C}, \quad \hat{k}_r = \frac{\vec{k}_r}{|\vec{k}_r|} \quad (3.3.11)$$

con \vec{K}_b y \vec{K}_c los momentos del centro de masa del barión B y el mesón C , respectivamente.

El estado buscado es $|B_i C_j, \vec{k}_0, \vec{K}_0, J, l\rangle$, que no depende de \vec{K}_0 , cuando se escoge como sistema de referencia el centro de masa del sistema, $\vec{K} = \vec{K}_b + \vec{K}_c = 0$, que es el sistema que coincide con el centro de masa del barión A .

La amplitud de transición se puede escribir como :

$$\begin{aligned} \langle A' \gamma | H_3 | B_i C_j, k_0, \vec{K}_0, J, l \rangle &= \int d^3 K_b d^3 K_c \sum_{M_{bc}, m, M_b, M_c} \langle J_b M_b, J_c M_c | J_{bc} M_{bc} \rangle \\ \langle J_{bc} M_{bc} l m | J_a M_a \rangle &\frac{Y_l^m(\hat{k}_r)}{k_r^2} \frac{1}{6\sqrt{2}} \int d^3 k \int \prod_{i=1}^{10} d^3 p_i \Psi_{A'}^*(\vec{p}_6, \vec{p}_7, \vec{p}_8) \epsilon_\nu^* F^\mu(\vec{p}_{10}, \vec{p}_9) \\ &\delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \delta(k_r - k_0) \Psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \Psi_C(\vec{p}_4, \vec{p}_5) \delta^3(\vec{p}_9 + \vec{p}_{10} - \vec{k}) \\ &\langle 0 | a_\nu b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_9(\vec{p}_9) d_{10}(\vec{p}_{10}) a_\mu^\dagger b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) b_4^\dagger(\vec{p}_4) d_5^\dagger(\vec{p}_5) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Ahora la tarea es encontrar todas las posibles contracciones de los operadores. Para empezar se hace las contracciones sencillas que es la del fotón y del anticuark. Usando las relaciones de conmutación para los operadores, dado en la ec. (2.1.5), en el espacio del fotón y de anticonmutación para los operadores en el espacio de anticuarks, dados en la ec. (2.1.6)

$$a_\nu a_\mu^\dagger = -g_{\nu\mu} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) - a_\mu^\dagger a_\nu \quad (3.3.13)$$

$$d_{\vec{p}_{10}} d_{\vec{p}_5}^\dagger = \delta_{10,5} \delta^3(\vec{p}_{10} - \vec{p}_5) - d_{\vec{p}_5}^\dagger d_{\vec{p}_{10}} \quad (3.3.14)$$

donde los segundos términos de ambas ecuaciones no contribuyen pues aplicando a la derecha al estado vacío se anulan. La $\delta_{10,5}$ nos indica los números cuánticos discretos del

anticuarks en el estado 10 y 5, respectivamente, por lo que la contracción se reduce a

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | a_\nu b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_9(\vec{p}_9) d_{10}(\vec{p}_{10}) a_\mu^\dagger b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) b_4^\dagger(\vec{p}_4) d_5^\dagger(\vec{p}_5) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_9(\vec{p}_9) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \\
&\times \left(-g_{\nu\mu} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) \delta_{10,5} \delta^3(\vec{p}_{10} - \vec{p}_5) \right) = -g_{\nu\mu} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) \delta_{10,5} \delta^3(\vec{p}_{10} - \vec{p}_5) \\
&\times \left[\delta_{9,1} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_1) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \right. \\
&\quad - \delta_{9,2} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_2) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_3^\dagger(\vec{p}_3) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \\
&\quad + \delta_{9,3} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_3) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \\
&\quad \left. - \delta_{9,4} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_4) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle \right] \quad (3.3.15)
\end{aligned}$$

Se han utilizado las relaciones de anticonmutación de los operadores de cuarks. Antes de continuar con el desarrollo del resto de las contracciones, analizaremos los tres primeros términos de la ec. (3.3.15). Quitando el factor $-g_{\nu\mu} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) \delta_{10,5} \delta^3(\vec{p}_{10} - \vec{p}_5)$ se muestra la siguiente reducción:

$$\begin{aligned}
& \delta_{9,1} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_1) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \\
&- \delta_{9,2} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_2) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_3^\dagger(\vec{p}_3) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \\
&+ \delta_{9,3} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_3) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \\
&\rightarrow 3\delta_{9,3} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_3) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \quad , \quad (3.3.16)
\end{aligned}$$

es decir que cada cuark del barión B contribuye de la misma manera. Sin pérdida de generalidad se ha escogido la contribución del tercer cuark. Para empezar analizamos los dos primeros términos. Podemos observar una fase entre ambos términos, que no es más que el reflejo de la antisimetría de los operadores de creación y aniquilación, por ser fermiones los cuarks. Sin embargo ambos términos contribuyen igual y con el mismo signo. Para visualizar esto primero recordamos que los bariones son completamente simétricos en los espacios de espín, sabor y espacial. Solo la antisimetría está reflejada en el espacio de color. El primer término viene directamente de la contracción de $\langle 0 | \dots b_9(\vec{p}_9) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) \dots | 0 \rangle$ sin embargo antes de hacer la contracción del par $b_9(\vec{p}_9) b_1^\dagger(\vec{p}_1)$ se pudo haber hecho una conmutación del término $b_9(\vec{p}_9) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) \rightarrow -b_9(\vec{p}_9) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_1^\dagger(\vec{p}_1)$. Este cambio de signo es el mismo que aparece en la ec. (3.3.16) y solo se ve reflejada en el espacio de color de la función de onda del barión que nombramos $\omega^B(1, 2, 3) = -\omega^B(2, 1, 3)$. Así el signo nos ayuda a factorizar la función de onda en el espacio de color, ya que para el tercer cuark se hacen dos permutaciones por lo que la función de onda se queda con el mismo signo.

La contribución es la misma para cada cuark del barión B . Así la ec. (3.3.16) queda

justificada. Con lo que podemos escribir la ec. (3.3.15).

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | a_\nu b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_9(\vec{p}_9) d_{10}(\vec{p}_{10}) a_\mu^\dagger b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) b_4^\dagger(\vec{p}_4) d_5^\dagger(\vec{p}_5) | 0 \rangle \\
& \rightarrow -g_{\nu\mu} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) \delta_{10,5} \delta^3(\vec{p}_{10} - \vec{p}_5) \\
& \times [3\delta_{9,3} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_3) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \\
& - \delta_{9,4} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_4) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle]
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

La relación (3.3.16) nos va ayudar a evaluar las contracciones restantes de una manera más simple. Ahora haciendo las contracciones hacia la izquierda de manera analoga, debido a que los operadores $b_{\vec{p}_6} b_{\vec{p}_7} b_{\vec{p}_8}$ son los que forman al barión $\langle A' |$ y cumplen con la misma simetría que el barión $|B\rangle$

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \\
& \rightarrow 3\delta_{6,1} \delta^3(\vec{p}_6 - \vec{p}_1) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Aquí se uso la misma idea de la identidad (3.3.16) ya que las contracciones de $b_{\vec{p}_2}^\dagger$ se pueden hacer con cualquiera de los operadores $b_{\vec{p}_6} b_{\vec{p}_7} b_{\vec{p}_8}$. Pero todas son equivalentes al factorizar la parte de las funciones de onda en el espacio de color. Así al repetir el proceso sistemáticamente se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_4^\dagger(\vec{p}_4) | 0 \rangle \\
& \rightarrow 3! \delta_{6,1} \delta^3(\vec{p}_6 - \vec{p}_1) \delta_{7,2} \delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_2) \delta_{8,4} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_4)
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

donde vemos que el $3! = 6$ nos dio todas las posibles permutaciones y todas son equivalentes al factorizar las funciones de onda en el espacio de color. Por último de manera completamente analoga se obtiene que :

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle \\
& \rightarrow 3! \delta_{6,1} \delta^3(\vec{p}_6 - \vec{p}_1) \delta_{7,2} \delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_2) \delta_{8,3} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_3)
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Ahora todo junto se puede sustituir en la ec. (3.3.21) para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
\langle A' \gamma | H_3 | B_i C_j, k_0, \vec{K}_0, J, l \rangle &= \int d^3 K_b d^3 K_c \sum_{M_{bc}, m, M_b, M_c} \langle J_b M_b, J_c M_c | J_{bc} M_{bc} \rangle \frac{Y_l^m(\hat{k}_r)}{k_r^2} \\
& \langle J_{bc} M_{bc} l m | J_a M_a \rangle \frac{1}{6\sqrt{2}} \int d^3 k \int \prod_{i=1}^{10} d^3 p_i \Psi_{A'}^*(\vec{p}_6, \vec{p}_7, \vec{p}_8) \epsilon_\nu^* F^\mu(\vec{p}_{10}, \vec{p}_9) \delta(k_r - k_0) \\
& \delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \Psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \Psi_C(\vec{p}_4, \vec{p}_5) \delta^3(\vec{p}_9 + \vec{p}_{10} - \vec{k}) \left\{ -g_{\nu\mu} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) \delta_{10,5} \right. \\
& \delta^3(\vec{p}_{10} - \vec{p}_5) [3 \cdot 3! \delta_{9,3} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_3) \delta_{6,1} \delta^3(\vec{p}_6 - \vec{p}_1) \delta_{7,2} \delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_2) \delta_{8,4} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_4) \\
& \left. - 3! \delta_{9,4} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_4) \delta_{6,1} \delta^3(\vec{p}_6 - \vec{p}_1) \delta_{7,2} \delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_2) \delta_{8,3} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_3) \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Así obtenemos la expresión final de la amplitud de transición del proceso de aniquilación, para un $|B_i C_j, \vec{k}_0, \vec{K}_0, J, l\rangle$, fijos

$$\begin{aligned} \langle A' \gamma | H_3 | B_i C_j, \vec{k}_0, \vec{K}_0, J, l \rangle &= \int d^3 K_b d^3 K_c \sum_{M_{bc}, m, M_b, M_c} \langle J_b M_b, J_c M_c | J_{bc} M_{bc} \rangle \\ &\langle J_{bc} M_{bc} l m | J_a M_a \rangle \delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \frac{Y_l^m(\hat{k}_r)}{k_r^2} \delta(k_r - k_0) \frac{3}{\sqrt{2}} \int \prod_{i=1}^5 d^3 p_i \\ &\left(\Psi_{A'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_4) \epsilon_\mu^* \Psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \Psi_C(\vec{p}_4, \vec{p}_5) F^\mu(\vec{p}_5, \vec{p}_3) \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_5 - \vec{k}_1) \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} \Psi_{A'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \epsilon_\mu^* \Psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \Psi_C(\vec{p}_4, \vec{p}_5) F^\mu(\vec{p}_5, \vec{p}_4) \delta^3(\vec{p}_4 + \vec{p}_5 - \vec{k}_1) \right) \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

El primer término de la ec. (3.3.22) corresponde a la aniquilación del tercer cuark del barión $|B\rangle$ y el anticuark del mesón $|C\rangle$, mientras los cuarks 1, 2, 4 permanecen como espectadores, este proceso se ve ilustrado en la figura 3.2. El segundo término corresponde

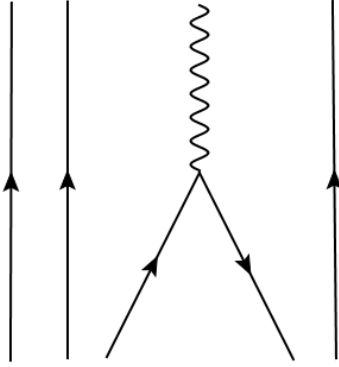


Figura 3.2: Diagrama de la aniquilación de un par cuark-anticuark acoplados a fotón.

a la aniquilación del mesón en las componentes extra, así el barión queda como espectador. Aunque solo se exhibe una integral sobre los momentos, cada etiqueta también nos refiere a los números discretos de los cuarks.

La contribución total del proceso de aniquilación se obtiene al sumar sobre i, j, l e integrar sobre \vec{k}_0, \vec{K}_0 ,

$$\sum_{i,j,l} \int d^3 k_0 d^3 K_0 \beta_{ij} \langle A' \gamma | H_3 | B_i C_j, \vec{k}_0, \vec{K}_0, J, l \rangle \quad (3.3.23)$$

donde los coeficientes β_{ij} vienen de la notación esquemática de la ec. (3.1.4). En el siguiente capítulo se analizará con detalle su contribución en el decaimiento electromagnético de bariones.

3.4. Decaimiento electromagnético con creación

En esta sección se analiza la contribución del Hamiltoniano de creación dado en la ec. (2.3.9) en el decaimiento electromagnético. Que contiene la contribución de los procesos virtuales de creación de pares de cuark-anticuark. Dicho Hamiltoniano se escribe de manera simbólica como:

$$H_2 = \int d^3k \int d^3p_9 \int d^3p_{10} G^\mu(\vec{p}_9, \vec{p}_{10}) b_9^\dagger(\vec{p}_9) d_{10}^\dagger(\vec{p}_{10}) a_\mu^\dagger(\vec{k}) \delta^3(-\vec{p}_9 - \vec{p}_{10} - \vec{k}) \quad (3.4.1)$$

Aquí los índices 9 y 10 nos indican los números cuánticos del cuark y el anticuark respectivamente. La función $G^\mu(\vec{p}_9, \vec{p}_{10})$ nos indica los elementos de matriz del operador en primera cuantización. En este caso el operador en primera cuantización $G^\mu = C_1 Q j_2^\mu$; donde C_1 es la misma constante de la ec. (3.3.3), que acoplado con con un fotón de polarización ϵ_μ^* , en la representación de los momentos está dado por:

$$G^\mu(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \langle \vec{p}_i, i | C_1 Q j_2^\mu \epsilon_\mu | \vec{p}_j, j \rangle = C_1 Q_{i,j} \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_i + \vec{p}_j) \epsilon_0}{2m} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon})_{i,j} \right) \quad (3.4.2)$$

El subíndice i se refiere al cuark creado y el subíndice j nos indica el anticuark que se crea.

Para $i, j, \vec{k}_0, \vec{K}_0$ fijos solo necesitamos el siguiente elemento de matriz:

$$\langle B'_i C'_j, \vec{k}_0, \vec{K}_0, J, l \gamma | H_2 | A \rangle \quad (3.4.3)$$

De manera muy similar al caso de aniquilación, las funciones de onda de los estados de bariones $|A\rangle$ y $|B'\rangle$ se escriben:

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \prod_{i=1}^3 d^3p_i \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) |0\rangle \quad (3.4.4)$$

$$|B'\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \prod_{i=6}^8 d^3p_i \Psi_{B'}(\vec{p}_6, \vec{p}_7, \vec{p}_8) b_6^\dagger(\vec{p}_6) b_7^\dagger(\vec{p}_7) b_8^\dagger(\vec{p}_8) |0\rangle \quad (3.4.5)$$

y para el mesón se tiene:

$$|C'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \prod_{i=4}^5 d^3p_i \Psi_{C'}(\vec{p}_4, \vec{p}_5) b_4^\dagger(\vec{p}_4) d_5^\dagger(\vec{p}_5) |0\rangle. \quad (3.4.6)$$

El fotón de momento \vec{k}_1 y polarización ϵ^ν se representa en la ec. 3.2.4. Haciendo uso del cambio de base dado por la ec. (3.3.8), con el cambio de base de ondas planas a esféricas

de la ec. (3.3.9). La amplitud de transición para el proceso de creación está dado por:

$$\begin{aligned}
\langle B'_i C'_j, \vec{k}_0, \vec{K}_0, J, l, \gamma | H_2 | A \rangle &= \int d^3 K_b d^3 K_c \sum_{M_{bc}, m, M_b, M_c} \langle J_b M_b, J_c M_c | J_{bc} M_{bc} \rangle \\
\langle J_{bc} M_{bc} l m | J_a M_a \rangle &\frac{Y_l^{*m}(\hat{k}_r)}{k_r^2} \frac{1}{6\sqrt{2}} \int d^3 k \int \prod_{i=1}^{10} d^3 p_i \Psi_{B'}^*(\vec{p}_6, \vec{p}_7, \vec{p}_8) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_4, \vec{p}_5) \\
&\epsilon_\nu^* G^\mu(\vec{p}_9, \vec{p}_{10}) \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \delta^3(-\vec{p}_9 - \vec{p}_{10} - \vec{k}) \delta(k_r - k_0) \delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \\
\langle 0 | a_\nu b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) d_5(\vec{p}_5) b_4(\vec{p}_4) b_9^\dagger(\vec{p}_9) d_{10}^\dagger(\vec{p}_{10}) a_\mu^\dagger b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle &. \quad (3.4.7)
\end{aligned}$$

Con lo que ahora se deben hacer las contracciones de los operadores de creación y aniquilación de las ecs. (2.1.5) y (2.1.6) para el fotón, los cuarks y anticuarks. Pero será más sencillo al usar las relaciones ya usadas en el proceso de aniquilación. Con lo que la contracción de la ec. (3.4.7) se reduce a

$$\begin{aligned}
\langle 0 | a_\nu b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) d_5(\vec{p}_5) b_4(\vec{p}_4) b_9^\dagger(\vec{p}_9) d_{10}^\dagger(\vec{p}_{10}) a_\mu^\dagger b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle & \\
= \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_4(\vec{p}_4) b_9^\dagger(\vec{p}_9) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle & \\
\times \left(-g_{\nu\mu} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) \delta_{10,5} \delta^3(\vec{p}_{10} - \vec{p}_5) \right) = -g_{\nu\mu} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) \delta_{10,5} \delta^3(\vec{p}_{10} - \vec{p}_5) & \\
\times \left[-\delta_{9,6} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_6) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_4(\vec{p}_4) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle \right. & \quad (3.4.8) \\
+ \delta_{9,7} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_7) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_6(\vec{p}_6) b_4(\vec{p}_4) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle & \\
- \delta_{9,8} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_8) \langle 0 | b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_4(\vec{p}_4) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle & \\
\left. + \delta_{9,4} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_4) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle \right]. &
\end{aligned}$$

Al usar las funciones de onda de los bariones, que son complemente simétricas en el espacio de espín, sabor y orbital, podemos reescribir la ec. (3.4.8) como:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | a_\nu b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) d_5(\vec{p}_5) b_4(\vec{p}_4) b_9^\dagger(\vec{p}_9) d_{10}^\dagger(\vec{p}_{10}) a_\mu^\dagger b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle & \\
\rightarrow g_{\nu\mu} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) \delta_{10,5} \delta^3(\vec{p}_{10} - \vec{p}_5) & \quad (3.4.9) \\
\times \left[3\delta_{9,8} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_8) \langle 0 | b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_4(\vec{p}_4) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle \right. & \\
- \delta_{9,4} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_4) \langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle \left. \right]. &
\end{aligned}$$

Mediante este proceso sistemático se obtien las últimas contracciones:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_4(\vec{p}_4) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle & \quad (3.4.10) \\
\rightarrow 3! \delta_{6,1} \delta^3(\vec{p}_6 - \vec{p}_1) \delta_{7,2} \delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_2) \delta_{3,4} \delta^3(\vec{p}_3 - \vec{p}_4), &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0 | b_8(\vec{p}_8) b_7(\vec{p}_7) b_6(\vec{p}_6) b_1^\dagger(\vec{p}_1) b_2^\dagger(\vec{p}_2) b_3^\dagger(\vec{p}_3) | 0 \rangle & \quad (3.4.11) \\
\rightarrow 3! \delta_{6,1} \delta^3(\vec{p}_6 - \vec{p}_1) \delta_{7,2} \delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_2) \delta_{8,3} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_3). &
\end{aligned}$$

Nuevamente al igual que el caso de aniquilación se obtiene que las $3! = 6$ permutaciones

son equivalentes. Al sustituir en la ec. (3.4.7) se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\langle B'_i C'_j, \vec{k}_0, \vec{K}_0, J, l \gamma | H_2 | A \rangle &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \int d^3 K_b d^3 K_c \sum_{M_{bc}, m, M_b, M_c} \langle J_b M_b, J_c M_c | J_{bc} M_{bc} \rangle \\
\langle J_{bc} M_{bc} l m | J_a M_a \rangle \frac{Y_l^{*m}(\hat{k}_r)}{k_r^2} \int d^3 k \int \prod_{i=1}^{10} d^3 p_i \Psi_{B'}^*(\vec{p}_6, \vec{p}_7, \vec{p}_8) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_4, \vec{p}_5) \epsilon_\nu^* \delta(k_r - k_0) \\
\delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) G^\mu(\vec{p}_9, \vec{p}_{10}) \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \delta^3(-\vec{p}_9 - \vec{p}_{10} - \vec{k}) &\left\{ -g_{\nu\mu} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) \delta_{10,5} \right. \\
\delta^3(\vec{p}_{10} - \vec{p}_5) [3 \cdot 3! \delta_{9,8} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_8) \delta_{6,1} \delta^3(\vec{p}_6 - \vec{p}_1) \delta_{7,2} \delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_2) \delta_{3,4} \delta^3(\vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\
&\left. - 3! \delta_{9,4} \delta^3(\vec{p}_9 - \vec{p}_4) \delta_{6,1} \delta^3(\vec{p}_6 - \vec{p}_1) \delta_{7,2} \delta^3(\vec{p}_7 - \vec{p}_2) \delta_{8,3} \delta^3(\vec{p}_8 - \vec{p}_3) \right\}. \quad (3.4.12)
\end{aligned}$$

Al eliminar funciones de delta, se reduce a:

$$\begin{aligned}
\langle B'_i C'_j, \vec{k}_0, \vec{K}_0, J, l \gamma | H_2 | A \rangle &= \frac{3}{\sqrt{2}} \int d^3 K_b d^3 K_c \delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \delta(k_r - k_0) \\
\sum_{M_{bc}, m, M_b, M_c} \langle J_b M_b, J_c M_c | J_{bc} M_{bc} \rangle \langle J_{bc} M_{bc} l m | J_a M_a \rangle \frac{Y_l^{*m}(\hat{k}_r)}{k_r^2} \int \prod_{i=1}^5 d^3 p_i \\
\delta^3(-\vec{p}_4 - \vec{p}_5 - \vec{k}_1) [\Psi_{B'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_4) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_3, \vec{p}_5) \epsilon_\mu^* G^\mu(\vec{p}_4, \vec{p}_5) \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \\
&- (1/3) \Psi_{B'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_4, \vec{p}_5) \epsilon_\mu^* G^\mu(\vec{p}_4, \vec{p}_5) \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)]. \quad (3.4.13)
\end{aligned}$$

La expresión final de la ec. (3.4.13) tiene dos principales contribuciones, la primera, el par creado va a ser parte del barión y mesón final, como se muestra en la figura (3.3), mientras que en el segundo término el par que se crea es simplemente un mesón, así el

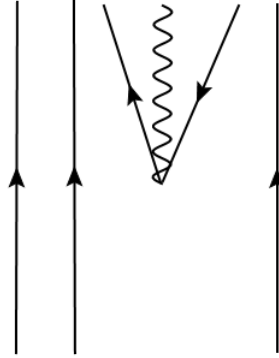


Figura 3.3: Diagrama de la creación de un par cuark-anticuark junto con un fotón.

barión queda como espectador. En esta notación compacta la integral no solo incluye a los momentos de los cuarks y anticuarks, sino también las sumas sobre todos los números cuánticos discretos.

La contribución total del proceso de creación se obtiene al sumar sobre i, j, l en integrar sobre \vec{k}_0, \vec{K}_0 . Teniendo la expresión final de la amplitud en la ec. (3.4.13), ya solo queda sumar sobre los estados intermediarios e integrar sobre \vec{k}_0, \vec{K}_0 , es decir que la contribución total es:

$$\sum_{i,j,l} \int d^3k_0 d^3K_0 \beta_{ij} \langle B'_i C'_j, \vec{k}_0, \vec{K}_0, J, l | \gamma | H_2 | A \rangle. \quad (3.4.14)$$

Hasta ahora solo se han analizado las contribuciones de los Hamiltonianos H_1 , H_2 y H_3 , que nos permiten modelar las contribuciones de procesos de radiación de cada cuark constituyente, con los procesos de aniquilación y creación de pares cuark-anticuark. Falta considerar las transiciones entre componentes $5q \rightarrow 5q$, que corresponden las contribuciones del último término de la ec. (3.1.7).

La contribución al decaimiento electromagnético de la componentes $5q \rightarrow 5q$ es una parte muy extensa, por la gran cantidad de términos que pueden contribuir. Por lo que su aplicación explícita al decaimiento de bariones se dejó para un trabajo futuro. Ahora solo presentan las contribuciones de los cuarks de valencia, junto con los procesos de creación y aniquilación de pares cuark-anticuark. Esta formulación será aplicada en el siguiente capítulo explícitamente.

Capítulo 4

Decaimiento electromagnético de resonancias Δ^+ , Σ^{*+} y Σ^{*0}

Ahora se hace una aplicación del modelo con todo detalle, analizando la evaluación la amplitud de transición del decaimiento electromagnético de las resonancias $\Delta^+ \rightarrow p + \gamma$, $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ + \gamma$ y $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ en el Unquenched Quark model. La Δ es una resonancia muy conocida pero que hasta la fecha no se tiene una descripción adecuada en modelos que solo consideran la contribuciones de los cuarks de valencia. Por lo que su descripción se ha hecho mediante la incorporación de más componentes en las funciones de onda, como son los modelos de nubes mesónicas o modelos efectivos de cuarks quirales. Para el caso de los hiperones Σ^* hasta hace poco no se tenían datos experimentales de las amplitudes de decaimiento, debido a la complejidad de los experimentos. Los nuevos datos están dados en las referencias [19, 20].

4.1. Funciones de onda

Para iniciar la descripción de los decaimientos electromagnéticos para el caso $\Delta^+ \rightarrow p + \gamma$, $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ + \gamma$ y $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$, primero construiremos las funciones de onda en modelo Unquenched Quark Model bajo la aproximación de usar solo componentes de piones, así la función de onda de la Δ^+ se puede escribir como

$$|\Delta_{tot}^+\rangle = N_a \left[|\Delta^+\rangle - \int d^3k_0 a_1 \frac{5}{18} \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\sqrt{\frac{2}{5}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}} |\Delta^+\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} |\Delta^0\pi^+\rangle \right) \right. \\ \left. - \int d^3k_0 a_2 \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} |p\pi^0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |n\pi^+\rangle \right) \right]. \quad (4.1.1)$$

Para el caso del protón se tiene:

$$\begin{aligned}
 |p_{tot}\rangle = N_n & \left[|p\rangle - \int d^3k_0 a_3 \frac{5}{18\sqrt{3}} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} |p\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |n\pi^+\rangle \right) \right. \\
 & \left. - \int d^3k_0 a_4 \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\Delta^+\pi^0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} |\Delta^0\pi^+\rangle \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Para el hiperón Σ^{*+} del decuplete

$$\begin{aligned}
 |\Sigma_{tot}^{*+}\rangle = N_{\Sigma^{*+}} & \left[|\Sigma^{*+}\rangle - \int d^3k_0 a_5 \frac{\sqrt{10}}{27} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^{*+}\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^{*0}\pi^+\rangle \right) \right. \\
 & \left. + \int d^3k_0 a_6 \frac{\sqrt{2}}{27} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^+\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^0\pi^+\rangle \right) - \int d^3k_0 c_1 \frac{1}{9\sqrt{3}} (|\Lambda^0\pi^+\rangle) \right].
 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

El hiperón Σ^+ del octete está dado por:

$$\begin{aligned}
 |\Sigma_{tot}^+\rangle = N_{\Sigma^+} & \left[|\Sigma^+\rangle - \int d^3k_0 a_7 \frac{2}{27} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^{*+}\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^{*0}\pi^+\rangle \right) \right. \\
 & \left. - \int d^3k_0 a_8 \frac{2\sqrt{2}}{27} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^+\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^0\pi^+\rangle \right) - \int d^3k_0 c_n \frac{1}{9\sqrt{3}} (|\Lambda^0\pi^+\rangle) \right].
 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Para Σ^{*0} del decuplete se tiene:

$$\begin{aligned}
 |\Sigma_{tot}^{*0}\rangle = N_{\Sigma^{*0}} & \left[|\Sigma^{*0}\rangle - \int d^3k_0 a_9 \frac{\sqrt{10}}{27} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^{*+}\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^{*-}\pi^+\rangle \right) \right. \\
 & \left. + \int d^3k_0 a_{10} \frac{\sqrt{2}}{27} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^+\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |\Sigma^-\pi^+\rangle \right) - \int d^3k_0 c_1 \frac{1}{9\sqrt{3}} (|\Lambda^0\pi^0\rangle) \right].
 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Por último, para Λ^0 del octete se tiene

$$\begin{aligned}
 |\Lambda_{tot}^0\rangle = N_{\Lambda^0} & \left[|\Lambda^0\rangle - \int d^3k_0 a_{11} \frac{\sqrt{2}}{9} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} |\Sigma^{*+}\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\Sigma^{*0}\pi^0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\Sigma^{*-}\pi^+\rangle \right) \right. \\
 & \left. + \int d^3k_0 a_{12} \frac{1}{9} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} |\Sigma^+\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\Sigma^0\pi^0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\Sigma^-\pi^+\rangle \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

En esta notación compacta se han usado los estados como $|BC\rangle$, pero representan los estados de la ec. (3.3.8), acoplados a los números cuánticos del del barión de valencia. Para los estados del decuplete están acoplados a espín 3/2 y para los de octete están acoplados a espín 1/2, con su respectivo estado de sabor correspondiente. Las funciones que los conforman vienen del Unquenched Quark Model, en la notación

$$\left(a_i(\vec{k}_0) \right)_{\text{orb}} \langle \mathbf{BC} | T^\dagger | A \rangle_{SF} \sum_{BC} |BC\rangle \tag{4.1.7}$$

$\langle \mathbf{BC} | T^\dagger | A \rangle_{SF}$ es el coeficiente en el espacio espín-sabor del canal \mathbf{BC} . En esta notación la suma sobre BC es la descomposición del canal de isoespín \mathbf{BC} en las componentes de carga

Cuadro 4.1: Normalización de las funciones
de onda de bariones

Barión	Normalización
Δ^+	$\frac{1}{\sqrt{1+0,546\gamma^2}}$
p	$\frac{1}{\sqrt{1+0,492\gamma^2}}$
Σ^{*+}	$\frac{1}{\sqrt{1+0,388\gamma^2}}$
Σ^+	$\frac{1}{\sqrt{1+0,242\gamma^2}}$
Σ^{*0}	$\frac{1}{\sqrt{1+0,388\gamma^2}}$
Λ^0	$\frac{1}{\sqrt{1+0,283\gamma^2}}$

correspondientes. Las funciones $a_i(\vec{k}_0)$ son los elementos de matriz del acoplamiento 3P_0 (ver apéndice C) en el espacio orbital, que dependen de k_0 , donde la etiqueta i ($i = 1, \dots, 12$) dependen de las masas de los bariones de valencia y los de las componentes extra, dadas por las expresiones

$$a_i(\vec{k}_0) = \frac{k_0 C_2 \exp[-F^2 k_0^2]}{M_A - \sqrt{M_B^2 + k_0^2} - \sqrt{M_C^2 + k_0^2}}, \quad (4.1.8)$$

donde F y C_2 son funciones que depende de los radios de los bariones y mesones, más adelante en la aplicación se da una expresión aproximada, en el límite de tomar los radios de los bariones iguales. M_A es la masa de del barión de valencia, mientras que M_B y M_C son las masas de bariones y mesones de las componentes extra.

Así las normalizaciones están dadas en el cuadro 4.1, que dependen del parámetro γ , que viene del operador 3P_0 que se definió en la ec. (1.7.2). Para este caso usando el valor experimental de la asimetría del protón se fija a $\gamma = 1,6$.

4.2. Contribución de los cuarks de valencia

Ahora analizaremos la contribuciones de los cuarks de valencia, donde ahora se considerará solo los decaimientos de las resonancias $\Delta^+ \rightarrow p + \gamma$, $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ + \gamma$ y $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ que nos darán el peso más relevante a la amplitud de transición de los decaimientos electromagnéticos

$$\langle A' \gamma | H_1 | A \rangle \quad (4.2.1)$$

Para este caso los estados iniciales son del decuplete de bariones, entonces $A = \Delta^+, \Sigma^{*+}$ y Σ^{*0} , y los estados finales correspondientes son $A' = p, \Sigma^+$ y Λ^0 , que son miembros del octete de bariones.

Consideremos la emisión de un fotón con polarización izquierda, es decir

$$\varepsilon^{*(L)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad (4.2.2)$$

con energía k^0 y momento $\vec{k}_1 = k\hat{z}$. Con lo que el operador de la ec. (3.2.6) se modifica a

$$\langle \vec{p}_4, 4 | Qj^\mu \epsilon_\mu | \vec{p}_3, 3 \rangle = Q_{3,4} \frac{[-p_{3-} - p_{4-} - i\sqrt{2}\vec{\sigma} \cdot ((\vec{p}_3 - \vec{p}_4) \times \vec{\epsilon})]}{2\sqrt{2}m} \quad (4.2.3)$$

Así la amplitud de transición de la ec. (3.2.15) a calcular es:

$$\begin{aligned} \langle A' \gamma | H_1 | A \rangle &= \frac{3e}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \int \prod_{i=1}^4 d^3 p_i \Psi_{A'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_4) Q_{3,4} \delta^3(\vec{p}_3 - \vec{p}_4 - \vec{k}_1) \\ &\quad \times \frac{[-p_{3-} - p_{4-} - i\sqrt{2}\vec{\sigma} \cdot ((\vec{p}_3 - \vec{p}_4) \times \vec{\epsilon})]}{2\sqrt{2}m} \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Que al integrar con respecto a \vec{p}_4 usando la función de $\delta^3(\vec{p}_3 - \vec{p}_4 - \vec{k}_1)$, junto con $\vec{k}_1 = k_1\hat{z}$ se reduce a:

$$\begin{aligned} \langle A' \gamma | H_1 | A \rangle &= \frac{3e}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \int \prod_{i=1}^3 d^3 p_i \\ &\quad \times \Psi_{A'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 - \vec{k}_1) Q_{3,4} \frac{[-2p_{3-} + k_1\sigma_{3-}]}{2\sqrt{2}m} \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Debido a que se está analizando los decaimientos electromagnéticos, se necesita que haya un cambio en la helicidad debido a que el fotón lleva una unidad de momento angular. Así para poder conectar los estados de los bariones A del decuplete, con los A' del octete que están en el estado base. El operador que solo contribuye para este caso es:

$$\frac{k_1 Q_{3,4} \sigma_{3-}}{2\sqrt{2}m} \quad (4.2.6)$$

que actúa en el espacio espín-sabor. La parte orbital se reduce al traslape de las funciones orbitales de A y el A' , sujetos a la conservación del momento lineal. Por notación separamos las contribuciones dadas por el espacio espín sabor y la parte orbital tanto para el barión inicial A como para el barión final A'

$$\Psi_A = \psi_A \Phi_A \quad (4.2.7)$$

$$\Psi_{A'} = \psi_{A'} \Phi_{A'} \quad (4.2.8)$$

Cuadro 4.2: Contribución de los cuarks de valencia a las amplitudes de transición en el espacio espín-sabor, para las helicidades $\nu = 1/2, 3/2$

Acoplamiento	$\beta_{\frac{1}{2}}$	$\beta_{\frac{3}{2}}$
$\Delta^+ \rightarrow p + \gamma$	$-\frac{2\sqrt{2}}{9}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$
$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ + \gamma$	$\frac{2\sqrt{2}}{9}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$
$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$	$-\frac{2}{3\sqrt{6}}$	$-\frac{2}{3\sqrt{2}}$

donde Φ son las funciones de $SU(6)$ del espacio espín-sabor y ψ son las funciones orbitales de los bariones.

Con esta separación la amplitud de transición factoriza en el producto de un elemento de matriz espacio espín-sabor y otro en el espacio orbital. La parte de espín sabor es calculada mediante:

$$\beta_\nu = \left\langle \Phi_{A'}, \frac{1}{2}, \nu - 1 \left| Q_{3,4} \sigma_{3-} \right| \Phi_A, \frac{3}{2}, \nu \right\rangle \quad (4.2.9)$$

que nos dan las contribuciones para la helicidad $\nu = 1/2, 3/2$. Los resultados de los elementos matriz en el espacio espín-sabor para las reacciones estudiadas están dados en el cuadro 4.2. Y el translope de la parte orbital.

$$\langle \psi_{A'} | \psi_A \rangle = \int \prod_{i=1}^3 d^3 p_i \Psi_{A'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 - \vec{k}_1) \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \quad (4.2.10)$$

Que por considerar los bariones en el estado base del octete y decuplete, es la misma para todos los casos.

Para evaluar la amplitud de helicidad en el espacio orbital utilizaremos las coordenadas relativas en el espacio de momentos, para funciones de onda de oscilador armónico como base, dadas por las expresiones:

$$\vec{p}_\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \quad (4.2.11)$$

$$\vec{p}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2\vec{p}_3) \quad (4.2.12)$$

junto con la transformación al centro de masa :

$$\vec{P}_{cm} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \quad (4.2.13)$$

Así podemos obtener la siguiente relación:

$$\prod_{i=1}^3 d^3 p_i = \frac{1}{3\sqrt{3}} d^3 p_\rho d^3 p_\lambda d^3 P_{cm} \quad (4.2.14)$$

En el modelo de oscilador armónico, las funciones de onda de los bariones del estado base, están dadas por [18]

$$\psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \left(\frac{\sqrt{3}R_A^2}{\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{1}{6} R_A^2 \sum_{i<j} (\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2 \right] \quad (4.2.15)$$

R_A es el radio del barión. Así para el barión inicial se obtiene la siguiente relación:

$$\psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \left(\frac{\sqrt{3}R_A^2}{\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{R_A^2}{2} (p_\rho^2 + p_\lambda^2) \right] \quad (4.2.16)$$

y de manera análoga para el barión final tenemos:

$$\psi_{A'}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 - \vec{k}_1) = \left(\frac{\sqrt{3}R_{A'}^2}{\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{R_{A'}^2}{6} (3p_\rho^2 + 3p_\lambda^2 + 2\sqrt{6}\vec{p}_\lambda \cdot \vec{k}_1 + 2k_1^2) \right] \quad (4.2.17)$$

Una manera de simplificar los cálculos, se utiliza la aproximación donde los bariones tiene el mismo radio $R_A^2 = R_{A'}^2 = R^2$, que es una muy buena aproximación física. Al evaluar la parte orbital en el centro de masa, considerando que el barión inicial está en reposo, se reduce a:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{A'} | \psi_A \rangle &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}R^2}{\pi} \right)^3 \iiint d^3 p_\rho d^3 p_\lambda d^3 P_{cm} \delta^3(\vec{P}_{cm}) \\ &\times \exp \left[-\frac{R^2}{3} (3(p_\rho^2 + p_\lambda^2) + \sqrt{6}\vec{p}_\lambda \cdot \vec{k}_1 + k_1^2) \right] = e^{-\frac{k_1^2 R^2}{6}} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Como consecuencia las amplitudes de helicidad están dadas por:

$$A_{1/2}^{A \rightarrow A' \gamma} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \left\langle A' \gamma, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| H_1 \right| A, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3k}{2\sqrt{k^0}} \frac{e}{2m} \beta_{\frac{1}{2}} e^{-\frac{k_1^2 R^2}{6}} \quad (4.2.19)$$

$$A_{3/2}^{A \rightarrow A' \gamma} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \left\langle A' \gamma, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| H_1 \right| A, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{3k}{2\sqrt{k^0}} \frac{e}{2m} \beta_{\frac{3}{2}} e^{-\frac{k_1^2 R^2}{6}} \quad (4.2.20)$$

Cuadro 4.3: Tabla de Amplitudes de helicidad A_ν
 Comparación de valores teóricos y experimentales en $(GeV)^{-1/2}$

Valores experimentales tomados de [21]

Acoplamiento	$A_{1/2}$ Teórico	$A_{1/2}$ Exp.	$A_{3/2}$ Teórico	$A_{3/2}$ Exp.
$\Delta^+ \rightarrow p + \gamma$	-0,099	$-0,135 \pm 0,006$	-0,171	$-0,250 \pm 0,008$
$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ + \gamma$	0,087	—	0,151	—
$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$	-0,084	—	-0,145	—

Con las ecs. 4.2.19 y 4.2.20 se obtienen los valores usuales para la tasa de amplitud de helicidad relativa: $A_{3/2}^{\Delta \rightarrow P\gamma} / A_{1/2}^{\Delta \rightarrow P\gamma} = \sqrt{3}$, que se debe a la estructura de la parte espín sabor. Sin embargo, el valor absoluto es menor que el valor experimental [22].

Con estas fórmulas calculamos las helicidades provenientes de los modelos de cuarks de valencia, utilizando el valor de $R = 0,6$ fm para el radio de los bariones, de la ref. [23], que se dan en el cuadro 4.3, que por falta de datos experimentales solo podemos comparar la parte de la resonancia Δ^+ . Ahí observamos que la descripción con solo cuarks de valencia no es suficiente, con lo que agregar nuevas componentes a las funciones de onda puede ser una solución viable.

4.3. Contribución de los procesos de aniquilación

Para incluir los procesos de aniquilación, el Hamiltoniano conecta las funciones de onda de cinco componentes ($|BC\rangle$) del estado inicial con funciones de onda de tres componentes ($|A'\rangle$), del estado final. La parte del acoplamiento de interés en esta parte tiene dos operadores de aniquilación, uno para un cuark y otro para un anticuark, que corresponde a H_3 de la ec. (3.3.1).

Se tienen que calcular todas las posibles amplitudes de transición dadas por el operador (3.3.2), en las funciones de onda no relativistas, es decir

$$\langle \vec{p}_i, i | C_1 Q j^\mu \epsilon_\mu | \vec{p}_j, j \rangle = C_1 Q_{i,j} \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_i + \vec{p}_j) \epsilon_0}{2m} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} \right) \quad (4.3.1)$$

con C_1 la constante de la ec. (3.3.3). Los subíndices j, i corren sobre el cuark y anticuark a eliminar respectivamente, para ser consistente con lo hecho anteriormente se analizará el caso de la emisión de un fotón con la polarización izquierda, con vector de polarización

$$\varepsilon^{*(L)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad (4.3.2)$$

que simplifica el operador a

$$\langle \vec{p}_i, i | Q j^\mu \epsilon_\mu | \vec{p}_j, j \rangle = \frac{-Q_{i,j}}{\sqrt{2}} \sigma_- \quad (4.3.3)$$

Usando solo las contribuciones de piones pseudo-escalares solo se tiene que calcular:

$$\langle A' \gamma | \frac{-C_1 Q_{i,j}}{\sqrt{2}} \sigma_- \left[\sum_{BC} |BC\rangle \right] \delta^3(\vec{p}_i + \vec{p}_j - \vec{k}_1) \quad (4.3.4)$$

Para mostrar la forma explícita del cálculo se hará el análisis de una de las componentes de este decaimiento,

$$\langle A' \gamma | H_3 | BC \rangle, \quad (4.3.5)$$

es decir un barión final A' e inicial B con un mesón C fijos y mostrará simplificaciones en el resto. La aniquilación del par debe acoplar a los números cuánticos del fotón, es decir con un término $J^{PC} = 1^{--}$, lo que implica que el estado del par cuark-anticuark a eliminar debe ser $P = P_q P_{\bar{q}} (-1)^L = (1)(-1)(-1)^L = -1$. Con lo que solo contribuyen estados que tengan movimientos relativos pares, $L = 0, 2$ entre el par cuark-anticuark.

Los piones, bariones inicial y final están en estado base, la parte orbital será la misma en los casos que se tengan las mismas helicidades. Solo se debe tener cuidado en la parte del espacio espín-sabor, donde actúa el operador en primera cuantización. Para este caso la ec. (3.3.22) se reduce a:

$$\begin{aligned} & \langle A' \gamma, J = 1/2, M | H_3 | BC, \vec{k}_r, l = 1; J_a = 3/2, M_a \rangle \\ &= \int d^3 K_b d^3 K_c \delta(k_r - k_0) \sum_{M_{bc}, m, M_b} \langle J_b, M_b; J_c = 0, M_c = 0 | J_{bc}, M_{bc} \rangle \\ & \frac{3\delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0)}{\sqrt{2}} \langle J_{bc}, M_{bc}; l = 1, m | J_a = 3/2, M_a \rangle \frac{Y_{l=1}^m(\hat{k}_r)}{k_r^2} \int \prod_{i=1}^5 d^3 p_i \\ & \times \left(\Psi_{A'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_4) \frac{-C_1 Q_{3,5} \sigma_-}{\sqrt{2}} \Psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \Psi_C(\vec{p}_4, \vec{p}_5) \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_5 - \vec{k}_1) \right) \quad (4.3.6) \end{aligned}$$

La ec. (4.3.6) tiene dos contribuciones dadas por las combinaciones $M_{bc} + m = M_a = 1/2, 3/2$, es decir $(M_{bc} = 3/2, m = 0)$ y $(M_{bc} = 1/2, m = 1)$, el resto son eliminados

por las propiedades de los coeficientes Clebsch-Gordan. Al considerar que el operador σ_- solo actúa en el espacio de espín, nos excluye la posibilidad de tomar la contribución de $(M_{bc} = 1/2, m = 1)$, pues al actuar el operador al estado $\sigma_-|3/2, 1/2\rangle \propto |3/2, -1/2\rangle$ y no hace traslape con la función de onda en el espacio de espín de los bariones del octete (A') con helicidad $1/2$, $|A', 1/2, 1/2\rangle$. Y con el mismo argumento se llega que para la helicidad $3/2$ no contribuye ninguna de las partes $|BC\rangle$, donde B es un barión del octete, como es para el caso de las componentes nucleón-pión $|N\pi\rangle$, sigma-pión $|\Sigma\pi\rangle$ y Lambda-pión $|\Lambda\pi\rangle$, de las resonancias iniciales. Ya que el sistema $|BC\rangle$ está acoplado a los números cuánticos de resonancias del decuplete, que tienen espín $S = 3/2$. Así estas componentes en espín tienen como máximo la proyección de $1/2$ y al aplicar σ_- lo manda a un estado con proyección $-1/2$, que solo contribuye a la helicidad de $1/2$.

Considerando solo piones pseudo-escalares, la amplitud de transición, para la helicidad ν , se simplifica a:

$$\begin{aligned} & \langle A'\gamma, J = 1/2, M = \nu - 1 | H_3 | BC, \vec{k}_r, \vec{K}_0, l = 1; J_a, M_a = \nu \rangle = \int d^3K_b d^3K_c \\ & \times \frac{Y_1^0(\hat{k}_r)}{k_r^2} \frac{3\delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0)}{\sqrt{2}} \langle J_{bc}, M_{bc}=\nu; l = 1, m = 0 | J_a = 3/2, M_a = \nu \rangle \delta(k_r - k_0) \\ & \times \int \prod_{i=1}^5 d^3p_i \left(\Psi_{A'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_4) \frac{-C_1 Q_{3,5} \sigma_-}{\sqrt{2}} \Psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \Psi_C(\vec{p}_4, \vec{p}_5) \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_5 - \vec{k}_1) \right) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

El coeficiente Clebsch-Gordan es un factor que depende de los canales de decaimiento, ya que para la helicidad $3/2$ solo contribuye las componentes BC , tal que el barión B , sea miembro del decuplete, pero para el caso de la helicidad un $1/2$ hay dos casos, tanto las contribuciones de los canales del octete y decuplete.

Otra ventaja más es que el operador solo actúa en el espacio de espín, la parte orbital se reduce simplemente al traslape de las funciones de onda de los bariones y el mesón, con el movimiento orbital relativo, con la construcción de conservación de momento. Si separamos las funciones de onda tanto de bariones como mesones, en parte espacial y espín-sabor

$$\Psi_a = \Psi(\vec{p}_a) \phi_a \quad (4.3.8)$$

con

$$\Psi_a = \delta^3(\vec{P}_a - \vec{K}_a) \psi_a(\vec{p}). \quad (4.3.9)$$

Así la contribución orbital se reduce a:

$$\begin{aligned}
 O(k_0, \vec{K}_0) = C_1 \int d^3 K_b d^3 K_c \frac{3\delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) Y_1^0(\hat{k}_r)}{\sqrt{2} k_r^2} \delta(k_r - k_0) \int \prod_{i=1}^5 d^3 p_i \\
 \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_4 - \vec{K}_{A'}) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{K}_b) \delta^3(\vec{p}_4 + \vec{p}_5 - \vec{K}_c) \\
 \left(\psi_{A'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_4) \psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \psi_\pi(\vec{p}_4, \vec{p}_5) \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_5 - \vec{k}_1) \right). \quad (4.3.10)
 \end{aligned}$$

Al integrar sobre \vec{p}_5 y usando la función $\delta^3(\vec{p}_4 + \vec{k}_1 - \vec{p}_5 - \vec{K}_c)$ nos permite integrar sobre \vec{p}_4 , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 O(k_0, \vec{K}_0) = C_1 \int d^3 K_b d^3 K_c \frac{3\delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) Y_1^0(\hat{k}_r)}{\sqrt{2} k_r^2} \delta(k_r - k_0) \int \prod_{i=1}^3 d^3 p_i \\
 \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{K}_c - \vec{k}_1 - \vec{K}_{A'}) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{K}_b) \\
 \left(\psi_{A'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 + \vec{K}_c - \vec{k}_1) \psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \psi_\pi(\vec{p}_3 + \vec{K}_c - \vec{k}_1, \vec{k}_1 - \vec{p}_3) \right). \quad (4.3.11)
 \end{aligned}$$

Nuevamente utilizamos las coordenadas relativas de Jacobi y escribimos las funciones de onda de los bariones en el estado base, que para este caso son:

$$\psi_B(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \left(\frac{\sqrt{3}R_B^2}{\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{R_B^2}{2} (p_\rho^2 + p_\lambda^2) \right] \quad (4.3.12)$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{A'}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 + \vec{K}_c - \vec{k}_1) = \left(\frac{\sqrt{3}R_{A'}^2}{\pi} \right)^{3/2} \\
 \times \exp \left[-\frac{R_{A'}^2}{6} \left(3p_\rho^2 + 3p_\lambda^2 + 2\sqrt{6}\vec{p}_\lambda \cdot (\vec{k}_1 - \vec{K}_c) + 2(\vec{k}_1 - \vec{K}_c)^2 \right) \right]. \quad (4.3.13)
 \end{aligned}$$

En este caso usamos las funciones de onda de los mesones π en el estado base, está dada por:

$$\begin{aligned}
 \psi_\pi(\vec{p}_3 + \vec{K}_c - \vec{k}_1, \vec{k}_1 - \vec{p}_3) = \quad (4.3.14) \\
 \left(\frac{R_M^2}{\pi} \right)^{3/4} \exp \left[-\frac{R_M^2}{8} \left(\frac{2}{3} (\vec{P}_{cm} - \sqrt{6}\vec{p}_\lambda) + \vec{K}_c - 2\vec{k}_1 \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Con la suposición que $R_B^2 = R_{A'}^2 = R^2$ y al sustituir las expresiones de las funciones de

onda implica que:

$$\begin{aligned}
O(k_0, \vec{K}_0) &= C_1 \int d^3 K_b d^3 K_c \frac{3\delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) Y_1^0(\hat{k}_r)}{\sqrt{2} k_r^2} \delta(k_r - k_0) \\
&\frac{1}{3\sqrt{3}} \iiint d^3 p_\rho d^3 p_\lambda d^3 P_{cm} \delta^3(\vec{P}_{cm} + \vec{K}_c - \vec{k}_1 - \vec{K}_{A'}) \delta^3(\vec{P}_{cm} - \vec{K}_b) \\
&\left(\frac{\sqrt{3}R^2}{\pi}\right)^3 \left(\frac{R_M^2}{\pi}\right)^{3/4} \exp\left[-\frac{R_M^2}{8} \left(\frac{2}{3}(\vec{P}_{cm} - \sqrt{6}\vec{p}_\lambda) + \vec{K}_c - 2\vec{k}_1\right)^2\right] \\
&\exp\left[-\frac{R^2}{6} \left(6p_\rho^2 + 6p_\lambda^2 + 2\sqrt{6}\vec{p}_\lambda \cdot (\vec{k}_1 - \vec{K}_c) + 2(\vec{k}_1 - \vec{K}_c)^2\right)\right]. \quad (4.3.15)
\end{aligned}$$

Para evaluar la ec.(4.3.15) necesitamos las relaciones de cambio de base dadas en las ecs. (3.3.10) y (3.3.11), que al aproximar las masas de los cuarks constituyentes al mismo valor, para cuarks y anticuarks el cambio de coordenadas se modifican a

$$\begin{aligned}
\vec{K} &= \vec{K}_b + \vec{K}_c & \iff & \vec{K}_b = \frac{3}{5}\vec{K} + \vec{k}_r \\
\vec{k}_r &= \frac{2}{5}\vec{K}_b - \frac{3}{5}\vec{K}_c & & \vec{K}_c = \frac{2}{5}\vec{K} - \vec{k}_r
\end{aligned} \quad (4.3.16)$$

además el cálculo debe consistente con el sistema de referencia del barión inicial, que se considera en la contribución de los cuarks de valencia. Se hace un paso intermedio que quita la dependencia en \vec{K}_0 , que viene de la ec. (3.3.23) definiendo

$$O(k_0) := \int d^3 K_0 O(k_0, \vec{K}_0) \quad (4.3.17)$$

que por integración directa, usando tablas de la ref. [24] nos da la expresión:

$$O(k_0) = C_1 \left(\frac{R^4 R_M^2}{\pi}\right)^{3/4} \frac{9}{w^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} e^{[xk^2 + yk_0^2]} \left(\frac{\cosh(zk_0)}{zk_0} - \frac{\sinh(zk_0)}{(zk_0)^2}\right). \quad (4.3.18)$$

Ésta es la contribución de la parte orbital de los procesos de aniquilación. Para un k_0 fijo con w, x, y y z funciones constantes que solo dependen de los radios de los bariones (R) y los mesones (R_M), dados por las expresiones:

$$w^2 = \left(\frac{R_M^2}{3} + R^2\right) \quad (4.3.19)$$

$$x = \left(-\frac{R^2}{3} - \frac{R_M^2}{2} + \frac{R^4}{6w^2} + \frac{R_M^4}{6w^2} + \frac{R^2 R_M^2}{3w^2}\right) \quad (4.3.20)$$

$$y = \left(-\frac{R^2}{3} - \frac{R_M^2}{72} + \frac{R^4}{6w^2} + \frac{R_M^4}{216w^2} + \frac{R^2 R_M^2}{18w^2}\right) \quad (4.3.21)$$

$$z = \left(-\frac{2R^2}{3} - \frac{R_M^2}{6} + \frac{R^4}{3w^2} + \frac{R_M^4}{18w^2} + \frac{7R^2 R_M^2}{18w^2}\right). \quad (4.3.22)$$

Cuadro 4.4: Elementos de matriz espín-sabor de procesos de aniquilación, para las helicidades $\nu = 3/2, 1/2$ de las componentes $|BC\rangle$ de la Δ , para el decaimiento $\Delta^+ \rightarrow p\gamma$

Componente $ BC\rangle$	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$ \Delta^{++}\pi^-\rangle$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{4}{9\sqrt{3}}$
$ \Delta^+\pi^0\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{27}$
$ \Delta^0\pi^+\rangle$	$\frac{2}{9\sqrt{3}}$	$\frac{2}{27}$
$ p\pi^0\rangle$	—	$-\frac{7}{27}$
$ n\pi^+\rangle$	—	$-\frac{5\sqrt{2}}{27}$

Con ayuda de las funciones modificadas de Bessel, $I_\nu(x)$, podemos reescribir la ec. (4.3.18) como:

$$O(k_0) = C_1 \left(\frac{R^4 R_M^2}{\pi} \right)^{3/4} \frac{9}{w^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} e^{[xk^2 + yk_0^2]} \sqrt{\frac{\pi}{2zk_0}} I_{3/2}(zk_0). \quad (4.3.23)$$

Así solo falta hacer la integración de sobre k_0 , de la ec. (3.4.14), para incluir la contribución de las funciones a_i , que dependen de los radios de los bariones y mesones, así como de k_0 , que del Unquenched Quark Model tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} a_i(k_0) &= 6\gamma \frac{\varepsilon(1, 0, k_0)}{M_A - \sqrt{M_B^2 + k_0^2} - \sqrt{M_C^2 + k_0^2}} \\ &= C_2 \frac{k_0 \exp[-F^2 k_0^2]}{M_A - \sqrt{M_B^2 + k_0^2} - \sqrt{M_C^2 + k_0^2}} \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

que viene del apéndice C, cuando se separa la parte orbital de la parte espín-sabor. Donde podemos observar la misma dependencia en k_0 para todos los coeficientes $a_i(k_0)$, que aunque son diferentes para cada caso, en función de las masas de los bariones y mesones de las componentes extras, así como la masa de los bariones de valencia. En este caso M_A es la masa del barión de valencia del estado inicial. M_B y M_C son las las masas de los bariones y mesones del canal de isoespín correspondiente. Al usar la aproximación

Cuadro 4.5: Elementos de matriz espín-sabor de procesos virtuales de aniquilación de componentes $|BC\rangle$ en resonancias Σ^* , en los decaimientos electromagnéticos para las helicidad $\nu = 3/2$ y $\nu = 1/2$

$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \gamma$			$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 \gamma$		
$ BC\rangle$	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$	$ BC\rangle$	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$ \Sigma^{*+} \pi^0\rangle$	$-\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{27}$	$ \Sigma^{*-} \pi^+\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{9}$	$\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$
$ \Sigma^{*0} \pi^+\rangle$	$-\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{27}$	$ \Sigma^{*+} \pi^-\rangle$	$-\frac{2\sqrt{2}}{9}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$
$ \Sigma^+ \pi^0\rangle$	—	$-\frac{8}{27}$	$ \Sigma^- \pi^+\rangle$	—	$-\frac{2}{9\sqrt{3}}$
$ \Sigma^0 \pi^+\rangle$	—	$-\frac{4}{27}$	$ \Sigma^+ \pi^-\rangle$	—	$\frac{4}{9\sqrt{3}}$
$ \Lambda^0 \pi^+\rangle$	—	$\frac{2}{9\sqrt{3}}$	$ \Lambda^0 \pi^0\rangle$	—	0

de radios iguales para bariones R y radios iguales para los mesones R_M , podemos escribir la constante C_2 y F^2 como:

$$C_2 = \gamma \frac{3}{\pi^{3/4}} (3R^2 R_M)^{3/2} \frac{4R^2 + R_M^2}{(3R^2 + R_M^2)^{5/2}} \quad (4.3.25)$$

$$F^2 = \frac{12R^4 + 5R^2 R_M^2}{24(3R^2 + R_M^2)} \quad (4.3.26)$$

Así la parte orbital total para cada canal de isospín se reduce simplemente a:

$$6\gamma \int d^3 k_0 \frac{O(k_0) \varepsilon(1, 0, k_0)}{M_A - \sqrt{M_B^2 + k_0^2} - \sqrt{M_C^2 + k_0^2}} = 4\pi C_1 C_2 C_3 \exp [xk^2] \\ \times \int dk_0 \frac{k_0^3 \exp [-2F^2 k_0^2]}{M_A - \sqrt{M_B^2 + k_0^2} - \sqrt{M_C^2 + k_0^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2zkk_0}} I_{3/2}(zkk_0) \quad (4.3.27)$$

$$C_3 = \left(\frac{R^4 R_M^2}{\pi} \right)^{3/4} \frac{3}{w^3} \sqrt{6\pi} \quad (4.3.28)$$

Ya solo se evalúa numéricamente, aunque debido que hay casos donde se tiene un polo en la región de integración como se muestra en la fig. 4.1, que depende de las masas de los

bariones de valencia y las componentes barión-mesón extra. Los polos aparecen cuando los bariones B las componentes $|BC\rangle$ del estado inicial pertenecen al octete de bariones. La integral numérica se hace con el método del Valor Principal de Cauchy.

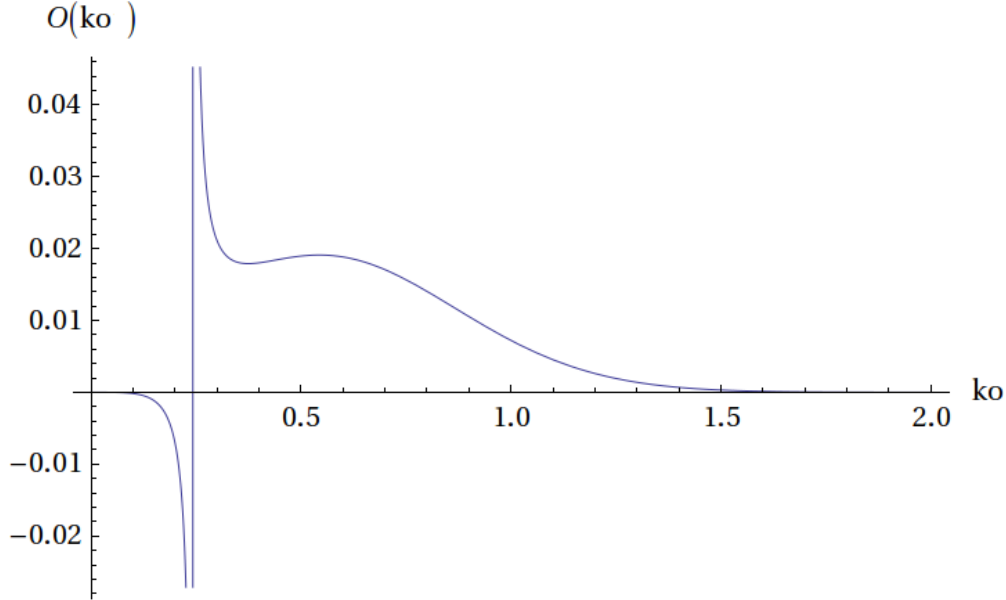


Figura 4.1: Gráfica de $O(k_0)$ cuando tiene un polo.

La contribución orbital en las expresiones de las amplitudes, es factorizable tanto para la helicidad de $3/2$ como para la helicidad de $1/2$, debido a la estructura del operador σ_- y del espín de las funciones de onda de los bariones del octete y decuplete. Solo falta sumar sobre los canales de isoespín.

Los elementos de matriz en el espacio espín-sabor dados por el operador $\sigma_- Q_{5,3}$ donde la etiqueta 5 se refiere al anticuark aniquilado y la etiqueta 3 del tercer cuark del barión B , mientras el resto de los cuarks son espectadores. Así los elementos de matriz en el espacio espín-sabor están dados por:

$$\langle \phi_{A'}, \nu - 1 | \sigma_- Q_{5,3} | \phi_B \phi_\pi, \nu \rangle \equiv \langle \phi(5) | \sigma_- Q | \phi(3) \rangle \langle \phi(1, 2, 4)_{A'} | \phi(1, 2)_B \phi(4)_\pi \rangle \quad (4.3.29)$$

con $\nu = 3/2, 1/2$, las helicidad. En esta notación los números representan los cuarks de los bariones y mesones que para el caso del decaimiento $\Delta^+ \rightarrow p\gamma$, están en el cuadro 4.4. Los decaimientos de las resonancias sigma en los decaimientos $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$ y $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0\gamma$ se encuentran en el cuadro 4.5. Los cuadros 4.4 y 4.5, dan las contribuciones de cada uno de las componentes de los canales de carga que contribuyen a los procesos de aniquilación, donde se ve la descomposición en el espacio de isoespín.

Cuadro 4.6: Contribución total de las componentes $|BC\rangle$ a las helicidades $\nu = 3/2, 1/2$ de los decaimientos electromagnéticos de las resonancias Δ^+ , Σ^{*+} y Σ^{*0}

Decaimiento	Canal	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Delta^+ \rightarrow p\gamma$	$\Delta\pi$	$-\frac{5}{162}$	$-\frac{5}{486\sqrt{3}}$
	$N\pi$	—	$-\frac{8}{243\sqrt{3}}$
	$\Sigma^*\pi$	$-\frac{1}{243}$	$-\frac{1}{729\sqrt{3}}$
$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$	$\Sigma\pi$	—	$\frac{4}{729\sqrt{3}}$
	$\Lambda\pi$	—	$\frac{2}{243\sqrt{3}}$
	$\Sigma^*\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{81}$	$-\frac{1}{243}$
$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0\gamma$	$\Sigma\pi$	—	$-\frac{2}{243}$
	$\Lambda\pi$	—	0

Al sumar sobre los todos los canales de carga $|BC\rangle$ en la aproximación de solo considerar los piones pseudo-escalares se obtienen las contribuciones totales de los canales de isoespín. El cuadro 4.6 corresponde a

$$\sum_{M_{bc}, B\pi} \langle J_{B\pi}, \nu; l = 1, 0 | J_A = \frac{3}{2}, \nu \rangle \langle \mathbf{B}\pi | T^\dagger | A \rangle_{SF} \langle \phi_{A'}, \nu - 1 | \frac{-\sigma_{-5,3}}{\sqrt{2}} Q_{5,3} | \phi_B \phi_\pi, \nu \rangle \quad (4.3.30)$$

En esta notación A representa el barión de valencia correspondiente y $|\mathbf{B}\pi\rangle$ el canal de isoespín correspondiente. Con $J_{B\pi} = 1/2, 3/2$, el primero corresponde para el caso que B sea miembro del octete y el otro para cuando es miembro del decuplete.

4.4. Contribución de los procesos de creación

En este proceso se analizan las contribuciones debido que el operador puede conectar estados de tres componentes $|A\rangle$ (cuarks de valencia) para los estados iniciales, y estados de 5 componentes $|B'C'\rangle$ de los estados finales. La parte del operador de interés en esta parte tiene dos operadores de aniquilación, uno para un cuark y otro para un anticuark.

Se tienen que calcular todos las posibles amplitudes de transición dadas por el operador en la ec. (3.4.2), en las funciones de onda no relativistas, es decir

$$\langle \vec{p}_i, i | Q j^\mu \epsilon_\mu | \vec{p}_j, j \rangle = C_1 Q_{i,j} \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_i + \vec{p}_j) \epsilon_0}{2m} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} \right), \quad (4.4.1)$$

con C_1 la constante de la ec. (3.3.3). Los subíndices j, i corren sobre el cuark y anticuark crea respectivamente, para ser consistente con lo hecho anteriormente se analizará el caso de la emisión de un fotón con la polarización izquierda, donde su vector de polarización está dado en la ec. (4.3.2), que simplifica el operador a

$$\langle \vec{p}_i, i | Q j^\mu \epsilon_\mu | \vec{p}_j, j \rangle = \frac{-Q_{i,j}}{\sqrt{2}} \sigma_- \quad (4.4.2)$$

Usando solo las contribuciones de piones pseudo-escalares solo se tiene que calcular:

$$\left[\sum_{B'C'} \langle B'C' \gamma | \right] \frac{-C_1 Q_{i,j}}{\sqrt{2}} \sigma_- | A \rangle \delta^3(\vec{p}_i + \vec{p}_j + \vec{k}_1) \quad (4.4.3)$$

En este caso el par creado debe acoplar a los números cuánticos del fotón, $J^{PC} = 1^{--}$, lo que implica que el estado del par cuark-anticuark a creado debe tener los mismos números cuánticos. El par junto con el fotón debe acoplar a los números cuánticos del vacío. Con lo que solo contribuyen estados que tengan movimientos relativos pares, $L = 0, 2$ entre el par cuark-anticuark en un estado triplete. Para mostrar la forma explícita del cálculo se hará el análisis de los canales de carga de estos decaimientos,

$$\langle B'C' \gamma | H_2 | A \rangle. \quad (4.4.4)$$

Y al final se tomará la suma sobre los canales de isoespín. Debido a que los piones, bariones inicial y final están en estado base, la parte orbital será la misma en los casos que se tengan las mismas helicidades. Solo se debe tener cuidado en la parte del espacio espín-sabor, que es donde actúa el operador en primera cuantización.

Así partimos de la ec. (3.4.13), y nos restringimos a la siguiente contribución:

$$\begin{aligned} \langle B'_i C'_j, k_0, \vec{K}_0, J', l' \gamma | H_2 | A \rangle &= \frac{3}{\sqrt{2}} \int d^3 K_{b'} d^3 K_{c'} \sum_{M_{b'c'}, m, M_{b'}, M_{c'}} \langle J_{b'} M_{b'}, J_{c'} M_{c'} | J_{b'c'} M_{b'c'} \rangle \\ &\langle J_{b'c'} M_{b'c'} l m | J_{a'} M_{a'} \rangle \delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \frac{Y_l^{*m}(\hat{k}_r)}{k_r^2} \delta(k_r - k_0) \int \prod_{i=1}^5 d^3 p_i \delta^3(\vec{p}_4 + \vec{p}_5 + \vec{k}_1) \\ &\left[\Psi_{B'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_4) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_3, \vec{p}_5) \left(\frac{-C_1 Q_{4,5}}{\sqrt{2}} \sigma_- \right) \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \right] \quad (4.4.5) \end{aligned}$$

Tampoco para este caso hay contribución del término que corresponde a la creación del mesón, ya que debe ser un mesón vectorial, sin embargo solo se está trabajando con

la aproximación de piones para los estados finales, que son pseudo-escalares y no llevan momento angular.

La ec. (4.4.5) puede ser tratada de igual manera que el caso de aniquilación, con la diferencia de que ahora las componentes extras están acoplados a los números cuánticos de los bariones finales $A' = P, \Lambda, \Sigma$ del octete de bariones. Al solo considerar los piones, que no llevan momento angular, junto con los bariones en el estado base y que el operador σ_- cambia la helicidad de los estados iniciales, dan la misma simplificación que el caso de aniquilación, donde solo $m = 0$ contribuye a las amplitudes de helicidad ν .

Así podemos escribir las amplitudes para las helicidades $\nu = 3/2, 1/2$ como:

$$\begin{aligned} \langle B'_i C'_j, k_0, \vec{K}_0, J_{a'} = \frac{1}{2}, M_{a'} = \nu - 1, l = 1 \gamma | H_3 | A, J_a = \frac{3}{2}, \nu \rangle &= \int d^3 K_{b'} d^3 K_{c'} \frac{Y_l^{*m}(\hat{k}_r)}{k_r^2} \\ \langle J_{b'c'}, M_{b'c'} = \nu - 1; l = 1, m = 0 | J_{a'} = 1/2, M_{a'} = \nu - 1 \rangle &\delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \delta(k_r - k_0) \frac{3C_1}{\sqrt{2}} \\ \int \prod_{i=1}^5 d^3 p_i \left[\Psi_{B'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_4) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_3, \vec{p}_5) \left(\frac{-Q_{4,5} \sigma_-}{\sqrt{2}} \right) \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \right] &\delta^3(\vec{p}_4 + \vec{p}_5 + \vec{k}_1) \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

En este caso se tiene que el operador actúa en el espacio espín-sabor, por lo que podemos usar las ec. (4.3.8) y (4.3.9) para separar la parte orbital al igual que el caso de aniquilación.

La contribución de la parte orbital para el proceso de creación es

$$\begin{aligned} O(k_0, \vec{K}_0) &= \frac{3C_1}{\sqrt{2}} \int d^3 K_{b'} d^3 K_{c'} \frac{Y_l^{*m}(\hat{k}_r)}{k_r^2} \delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \delta(k_r - k_0) \int \prod_{i=1}^5 d^3 p_i \\ &\delta^3(\vec{p}_4 + \vec{p}_5 + \vec{k}_1) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_4 - \vec{K}_{B'}) \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_5 - \vec{K}_{c'}) \\ &\delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{K}_A) \Psi_{B'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_4) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_3, \vec{p}_5) \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Al integrar sobre \vec{p}_4 y \vec{p}_5 , nos quedamos con las variables los momentos del barión inicial, para usar el mismo proceso que para la parte de aniquilación, al evaluar las integrales en las coordenadas relativas. Así la integral a evaluar es:

$$\begin{aligned} O(k_0, \vec{K}_0) &= \frac{3C_1}{\sqrt{2}} \int d^3 K_{b'} d^3 K_{c'} \frac{Y_l^{*m}(\hat{k}_r)}{k_r^2} \delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \delta(k_r - k_0) \int \prod_{i=1}^3 d^3 p_i \\ &\delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{K}_A) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{K}_{c'} - \vec{k}_1 - \vec{K}_{B'}) \\ &\left[\Psi_{B'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 - \vec{K}_{c'} - \vec{k}_1) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_3, \vec{K}_{c'} - \vec{p}_3) \Psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \right] \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

con lo que podemos hacer el cambio a coordenadas relativas como se ha usado en la contribución de los cuarks de valencia, así como en el los procesos de aniquilación. Para este caso el sistema de referencia debe ser el barión inicial A , al igual que los otros 2 casos, con lo que $\vec{K}_A = \vec{0}$ y usando los cambios a coordenadas relativas dados por las ecs.

(4.2.11), (4.2.12) y (4.2.13); con la convención de las funciones de onda de los bariones en estado base de la ec. (4.2.15), podemos escribir la función de onda para el barión inicial:

$$\psi_A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \left(\frac{\sqrt{3}R_A^2}{\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{R_A^2}{2} (p_\rho^2 + p_\lambda^2) \right] \quad (4.4.9)$$

Para el barión B' la función de onda se transforma a:

$$\begin{aligned} \Psi_{B'}^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 - \vec{K}_{c'} - \vec{k}_1) &= \left(\frac{\sqrt{3}R_{B'}^2}{\pi} \right)^{3/2} \\ &\times \exp \left[-\frac{R_{B'}^2}{6} \left(3p_\rho^2 + 3p_\lambda^2 + 2\sqrt{6}\vec{p}_\lambda \cdot (\vec{k}_1 + \vec{K}_{c'}) + 2(\vec{k}_1 + \vec{K}_{c'})^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

y en este caso la función de onda del mesón π' es:

$$\Psi_{C'}^*(\vec{p}_3, \vec{K}_{c'} - \vec{p}_3) = \left(\frac{R_M^2}{\pi} \right)^{3/4} \exp \left[-\frac{R_M^2}{8} \left(\frac{2}{3}(\vec{P}_{cm} - \sqrt{6}\vec{p}_\lambda) - \vec{K}_{c'} \right)^2 \right] \quad (4.4.11)$$

Agregando el Jacobiano de la transformación dado en la ec. (4.2.14), con la aproximación de radios iguales para los bariones del octete y decuplete $R_A = R_{B'}$, podemos reescribir la ec. (4.4.8) como:

$$\begin{aligned} O(k_0, \vec{K}_0) &= \frac{3C_1}{\sqrt{2}} \int d^3K_{b'} d^3K_{c'} \frac{Y_l^{*m}(\hat{k}_r)}{k_r^2} \delta^3(\vec{K} - \vec{K}_0) \delta(k_r - k_0) \\ &\frac{1}{3\sqrt{3}} \iiint d^3p_\rho d^3p_\lambda d^3P_{cm} \delta^3(\vec{P}_{cm} - \vec{K}_{c'} - \vec{k}_1 - \vec{K}_{B'}) \delta^3(\vec{P}_{cm}) \\ &\left(\frac{\sqrt{3}R^2}{\pi} \right)^3 \left(\frac{R_M^2}{\pi} \right)^{3/4} \exp \left[-\frac{R_M^2}{8} \left(\frac{2}{3}(\vec{P}_{cm} - \sqrt{6}\vec{p}_\lambda) - \vec{K}_c \right)^2 \right] \\ &\exp \left[-\frac{R^2}{6} \left(6p_\rho^2 + 6p_\lambda^2 + 2\sqrt{6}\vec{p}_\lambda \cdot (\vec{k}_1 + \vec{K}_c) + 2(\vec{k}_1 + \vec{K}_c)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Debido a que la parte orbital no depende \vec{K}_0 , se puede integrar de manera trivial y así eliminar la dependencia \vec{K}_0 mediante la ec. (4.3.17), así obtenemos

$$\begin{aligned} O(k_0) &= 3C_1 \left(\frac{R}{w} \right)^3 \left(\frac{R_M^2}{\pi} \right)^{3/4} \sqrt{6\pi} \exp [x_1 k^2 + y_1 k_0^2] \\ &\times \left(\frac{\cosh(z_1 k k_0)}{(z_1 k k_0)} - \frac{\sinh(z_1 k k_0)}{(z_1 k k_0)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Esta es la contribución de la parte orbital de los procesos de creación. Para un k_0 fijo con w, x_1, y_1 y z_1 funciones constantes que solo dependen de los radios de los bariones (R) y

los mesones (R_M), dados por las expresiones:

$$\begin{aligned}
w^2 &= \left(\frac{R_M^2}{3} + R^2 \right) \\
x_1 &= \left(-\frac{3R^2}{25} - \frac{R_M^2}{50} + \frac{3R^4}{50w^2} + \frac{R_M^4}{150w^2} - \frac{R^2 R_M^2}{25w^2} \right) \\
y_1 &= \left(-\frac{R^2}{3} - \frac{R_M^2}{8} + \frac{R^4}{6w^2} + \frac{R_M^4}{24w^2} + \frac{R^2 R_M^2}{6w^2} \right) \\
z_1 &= \left(\frac{2R^2}{5} - \frac{R_M^2}{10} - \frac{R^4}{5w^2} + \frac{R_M^4}{30w^2} - \frac{R^2 R_M^2}{30w^2} \right).
\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Con ayuda de las funciones modificadas de Bessel, $I_\nu(x)$, como se hizo para la ec. (4.3.18), la ec. (4.4.13) se reescribe como:

$$O(k_0) = C_1 \left(\frac{R^4 R_M^2}{\pi} \right)^{3/4} \frac{9}{w^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \exp [x_1 k^2 + y_1 k_0^2] \sqrt{\frac{\pi}{2z_1 k k_0}} I_{3/2}(z_1 k k_0). \tag{4.4.15}$$

Así al usar la ecs. (4.3.24), (4.3.25) y (4.3.26) podemos evaluar toda la parte orbital para cada canal de isoespín como:

$$\begin{aligned}
6\gamma \int d^3 k_0 \frac{O(k_0) \varepsilon(1, 0, k_0)}{M_{A'} - \sqrt{M_{B'}^2 + k_0^2} - \sqrt{M_{C'}^2 + k_0^2}} &= 4\pi C_1 C_2 C_3 \exp [x_1 k^2] \\
&\times \int dk_0 \frac{k_0^3 \exp [-2F^2 k_0^2]}{M_{A'} - \sqrt{M_{B'}^2 + k_0^2} - \sqrt{M_{C'}^2 + k_0^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2z_1 k k_0}} I_{3/2}(z_1 k k_0)
\end{aligned} \tag{4.4.16}$$

donde $M_{A'}$, $M_{B'}$ y $M_{C'}$ indican las masas de las componentes extras del barión final. Ya solo se evalúa numéricamente, que a diferencia de la parte de aniquilación, está integral no tiene polos en ninguno de los casos que se trabajan. Al igual que parte de aniquilación, la parte orbital es factorizable en la expresiones de las amplitudes, para las helicidades de 3/2 y de 1/2, debido a la estructura del espín de las funciones de onda de los bariones del octete y decuplete. Solo queda hacer la suma sobre los canales de isoespín.

Los elementos de matriz en el espacio espín-sabor están dados por el operador $\sigma_- Q_{4,5}$, al igual que el caso de aniquilación, donde la etiqueta 5 se refiere al antiquark que se crea y la etiqueta 4 del cuark creado que será el tercer cuark del barión B' , mientras los cuarks del barión inicial A son espectadores. Los elementos de matriz en el espacio espín-sabor están dados por:

$$\langle \phi_{A'}, \nu - 1 | \sigma_- Q_{4,5} | \phi_B \phi_\pi, \nu \rangle \equiv \langle \phi(4) | \sigma_- Q | \phi(5) \rangle \langle \phi(1, 2)_{B'} \phi(3)_{\pi'} | \phi(1, 2, 3)_A \rangle \tag{4.4.17}$$

con $\nu = 3/2, 1/2$, las helicidades. En esta notación los números representan los cuarks de los bariones y mesones. Para el caso del decaimiento $\Delta^+ \rightarrow p\gamma$, las componentes de los canales de carga que contribuyen a los procesos de creación están en el cuadro 4.7.

Cuadro 4.7: Elementos de matriz espín-sabor de procesos de creación, para las helicidades $\nu = 3/2, 1/2$ del las componentes $|BC\rangle$ del Protón.

Para el decaimiento $\Delta^+ \rightarrow p\gamma$

Componente $ BC\rangle$	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$ \Delta^{++}\pi^-\rangle$	$\frac{2\sqrt{2}}{9}$	$\frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$
$ \Delta^+\pi^0\rangle$	$\frac{5}{9\sqrt{3}}$	$\frac{10}{27}$
$ \Delta^0\pi^+\rangle$	$\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$	$\frac{4\sqrt{2}}{27}$
$ p\pi^0\rangle$	$-\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{27}$
$ n\pi^+\rangle$	$\frac{2}{9\sqrt{3}}$	$\frac{2}{27}$

Las contribuciones del proceso de creación a los decaimientos de las resonancias sigma, $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$ y $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0\gamma$ se encuentran en el cuadro 4.8, dando las componentes de los canales de carga.

Al sumar sobre todos los canales de carga $|B'C'\rangle$ considerando solo los piones pseudo-escalares se obtienen las contribuciones totales de los canales de isoespín en el espacio espín sabor y se dan en el cuadro 4.8

$$\sum_{M_{bc}, B'\pi'} \langle J_{B'\pi'}, \nu - 1; l = 1, 0 | J_{A'} = \frac{1}{2}, \nu - 1 \rangle \langle \mathbf{B}'\pi' | T^\dagger | A \rangle_{SF} \times \langle \phi_{B'} \phi_{\pi'}, \nu - 1 | \frac{-\sigma_{-,4,5}}{\sqrt{2}} Q_{4,5} | \phi_A, \nu \rangle \quad (4.4.18)$$

donde A' es el barión de valencia correspondiente y $|\mathbf{B}'\pi'\rangle$ el canal de isoespín correspondiente. Con $J_{B'\pi'} = 1/2, 3/2$, el primero corresponde para el caso que B' sea miembro del octete y el otro para cuando es miembro del decuplete. Pero aquí se deben acoplar el estado del barión final, que para todos los casos de creación el momento angular total es $J_{A'} = \frac{1}{2}$. Pues el estado final es siempre miembro del octete de bariones.

Cuadro 4.8: Elementos de matriz espín-sabor de procesos virtuales de creación de componentes $|BC\rangle$ de las resonancias Σ y Λ , en los decaimientos electromagnéticos para las helicidadades $\nu = 3/2$ y $\nu = 1/2$

$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \gamma$			$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 \gamma$		
$ BC\rangle$	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$	$ BC\rangle$	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$ \Sigma^{*+} \pi^0\rangle$	$\frac{4}{9\sqrt{3}}$	$\frac{8}{27}$	$ \Sigma^{*+} \pi^-\rangle$	$\frac{4}{9\sqrt{3}}$	$\frac{8}{27}$
$ \Sigma^{*0} \pi^+\rangle$	$\frac{2}{9\sqrt{3}}$	$\frac{4}{27}$	$ \Sigma^{*0} \pi^0\rangle$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{2}{9}$
$ \Sigma^+ \pi^0\rangle$	$\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{27}$	$ \Sigma^{*-} \pi^+\rangle$	$\frac{2}{9\sqrt{3}}$	$\frac{4}{27}$
$ \Sigma^0 \pi^+\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{27}$	$ \Sigma^+ \pi^-\rangle$	$\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{27}$
$ \Lambda^0 \pi^+\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{9}$	$\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$	$ \Sigma^0 \pi^0\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{18}$
			$ \Sigma^- \pi^+\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{27}$

Cuadro 4.9: Contribución total de las componentes $|B'C'\rangle$ a las helicidadades $\nu = 3/2, 1/2$ de los decaimientos electromagnéticos de las resonancias Δ^+ , Σ^{*+} y Σ^{*0}

Decaimiento	Canal	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Delta^+ \rightarrow p\gamma$	$\Delta\pi$	$-\frac{2}{243}$	$-\frac{4}{243\sqrt{3}}$
	$N\pi$	$-\frac{5}{486}$	$\frac{5}{486\sqrt{3}}$
$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \gamma$	$\Sigma^* \pi$	$-\frac{2}{729}$	$-\frac{4}{729\sqrt{3}}$
	$\Sigma\pi$	$\frac{2}{729}$	$-\frac{2}{729\sqrt{3}}$
$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 \gamma$	$\Lambda\pi$	$\frac{1}{243}$	$-\frac{1}{243\sqrt{3}}$
	$\Sigma^* \pi$	$-\frac{1}{81\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{243}$
	$\Sigma\pi$	$-\frac{1}{162\sqrt{3}}$	$\frac{1}{486}$

4.5. Helicidades

En esta sección se dan los resultados numéricos, de las contribuciones de los procesos de radiación de alguno de los cuarks de valencia, los procesos de aniquilación y de creación a las amplitudes de helicidad de los decaimientos electromagnéticos de las resonancias $\Delta^+ \rightarrow p + \gamma$, $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ + \gamma$ y $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$, utilizando los valores experimentales para las masas de los bariones y mesones, en el límite no relativista. En esta parte se considera la simetría de isoespín, es decir, la masa del pión usada es el promedio de las masas experimentales de π^+ , π^0 y π^- . Además se toma el mismo radio para los bariones y el mismo radio para los mesones.

Teniendo las amplitudes de helicidad, se procede a calcular las anchuras, para poder comparar con los datos experimentales. En esta sección se detalla todo el procedimiento para obtener las anchuras teóricamente.

Cuadro 4.10: Valores teóricos del momento

k del fotón	
Decaimiento	Valor de k (GeV)
$\Delta^+ \rightarrow p\gamma$	0,26
$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$	0,18
$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^+\gamma$	0,25

4.5.1. Cálculo de las Helicidades $\nu = 3/2, 1/2$

En las secciones anteriores 4.2, 4.3 y 4.4 las amplitudes de helicidad quedaron expresadas en términos de k , el momento del fotón radiado.

La expresión de k es tomada de la referencia [25], donde se escoge el sistema de reposo de la resonancia que decae, dada por:

$$k = \frac{M_A^2 - M_{A'}^2}{2M_A^2} \quad (4.5.1)$$

donde M_A es la masa experimental de las resonancias iniciales (Δ^+ , Σ^{*+} y Σ^{*0}) y $M_{A'}$ son las masas de los bariones finales (p , Σ^+ y Λ^0), respectivamente. En el cuadro 4.10 se dan los valores k obtenidos para los decaimientos electromagnéticos estudiados. Con estos valores de k se pueden evaluar las integrales orbitales de las secciones 4.2, 4.3 y 4.4 .

Para las helicidades correspondientes a la radiación de los cuarks de valencia dadas en las ecs. (4.2.19) y (4.2.20), que al multiplicar por su correspondiente factor de espín-sabor,

con su factor de normalización, dan el valor correspondiente a las helicidades $\nu = 3/2, 1/2$ de los bariones de valencia. Las contribuciones de los cuarks de valencia se ponen en los cuadros 4.11, 4.12 y 4.13.

Cuadro 4.11: Contribución total a las helicidades A_ν ,
 $\nu = 3/2, 1/2$ del decaimiento
 electromagnético de la resonancia Δ^+ en $(GeV)^{-1/2}$
 Con el valor de $\gamma = 1,6$

Contribución de los cuark de valencia			
Decaimiento		$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Delta^+ \rightarrow p\gamma$		-0,072	-0,041
Aniquilación			
Decaimiento	Canal	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Delta^+ \rightarrow p\gamma$	$\Delta\pi$	-0,058	-0,011
	$N\pi$	-	-0,058
Creación			
Decaimiento	Canal	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Delta^+ \rightarrow p\gamma$	$\Delta\pi$	-0,007	-0,009
	$N\pi$	-0,012	0,007
Helicidades totales			
Decaimiento		$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Delta^+ \rightarrow p\gamma$		-0,150	-0,113

La obtención de las contribuciones de los procesos de aniquilación a las helicidades se obtiene directamente al evaluar las correspondientes traslapes orbitales dados en la ec. (4.3.27), con el valor de k correspondiente al decaimiento, para cada canal de isospín. Y este se multiplica por su correspondiente factor de espín-sabor del canal de isospín dado en el cuadro 4.6, multiplicado por su factor de normalización. También estas contribuciones a las helicidades se coloca en los cuadros 4.11, 4.12 y 4.13.

De manera completamente análoga al cálculo de las helicidades de aniquilación usando la parte orbital de la ec. (4.4.16), multiplicado por su correspondiente factor de espín-sabor de cada canal de isospín dados en el cuadro 4.9. Con la normalización adecuada se dan las contribuciones de los procesos de creación en los cuadros 4.11, 4.12 y 4.13.

Cuadro 4.12: Contribución total a las helicidadas A_ν ,
 $\nu = 3/2, 1/2$ del decaimiento
 electromagnético de la resonancia Σ^{*+} en $(GeV)^{-1/2}$
 Con el valor de $\gamma = 1,6$

Contribución de los cuark de valencia			
Decaimiento		$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$		0,082	0,047
Aniquilación			
Decaimiento	Canal	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
	$\Sigma^*\pi$	-0,009	-0,002
$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$	$\Sigma\pi$	-	0,010
	$\Lambda\pi$	-	0,016
Creación			
Decaimiento	Canal	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
	$\Sigma^*\pi$	-0,003	-0,003
$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$	$\Sigma\pi$	0,003	-0,002
	$\Lambda\pi$	0,006	-0,003
Helicidadas totales			
Decaimiento		$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$		0,080	0,063

Cuadro 4.13: Contribución total a las helicidades A_ν ,
 $\nu = 3/2, 1/2$ del decaimiento
 electromagnético de la resonancia Σ^{*0} en $(GeV)^{-1/2}$
 Con el valor de $\gamma = 1,6$

Contribución de los cuark de valencia			
Decaimiento		$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^+ \gamma$		-0,077	-0,044
Aniquilación			
Decaimiento	Canal	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^+ \gamma$	$\Sigma^* \pi$	-0,051	-0,009
	$\Sigma \pi$	-	-0,027
Creación			
Decaimiento	Canal	$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^+ \gamma$	$\Sigma^* \pi$	-0,007	-0,008
	$\Sigma \pi$	-0,004	0,002
Helicidades totales			
Decaimiento		$\nu = 3/2$	$\nu = 1/2$
$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^+ \gamma$		-0,140	-0,088

4.5.2. Anchuras parciales y espacio fase

Las anchuras de los decaimientos electromagnéticos son calculados mediante las amplitudes de helicidad total mediante la expresión:

$$\Gamma(A \rightarrow A' + \gamma) = 2\pi\rho \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2}{2J+1} \sum_{\nu>0} |A_\nu|^2, \quad (4.5.2)$$

donde ρ es el factor de espacio fase, que para un proceso $A \rightarrow B + C$, en el sistema de reposo de A se define ρ , ver referencia [18], como:

$$\rho = \int d^3P_B d^3P_C \delta^3(\vec{P}_B + \vec{P}_C) = 4\pi \frac{E_B E_C}{M_A} \quad (4.5.3)$$

En el trabajo presente, que se está trabajando con la emisión de un fotón, donde $M_C = 0$, $E_C = k$, la fórmula se simplifica a:

$$\rho = 4\pi \frac{E_B}{M_A} k \quad (4.5.4)$$

Cuadro 4.14: Comparación anchuras parciales con los valores experimentales y con resultados de otras referencias. Γ en KeV .

Decaimiento	Γ Parcial	χ QM	Γ Exp.
		Ref.[26]	Ref.[19, 20]
$\Delta^+ \rightarrow p\gamma$	300	334	640 ± 47
$\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$	41	102	250 ± 70
$\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^+\gamma$	224	234	450 ± 102

donde

$$E_B = \sqrt{M_B^2 + k^2} \quad (4.5.5)$$

Los valores parciales de las anchuras de los decaimientos electromagnéticos considerando solo los procesos de radiación de los cuarks, los procesos de aniquilación y creación se dan en la tabla en comparación de los resultados experimentales de las referencias [19, 20]

Que son parciales pues faltan todas las contribuciones de las componentes entre estados $|qqq\bar{q}\rangle$. Que se ha dejado para un trabajo a futuro.

Capítulo 5

Conclusiones

El trabajo tuvo como principal motivo mejorar la descripción de los acoplamientos electromagnéticos en bariones, que los modelos de cuarks de valencia no pueden describir. Así se propone agregar más componentes a las funciones de onda, donde se incluyen pares cuark-anticuark. Que desde el punto de vista de los modelos efectivos, es agregar otros grados efectivos de libertad. Estos grados efectivos de libertad se han justificado en otras observables, como el espín del nucleón, la asimetría de sabor en el protón, etc.

Para la consideración de estas nuevas componentes en las funciones de onda se usó el Unquenched Quark Model (UQM) que incluye la creación de pares cuark-anticuark a partir del vacío. Como se consideraron nuevas componentes ligadas pares cuark-anticuark, que son predichas en modelos relativistas. Se tuvo que modelar el Hamiltoniano de interacción que incluyera este tipo de procesos, utilizando modelos relativistas y la Teoría Cuántica de Campos.

A partir de la Teoría Cuántica de Campos se construyó el Hamiltoniano de interacción de los acoplamientos electromagnéticos, que de manera natural nos da procesos con creación y aniquilación de pares cuark-anticuark, así como posibles transiciones de anticuarks, sin la necesidad de postular estos procesos.

Después se hacen aproximaciones no relativistas, con lo que el modelo se hizo converger de manera sistemática a modelos no relativistas, para poder usar los modelos efectivos de bariones. De esta manera se obtienen las nuevas contribuciones al decaimiento electromagnético, cuando se consideran las nuevas componentes del UQM, que son los procesos de aniquilación y creación de pares cuark-anticuark.

La construcción a nivel de cuarks es muy general, esto hace que el método que aplica se pueda extender para estudiar otros procesos, no solo los decaimientos electromagnéticos de bariones, como se hace en este trabajo, si no también en la fotoproducción de resonan-

cias bariónicas. Así como para aniquilación de mesones vectoriales, que acoplan a fotones virtuales, en aproximaciones no relativistas.

La primera aplicación del modelo se hizo para la descripción del decaimiento electromagnético de las resonancias $\Delta^+ \rightarrow p + \gamma$, $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ + \gamma$ y $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$, donde solo se consideran las contribuciones de los piones en las funciones UQM.

En estos decaimientos se comprobó que el modelo se reduce a las predicciones de los modelos de cuarks de valencia convencionales al quitar las contribuciones extras debido a considerar las demás componentes del UQM. Las correcciones debido a la presencia de nuevas componentes mejoran la descripción, como es de esperarse al agregar nuevos grados de libertad, que han sido comprobado experimentalmente [9, 19, 20]. La consideración de nuevos grados de libertad, mejora la descripción de observables, que nos da una forma de describir la fenomenología de los bariones de manera cualitativa.

Al normalizar las funciones de onda de los bariones, y solo considerar los procesos de aniquilación y creación de pares cuark-anticuark, los resultados son más pequeños que los obtenidos con modelos de cuarks. Pero este trabajo sigue en proceso, y la parte que falta es extensa.

En este trabajo los valores teóricos parciales son aceptables, en los órdenes de magnitud con respecto a los valores experimental, aun así falta estudiar las contribuciones de las transiciones entre estados de cinco componentes, no permite dar una conclusión final acerca de la importancia de estas nuevas componentes. Esto se puede hacer solo cuando se concluya todo el trabajo completo.

Apéndice A

Convenciones

A.1. Funciones de onda Espín

Los estados de espín están representados por los kets $|S, M_s\rangle$ de [25]

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle &: \chi_\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle] \\ &: \chi_\lambda = \frac{1}{\sqrt{6}} [2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle] \\ \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle &: \chi_s = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

donde solo se han dado las máximas proyecciones del espín es decir $M_s = S$. Los demás estados se pueden obtener mediante el operador S_- .

A.2. Funciones de sabor

Para los estados en el espacio de sabor se usa la convención de [25]. Con las representaciones de $SU(3)$ de simetría mixta, simétrica y antisimétrica con la forma $|(p, q), I, M_I, Y\rangle$ con $(p, q) = (g_1 - g_2, g_2)$

1. Octete de bariones $(p, q) = (1, 1)$, simetría mixta

$$\begin{aligned}
|(1, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle & : \phi_\rho(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}[|udu\rangle - |duu\rangle], \\
& : \phi_\lambda(p) = \frac{1}{\sqrt{6}}[2|uud\rangle - |udu\rangle - |duu\rangle], \\
|(1, 1), 1, 1, 0\rangle & : \phi_\rho(\Sigma^+) = \frac{1}{\sqrt{2}}[|suu\rangle - |usu\rangle], \\
& : \phi_\lambda(\Sigma^+) = \frac{1}{\sqrt{6}}[-2|uus\rangle + |usu\rangle + |suu\rangle], \\
|(1, 1), 0, 0, 0\rangle & : \phi_\rho(\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{12}}[2|uds\rangle - 2|dus\rangle - |dsu\rangle + |sdu\rangle - |sud\rangle + |usd\rangle], \\
& : \phi_\lambda(\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}[-|dsu\rangle - |sdu\rangle + |sud\rangle + |usd\rangle] \\
|(1, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\rangle & : \phi_\rho(\Xi^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[|sus\rangle - |uss\rangle], \\
& : \phi_\lambda(\Xi) = \frac{1}{\sqrt{6}}[2|ssu\rangle - |sus\rangle - |uss\rangle],
\end{aligned} \tag{A.2.1}$$

2. El decuplete de bariones $(p, q) = (3, 0)$

$$\begin{aligned}
|(3, 0), \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\rangle & : \phi_s(\Delta^{++}) = |uuu\rangle, \\
|(3, 0), 1, 1, 0\rangle & : \phi_s(\Sigma^{*+}) = \frac{1}{\sqrt{3}}[|suu\rangle + |usu\rangle + |uus\rangle] \\
|(3, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\rangle & : \phi_s(\Xi^{*0}) = \frac{1}{\sqrt{3}}[|ssu\rangle + |sus\rangle + |uss\rangle] \\
|(3, 0), 0, 0, -2\rangle & : \phi_s(\Omega^-) = |sss\rangle
\end{aligned} \tag{A.2.2}$$

3. El singulete de bariones $(p, q) = (0, 0)$;

$$|(0, 0), 0, 0, -2\rangle : \frac{1}{\sqrt{6}}[|uds\rangle - |dus\rangle + |dsu\rangle - |sdu\rangle + |sud\rangle - |usd\rangle] \tag{A.2.3}$$

Solo se dan los estados con máxima proyección de isoespín $M_I = I$ con $Q = I + Y/2$, los demás estados pueden ser obtenidos aplicando I_- .

A.3. Matrices de Dirac y espinores

La ecuación de Dirac es

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \psi = 0, \tag{A.3.1}$$

donde ψ es un vector columna de cuatro componentes, conocido como biespinor o espinor de Dirac. γ_μ , con $\mu = 0, 1, 2, 3$, son matrices de 4×4 , llamadas las matrices de Dirac, definidas por

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu,\nu} \quad (\text{A.3.2})$$

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.3})$$

$$\beta = \gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.4})$$

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.5})$$

donde I es la matriz identidad de 2×2 y σ_k son las 3 matrices de Pauli.

La ecuación de Dirac también se escribe como en forma de la ec. Schrödinger

$$H\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (\text{A.3.6})$$

con

$$H = i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \quad (\text{A.3.7})$$

$$\alpha_k = \gamma_0\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.8})$$

$$\sigma^i = \sigma_i \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.9})$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Los espinores covariantes se normalizan de acuerdo

$$\bar{u}_s(p)u_s(p) = 1 \quad (\text{A.3.10})$$

$$\bar{v}_s(p)v_s(p) = -1 \quad (\text{A.3.11})$$

Los espinores u_s y v_s se definen como

$$u_s(p) = \left(\frac{E+m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.12})$$

$$v_s(p) = \left(\frac{E+m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.13})$$

donde χ_s son los espinores de Pauli y

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_3 & p_- \\ p_+ & -p_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.14})$$

con $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$.

Las cuatro soluciones linealmente independientes de la ecuación de Dirac se pueden escribir en una matriz, explícitamente como:

$$\left(\frac{E+m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_3}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_3}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_3}{E+m} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3.15})$$

El espinor adjunto se define como

$$\bar{q} = q^\dagger \gamma_0 = \begin{pmatrix} q_1^\dagger & q_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.16})$$

donde q_1 es la componente grande del spinor q y q_2 la componente pequeña del espinor q .

Apéndice B

Desarrollos matemáticos

B.1. Cuantización del campo de Klein-Gordon

Aquí se hace un repaso de la teoría de campos cuánticos, para un mayor detalle se puede consultar las referencias [30, 31].

Partiendo de la idea de teoría de campos clásicos, al final se hará la cuantización haciendo cambio de las variables dinámicas a operadores que obedecen reglas de conmutación apropiadas, si son fermiones o bosones.

Como ejemplo se va a cuantizar el Campo Klein Gordon, utilizando el proceso de cuantizar cualquier otro sistema dinámico. En este caso tomamos los campos ϕ y π continuos, canónicos conjugados con las relaciones de conmutación apropiadas. Recordando que para el sistema discreto de uno o más partículas las relaciones de conmutación son

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (\text{B.1.1})$$

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad (\text{B.1.2})$$

para el caso continuo la generalización es análoga

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{B.1.3})$$

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0, \quad (\text{B.1.4})$$

observamos no se ha metido la dependencia temporal, porque se está trabajando en la imagen de Schrödinger. El hamiltoniano, siendo función de ϕ y π , es un operador, por lo que ahora se debe encontrar su espectro.

Primero recordamos que el campo clásico de Klein-Gordon satisface:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0 = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0. \quad (\text{B.1.5})$$

El campo $\phi(x)$ es gobernado por la Lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\dot{\phi} - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\end{aligned}\quad (\text{B.1.6})$$

notando que la densidad de momento canónico conjugado de $\phi(x)$ es $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ por lo que la función Hamiltoniana es

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right]. \quad (\text{B.1.7})$$

Si ahora expandimos el campo clásico de Klein-Gordon en una serie de Fourier

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t) \quad (\text{B.1.8})$$

así la ec. B.1.5 se puede escribir como:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\vec{p}, t) = 0 \quad (\text{B.1.9})$$

y se se identificar como la ecuación de movimiento de un oscilador armónico con la frecuencia

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \quad (\text{B.1.10})$$

observando que ω es justamente la energía relativista de una partícula.

El oscilador armónico es un sistema muy conocido, por lo que solo recordamos algunos detalles de interés como es el operador Hamiltoniano

$$H_{\text{Sho}} = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 x^2) \quad (\text{B.1.11})$$

Que usando los operadores de escalera podemos escribir a p y x como

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger) \quad (\text{B.1.12})$$

$$p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger) \quad (\text{B.1.13})$$

cuya relación de conmutación es

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (\text{B.1.14})$$

el Hamiltoniano se puede reescribir como

$$H_{\text{Sho}} = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.1.15})$$

Con lo anterior se puede definir el estado vacío ($|0\rangle$) como $a|0\rangle = 0$ y es un eigenestado del H con eigenvalor $\frac{1}{2}\omega$. Además se tiene los conmutadores

$$[H_{\text{Sho}}, a^\dagger] = \omega a^\dagger \quad (\text{B.1.16})$$

$$[H_{\text{Sho}}, a] = -\omega a. \quad (\text{B.1.17})$$

Los estados se pueden definir como

$$|n\rangle \equiv (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (\text{B.1.18})$$

que son eigenestados de H_{Sho} con eigenvalor $(n + \frac{1}{2})\omega$

Para continuar con la cuantización del campo de Klein-Gordon, ahora cada modo de Fourier del campo es tratado como un oscilador independiente su propio a y a^\dagger entonces usando las ecs. (B.1.8), (B.1.12) y (B.1.13) podemos escribir que

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad (\text{B.1.19})$$

$$\pi(\vec{x}) = \int (-i) \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right). \quad (\text{B.1.20})$$

B.2. El campo Klein-Gordon en el espacio tiempo y la cuantización del campo electromagnético

Para generalizar la cuantización del campo Klein-Gordon en el espacio tiempo, se utiliza la imagen de Heisenberg, donde es más fácil ver la dependencia del tiempo en los operadores y ver la causalidad.

En la imagen de Heisenberg los operadores ϕ y π dependen del tiempo y se escriben de la forma usual apartir de los operadores en la imagen de Schrödinger

$$\phi(x) = \phi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt} \quad (\text{B.2.1})$$

y es igual para $\pi(x) = \pi(\vec{x}, t)$ La ecuación de movimiento de Heisenberg es

$$i \frac{\partial}{\partial t} O = [O, H] \quad (\text{B.2.2})$$

donde H es el Hamiltoniano, e.g. ec. (B.1.7), y para analizar la dependencia temporal de ϕ y π

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) &= \left[\phi(\vec{x}, t), \int d^3x' \left\{ \frac{1}{2} \pi^2(\vec{x}', t) + \frac{1}{2} (\nabla \phi(\vec{x}', t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\vec{x}', t) \right\} \right] \quad (\text{B.2.3}) \\ &= \int d^3x' \frac{1}{2} [\phi(\vec{x}, t), \pi^2(\vec{x}', t)] = \int d^3x' [\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] \pi(\vec{x}', t) \\ &= i \int d^3x' \left(\delta^{(3)}(x - x') \pi(\vec{x}', t) \right) = i\pi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial t} \pi(\vec{x}, t) &= [\pi(\vec{x}, t), \int d^3x' \{ \frac{1}{2} \pi^2(\vec{x}', t) + \frac{1}{2} (\nabla \phi(\vec{x}', t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\vec{x}', t) \}] \\
&= [\pi(\vec{x}, t), \int d^3x' \{ \frac{1}{2} \pi^2(\vec{x}', t) + \frac{1}{2} \phi(\vec{x}', t) (-\nabla^2 + m^2) \phi(\vec{x}', t) \}] \\
&= \int d^3x' \frac{1}{2} [\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t) (-\nabla^2 + m^2) \phi(\vec{x}', t)] \\
&= \int d^3x' [\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] (-\nabla^2 + m^2) \phi(\vec{x}', t) \\
&= -i \int d^3x' (\delta^{(3)}(x - x') (-\nabla^2 + m^2) \phi(\vec{x}', t)) \\
&= -i (-\nabla^2 + m^2) \phi(\vec{x}, t)
\end{aligned} \tag{B.2.4}$$

Se han usada las relaciones de conmutación de las ecs. (B.1.3) y (B.1.4). Combinando los resultados de las ecs. (B.2.3) y (B.2.4) podemos encontrar que ϕ satisface

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\vec{x}, t) = (\nabla^2 - m^2) \phi(\vec{x}, t) \tag{B.2.5}$$

Ahora se pueden usar la transformada de Fourier para descomponer en los modos. Cada modo puede ser escrito en términos de los operadores de creación y aniquilación partiendo de las relaciones de conmutación en la representación Schrödinger generalizando las expresiones de las ecs. (B.1.16) y (B.1.17)

$$[H, a_{\vec{p}}] = -E_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \tag{B.2.6}$$

$$[H, a_{\vec{p}}^\dagger] = -E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger \tag{B.2.7}$$

Ahora se puede escribir estos operadores en la representación de Heisenberg de la forma usual

$$a_{\vec{p}}(t) = e^{iHt} a_{\vec{p}} e^{-iHt} = a_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t} \tag{B.2.8}$$

$$a_{\vec{p}}^\dagger(t) = e^{iHt} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-iHt} = a_{\vec{p}}^\dagger e^{iE_{\vec{p}}t} \tag{B.2.9}$$

donde se ha usado las relaciones de conmutación de los operadores de creación y aniquilación. Se puede usar la construcción del campo $\phi(\vec{x})$ para modificar la ec. (B.1.19) sustituyendo los operadores de creación y aniquilación dependientes del tiempo. Con lo que podemos escribir el campo como

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}(t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger(t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - iE_{\vec{p}}t} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x} + iE_{\vec{p}}t} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right)
\end{aligned} \tag{B.2.10}$$

donde x y p son los cuadvectores del espacio y momento.

B.2.1. Cuantización del campo electromagnético

De manera análoga a la cuantización del campo de Klein-Gordon se procede a cuantizar el campo electromagnético A_μ partiendo de la ecuación

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_\mu = J_\mu \quad (\text{B.2.11})$$

considerando ausencia de corrientes externas obtenemos

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_\mu = \partial^\nu \partial_\nu A_\mu = 0 \quad (\text{B.2.12})$$

Que es la ecuación de Klein-Gordon para la componente A_μ discutida en la sección anterior, donde $m = 0$ ya que el fotón no tiene masa. Entonces para este caso $E = k_0$ y podemos hacer el cambio de $p = k$ en unidades naturales por lo que podemos escribir

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left(a_{\vec{k}\mu} e^{-ik \cdot x} + a_{\vec{k}\mu}^\dagger e^{ik \cdot x} \right) \quad (\text{B.2.13})$$

B.3. Obtención del Hamiltoniano de interacción no relativista

1. Proceso de creación de un par acoplado con el campo electromagnético, partiendo de la ec. (2.1.1), sustituimos el campo del fotón ec. (2.1.3) y la corriente de creación ec. (2.2.3)

$$\begin{aligned} H_{Icrea} &= e \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \\ &\times \sum_{s,s'} \left(\bar{u}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu v_s(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}+\vec{p}') \cdot \vec{x}} b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}) \right) [a_\mu(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}] \\ &= e \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \\ &\times \sum_{s,s'} \left(\bar{u}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu v_s(\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}) a_\mu(\vec{k}) e^{i(-\vec{p}-\vec{p}'+\vec{k}) \cdot \vec{x}} \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu v_s(\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}) a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{i(-\vec{p}-\vec{p}'-\vec{k}) \cdot \vec{x}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3.1})$$

que al integrar sobre d^3x se obtiene

$$\begin{aligned}
H_{Icrea} &= e \int d^3p \left(\frac{m}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int d^3p' \left(\frac{m}{2p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \\
&\times \sum_{s,s'} \left(\bar{u}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu v_s(\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}) a_\mu(\vec{k}) \delta^{(3)}(-\vec{p} - \vec{p}' + \vec{k}) \right. \\
&\quad \left. + \bar{u}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu v_s(\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}) a_\mu^\dagger(\vec{k}) \delta^{(3)}(-\vec{p} - \vec{p}' - \vec{k}) \right)
\end{aligned} \tag{B.3.2}$$

2. Proceso de aniquilación de un par acoplado con el campo electromagnético, de la ec. (2.1.1), sustituimos el campo del fotón ec. (2.1.3) y la corriente de aniquilación ec. (2.2.4)

$$\begin{aligned}
H_{Ianiq} &= e \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \\
&\times \sum_{s,s'} \left(\bar{v}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu u_s(\vec{p}) e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} d_{s'}(\vec{p}') b_s(\vec{p}) \right) [a_\mu(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] \\
&= e \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \\
&\times \sum_{s,s'} \left(\bar{v}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu u_s(\vec{p}) d_{s'}(\vec{p}') b_s(\vec{p}) a_\mu(\vec{k}) e^{i(\vec{p}+\vec{p}'+\vec{k})\cdot\vec{x}} \right. \\
&\quad \left. + \bar{v}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu u_s(\vec{p}) d_{s'}(\vec{p}') b_s(\vec{p}) a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{i(\vec{p}+\vec{p}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} \right)
\end{aligned} \tag{B.3.3}$$

que al integrar sobre d^3x se obtiene

$$\begin{aligned}
H_{Ianiq} &= e \int d^3p \left(\frac{m}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int d^3p' \left(\frac{m}{2p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \\
&\times \sum_{s,s'} \left(\bar{v}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu u_s(\vec{p}) d_{s'}(\vec{p}') b_s(\vec{p}) a_\mu(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' + \vec{k}) \right. \\
&\quad \left. + \bar{v}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu u_s(\vec{p}) d_{s'}(\vec{p}') b_s(\vec{p}) a_\mu^\dagger(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{k}) \right)
\end{aligned} \tag{B.3.4}$$

3. Proceso elástico entre antipartículas acoplado al campo electromagnético, de la ec.

(2.1.1), sustituimos el campo del fotón ec. (2.1.3) y la corriente elástica ec. (2.2.5)

$$\begin{aligned}
 H_{Ieant} &= e \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \\
 &\times \sum_{s,s'} \left(\bar{v}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu v_s(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} d_{s'}(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}) \right) [a_\mu(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] \\
 &= e \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{2p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \\
 &\times \sum_{s,s'} \left(\bar{v}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu v_s(\vec{p}) d_{s'}(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}) a_\mu(\vec{k}) e^{i(-\vec{p}+\vec{p}'+\vec{k})\cdot\vec{x}} \right. \\
 &\quad \left. + \bar{v}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu v_s(\vec{p}) d_{s'}(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}) a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{i(-\vec{p}+\vec{p}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} \right)
 \end{aligned} \tag{B.3.5}$$

que al integrar sobre dx se obtiene

$$\begin{aligned}
 H_{Ieant} &= e \int d^3p \left(\frac{m}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int d^3p' \left(\frac{m}{2p'^0}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \\
 &\times \sum_{s,s'} \left(\bar{v}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu v_s(\vec{p}) d_{s'}(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}) a_\mu(\vec{k}) \delta^{(3)}(-\vec{p}+\vec{p}'+\vec{k}) \right. \\
 &\quad \left. + \bar{v}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma^\mu v_s(\vec{p}) d_{s'}(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}) a_\mu^\dagger(\vec{k}) \delta^{(3)}(-\vec{p}+\vec{p}'-\vec{k}) \right)
 \end{aligned} \tag{B.3.6}$$

Las funciones de δ^3 muestran que si no se da la conservación de momento angular de cada proceso, no habrá contribución de ese proceso.

B.4. Reducción de las corrientes de cuarks en el límite no relativista

Dentro de las corrientes de se necesitan simplificaciones no relativistas por lo que a las componentes relevantes de los espinores de Dirac. Que se detallan a continuación:

1. Proceso elástico entre partículas.

$$j_{\mu,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') = \bar{u}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma_\mu u_s(\vec{p}) \tag{B.4.1}$$

Primero calculamos la componente $j_{0,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}')$ y por simple sustitución se obtiene:

$$\begin{aligned}
 j_{0,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') &= \bar{u}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma_0 u_s(\vec{p}) = u_{s'}^\dagger(\vec{p}') Q \gamma_0^2 u_s(\vec{p}) = u_{s'}^\dagger(\vec{p}') Q u_s(\vec{p}) \\
 &= \left(\frac{E'+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}'}{E'+m} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{E'+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\chi_{s'}^\dagger Q \chi_s + \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}'}{E'+m} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \chi_s \right)
 \end{aligned} \tag{B.4.2}$$

al tomar límites no relativistas podemos simplificar a

$$j_{0,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') \approx \chi_{s'}^\dagger Q \chi_s = Q \delta_{s,s'}. \quad (\text{B.4.3})$$

El proceso se repite para el caso vectorial de la siguiente forma

$$\begin{aligned} j_{k,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') &= \bar{u}_{s'}(\vec{p}') Q \gamma_k u_s(\vec{p}) = u_{s'}^\dagger(\vec{p}') Q \gamma_0 \gamma_k u_s(\vec{p}) \\ &= u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} Q u_s(\vec{p}) = \left(\frac{E'+m}{2m}\right)^{1/2} \\ &\times \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{E'+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \sigma_k \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \\ \sigma_k \chi_s \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{E'+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} Q \left(\chi_{s'}^\dagger \sigma_k \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s + \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \sigma_k \chi_s \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4.4})$$

haciendo las aproximaciones no relativistas se simplifica a

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{2m} Q \left(\chi_{s'}^\dagger \sigma_k \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_s + \chi_{s'}^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{p}' \sigma_k \chi_s \right) \\ &= \frac{1}{2m} Q \left(\chi_{s'}^\dagger \sigma_k \sigma_i p_i \chi_s + \chi_{s'}^\dagger \sigma_i p'_i \sigma_k \chi_s \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4.5})$$

Ahora es útil recordar la relaciones de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.4.6})$$

estas expresiones podemos encontrar lo siguiente

$$[\sigma_i, \sigma_j] + \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\sigma_i \sigma_j = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + 2\delta_{ij} \iff \sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \quad (\text{B.4.7})$$

con estas expresiones desarrollamos la última parte de la ec. (B.4.5)

$$\begin{aligned} j_{k,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') &= \frac{Q}{2m} \left(\chi_{s'}^\dagger \sigma_k \sigma_i p^i \chi_s + \chi_{s'}^\dagger \sigma_i p'^i \sigma_k \chi_s \right) \\ &= \frac{Q}{2m} \left(\chi_{s'}^\dagger (i \varepsilon_{kij} \sigma_j + \delta_{ki}) p^i \chi_s + \chi_{s'}^\dagger (i \varepsilon_{ikj} \sigma_j + \delta_{ik}) p'^i \chi_s \right) \\ &= \frac{Q}{2m} \left(\chi_{s'}^\dagger p^k \chi_s + \chi_{s'}^\dagger p'^k \chi_s + i \varepsilon_{kij} \chi_{s'}^\dagger \sigma_j p^i \chi_s + i \varepsilon_{ikj} \chi_{s'}^\dagger \sigma_j p'^i \chi_s \right) \\ &= \frac{Q}{2m} \left(\chi_{s'}^\dagger p^k \chi_s + \chi_{s'}^\dagger p'^k \chi_s + i \varepsilon_{kij} \left(-\chi_{s'}^\dagger \sigma_i p^j \chi_s + \chi_{s'}^\dagger \sigma_i p'^j \chi_s \right) \right) \\ &= \frac{Q}{2m} \left(\chi_{s'}^\dagger p^k \chi_s + \chi_{s'}^\dagger p'^k \chi_s + i \varepsilon_{kij} \left(\chi_{s'}^\dagger \sigma_i (p'^j - p^j) \chi_s \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4.8})$$

podemos escribir en forma vectorial

$$\begin{aligned} \vec{j}_{em,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') &= \frac{Q}{2m} \chi_{s'}^\dagger \left[(\vec{p} + \vec{p}') + i \vec{\sigma} \times (\vec{p}' - \vec{p}) \right] \chi_s \\ &= \frac{Q}{2m} \left[(\vec{p} + \vec{p}') \delta_{s,s'} + i \chi_{s'}^\dagger \vec{\sigma} \times (\vec{p}' - \vec{p}) \chi_s \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4.9})$$

2. Corriente de aniquilación.

Los procesos de aniquilación son descritos por la siguiente corriente de cuarks

$$j_{\mu,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') = \bar{v}_{s'}(\vec{p}') \gamma_{\mu} Q u_s(\vec{p}) \quad (\text{B.4.10})$$

donde v es el campo asociado a los anticuarks, y haciendo uso de la conjugación de carga podemos hallar la relación entre u y v dada por

$$v_s = \gamma_5 u_s \quad (\text{B.4.11})$$

la ec. (B.4.10) se modifica a

$$\begin{aligned} j_{\mu,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') &= u_{s'}^{\dagger}(\vec{p}') \gamma_5 \gamma_0 \gamma_{\mu} Q u_s(\vec{p}) \\ &= \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma_{\mu} \gamma_5 Q u_s(\vec{p}) \end{aligned} \quad (\text{B.4.12})$$

donde en la última línea se ha usado la ec.(A.3.16) junto con la relación

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} = 0 \quad (\text{B.4.13})$$

De la ec. (B.4.12), calculamos la componente 0

$$\begin{aligned} j_{0,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') &= \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma_0 \gamma_5 Q u_s(\vec{p}) = \left(\frac{E'+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \\ &\times \left(\chi_{s'}^{\dagger} \quad \chi_{s'}^{\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \right) \gamma_0 \gamma_0 \gamma_5 Q \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{E'+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\chi_{s'}^{\dagger} \quad \chi_{s'}^{\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \right) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{E'+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\chi_{s'}^{\dagger} \quad \chi_{s'}^{\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \right) Q \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{E'+m}{2m}\right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} Q \left(\chi_{s'}^{\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s + \chi_{s'}^{\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \chi_s \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4.14})$$

tomando los límites no relativistas se reduce a

$$j_{0,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') \approx Q \left(\chi_{s'}^{\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{p}')}{2m} \chi_s \right) = Q \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{p}')}{2m} \delta_{s,s'} \quad (\text{B.4.15})$$

Se ha usado

$$\gamma_0^2 = I_{4 \times 4} \quad (\text{B.4.16})$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4.17})$$

Siguiendo este proceso continuamos con la componente k

$$\begin{aligned}
j_{k,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') &= \bar{u}_t(\vec{p}') \gamma_k \gamma_5 Q u_s(\vec{p}) \\
&= \left(\frac{E'+m}{2m} \right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \end{pmatrix} \gamma_0 \gamma_k \gamma_5 Q \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{E'+m}{2m} \right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \quad (\text{B.4.18}) \\
&= \left(\frac{E'+m}{2m} \right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \sigma_k \chi_s \\ \sigma_k \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{E'+m}{2m} \right)^{1/2} \left(\frac{E+m}{2m} \right)^{1/2} Q \left(\chi_{s'}^\dagger \sigma_k \chi_s + \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E'+m} \sigma_k \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \right)
\end{aligned}$$

que simplificamos usando límites no relativistas

$$j_{k,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') \approx Q \left(\chi_{s'}^\dagger \sigma_k \chi_s \right). \quad (\text{B.4.19})$$

3. Corriente de creación de un par.

Usando la def.

$$\begin{aligned}
j_{\mu,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') &= \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma_\mu Q v_s(\vec{p}) \\
&= \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma_\mu \gamma_5 Q u_s(\vec{p})
\end{aligned} \quad (\text{B.4.20})$$

donde en la última línea se usó la ec. (B.4.11). Observamos que con esa sustitución se reduce a la ec. (B.4.12), así las reducciones no relativistas de la corriente de creación de un par son

$$j_{0,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') \approx Q \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + \vec{p}')}{2m} \delta_{s,s'} \quad (\text{B.4.21})$$

$$j_{k,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') \approx Q \left(\chi_{s'}^\dagger \sigma_k \chi_s \right). \quad (\text{B.4.22})$$

4. Corriente elástica entre antipartículas.

Del proceso de dispersión de antipartículas se tiene

$$\begin{aligned}
j_{\mu,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') &= \bar{v}_{s'}(\vec{p}') \gamma_\mu Q v_s(\vec{p}) = u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma_5 \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 Q u_s(\vec{p}) \\
&= u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5^2 Q u_s(\vec{p}) = \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma_\mu Q u_s(\vec{p})
\end{aligned} \quad (\text{B.4.23})$$

donde se ha usado la ec. (B.4.11) y

$$\gamma_5^2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = I_{4 \times 4} \quad (\text{B.4.24})$$

la corriente de elástica de antipartículas se ha reducido a la ec. (B.4.1). Con las mismas reducciones no relativistas se escriben de la siguiente forma

$$j_{0,s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') \approx Q\delta_{s,s'} \quad (\text{B.4.25})$$

$$\vec{j}_{s,s'}(\vec{p}, \vec{p}') \approx \frac{Q}{2m} \left((\vec{p} + \vec{p}')\delta_{s,s'} + i\chi_{s'}^\dagger \vec{\sigma} \times (\vec{p}' - \vec{p})\chi_s \right). \quad (\text{B.4.26})$$

Apéndice C

Amplitud 3P_0

Las amplitudes de transición corresponden al traslape usual de

$$\langle BC|T|A\rangle = \delta(\vec{K}_0)M_{A\rightarrow BC} \quad (\text{C.0.1})$$

Esta amplitud de transición no es una invariante Galileana ya que contiene el factor $\delta(\vec{K}_0)$, donde \vec{K}_0 es movimiento del centro de masa del barión A y está medido en un sistema de referencia. Por lo que el cálculo de la amplitud depende del sistema de referencia que se tome. Empíricamente se sabe que el mejor sistema de referencia es en el cual A está en reposo, con $\vec{K}_0 = \vec{0}$. La conservación del momento da el factor de $\delta(\vec{K}_0)$ en la amplitud.

$$M_{A\rightarrow BC}(a, b, c) = \text{sgn}(S)6g\frac{\hbar c}{b}M_{A\rightarrow BC}^S(a, b, c) \quad (\text{C.0.2})$$

donde sgn es la función signo y S la proyección de J cuando se toma un desarrollo en ondas parciales. Para este caso se considera la siguiente expresión para $M_{A\rightarrow BC}^S(a, b, c)$ de la referencia [17].

$$\begin{aligned} M_{A\rightarrow BC}^S(a, b, c) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(-1)^{l+L_a}\delta_{C_d,3}\delta_{C_g,3}\delta_{U,D}\delta_{V,G}\mathcal{F}(ABC, abc)\mathcal{R}(UV, DG; S_a) \quad (\text{C.0.3}) \\ &\times \sum_{S_{bc}}(-1)^{S_a-S_{bc}} \begin{bmatrix} J_d & \frac{1}{2} & S_b \\ J_g & \frac{1}{2} & S_c \\ S_a & 1 & S_{bc} \end{bmatrix} \times \sum_{L_{bc}}(-1)^{L_{bc}} \begin{bmatrix} S_b & L_b & J_b \\ S_c & L_c & J_c \\ S_{bc} & L_{bc} & J_{bc} \end{bmatrix} \\ &\times \sum_L \hat{L}^2 \begin{Bmatrix} S_a & L_a & J_a \\ L & S_{bc} & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{bc} & L_{bc} & J_{bc} \\ l & J_a & L \end{Bmatrix} \varepsilon(L_b, L_c, L_{bc}, l, L_a, L, k_0) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\varepsilon(L_b, L_c, L_{bc}, l, L_a, L, k_0) &= (-1)^{L_{bc}} \frac{1}{2} \frac{\exp(-F^2 k_0^2)}{G^{L_a+L_b+L_c+4}} N_a N_b^* N_c^* \quad (\text{C.0.4}) \\
&\times \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} C_{l_1}^{L_b} C_{l_2}^{L_c} C_{l_3}^1 C_{l_4}^{L_a} \left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{l_1} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^{l_2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}x - 1\right)^{l_3} x^{l_4} \\
&\times \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{l_2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{l_3} \sum_{l_{12}, l_5, l_6, l_7, l_8} (-1)^{l_{12}+l_6} \frac{\hat{l}_5}{\hat{L}} \begin{bmatrix} l_1 & l'_1 & L_b \\ l_2 & l'_2 & L_c \\ l_{12} & l_6 & L_{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_3 & l'_3 & 1 \\ l_4 & l'_4 & L_a \\ l_7 & l_8 & L \end{bmatrix} \\
&\times \left\{ \begin{matrix} l & l_{12} & l_5 \\ l_6 & L & L_{bc} \end{matrix} \right\} B_{l_1 l_2}^{l_{12}} B_{l_{12} l_5}^{l_5} B_{l'_1 l'_2}^{l_6} B_{l_3 l_4}^{l_7} B_{l'_3 l'_4}^{l_8} \sum_{\lambda, \mu, \nu} D_{\lambda \mu \nu}(x) I_\nu(l_5, l_6, l_7, l_8; L) \\
&\times \left(\frac{l'_1 + l'_2 + l'_3 + l'_4 + 2\mu + \nu + 1}{2}\right)! k_0^{l_1+l_2+l_3+l_4+2\lambda+\nu} / G^{-l_1-l_2-l_3-l_4+2\mu+\nu}
\end{aligned}$$

se ha usado

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \hat{c} \hat{f} \hat{g} \hat{h} \hat{i} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad (\text{C.0.5})$$

con $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Bmatrix}$ los símbolos 9-j y $\hat{J} = \sqrt{2J+1}$, junto

$$C_l^L = \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)!}{(2l+1)![2(L-l)+1]!}} \quad (\text{C.0.6})$$

$$B_{l_1, l_2}^l = \frac{(-1)^l}{\sqrt{4\pi}} \hat{l}_1 \hat{l}_2 \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.0.7})$$

con las definiciones $l'_1 = L_b - l_1$, $l'_2 = L_c - l_2$, $l'_3 = 1 - l_3$ y $l'_4 = L_a - l_4$, los coeficientes restantes son

$$G^2 = \frac{1}{2} \left(R_a^2 + R_b^2 + \frac{2}{3} R_c^2 \right) \quad (\text{C.0.8})$$

$$x = \frac{2R_b^2 + R_c^2}{2\sqrt{6}G^2} \quad (\text{C.0.9})$$

$$F^2 = \frac{1}{2} \left[R_a^2 x^2 + R_b^2 \left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + R_c^2 \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2 \right] \quad (\text{C.0.10})$$

R_a^2 , R_b^2 , R_c^2 los radios de los bariones A , B y el mesón C respectivamente.

Una simplificación ocurre cuando los hadrones B (barión final) y C (mesón) están el estado base, es decir cuando no tiene momento angular orbital, entonces $L_b = L_c = 0$,

pero con la posibilidad de excitaciones orbitales en el hadrón inicial A (barión inicial). También se tiene que $J_b = S_b$, $J_c = S_c$, $J_{bc} = S_{bc}$, $l_1 = l_2 = l'_1 = l'_2 = l_{12} = l_6 = L_{bc} = 0$ y $l_5 = L = l$. Además de $L_b = L_c = 0$ es que $D_{\lambda\mu\nu} = \delta_{0,\lambda}\delta_{0,\mu}\delta_{0,\nu}$, hace que también $l_8 = l_6 = 0$, $l_7 = l_5 = L$ y $l'_3 = l'_4$. Entoces para este caso ec. (C.0.3) se reduce a

$$M_{A \rightarrow BC}(a, b, c) = \frac{1}{3}(-1)^{L_a+S_a+J_a} \hat{S}_a \hat{S}_b \hat{S}_c \hat{S}_{bc} \hat{l} \mathcal{F} \mathcal{R} \quad (\text{C.0.11})$$

$$\times \begin{Bmatrix} J_d & \frac{1}{2} & S_b \\ J_g & \frac{1}{2} & S_c \\ S_a & 1 & S_{bc} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_a & L_a & J_a \\ l & S_{bc} & 1 \end{Bmatrix} \varepsilon(l, L_a, k_0),$$

con

$$\varepsilon(l, L_a, k_0) = N_a N_b^* N_c^* (-1)^{L_a} \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}} \frac{k_0^{L_a-1} \exp(-F^2 k_0^2)}{G^5} \hat{L}_a \quad (\text{C.0.12})$$

$$\times \sum_{l_3=0}^1 (-1)^{l_3} \left[\frac{3!(2L_a+1)!}{(2l_3)!(2L_a-2l_3)!} \right]^{1/2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} x - 1 \right)^{l_3} x^{L_a-l_3}$$

$$\times \begin{Bmatrix} 1 & l_3 & l'_3 \\ L_a-l'_3 & L_a & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & L_a-l'_3 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \left(\frac{3-2l_3}{2} \right)! \frac{(Gk_0)^{2l_3}}{(3-2l_3)!}$$

y $l'_3 = 1 - l_3$. En nuestro caso de interés, los bariones A, B y el mesón C están en reposo, por lo que la parte orbital contenida en la función $\varepsilon(l, L_a, k_0)$ se simplifica a $\varepsilon(l = 1, 0, k_0)$ para la cual la ec. (C.0.12)

$$\varepsilon(l, L_a, k_0) = \frac{1}{8} N_a N_b^* N_c^* \left(\sqrt{\frac{2}{3}} x - 1 \right) \frac{k_0 \exp(-F^2 k_0^2)}{G^3}. \quad (\text{C.0.13})$$

Si usamos las funciones de onda de oscilador armónico, los radios de los bariones iguales ($R_A = R_b = R$) y diferente para los mesones $R_c = R_M$ obtenemos:

$$N_a N_b^* N_c^* = 8 \left(\frac{R^4 R_M^2}{\pi} \right)^{3/4}. \quad (\text{C.0.14})$$

La expresión final para $\varepsilon(l, L_a, k_0)$ es:

$$\varepsilon(l = 1, 0, k_0) = -\frac{3^{3/2}}{2} \left(\frac{R^4 R_M^2}{\pi} \right)^{3/4} \frac{4R^2 + R_M^2}{(3R^2 + R_M^2)^{5/2}} k_0 e^{-F^2 k_0^2} \quad (\text{C.0.15})$$

$$F^2 = \frac{12R^4 + 5R^2 R_M^2}{24(3R^2 + R_M^2)} \quad (\text{C.0.16})$$

Bibliografía

- [1] F.E. Close, *An Introduction To Quarks and Partons*. London: Academic Press. (1979)
- [2] A. Hosaka and H. Toki. *Quarks, Baryons and Chiral Symmetry* World Scientific (2001).
- [3] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* 125, 1067 (1962).
- [4] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, *Phys. Lett.* 47B, 365 (1973).
- [5] J. M. Richard [arXiv:1205.4326](https://arxiv.org/abs/1205.4326) (2012).
- [6] R. Bijker, F. Iachello and A. Leviatan, *Phys. Rev. D* 55, 2862 (1997).
- [7] I.G. Aznauryan et al, *Phys. Rev. C* 78, 045209 (2008).
- [8] M. Aiello, M. Ferraris, M.M. Giannini, M. Pizzo and E. Santopinto, *Phys. Lett. B* 387, 215 (1996).
- [9] B. Juliá-Díaz, T.-S. H. Lee, T. Sato and L.C. Smith, *Phys. Rev. C* 75, 0015205 (2007).
- [10] S. Kumano, *Phys. Rep.* 303, 183 (1998).
- [11] J. Speth and A.W. Thomas, *Adv. Nucl. Phys.* 24, 83 (1998).
- [12] P. Zenczykowski, *Ann. Phys. (N.Y.)* 169, 453 (1986).
- [13] P. Geiger and N. Isgur, *Phys. Rev. D* 41, 1595 (1990).
- [14] P. Geiger and N. Isgur, *Phys. Rev. D* 47, 5050 (1993).
- [15] P. Geiger and N. Isgur, *Phys. Rev. D* 55, 299 (1997).
- [16] R. Bijker and E. Santopinto, *Phys. Rev. C* 80, 065210 (2009).
- [17] W. Roberts and B. Silvestre-Brac, *Few-Body Systems* 11, 171 (1992).

-
- [18] A. Le Yaouanc, Ll. Oliver, O. Pène and J.-C. Raynal, *Hadron Transitions in the Quark Model*. Gordon and Breach Science Publishers (1988).
- [19] D. Keller et al, *Phys. Rev. D* 83, 072004(2011)
- [20] D. Keller et al, *Phys. Rev. D* 85,052004 (2012)
- [21] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *J. Phys. G* 37, 075021 (2010) and 2011 partial update for the 2012 edition
- [22] Q. B. Li and D. O. Riska, *Nucl. Phys. A* 766 (2006).
- [23] N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev. D* 20, 1191 (1979).
- [24] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals series and products*, Academic Press 1965.
- [25] R. Bijker F. Iachello and Leviatan, *Ann. Phys. (N.Y)* 284, 89 (2000).
- [26] L. Yu, X.L. Chen, W.Z. Deng, and S.L. Zhu, *Phys. Rev. D* 73, 114001 (2006).
- [27] S. Capstick and W. Roberts, *Phys. Rev. D* 49, 4570 (1994).
- [28] Q. B. Li and D. O. Riska, *Phys. Rev. C* 74, 015202 (2006)
- [29] C. S. An, B. Saghai, S. G. Yuan and Jun He, *Phys. Rev. C* 81, 045203 (2010)
- [30] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company (1995).
- [31] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill (1964).